

Diffraction
Structure des images

Influence de la cohérence de la lumière

par
ANDRE MARECNAL
et
MAURICE FRANÇON

Éditions de la Revue d'Optique Théorique
et Instrumentale

Paris
1960

А. МАРЕШАЛЬ, М. ФРАНСОН

**СТРУКТУРА
ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ**

**ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ
И ВЛИЯНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ СВЕТА**

Перевод с французского
Н. Н. ГУБЕЛЯ

Под редакцией
Г. Г. СЛЮСАРЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1964

Предисловие редактора перевода

Вопрос о качестве изображения, получаемого при помощи оптических систем (микроскопов, телескопов, фотообъективов и т. п.), приобрел в настоящее время большое практическое значение, поскольку разрешающая сила оптических приборов уже стала близка к предельно возможной.

Настоящая книга, написанная известными французскими специалистами Маршалем и Франсоном, является практически единственной в мировой литературе на эту тему. В ней собран очень интересный и разнообразный материал по распределению света в изображениях сложных объектов. Рассмотрено влияние на изображение различных условий освещения (когерентного, частично когерентного и некогерентного). Разбирается влияние aberrаций и обсуждаются их допустимые значения. Описан ряд оригинальных способов повышения разрешающей способности, даны ценные рекомендации по решению важных для практики задач.

Книга, несомненно, будет полезна оптикам — физикам и инженерам, конструкторам оптических систем и вычислителям, а также лицам, работающим с такими системами и желающим расширить свой научный кругозор.

Оптические приборы достигли сейчас высокой степени совершенства, и их свойства в отношении разрешающей силы приближаются к предельно возможным. Современные объективы микроскопа, например, обладают апертурным углом, синус которого близок к единице, а разрешающая способность их уже близка к теоретически максимальной величине. Единственное, на что можно еще рассчитывать, — это улучшение качества изображения, что приводит к увеличению контраста последнего и к возможности различать больше подробностей на объекте. Иногда детали предмета не видны из-за малого контраста между объектом и фоном; этот контраст можно усилить особым приемом, основанным на волновой природе света.

Много внимания за последние два десятилетия было уделено вопросу оценки качества изображения. Старый критерий разрешающей силы, определяемой по мирам Фуко высокой контрастности, удобный по простоте применения и позволяющий оценивать качество изображения (для определенной части поля) одним числом, оказался непригодным, так как при одинаковой разрешающей силе качество изображений, даваемых различными объективами, весьма отличается друг от друга.

Лучше всего было бы оценивать качество изображения по распределению освещенности в изображении точки, поскольку это позволяет (по крайней мере теоретически) вычислить распределение света в изображении любого объекта, но такой метод практически неприменим, так как требует определения слишком большого числа параметров.

В настоящее время большинством исследователей принята некоторая промежуточная «частотно-контрастная»

характеристика. Качество изображения при этом определяется функцией, связывающей контраст между самыми темными и самыми светлыми местами в изображении мира Фуко с частотой штрихов этой мира.

Перечисленные вопросы, а также многие другие, близкие к ним, например вопрос о когерентности пучков и о влиянии последней на образование изображения, требуют для своего изучения применения довольно своеобразного математического аппарата, важную часть которого составляют гармонический анализ и преобразования Фурье.

Как в отечественной литературе, так и в иностранной достаточно полной монографии по вопросу о качестве изображения, даваемого оптическими системами, найти нельзя. Весь известный материал, весьма обширный, но пестрый и разнородный, разбросан по большому числу журналов, специальных сборников, отчетов и трудно доступен лицам, желающим получить достаточно полное представление об уже известных вещах.

Книга известных французских специалистов Марешаля и Франсона «Структура оптического изображения» восполняет имеющийся пробел в литературе, посвященной оптическим системам. В этой книге изложена в сжатом (иногда даже чрезмерно), но наглядном виде теория образования изображений оптическими приборами, приведен математический аппарат, необходимый для проведения вычислений, решен ряд конкретных задач, связанных с распределением света в изображениях сложных объектов при различных условиях освещения (когерентном, частично когерентном и некогерентном), и приведен довольно разнообразный иллюстративный материал, относящийся к этому вопросу.

Особенно интересны гл. 7 о частичной когерентности, содержащая новые результаты, относящиеся к слабо контрастным объектам, гл. 8 и 9, в которых рассматривается влияние аберраций на качество изображений и вытекающие отсюда значения допустимых аберраций. Весьма ценными являются описания ряда оригинальных способов повышения разрешающей способности и улучшения качества изображения, а также гл. 10, где авторы излагают свои довольно скептические соображения о попытках при-

менить теорию информации к оценке качества этих изображений.

Книга, правда, не лишена недостатков. Она написана несколько небрежно: имеются неясности в изложении, встречаются пропуски в выводах и опечатки. Поэтому в переводе пришлось иногда отходить от текста с целью сделать его более понятным.

Авторы часто ссылаются на составленный одним из них (Марешалем) не переведенный на русский язык труд (A. M a r é c h a l, *Imagerie géométrique. Aberrations*, Paris, 1952), несколько экземпляров которого имеется в наших библиотеках. С целью избавить читателя от необходимости прибегать к этому труднодоступному произведению в примечаниях приведены необходимые для понимания текста доказательства или ссылки на отечественные источники.

Г. Слюсарев

Введение

Как известно, философы древности предполагали, что свет представляет собой лучи, исходящие из глаз; эти лучи определенным образом «ощупывают» объекты и дают наблюдателю представление об их существовании. Эта концепция господствовала в средние века, но в конце концов она была заменена гипотезой о переносе энергии от источника света к объекту, а затем от объекта к глазу, согласно закону, который позже был установлен Снеллем, Декартом и Ферма. Природа этого переноса была объяснена двумя теориями, которые почти одновременно были развиты Ньютоном и Гюйгенсом. А именно приблизительно в 1700 г. Ньютон опубликовал свою корпускулярную теорию света, согласно которой источник света испускает мельчайшие частицы, перемещающиеся по прямым линиям с чрезвычайно большими скоростями; следовательно, вся геометрическая оптика могла быть объяснена простейшим образом, если ограничиться изучением хода световых лучей. По мере развития науки, когда стали проникать во внутреннюю структуру явлений, оказалось необходимым ввести понятие о волновой природе света. Первая гипотеза в этом духе была высказана в «Трактате о свете» Гюйгенса, появившемся в 1690 г. Гюйгенс рассматривал световые явления как результат распространения волн, подобных тем, которые наблюдаются при распространении звуковых волн в жидкостях и газах. Только спустя 50 лет у Эйлера возникла идея о периодичности световых явлений; известно, насколько успешно эта новая гипотеза помогла Френелю объяснить явление дифракции.

Однако как Гюйгенс, так и Френель под распространением энергии понимали чисто «механическое» явление. Эта гипотеза вовсе не уменьшила плодотворность идей Фре-

нея, однако она привела к противоречию, которое было вскрыто Максвеллом в 1867 г. Оказалось, что свет необходимо рассматривать как единство двух одновременно распространяющихся полей — электрического и магнитного. Но в свою очередь теория Максвелла оказалась бессильной объяснить некоторые явления, относящиеся к взаимодействию между светом и веществом. Эти трудности заставили вернуться к теории, напоминающей по сути своей теорию истечения, и ввести понятие фотона. Сначала возникла старая теория квантов, роль которой в интерпретации распространения тепловых лучей, фотоэлектрического эффекта, испускания спектров и т. д. известна, затем развилась волновая механика, которая открыла дорогу к синтезу всех световых явлений.

Мы здесь не будем заниматься изучением квантовой оптики, а также изучением действия источников или приемников света. Положений электромагнитной теории будет вполне достаточно для развития наших исследований, в частности они позволят получить выражение, уточняющее принцип Гюйгенса.

Теоретическое исследование образования оптического изображения началось с изучения структуры изображения точки. Эри в 1864 г. показал, что изображением точки, даваемым идеальным оптическим прибором, является дифракционное пятно, радиус которого можно вычислить в зависимости от длины волны и углового отверстия пучка. В 1879 г. Релей расширил область применения результата Эри, показав на ряде конкретных примеров, что идеальным (безабберационным) оптическим прибором можно считать любой оптический прибор, в котором деформация волновой поверхности не превышает $\lambda/4$. Построением результирующего вектора колебаний в центре пятна рассеяния с помощью векторного метода Френеля довольно легко показать, что можно допустить отклонение фазы порядка $\pi/2$ без заметного изменения длины результирующего вектора. Интенсивность центрального максимума дифракционного пятна уменьшается всего лишь на 20%, если волновая поверхность заключена между сферами, расположенными на расстоянии $\lambda/4$ друг от друга; это и есть знаменитое правило четверти волны Релея, которое мы рассмотрим в гл. 8. Присутствие аббераций, вызывающих

ослабление центрального дифракционного максимума, приводит в то же время к усилению дифракционных колец. В результате этого заметно ухудшается качество изображения: световая энергия рассеивается, и изображение все более приближается к виду, определяемому геометрической оптикой. Изменение дифракционного пятна при увеличении отклонения формы волновой поверхности от идеальной сферической представляет довольно сложную проблему. Для изучения этого явления можно пользоваться теорией рядов, если абберации малы, или, наоборот, применять асимптотические ряды, если абберации велики; но эти математические приемы мало пригодны для средних аббераций. Впрочем совокупность результатов, полученных с помощью тех или иных методов, дает достаточно точное представление об искажении изображения.

В основе наиболее важных успехов теории изображения следует отметить идею применения преобразования Фурье, которой мы обязаны, в частности, Дюффье. Преобразование Фурье переводит на математический язык природу явления дифракции: переход от распределения амплитуд на зрачке к распределению амплитуд на изображении представляет собой задачу гармонического анализа, сводящуюся к разложению амплитуд на зрачке на синусоидальные составляющие. Если рассмотреть одну из этих синусоидальных составляющих, то распределение амплитуд на изображении можно представить как результат интерференции двух волн, ориентированных под малым углом друг к другу. Этим двум волнам на изображении соответствуют как бы два «точечных источника». Иначе говоря, одной синусоидальной составляющей на зрачке соответствуют на изображении два сигнала, симметричных относительно начала координат и находящихся на расстоянии, пропорциональном «пространственной частоте» синусоидальной составляющей на зрачке (т. е. величине, обратной периоду этой синусоиды). Рассмотрением этих вопросов мы займемся в конце гл. 2.

Преобразование Фурье вводится также и по другой причине. Образование изображения протяженного объекта может быть изучено в предположении, что это изображение является результатом суперпозиции изображений различных точек объекта. Такая операция очень просто вы-

ражается на математическом языке как операция свертки функций, приложенная к закону излучения данного объекта и к закону распределения света в изображении точки. Можно показать также, что эта операция может быть определена на языке преобразования Фурье так: преобразование Фурье для изображения равно произведению преобразований Фурье для объекта и для пятна рассеяния оптического инструмента. Иначе говоря, возникновение оптического изображения можно представить себе следующим образом. Излучение объекта может быть представлено в виде разложения по синусоидальным составляющим по аналогии с тем явлением, которое легко наблюдать, фотографируя с самолета волны на поверхности моря. Другими словами, любой объект может всегда рассматриваться как наложение (суперпозиция) некоторой бесконечной системы волн, каждая составляющая которой может быть охарактеризована:

ориентацией (углом) θ на плоскости,
«пространственной частотой» $1/p$, равной величине,
обратной периоду p волны,
амплитудой, зависящей от $1/p$, θ и от природы
объекта.

Оптический инструмент перенесет каждую из этих составляющих с коэффициентом переноса в виде функции от θ и $1/p$, и изображение, следовательно, будет состоять из наложения этих составляющих, каждая из которых более или менее ослаблена. Отметим прямую аналогию между этим методом и техническими приемами, используемыми в акустике или электротехнике. Например, сложный ток, изменяющийся во времени, переносится по электроакустической цепи с помощью аналогичного механизма — каждая синусоидальная составляющая (на сей раз как функция времени) переносится по цепи с амплитудой, зависящей от ее частоты. Чтобы перейти от электроакустики к оптике, достаточно единственную переменную — время — заменить двумя переменными, а именно координатами точки на плоскости объекта. Очевидно, что эта точка зрения позволила радиоинженерам и оптикам найти общий язык, и, в частности, привела к разработке различных узлов телевизионной аппаратуры.

Остается, наконец, уточнить, какова природа описанного выше закона фильтрации частот в оптическом приборе. Можно показать, что этот закон остается всегда типа закона пропускания низких частот, поскольку существует такая определенная частота сигнала, выше которой сигнал не может быть передан оптическим прибором. Этот предельный период $\lambda/2\alpha'$ почти равен наименьшему радиусу дифракционного пятна и очень просто выражается (здесь α' — половина углового отверстия пучка, образующего изображение).

Для специалистов по расчету и конструированию оптических приборов представляет, естественно, большой интерес влияние аберраций на указанный выше закон фильтрации частот. Оказывается, что это влияние ничтожно для очень малых частот (плохой оптический прибор может разрешать периодические структуры с большим периодом), а также для частот, близких к наибольшей частоте (предел разрешения изменяется очень мало), но оно довольно велико для промежуточных частот. Иначе говоря, изображение мира с частотой, равной, например, половине предельной частоты, весьма быстро теряет контраст с ростом аберраций. Поэтому правильное заключение о качестве оптической системы можно сделать только путем построения кривой изменения контраста в зависимости от пространственной частоты — этот способ оценки, видимо, начинает развиваться и будет применяться в течение ближайших лет.

Все приведенные выше рассуждения справедливы только для объектов, элементы которых излучают колебания, некогерентные между собой. Если же использовать, как, например, в микроскопе, соответствующий вспомогательный источник освещения, то можно получить колебания, абсолютно когерентные между собой. Известно, что эта возможность используется главным образом для визуального измерения незначительных изменений оптической плотности препаратов в методе фазового контраста. Этому вопросу будет посвящена особая глава.

В действительности когерентность лучей света в микроскопе никогда не является совершенной. Для этого необходимо, чтобы размеры источника были весьма малы, но это привело бы к недостаточной освещенности изобра-

жения. Изучение образования изображения в микроскопе в случае, когда размерами отверстия конденсора пренебречь нельзя, привело в последнее время к новым результатам. Оно составляет предмет теории частичной когерентности. Эта теория, которой мы будем заниматься в гл. 7, является на первый взгляд сложной, но приводит в конечном итоге к весьма простым результатам в довольно часто встречающемся случае, а именно когда объект имеет слабый контраст.

Наконец, приложения полученных результатов, помещенных в гл. 11, дают возможность показать, что математические выкладки, которые мы старались выполнять с достаточной полнотой и которые зачастую довольно сложны, приводят к новой и плодотворной точке зрения на некоторые практические задачи, решение которых до сих пор было недостаточно точным. Мы старались представить эти приложения в таком виде, чтобы они оказались понятными без предварительного подробного изучения теоретических выводов. Мы надеемся, что читатель, даже если он стеснен во времени, извлечет из чтения определенную пользу.

Считаем своим долгом горячо поблагодарить Каналс-Фрау и Сланского, которые охотно взяли на себя редактирование наиболее трудной части гл. 7 о частичной когерентности, а также Арсака и Ломана, с которыми мы вели плодотворные дискуссии.

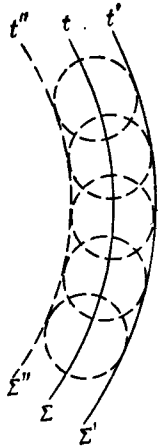
Часть первая
ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Принцип Гюйгенса — Френеля

§ 1. Различные формулировки принципа Гюйгенса

Полезно напомнить прежде всего идеи самого Гюйгенса (дополненные некоторыми гипотезами), которые были использованы Френелем при построении теории дифракции. Для объяснения распространения света Гюйгенс представлял себе следующий механизм маятников, по-видимому, изучением распространения механических колебаний (например, рябь на воде). Рассмотрим возмущение, которое достигло в момент времени t некоторой поверхности Σ (волновой поверхности). Поскольку распространение вызывается действием каждой из точек на соседние, вполне естественно предположить, что мы в состоянии узнать поведение возмущения в дальнейшем, если нам известно его состояние в момент времени t , принятое за начальное состояние (волновая поверхность). Иначе говоря, можно ничего не знать об источнике возмущения, а вполне достаточно иметь сведения только о состоянии возмущения в начальный момент. Это приводит к рассмотрению каждого элемента поверхности Σ как некоторого вторичного источника (в однородной среде), испускающего сферическую волну (фиг. 1). Заменяем теперь единственный источник S множеством источников, расположенных на волновой поверхности Σ . Волновая поверхность Σ' , соответствующая времени $t' > t$, должна всюду быть на одинаковом расстоянии от поверхности Σ , т. е. должна являться *огibaющей* всех сферических волн, исходящих из каждой точки Σ . Гюйгенс и принимал за механизм распространения это последовательное воздействие на различные точки пространства. Глубокая содержательность этой точки зрения обнаружилась, однако, лишь когда Френель после некоторых уточнений использовал ее для вычисления дифракции.

Френель, в частности, изучил случай колебаний, имеющих синусоидальную природу. Он предположил, что вторичные источники, расположенные на поверхности Σ , имеют в точности ту же фазу, которая соответствует состоянию колебания этой волновой поверхности Σ (позднее оказалось необходимым ввести опережение фазы на $\pi/2$). Физический анализ явления позволяет предположить, что колебание в некоторой точке Σ' можно выразить



Фиг. 1.

математически в виде суммы элементарных колебаний, посылаемых из различных точек Σ , причем каждое колебание приходит в фазе, определяемой оптическим путем между точкой на Σ и соответствующей точкой на Σ' . Предположим далее, как это делал и Френель, что амплитуду колебаний, посылаемых каждым из вторичных источников, расположенным на расстоянии r , можно считать обратно пропорциональной r (т. е. что энергия изменяется пропорционально r^{-2} на больших расстояниях от источника). Известно, что эти предположения позволили Френелю построить теорию дифракции.

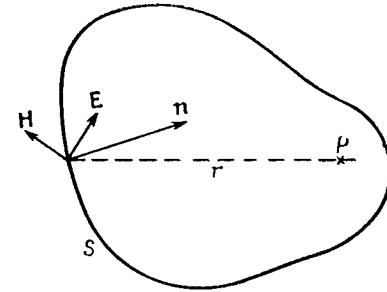
Математикам оставалось надлежащим образом оправдать этот наглядный принцип. Первая возникшая при этом трудность очевидна: принцип Гюйгенса—Френеля

в своей первоначальной форме неточен, поскольку он утверждает, что существуют колебания не только в направлении распространения (на Σ'), но также и на второй огибающей поверхности Σ'' (см. фиг. 1); физики, очевидно, исключают возможность существования такой идущей в обратном направлении волны. Эта трудность была устранена для скалярных волн (например, для звуковых волн в жидкостях) Кирхгофом. В его формуле имеются два слагаемых, которые либо складываются, либо взаимно уничтожаются в зависимости от того, исходят ли колебания от поверхности Σ' или Σ'' .

В случае электромагнитных волн проблема оказывается сложнее вследствие векторного характера их природы

и нужно требовать, чтобы формулировка принципа Гюйгенса удовлетворяла следующим условиям.

1. Если задано распределение полей \mathbf{E} и \mathbf{H} на замкнутой поверхности S , а также их производные вдоль нормали, то поля в некоторой точке P пространства можно



Фиг. 2.

выразить в виде суммы колебаний, посылаемых различными элементами S .

2. Если S является замкнутой поверхностью, окружающей источник, то полное электромагнитное поле в точках, лежащих между S и источником, должно быть равно нулю (не существует обратной волны).

3. Элементарные волны, дифрагированные каждым элементом поверхности S , должны являться истинными электромагнитными волнами.

Эти условия выражаются различными формулами, которые, очевидно, легко могут быть выведены одни из других. Особенно удобный вид этих формул был предложен Крозе, Дармуа и Дюраном (Croze, Darmois, Durand, 1949). Если \mathbf{E} и \mathbf{H} — поля на поверхности S , \mathbf{n} — нормаль к S в направлении распространения, r — расстояние от элемента поверхности до точки P (фиг. 2), в которой нужно определить составляющие полей, то можно положить ($k = 2\pi/\lambda$)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-ikr)}{r} = \frac{h(-kr)}{r}.$$

Через $h(x)$ мы обозначим функцию $\exp(ix)$, которую в дальнейшем будем встречать очень часто и назовем

функцией-винтом (см. также гл. 2, в которой уточняется это определение).

Введем векторы \mathbf{a} и \mathbf{a}' , определяемые соотношениями

$$4\pi\mathbf{a} = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0] \frac{h(-kr)}{r} \text{ и } 4\pi\mathbf{a}' = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0] \frac{h(-kr)}{r}. \quad (1.1)$$

Тогда электрическое поле, возбужденное в P , выразится в виде суммы полей \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' соответственно электрического и магнитного происхождения:

$$\mathbf{E}_P = \int \int_{(S)} (\mathbf{E}' + \mathbf{E}'') dS$$

при

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -ik\mathbf{a} + \frac{1}{ik} \text{grad div } \mathbf{a}, \\ \mathbf{E}'' &= \text{rot } \mathbf{a}'. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь мы не будем приводить вывода этих формул (установленных для случая пустого пространства), но покажем, как их можно преобразовать для наиболее часто встречающихся применений в оптике.

Отметим также, что принципу Гюйгенса можно придать форму, более общую и более симметричную по отношению к источнику и приемнику. Очень интересные выражения приведены Робье (J. Robieux, 1959); они могут быть использованы главным образом при изучении распространения коротких волн.

§ 2. Упрощенное выражение дифрагированного поля

В вопросах, которые мы будем излагать, в большинстве случаев мы основываемся на следующих предположениях.

1. Длина волны λ мала, в частности, по сравнению с длиной r (но фазовый множитель kr — величина большая).

2. S можно принимать за волновую поверхность Σ (или по крайней мере за поверхность, близкую к ней). \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 тогда касательны к ней (см. дополнение 1), и

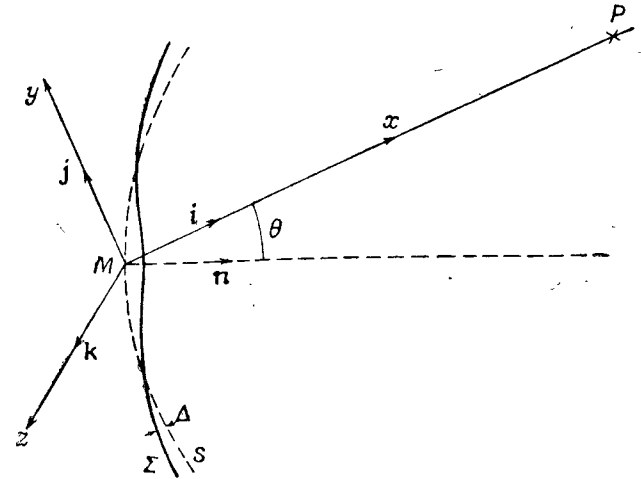
мы имеем

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{E}_0}{4\pi} \varphi(r) \text{ и } \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{H}_0}{4\pi} \varphi(r);$$

поскольку величина kr велика, можно, кроме того, написать¹⁾

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = -ik\varphi(r),$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) = -k^2\varphi(r).$$



Фиг. 3.

Пусть $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — три единичных вектора прямоугольной системы координат x, y, z , причем \mathbf{i} расположен вдоль линии MP (фиг. 3); тогда получим

$$\text{grad } r = \mathbf{i},$$

$$\text{div } \mathbf{a} = -\frac{\mathbf{E}_0}{4\pi} \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{ik}{4\pi} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{i} \varphi(r),$$

$$\text{grad div } \mathbf{a} = \frac{ik}{4\pi} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{i}) \varphi'(r) \text{ grad } r.$$

¹⁾ Величину r , находящуюся в знаменателе, можно считать постоянной. — Прим. ред.

Используя предыдущие соотношения, находим

$$\begin{aligned} -ik\mathbf{a} + \frac{1}{ik}\text{grad div}\mathbf{a} &= \\ &= \frac{ik}{4\pi}[\mathbf{E}_0 - (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}]\varphi(r) = \\ &= \frac{ik}{4\pi}\mathbf{E}_{0yz}\varphi(r), \end{aligned}$$

где \mathbf{E}_{0yz} — проекция \mathbf{E}_0 на плоскость yz .

С другой стороны, считая \mathbf{H}_0 постоянным, имеем

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{a}' &= \frac{1}{4\pi}\text{rot}[\mathbf{H}_0\varphi(r)] = \frac{1}{4\pi}[\text{grad}\varphi \times \mathbf{H}_0] = \\ &= -\frac{ik}{4\pi}\varphi(r)[\mathbf{i} \times \mathbf{H}_0]. \end{aligned}$$

Наконец, получаем выражение для дифрагированного поля:

$$\mathbf{E}_P = \frac{ik}{4\pi} \iint (\mathbf{E}_{0yz} + [\mathbf{H}_0 \times \mathbf{r}]) \varphi(r) dS. \quad (1.3)$$

Если точка P лежит весьма близко от нормали к Σ (световой луч), то при этих условиях можно принять, что $[\mathbf{H}_0 \times \mathbf{i}] = \mathbf{E}_0$. Отсюда можно вывести очень простое выражение для дифрагированного поля. Для этого, поскольку $r = R - \Delta$, где R — радиус поверхности сравнения S , предполагаемой сферической, напомним

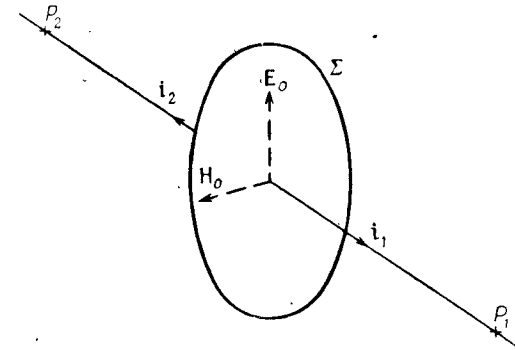
$$\varphi(r) = \frac{h(-kr)}{r} = \frac{h[-k(R-\Delta)]}{R-\Delta} \approx \frac{h(-kR)}{R} h(k\Delta).$$

Теперь имеем

$$\mathbf{E}_P \approx \frac{i}{\lambda} \frac{h(-kR)}{R} \iint \mathbf{E}_0 h(k\Delta) dS. \quad (1.4)$$

Так выражается в наиболее строгой форме принцип Гюйгенса для амплитуд дифрагированной волны вблизи центра почти сферической волны. Множители, стоящие под интегралом, соответствуют наглядной форме принципа Гюйгенса: поле в точке P получается как сумма полей \mathbf{E}_0 , распределенных на волновой поверхности, и изменение

фазы происходит в результате изменения оптического пути Δ . Присутствие коэффициента $1/R$ вполне естественно (уменьшение в R раз амплитуды дифрагированных волн необходимо для того, чтобы энергия оставалась постоянной в направлении распространения). Однако формула



Фиг. 4.

(1.4), кроме того, показывает, что если нужно найти точную фазу колебания в P , то необходимо (с помощью множителя i) ввести опережение на четверть периода — доказательство см. в дополнении 2.

Остается выразить с помощью формулы (1.4) дифрагированное поле в непосредственной близости от центра сферы сравнения, с которой сравнивают волновую поверхность: это дает возможность определить распределение амплитуд в плоскости изображения.

Полезно отметить, что, согласно выражению (1.4), максимум дифрагированного поля будет в направлении нормали к волновой поверхности Σ (это направление соответствует направлению распространения света), а равное нулю поле — в противоположном направлении. Действительно, в обоих случаях $\mathbf{E}_{0yz} = \mathbf{E}_0$; в точке P_1 , расположенной в направлении распространения света, мы имеем (фиг. 4)

$$\mathbf{E}_0 + [\mathbf{H}_0 \times \mathbf{i}_1] = 2\mathbf{E}_0,$$

тогда как в точке P_2

$$E_0 - [H_0 \times i_2] = 0$$

и, таким образом, обратная волна отсутствует. С другой стороны, легко показать, что модуль дифрагированного поля в направлении, составляющем угол θ с нормалью к волне (см. фиг. 3), изменяется как $1 + \cos \theta$ и не зависит от азимута φ плоскости, проходящей через нормаль к волне и направление MP . В этом легко убедиться непосредственно в случае, если MP перпендикулярно E_0 или H_0 .

Отметим также, что мы не привели здесь доказательства первоначального принципа Гюйгенса (принцип огибающей), однако мы займемся в дополнении 1 случаем коротких длин волн, когда последовательные волновые поверхности образуют семейство параллельных поверхностей. При этих условиях можно получить доказательство принципа, если найти огибающую дифрагированных волн от вторичных источников, расположенных на какой-либо волновой поверхности.

§ 3. Образование изображения в оптическом приборе

Начиная с работ Френеля и Фраунгофера, принято классифицировать явления дифракции следующим образом:

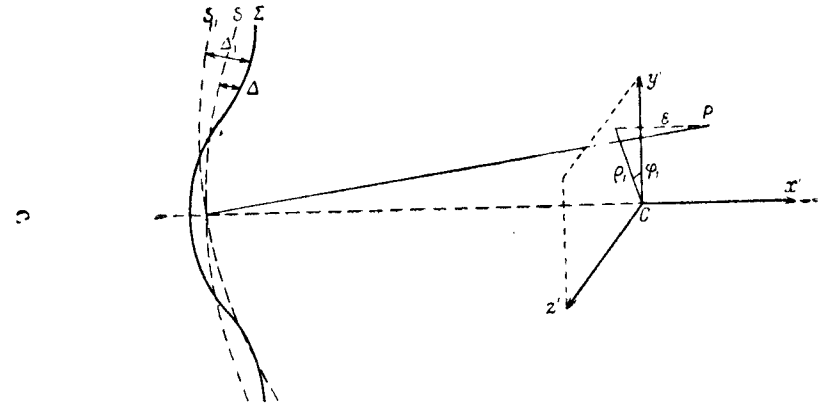
а) дифракционные явления на конечном расстоянии (Френель); это явления в тени от какого-либо препятствия (край экрана, нить и т. п.);

б) дифракционные явления на бесконечности (Фраунгофер); они названы так потому, что их расчет наиболее просто получается в случае плоской волны, ограниченной контуром какой-нибудь диафрагмы; при этом определяется амплитуда дифракции в некотором заданном направлении; на практике картина дифракции наблюдается в фокальной плоскости линзы, установленной на пути световых лучей.

Эта классификация, очевидно, не очень строга, так как можно достаточно хорошо наблюдать явления Фраунгофера и на конечном расстоянии. В действительности раз-

личие состоит в следующем: явления Френеля происходят вблизи края волновой поверхности и удалены от ее центра; явления Фраунгофера, наоборот, локализованы в соседстве с изображением, т. е. вблизи от центра волновой поверхности, и их следует изучать для определения качества изображения.

Оставляя в стороне случай оптических приборов, обладающих большими aberrациями, мы предположим, что



Фиг. 5.

оптический прибор дает почти сферическую волну Σ (см. фиг. 3), ограниченную контуром какого-либо зрачка. Поле E_0 , касательное к этой волновой поверхности (см. дополнение 1), предполагаем известным в любой точке Σ . Поле H_0 , также касательное к Σ , будет перпендикулярно полю E_0 . Если выбрать в качестве поверхности интегрирования заданную часть волновой поверхности, то можно выразить поле E_P с помощью формулы (1.4), если Δ предварительно определено (это уже вопрос геометрической оптики).

Заметим попутно, что выбранная нами поверхность интегрирования ограничена и не охватывает точку, в которой мы хотим определить поле. Можно показать, что это не меняет заметно результат, в частности, если замкнуть поверхность интегрирования элементом, достаточно удаленным от точки P .

Напомним, что можно довольно легко учесть смещение сферы сравнения. Как показано выше, величина Δ_1 по отношению к сфере S_1 определяется как функция величины Δ относительно сферы S следующим образом (фиг. 5):

$$\Delta_1 = \Delta + \varepsilon(1 - \cos \alpha') - \rho_1 \sin \alpha' \cos(\varphi - \varphi_1),$$

где ε , ρ_1 , φ_1 — цилиндрические координаты (начало в точке C) точки P , α' — угловое отверстие пучка в пространстве изображений. Таким образом, достаточно в формулу (1.4) подставить Δ_1 вместо Δ , чтобы получить поле, возникающее в точке P .

Мы получили, таким образом, выражение для электрического поля вблизи от «центра» почти сферической волны, требующее только знания величины поля E_0 на ней, т. е. амплитуду и направление поляризации колебаний, которые пересекают поверхность сравнения. Это выражение мы применим для изучения образования изображения в оптических приборах, имеющих любое угловое отверстие; однако, как мы увидим дальше, выражение значительно упрощается, если угловое отверстие невелико.

§ 4. Случай приборов с не очень большим относительным отверстием. Преобразование Фурье

Допустим, что угловое отверстие α' в пространстве изображений не очень велико (фиг. 6), так что $\cos \alpha'$ можно приближенно заменить единицей; практически это можно делать для большинства оптических приборов. Это приближение будет также полезно даже для приборов с отверстием f'/l (т. е. когда $\sin \alpha' = 0,5$).

Для заданного направления поляризации в пространстве объектов колебания E_0 будут практически эквивалентны и для интегрирования достаточно знать величину модуля вектора E_0 , предполагаемого, например, параллельным оси Cy' .

Положим теперь $\alpha' \cos \varphi = \beta'$ и $\alpha' \sin \varphi = \gamma'$ (где β' и γ' — направляющие косинусы рассматриваемого направления). При $\varepsilon = 0$, поскольку $\rho_1 \cos \varphi_1 = y'$ и $\rho_1 \sin \varphi_1 = z'$, будем иметь $\Delta_1 = \Delta - (\beta' y' + \gamma' z')$. Для точки P с ко-

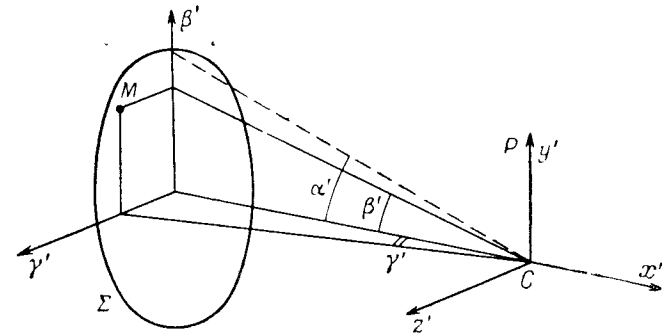
ординатами $0, y', z'$ получаем

$$E(y', z') = \frac{i}{\lambda R} h(-kR) \iint_{(\Sigma)} E_0 h[k(\Delta - \beta' y' - \gamma' z')] dS.$$

Заменяя $E_0 h(k\Delta)$ на $F(\beta', \gamma')$ и замечая, что dS равно $R^2 d\beta' d\gamma'$, получаем

$$E(y', z') = \frac{iR}{\lambda} h(-kR) \iint F(\beta', \gamma') \times h[-k(\beta' y' + \gamma' z')] d\beta' d\gamma'. \quad (1.5)$$

Расчет электрического поля $E(y', z')$ в плоскости $y'z'$, перпендикулярной оси, приводит к преобразованию



Фиг. 6.

Фурье функции F , представляющей собой распределение электрического поля на сфере сравнения S с центром в точке C . В самом деле, фаза постоянна на волновой поверхности Σ и равна $k\Delta$ на сфере S ; можно утверждать, что $E_0 h(k\Delta)$ есть не что иное, как электрическое поле на сфере S . Образование дифракции выражается математически в виде преобразования Фурье, поэтому полезно изучить основные свойства этого преобразования (см. гл. 2). Не следует, однако, забывать, что это преобразование применимо только для случаев, когда относительное отверстие прибора невелико.

ГЛАВА 2

Преобразование Фурье

Здесь мы кратко рассмотрим некоторые определения и напомним некоторые свойства рядов Фурье и интеграла Фурье. Мы, конечно, не будем заниматься разбором математических трудностей, связанных с их сходимостью, но допустим, что последующие результаты применимы к функциям, представляющим, в частности, распределение электрического поля на зрачке: эти функции никогда не становятся бесконечно большими и могут обладать только простыми разрывами (например, на границе зрачка).

§ 1. Представление периодической функции рядом Фурье

Элементарное изучение законов акустики показывает, что любые периодические колебания с частотой $\nu=1/T$ могут быть разложены на бесконечно большое число синусоидальных составляющих с частотами $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots$. Звук с частотой ν является основным звуком, а остальные составляющие — его гармониками.

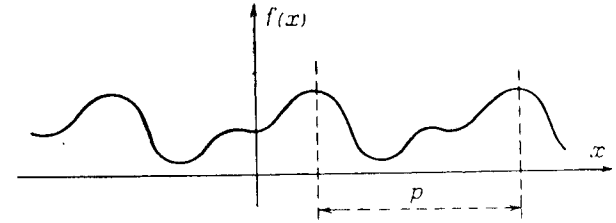
Можно также показать, что периодическая функция $f(x)$ переменной x периода p (фиг. 7) может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций, соответствующих периодам $p, p/2, p/3, \dots$ (т. е. последовательные частоты образуются прибавлением основной частоты $1/p$).

Прежде всего запишем функцию $f(x)$ в виде тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi x}{p} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{p} + \dots$$

$$\dots + a_n \cos n \frac{2\pi x}{p} + b_n \sin n \frac{2\pi x}{p} + \dots, \quad (2.1)$$

не рассматривая здесь условий, при которых этот ряд сходится. Очевидно, что если ряд представляет функцию $f(x)$ внутри одного периода, то он будет представлять ее для всех значений переменной. Остается только вычислить коэффициенты a_n и b_n , которые определяют каждый из членов ряда, имеющих частоту



Фиг. 7.

n/p . Проинтегрируем для этого в пределах одного периода произведение $f(x) \cos(2\pi mx/p)$ или $f(x) \sin(2\pi mx/p)$; получим

$$\int_p f(x) \cos 2\pi \frac{mx}{p} dx =$$

$$= \int_p \left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi \frac{nx}{p} + b_n \sin 2\pi \frac{nx}{p} \right) \right] \cos 2\pi \frac{mx}{p} dx,$$

но, поскольку

$$\int_p \cos 2\pi \frac{nx}{p} \cos 2\pi \frac{mx}{p} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{p}{2} & \text{при } n = m, \end{cases}$$

$$\int_p \sin 2\pi \frac{nx}{p} \cos 2\pi \frac{mx}{p} dx = 0,$$

все члены, кроме одного, оказываются равными нулю, и мы получаем

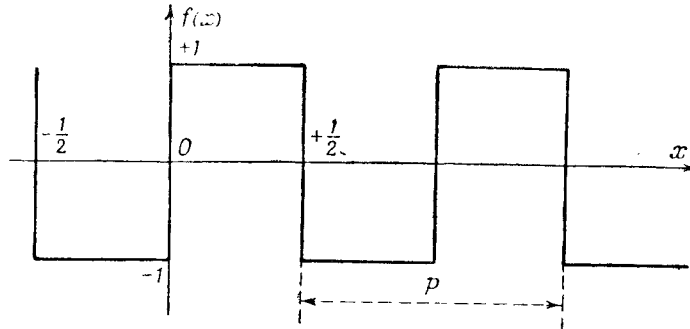
$$\int_p f(x) \cos \frac{2\pi nx}{p} dx = \frac{p}{2} a_n. \quad (2.2)$$

Аналогичный результат получается для синуса.

Вычисление коэффициентов, таким образом, выполняется весьма просто, и, объединив результаты, имеем для a_n и b_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{p} \int_p f(x) \left| \frac{\cos}{\sin} \right| \frac{2\pi nx}{p} dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эта формула применима для значений n от 0 до ∞ .



Фиг. 8.

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд Фурье прямоугольной пилообразной функции $\Pi(x)$, которая принимает значения либо +1, либо -1 с периодом p , также равным единице (фиг. 8).

Находим, принимая за период интегрирования интервал от $-1/2$ до $+1/2$,

$$\int_p f(x) \cos \frac{2\pi nx}{p} dx = 0,$$

$$\int_p f(x) \sin \frac{2\pi nx}{p} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{2}{\pi n}, & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

иначе говоря,

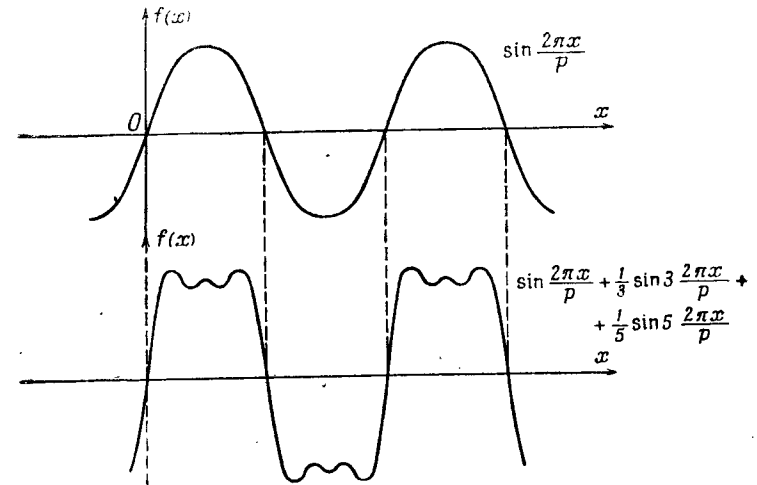
$$\begin{aligned} a_n &= 0, & b_n &= \frac{4}{\pi n} & \text{для } n & \text{нечетного,} \\ b_n &= 0 & & & \text{для } n & \text{четного.} \end{aligned}$$

Эта функция при любом периоде p может быть пред-

ставлена следующим рядом:

$$\Pi\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{5} \sin 5 \frac{2\pi x}{p} + \dots \right). \quad (2.4)$$

Интересно посмотреть, как при увеличении числа членов ряда представление функции делается все более и более точным. Мы приведем для этого на фиг. 9 две кривые,



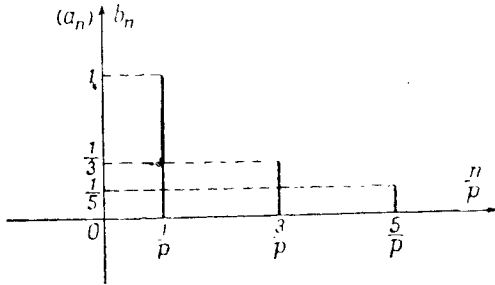
Фиг. 9.

представляемые только одним первым членом ряда (верхняя) и тремя первыми членами (нижняя).

Отметим, что ряд Фурье может легко представлять функцию, имеющую разрывы. Не трудно доказать, что численное значение ряда равно нулю в точке, где функция делает скачок от -1 до +1. В общем случае оно равно среднему от значений $f(x)$ в точках до и после разрыва.

Наконец, с периодической функцией $f(x)$ можно связать бесконечный ряд значений a_n и b_n , которые легко вычисляются по данной функции $f(x)$ и являются коэффициентами различных синусоидальных членов тригонометрического ряда. Можно схематически представить результаты вычислений, нанося величины a_n и b_n в виде функ-

ции частоты n/p (фиг. 10). Такое представление функции $f(x)$, очевидно, строго ограничено случаем периодических функций, но мы увидим, что его можно обобщить на случай непериодических функций в области от $-\infty$ до $+\infty$.



Фиг. 10.

§ 2. Представление некоторых функций с помощью интеграла Фурье

Чтобы охватить случай непериодических функций, можно попытаться устремить период p к бесконечности. Основной интервал тогда становится бесконечно большим, и с его помощью можно представлять непериодическую функцию. При этом условии $1/p$ стремится к нулю, и мы выполним переход к пределу в формулах (2.1) и (2.3), переписав их в виде

$$f(x) = \frac{1}{p} \int_p f(x) dx + \frac{2}{p} \sum_1^{\infty} \left[\cos 2\pi \frac{nx}{p} \int_p f(X) \cos 2\pi \frac{nX}{p} dX + \sin 2\pi \frac{nx}{p} \int_p f(X) \sin 2\pi \frac{nX}{p} dX \right].$$

Этот бесконечный ряд можно представить интегралом, если положить $n/p = u$ и $1/p = du$ (u является частотой в общепринятом смысле этого слова, если за переменную x принять время). Примем, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ не равен

бесконечности, тогда первый член обращается в нуль, и мы при этих условиях получаем выражение

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \left[\cos 2\pi ux \int_p f(X) \cos 2\pi uXdX + \sin 2\pi ux \int_p f(X) \sin 2\pi uXdX \right] du. \quad (2.5)$$

В сущности, мы довели до нуля интервал p , отделяющий величины a_n, b_n от a_{n+1}, b_{n+1} (см. фиг. 10), и благодаря этому получили возможность представить функцию, распространяющуюся на весь период p от $-\infty$ до $+\infty$.

Следовательно, любая функция (при условии, что она остается всюду конечной и интегрируемой) может быть представлена в виде суммы бесконечного непрерывного множества синусоидальных составляющих. Формулу (2.5) можно еще написать в более сжатой форме, принимая в качестве амплитуд величины $a(u)$ и $b(u)$, которые заменят теперь a_n и b_n :

$$\begin{aligned} a(u) \\ b(u) \end{aligned} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) \begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix} 2\pi uXdX, \quad (2.6)$$

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} [a(u) \cos 2\pi ux + b(u) \sin 2\pi ux] du; \quad (2.7)$$

амплитуды $a(u)$ и $b(u)$ служат показателями большего или меньшего значения той или иной частоты в представлении $f(x)$. Первое уравнение сводится к поискам периодичности в $f(x)$, или к гармоническому анализу $f(x)$. Иногда говорят по аналогии с задачей разложения белого света на монохроматические составляющие, что совокупность $a(u), b(u)$ представляет *спектр* функции $f(x)$. Если, в частности, $f(x)$ является периодической функцией, то ее спектр состоит из дискретного множества сигналов, соответствующих только основной частоте и ее гармоникам.

§ 3. Интеграл Фурье в комплексных обозначениях

Если использовать экспоненциальные функции вместо тригонометрических, формулам (2.6) и (2.7) можно придать более симметричную форму, которая, кроме того,

может быть непосредственно применена к комплексным функциям $f(x)$ переменной x . Заменим в указанных формулах тригонометрические функции их значениями, согласно формулам Эйлера. Из формул (2.6), используя для упрощения запись $e^{ix} = \exp(ix) = h(x)$ (функция-винт), сразу же получаем

$$2a(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [h(2\pi ux) + h(-2\pi ux)] dx,$$

$$2ib(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [h(2\pi ux) - h(-2\pi ux)] dx.$$

Положим

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(2\pi ux) dx = a(u) + ib(u),$$

тогда

$$g(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(-2\pi ux) dx = a(u) - ib(u).$$

Формула (2.7) переписется после элементарных преобразований следующим образом:

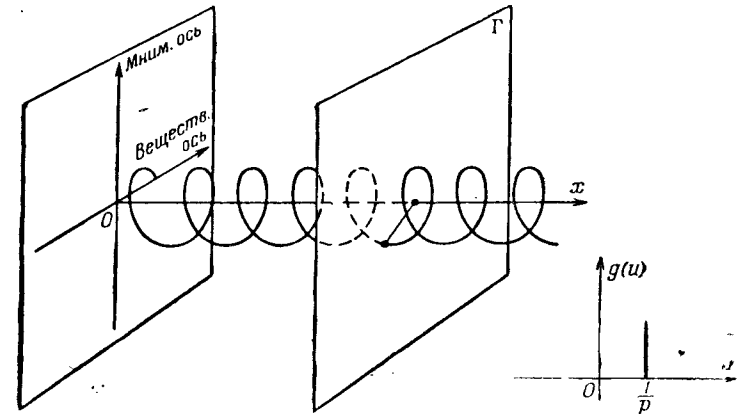
$$f(x) = \int_0^{\infty} [g(u) h(-2\pi ux) + g(-u) h(2\pi ux)] du.$$

Меняя частоту в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, можно написать в общем виде преобразование Фурье в симметричной форме

$$\begin{cases} g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(2\pi ux) dx = T[f(x)], \\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) h(-2\pi ux) du = T^{-1}[g(u)]. \end{cases} \quad (2.8)$$

Две функции $f(x)$ и $g(u)$ играют, следовательно, симметричную роль, причем каждая из функций является «спектром» другой. Условные обозначения T и T^{-1} определяют соответственно преобразование Фурье и обратное ему преобразование.

Чтобы проиллюстрировать использование обозначения $h(X) = \exp(iX)$, приведем на фиг. 11 случай, когда $f(x)$ содержит только одну составляющую с частотой $1/p$, так что $f(x) = \exp(i2\pi x/p)$. При этом функция $g(u)$ всюду равна нулю, исключая точку $u = 1/p$, и $f(x)$ представляет собой комплексную функцию, которую можно изобразить на комплексной плоскости Γ , расположенной



Фиг. 11.

перпендикулярно оси абсцисс. Кривая, определяемая в пространстве, одна из осей координат которого имеет мнимую составляющую, представляет собой винтовую линию.

§ 4. Полезная теорема: теорема Парсеваля

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $F(x)$, преобразования Фурье которых суть $g(u)$ и $G(u)$. Найдем преобразование произведения функций $f(x) \cdot F(x)$. Для этого нам нужно вычислить

$$T(fF) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) F(x) h(2\pi ux) dx;$$

это можно переписать, заменяя $F(x)$ согласно (2.8), что позволяет получить функцию F по известной функции G

(переменную интегрирования обозначим через v):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(2\pi ux) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(v) h(-2\pi vx) dv \right] dx.$$

Переменив порядок интегрирования, получим

$$\int G(v) \left\{ \int f(x) h[2\pi(u-v)x] dx \right\} dv,$$

что можно легко свести к следующей форме записи:

$$T(fF) = \int G(v) g(u-v) dv. \quad (2.9)$$

Следовательно, преобразование Фурье произведения $f(x) \cdot F(x)$ выражается просто через преобразования g и G с помощью особой операции интегрирования, называемой *сверткой* функций g и G . Обозначая знаком \otimes эту операцию, легко показать, что преобразование свертки можно равным образом написать в виде

$$G \otimes g = \int G(v) g(u-v) dv = \int g(v) G(u-v) dv. \quad (2.10)$$

Теперь можно найти преобразование Фурье для квадрата модуля $f(x)$, понимая под F функцию $f^*(x)$, сопряженную с $f(x)$. Заметим, что $G(u) = g^*(-u)$ и найдем две эквивалентные формулы:

$$\begin{aligned} T |f(x)|^2 &= \int |f(x)|^2 h(2\pi ux) dx = \\ &= \int g^*(v') g(u+v') dv' = \int g(v) g^*(v-u) dv. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полагая $u=0$, находим

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |g(v)|^2 dv; \quad (2.12)$$

это соотношение выражает закон сохранения энергии.

§ 5. Случай функции двух переменных

Можно непосредственно обобщить предыдущие результаты на случай функции двух переменных x и y . Мы ограничимся тем, что напишем соотношения, вытекающие из определения преобразования Фурье и из теоремы Парсеваля. Выводы этих соотношений подобны проведенному выше с той только разницей, что знаки переменных u' и

v' в случае необходимости следует изменить:

$$g(u, v) = \iint f(x, y) h[2\pi(ux + vy)] dx dy, \quad (2.13)$$

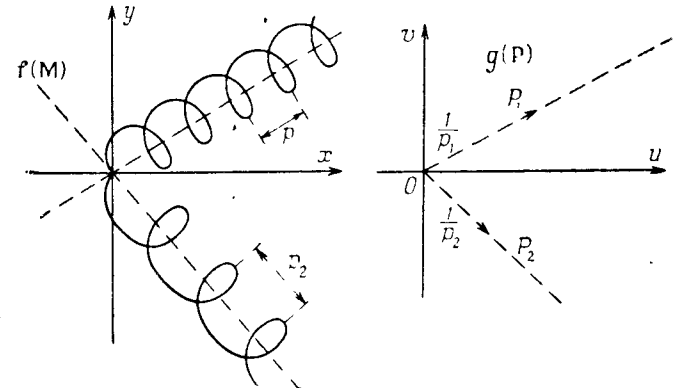
$$f(x, y) = \iint g(u, v) h[-2\pi(ux + vy)] dudv,$$

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) F(x, y) h[2\pi(ux + vy)] dx dy &= \\ &= \iint g(u-u', v-v') G(u', v') du' dv'; \end{aligned} \quad (2.14)$$

в частности, если $F=f^*$, то

$$\begin{aligned} \iint |f(x, y)|^2 h[2\pi(ux + vy)] dx dy &= \\ &= \iint g(u'+u, v'+v) g^*(u', v') du' dv', \end{aligned} \quad (2.15)$$

Замечание. Соотношения (2.13) могут быть написаны в еще более сжатой форме, если использовать векторные



Фиг. 12.

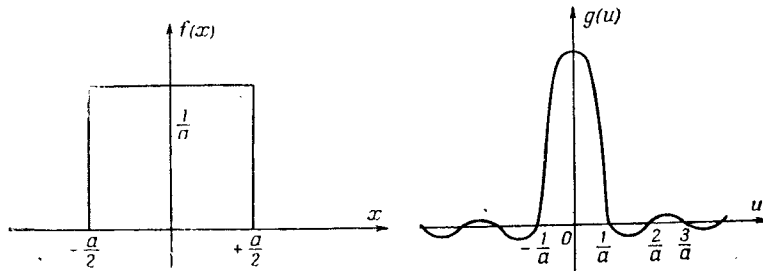
обозначения. Пусть M — точка с координатами x, y , а P — точка с координатами u и v в «преобразованной» плоскости. Тогда можно написать

$$g(P) = \iint f(M) h(2\pi M \cdot P) dS, \quad (2.16)$$

$$f(M) = \iint g(P) h(-2\pi M \cdot P) d\Sigma,$$

где dS и $d\Sigma$ — элементы части плоскостей (исходной и «преобразованной»), в которых размещаются M и P .

Вектор \mathbf{P} полностью характеризует осциллирующую составляющую функции $f(\mathbf{M})$; его модуль представляет пространственную частоту или величину, обратную «длине волны», а направление совпадает с направлением нормали к «волнам», если допустить здесь сравнение составляющих функции $f(\mathbf{M})$ с системой неподвижных волн. Фиг. 12.



Фиг. 13.

схематически представляет две винтовые функции в плоскости M , соответствующие точкам P_1 и P_2 плоскости P .

§ 6. Некоторые часто встречающиеся преобразования Фурье

Отметим ниже несколько классических результатов, которые могут быть получены без труда.

а) Ступенчатая функция (фиг. 13) определяется с помощью функции $\text{Rect}(x)$, которая равна либо 1 (в промежутке $-1/2 < x < +1/2$), либо 0 (для всех остальных значений x); условимся называть ее функцией-щелью:

$$f(x) = \frac{1}{a} \text{Rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{при } |x| < \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{a}{2}, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$g(u) = \frac{\sin \pi au}{\pi au} = \text{sinc}(\pi au).$$

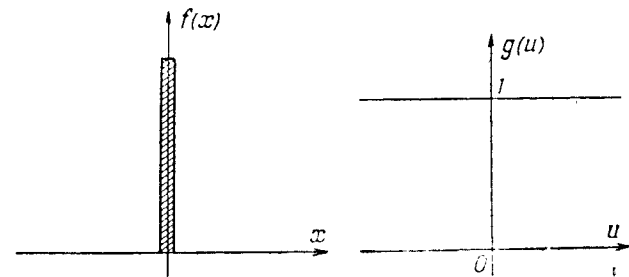
б) Предельный случай ступенчатой функции (фиг. 14); пусть при $a \rightarrow 0$ функция $f(x)$ становится бесконечной в точке $x = 0$, в остальных точках всюду равна нулю, но ее интеграл остается равным единице — это дельта-функция Дирака $\delta(x)$: $g(u) = 1$.

в) Двумерная функция (для краткости будем называть ее функцией-прямоугольником):

$$f(x, y) = \frac{1}{ab} \text{Rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} \frac{1}{ab}, & \text{если } |x| < \frac{a}{2}, |y| < \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{в прочих точках,} \end{cases} \quad (2.18)$$

$$g(u, v) = \frac{\sin \pi au}{\pi au} \frac{\sin \pi bv}{\pi bv}.$$

г) Предельный случай функции (2.18): если $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$ [условно примем для нее название функция-линия

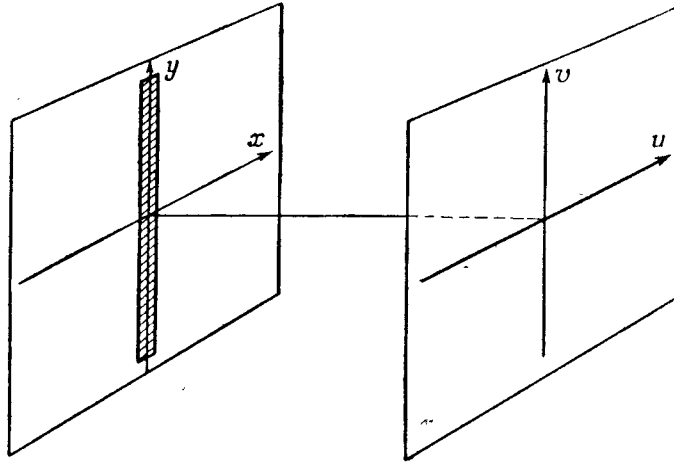


Фиг. 14.

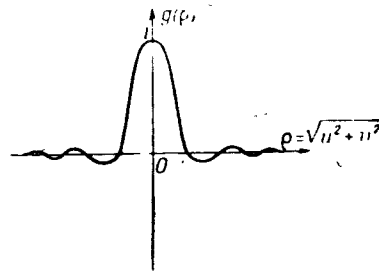
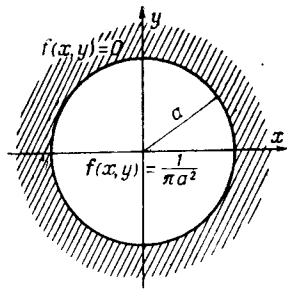
(фиг. 15)], то можно предположить, например, что $ab \equiv 1$ (площадь прямоугольника постоянна), функция $f(x, y) = 1$ вдоль оси Oy и 0 в прочих точках; тогда

$$g(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v = 0 \text{ (ось } Ou), \\ 0, & \text{если } v \neq 0. \end{cases}$$

д) Другой предельный случай: если $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow 0$ (функция-точка), то $f(x, y)$ есть дельта-функция двух переменных и $g(u, v) = 1$.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

е) Для функции, изображенной на фиг. 16 (функция-круг), имеем

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & \text{если } x^2 + y^2 = r^2 \leq a^2, \\ 0, & \text{если } r^2 > a^2, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$g(\rho) = \frac{2J_1(Z)}{Z}, \text{ причем } \rho = \sqrt{u^2 + v^2}, Z = 2\pi a \rho$$

(J_1 — функция Бесселя первого порядка). Действительно находим

$$\frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} h(2\pi r \cos \varphi) r dr d\varphi = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a r dr J_0(2\pi r) = \frac{2J_1(z)}{z}.$$

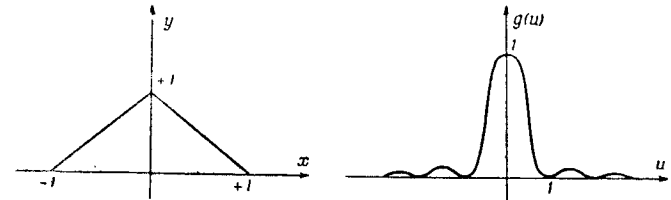
В гл. 5, § 1, приведена таблица численных значений $g(\rho)$ (табл. 1, стр. 87).

ж) Функция Гаусса одной переменной; исходя из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{a^2}\right) dx = a, \quad (2.20)$$

можно показать, что если

$$f(x) = \exp\left(-\pi \frac{x^2}{a^2}\right), \text{ то } g(u) = a \exp(-\pi a^2 u^2).$$



Фиг. 17.

з) Функция Гаусса двух переменных; можно показать с помощью того же соотношения, что если

$$f(x, y) = \exp\left(-\pi \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right),$$

то

$$g(u, v) = a^2 \exp[-\pi a^2 (u^2 + v^2)]. \quad (2.21)$$

Следовательно, функция Гаусса одной или двух переменных преобразуется в другую функцию Гаусса.

и) Функция, изображенная на фиг. 17 (функция-треугольник), представляется следующим образом: $\text{Tg}(x) = 1 - |x|$, если $|x| < 1$, и равна 0 в прочих точках. Для

нее имеем

$$g(u) = \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 = \text{sinc}^2(\pi u). \quad (2.22)$$

На этом частном случае оправдывается соотношение (2.11), поскольку функция $\text{Tr}(x)$ есть не что иное, как функция, взаимосвязанная с функцией $\text{Rect}(x)$:

$$\text{Tr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}(x) \text{Rect}(y-x) dx.$$

§ 7. Случай функции с ограниченным спектром. Теорема об интерполяции¹⁾

Докажем, что если функция обладает конечным спектром, то она полностью определяется величинами, которые принимает в ряде вполне определенных точек, например, находящихся друг от друга на равных расстояниях. Эта теорема имеет важное практическое значение в теории информации. Она позволяет также показать, что оптическое изображение зависит только от конечного числа параметров на единице площади.

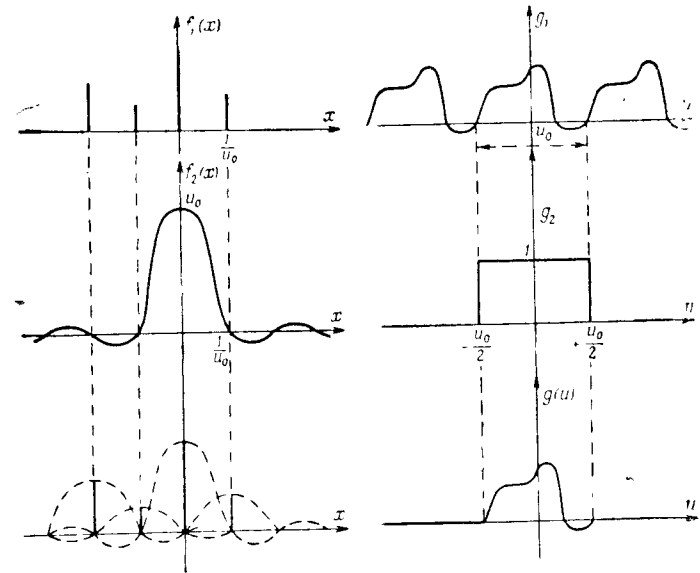
Рассмотрим функцию $f(x)$, преобразование Фурье которой $g(u)$ равно нулю вне интервала $-u_0/2; +u_0/2$ (фиг. 18). Можно считать, что $g(u)$ есть произведение двух функций: периодической функции $g_1(u)$, которая совпадает с $g(u)$ в интервале $-u_0/2; +u_0/2$ и повторяется в дальнейшем с периодом u_0 , и ступенчатой функции $g_2(u) = \text{Rect}(u/u_0)$.

По теореме Парсеваля, функция $f(x)$ выразится как свертка преобразований f_1 и f_2 функций g_1 и g_2 :

$$f(x) = \int f_1(y) f_2(x-y) dy.$$

Однако поскольку $g_1(u)$ обладает периодом u_0 , ее преобразование Фурье состоит из дискретных сигналов: $f_1(y) = 0$, за исключением значений $y = n/u_0$, где n — положительное или отрицательное целое число.

¹⁾ Эта теорема известна как теорема Котельникова. — Прим. ред.



Фиг. 18.

С другой стороны,

$$f_2(y) = \frac{\sin \pi u_0 x}{\pi x}.$$

Таким образом, выражение свертки будет таково:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n}{u_0} \right) \frac{\sin \pi u_0 [x - (n/u_0)]}{\pi [x - (n/u_0)]}.$$

Если положить x равным m/u_0 , где m — целое число, то все слагаемые этой суммы исчезнут, кроме одного, которое соответствует условию $n = m$; следовательно¹⁾,

$$f\left(\frac{n}{u_0}\right) = f_1\left(\frac{n}{u_0}\right) u_0.$$

¹⁾ Так как $\lim_{x \rightarrow n/u_0} \frac{\sin \pi u_0 [x - (n/u_0)]}{\pi [x - (n/u_0)]}$ при $x \rightarrow n/u_0$ равен u_0 . — Прим. ред.

Отсюда и выводим окончательную формулу

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{u_0}\right) \frac{\sin \pi u_0 [x - (n/u_0)]}{\pi u_0 [x - (n/u_0)]}. \quad (2.23)$$

Таким образом, $f(x)$ выражается однозначно с помощью величин, которые она принимает для $x = n/u_0$.

§ 8. Применение преобразования Фурье для выражения принципа Гюйгенса

Вернемся к равенству (1.5), выражающему принцип Гюйгенса для оптических инструментов со средней светосилой. Оно представляет собой преобразование Фурье, если переменным и функциям придать соответствующие постоянные коэффициенты. Можно, например, согласовать выражения (1.5) и (2.13), написав $\beta' = u$, $\gamma' = v$, $y' = \lambda x$, $z' = \lambda y$, $F(\beta', \gamma') = g(u, v)$, полагая при этом, что $-i \frac{\lambda h (kR) E(\lambda x, \lambda y)}{R} = f(x, y)$.

После ряда упрощений можно написать преобразование

$$\begin{aligned} E(y', z') &= \\ &= \frac{iR}{\lambda} h(-kR) \iint F(\beta', \gamma') h[-k(\beta' y' + \gamma' z')] d\beta' d\gamma', \\ F(\beta', \gamma') &= \\ &= -\frac{i}{\lambda R} h(kR) \iint E(y', z') h[k(\beta' y' + \gamma' z')] dy' dz'. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Можно еще написать соотношение (2.15) в виде

$$\begin{aligned} \iint |E(x', y')|^2 h[k(\beta_0 y' + \gamma_0 z')] dy' dz' &= \\ &= \left\{ \begin{aligned} R^2 \iint F(\beta' + \beta_0, \gamma' + \gamma_0) F^*(\beta', \gamma') d\beta' d\gamma', \\ R^2 \iint F(\beta', \gamma') F^*(\beta' - \beta_0, \gamma' - \gamma_0) d\beta' d\gamma', \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.25)$$

или в более симметричной форме:

$$R^2 \iint F\left(\beta' + \frac{\beta_0}{2}, \gamma' + \frac{\gamma_0}{2}\right) F^*\left(\beta' - \frac{\beta_0}{2}, \gamma' - \frac{\gamma_0}{2}\right) d\beta' d\gamma'.$$

Отметим, что соотношение между амплитудами, распределенными на сфере с центром в начале координат, и распределение амплитуд в плоскости, перпендикулярной оси, связаны преобразованием Фурье: оно переводит на математический язык принцип Гюйгенса. Мы дальше увидим, что можно, наоборот, осуществить преобразование Фурье, используя образование дифракционной картины.

§ 9. Примеры применения преобразований Фурье к расчету явлений дифракции. Изучение возникновения «духов» в спектрах решеток

При изготовлении решеток классическим методом Роуланда местоположение штрихов существенно зависит от механической точности машины. Если последняя несовершенна, например обладает эксцентricностью винта, сказывающейся при каждом обороте винта, то при нанесении штрихов возникнет периодическая ошибка.

Ошибки местоположения штрихов представлены схематически на фиг. 19 в предположении, что наносятся толь-



Фиг. 19.

ко четыре штриха за один оборот винта. В действительности шаг резьбы порядка 1 мм, и на решетках, обычно используемых в спектроскопии, может быть нанесено, например, около 500 штрихов на 1 мм (т. е. за один оборот винта). Ошибка эта влияет, очевидно, на форму дифрагированной волны, которую мы будем здесь изучать, используя принцип огибающей¹⁾. Рассмотрим, например, отра-

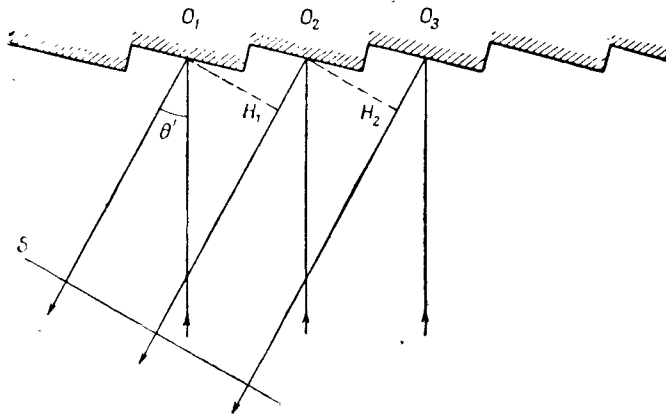
¹⁾ Применение такой формы принципа Гюйгенса можно найти в дополнении 2.

жательную решетку. Если решетка совершенна, то середины O_1, O_2, O_3 и т. д. отражающих штрихов будут равноудалены друг от друга (фиг. 20). Волны, выходящие из этих точек, отличаются по фазе на $2K\lambda$ в направлении θ' , соответствующем спектру порядка N .

Предполагая, в частности, падающие лучи нормальными к плоскости решетки, имеем

$$O_2H_1 = O_3H_2 = \dots = N\lambda.$$

Все колебания происходят в одной и той же фазе, и поверхность дифрагированной волны S на некотором расстоянии в направлении θ' является плоской. Эта волновая поверхность является не чем иным, как огибающей дифрагированных от различных штрихов решетки волн, причем радиусы этих волн таковы, что оптический путь ATA'

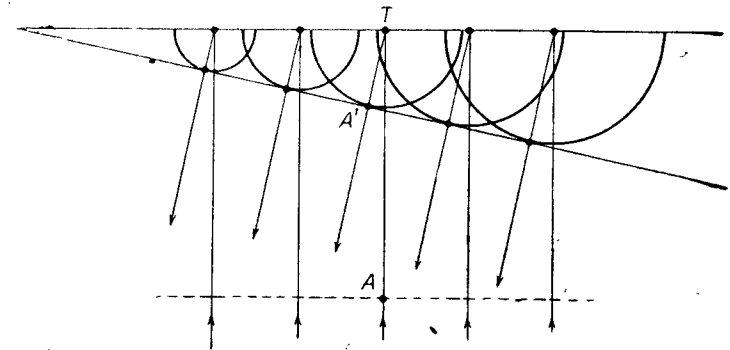


Фиг. 20.

между точкой A падающей волны и точкой A' дифрагированной волны изменяется на $k\lambda$ (фиг. 21) при переходе от одного штриха к следующему.

Предположим теперь, что решетка несовершенна. Тогда положения середин отражающих штрихов не будут рав-

ноотстоять друг от друга; они будут смещены относительно их теоретического положения, в результате положение дифрагированных волн нарушается и, следовательно, огибающая поверхность уже больше не будет плоской. Легко



Фиг. 21.

установить связь между деформацией Δ волновой поверхности и смещением ϵ штриха решетки. Заметим, что если сместить один штрих так, чтобы он наложился на соседний штрих, то деформация Δ будет равна $K\lambda$; следовательно, если a — расстояние между любыми равноотстоящими друг от друга штрихами, то

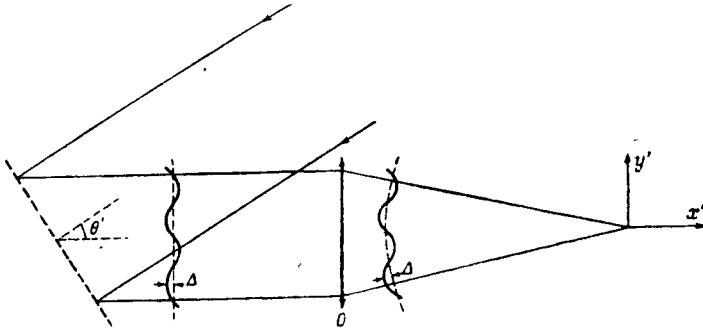
$$\Delta = \frac{K\lambda\epsilon}{a}.$$

Вычислим теперь дифракцию, которую можно наблюдать вблизи от фокуса линзы O (фиг. 22). По теореме Гуи деформация Δ поверхности плоской волны перед преломлением сохранится и после прохождения через линзу: отклонение реальной волны от идеальной сферической, следовательно, равно Δ . Поскольку смещение ϵ штрихов решетки — величина периодическая, то деформация Δ также будет периодической и волновая поверхность будет иметь вид, показанный на фиг. 22. Ее деформацию

можно, следовательно, представить рядом Фурье:

$$\Delta = \frac{K\lambda}{a} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left[\varepsilon_q \cos \frac{2\pi q \beta'}{p} + \varepsilon'_q \sin \frac{2\pi q \beta'}{p} \right],$$

где p представляет период (угловой) деформации (период ошибки положения штрихов на решетке будет тогда



Фиг. 22.

$pf'/\cos \theta'$, причем f' — фокусное расстояние линзы O). Будем сначала исходить из предположения, что ошибка в расположении штрихов является синусоидальной, тогда

$$\Delta = \frac{K\lambda}{a} \varepsilon_0 \sin \frac{2\pi \beta'}{p}.$$

Используем формулу (1.5) для выражения амплитуды колебания. Ограничиваясь случаем, когда $F(\beta', \gamma')$ зависит только от β' , находим

$$E(y') = C \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} h \left(\frac{2K\pi\varepsilon_0}{a} \sin 2\pi \frac{\beta'}{p} \right) h(-k\beta'y') d\beta',$$

где $2\alpha' = Np$ есть ширина решетки, N — достаточно большое целое число и C — постоянный множитель.

Предположим, что ε_0 настолько мало, что можно положить

$$\exp \left(\frac{2iK\pi\varepsilon_0}{a} \sin 2\pi \frac{\beta'}{p} \right) \approx 1 + \frac{2iK\pi\varepsilon_0}{a} \sin \frac{2\pi \beta'}{p}. \quad (2.26)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} E(y') &= \int_{-Np/2}^{+Np/2} h(-k\beta'y') d\beta' + \\ &+ \frac{2iK\pi\varepsilon_0}{a} \int_{-Np/2}^{+Np/2} \sin \frac{2\pi \beta'}{p} h(-k\beta'y') d\beta', \end{aligned}$$

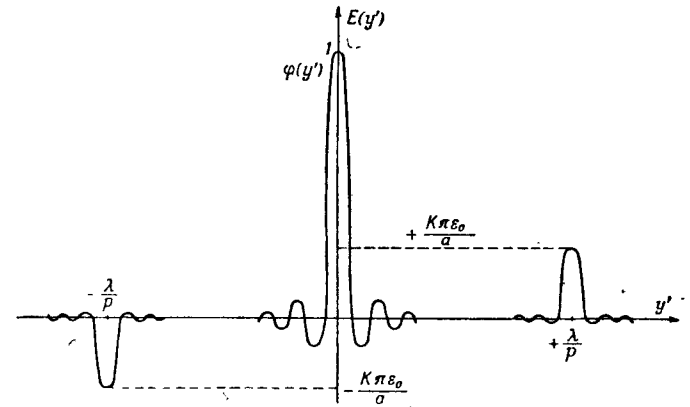
что после преобразований приводит к выражению

$$\frac{1}{C'} E(y') = \varphi(y') + \frac{K\pi\varepsilon_0}{a} \left[\varphi \left(y' - \frac{\lambda}{p} \right) - \varphi \left(y' + \frac{\lambda}{p} \right) \right], \quad (2.27)$$

где C' — новая произвольная постоянная; при этом

$$\varphi(y') = \frac{\sin \frac{N\pi p y'}{\lambda}}{\frac{N\pi p y'}{\lambda}}.$$

Первое из двух слагаемых формулы (2.27) представляет картину дифракции совершенной решетки. На фиг. 23



Фиг. 23.

показано изменение амплитуды $\varphi(y')$ вблизи начала координат. Остальные два члена аналогичны первому, но

смещены вдоль оси абсцисс на величину $y'_0 = \pm \lambda/p$ и их амплитуды значительно меньше: отношение их максимумов к основному максимуму составляет величину $K\pi\epsilon_0/a$.

С другой стороны, различные составляющие колебаний изменяются довольно быстро и обращаются в нуль при значениях y' , отличающихся на $\lambda/Np = y'_0/N$; отсюда следует, что различные члены имеют заметную величину только вблизи соответствующих максимумов и благодаря этому они отделены один от другого (число N практически равно числу оборотов винта, необходимому для того, чтобы нанести всю решетку, и обычно довольно велико). Таким образом, главное изображение сопровождается двумя симметричными паразитными, так называемыми ложными изображениями («духами»), которые, естественно, наносят вред качеству решеток.

Интенсивность «духов» равна, если принять за единицу максимум главного изображения, величине $K^2\pi^2\epsilon^2/a^2$, т. е. пропорциональна квадрату порядка спектра K и квадрату модуля ϵ_0 ошибки положения штрихов. Если, например, относительная интенсивность «духов» не должна превышать 10^{-3} , то при $K=1$ необходимо, чтобы $\epsilon_0/a \approx 10^{-2}$; это означает, что штрихи решетки должны быть нанесены с очень высокой точностью.

Нам осталось теперь сделать существенное замечание: мы приписали волновой поверхности периодическую деформацию и при этом нашли два «духа», смещенных на $\pm \lambda/p$ от главного изображения. Это означает, что явление дифракции в действительности может быть представлено математически с помощью преобразования Фурье, т. е. с помощью гармонического анализа распределения амплитуд на поверхности сравнения. Если это распределение априори обладает периодичностью, то нет ничего удивительного в том, что периодичность обнаруживается присутствием «духов», которые отстоят от главного изображения на λ/p , т. е. на пропорциональное «частоте» $1/p$ расстояние.

Если теперь деформация волновой поверхности перестает быть периодической, то образование явления дифракции представляет собой гармонический анализ амплитуд колебаний на поверхности сравнения $F(\beta', \gamma')$: каждая точка дифракционной картины имеет амплитуду.

соответствующую действию определенной частоты в законе распределения. Таким образом, искусственное различие между «духами» Роуланда и «духами» Лаймана, которые будто бы соответствуют периодическому и непериодическому смещению штрихов, нельзя признать обоснованным. Любой «дух» всегда основан на существовании периодичности ошибок штрихов решеток. Возможно, что эта периодичность не является следствием периодической ошибки ходового винта, но это обстоятельство не может служить достаточным основанием для того, чтобы устанавливать искусственное различие между этими двумя ошибками.

Заметим, наконец, что можно было бы вывести соотношение (2.27), используя равенство (2.9). Действительно, достаточно заметить, что в уравнении (2.26) член, который соответствует ошибке положения штрихов, имеет синусоидальный вид и его преобразование Фурье состоит из двух симметричных сигналов, соответствующих частотам $\pm 1/p$. Такое искажение изображения в действительности распространяется только на внутреннюю область прямоугольного зрачка с отверстием $2a'$. Это означает, что функция F является в действительности произведением синусоидальной функции и функции типа прямоугольника (2.18). По теореме Парсевала преобразование F состоит из свертки двух сигналов с частотами $\pm 1/p$ и функции типа $\sin u/u$, которая является преобразованием функции (2.18).

Часть вторая

ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ
ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

В предшествующих главах мы уточнили механизм образования дифракционного изображения изолированного точечного объекта и в дальнейшем будем применять полученные результаты, но нам нужно предварительно изучить общие законы образования изображения протяженного объекта, чтобы можно было судить о качестве этого изображения, о степени его сходства с объектом, о его контрасте и т. д. Вследствие этого мы должны исследовать законы, исходя из которых можно отдельные изображения элементов объекта накладывать одно на другое и надлежащим образом комбинировать для того, чтобы получить изображение протяженного объекта.

Проблема кажется довольно простой: сразу же возникает мысль, что освещенности, получаемые от различных элементов объекта, можно просто складывать в плоскости изображения и в результате получать распределение освещенности. В действительности, однако, это справедливо только при условии, что различные элементы объекта излучают некогерентные между собой колебания, т. е. нет никакой постоянной связи по фазам отдельных колебаний. Хотя на практике это условие и соблюдается для большинства оптических приборов (например, приборов для наблюдения или фотографирования удаленных объектов, спектрографов и т. д.), но оно не выполняется в микроскопе и также в некоторых проекционных аппаратах: объект освещен вспомогательным источником, и колебания, исхо-

дящие из различных точек объекта, не являются полностью независимыми. Говорят, что здесь имеет место частичная когерентность, и мы увидим, уточнив это определение, что соотношения, относящиеся к образованию изображения, должны учитывать эти обстоятельства.

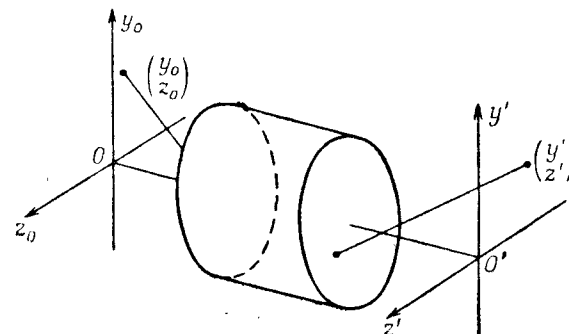
В гл. 3 мы будем изучать предельные случаи некогерентности и совершенной когерентности. Гл. 4 будет посвящена выводу теоретических выражений для контраста изображений объектов, с которыми мы часто встречаемся (точки, линии и т. д.). Изучение весьма сложного случая частичной когерентности будет отложено до гл. 7; это позволит предварительно изучить более типичные случаи когерентности и некогерентности.

Соотношения между объектом и его изображением.

Передача пространственных частот

§ 1. Некогерентное освещение. Основные соотношения

Рассмотрим оптический прибор, образующий в плоскости $y'O'z'$ изображение объекта, расположенного в плоскости y_0Oz_0 (фиг. 24) (начала координат O и O' могут и не находиться на оптической оси, но должны являться со-



Фиг. 24.

пряженными точками для данного оптического прибора). Пусть y_0, z_0 и y', z' — координаты соответственно некоторой точки объекта и ее идеального изображения (например, ее параксиального изображения). В действительности вследствие многочисленных причин изображение точки объекта с координатами y_0, z_0 не сводится в точку y', z' , а распространяется на некоторую область, окружающую эту точку. Если поместить точечный объект в начало координат, то в плоскости изображений получим некоторое распределение освещенности, которое можно представить функцией $D(y', z')$ от координат y', z' , учитывающей влияние таких, в частности, факторов, как абберация,

дифракция, рассеяние в плоскости приемника (например, фотографической эмульсии), и, более общо, всех явлений, о которых можно сказать, что они обладают свойством аддитивности в отношении влияния отдельных элементов объекта. Если аберрации прибора не изменяются слишком быстро по полю, что обычно имеет место (тогда говорят, что соблюдается условие изопланатизма), то изображение какой-либо точки объекта с координатами y_0, z_0 может быть представлено функцией $D(y' - gy_0, z' - gz_0)$, где g — линейное (поперечное) увеличение прибора. Для упрощения записи будем пользоваться координатами, введенными нами для плоскости объекта: $gy_0 = y, gz_0 = z$.

Если распределение яркости на объекте может быть представлено функцией $O(y, z)$, то очевидно, что распределение освещенности $I(y', z')$ на изображении можно получить в виде суммы освещенностей, даваемых каждым из изображений, полученных от различных точек объекта, т. е. его можно выразить следующим образом:

$$I(y', z') = \iint_0 O(y, z) D(y' - y, z' - z) dydz; \quad (3.1)$$

это так называемая свертка функций O и D , которую пишут еще в виде $I = O \otimes D$.

Это соотношение описывает процесс образования изображения, если элементы объекта излучают абсолютно некогерентные колебания. Мы покажем, что такой линейный процесс на языке преобразования Фурье записывается в чрезвычайно простой форме, что приводит нас к интересным соображениям о действии оптического прибора как фильтра пространственных частот.

§ 2. Передача пространственных частот при некогерентном освещении

Рассмотрим излучающий объект, обладающий распределением яркости, характеризуемым функцией $O(y, z)$. Мы уже видели в гл. 2, что для любой функции двух переменных можно найти преобразование Фурье. Иначе говоря, можно представить распределение яркости на объекте как наложение бесконечного множества различных си-

нусоидальных составляющих, каждая из которых может быть охарактеризована: направлением, т. е. «волновым вектором» \mathbf{P} , из соотношения (2.16); частотой, которая здесь является пространственной частотой, или величиной, обратной «длине волны» рассматриваемой синусоидальной составляющей (это модуль вектора \mathbf{P}); амплитудой и фазой. Изменению фазы соответствует перемещение составляющей в направлении вектора \mathbf{P} .

Напомним, например, что мира, состоящая из равноотстоящих друг от друга черных и белых штрихов (мира Фуко), может рассматриваться как наложение бесконечного множества синусоидальных составляющих (см. гл. 2, § 1), периоды которых равны $p, p/3, p/5$ и т. д., т. е. их пространственными частотами будут $1/p, 3/p, 5/p$ и т. д., причем характеризующие эти составляющие направления совпадают с направлениями перпендикуляров к штрихам; наконец, амплитуды составляющих изменяются как $1, 1/3, 1/5$ и т. д. Если за начало координат принять край одного штриха, то эти волны являются «синусными волнами» с фазой, равной нулю [соотношение (2.4)]. В общем случае, когда двухмерный объект не является периодическим, частоты образуют некоторое конечное двухмерное множество.

Исследуем теперь, как эти различные синусоидальные составляющие передаются оптическим прибором. Произведем гармонический анализ изображения, т. е. найдем преобразование i функции I . Соотношение (3.1) показывает, что I является сверткой функций O и D ; по теореме Парсеваля (гл. 2, § 4) ее преобразование Фурье равно произведению преобразований O и D . Легко убедиться, что если использовать переменные μ, ν , являющиеся пространственными частотами (размерности обратной длины), преобразование Фурье функции I можно написать так:

$$i(\mu, \nu) = \iint I(y', z') h[2\pi(\mu y' + \nu z')] dy' dz',$$

$$I(y', z') = \iint i(\mu, \nu) h[-2\pi(\mu y' + \nu z')] d\mu d\nu. \quad (3.2)$$

Достаточно заменить $I(y', z')$ ее выражением из (3.1), и получим

$$i(\mu, \nu) = \iiint O(y, z) D(y' - y, z' - z) h[2\pi(\mu y' + \nu z')] dy dz dy' dz',$$

или, используя переменные $Y = y' - y$, $Z = z' - z$,

$$i(\mu, \nu) =$$

$$= \iiint O(y, z) h[2\pi(\mu y + \nu z)] D(Y, Z) h[2\pi(\mu Y + \nu Z)] dy dz dY dZ;$$

это выражение легко свести к следующему фундаментальному результату:

$$\boxed{i(\mu, \nu) = o(\mu, \nu) d(\mu, \nu).} \quad (3.3)$$

Преобразование Фурье изображения равно произведению преобразований Фурье объекта и изображения изолированной точки.

Таким образом, механизм образования изображения имеет простой вид, если учитывать различные пространственные частоты, относящиеся к объекту: каждой составляющей $o(\mu, \nu)$ соответствует коэффициент (комплексный) $d(\mu, \nu)$, который можно назвать «множителем передачи» или «множителем контраста» оптического прибора для рассматриваемого винтообразного сигнала. Мы назовем характеризующую прибор функцию $d(\mu, \nu)$ *функцией фильтрации*; она определяет, каким образом каждая составляющая передается прибором. Рассмотрим два простых примера.

а) Приложение к опыту Майкельсона. Известно, что Майкельсон предложил определять кажущиеся диаметры звезд, измеряя видность интерференционных полос, полученных с помощью двух диафрагм с отверстиями, помещенных перед объективом зрительной трубы или даже на большем расстоянии. Для этого он предполагал использовать зеркала, ломающие ход лучей: каждая точка звезды дает систему полос, и наблюдатель старается определить тот момент, когда происходит смещение полос, вызываемое наложением различных систем полос, полученных от различных точек круглого объекта. Освещенности, полученные в плоскости изображения, складываются между собой, поскольку колебания, исходящие из различных элементов объекта, некогерентны. Следовательно, для расчета можно применить только что полученные нами результаты.

Геометрическое изображение звезды в объективе имеет вид диска радиусом ε , освещенность которого

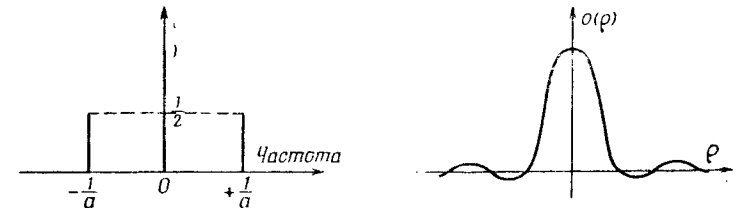
предполагаем постоянной и равной $(\pi\varepsilon^2)^{-1}$, поскольку световой поток остается постоянным. Функция $O(y, z)$ постоянна внутри круга радиусом ε и равна нулю вне его; в гл. 2, § 6 мы уже познакомились с преобразованием такой функции. Находим, полагая $\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$,

$$o(\mu, \nu) = \frac{2J_1(2\pi\varepsilon\rho)}{2\pi\varepsilon\rho}.$$

С другой стороны, изображение точки может быть представлено следующим образом:

$$D(y') = 1 + \cos \frac{2\pi y'}{a} = 1 + \frac{1}{2} \left[h\left(2\pi \frac{y'}{a}\right) + h\left(-2\pi \frac{y'}{a}\right) \right], \quad (3.4)$$

где a — расстояние между полосами. Преобразование Фурье d функции D , таким образом, состоит здесь толь-



Фиг. 25.

ко из трех частот μ , равных $-1/a$, 0 , $+1/a$ ($\nu = 0$), как это схематически показано на фиг. 25.

Преобразование Фурье изображения (которое мы получим, найдя произведение $d \times o$) всюду равно нулю, кроме трех значений μ , которые дают для d конечную величину. Изображение, следовательно, распределено строго по синусоиде, поскольку $i(\mu, \nu)$ равно 1 для $\mu = 0$ и $2J_1(2\pi\varepsilon/a)/(2\pi\varepsilon/a)$ для $\mu = \pm 1/a$.

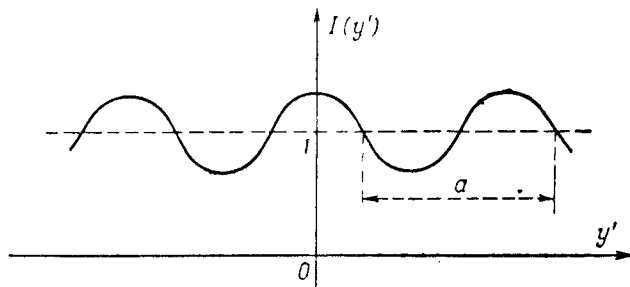
Имеем (фиг. 26)

$$I(y') = 1 + \frac{2J_1(2\pi\varepsilon/a)}{2\pi\varepsilon/a} \cos \frac{2\pi y'}{a}. \quad (3.5)$$

Первое исчезновение полос имеет место, когда

$2\pi\epsilon/a = 3,83$, или $2\epsilon = 1,22a$, т. е. можно найти кажущийся диаметр звезды, наблюдая исчезновение полос.

б) Приложение к определению предела разрешения некоторой периодической структуры оптическим прибором, обладающим значительными аберрациями; учай чистой дефокусировки и астигматизма. Обращение контраста. Когда аберрации прибора становятся значительными по своей величине, дифракция уже не играет никакой роли и можно положить, что распределение $D(y', z')$ освещенности на



Фиг. 26.

изображении в каждой точке определяется геометрической оптикой. Чтобы его определить, нужно узнать освещенность, вносимую каждым пучком лучей, участвующим в образовании изображения. Если dS — элемент на поверхности зрачка, пересекаемый пучком, мы предположим, что световой поток пропорционален dS , и поэтому освещенность в плоскости изображения будет пропорциональна dS/ds , где ds — элемент поверхности, полученный на пересечении пучка лучей плоскостью изображений. Чтобы применить предыдущую теорему, нужно найти преобразование Фурье от пятна рассеяния, полученного таким образом. Мы дадим здесь один простой пример, оставляя изучение общего случая до гл. 9.

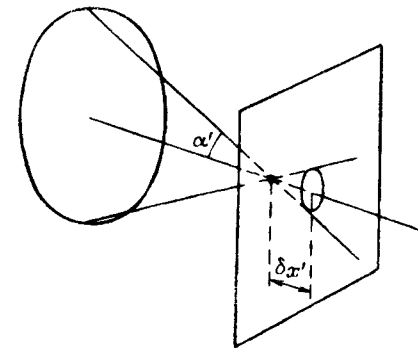
Рассмотрим случай, когда оптический прибор плохо сфокусирован, и предположим, что зрачок его имеет форму круга (фиг. 27). Пятном изображения будет тогда равномерно освещенный маленький круг радиусом

$\epsilon = \alpha' \delta x'$, где $\delta x'$ — продольная дефокусировка и α' — половина угла конуса лучей, формирующего изображение. Таким образом, $D(y', z') = E$, если $y'^2 + z'^2 < \epsilon^2$. Преобразованием Фурье этого кружка рассеяния будет, согласно соотношению (2.19), функция $d(\rho)$:

$$d(\rho) = \pi E \epsilon^2 \frac{2J_1(2\pi\epsilon\rho)}{2\pi\epsilon\rho},$$

где буквой E обозначена освещенность внутри круга.

С другой стороны, если в качестве объекта использовать периодическую миру периода p , можно написать



Фиг. 27.

его разложение в ряд Фурье. Для «миры Фуко», состоящей из одинаковых черных и белых штрихов, можно написать, используя равенство (2.4),

$$O(y) = 1 + \Pi\left(\frac{y}{p}\right) = 1 - \frac{2i}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{h[(2n+1)2\pi y/p]}{2n+1}.$$

Таким образом, периодическая функция $O(y)$ распадается на ряд дискретных синусоидальных составляющих, частоты которых $\mu = (2n+1)/p$ пропорциональны основной частоте миры $1/p$. Найдем преобразование Фурье изображения, используя произведение преобразований Фурье; поскольку $o(\mu)$ всюду равна нулю, за исключением значений $\mu = (2n+1)/p$ и $\nu = 0$, находим

$$I(y') = \pi E \varepsilon^2 \left[1 - \frac{2i}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2J_1[2(2n+1)\pi\varepsilon/p]}{2(2n+1)\pi\varepsilon/p} \frac{h[2(2n+1)\pi y'/p]}{2n+1} \right] =$$

$$= \pi E \varepsilon^2 \left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{2J_1[2(2n+1)\pi\varepsilon/p] \sin 2(2n+1)\pi y'/p}{2(2n+1)\pi\varepsilon/p} \right]. \quad (3.6)$$

Амплитуды гармоник вообще довольно быстро уменьшаются в зависимости от их расположения в ряду, и изображение достаточно точно определяется величиной

$$I(y') \approx \pi E \varepsilon^2 \left[1 + \frac{4}{\pi} \frac{2J_1(2\pi\varepsilon/p)}{2\pi\varepsilon/p} \sin \frac{2\pi y'}{p} \right]. \quad (3.7)$$

Предположим, что p фиксировано и что можно изменять дефокусировку ε , начиная с $\varepsilon = 0$: когда величина ε очень мала, то кривая функции фильтрования $d(\mu)$ очень пологая и практически большое число гармоник проходит без искажений — изображение подобно объекту. Если ε возрастает, то растянутость функции $d(\mu)$ вдоль оси абсцисс уменьшается и гармоники быстро уменьшаются; тогда можно использовать равенство (3.7), из которого вытекает, что изображение становится синусоидальным, но его амплитуда обращается в нуль и меняет свой знак вместе с функцией $J_1(2\pi\varepsilon/p)$: первое обращение в нуль синусоидального члена ряда получим, когда $2\pi\varepsilon/p = 3,83$, или $2\varepsilon = 1,22p$. При дальнейшем росте ε амплитуда синусоидального члена ряда становится отрицательной и появляется обращение контраста: минимумы освещенности на изображении займут место максимумов в распределении яркости на объекте и наоборот.

На фото I (см. вклейку) представлено плохо сфокусированное изображение миры, состоящей из штрихов, расположенных радиально. На этом снимке отчетливо видно явление обращения контраста; в этом опыте величина ε остается постоянной, но p изменяется непрерывно.

Очевидно, такой же результат можно получить для оптического прибора, обладающего астигматизмом, если фокусировка осуществляется на фокальные линии, перпендикулярные штрихам миры; для этого достаточно

заменить $\delta x'$ на расстоянии плоскости фокусировки от плоскости фокальных линий, параллельных штрихам миры.

§ 3. Фильтрация частот с точки зрения теории дифракции

Уточним теперь природу фильтрования частот, если изображение каждой изолированной точки не может быть получено с помощью одной только геометрической оптики, а определяется теорией дифракции. Значение освещенности в некоторой точке изображения определяется (с точностью до множителя) функцией

$$D(y', z') = E(y', z') E^*(y', z'),$$

где E — амплитуда электрического поля в дифракционном пятне, выражаемая первым из равенств (2.24). Соотношения (2.25) тогда будут представлять гармонический анализ функции $D(y', z')$, и, несколько изменив запись, их можно свести к выражению

$$d(\mu, \nu) = \iint |E(y', z')|^2 h[2\pi(\mu y' + \nu z')] dy' dz' =$$

$$= R^2 \iint F^*(\beta', \gamma') F(\beta' + \lambda\mu, \gamma' + \lambda\nu) d\beta' d\gamma' =$$

$$= R^2 \iint F(\beta', \gamma') F^*(\beta' - \lambda\mu, \gamma' - \lambda\nu) d\beta' d\gamma'. \quad (3.8)$$

Таким образом, фильтр частот представляется «функцией автокорреляции»¹⁾, относящейся к $F(\beta', \gamma')$, т. е. его можно определить, если известна форма волновой поверхности, поскольку значение $F(\beta', \gamma') = E_0 h(k\Delta)$ связано с деформацией волновой поверхности Δ (см. гл. 1, § 4). Следовательно, бесполезно вычислять распределение освещенности в дифракционном пятне для того, чтобы затем выполнить гармонический анализ: предыдущее соотношение позволяет получить результат быстрее с помощью интегрирования на зрачке.

¹⁾ Функцией автокорреляции $\varphi(\tau)$ некоторой функции $f(t)$ называется предел при $T \rightarrow \infty$ отношения $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_1(t) f_1(t + \tau) dt$. — Прим. ред.

Мы увидим, как это соотношение очень просто приведет нас к результату в случае стигматического прибора и позволит также изучить влияние aberrаций на качество изображения.

§ 4. Когерентное освещение

В противоположность предыдущей гипотезе мы теперь допустим, что различные точки объекта освещаются одним и тем же источником весьма малых размеров так, что колебания, исходящие из двух произвольно выбранных точек A и B на объекте, имеют постоянную разность фаз, определяемую разностью оптического пути, который отделяет эти точки от источника. Это — случай микроскопа, если его апертура сильно диафрагмируется конденсором, причем маленькое отверстие диафрагмы является в этом случае единственным источником освещения наблюдаемых препаратов. Чтобы узнать распределение энергии на изображении, нам надлежит теперь установить амплитуды колебаний, возникающих в каждой точке, а не освещенности, как в предыдущем случае.

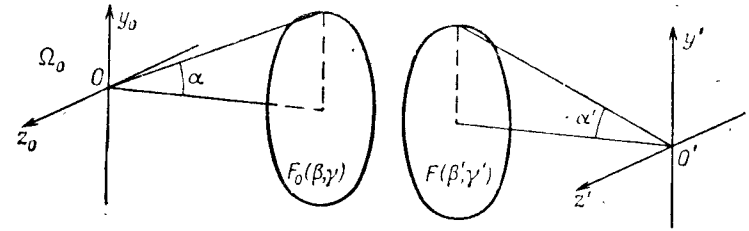
При сохранении предыдущих обозначений пусть функция $E(y' - y, z' - z)$ представляет распределение амплитуд, вызываемое точечным источником в точке с приведенными координатами y, z . Объект, с другой стороны, характеризуется коэффициентом переноса амплитуд $\Omega(y, z)$, который, очевидно, может быть и комплексным, если нужно учесть изменение фаз, как это бывает в случае фазовых объектов. Мы получим распределение амплитуд на изображении, составив сумму амплитуд, соответствующих различным точкам объекта:

$$A(y', z') = \iint_0 E(y' - y, z' - z) \Omega(y, z) dy dz. \quad (3.9)$$

Таким образом, случай когерентного освещения подобен случаю некогерентного освещения при условии выполнения суммирования изображений различных точек объекта по комплексным амплитудам, а не по освещенностям.

Справедливость этого утверждения может, однако, вызвать сомнение, и мы приводим ниже доказательство

предыдущих соотношений, основанное на более детальном изучении процесса образования изображения, который сводится здесь к двойной дифракции: когерентный объект сначала дифрагирует на отверстии входного зрачка, а изображение является результатом второй дифракции на выходном зрачке — это позволит легко понять механизм



Фиг. 28.

фильтрации пространственных частот (см. следующий параграф). Полезно описать этот механизм аналитически, чтобы убедиться в правильности соотношения (3.9). Пусть $\Omega_0(y_0, z_0)$ — распределение комплексных амплитуд в плоскости объекта, причем y_0 и z_0 — неприведенные координаты (фиг. 28). Распределение амплитуд на сфере радиусом R_0 с центром в начале координат на плоскости объекта будет представляться вторым из равенств (2.24), отнесенным к пространству объектов прибора, где все величины снабжены индексом 0. Можно без особой потери общности предположить, что R/λ является целым числом; это позволяет избавиться от экспоненты перед интегралом:

$$F_0(\beta, \gamma) = -\frac{i}{R\lambda} \iint \Omega(y_0, z_0) h \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\beta y_0 + \gamma z_0) \right] dy_0 dz_0. \quad (3.10)$$

Перенесем теперь амплитуду электрического поля в пространство изображений на сферу с центром в O' , оптический путь до которой от сферы с центром в O изменяется на малую величину $n'\Delta$, характеризующую волновую aberrацию системы, причем n' — показатель преломления в пространстве изображений и Δ — деформация волновой поверхности. С другой стороны, энергия, распределенная на поверхности $\pi a^2 R^2$ сферы в пространстве

объектов, переносится на соответствующую поверхность $\pi\alpha'^2 R'^2$ в пространстве изображений. Учитывая неизменность потока вектора Пойнтинга при прохождении через эти поверхности, получаем

$$n | F_0^2 | \alpha^2 R^2 = n' | F^2 | \alpha'^2 R'^2,$$

что определяет отношение модулей амплитуд полей. Наконец, амплитуда на сфере сравнения в пространстве изображений будет

$$F(\beta', \gamma') = \frac{\beta R}{\beta' R'} \left(\frac{n}{n'}\right)^{1/2} h(k\Delta) F_0(\beta, \gamma). \quad (3.11)$$

Переменные β' , γ' входят как в Δ , так и в F_0 , поскольку β и γ пропорциональны им (отношение $\beta'/\beta = \gamma'/\gamma$ есть не что иное, как угловое увеличение). Распределение амплитуд на сфере сравнения, таким образом, определено, и поскольку колебания когерентны, они должны вызывать явление дифракции в плоскости изображений. Эту дифракцию можно вычислить, применяя первое соотношение из (2.24):

$$A(y', z') = \frac{iR'}{\lambda'} \iint F(\beta', \gamma') h[-k'(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma'. \quad (3.12)$$

Если заменить функцию F ее выражением из (3.10) и (3.11), получим кратный интеграл, в котором можно изменить порядок интегрирования относительно двух групп переменных β' , γ' и y' , z' :

$$A(y', z') = \frac{\beta}{\lambda\lambda'\beta'} \left(\frac{n}{n'}\right)^{1/2} \iint \Omega_0(y_0 z_0) \times \\ \times \left[\iint h[k'\Delta - k'(\beta'y' + \gamma'z') + k(\beta y_0 + \gamma z_0)] d\beta' d\gamma' \right] dy_0 dz_0.$$

Но равенство Лагранжа $n\beta y_0 = n'\beta'y'$ можно написать в виде $k\beta y_0 = k'\beta'y'$, если учесть зависимость между длинами волн и показателями преломления $n\lambda = n'\lambda'$. Заметим, кроме того, что интеграл относительно переменных β' и γ' равен (с точностью до постоянного множителя) $E(y' - y, z' - z)$, и, если вернуться к введенным ранее координатам $y = gy_0$ и $z = gz_0$, сразу получим простое выражение (3.9). В дальнейшем мы будем пользоваться только приведенными координатами, так как они упрощают запись; хотя при этом мы допускаем некоторую

неопределенность в величине постоянного коэффициента, входящего в выражение электрического поля, но это не имеет практического значения для рассматриваемого вопроса.

§ 5. Фильтрация пространственных частот при когерентном освещении. Опыты Аббе

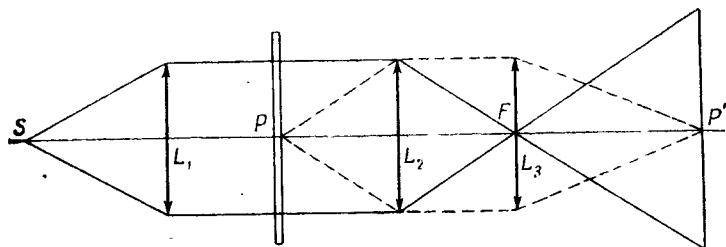
В этом случае проблема более проста, чем в случае некогерентного освещения. В самом деле, рассмотрим распределение комплексных амплитуд $\Omega(y, z)$ на плоскости объекта; математическое выражение принципа Гюйгенса — Френеля [соотношение (3.10)] показывает, что распределение амплитуд на сфере с центром в O есть преобразование Фурье функции $\Omega(y, z)$. Эта сфера сравнения S может, в частности, опираться на контур входного зрачка прибора, и для того, чтобы перейти к распределению амплитуд на сфере S' с центром в O' , достаточно вычислить изменение оптического пути L между этими двумя сферами [соотношение (3.11)], т. е. абберацию прибора. Наконец, изображение представляется преобразованием Фурье распределения амплитуд на S' , и мы увидим, что образованные изображения по существу есть следствие двух дифракций: одна соответствует переходу от объекта до входного зрачка, другая — от выходного зрачка до изображения. Поскольку каждой из этих дифракций соответствует свое преобразование Фурье, закон фильтрации представляется весьма простым. Если коэффициент пропускания прибора мало меняется, можно утверждать, что все частоты, распространяющиеся в направлении, проходящем через входной зрачок, пропускаются [иногда с изменением фазы, возникающим в результате действия величины $h(k\Delta)$ в соотношении (3.11)]; частоты же более высокие, направляющие дифрагированные волны мимо зрачка, исключаются; это и есть основная идея теории Аббе о разрешающей силе микроскопа.

Предположим, что объект представляет собой периодическую структуру (например, решетку со штрихами). Представление этого объекта интегралом Фурье содержит только основную частоту штрихов (обратную расстоянию между ними) и иногда ее гармоники. Явление дифракции

в зрачке будет обусловлено только этими прерывистыми элементами. Периодичность структуры будет ощущаться только тогда, если направление дифракционной волны, соответствующее основной частоте, попадает в зрачок. Для этого достаточно, чтобы угловое отверстие α (фиг. 28), соответствующее краю зрачка, было больше угла дифракции, соответствующей периоду p , т. е.

$$\alpha > \frac{\lambda}{p}$$

(если угол α велик, то нужно вместо него писать $\sin \alpha$). В более общем случае гармоника с частотой n/p будет



Фиг. 29.

пропущена, если $\alpha > n\lambda/p$, откуда можно заключить, что только более низкие частоты будут пропущены, вплоть до предельной частоты α/λ .

Классический эксперимент Аббе, предназначенный для проверки предыдущих идей, может быть выполнен по схеме, изображенной на фиг. 29. Источник S располагается в фокусе коллиматорной линзы L_1 , которая направляет параллельный пучок на объект P , предназначенный для исследования; линза L_2 образует спектр объекта в своей фокальной плоскости F ; проекционная линза L_3 образует изображение объекта. В плоскости линзы L_3 можно наблюдать некоторое распределение амплитуд, являющееся гармоническим анализом объекта. Следовательно, нетрудно часть этого распределения прикрыть и таким образом уничтожить некоторые частоты в изображении. Заметим, например, что в изображении периодической решетки не будет ощущаться никакой периодичности, если перекрыть

все дифракционные спектры решетки, — можно выборочно отфильтровать некоторые гармоники и получить изображение, лишенное некоторых составляющих, выбранных произвольно.

Позже мы увидим, что эти опыты, соответствующим образом видоизмененные, позволяют, в частности, улучшить оптические изображения, зарегистрированные на фотографической эмульсии (гл. 11, § 12).

ГЛАВА 4

Теоретический расчет контраста изображений для некоторых типовых объектов

В гл. 3 мы установили соотношения, позволяющие определить изображение любого объекта при двух предельных видах освещения. Но для восприятия весьма тонких подробностей объекта необходимо получить изображения с максимально достижимым контрастом и притом так, чтобы приемник (глаз, фотографическая пластинка, светочувствительный элемент) легко их обнаруживал. Однако воспринимаемые детали, представляющие интерес для наблюдений, бесконечно разнообразны по форме, размерам, распределению яркости и т. д.

Мы поэтому вынуждены ограничиться выбором только некоторых часто встречающихся типичных объектов, исследование изображений которых сравнительно просто в теоретическом отношении: маленькая темная точка на светлом фоне (который мы предполагаем равномерным), темная линия, граница светлого поля (вероятно, наиболее интересный для практики случай) и, наконец, периодические структуры. Все эти элементы будут надлежащим образом схематизированы: это даст возможность определить их изображения с достаточной точностью.

§ 1. Контраст изображения темной точки

а) Некогерентное освещение. Распределение яркости на объекте может быть представлено функцией $O(y, z)$, равной единице всюду, за исключением маленького участка s поверхности, окружающего начало координат, на котором она равна нулю. Другими словами, $O(y, z)$ может быть заменена функцией, всюду равной единице (равномерно освещенное светлое поле), из которой вычитается

функция, равная единице внутри маленькой поверхности s (светящаяся точка):

$$I(y', z') = \int \int_{-\infty}^{+\infty} D(y' - y, z' - z) dydz - sD(y', z'). \quad (4.1)$$

Применяя для этого случая соотношение (3.1), можно написать, обозначая индексом ∞ — s интеграл, распространенный на всю окрестность поверхности s :

$$\begin{aligned} I(y', z') &= \int \int_{\infty-s} D(y' - y, z' - z) dydz = \\ &= \int \int_{\infty} D(y' - y, z' - z) dydz - \int \int_s D(y' - y, z' - z) dydz. \end{aligned}$$

Это выражение сводится к равенству (4.1), если заметить, что во втором члене s является достаточно малой величиной, для которой изменениями D можно пренебречь, что позволяет положить $y = z = 0$, а $s = dydz$.

Примем в качестве переменных в первом члене $Y = y' - y$, $Z = z' - z$ и используем соотношение (2.25), где полагаем $\beta_0 = \gamma_0 = 0$. Для постоянной части I_0 получаем формулу

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint D(Y, Z) dYdZ = \iint |E^2(Y, Z)| dYdZ = \\ &= R^2 \iint |F(\beta', \gamma')|^2 d\beta' d\gamma'. \end{aligned} \quad (4.2)$$

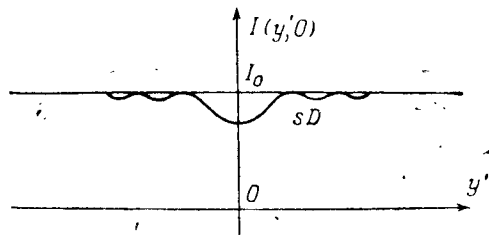
Величина I_0 характеризует общую энергию, распределенную в дифракционном пятне изображения точки; она не зависит от аберраций, поскольку в нее входит только модуль F , а фаза не входит.

Наконец, изображение можно представить в виде

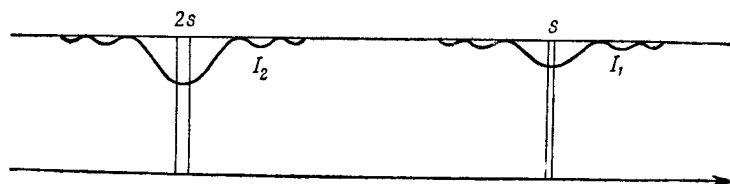
$$I(y', z') = I_0 - sD(y', z'). \quad (4.3)$$

На фиг. 30 представлено сечение графика функции $I(y', z')$ плоскостью $z' = 0$: оно состоит из равномерного фона, из которого вычитается соответствующее изолированной точке распределение $D(y', 0)$, умноженное на коэффициент s , равный площади геометрического изображения точки. На фиг. 31 два точечных источника, площади которых равны s и $2s$, представлены соответственно двумя

изображениями I_1 и I_2 , причем контраст для I_2 в 2 раза выше, чем для I_1 .



Фиг. 30.



Фиг. 31.

Естественно определить контраст как относительное снижение освещенности изображения

$$\gamma = \frac{sD_M(y', z')}{I_0}, \quad (4.4)$$

где D_M — величина максимума распределения D .

Однако для того, чтобы этот контраст возрастал при уменьшении aberrаций, нужно получить максимальную величину D в соответствии с условиями, налагаемыми на систему. Иначе говоря, нужно стремиться к тому, чтобы центральный максимум дифракционного пятна был настолько высок, насколько это возможно.

б) Когерентное освещение. Полагая, что функция $\Omega(y, z)$ имеет те же свойства, что и $O(y, z)$ в предыдущем случае, мы можем написать, основываясь на равенстве (3.5):

$$A(y', z') = \iint E(y' - y, z' - z) dy dz - sE(y', z'). \quad (4.5)$$

Используя переменные Y и Z и замечая, что интеграл, распространенный на бесконечность, может быть выражен

с помощью второго из соотношений (2.24), в котором $\beta' = \gamma' = 0$, получаем, считая R/λ целым числом, т. е. $h(kR) = 1$,

$$A(y', z') = i\lambda R \left\{ F(0, 0) - \frac{s}{\lambda^2} \iint F(\beta', \gamma') \times \right. \\ \left. \times h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta'd\gamma' \right\}. \quad (4.6)$$

Можно положить $\Delta(0, 0) = 0$ (поскольку к Δ можно добавить любую произвольную постоянную) и модуль $F(0, 0)$ равным единице: $F(0, 0) = 1$. При этих условиях, если s имеет небольшую освещенность, получим освещенность на изображении, вычислив величину

$$\left| 1 - \frac{s}{\lambda^2} \iint \dots \right|^2 \approx 1 - \frac{2s}{\lambda^2} R \left(\iint \dots \right),$$

а контраст может быть охарактеризован величиной

$$\gamma = \frac{2s}{\lambda^2} R_M \left\{ \iint F(\beta', \gamma') h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta'd\gamma' \right\},$$

где через $R_M(\dots)$ обозначен максимум действительной части интеграла. Само собой разумеется, интеграл равен $E(y', z')$ с точностью до множителя, и распределение освещенности в изображении будет иметь вид, представленный на фиг. 32, который соответствует случаю совершенно стигматического прибора с круглым зрачком.

§ 2. Контраст изображения темной линии и границы светлого поля

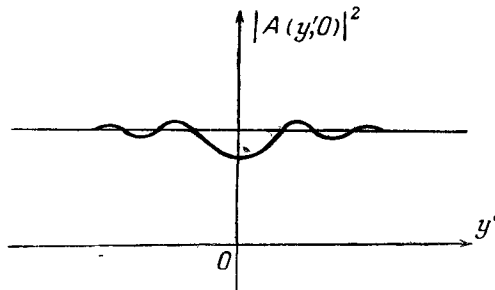
а) Некогерентное освещение. Темную линию шириной ϵ , проведенную вдоль оси Oz , можно охарактеризовать функцией $O(y, z)$, которая всюду равна единице, исключая малый интервал $0 < y < \epsilon$, где она равна нулю. Тогда имеем

$$I(y', z') = \iint D(y' - y, z' - z) dy dz - \\ - \epsilon \int D(y', z' - z) dz = I_0 - \epsilon \int D(y', Z) dZ. \quad (4.7)$$

Это приводит к необходимости рассмотреть функцию

$$S(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} D(y', z') dz'. \quad (4.8)$$

Представим функцию $D(y', z')$ в виде поверхности, полученной нанесением значений D на прямых, перпендикулярных плоскости y', z' ; эта поверхность ограничивает объем, который часто называют «дифракционным телом»



Фиг. 32.

(фиг. 33). Функция $S(y')$ равна величине площади сечения этого тела плоскостью, имеющей ординату y' . Эта функция в действительности представляет распределение освещенности в изображении светящейся линии и участвует в определении изображений всяких линейных объектов (линии, полосы, границы светлого поля, периодической структуры и т. д.). Распределение освещенности в изображении темной линии, являющееся функцией только y' , окончательно выражается функцией

$$I(y') = I_0 - \varepsilon S(y'),$$

изменение которой может быть представлено кривой, похожей на кривую, изображенную на фиг. 30. Можно выразить $S(y')$ в виде функции от $F(\beta', \gamma')$. Действительно, используя соотношение (2.12), получаем выражение

$$S(y') = \int E(y', z') E^*(y', z') dz'. \quad (4.9)$$

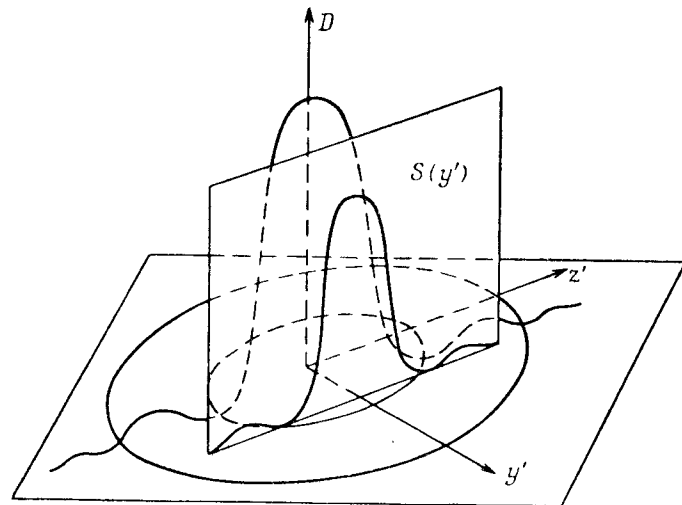
Напишем равенство (2.24) в следующем виде [полагая $h(kR) = 1$]:

$$E(y', z') = \frac{iR}{\lambda} \int h(-k\gamma'z') \left[\int F(\beta', \gamma') h(-k\beta'y') d\beta' \right] d\gamma'.$$

Оно показывает, что $E(y', z')$ является преобразованием Фурье по одной переменной функции

$$f(\gamma', y') = \int F(\beta', \gamma') h(-k\beta'y') d\beta', \quad (4.10)$$

или, точнее, согласуя эту формулу с соотношением (2.8), можно утверждать, что $(\lambda/iR)E(y', z')$ является преобра-



Фиг. 33.

зованием по одной переменной функции $f(\gamma', y')$, к которой можно прийти, полагая $\gamma' = u$ и $z'/\lambda = x$.

Пользуясь выражением (2.12), выводим

$$S(y') = \int |E(y', z')|^2 dz' = \frac{R^2}{\lambda} \int |f(\gamma', y')|^2 d\gamma'; \quad (4.11)$$

эта формула позволяет вычислить контраст γ , который можно выразить в виде

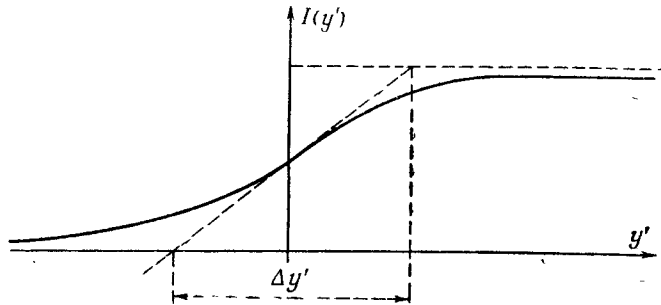
$$\gamma = \frac{\varepsilon S_M}{I_0}, \quad (4.12)$$

где S_M — величина максимума функции S .

Перейдем теперь к случаю границы светлого поля. Допустим, что функция $O(y, z)$ равна единице, если $y > 0$, и нулю, если $y < 0$. Интегрируя по $z' - z = Z$ и замечая, что $dz = -dZ$, получаем

$$\begin{aligned} I(y', z') &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(y' - y, z' - z) dy dz = \\ &= \int_0^{+\infty} S(y' - y) dy. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Естественно определить контраст изображения как спад кривой $I(y')$ (фиг. 34); спад выражается здесь с помощью функции S , значения которой даются соотношением (4.11).



Фиг. 34.

В данном случае удобно характеризовать отчетливость изображения границы светлого поля величиной интервала $\Delta y'$, который соответствует переходу от $I=0$ до $I=I_0$ с постоянным спадом, равным $S_M(y')$, и определяется формулой

$$\Delta y' = \frac{I_0}{S_M(y')}.$$

Качество оптического прибора будет тем выше, чем меньше величина $\Delta y'$.

б) Когерентное освещение. Для темной линии можно написать

$$\begin{aligned} A(y', z') &= \iint E(y' - y, z' - z) dy dz - \\ &- \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} E(y', z' - z) dz. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Преобразуем первый интеграл так же, как и в § 1, п. "б", что же касается второго интеграла, то он может быть написан в виде

$$e(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} E(y', z') dz'.$$

Для оценки его можно использовать соотношение (2.24), в котором полагаем $y' = 0$, $h(kR) = 1$ и разделяем интегрирование по переменным y' и z' :

$$iRF(\beta', 0) = \int e(y') h(k\beta' y') d\left(\frac{y'}{\lambda}\right).$$

Последнее соотношение показывает, что $e(y')$ является преобразованием Фурье функции $iRF(\beta', 0)$. Отсюда [применив соотношение (2.8), в котором полагаем $x = y'/\lambda$] получаем обратное преобразование

$$e(y') = iR \int F(\beta', 0) h(-k\beta' y') d\beta'$$

и в конце концов находим

$$A(y') = iR\lambda \left[F(0, 0) - \frac{\varepsilon}{\lambda} \int F(\beta', 0) h(-k\beta' y') d\beta' \right]. \quad (4.15)$$

Контраст оказывается равным [полагаем $F(0, 0) = 1$]

$$\gamma = \frac{2\varepsilon}{\lambda} R_M \left[\int F(\beta', 0) h(-k\beta' y') d\beta' \right]. \quad (4.16)$$

Любопытно отметить, что, согласно полученному выражению, контраст зависит только от функции на зрачке $F(\beta', \gamma')$, взятой вдоль оси $\gamma' = 0$.

Изучим теперь случай границы светлого поля. Функция $\Omega(y, z)$ равна нулю или единице соответственно для положительных или отрицательных значений y . Получаем

$$A(y') = \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} E(y' - y, z' - z) dz = \int_0^{\infty} e(y' - y) dy.$$

Освещенность изображения равна AA^* , а его контраст—производной по y . Легко вычисляем ее, написав

$$A(y') = \int_{-\infty}^{y'} e(Y) dY,$$

и производная оказывается равной

$$\frac{d}{dy'} |A^2(y')| = 2R [A(y') e^*(y')]. \quad (4.17)$$

При когерентном освещении контраст изображения границы светлого поля не выражается в виде функции от того же интеграла, что и контраст изображения темной линии.

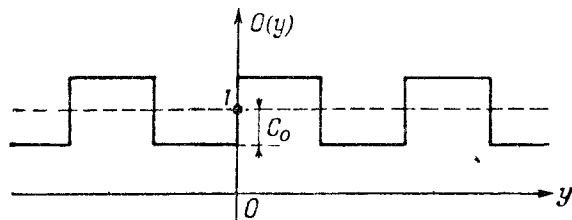
§ 3. Периодические структуры

Все необходимые элементы для исследования случая периодических структур уже получены в гл. 3 (пропускание частот при когерентном и некогерентном освещении), и мы ограничимся здесь лишь выводом выражения для контраста изображения мира Фуко, большое практическое применение которой оправдывает выбор этого примера.

а) Некогерентное освещение. В соответствии с выражением (2.4) мира с темными и светлыми штрихами может быть представлена рядом

$$O(y) = 1 + \frac{4C_0}{\pi} \left[\sin \frac{2\pi y}{p} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi y}{p} + \dots \right], \quad (4.18)$$

где C_0 —параметр, изменяющийся от 0 до 1 и определяющий контраст мира (фиг. 35). Мы уже видели, что об-



Фиг. 35.

разование изображения эквивалентно фильтрованию пространственных частот: Здесь можно более элементарным методом найти снова соответствующий вклад от каждого члена ряда в образование изображения, применив к каждому из них равенство (3.1).

Для основной частоты получим

$$\frac{4C_0}{\pi} \iint \sin 2\pi \frac{y}{p} D(y'-y, z'-z) dydz,$$

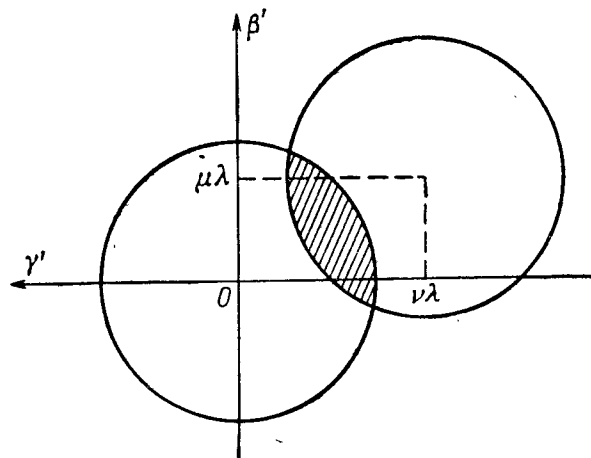
или, используя переменные $Y=y'-y$, $Z=z'-z$,

$$\begin{aligned} \frac{4C_0}{\pi} \iint \sin 2\pi \frac{y'}{p} (y'-Y) D(Y, Z) dYdZ = \\ = \frac{4C_0}{\pi} \left[\sin 2\pi \frac{y'}{p} \iint D(Y, Z) \cos 2\pi \frac{Y}{p} dYdZ - \right. \\ \left. - \cos 2\pi \frac{y'}{p} \iint D(Y, Z) \sin 2\pi \frac{Y}{p} dYdZ \right]. \end{aligned}$$

Эта синусоидальная составляющая объекта образует, следовательно, одну синусоидальную составляющую на изображении, что мы уже знаем по основным результатам гл. 3, и ее амплитуда, две составляющие которой, очевидно, здесь содержатся, легко получается из гармонического анализа функции $D(Y, Z)$. Вернемся, однако, к более общему приему, примененному в гл. 3; закон фильтрования является преобразованием Фурье $d(\mu, \nu)$ функции $D(Y, Z)$, которое выражено соотношением (3.8). По поводу этого соотношения прежде всего заметим, что $d(\mu, \nu)$ обращается в нуль, если частоты μ и ν слишком велики. Действительно, функция $F(\beta', \gamma')$ равна нулю вне контура зрачка, и произведение $F(\beta', \gamma') F^*(\beta' - \mu\lambda, \gamma' - \nu\lambda)$ может иметь не равное нулю значение, только если два контура, представленные на фиг. 36, имеют общую область: один из них является контуром зрачка, другой — также контуром зрачка, но смещенным в плоскости γ' , β' соответственно на $\nu\lambda$ и $\mu\lambda$. Обычный оптический прибор при всех обстоятельствах будет фильтром типа «ограничителя высоких частот», который полностью обрезает высокие частоты.

Если в случае периодического объекта основная частота не слишком высока, она пропускается, но высокие гармоники всегда задерживаются. Наблюдатель, однако, будет большей частью всегда удовлетворяться присутст-

нием основной частоты и будет утверждать, что прибор «разрешает» периодическую структуру. Если основная частота равна или близка к пределу разрешения, то все



Фиг. 36.

гармоники пропадают и сохраняется только основная частота; описание объекта может быть сведено к выражению

$$\begin{aligned} O(y) &= 1 + \frac{4C_0}{\pi} \sin \frac{2\pi y}{p} = \\ &= 1 + \frac{2C_0}{i\pi} \left[h\left(\frac{2\pi y}{p}\right) - h\left(-\frac{2\pi y}{p}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Функция $O(\mu, \nu)$ отличается от нуля только для трех значений μ , указанных ниже [для этих значений приведены также соответствующие значения $o(\mu, 0)$ и $i(\mu, 0)$]:

$\mu = -\frac{1}{p}$	0	$\frac{1}{p}$
$o(\mu, 0) = -\frac{2iC_0}{\pi}$	1	$\frac{2iC_0}{\pi}$
$i(\mu, 0) = -\frac{2iC_0}{\pi} d\left(-\frac{1}{p}\right)$	$d(0)$	$\frac{2iC_0}{\pi} d\left(\frac{1}{p}\right)$.

Значения $o(\mu, 0)$ получены при помощи формулы для $o(\mu, \nu)$, аналогичной формуле (3.2) для $i(\mu, \nu)$.

Изображение с точностью до постоянного множителя будет определяться выражением

$$\begin{aligned} I(y') &= d(0) - \frac{2iC_0}{\pi} \left[d\left(-\frac{1}{p}\right) h\left(2\pi \frac{y'}{p}\right) - \right. \\ &\quad \left. - d\left(\frac{1}{p}\right) h\left(-2\pi \frac{y'}{p}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Это выражение всегда действительно, потому что $D(Y, Z)$ — функция действительная, и из определения функции d имеем

$$d\left(-\frac{1}{p}\right) = d^*\left(\frac{1}{p}\right),$$

так что величина в квадратных скобках в выражении (4.20) является чисто мнимой. При этих условиях можно положить

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{p}\right) &= d_1 + id_2, \\ d\left(-\frac{1}{p}\right) &= d_1 - id_2. \end{aligned}$$

Определим, при каких условиях максимумы на изображении совпадут с максимумами на объекте. Используя формулы Эйлера, получаем

$$I(y') = d(0) + \frac{4C_0}{\pi} \left(d_1 \sin \frac{2\pi y'}{p} - d_2 \cos \frac{2\pi y'}{p} \right). \quad (4.21)$$

Чтобы член с косинусом был равен нулю как на изображении, так и на объекте, достаточно положить $d_2 = 0$, т. е. достаточно, чтобы эти две комплексные сопряженные величины являлись действительными. В противном случае предыдущее выражение позволяет устанавливать сдвиг синусоидальной составляющей на изображении относительно синусоидальной составляющей на объекте.

Определим теперь контраст. Амплитуды переменной освещенности в $I(y')$ будут равны $4C_0\alpha/\pi$, если положить

$$\alpha = (d_1^2 + d_2^2)^{1/2};$$

но из определения d_1 и d_2 мы сразу же получаем, что α — общий модуль чисел $d(-1/p)$ и $d(1/p)$.

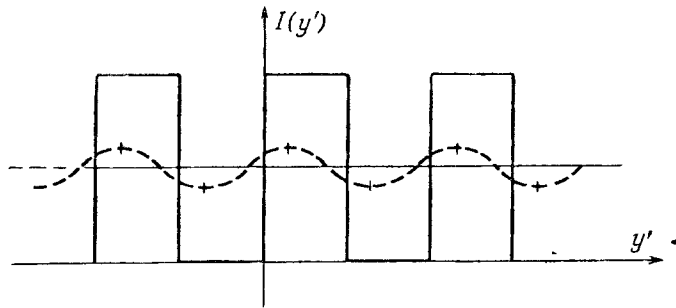
Наконец, можно написать закон распределения освещенности на изображении в виде

$$I(y') = d(0) \left[1 + \frac{4C_0}{\pi} \frac{\left| d\left(\frac{1}{p}\right) \right|}{d(0)} \sin\left(2\pi \frac{y'}{p} + \varphi\right) \right],$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{d_2}{d_1}.$$

На фиг. 37 штрихами показано относительное изменение функции $I(y')$ в случае, когда угол φ не равен нулю и отношение $d(1/p)/d_0$ невелико.



Фиг. 37.

б) Когерентное освещение. Представляется нецелесообразным разбирать здесь этот частный случай, относительно которого осталось лишь уточнить некоторые пункты. Изучение совершенного оптического прибора и принципа фазового контраста позволят нам позже рассмотреть со всей полнотой характер действия прибора в этом случае.

ГЛАВА 5

Стигматический прибор с круглым зрачком

После ознакомления с основными формулами общих законов дифракции и образования изображения протяженных объектов целесообразно применить главные результаты к простому случаю совершенного оптического прибора. Ранее полученные выражения, которые кажутся довольно сложными, приводят к простым результатам, если их применить к конкретному случаю. Мы изучим не только классическое распределение энергии в пятне изображения точки, но и определим контраст изображения любого типичного объекта, а также действие прибора при когерентном освещении, что приведет нас к исследованию фазового контраста. Прежде всего мы рассмотрим очень простой пример стигматического прибора с круглым зрачком и равномерным пропусканием; случай переменного пропускания (аподизация) будет изучен позднее.

§ 1. Изображение изолированной точки; дифракционное пятно Эри

Для стигматического прибора можно принять $\Delta \equiv 0$, откуда $F(\beta', \gamma') = E_0$. Можно также без потери общности считать R равным целому числу λ длин волн. Считая что $h(-kR) = 1$, получаем из (1.5)

$$E(y', z') = \frac{iRE_0}{\lambda} \iint_{\beta'^2 + \gamma'^2 < \alpha'^2} h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma'.$$

Чтобы найти преобразование Фурье функции-круг, можно использовать равенство (2.19), которое сведется после подстановки $x = \beta'$ и $y = \gamma'$ к выражению

$$E(y', z') = \frac{iRE_0}{\lambda} \pi \alpha'^2 \frac{2J_1(Z)}{Z}, \quad (5.1)$$

где

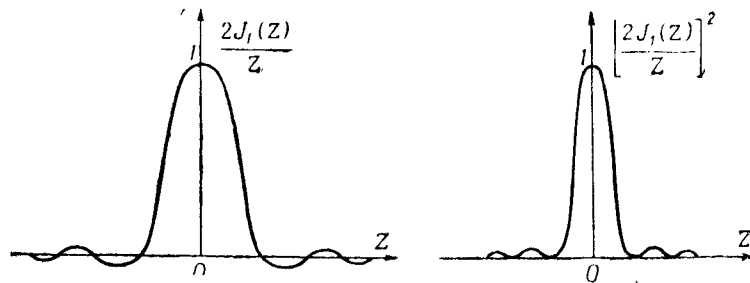
$$Z = \frac{2\pi\alpha'}{\lambda} \sqrt{y'^2 + z'^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha' \rho,$$

и окончательно будем иметь

$$D(y', z') = \frac{R^2 E_0^2 \pi^2 \alpha'^4}{\lambda^2} \left(\frac{2J_1(Z)}{Z} \right)^2 = K \left(\frac{2J_1(Z)}{Z} \right)^2. \quad (5.2)$$

Это выражение дает распределение освещенности в изображении изолированной светящейся точки, даваемом совершенным прибором. Из него видно, что освещенность в центре дифракционной картины пропорциональна квадрату площади зрачка. Если $Z=0$, то в действительности D пропорционально α'^4 . Это не удивительно, так как энергия в дифракционном пятне пропорциональна площади зрачка и концентрируется в пределах пятна, размеры которого уменьшаются при увеличении размеров зрачка.

Отметим также, что освещенность изменяется пропорционально λ^{-2} . Если предположить, что отверстие α' и



Фиг. 38.

полная энергия постоянны, то размеры дифракционного пятна будут меняться с длиной волны, и освещенность должна быть пропорциональна λ^{-2} для того, чтобы весь поток оставался неизменным.

На фиг. 38 и в табл. 1 показано изменение амплитуды и освещенности, или точнее изменение функции $2J_1(Z)/Z$ и ее квадрата. Таким образом, дифракционное

Таблица 1

Значения амплитуд и интенсивностей в дифракционном пятне стигматического прибора с круглым зрачком

z	$\frac{2J_1(Z)}{Z}$	$\left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right]^2$	z	$\frac{2J_1(Z)}{Z}$	$\left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right]^2$
0,0	+1,0000	1,0000	7,0	-0,0013	0,0000
1,0	+0,8801	0,7746	8,0	+0,0587	0,0034
2,0	+0,5767	0,3326	9,0	+0,0545	0,0030
3,0	+0,2260	0,0511	10,0	+0,0087	0,0001
4,0	-0,0330	0,0011	11,0	-0,0321	0,0010
5,0	-0,1310	0,0172	12,0	-0,0372	0,0014
6,0	-0,0922	0,0085			

пятно в стигматическом приборе с круглым зрачком состоит из очень яркого центрального пятна, окруженного кольцами, интенсивности которых относительно слабы. Темные кольца соответствуют корням уравнения $J_1(Z) = 0$, т. е.

3,83; 7,02; 10,17; 13,32 и т. д.

Максимумы соответствуют следующим значениям Z :

5,14; 8,46; 11,62,

а значения освещенностей пропорциональны (при освещенности в центре, принятой за единицу)

0,0175; 0,0042; 0,0016.

Первый минимум получается для $Z = 3,83$. Из определения Z вытекает, что радиус первого темного кольца равен

$$y' = \frac{3,83\lambda}{2\pi\alpha'},$$

или

$$\boxed{y' = \frac{1,22\lambda}{2\alpha'}}. \quad (5.3)$$

Таким образом, мы вновь пришли к хорошо известной классической формуле. Эти результаты можно легко отнести и к пространству объектов. Полагая прибор

апланатическим и принимая во внимание условие синусов Аббе, найдем, что две точки объекта могут быть разделены, если линейное расстояние между ними превосходит величину

$$y = \frac{1,22\lambda}{2n \sin \alpha};$$

угловой радиус первого темного кольца, видимый из выходного зрачка, равен

$$\frac{y'}{R} = \frac{1,22\lambda}{2h},$$

где $2h$ — диаметр зрачка прибора.

Из формулы (5.2), которая определяет Z , следует, что линейные размеры пятна зависят только от отношения $\lambda/2\alpha'$; можно, впрочем, заменить $1/2\alpha'$ числом N , определяющим относительное отверстие в пространстве изображений. В табл. 2 дано несколько числовых значений радиусов первого темного кольца для относительных отверстий от $f/3$ до $f/20$.

Таблица 2

Радиусы первого темного кольца (в мк)
для разных отверстий

$2 \alpha' =$	1/3	1/6	1/10	1/20
$\lambda = 0,555 \text{ мк}$	2,0	4,1	6,8	13,6
$\lambda = 0,435 \text{ мк}$	1,6	3,2	5,3	10,6

Можно получить значения функции $2J_1(Z)/Z$ и для больших значений Z . При этом целесообразно использовать следующее асимптотическое выражение:

$$J_1(Z) = \frac{\sin Z - Z \cos Z}{\sqrt{\pi Z}} \quad (Z \gg 1). \quad (5.4)$$

Тогда

$$D(y', z') = \frac{\pi^2 E_0^2 R^2 \alpha'^4}{\lambda^2} \cdot 4 \frac{(\sin Z - Z \cos Z)^2}{\pi Z^3}.$$

Нулевые минимумы определяются условием $\text{tg } Z = 1$. Из формулы для $D(y', z')$ видно, что если значительно

отойти от центра дифракционной фигуры, то расстояние между двумя последовательными минимумами будет практически постоянно и равно π .

§ 2. Распределение светового потока в пятне Эри

Рассмотрим элементарное маленькое кольцо, площадь которого равна $\rho d\rho = (\lambda^2/4\pi^2\alpha'^2)ZdZ$; световой поток, распределенный на этом элементе, будет равен (с точностью до множителя)

$$2\pi |E(Z)|^2 Z dZ.$$

Поток, падающий внутри круга радиусом Z , можно выразить формулой

$$F = 8\pi \int_0^Z \frac{J_1^2(Z)}{Z} dZ;$$

используя соотношения¹⁾

$$J_1'(Z) = \frac{J_1(Z)}{Z} + J_0(Z)$$

и

$$J_1(Z) = -J_0'(Z),$$

получаем

$$F = 8\pi \frac{1 - J_0^2(Z) - J_1^2(Z)}{2}.$$

Если Z стремится к бесконечности, то $F \rightarrow 4\pi$.

Принимая весь поток за единицу, напишем выражения, определяющие поток внутри круга радиусом Z :

$$F_i = 1 - J_0^2(Z) - J_1^2(Z)$$

и поток вне этого круга:

$$F_e = J_0^2(Z) + J_1^2(Z).$$

В табл. 3 даны значения F_i и F_e для некоторых значений Z .

¹⁾ См., например, A. Angot, Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications, Paris, 1957, или любую другую монографию по функциям Бесселя.

Таблица 3

Значения потока внутри и вне круга радиусом Z				
Z	3,832	7,015	10,173	13,324
F_i	0,839	0,910	0,938	0,953
F_e	0,161	0,090	0,062	0,047

Здесь уместно заметить, что освещенности в пределах колец слабы, но весь поток за пределами центрального пятна составляет значительную величину (около 16%); этот поток переносится на изображение в виде паразитного света, который практически не используется для образования изображения, поэтому понятен интерес, который может представить аподизация (см. гл. 11).

§ 3. Изображение при некогерентном освещении

Теперь мы перейдем к приложению результатов, полученных в гл. 4, и определим контраст для некоторых типичных объектов при некогерентном освещении.

а) Изображение темной точки на светлом фоне. Установим прежде всего соотношение, пригодное для любого стигматического прибора с равномерным пропусканием. Соотношение (4.2) переписывается следующим образом, если через ω обозначить телесный угол конуса лучей, формирующих изображение:

$$I_0 = R^2 \iint E_0^2 d\beta' d\gamma' = R^2 E_0^2 \omega. \quad (5.6)$$

Вычисление контраста с помощью формулы (4.4) требует определения величины $D_M(y', z')$; но поскольку

$F(\beta', \gamma') = E_0$, то необходимо найти максимум модуля величины

$$E(y', z') = \frac{iRE_0}{\lambda} \iint h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma', \quad (5.7)$$

который, очевидно, будет иметь место, когда $y' = z' = 0$, т. е. когда экспонента равна единице. Получаем тогда

$$E(y', z') = \frac{iRE_0}{\lambda} \omega,$$

откуда

$$D_M = \frac{R^2 E_0^2 \omega^2}{\lambda^2},$$

и соотношение (4.4) дает для контраста изображения маленькой темной точки величину

$$\gamma = \frac{s\omega}{\lambda^2}. \quad (5.8)$$

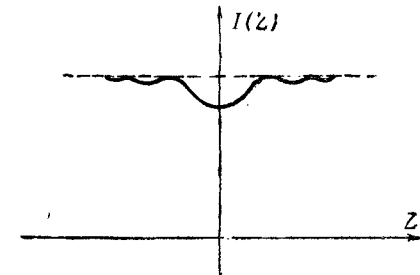
Это равенство применимо для всех стигматических приборов с круглым зрачком. Для доказательства можно вновь рассмотреть выражение (4.3) и заменить там I_0 величиной, определяемой по формуле (5.6):

$$I(y', z') = R^2 E_0^2 \omega - sD(y', z'). \quad (5.9)$$

Для круглого зрачка эта формула принимает вид

$$I(Z) = R^2 E_0^2 \omega \left[1 - \frac{s\omega}{\lambda^2} \left(\frac{2J_1(Z)}{Z} \right)^2 \right]. \quad (5.10)$$

Изображение определяется кривой, вид которой представлен на фиг. 39. Конечно, все эти выводы применимы



Фиг. 39.

только когда поверхность s мала по сравнению с площадью первого темного кольца в пятне. В случае, когда размер объекта больше этой площади, распределение освещенности в изображении, очевидно, зависит от формы объекта

б) Светлая линия на темном фоне и темная линия на светлом фоне. Исходя из соотношений, полученных в гл. 4, § 2, имеем

$$I(y') = \begin{cases} \varepsilon S(y') & \text{для светлой линии,} \\ I_0 - \varepsilon S(y') & \text{для темной линии,} \end{cases} \quad (5.11)$$

а, с другой стороны,

$$S(y') = \frac{R^2}{\lambda} \int |f(\gamma', y')|^2 d\gamma', \quad (5.12)$$

$$f(\gamma', y') = \int F(\beta', \gamma') h(-k\beta' y') d\beta'.$$

В рассматриваемом случае $F(\beta', \gamma') = E_0$ и внутри круга $\beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha'^2$ будем иметь

$$\begin{aligned} f(\gamma' y') &= E_0 \int_{-V_{\alpha'^2 - \gamma'^2}}^{+V_{\alpha'^2 - \gamma'^2}} h(-k\beta' y') d\beta' = \\ &= 2E_0 \frac{\sin ky' \sqrt{\alpha'^2 - \gamma'^2}}{ky'}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$S(y') = \frac{\lambda R^2 E_0^2}{\pi^2 y'^2} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} \sin^2 ky' \sqrt{\alpha'^2 - \gamma'^2} d\gamma'.$$

Полагая $\lambda R^2 E_0^2 / \pi^2 y'^2 = A$, получаем

$$S(y') = A \int_0^{\alpha'} (1 - \cos 2ky' \sqrt{\alpha'^2 - \gamma'^2}) d\gamma'.$$

С помощью замены переменной $\gamma' = \alpha' \sin \theta$ сводим этот интеграл к интегралу Струве:

$$\begin{aligned} S(y') &= A \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2ky' \alpha' \cos \theta) \alpha' \cos \theta d\theta = \\ &= A \frac{\pi \alpha'}{2} H_1(2Z), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где H_1 — функция Струве первого порядка, а $Z = ky' \alpha'$. Окончательно имеем

$$S(y') = kR^2 E_0^2 \alpha'^3 \frac{H_1(2Z)}{Z^2}. \quad (5.14)$$

Для темной линии, в частности, имеем, принимая во внимание равенство (5.6):

$$I(Z) = R^2 E_0^2 \omega \left[1 - \frac{2\varepsilon \alpha'}{\lambda} \frac{H_1(2Z)}{Z^2} \right]. \quad (5.15)$$

Существуют таблицы, дающие значения функции H_1 . Мы приведем здесь значения $H_1(2Z)$ для Z от 0 до 8:

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$H_1(2Z)$	0,0000	0,6468	1,0697	0,4782	0,4881	0,8918	0,5839	0,4732	0,8171

В середине изображения линии имеем $Z = 0$ и $H_1(2Z)/Z^2$ стремится к величине $8/3\pi$; при этом получаем

$$I(0) = R^2 E_0^2 \omega \left[1 - \frac{16\varepsilon \alpha'}{3\pi \lambda} \right],$$

и контраст оказывается равным

$$\gamma = \frac{16\varepsilon \alpha'}{3\pi \lambda}. \quad (5.16)$$

Контраст можно получить и непосредственно, вычисляя значение максимума $S(0)$ функции $S(y')$ при помощи (5.11). Таким образом, получаем

$$f(\gamma', 0) = E_0 \int_{-V_{\alpha'^2 - \gamma'^2}}^{+V_{\alpha'^2 - \gamma'^2}} d\beta' = 2E_0 \sqrt{\alpha'^2 - \gamma'^2}$$

и

$$S(0) = \frac{4R^2 E_0^2}{\lambda^2} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} (\alpha'^2 - \gamma'^2) d\gamma' = \frac{16R^2 E_0^2}{3\lambda} \alpha'^2,$$

откуда контраст, согласно (5.11), определяется уравнением

$$\frac{\varepsilon S(0)}{I_0} = \frac{16\varepsilon \alpha'}{3\pi \lambda}.$$

Это вычисление проще, но оно определяет контраст только в центре изображения темной линии, тогда как формула (5.12) позволяет полностью определить кривую распределения интенсивностей для тонкой темной линии и для светлой линии.

в) **Край светлого поля.** Равенство (4.13) может быть написано в следующем виде:

$$I(y') = \int_{-\infty}^{y'} S(Y) dY,$$

откуда, принимая во внимание (5.14) и полагая теперь $(2\pi/\lambda)\alpha'Y = Z$, получаем

$$I(y') = R^2 E_0^2 \alpha'^2 \int_{-\infty}^z \frac{H_1(2Z)}{Z^2} dZ. \quad (5.17)$$

Изображение будет иметь вид, показанный на фиг. 36.

Можно найти и оценить спад кривой $I(y')$. Он определяется величиной $S(y')$, максимальное значение которой равно $S(0)$. Интервал, характеризующий этот максимальный спад, равен

$$\Delta y' = \frac{I_0}{S(0)} = \frac{3\pi\lambda}{16\alpha'}.$$

г) **Периодические структуры; разрешающая сила и предельная частота.** Фильтрация пространственных частот принимает особенно простой вид в случае стигматического прибора. Достаточно оказывается вычислить функцию $d(\mu, \nu)$, являющуюся преобразованием Фурье функции $D(y', z')$, которое можно выразить с помощью соотношения (3.8). Функция F равна E_0 внутри круга радиусом α' и нулю вне этого круга, а $d(\mu, \nu)$ определяется величиной общей площади двух пересекающихся кругов, изображенных на фиг. 36, и зависит только от расстояния между их центрами $\lambda\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$. Можно определить «функцию фильтрации», или «множитель контраста», или «нормированный множитель модуляции» M , максимальное значение которого будет равно единице при $\mu = \nu = 0$. Для этого напишем

$$d(\sqrt{\mu^2 + \nu^2}) = \pi R^2 \alpha'^2 M$$

и

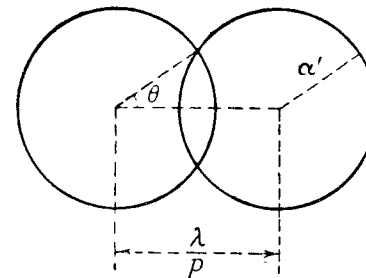
$$M = \frac{S}{\pi\alpha'^2},$$

причем здесь S — общая часть площади двух пересекающихся кругов.

Легко определить эту площадь в зависимости от расстояния между центрами, которое мы положим равным λ/p , где p — пространственный период, соответствующий наблюдаемой составляющей.

Если θ — угол, показанный на фиг. 40, имеем

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{2p\alpha'},$$



Фиг. 40.

и отсюда просто получается, что

$$M = \frac{2}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta). \quad (5.18)$$

Изменение множителя контраста M представлено на фиг. 41. Теперь становится понятной природа свойств фильтрации пространственных частот, которым обладает совершенный стигматический прибор, — речь идет о фильтре, пропускающем низкие частоты и срезающем все пространственные частоты, превышающие предельную частоту

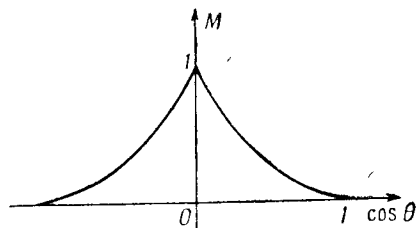
$$\frac{1}{p_m} = \frac{2\alpha'}{\lambda}.$$

Этой максимальной пространственной частоте соответствует минимальный период p_m , определяемый простым вы-

ражением

$$p_m = \frac{\lambda}{2\alpha'} \quad (5.19)$$

Можно еще уточнить характер функции $M(\cos \theta)$, определив ее численные значения для ряда значений $\cos \theta$ (табл. 4).



Фиг. 41.

Таблица 4

Значения множителя контраста M при разных значениях $\cos \theta$

$\cos \theta$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
M	0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374

Наконец, в дальнейшем окажется весьма полезным определение значений величины M в окрестности предельной частоты (когда $\cos \theta$ близок к единице). Можно опять найти приближенное выражение для M в виде функции $\cos \theta$, для чего достаточно сохранить первый член в разложении M , заменив θ величиной $[2(1 - \cos \theta)]^{\frac{1}{2}}$; таким образом получим

$$M \approx \frac{4}{3\pi} [2(1 - \cos \theta)]^{3/2} \text{ при малых } \theta. \quad (5.20)$$

В заключение этого параграфа необходимо еще раз отметить простоту полученных результатов. Совершенный стигматический прибор производит фильтрацию пространственных частот по вышеуказанному закону. Множитель контраста M (аналогичный коэффициенту усиления

в радиотехнике) пропорционален общей части площади двух пересекающихся кругов, если зрачок имеет форму круга, и строго равен нулю, если эти круги не пересекаются. Существует, кроме того, предельная частота, ниже которой ни один «сигнал» не пропускается. Эта предельная частота, выражающаяся очень просто, достаточно полно характеризует оптический прибор и позволяет выгодно заменить традиционное определение разрешающей силы; действительно, последняя измеряется наименьшим линейным расстоянием между двумя точками, изображения которых разделены, т. е. практически определяется радиусом первого темного кольца дифракционного пятна

$$y' = \frac{1,22\lambda}{2\alpha'}$$

Это определение «разрешения» двух точек имеет условный характер: когда две точки расположены на указанном выше расстоянии, то распределение освещенности в изображении имеет минимум, величина которого составляет 0,775 величины двух соседних максимумов, но очевидно, что две точки можно еще немного сблизить и все еще будут заметны два максимума; даже тогда, когда минимум исчезает, опытный наблюдатель распознает наличие двух точек, так как пятно изображения имеет эллиптический контур. Понятие о предельной частоте, если оно дополняется понятием закона пропускания в виде функции от внешней частоты, дает все сведения о законе соответствия между объектом и изображением.

§ 4. Изображение освещенных объектов при когерентном освещении

Мы изучим прежде всего амплитудные объекты, определение которых дано в гл. 4: темную точку, темную линию и границу светлого поля. Фазовые объекты и периодические (по амплитуде или фазе) структуры будут рассмотрены при изучении фазового контраста (гл. 6).

а) Изображение темной точки на светлом фоне. Вернемся снова к выражению (4.6). В случае стигматического прибора можем написать

$A(y', z') = iR\lambda E_0 \left\{ 1 - \frac{s}{\lambda^2} \iint h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma' \right\}$,
или, используя равенства (5.1) и (5.2),

$$A(y', z') = iRE_0 \left[1 - \frac{\pi s \alpha'^2}{\lambda^2} \frac{2J_1(Z)}{Z} \right]. \quad (5.21)$$

Распределение освещенности получаем, возводя в квадрат амплитуду $A(y', z')$, это дает кривую вида, показанного на фиг. 32, причем величина максимума $2J_1(Z)/Z$ равна единице и контраст изображения темной точки при когерентном освещении будет равен (если s мало)

$$\gamma = \frac{2\pi s \alpha'^2}{\lambda^2} = \frac{2s\omega}{\lambda^2}. \quad (5.22)$$

Следует, впрочем, отметить, как и в § 2, что этот результат не зависит от формы зрачка. Исходя из соотношения (4.4), мы можем написать

$$\gamma = \frac{2sE_0}{\lambda^2} R_M \left\{ \iint h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma' \right\};$$

однако модуль интеграла принимает максимальное значение только тогда, когда все множители имеют одну и ту же фазу, т. е. когда $y' = z' = 0$. При этих условиях выражение интеграла сведется к величине угла ω , и мы вновь приходим к равенству (5.22). Таким образом, при прочих равных условиях контраст изображения темной точки при когерентном освещении оказывается в 2 раза выше, чем при некогерентном освещении.

б) Светлая линия и темная линия. Применяя результаты, полученные в гл. 4, § 2, п. «б», имеем соответственно для светлой и темной линий

$$A_l(y') = iR\epsilon E_0 \int_{\gamma'=0} h(-k\beta'y') d\beta',$$

$$A_n(y') = iR\epsilon E_0 \left[1 - \frac{\epsilon}{\lambda} \int h(-k\beta'y') d\beta' \right].$$

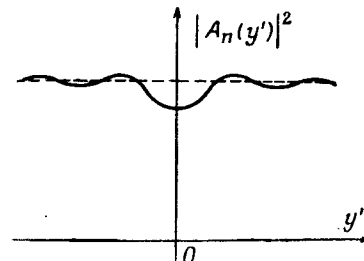
Можно ограничиться наиболее интересным случаем, а именно случаем темной линии; для него при круглом зрачке получим

$$\int_{\gamma'=0} h(-k\beta'y') d\beta' = \frac{2}{ky'} \sin k\alpha'y',$$

откуда распределение освещенности на изображении (при малом значении ϵ) имеет вид

$$|A_n(y')|^2 = R^2 \lambda^2 E_0^2 \left(1 - \frac{2\epsilon}{\pi y'} \sin k\alpha'y' \right). \quad (5.23)$$

Мы получили распределение энергии, аналогичное представленному на фиг. 42.



Фиг. 42.

Вычислим контраст этого изображения; если $y' \rightarrow 0$, в пределе получаем

$$|A_n(0)|^2 = R^2 \lambda^2 E_0^2 \left[1 - \frac{2\epsilon k \alpha'}{\pi} \right]$$

и контраст выражается формулой

$$\gamma = \frac{2\epsilon k \alpha'}{\pi} = \frac{4\epsilon \alpha'}{\lambda}. \quad (5.24)$$

Таким образом, контраст изображения тонкой темной линии при когерентном освещении выше, чем при некогерентном; если сравнить его с выражением (5.16), то найдем, что контраст теперь в 2,36 раза выше, чем при некогерентном освещении. Заметим, что распределение энергии в изображении тонкой светлой линии дается формулой

$$A_l^2(y') = 4R^2 \epsilon^2 E_0^2 a'^2 \left(\frac{\sin Z}{Z} \right)^2. \quad (5.25)$$

в) Граница светлого поля. Пользуясь уравнениями гл. 4, § 2, можем написать для границы светлого поля

$$A(y') = \int_{-\infty}^{y'} e(Y) dY,$$

а поскольку из (4.11) имеем

$$e(y') = iRE_0 \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} h(-k\beta'y') dy' = \frac{2iRE_0}{ky'} \sin k\alpha'y',$$

то, значит,

$$A(y') = 2iRE_0\alpha' \int_{-\infty}^{y'} \frac{\sin k\alpha'y'}{k\alpha'y'} dy'. \quad (5.26)$$

Используя определение функции Si(Z) (интегральный синус), предыдущее равенство сведем к следующему:

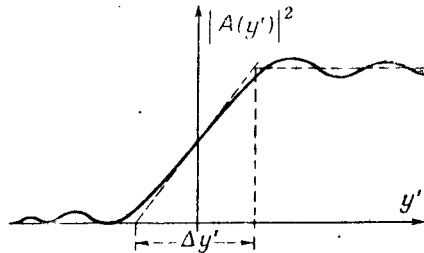
$$A(y') = \frac{2iRE_0}{k} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Si}(Z) \right]. \quad (5.27)$$

Распределение интенсивностей в изображении дается кривой, приведенной на фиг. 42. Для определенности можно вычислить спад этой кривой:

$$\frac{d}{dy'} |A(y')|^2 = \frac{8R^2E_0^2\alpha'^2}{k} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Si}(Z) \right] \frac{\sin Z}{Z}.$$

Еще удобнее здесь охарактеризовать спад кривой освещенности величиной интервала $\Delta y'$, определяемой из условия (фиг. 43)

$$\frac{d}{dy'} |A(y')|^2 \Delta y' = |A(\infty)|^2;$$



Фиг. 43.

$\Delta y'$ можно вычислить либо для $Z = 0$, что дает порядок величины, либо для значения Z , при котором производ-

ная принимает максимальное значение. Находим соответственно

$$\Delta y' = \frac{\lambda}{2\alpha'} \text{ при } Z = 0,$$

$$\Delta y' = 0,37 \frac{\lambda}{2\alpha'} \text{ при } Z, \text{ соответствующем}$$

максимальному значению производной.

Из сравнения этих результатов с соотношениями, полученными в § 2, п. «в», можно установить, что контраст при когерентном освещении выше, чем при некогерентном.

§ 5. Примеры практических приложений

В этих приложениях будем полагать прибор совершенным (стигматическим) и глаз наблюдателя находящимся в условиях, когда его также можно считать совершенным. Для выполнения второго условия необходимо применить достаточное увеличение, чтобы диаметр зрачка окуляра прибора был не больше 0,6—0,8 мм. Зная минимум контраста, воспринимаемого сетчаткой, можно определить предельную чувствительность или предельное разрешение.

а) Некогерентное освещение. 1. Видимость темной точки. Изучим, например, видимость прохождения планеты Меркурий по диску Солнца. Отношение между яркостями Меркурия и Солнца таково, что Меркурий можно рассматривать, как маленький темный диск. Так как минимум контраста, воспринимаемый глазом, составляет приблизительно 0,04 для изображения точки, мы положим, пользуясь равенством (5.8),

$$\frac{s\omega}{\lambda^2} = 0,04;$$

это соотношение может быть написано для любой области пространства прибора; мы выберем для удобства промежуточное пространство за объективом прибора. Если D — используемый диаметр зрачка объектива и F — его фокусное расстояние, имеем

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4F^2}, \quad s = \frac{\pi F^2 \theta^2}{4},$$

где θ — видимый диаметр Меркурия. Тогда будем иметь $D = 0,8\lambda/\pi\theta$; для видимого углового диаметра Меркурия можно положить $\theta = 12''$ и при $\lambda = 0,55 \text{ мк}$ получим $D = 2,3 \text{ мм}$.

Вероятно, можно было бы видеть прохождение Меркурия и невооруженным глазом, если бы можно было считать глаз совершенным при таком отверстии. В действительности это невозможно и нужно вооружиться слабо увеличивающей трубой и ослабить соответствующим поглощающим стеклом излучение фотосферы Солнца, чтобы избежать ослепления. С другой стороны, мы пренебрегли явлениями турбулентности атмосферы, понижающими контраст изображения вследствие деформации волновой поверхности (см. гл. 8).

2. Видимость тонкой черной линии. Рассмотрим воздушный провод высокого напряжения диаметром 15 мм и определим максимальное расстояние, с которого его еще можно видеть на фоне неба.

Обычно принимают, что для тонкой темной линии минимум ощущаемого контраста составляет величину порядка 0,02. Пользуясь равенством (5.16), получаем

$$\frac{16\epsilon\alpha'}{3\pi\lambda} = 0,02.$$

Если X — расстояние до провода, D — диаметр зрачка глаза, то, применяя это соотношение к пространству объектов при $\epsilon = 15 \text{ мм}$, легко получим $\alpha = D/2X$, $X = 1,27 \cdot 10^6 \cdot D \text{ мм}$. Обычно для зрачка полагают $D = 2 \text{ мм}$; тогда получаем $X = 2,3 \text{ км}$. В действительности известно, что глазом легко заметить удаленные линии, угловая ширина которых значительно меньше дифракционного пятна. Тем не менее действительные цифры будут значительно меньше полученных здесь, так как контраст провода на фоне неба не равен единице и, кроме того, глаз не может считаться совершенным оптическим прибором при таком отверстии.

3. Видимость некоторых периодических тестов. Рассмотрим бинокль распространенного типа, обладающий входным зрачком диаметром 30 мм, и вычислим для него предельное угловое разрешение для различных периодических объектов. Во избежание неопре-

деленности в отношении обозначений будем изучать первичное изображение, даваемое объективом, в промежуточном пространстве; примем $\lambda = 0,55 \text{ мк}$.

Видимость мира Фучо с контрастом, равным единице. Равенство (4.18), где полагаем $C_0 = 1$, представляет объект в виде

$$O(y) = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi y}{p} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi y}{p} + \dots \right).$$

Используя обозначения § 2, имеем для изображения

$$I(y') = 1 + \frac{4}{\pi} \left[M\left(\frac{\lambda}{2pa'}\right) \sin \frac{2\pi y'}{p} + M\left(\frac{3\lambda}{2pa'}\right) \sin 3 \frac{2\pi y'}{p} + \dots \right];$$

поскольку вблизи от предела разрешения модуляционный множитель весьма мал даже для основного периода, он, естественно, равен нулю для гармоник. Изображение при этих условиях представляется уравнением

$$I(y') = 1 + \frac{4}{\pi} M\left(\frac{\lambda}{2pa'}\right) \sin \frac{2\pi y'}{p};$$

изображение периодического объекта вблизи от предела разрешения является строго синусоидальным. Принимая 0,02 за минимум замечаемого глазом контраста, можно написать

$$\frac{4}{\pi} M\left(\frac{\lambda}{2pa'}\right) = 0,01;$$

исходя из выражения (5.20), имеем $1 - \cos \theta = 0,035$, откуда

$$p = \frac{1,035}{2\alpha'} = 1,035 p_m.$$

Таким образом, получена величина, весьма близкая к предельному периоду p_m .

Видимость мира Фучо при слабом контрасте. Напишем выражение яркости для мира (объекта) в виде

$$1 + \frac{4C_0}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi y}{p} + \dots \right),$$

где C_0 — параметр, определяющий контраст объекта. Таким образом, светлые штрихи будут иметь яркость $1 + C_0$, а темные $1 - C_0$. Примем $C_0 = 1/20$ (мира —

объект с контрастом 0,1). Напишем, как и в предыдущем случае,

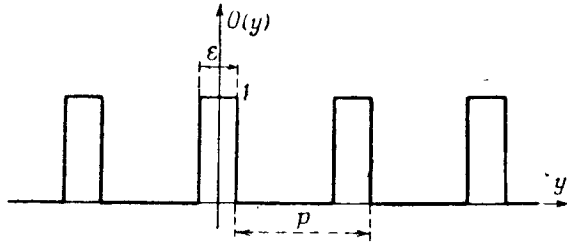
$$\frac{4MC_0}{\pi} = 0,01,$$

откуда

$$M = \frac{\pi}{20}, \quad 1 - \cos \theta = 0,26 \quad \text{и} \quad p = 1,35 \frac{\lambda}{2\alpha'}.$$

Минимальный разрешаемый период в этом случае оказывается значительно больше.

Видимость мира с разными по ширине светлыми и темными штрихами. Рассмотрим миру, светлые штрихи которой имеют ширину ε и разделены расстоянием p (фиг. 44).



Фиг. 44.

Мира-объект может быть представлена выражением

$$\frac{\varepsilon}{p} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi \varepsilon}{p} \cos \frac{2\pi y}{p} + \sin 2 \frac{\pi \varepsilon}{p} \cos 2 \frac{2\pi y}{p} + \dots \right),$$

или, если ε/p мало,

$$\frac{\varepsilon}{p} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi y}{p} + 2 \cos 2 \frac{2\pi y}{p} + \dots \right).$$

Для предела разрешения на изображении можно написать с точностью до постоянного множителя

$$1 + 2M \left(\frac{\lambda}{2p\alpha'} \right) \cos \frac{2\pi y'}{p}.$$

Кроме того, можем принять $2M \approx 0,01$, вследствие чего

$$1 - \cos \theta = 2,5 \cdot 10^{-2};$$

$$p = 1,025 \frac{\lambda}{2\alpha'}.$$

Поменяем местами темные и светлые штрихи, т. е. примем для темных штрихов ширину ε . Мира теперь представится выражением

$$1 - \frac{\varepsilon}{p} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi y}{p} + \dots \right).$$

Условие видимости принимает вид

$$2M \frac{\varepsilon}{p} = 0,01.$$

Предположим, например, что $\varepsilon/p = 0,1$. Тогда имеем $M = 0,05$, $1 - \cos \theta = 0,12$, откуда

$$p = 1,14 \frac{\lambda}{2\alpha'}.$$

Следовательно, разрешающая сила мало убывает, если ε/p не слишком мало.

б) Когерентное освещение. Рассмотрим микроскоп, снабженный сухим объективом с числовой апертурой $\sin \alpha = 0,5$. Закроем диафрагму конденсора таким образом, чтобы получить практически когерентное освещение (см. гл. 7, § 1). Каков будет наименьший диаметр различимой темной точки? Из (5.22) получаем

$$\frac{2s\omega}{\lambda^2} = 0,04;$$

полагая $\lambda = 0,55 \text{ мк}$ и $\omega = \pi/4$, имеем $s = 0,007 \text{ мк}^2$; таким образом, в пределе можно заметить темную точку диаметром около $0,09 \text{ мк}$.

Вычислим теперь ширину наиболее тонкой темной линии, еще различимой глазом. Из (5.24) получаем $4\varepsilon \sin \alpha / \lambda = 0,02$, откуда $\varepsilon = 0,005 \text{ мк}$.

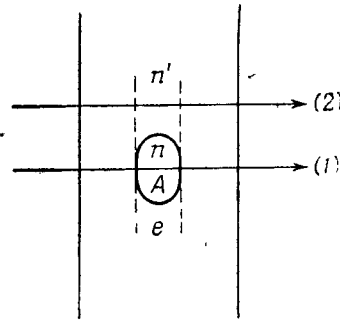
Заметим еще раз, что можно наблюдать линии и еще более тонкие. Необходимо тем не менее отметить, что микроскопический объект редко бывает совершенно «черным». Для этого нужно было бы, чтобы среда, которая его окружает, имела чрезвычайно высокий коэффициент поглощения и, таким образом, несмотря на малую толщину этого объекта, коэффициент пропускания становился бы очень малым.

ГЛАВА 6

Фазовый контраст

§ 1. Принцип метода

В микроскопии часто имеют дело с объектами, которые невидимы не потому, что они слишком малы, а потому, что они прозрачны и практически не выделяются на окружающем фоне. Эти объекты, характеризующиеся изменениями показателя преломления или своей толщины, называются фазовыми объектами. Рассмотрим, например,

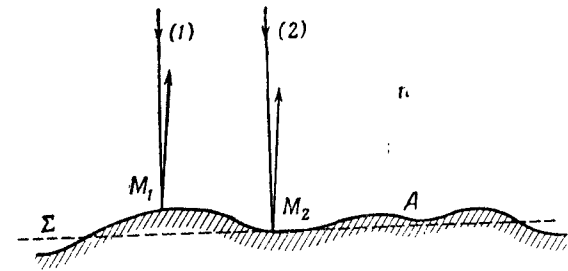


Фиг. 45.

препарат, содержащий прозрачную бактерию A , имеющую размер e и показатель преломления n (фиг. 45). Если n' — показатель преломления среды, в которой находится бактерия A , то разность оптических путей между лучом 1 , пересекающим бактерию, и лучом 2 , проходящим в стороне от нее, равна $\Delta = (n' - n)e$, а разность фаз будет составлять $\varphi = 2\pi\Delta/\lambda$.

Объекты, отражающие свет, представляют собой большей частью фазовые объекты. Пусть A — такой объект

(фиг. 46); неправильности формы поверхности A изменяют оптические пути, проходимые лучами 1 и 2 , отраженными поверхностью A . Относительно некоторой плоской

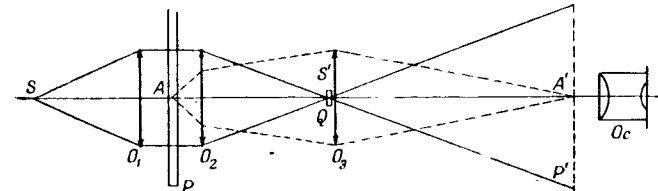


Фиг. 46.

поверхности сравнения Σ , в среднем параллельной поверхности A , разность оптических путей будет равна $2ne$, где e — разность толщин объекта A в областях M_1 и M_2 .

Объекты такого вида, характеризующиеся только изменениями оптического пути, а не изменениями амплитуды не заметны при обычных способах наблюдения. Метод фазового контраста, открытый голландским физиком Цернике (F. Zernike, 1946)¹⁾, позволил преобразовать разности фаз на объекте в соответствующие изменения амплитуд на изображении; таким образом, фазовые объекты стали заметными. Ниже мы перейдем к краткому рассмотрению принципа этого метода.

Рассмотрим прозрачный объект P (фиг. 47), освещенный параллельным пучком лучей света от источника S

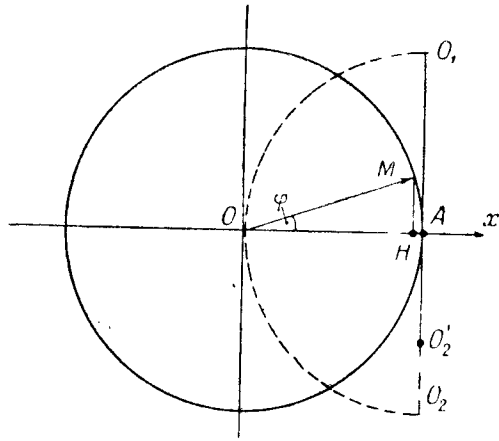


Фиг. 47.

¹⁾ В 1953 г. проф. Цернике удостоен за это открытие Нобелевской премии.

помещенного в фокусе коллиматорного объектива O_1 . После прохождения через объект P и объектив O_2 пучок вначале собирается в точке S' (на изображении источника света S), далее проходит через объектив O_3 и затем падает на плоскость P' , являющуюся изображением плоскости P , даваемым объективами O_2 и O_3 . Мы назовем этот пучок пучком «прямого света». Часть A объекта, вносящая разность фаз, дифрагирует свет, собирающийся в точке A' , являющейся изображением точки A . Изображение A' (наблюдаемое в случае необходимости с помощью окуляра O_3) является результатом интерференции прямого света и образующего когерентный фон дифрагированного света.

Представим это явление с помощью диафрагмы Френеля (фиг. 48). Пусть O — начало координат. Из этой



Фиг. 48.

точки проведем вектор \vec{OM} , длина которого пропорциональна амплитуде в рассматриваемой точке A объекта. Этот вектор составляет с осью Ox угол φ , представляющий фазу в этой точке. Если объект прозрачен, то конец M вектора находится на круге единичного радиуса с центром в O . Только фаза объекта φ изменяется от одной точки к другой. Заметим предварительно, что если весь дифрагированный свет собирается объективом O_3 , то

диаграмма на фиг. 48 дает также амплитуды и фазы на изображении.

Разложим теперь вектор \vec{OM} на два вектора \vec{ON} и \vec{HM} . При малом угле φ точка N совпадает с A . Колебание в точке изображения состоит из суммы двух взаимно-перпендикулярных колебаний: $\vec{ON} \approx \vec{OA}$ и \vec{AM} . Амплитуда \vec{OA} строится к той части объекта, в которой нет дефазированных деталей ($\varphi = 0$); иначе говоря, она является амплитудой прямого света. Амплитуда \vec{AM} является дополнительной амплитудой света, дифрагированного на объекте, вносящем разность фаз. Освещенность E изображения, определяемая величиной \vec{OM}^2 , очевидно, одинакова как в изображении этого вносящего разность фаз объекта, так и в остальной части поля, и объект остается невидимым.

Поместим в S' (см. фиг. 47) маленькую прозрачную очень тонкую пластинку Q . Весь прямой свет пройдет через пластинку Q , тогда как дифрагированные пучки света значительно смещаются в сторону на этом участке, и пластинка Q практически никак не действует на дифрагированный свет. Придадим пластинке Q такую оптическую толщину, чтобы колебания прямого света, проходящего через нее, отстали бы на $\lambda/4$ относительно колебаний дифрагированного света, который проходит в стороне от пластинки Q . На диафрагме Френеля все будет происходить так, как будто бы начало координат перенесено в O_1 . При этих условиях амплитуда в изображении участка, вносящего разность фаз, становится равной $O_1A + AM$, т. е. $-i(1-\varphi)$, и освещенность равна $(1-\varphi)^2 \approx 1-2\varphi$. Изображение этой части объекта обладает, следовательно, контрастом $\gamma = 2\varphi$. Опережению фазы $\varphi > 0$ соответствует уменьшение освещенности изображения этой части поля, и фазовый контраст является отрицательным. Для обеспечения запаздывания колебаний прямого света относительно дифрагированного поместим в точку S' пластинку большей толщины, вызывающую запаздывание колебаний прямого света на $3\lambda/4$, что эквивалентно опережению на $\lambda/4$ относительно колебаний дифрагированного света. В этом случае начало координат перене-

сится в точку O_2 , и мы имеем $E = 1 + 2\varphi$. Контраст равен 2φ , но опережение фазы на $\lambda/4$ соответствует увеличению освещенности в этой части изображения и фазовый контраст становится положительным. Пластинка Q , позволяющая изменять фазу колебаний прямого света относительно дифрагированного, называется *фазовой пластинкой*.

Если принять, что глаз не может различить два светлых фона, контраст которых меньше 0,02, то предельное различие фаз, которое можно заметить, определяется из условия $2\varphi = 0,02$, т. е. для $\lambda = 0,6 \text{ мк}$ разность хода составляет приблизительно 10 \AA . В действительности, чтобы можно было удобно видеть мелкие детали, необходим контраст порядка 0,1 — это и определяет практический предел минимальной наблюдаемой разности хода, а именно 50 \AA . Чувствительность метода можно значительно увеличить, вводя поглощающие фазовые пластинки. В самом деле, будем определять поглощение фазовой пластинки ее энергетическим коэффициентом прозрачности $1/N$, где число N — отношение интенсивности падающего на нее прямого света к интенсивности прошедшего света. Оптическая плотность пластинки d определяется из условия

$$d = \lg N.$$

На диаграмме Френеля все происходит так, как будто бы начало координат перенесено в точку O_2' , такую, что

$$\left(\frac{AO_2}{AO_2'}\right)^2 = N.$$

Освещенность изображения части объекта, вносящего разность фаз, становится равной

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \varphi\right)^2 = \frac{1}{N} (1 + \varphi\sqrt{N})^2 \approx \frac{1}{N} (1 + 2\varphi\sqrt{N}),$$

а в остальной части поля ($\varphi = 0$)

$$E = \frac{1}{N}.$$

Контраст изображения равен

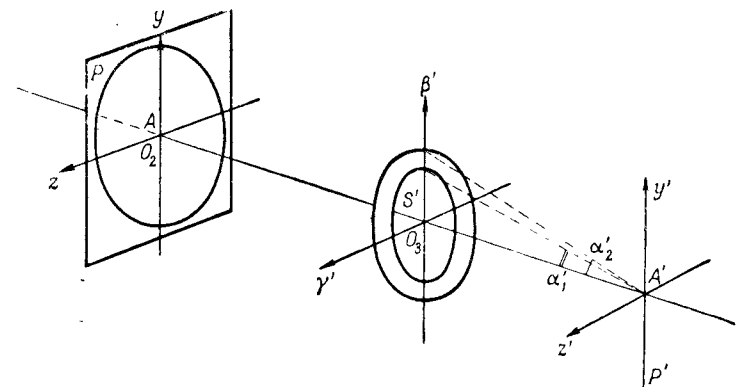
$$\gamma = 2\varphi\sqrt{N}.$$

По отношению к прозрачной фазовой пластинке контраст изображения увеличивается в \sqrt{N} раз. В принципе при $N = 2500$ ($d = 3,4$) можно наблюдать разности хода порядка ангстрема при контрасте, равном 0,1. Чтобы это осуществить на практике, прибор нужно полностью защитить от паразитного света, что представляет громадные затруднения (это осуществляется, например, при изучении дефектов полировки объектива коронографа). Метод фазового контраста позволяет тем не менее получить высокую чувствительность при условии, что сама оптическая система достаточно хороша — свет в ней рассеивается очень слабо.

§ 2. Распределение амплитуд на изображении

Пусть источник S (см. фиг. 47) настолько мал, что мы можем считать освещение когерентным и воспользоваться основными результатами гл. 3. Вычислим прежде всего распределение амплитуд на изображении, используя метод, аналогичный применяемому в гл. 3, § 4, для объяснения механизма образования изображения после двух последовательных дифракций.

Пусть $\Omega(y, z)$, $F(\beta', \gamma')$ и $A'(y', z')$ — распределение комплексных амплитуд соответственно на объекте P , в плоскости изображения S' источника S и на изображении P' объекта P (фиг. 49). Для упрощения будем считать,



Фиг. 49.

что увеличение в сопряженных плоскостях A и A' равно единице. Схема на фиг. 49 отличается от схемы на фиг. 47 только тем, что там были показаны S , O_1 и O_2 .

Пусть фазовый объект имеет единичную амплитуду, но определяется фазой $\varphi(y, z)$. Распределение амплитуд в плоскости S' представлено выражением

$$F(\beta', \gamma') = -\frac{i}{\lambda R} h(kR) \iint_{O_2} h(\varphi) h[k(\beta'y + \gamma'z)] dydz. \quad (6.1)$$

Выберем в качестве начальной среднюю фазу, определяемую из условия

$$\iint_{O_2} \sin \varphi dydz = 0, \quad (6.2)$$

и обозначим через m среднее значение $\cos \varphi$ внутри зрачка. Выражение (6.1) можно переписать так:

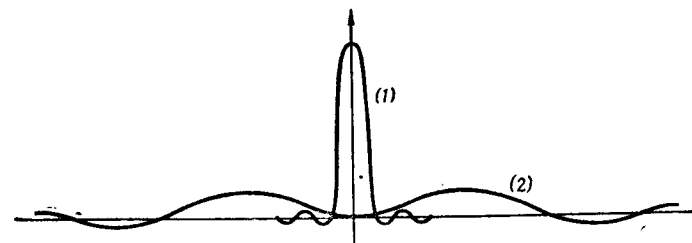
$$F(\beta', \gamma') = -\frac{i}{\lambda R} h(kR) \left\{ m \iint_{O_2} h[k(\beta'y + \gamma'z)] dydz + \right. \\ \left. + \iint_{O_2} [\cos \varphi - m] h[k(\beta'y + \gamma'z)] dydz \right\}. \quad (6.3)$$

Первый член этого выражения представляет картину дифракции от идеальной волны, ограниченной контуром объектива O_2 , расположенным вплотную к объекту. Источник света мал, и если объектив O_2 ограничен круговым контуром, то первый член представляет распределение амплитуд в пятне Эри. Присутствие второго члена вызвано дифрагированным светом, возникшим вследствие изменений фазы, вносимых объектом. В частности, в точке S' ($\beta' = \gamma' = 0$) имеем

$$\iint_{O_2} (\cos \varphi - m) dydz = 0.$$

Последний член выражения (6.3) равен нулю в этой точке. Можно утверждать, что дифрагированный свет вследствие изменений фазы объекта, равной нулю в точке S' , распространяется вокруг центрального дифракционного пятна, возникшего от идеальной волны.

Этот свет разбрасывается тем дальше, чем меньше размеры неровностей объекта, которые его создали. Фиг. 50 схематически представляет этот результат. Кривая 1 дает



Фиг. 50.

распределение амплитуд, соответствующих первому члену выражения (6.3), представляющему, например, пятно Эри. Кривая 2 дает распределение амплитуд, соответствующих второму члену выражения (6.3). Иначе говоря, кривая 1 представляет прямой свет, а кривая 2 — дифрагированный свет в плоскости, проходящей через S' . Таким образом, если поместить тонкую фазовую пластинку в точке S' , то она практически не будет действовать на дифрагированный свет или, во всяком случае, будет изменять только низко-частотные компоненты, исчезновение которых может вызвать лишь такие изменения в изображении A' , которыми можно пренебречь. Чтобы перейти, наконец, от дифракционной картины в S' к изображению A' , можно написать

$$\Omega(y', z') = \frac{iR}{\lambda} h(-kR) \iint_{O_2} F(\beta', \gamma') h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma'.$$

Если наблюдаемые детали объекта A не слишком малы, то весь свет, который на них дифрагирует, собирается объективом O_3 , и мы имеем, очевидно, $\Omega'(y', z') = \Omega(y, z)$: изображение вполне идентично объекту.

При малом угле φ можно написать

$$\Omega(y', z') = h(\varphi) \approx 1 + i\varphi.$$

Если поместить в точке S' фазовую пластинку, которая вызовет запаздывание по фазе прямого света, то амплитуда $\Omega(y', z')$ в изображении становится равной $1 - \varphi$, а освещенность представляется в виде $1 - 2\varphi$. Мы вновь пришли к результатам, полученным непосредственно из диаграммы Френеля.

§ 3. Дифракционные полосы, вызываемые фазовой пластинкой

До сих пор мы пренебрегали действием фазовой пластинки на дифрагированный свет, отмечая, что ее наличие очень слабо изменяет первоначальную картину дифракции. Хотя изменения, вносимые фазовой пластинкой в точке S' , вообще весьма слабы, все же они производят вторичные явления, которые любопытно уточнить.

Рассмотрим (см. фиг. 49) прозрачную частицу малой площади (по сравнению с дифракционным пятном, даваемым объективом O_3), помещенную в начале координат. Пусть φ — фаза, вносимая этой частицей, если за начальную фазу принять фазу в остальной части поля. Вместо того чтобы изучать явления, вычисляя распределение на изображении после двух последовательных дифракций, как мы это делали в предыдущем параграфе, покажем, что можно с таким же успехом применить соотношение (3.9).

Распределение амплитуд на изображении, если считать φ малым, можно определить выражением

$$A(y', z') = \iint E(y' - y, z' - z) [1 + i\varphi(y, z)] dydz,$$

где функция $\varphi(y, z)$ равна нулю всюду, кроме точек внутри контура маленького объекта с площадью поверхности s . Так как размеры частицы меньше дифракционного пятна, даваемого объективом O_3 , можно написать

$$A(y', z') = \iint E(y' - y, z' - z) dydz + i\varphi s E(y', z'). \quad (6.4)$$

Первый член правой части этого выражения представляет амплитуду, которая была бы получена в точке изображения, если бы не было дефазирющей частицы. Эта амплитуда обусловлена прямым светом. Что касает-

ся второго члена, то он обусловлен наличием частицы и дает амплитуду дифрагированного света. Расчет выполняется точно так же, как и в предыдущем параграфе, но присутствие фазовой пластинки в зрачке несколько меняет вид дифракционной картины за объективом O_3 . Без фазовой пластинки имеем

$$E(y', z') = i \frac{\pi \alpha'^2 R}{\lambda} \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right], \quad \text{где } Z = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha' \sqrt{y'^2 + z'^2}. \quad (6.5)$$

Найдем новое выражение для $E(y', z')$ при наличии фазовой пластинки. Оно зависит от формы фазовой пластинки, которая большей частью имеет вид щели, маленького диска или кольца. Чаще всего фазовая пластинка имеет форму кольца, и мы выполним расчет для этого случая. Пусть α'_1 и α'_2 — углы лучей, проведенных к краям кольцевой фазовой пластинки (см. фиг. 49). Положим

$$m_1 = \frac{\alpha'_1}{\alpha'}, \quad m_2 = \frac{\alpha'_2}{\alpha'}, \quad \alpha'_2 > \alpha'_1.$$

Зрачок является круглым отверстием с углом α' , в котором находится кольцо (фазовая пластинка), ограниченное угловыми отверстиями α'_2, α'_1 .

Если бы дефазирующее действие фазовой пластинки было устранено, можно было бы использовать формулу (6.5), которая соответствует полностью открытому отверстию. В результате получим соотношение

$$E(y', z') + (1 - i) \int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} F(\beta', \gamma') h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma' = \\ = \frac{\pi \alpha'^2 R}{\lambda} \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right],$$

где E — теперь амплитуда при наличии пластинки. Имеем

$$\int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} = \int_0^{\alpha'_2} - \int_0^{\alpha'_1} = i \frac{\pi \alpha'^2 R}{\lambda} \left[m_2^2 \frac{2J_1(m_2 Z)}{m_2 Z} - m_1^2 \frac{2J_1(m_1 Z)}{m_1 Z} \right],$$

откуда

$$E(y', z') = i \frac{\pi \alpha'^2 R}{\lambda} \left\{ \frac{2J_1(Z)}{Z} - (1-i) \left[m_2^2 \frac{2J_1(m_2 Z)}{m_2 Z} - m_1^2 \frac{2J_1(m_1 Z)}{m_1 Z} \right] \right\}. \quad (6.6)$$

Вернемся к общему выражению (6.4) и, обозначая через K некоторую постоянную, получим

$$A(y', z') = K - \varphi \frac{\pi \alpha'^2 R s}{\lambda} \left\{ \frac{2J_1(Z)}{Z} - (1-i) \left[m_2^2 \frac{2J_1(m_2 Z)}{m_2 Z} - m_1^2 \frac{2J_1(m_1 Z)}{m_1 Z} \right] \right\}. \quad (6.7)$$

В частности, для $y' = z' = 0$ при малом φ находим

$$A(0, 0) = K - \varphi \frac{\pi \alpha'^2 R s}{\lambda} [1 - (1-i)(m_2^2 - m_1^2)];$$

контраст оказывается равным

$$\gamma = \frac{2\varphi \pi \alpha'^2 R s}{K \lambda} (1 + m_1^2 - m_2^2).$$

Выражение (6.7) дает распределение амплитуд в изображении частицы; величина в квадратных скобках показывает изменение изображения, обусловленное фазовой пластинкой. Центральный максимум теперь становится равным $1 + m_1^2 - m_2^2$ вместо 1, и дифракционные кольца усиливаются. Этот последний эффект, хорошо известный микроскопистам, использующим фазовый контраст, сводится к появлению дифракционных полос (большой частью хорошо заметных), которые окружают дефазирющие объекты. Они создают вокруг изображения нечто напоминающее «галло», которое мешает наблюдению слабо выраженных деталей по соседству с более заметными объектами, дифрагирующими больше света.

§ 4. Случай периодических объектов. Амплитудная решетка, фазовая решетка

Рассмотрим теперь в плоскости объекта периодическую структуру, представленную функцией $\Omega(y, z)$. Гармонический анализ этой функции выявляет наличие только составляющих, кратных основной частоте, и мы ограничимся изучением одной из них, определяемой как синусоидальная

функция y (штрихи миры параллельны Oz). Напишем для фазовой решетки следующий синусоидальный закон:

$$\Omega(y) = h[\varphi(y)] \quad \text{и} \quad \varphi(y) = \varphi_0 \sin \frac{2\pi y}{p};$$

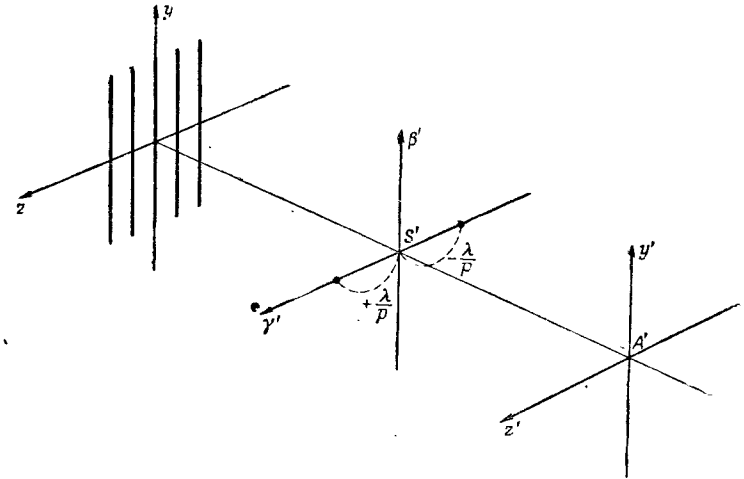
если φ_0 мало, то можно записать

$$\Omega(y) = 1 + i\varphi_0 \sin \frac{2\pi y}{p}.$$

Мы уже определяли в гл. 2, § 9 картину дифракции в зрачке, обладающем синусоидальным распределением, аналогичным рассматриваемому здесь. Было также показано влияние ограничения отверстия на распределение амплитуд. В рассматриваемой задаче нет нужды заботиться о влиянии протяженности объекта, и при этих условиях мы напишем функцию Ω в виде

$$\Omega(y) = 1 + \frac{\varphi_0}{2} \left[h\left(\frac{2\pi y}{p}\right) - h\left(-\frac{2\pi y}{p}\right) \right].$$

Это означает, что если положить равной единице амплитуду в центре зрачка (в изображении S' источника S), то на угловых расстояниях $\pm \lambda/p$ получим амплитуды, равные $\mp \varphi_0/2$ (фиг. 51). Новое преобразование Фурье, опи-



Фиг. 51.

сывающее дифракцию в пространстве между O_3 и P' , позволяет нам перейти от зрачка к изображению.

Это нас приводит, согласно сказанному в гл. 3, §5 об опытах Аббе, к изображению, подобному объекту:

$$A(y') \equiv \Omega(y) = 1 + i\varphi_0 \sin \frac{2\pi y}{p}.$$

Однако в принятом приближении $|C^2(y')|$ остается величиной постоянной и изображение невидимо.

Поместим теперь в S' фазовую пластинку, обеспечивающую опережение фазы на $\lambda/4$. Первый член выражения Ω дает

$$A(y') = i \left(1 + \varphi_0 \sin \frac{2\pi y}{p} \right)$$

и

$$A^2(y') \approx 1 + 2\varphi_0 \sin \frac{2\pi y}{p}.$$

Таким образом, изображение фазовой решетки выявляет изменения освещенности. Можно сравнить это появление фазового контраста с образованием изображения амплитудной решетки при когерентном освещении. Достаточно написать для амплитудной решетки

$$\Omega(y) = 1 + \varphi_0 \sin \frac{2\pi y}{p},$$

и для изображения при отсутствии фазовой пластинки будем иметь

$$A(y') \equiv \Omega(y) = \left(1 + i\varphi_0 \sin \frac{2\pi y}{p} \right).$$

Наоборот, если наблюдать эту же амплитудную решетку, создавая фазовый контраст, то получим

$$A'(y') = i + a_0 \sin \frac{2\pi y}{p},$$

и периодическая структура при этом окажется невидимой, так как

$$|A'(y')|^2 \approx 1.$$

Отсюда вытекает, что при осуществлении когерентного освещения амплитудный объект дает амплитудное изо-

бражение (видимое), фазовый объект дает фазовое изображение (невидимое).

Присутствие фазовой пластинки приводит к обратному результату: фазовый объект становится видимым, а амплитудный — невидимым.

§ 5. Фильтрация пространственных частот при фазовом контрасте

Рассмотрим теперь фазовый объект сложной структуры; его можно разложить на ряд составляющих с различными пространственными частотами. Для каждой из них можно использовать рассуждения предыдущего параграфа, согласно которым, для того чтобы прибор пропускал какую-либо частоту, составляющие, симметричные относительно дифракционной фигуры в плоскости зрачка, должны пройти, во-первых, вне фазовой пластинки, помещенной в S' (например, в виде маленького диска), а, во-вторых, внутри зрачка.

Если пространственная частота очень низка, то симметричные составляющие могут попасть на фазовую пластинку и не набрать необходимой разности фаз относительно центрального максимума; при этом составляющая пропускается, но остается невидимой.

Если же пространственная частота слишком высока, то симметричные составляющие выходят за пределы зрачка и соответствующая частота исключается; при этом наблюдается предел разрешения, идентичный с тем, который получается при всякой установке в когерентном освещении. Если α' и α_e' — угловые отверстия, определяющие максимальные размеры зрачка и фазовой пластинки, то частоты будут пропущены прибором, если они находятся в интервале

$$\frac{\alpha_e'}{\lambda} < \left| \frac{1}{p} \right| < \frac{\alpha'}{\lambda_2};$$

Частичная когерентность. Освещение в интерферометрах и образование изображения в микроскопе

§ 1. Некогерентность, когерентность, частичная когерентность

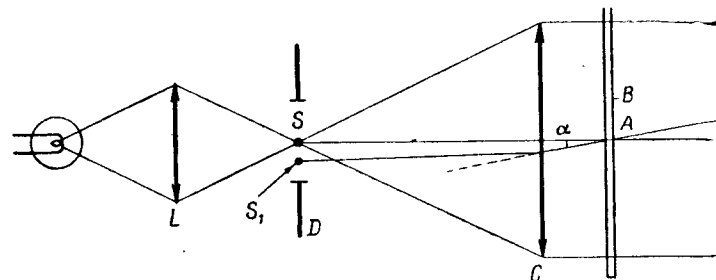
Чтобы закончить общее изучение изображений протяженных объектов, нужно теперь критически рассмотреть гипотезы о когерентности или некогерентности колебаний, исходящих из различных точек объекта. Для этого необходимо исследовать промежуточный случай, и нам понадобится сравнительно недавно созданная теория частичной когерентности, в построении которой главным образом участвовали Цернике, Гопкинс, Блан-Лапьер и Волф¹⁾.

Чаще всего встречаются *некогерентные* оптические объекты, различные элементы которых излучают некогерентные колебания, независимые одни от других. Прежде всего к этой группе должны быть отнесены все светящиеся сами по себе объекты (звезды, Солнце, различные земные источники и т. д.). К ней относятся также объекты больших размеров, даже если они сами освещены вспомогательным источником (планеты и туманности, удаленные пейзажи и т. д.), поскольку большие расстояния между различными элементами объекта исключают возможность когерентности между колебаниями, исходящими из этих элементов. Различные монохроматические излучения, составляющие спектр источника, также некогерентны между собой. С этим случаем изображений некогерентных объектов мы встречаемся в спектральных приборах. Воз-

¹⁾ Основы теории частичной когерентности были значительно раньше положены работами Л. И. Мандельштама и Д. С. Рождественского. См., например, Д. С. Рождественский, Когерентность лучей при образовании изображения в микроскопе, ЖЭТФ, 10, 305 (1940); Л. Мандельштам, Zur Abbesche Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung, Ann. d. Phys., 4, 35, 881 (1911). — Прим. ред.

никают трудности при изучении приборов, в которых используются вспомогательные источники: микроскопов, разных проекционных аппаратов, теневых проекционных приборов и т. д. Действительно, в этих аппаратах объект освещен колебаниями, возникающими в одном и том же источнике; априори кажется, что в этом случае освещение должно быть когерентным, но мы увидим, что так обстоит дело только тогда, когда источник очень мал.

Возьмем в качестве основного примера микроскоп и представим себе, что используется источник S , практически совпадающий с плоскостью зрачка конденсора C



Фиг. 52.

(в действительности это может быть и изображение источника, полученное с помощью вспомогательной оптической системы L). Если S имеет весьма малые размеры, то колебания, исходящие из двух точек A и B объекта (фиг. 52), могут быть выражены с точностью до множителя величинами $h[-k(SA)]$ и $h[-k(SB)]$, где SA и SB — оптические пути между S и соответственными точками A и B . В результате эти колебания приобретают разность фаз $k[(SA) - (SB)]$, которая, в частности, равна нулю, если S находится в фокусе конденсора C и если AB перпендикулярно оси: волны, выходящие из конденсора, являются плоскими и плоскость AB совпадает с плоскостью волн. В случае весьма малого источника получается совершенно когерентное освещение, но очевидно, что из-за слабой освещенности изображения на практике приходится использовать источники ощутимых размеров. Если при этом рассмотреть две соседние точки S и S_1 источника,

то они вызывают в точках A и B колебания, амплитуды которых будут

$$sh[-k(SA)] + s_1 h[-k(S_1A)] \quad \text{для } A,$$

$$sh[-k(SB)] + s_1 h[-k(S_1B)] \quad \text{для } B,$$

где s и s_1 — колебания (некогерентные), исходящие из S и S_1 . Если оптические пути (SA) , (SB) , (S_1A) и (S_1B) практически равны, то можно считать, что колебания в A и B идентичны; еще есть когерентность, но нужно уточнить ее пределы.

Положим, что $y = AB$, и пусть α — угол между лучами, проведенными из точек S и S_1 . Из известного выражения для дифференциала оптических путей¹⁾ получим

$$(S_1B) - (S_1A) = ny \sin \alpha \quad \text{и} \quad (SB) - (SA) = 0.$$

Таким образом, для данного значения α можно всегда найти достаточно малое значение y , для которого изменения оптического пути колебаний, пришедших из точки S_1 в точки A и B , были бы малы по сравнению с длиной волны (например, $\lambda/10$). Следовательно, всегда существует когерентность, если две точки A и B достаточно близки одна к другой; действительно, достаточно, чтобы $ny \sin \alpha$ было значительно меньше λ , где α — максимальный угол сходимости лучей, освещающих объект.

Раскроем теперь диафрагму D конденсора; при этом угол α возрастает и область когерентности, определяемая расстоянием y , убывает. На объект падают волны, которые составляют одна с другой значительные углы, и к каким-либо двум удаленным друг от друга точкам A и B придут некогерентные между собой волны с сильно отличающимися ориентациями, так что разность оптических путей колебаний, пришедших в A и B , окажется очень большой; мы приближаемся к совершенной некогерентности. До анализа этого явления необходимо уточнить некоторые данные об испускании световых колебаний источниками.

§ 2. Цуги волн и когерентность

Механизм испускания света еще недостаточно изучен; известно лишь, что обмен энергией между веществом и излучением (электромагнитными волнами) осуществляется только квантами величиной $h\nu$; в частности, когда атом излучает фотон с энергией $h\nu$, то один электрон этого атома переходит на другой энергетический уровень, причем разность этих уровней в точности равна $h\nu$.

Это создает определенные трудности для уточнения механизма излучения, но для вопросов прикладной оптики, которые мы здесь освещаем, можно основываться на следующих положениях:

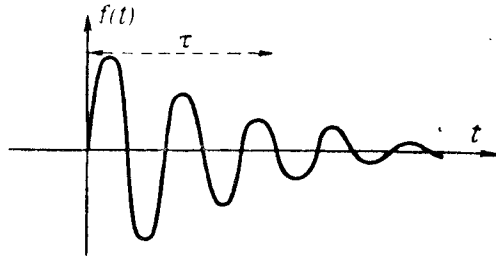
1) электромагнитные волны не излучаются непрерывно, а все происходит так, как будто они излучаются пакетами, или цугами волн, исходящими из различных атомов; 2) плотность энергии этих волн соответствует вероятности присутствия фотона; опыты, выполненные Брауном и Твиссом, видимо, доказали, что волны, переносимые различными фотонами, могут интерферировать, а это вновь привлекает внимание к *классической* теории.

Таким образом, мы приходим к следующему представлению¹⁾: источник света состоит из очень большого числа атомов и колебание, которое излучает источник в некоторый момент времени, является суммой отдельных колебаний, испускаемых различными атомами. Практически последние излучают только в течение ограниченного времени τ («продолжительность жизни» — в квантовой теории, коэффициент затухания — в классической теории), и если излучение рассматривают за время, значительно большее τ , то колебания, наблюдаемые в начальный момент, исчезают, а другие атомы вызывают новые колебания, причем их колебания уже не связаны с первоначальными. Их амплитуда и их фаза будут другими: длительной когерентности не существует. Когерентность источника с самим собой может существовать только в том случае, когда колебания испускаются в течение очень короткого интервала времени (интервал должен быть значительно меньше τ).

¹⁾ См. любой вывод условия синусов Аббе. — *Прим. ред.*

¹⁾ Соответствующие пояснения даны в дополнении 3.

Покажем теперь, что постоянная времени τ , которая связана с длиной дуг волн, определяет «тонкую структуру» испускаемого излучения. Легко себе представить, что если дуг волн очень медленно затухает (τ велико), он является почти синусоидальным колебанием, т. е. совершенно монохроматическим. Наоборот, если колебания быстро угасают, образуется весьма широкий спектр частот.



Фиг. 53.

Действительно, рассмотрим колебание, представляемое для $t > 0$ синусоидальной затухающей функцией. Напишем, например (фиг. 53),

$$f(t) = A \sin \omega_0 t e^{-t/\tau} \quad (\text{для } t > 0).$$

Преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$g(u) = A \int_0^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-t/\tau} e^{i2\pi \omega t} dt,$$

где u — частота в обычном смысле и ω — соответствующее ей колебание. Следовательно,

$$g(u) = \frac{A}{2i} \left[\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i(\omega + \omega_0)} - \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \omega_0)} \right].$$

Собирая члены, соответствующие частотам $\pm u$, получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-i2\pi u t} du = \\ &= A \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(2\pi u t - \theta)}{\rho} - \frac{\sin(2\pi u t - \theta')}{\rho'} \right] du, \end{aligned}$$

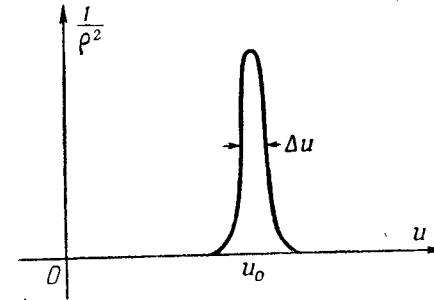
причем

$$\begin{aligned} \rho e^{i\theta} &= \frac{1}{\tau} + i2\pi(u - u_0), \\ \rho' e^{i\theta'} &= \frac{1}{\tau} + i2\pi(u + u_0). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Практически $1/\tau$ мало по сравнению с $2\pi u_0$, и вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым, если u очень близко к u_0 . Модуль амплитуды $1/\rho$ будет равен

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4\pi^2(u - u_0)^2}},$$

и спектральная плотность энергии, пропорциональная $1/\rho^2$, изменяется так, как показано на фиг. 54; ширина спектральной линии равна Δu , где Δu можно найти из соотношения $4\pi^2(\Delta u/2)^2 = 1/\tau^2$ (откуда $\Delta u = 1/\pi\tau$).



Фиг. 54.

Этот результат ясно показывает, что спектральная чувствительность Δu обратно пропорциональна постоянной затухания τ , т. е. средней продолжительности дуг волн. Этот же результат может быть равным образом получен и в рамках квантовой теории. Если τ — продолжительность жизни, неопределенность энергии E дается соотношением Гейзенберга $\tau \Delta E = h/2\pi$, откуда получается неопределенность частоты, равная полуширине полосы Δu :

$$\frac{\Delta u}{2} = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{2\pi\tau}.$$

Если положить, например, $\tau = 10^{-8}$ сек и $\lambda = 0,5$ мк, то находим

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta u}{c} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ \AA},$$

величину, значительно меньшую, чем экспериментальные значения даже для наиболее тонких линий. В действительности спектральные линии оказываются шире вследствие влияния других явлений: эффекта Доплера, давления и т. д. Излучение из очень тонких источников позволяет превзойти порядок интерференции до величины $R = 10^6$ при $\Delta\lambda$ порядка $0,5 \cdot 10^{-2}$ \AA, что соответствует длительности когерентности, приблизительно равной

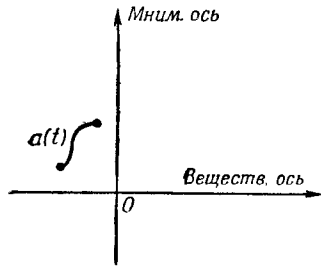
$$\tau = \frac{R}{\pi u} = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ сек.}$$

Можно, наконец, дать следующее представление об излучении источника. Используя комплексные представления, можно сказать, что колебания, заданные в форме

$$ae^{i2\pi f_0 t}$$

при комплексной амплитуде a , являются действительной функцией t . Они изменяются относительно медленно, если принять во внимание исключительную их частоту: период T равен $1,66 \cdot 10^{-15}$ сек для $\lambda = 0,5$ мк, так что для очень тонкого источника пуг волн длится в течение времени порядка $\tau = 0,6 \cdot 10^{-9}$ сек, т. е. в течение около 300 000 периодов. По истечении времени порядка τ комплексная амплитуда $a(t)$, изменяясь в комплексной плоскости, опишет кривую (фиг. 55), однако значение $a(t+\tau)$ в общем случае не будет очень сильно отличаться от первоначального значения $a(t)$ — в сущности имеет место «корреляция» между амплитудами в моменты времени t и $t+\tau$.

Если наблюдать это явление в течение времени, большого по сравнению с τ , то комплексная амплитуда будет изменяться более сложным образом (фиг. 56) и



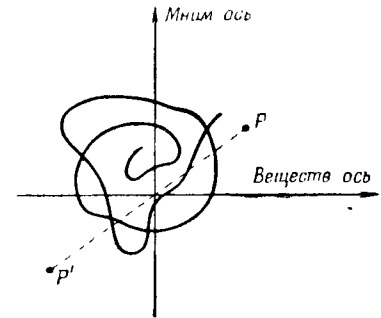
Фиг. 55.

получится некая средняя от воздействий, производимых различными значениями $a(t)$. Можно, наконец, охарактеризовать колебания и комплексной амплитудой $a(t)$, «медленно изменяющейся» (в масштабе периода колебания), но в действительности весьма быстро меняющейся с точки зрения средств наблюдения, которыми мы располагаем. Таким образом, мы приходим к необходимости рассмотрения различных «средних» во времени:

— среднее $\overline{a(t)} = \frac{1}{T} \int a(t) dt$ будет равно нулю, если T стремится к бесконечности; амплитуда принимает независимые значения, расположенные в комплексной плоскости;

— среднее квадрата модуля $a(t)a^*(t)$ не равно нулю и характеризует энергию, переносимую пучком лучей;

— среднее $a(t)a^*(t-\theta)$ представляет функцию автокорреляции от $a(t)$, оно максимально при $\theta = 0$ (этот максимум характеризует энергию), но уменьшается с ростом θ , так как две амплитуды $a(t)$ и $a^*(t-\theta)$ больше никак не связаны одна с другой; это означает, что $a(t)a^*(t-\theta) = 0$, поскольку для данного значения $a(t)$ будут статистически возникать значения $a^*(t-\theta)$, которые на фиг. 56 представлены точками P и P' , расположенными на комплексной плоскости симметрично началу координат.



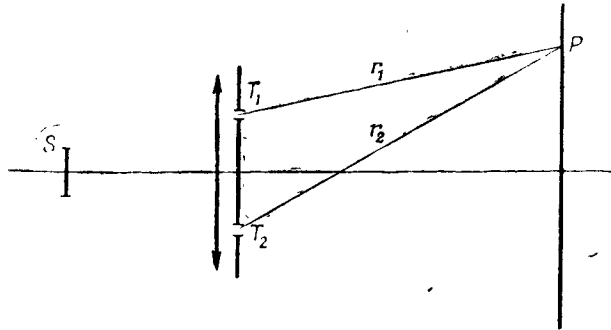
Фиг. 56.

§ 3. Определение степени частичной когерентности

Рассмотрим очень простой опыт по интерференции света, проведенный еще Юнгом. Если осветить два отверстия одним источником S очень малых размеров (фиг. 57), то опыт показывает, что наблюдаются интерференционные полосы — отверстия T_1 и T_2 излучают когерентные колебания. Если затем увеличить размеры источника, то, как из-

вестно, контраст полос будет уменьшаться и в результате будет наблюдаться первое исчезновение полос; в дальнейшем полосы могут опять появиться со слабым контрастом и снова исчезнуть и т. д. вплоть до последнего исчезновения, определяемого при очень широком источнике, — тогда говорят, что отверстия T_1 и T_2 излучают некогерентные колебания.

Аналогичный опыт может быть выполнен на интерферометре при значительном увеличении оптического пути в



Фиг. 57.

одном из его пучков. Рассмотрим, например, интерферометр Майкельсона, одно из зеркал которого постепенно удаляется. Увидим, что контрастность полученных интерференционных полос даже при очень тонком источнике S будет уменьшаться по мере увеличения разности хода; действительно, интерферирующие колебания излучаются в различные моменты времени, и между излучаемыми в моменты времени t и $t + \theta$ колебаниями будет наблюдаться только частичная когерентность; когерентность будет полностью отсутствовать при $\theta \gg \tau$.

Мы объясним оба эти явления одним и тем же способом, используя схему отверстий Юнга, которая нам будет очень полезна и в дальнейшем.

Пусть $a_1(t)$ и $a_2(t)$ — мгновенные комплексные амплитуды, создающие интерференцию. Ими могут быть, например, амплитуды, излучаемые из отверстий T_1 и T_2 , но определяемые в момент t , когда колебания достигают плоскости экрана P .

Амплитуда A , полученная в точке P плоскости наблюдений, может быть написана в виде

$$A(t) = a_1(t)h\left(\frac{\varphi}{2}\right) + a_2(t)h\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

если φ — разность фаз, соответствующая разности хода $r_1 - r_2$ между колебаниями, пришедшими из T_1 и T_2 .

Средняя энергия в точке P , определяемая разностью фаз φ , будет

$$\begin{aligned} \overline{AA^*} &= \overline{\left[a_1 h\left(\frac{\varphi}{2}\right) + a_2 h\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \right] \left[a_1^* h\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + a_2^* h\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]} = \\ &= \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + 2R[a_1 a_2^* h(\varphi)], \end{aligned}$$

где $R[\]$ обозначает действительную часть комплексной величины; в последнем члене φ не зависит от времени и можно найти среднее значение только для переменных величин:

$$\overline{AA^*} = \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + 2R[\overline{a_1 a_2^*} h(\varphi)]. \quad (7.2)$$

Таким образом, освещенность в точке P изменяется по полю по синусоидальному закону; если положить

$$\overline{a_1 a_1^*} = \rho h(\theta), \quad (7.3)$$

то переменную освещенность можно представить в виде функции φ следующим образом:

$$\overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + 2\rho \cos(\varphi + \theta).$$

Таким образом, мы получили полосы, контраст которых можно изучать; освещенность будет максимальна, когда $\varphi + \theta = 2K\pi$, она равна

$$E_M = \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + 2|\overline{a_1 a_2^*}|$$

и минимальна при $\varphi + \theta = (2K + 1)\pi$, причем

$$E_m = \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} - 2|\overline{a_1 a_2^*}|.$$

Следовательно, контраст полос зависит от величины $\rho = |\overline{a_1 a_2^*}|$. Рассмотрим два предельных случая.

а) Источники T_1 и T_2 некогерентны. Для данной величины a_1 равновероятны два значения множителя

a_2^* ($+a_2^*$ и $-a_2^*$). Тогда среднее значение $\overline{a_1 a_2^*}$ равно нулю, т. е. контраст полос равен нулю; полосы могли бы быть заметны, если бы у нас была возможность наблюдать их очень короткое время (порядка τ).

б) Источники T_1 и T_2 когерентны. Предположим, что в каждый данный момент a_2 равно ρa_1 , и допустим также, что источники испускают синхронные колебания ρ действительно). При этом имеем

$$\overline{a_1 a_2^*} = \overline{\rho a_1 a_1^*} = \rho E_1 = \frac{1}{\rho} E_2 = \sqrt{E_1 E_2},$$

освещенность в любой точке поля будет равна, поскольку $\theta=0$, величине

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \varphi.$$

Контраст полос тогда равен

$$\frac{E_M - E_m}{E_M + E_m} = \frac{2\sqrt{E_1 E_2}}{E_1 + E_2}$$

и зависит только от отношения интенсивностей двух источников.

Если источники лишь частично когерентны, то мы определим степень их когерентности отношением

$$\gamma = \frac{\overline{a_1 a_2^*}}{\sqrt{E_1 E_2}} = \frac{a_1 a_2^*}{(a_1 a_1^*)^{1/2} (a_2 a_2^*)^{1/2}}, \quad (7.4)$$

т. е. величиной, модуль которой не превышает единицу (это следует из неравенства Шварца¹⁾).

Имеем при этих условиях

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} R[\gamma h(\varphi)] = \\ &= E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} |\gamma| \cos(\varphi + \theta). \end{aligned}$$

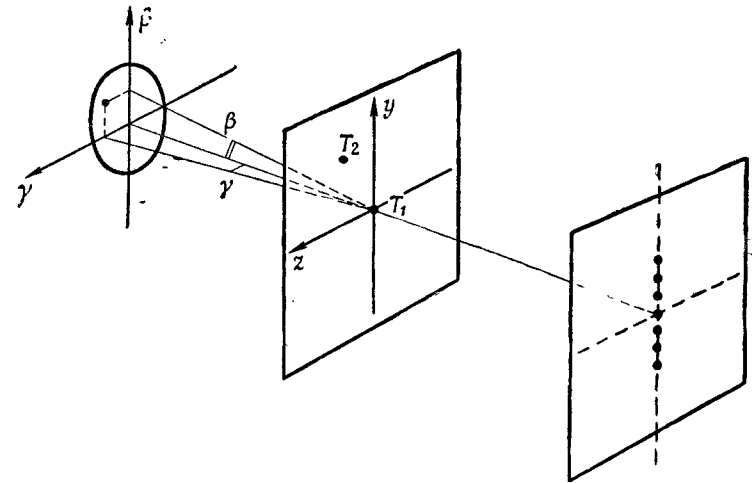
Следовательно, контраст полос определяется модулем γ и максимален, когда $|\gamma|$ равен 1; положение максимумов и минимумов определяется аргументом θ множителя γ .

¹⁾ См., например, A. Angot, Compléments de mathématiques, éd. Revue d'Optique (3-e éd), p. 659; J. Bass, Cours de mathématiques, Paris, p. 138.

Мы назовем γ *степенью*, или *фактором, когерентности* источников, характеризуемых мгновенными комплексными амплитудами a_1, a_2 .

4. Вычисление степени частичной когерентности для двух точек, освещаемых одним источником

Будем предполагать прежде всего, что источники T_1 и T_2 освещены совокупностью некогерентных колебаний, испускаемых различными атомами некоторого протяжен-



Фиг. 58.

ного источника (фиг. 58), т. е. по существу мы рассматриваем случай освещения отверстий Юнга источником конечных размеров.

Рассмотрим атом, расположенный в точке с условными координатами β, γ . Он испускает колебания, которые можно выразить следующим образом для точек T_1 и T_2 соответственно, если T_2 имеет координаты y, z относительно T_1 :

$$a(t) \quad \text{и} \quad a(t)h[-k(\beta y + \gamma z)].$$

Тогда амплитуды колебаний в точках T_1 и T_2 можно представить в виде суммы амплитуд колебаний, обуслов-

ленных различными i -ми атомами источника:

$$a_1 = \sum a_i(t),$$

$$a_2 = \sum a_i(t) h[-k(\beta y + \gamma z)].$$

Получаем

$$\overline{a_1 a_2^*} = \sum \overline{a_i^*(t)} \sum a_j^*(t) h[k(\beta_j y + \gamma_j z)];$$

это выражение можно переписать, разбив на две суммы, соответствующие произведениям амплитуд колебаний в точках T_1 и T_2 , обусловленных одним и тем же атомом и двумя различными атомами:

$$\overline{a_1 a_2^*} = \sum \overline{a_i a_i^*} h[k(\beta_i y + \gamma_i z)] + \sum \sum \overline{a_i a_j^*} \dots;$$

торая сумма будет равна нулю, поскольку она содержит произведения амплитуд от различных атомов, и мы получаем

$$\overline{a_1 a_2^*} = \sum \overline{a_i a_i^*} h[k(\beta_i y + \gamma_i z)].$$

Плотность атомов на источнике бесконечно велика, следовательно, эту сумму можно заменить интегралом и написать

$$\overline{a_1 a_2^*} = \iint_S \varepsilon h[k(\beta y + \gamma z)] d\beta d\gamma, \quad (7.5)$$

где $\varepsilon d\beta d\gamma$ представляет энергию, отнесенную к элементу поверхности источника [в угловой мере ($d\beta d\gamma$), ε — плотность энергии в единице телесного угла].

Имеем, очевидно,

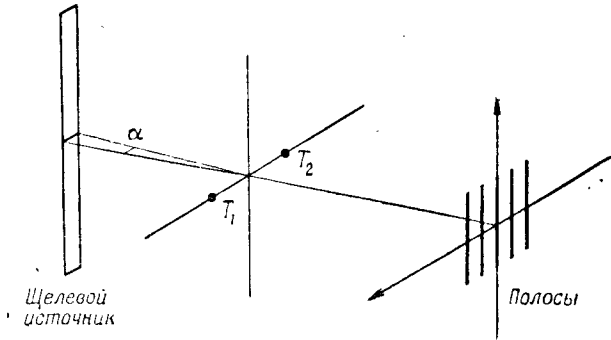
$$\overline{a_1 a_1^*} = \overline{a_2 a_2^*} = \iint_S \varepsilon d\beta d\gamma,$$

так что степень частичной когерентности между точкой T_1 , расположенной в начале координат, и точкой T_2 с координатами y и z выражается соотношением

$$\gamma(y, z) = \frac{\iint \varepsilon h[k(\beta y + \gamma z)] d\beta d\gamma}{\iint \varepsilon d\beta d\gamma}. \quad (7.6)$$

Следовательно, степень частичной когерентности между двумя точками плоскости, освещенной одним источником,

выражается с помощью преобразования Фурье от распределения энергии, излучаемой источником. Она выражается так же, как и распределение амплитуд дифрагированного света при наличии диафрагмы с отверстием, ограничивающим волну (гипотетическую) с центром в одной из этих точек.



Фиг. 59.

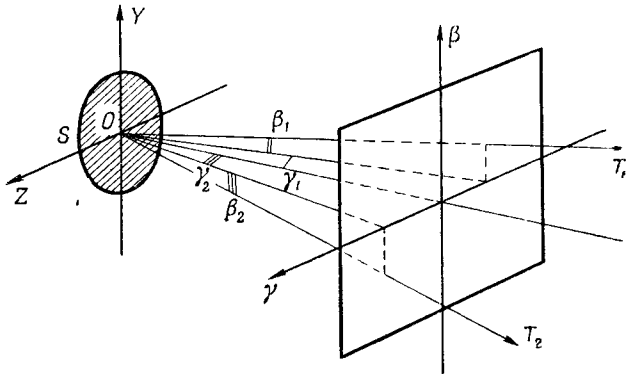
Этот результат позволяет очень легко объяснить вопрос о видимости интерференционных полос. Рассмотрим, например, опыт с отверстиями Юнга, полагая, что они освещены щелевым источником, видимым под углом 2α (фиг. 59). Для него получаем:

$$\gamma = \frac{\sin(2\pi\alpha y/\lambda)}{2\pi\alpha y/\lambda}. \quad (7.7)$$

Если постепенно увеличивать ширину источника, начиная с $\alpha = 0$, будет наблюдаться непрерывное понижение контраста, который обратится в нуль, когда $\alpha = \lambda/2y$; при этом, поскольку γ — число действительное, бокового смещения полос наблюдаться не будет. Кроме того, всякий раз, как только γ обратится в нуль, будет происходить «обращение контраста», т. е. положения максимумов и минимумов будут меняться местами.

§ 5. Когерентность между колебаниями, излучаемыми одним источником в двух различных направлениях; освещение интерферометров

Можно поставить обратную задачу: в некоторых типах интерферометров два пучка, исходящие из источника, распространяются по двум близким направлениям, при этом степень когерентности должна быть настолько высока,



Фиг. 60.

чтобы интерференционная картина оказалась достаточно контрастной. Как выразить при этих условиях степень когерентности?

Будем считать, что источником S является излучающая поверхность, ограниченная контуром C , и нанесем координатные оси YZ (фиг. 60); обозначим через β_1, γ_1 и β_2, γ_2 направляющие косинусы направлений разных колебаний относительно OY и OZ .

Можно опять написать

$$a_1(t) = \sum a_i(t) h [k(\beta_1 Y_i + \gamma_1 Z_i)],$$

$$a_2(t) = \sum a_i(t) h [k(\beta_2 Y_i + \gamma_2 Z_i)].$$

Для оценки среднего значения величины $a_1 a_2^*$ заметим, как и в предыдущем параграфе, что сумма произведений амплитуд $a_i^* a_j$, относящихся к различным

атомам, равна нулю. Обозначая через $\varepsilon(Y, Z)$ плотность энергии источника, получаем

$$\begin{aligned} \overline{a_1(t) a_2^*(t)} &= \sum \overline{a_i(t) a_i^*(t)} h \{-k[(\beta_2 - \beta_1) Y_i + (\gamma_2 - \gamma_1) Z_i]\} = \\ &= \iint \varepsilon(Y, Z) h \{-k[(\beta_2 - \beta_1) Y + (\gamma_2 - \gamma_1) Z]\} dY dZ, \end{aligned}$$

где ε — поверхностная плотность энергии (яркость) источника. Следовательно, степень частичной когерентности для отдельных направлений T_1 и T_2 выражается формулой

$$\begin{aligned} \gamma(T_2 - T_1) &= \\ &= \frac{\iint \varepsilon(Y, Z) h \{-k[(\beta_2 - \beta_1) Y + (\gamma_2 - \gamma_1) Z]\} dY dZ}{\iint \varepsilon(Y, Z) dY dZ}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Итак, степень когерентности между двумя различными направлениями также выражается преобразованием Фурье от распределения энергии на источнике. Наш случай оказывается аналогичным предыдущему и отличается от него только выбором координат.

§ 6. Когерентность в изображении протяженного источника

Теперь мы перейдем к изучению случая, когда конденсор C образует в плоскости объекта изображение протяженного источника, который мы предполагаем вполне однородным и больших размеров. Этот случай соответствует одному из двух видов классического освещения микроскопических препаратов, называемому критическим или, неправильно, «некогерентным» (фиг. 61).

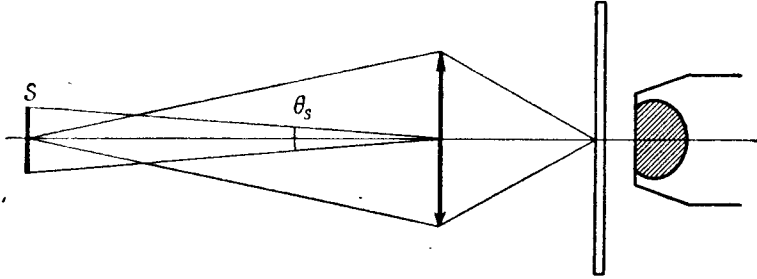
Предыдущий случай позволяет предсказать результат. Рассмотрим зрачок конденсора. Каждая из его точек получает колебания, посылаемые широким источником S , так что освещение оказывается некогерентным. Область когерентности распространяется только на расстояние порядка $y = \lambda/\theta_s$ (где θ_s — угол, под которым виден источник), т. е. на величину, которая может оказаться весьма малой. Однако все происходит так, как если бы некогерентный источник помещался в зрачке конденсора, и, следовательно, этот случай можно свести к рассмотрен-

ному в § 4. Мы докажем это непосредственно вычислением.

От каждого элемента источника после прохождения света через конденсор возникает распределение амплитуд

$$E_c(y - y_s, z - z_s),$$

если E_c представляет собой распределение амплитуд в дифракционном пятне, даваемом конденсором (мы пред-



Фиг. 61.

полагаем, что отношение масштабов линейных измерений в плоскости источника и в плоскости изображений равно геометрическому увеличению конденсора, так что точка с координатами y_s и z_s считается геометрическим изображением точки $y = y_s, z = z_s$.

В точке A_1 с координатами y_1, z_1 будем иметь амплитуду

$$\sum a_i(t) E_c(y_1 - y_i, z_1 - z_i),$$

точно так же в точке A_2 с координатами y_2, z_2 амплитуда равна

$$\sum a_j(t) E_c(y_2 - y_j, z_2 - z_j).$$

Для вычисления степени частичной когерентности найдем (замечая, что, как и выше, $a_i a_i^* = 0$)

$$\overline{a_1 a_2^*} = \overline{\sum a_i(t) a_i^*(t) E_c(y_1 - y_i, z_1 - z_i) E_c^*(y_2 - y_i, z_2 - z_i)}.$$

Заменяя сумму интегралом и полагая, что плотность энергии на источнике постоянна и характеризуется коэф-

фициентом ε , получаем

$$\varepsilon \iint E_c(y_1 - y_i, z_1 - z_i) E_c^*(y_2 - y_i, z_2 - z_i) dy_i dz_i.$$

Произведя замену переменных $y_1 - y_i$ на Y и $z_1 - z_i$ на Z , находим

$$\varepsilon \iint E_c(Y, Z) E_c^*(Y + y_2 - y_1, Z + z_2 - z_1) dY dZ;$$

в этом выражении мы вновь встречаемся с функцией автокорреляции $E_c(Y, Z)$; но эта функция $E_c(Y, Z)$ является преобразованием Фурье от функции распределения амплитуд $F_c(\beta_c, \gamma_c)$ на зрачке конденсора, если поместить источник единичной интенсивности в начале координат. Отсюда с помощью равенств (2.25), в которых поменяем взаимно роли функций E и F , получим для степени частичной когерентности в этом случае выражение

$$\begin{aligned} \gamma(y_2 - y_1, z_2 - z_1) &= \\ &= \frac{\iint F(\beta_c, \gamma_c) F^*(\beta_c, \gamma_c) h\{+k[\beta_c(y_2 - y_1) + \gamma_c(z_2 - z_1)]\} d\beta_c d\gamma_c}{\iint FF^* d\beta_c d\gamma_c}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

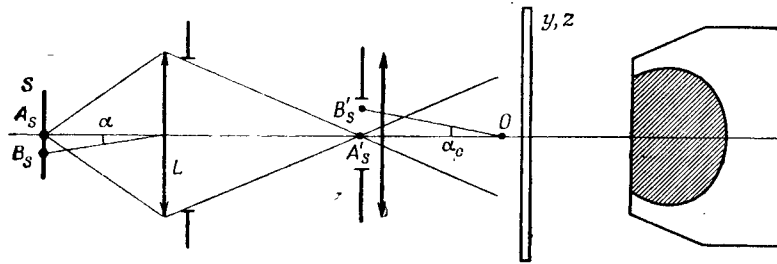
Таким образом, мы опять пришли, как и в § 4, к преобразованию Фурье от распределения энергии (FF^*) на конденсоре. Этот результат приводит к весьма важному для практики следствию: каким бы ни был используемый конденсор, на степень частичной когерентности объекта влияет только величина его отверстия.

В частности, никакого влияния не оказывают его аберрации, которые вносят в функцию F изменения фаз; ранее полагали, что для получения высокого качества изображения, даваемого микроскопом, нужно создать на препарате весьма совершенное изображение источника для того, чтобы осуществить наилучшим образом некогерентность освещения. В действительности степень частичной когерентности не зависит от аберраций конденсора. Конденсор может быть относительно плох, поскольку значения имеют только геометрические размеры его зрачка, т. е. практически (если отверстие конденсора круглое) угловое отверстие α_c конуса лучей, освещающих объект.

Но на самом деле, чтобы наилучшим образом избавиться от паразитного света, выгодно создать приличное изображение диафрагмы на препарате.

§ 7. Обычное освещение микроскопов

Когда изображение источника находится в плоскости объекта, появляется опасность неравномерного освещения препарата, так как на изображение объекта накладывается изображение неоднородностей источника, которые могут создать заметные изменения яркости объекта. По



Фиг. 62.

этой причине обычно предпочитают проецировать изображение протяженного источника S на плоскость зрачка конденсора (фиг. 62). Если B_s — точка источника S , то ее изображение B'_s является слегка размытым пятном, размер которого зависит от свойств линзы L .

Чтобы узнать вклад точки B_s источника в распределение амплитуд на объекте, достаточно рассмотреть поверхность волны, вышедшей из точки B_s и дошедшей к началу координат O в момент времени $t=0$. Если α_c — угол между лучами, вышедшими из точек A_s и B_s в точку O , то комплексная амплитуда в точке с координатами y, z будет точно такая же, какой бы она была, если бы точка B_s располагалась в точке B'_s , поскольку наклоны волновых поверхностей одинаковы. Отсюда заключаем, что этот случай может быть сведен к случаю, рассмотренному в § 4. Участие промежуточной оптической системы в формировании изображения в зрачке не влияет на степень когерентности, которая остается равной преобразованию

Фурье от распределения энергии в зрачке (при этом предполагаем, конечно, что линза L мало диафрагмирует пучки).

§ 8. Образование изображения при частично когерентном освещении

Мы будем использовать теперь более сжатые обозначения, сообразно с условиями гл. 2, § 5. Пусть M — точка с координатами y, z на плоскости объекта, M' — аналогичная точка в плоскости изображений, dM — элемент поверхности; будем считать также, что длина волны выбрана за единицу длины.

Рассмотрим объект, представленный функцией пропускания (комплексной) амплитуды колебаний $\Omega(M)$. Пусть $a(M, t + \theta)$ — падающая переменная (флуктуирующая) амплитуда в этой же точке. Если θ — время прохождения расстояния между объектом и изображением, то амплитуда, пропущенная объектом, будет равна $a\Omega$, и в результате в плоскости изображения получаем распределение

$$a(M, t) \Omega(M) E(M' - M),$$

так что в каждый момент времени амплитуда в точке M' плоскости изображений будет равна с точностью до множителя величине

$$a'(M') = \iint a(M, t) \Omega(M) E(M' - M) dM.$$

При этом предполагаем, что оптический путь между центром объекта O и центром изображения O' содержит целое число волн, так что фаза не меняется.)

Освещенность можно представить, обозначая через dM_1 и dM_2 элементы плоскости объекта (для упрощения записи в следующих формулах заменим \iint на \int), таким выражением:

$$\overline{a'a'^*} = \int a(M_1, t) \Omega(M_1) E(M' - M_1) dM_1 \times \\ \times \int a^*(M_2, t) \Omega^*(M_2) E^*(M' - M_2) dM_2,$$

или, замечая, что среднее относится только к флуктуирующим величинам, выражением

$$\alpha' \alpha'^* = \iint \overline{\alpha(M_1, t) \alpha^*(M_2, t)} \Omega(M_1) \Omega^*(M_2) E^*(M' - M_1) \times \\ \times E^*(M' - M_2) dM_1 dM_2.$$

Предположим также, что энергия, полученная от источника различными точками объекта, распределяется равномерно; тогда освещенность в изображении с точностью до множителя будет равна

$$I(M') = \iint \Omega(M_1) E(M' - M_1) \Omega^*(M_2) E^*(M' - M_2) \times \\ \times \gamma(M_2 - M_1) dM_1 dM_2. \quad (7.10)$$

Можно показать, что это общее выражение действительно содержит два частных случая, которые мы изучали до сих пор:

1. Если объект самосветящийся, будет иметь место совершенная некогерентность. При этих условиях величина γ равна нулю, кроме случая, когда точки M_1 и M_2 совпадают. Следовательно, мы вернемся к выражению (3.1), потому что получим с точностью до множителя такое выражение¹⁾:

$$I(M') = \int \Omega(M_1) \Omega^*(M_1) E(M' - M_1) E^*(M' - M_1) dM_1,$$

но произведение $\Omega \Omega^*$ является множителем энергетического пропускания — функцией $O(M)$ — объекта; EE^* также представляет распределение — функцию $D(M')$ — энергии в изображении точки. Поэтому можем написать в более сжатой форме соотношение (3.1)

$$I(M') = \int O(M) D(M' - M) dM.$$

2. Если $\gamma \equiv 1$, будет иметь место совершенная когерентность. При этих условиях четверному интегралу

¹⁾ Не следует удивляться смелому приему, состоящему в отбрасывании множителя dM_2 ; для решения задачи можно вернуться к суммам (отбросив интегралы) или использовать теорию распределений.

можно придать вид произведения двух двойных интегралов:

$$I(M') = \int \Omega(M_1) E(M' - M_1) dM_1 \int \Omega(M_2) E^*(M' - M_2) dM_2 = \\ = \left| \int \Omega(M) E(M' - M) dM \right|^2,$$

в этом выражении мы узнаем квадрат модуля $A(M') = \int \Omega(M) E(M' - M) dM$, который был получен в заключительной части гл. 3, § 4.

§ 9. Гармонический анализ изображения

Выражение (7.10) кажется простым, но в приложениях применение его представляет трудности. Нам необходимо, следуя Блан-Лапьеру и Гопкинсу, изучить гармонический анализ изображения, найдя преобразование Фурье функции $I(M')$.

Заменяя фактор γ в формуле (7.10) его выражением, полученным в § 6, можно написать, вводя точку P на зрачке конденсора и $\varepsilon(P)$ — распределение энергии на этом зрачке, следующую формулу:

$$I(M') = \iiint \Omega(M_1) E(M' - M_1) \Omega^*(M_2) E^*(M' - M_2) \times \\ \times \varepsilon(P) h[2\pi \mathbf{P}(M_2 - M_1)] dP dM_1 dM_2 = \\ = \int \varepsilon(P) \left\{ \int \Omega(M_1) E(M' - M_1) h(-2\pi \mathbf{P}M_1) dM_1 \right\} \times \\ \times \left\{ \int \Omega^*(M_2) E^*(M' - M_2) h(+2\pi \mathbf{P}M_2) dM_2 \right\} dP.$$

Каждый из интегралов в фигурных скобках представляет гармонический анализ произведения двух функций, и к ним можно применить результаты, полученные в гл. 2, § 4. Обозначая через $F(P)$ распределение амплитуд на зрачке [являющееся преобразованием Фурье функции $E(M)$] и обозначая через ω преобразование функции Ω , найдем

$$\int \Omega(M_1) E(M' - M_1) h(-2\pi \mathbf{P}M_1) dM_1 = \\ = \int \omega(P_1 - P) F(P_1) h(-2\pi P_1 M') dP_1,$$

$$\int \Omega^*(M_2) E^*(M' - M_2) h(2\pi P M_2) dM_2 = \\ = \int \omega^*(P_2 - P) F^*(P_2) h(2\pi P_2 M') dP_2.$$

Последние выражения приводят к формуле

$$\iiint \varepsilon(P) \omega(P_1 - P) \omega^*(P_2 - P) F(P_1) F^*(P_2) \times \\ \times h[2\pi(P_2 - P_1) M'] dP_1 dP_2 dP.$$

Если здесь ввести замену переменных $P_1 = S + (s/2)$, $P_2 = S - (s/2)$, то найдем следующее выражение для $I(M')$:

$$\iiint \varepsilon(P) \omega\left(S + \frac{s}{2} - P\right) \omega^*\left(S - \frac{s}{2} - P\right) F\left(S + \frac{s}{2}\right) \times \\ \times F^*\left(S - \frac{s}{2}\right) h(-2\pi s M') dP dS ds;$$

в последнем выражении легко выделить преобразование Фурье $i(s)$ функции $I(M')$, определяемое по формуле (3.2), которое равно

$$i(s) = \iint \varepsilon(P) \omega\left(S - P + \frac{s}{2}\right) \omega^*\left(S - P - \frac{s}{2}\right) \times \\ \times F\left(S + \frac{s}{2}\right) F^*\left(S - \frac{s}{2}\right) dP dS,$$

или (всюду с точностью до множителя), полагая $P = S - Q$, получаем

$$i(s) = \int \left[\int \varepsilon(S - Q) F\left(S + \frac{s}{2}\right) F^*\left(S - \frac{s}{2}\right) dS \right] \times \\ \times \omega\left(Q + \frac{s}{2}\right) \omega^*\left(Q - \frac{s}{2}\right) dQ; \quad (7.11)$$

в этом выражении роли прибора (функции ε , F , F^*) и объекта (функции ω , ω^*) полностью разделены.

Таким образом, оказывается, что при частично когерентном освещении отсутствует простое фильтрование пространственных частот: если ω является спектром объекта, то для вычисления спектра $i(s)$ изображения нужно выполнить интегрирование по формуле (7.11).

§ 10. Случай слабого контраста

Мензел и Сланский обратили внимание на следующее обстоятельство. Если объект имеет слабый контраст, то происходит приближенно фильтрование пространственных частот. Действительно, в этом случае объект можно рассматривать как наложение некоторого равномерного распределения амплитуд и некоторой функции малой амплитуды $\Omega'(M)$.

Преобразование Фурье $\omega(s)$ состоит тогда из функции $\delta(s)$ Дирака и преобразования $\omega'(s)$ функции $\Omega'(M)$, обладающего также малой амплитудой. В результате получаем

$$i(s) = \int \left[\int \varepsilon(S - Q) F\left(S + \frac{s}{2}\right) F^*\left(S - \frac{s}{2}\right) dS \right] \times \\ \times \left[\delta\left(Q + \frac{s}{2}\right) + \omega'\left(Q + \frac{s}{2}\right) \right] \left[\delta\left(Q - \frac{s}{2}\right) + \right. \\ \left. + \omega'^*\left(Q - \frac{s}{2}\right) \right] dQ.$$

Пренебрегая членами с $\omega'\omega'^*$ и используя свойства δ -функции, можно переписать $i(s)$ в виде суммы трех членов. Произведение двух δ -функций появляется, если $s = 0$, и его интеграл равен $\delta(s)$; произведение $\delta\omega'^*$ приводит к условию $Q = -s/2$; аналогично произведение $\delta\omega'$ приводит к $Q = s/2$.

В результате получаем

$$i(s) = \left[\int \varepsilon(S) F(S) F^*(S) dS \right] \delta(s) + \\ + \left[\int \varepsilon\left(S - \frac{s}{2}\right) F\left(S + \frac{s}{2}\right) F^*\left(S - \frac{s}{2}\right) dS \right] \omega'(s) + \\ + \left[\int \varepsilon\left(S + \frac{s}{2}\right) F\left(S + \frac{s}{2}\right) F^*\left(S - \frac{s}{2}\right) dS \right] \omega'^*(-s); \quad (7.12)$$

эта формула описывает процесс фильтрования, причем множители контраста для частот 0 , s , $-s$ выражаются тремя последовательно расположенными интегралами.

Этот результат можно записать и в более симметричном виде, приводящем к двухчленному выражению: первую квадратную скобку можно заменить любым другим выражением, принимающим такое же значение для $s=0$. Можно, в частности, в качестве такого выражения взять

полусумму двух скобок, относящихся к частотам $+s$ и $-s$:

$$A(s) = \int \frac{1}{2} \left[\varepsilon \left(S - \frac{s}{2} \right) + \varepsilon \left(S + \frac{s}{2} \right) \right] \times F \left(S + \frac{s}{2} \right) F^* \left(S - \frac{s}{2} \right) dS \quad (7.13)$$

и аналогично их разность

$$B(s) = \int \left[\varepsilon \left(S - \frac{s}{2} \right) - \varepsilon \left(S + \frac{s}{2} \right) \right] F \left(S + \frac{s}{2} \right) F^* \left(S - \frac{s}{2} \right) dS;$$

это приводит к следующему результату:

$$i(s) = A(s) [\delta(s) + \omega'(s) + \omega'^*(-s)] + B(s) \left[\frac{\omega'(s) - \omega'^*(-s)}{2} \right]. \quad (7.14)$$

Кроме того, согласно Мензелу (D. Menzel, 1958), чтобы разделить влияние изменений амплитуды и фазы, напишем

$$\Omega(M) = |\Omega| h(\varphi) = 1 + a(M) + ib(M).$$

Заметим, что в выражении (7.13) коэффициент при A является преобразованием Фурье выражения

$$1 + \Omega'(M) + \Omega'^*(M) = 1 + 2a(M),$$

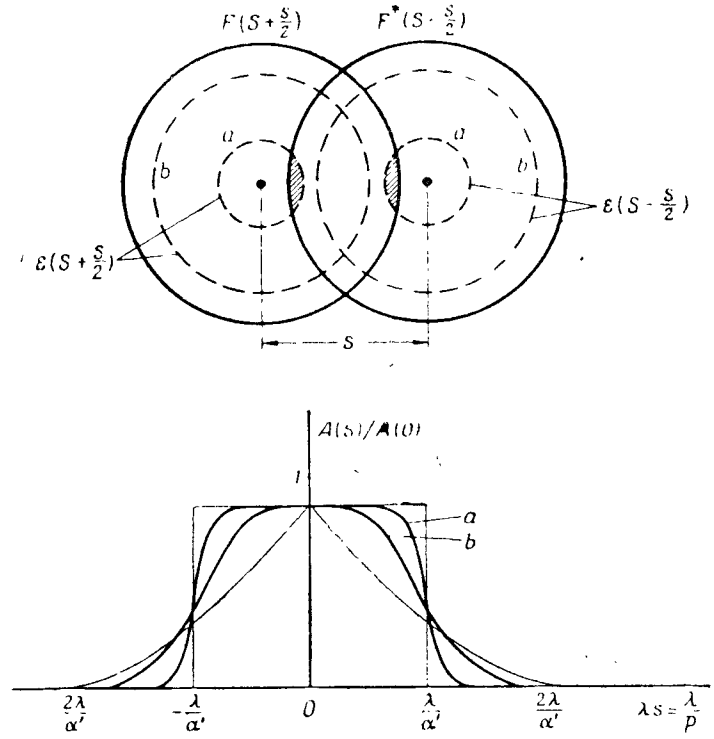
а коэффициент при B является преобразованием Фурье функции

$$\frac{\Omega'(M) - \Omega'^*(M)}{2} = ib(M).$$

Следовательно, функции $A(s)$ и $B(s)$ являются функциями фильтрации для изменений амплитуды и фазы объекта.

Полезно уточнить пределы области воспринимаемых частот, которые могут быть пропущены прибором с круглым зрачком, освещенным конденсором, также круглым и центрированным. Область интегрирования (фиг. 63) состоит из площади, общей двум окружностям, ограничивающим области значений функций $F[S+(s/2)]$ и $F^*[S-(s/2)]$, а также области, ограничивающей в соответствии с рассматриваемым случаем функцию $\varepsilon[S-(s/2)]$ или $\varepsilon[S+(s/2)]$.

Отсюда следует, что если прибор является стигматическим, то $B(s)$ равно нулю (если не пользоваться установкой фазового контраста) и $A(s)$ претерпевает те изменения, которые свойственны поверхности области интегрирования. На фиг. 63 показано изменение $A(s)$ при



Фиг. 63.

малом отверстии конденсора (случай a) и при отверстии конденсора, сравнимом с отверстием объектива (случай b).

Теперь становится понятнее поведение кривой, представляющей множитель контраста, когда отверстие конденсора изменяется в пределах, соответствующих когерентному и некогерентному освещению (эти предельные случаи даны штриховыми линиями в верхней части фиг. 63).

Сланский (S. Slansky, 1959) в другой работе обратил внимание на то, что в случае слабого контраста, кроме фильтрования пространственных частот, можно обнаружить также соответствие в виде свертки между объектом и его изображением. Иначе говоря, маленькая деталь (амплитудная или фазовая) на объекте вносит в изображение аддитивное распределение амплитуд, которые играют роль изображения точки. Природу этого изображения легко уточнить, например, в случае какого-нибудь амплитудного объекта и совершенного прибора: закон фильтрования представлен на фиг. 63 заштрихованными площадями, т. е. сверткой окружностей, ограничивающих функции F и ϵ . «Изображением точки» здесь является преобразование Фурье, т. е. произведение преобразования функции F на преобразование функции ϵ .

Такая сравнительно простая точка зрения разъясняется в дополнении 4 с учетом результатов новых работ, полученных в момент издания настоящей книги.

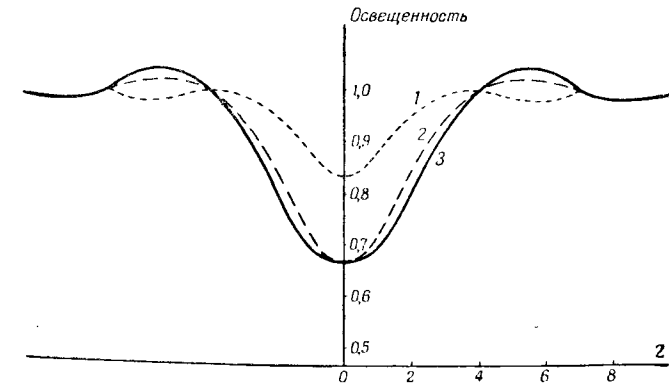
§ 11. Некоторые приложения: образование изображения в микроскопе; интерпретация эффекта Калье

Теория частичной когерентности, очевидно, приложима к образованию изображения в микроскопе. Вследствие этого различные исследователи занимались теоретическим изучением изменения структуры изображения в микроскопе в виде функции от отверстия конденсора (в предположении, что объект обладает значительным контрастом).

С помощью весьма трудоемких вычислений можно при любом контрасте изучить, как изменяется изображение некоторых типичных объектов: точек, линий, краев светлого поля и т. д. На фиг. 64 приведены полученные Сланским результаты, дающие представление об изменении вида изображения, когда понемногу раскрывается отверстие конденсора (σ возрастает); при $\sigma=0$ результаты соответствуют когерентному освещению, а при $\sigma=\infty$ — некогерентному освещению. Отметим, что изменения в основном происходят достаточно монотонно: можно считать, что до значения σ , равного приблизительно $1/4$, изображение остается практически таким же, как и при когерентном освещении:

а это как раз и есть случай обычных микроскопических наблюдений.

Рассмотрим еще теоретическую интерпретацию явления, известного под названием эффекта Калье. С давних пор было известно, что плотность фотографической пластинки зависит в широкой мере от условий освещения и от поведения рассеянного пластинкой светового потока.

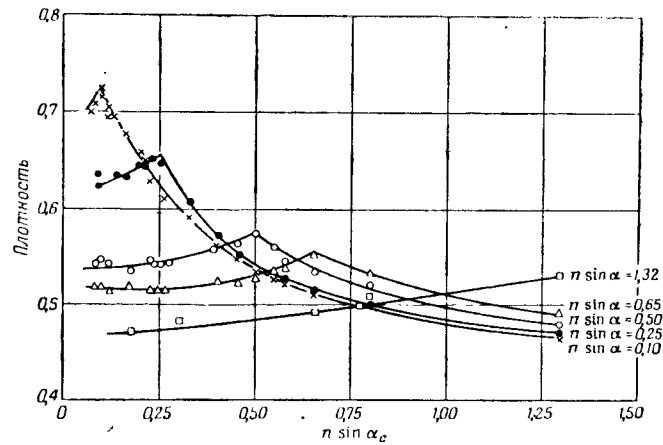


Фиг. 64. Изменения в изображении маленького темного диска радиусом $Z=0,96$ на светлом фоне в зависимости от отверстия конденсора.

1 — освещение некогерентное ($\sigma \rightarrow \infty$); 2 — частично когерентное освещение; отверстие конденсора равно половине отверстия объектива ($\sigma = 0,5$); 3 — когерентное освещение ($\sigma = 0$).

Если образовывать на фотографической пластинке изображение узкого источника S с помощью конденсора и затем собрать поток с помощью объектива O , то коэффициент пропускания энергии пластинкой (отношение потоков при наличии пластинки и без нее) зависит от отверстий конденсора и объектива.

Вернье (P. Vernier, 1958) предложил теорию, использующую «модель» фотографической пластинки, состоящую из тонкого объекта, пропускаемость которого в любой рассматриваемой точке равна либо нулю, либо единице. Оказывается, что прозрачность является симметричной функцией от отверстий объектива и конденсора. Кроме того, если изменять отверстие конденсора при данной отверстию объектива, то плотность пластинки проходит через макси-



Фиг. 65.

мум, когда их отверстия равны, но этот максимум является точкой излома кривой. Это очень хорошо подтверждается опытом, как показывает фиг. 65, где представлена плотность в виде функции от отверстия конденсора для различных значений отверстий объектива.

Часть третья Влияние aberrаций

В предыдущих главах мы изучали случай совершенного стигматического прибора, т. е. случай, когда волновая поверхность является идеально сферической. При этом дифракционное пятно, контраст изображения, функция фильтрования и т. д. зависят только от формы и размеров зрачка. С другой стороны, из соображений геометрической оптики вытекает, что если геометрические aberrации становятся заметными, то изображение какой-либо точки светящегося объекта уже больше не является дифракционным пятном; действительно, световые лучи пересекаются по некоторой каустической поверхности, которая может оказаться полезной при изучении распределения энергии в световом пятне, образующемся при пересечении пучков экраном. Таким образом, существуют два предельных вида оптического изображения, один соответствует совершенному оптическому прибору, другой — прибору с большими aberrациями. Когда aberrации малы, то дифракционное пятно и контраст изображения меняются ничтожно; присутствие таких aberrаций незаметно, и практически их можно допускать, так как они не влияют на качество прибора. Если же aberrации возрастают, то дифракционное пятно быстро изменяется и пятно изображения определяется законами геометрической оптики, как это можно видеть из фото II—VII.

На практике оптики-вычислители стараются получить возможно лучшие значения aberrаций, и в соответствии с назначением изучаемой оптической системы aberrации не должны выходить из тех или иных пределов. Расчет объектива микроскопа, например, следует вести до тех пор, пока не получится весьма совершенное изображение, т. е. такое, в котором влиянием aberrаций уже можно пренебречь.

Наоборот, в случае фотографического объектива бесполезно требовать, чтобы оптическое изображение обладало значительно более тонкой структурой, чем зерна фотографической эмульсии, т. е. в этом случае могут иногда допускаться значительные аберрации.

Задачи, которые встречаются на практике, заключены обычно между этими предельными случаями. Следовательно, весьма полезно узнать, как меняется строение пятна изображения в пределах от совершенного дифракционного пятна до пятна, определяемого геометрической оптикой, в частности для определения той максимальной величины аберраций, при которой качество изображения заметно не меняется. Этот вопрос впервые был изучен Релеем (1879) для случая сферической аберрации. Релей показал, что если волновая поверхность, создаваемая оптическим прибором, может быть заключена между двумя сферами, расположенными на расстоянии, равном приблизительно четверти длины волны, то изображение остается еще очень близким к изображению, даваемому совершенным оптическим прибором. Это и есть знаменитое правило Релея, пределы применимости которого будут изучены ниже.

В гл. 8 изучается влияние малых геометрических аберраций на контраст оптического изображения и определение допусков. Затем в гл. 9 мы рассмотрим случай средних и больших аберраций, что позволит установить общий вид изменения изображения при увеличении аберраций. Мы будем широко использовать различные полученные в гл. 4 соотношения, выражающие контраст изображения, учитывая, что $F(\beta', \gamma') = E_0 h(k\Delta)$ является мнимой величиной, причем ее аргумент $k\Delta$ представляет собой влияние аберрации. Достаточно легко показать, что контраст, определяемый этими выражениями, не изменяется, если Δ меняет знак в пределах отверстия зрачка. Следовательно, можно утверждать, что контраст является четной функцией Δ , так что влияние малых аберраций выражается в первом приближении квадратичной формой относительно коэффициентов аберраций.

ГЛАВА 8

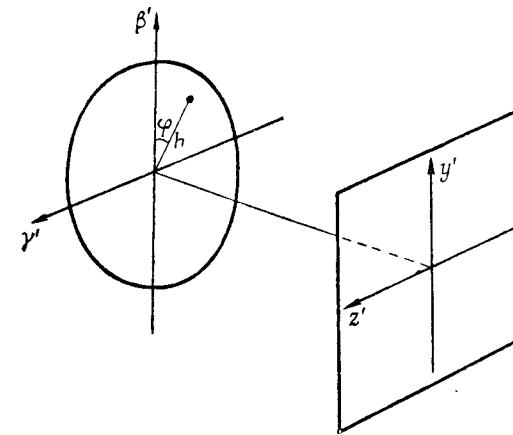
Влияние малых аберраций

§ 1. Общие соотношения и определения

В случае малых аберраций можно представить функцию $F(\beta', \gamma')$ в виде

$$F(\beta', \gamma') = E_0 h(k\Delta) = E_0 \left(1 + ik\Delta - \frac{k^2}{2} \Delta^2 \right). \quad (8.1)$$

С другой стороны, если зрачок круглый, то удобно пользоваться приведенными полярными координатами h и φ (фиг. 66), где h меняется от нуля в центре зрачка до



Фиг. 66.

единицы на его краю. Следовательно, можно написать

$$h = \frac{1}{\alpha'} (\beta'^2 + \gamma'^2)^{1/2}. \quad (8.2)$$

При этих условиях отклонение Δ , как известно из теории геометрических аберраций, можно представить следующим образом:

$$\Delta = dh^2 + s_1 h^4 + s_2 h^6 + (Kh + C_1 h^3 + C_2 h^5) \cos \varphi + ah^2 \cos 2\varphi. \quad (8.3)$$

Коэффициенты в этом выражении имеют следующие значения:

d представляет дефокусировку или кривизну поля, т. е. максимальное отклонение на краю зрачка ($h = 1$) сферы сравнения от волновой поверхности (которая является сферической, если эта аберрация единственная);

s_1 — коэффициент сферической аберрации 3-го порядка. Это максимальное отклонение (на краю зрачка) деформированной волновой поверхности от сферы сравнения, имеющей центр в параксиальном фокусе (острие геометрической «каустики»);

s_2 — коэффициент сферической аберрации 5-го порядка при тех же условиях;

K — параметр, соответствующий возможному покачиванию сферы сравнения;

C_1 — коэффициент комы 3-го порядка, т. е. максимальное отклонение на краю отверстия от сферы сравнения, центр которой совпадает с параксиальным фокусом волновой поверхности, соответствующей коме (если эта аберрация единственная);

C_2 — коэффициент комы 5-го порядка при тех же условиях;

a — коэффициент астигматизма, т. е. максимальное отклонение астигматической волновой поверхности от сферы сравнения, центр которой находится на середине расстояния, разделяющего оба фокуса.

§ 2. Изображение точки

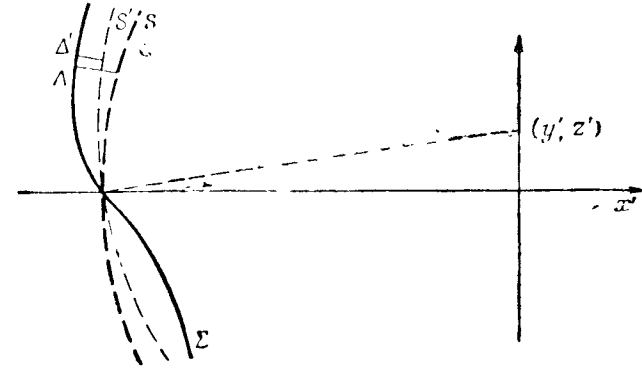
Рассмотрим опять соотношение (1.5), выражающее распределение амплитуд в пятне изображения точки, отнесенное к координатам y', z' ; это соотношение мы запишем в следующем виде:

$$E(y', z') = i \frac{RE_0}{\lambda} \iint h(k\Delta - \beta'y' - \gamma'z') d\beta' d\gamma'. \quad (8.4)$$

Положим, что

$$\Delta' = \Delta - \beta'y' - \gamma'z', \quad (8.5)$$

где Δ' представляет собой отклонение волновой поверхности в точке с координатами β', γ' от сферы сравнения



Фиг. 67.

с центром в точке с координатами y', z' (фиг. 67). Обозначим через ds элемент поверхности, отнесенный к площади всего зрачка; следовательно, $ds = h dh dy / \pi$, так как $\iint ds = 1$. Соотношение (8.4) тогда примет вид

$$E(y', z') = \frac{iRE_0 \pi \alpha'^2}{\lambda} \left[1 + ik \iint \Delta' ds - \frac{k^2}{2} \iint \Delta'^2 ds \right]. \quad (8.6)$$

Если нормировать это выражение к амплитуде, которая получается в центре дифракционного пятна совершенного прибора ($\Delta' = 0$), то относительную амплитуду $E_r(y', z')$ можно записать так:

$$E_r(y', z') = 1 + ik \iint \Delta' ds - \frac{k^2}{2} \iint \Delta'^2 ds. \quad (8.7)$$

Отсюда можно вывести выражение для освещенности центра дифракционного пятна с точностью до квадратичных членов:

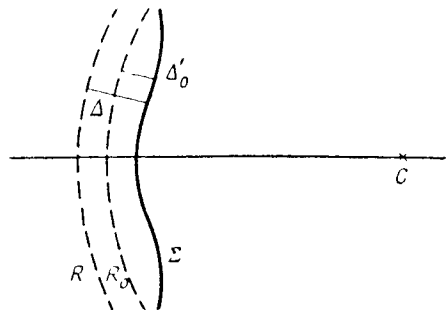
$$D_r = E_r E_r^* = 1 - k^2 \left[\iint \Delta'^2 ds - \left(\iint \Delta' ds \right)^2 \right]. \quad (8.8)$$

Величина в квадратных скобках допускает простую геометрическую интерпретацию. Будем изменять радиус

сферы сравнения (фиг. 68), тогда получим

$$\Delta' = \Delta_0' + R - R_0.$$

Подставим выражение для Δ' в выражение (8.8); непосредственное вычисление показывает, что D_r остается



Фиг. 68.

неизменной, как это можно было предположить априори. Действительно, можно написать, обозначая через $\bar{\Delta}'$ и $\bar{\Delta}'^2$ их средние значения:

$$\bar{\Delta}'^2 - (\bar{\Delta}')^2 = \bar{R}_0'^2 - (\bar{R}_0')^2. \quad (8.9)$$

В качестве сферы сравнения удобно подобрать такую сферу, для которой $\bar{\Delta}_0' = 0$; для этого достаточно, чтобы

$$R_0 = R - \bar{\Delta}'.$$

Тогда относительную освещенность D_r можно выразить так:

$$D_r(y', z') = (1 - k^2 \bar{\Delta}'^2)^2. \quad (8.10)$$

Простой расчет (Марешаль, 1947) показывает, впрочем, что

$$D_r(y', z') \geq \left(1 - \frac{k^2}{2} \bar{\Delta}'^2\right)^2. \quad (8.11)$$

Следовательно, можно вычислить нижний предел освещенности с помощью среднего квадратичного отклонения

волновой поверхности от сферы надлежащего радиуса R_0 . Эта сфера соответствует минимуму среднего квадратичного отклонения.

Приложение этих результатов к ряду полезных для практики случаев показывает, что приближенная величина, найденная для D_r , отличается от точного значения только на 0,01, если D_r близко к 0,75; такое приближение уже оказывается достаточно точным для выяснения многих вопросов.

§ 3. Общее выражение для допустимого значения малых aberrаций, влияющих на качество изображения точки

Выражение (8.10) или (8.11) может быть использовано, в частности, для доказательства того, что понижение центрального максимума не должно превосходить некоторой заранее известной величины. Релей (1879 г.), изучая влияние сферической aberrации, нашел, что aberrация порядка $\lambda/4$ понижает интенсивность в центре дифракционного пятна приблизительно на 20%, что вообще почти не влияет на качество изображения. Если принять за исходную эту величину, то можно написать $k^2 \bar{\Delta}'^2 \leq 0,2$, или

$$\bar{\Delta}'^2 \leq \frac{\lambda^2}{180}. \quad (8.12)$$

Таким образом, мы получили формулу для допустимой величины среднего квадратичного отклонения $\bar{\Delta}'^2$ волновой поверхности относительно некоторой оптимальной сферы, а не максимального значения Δ_0' .

Для оптика-вычислителя важна возможность быстро применить это правило при определении допусков для каждой из классических aberrаций. Для этого нужно определить среднее квадратичное отклонение Δ_0' , используя равенства (8.3) и (8.9), где полагаем $\bar{\Delta}'_0 = 0$, а также $y' = z' = 0$ (покачивание сферы сравнения удобно пред-

ставить параметром K):

$$\overline{\Delta'^2} = \frac{d^2}{12} + \frac{ds_1}{6} + \frac{4}{45} s_1^2 + \frac{3}{20} ds_2 + \frac{1}{6} s_1 s_2 + \frac{9}{112} s_2^2 + \frac{K^2}{4} + \frac{KC_1}{3} + \frac{C_1^2}{8} + \frac{KC_2}{4} + \frac{C_1 C_2}{5} + \frac{C_2^2}{12} + \frac{a^2}{6}. \quad (8.13)$$

Для иллюстрации используемого метода мы выполним расчет в частном случае дефокусировки. Из (8.3) имеем $\Delta' = dh^2$, причем эта ошибка обладает симметрией вращения. Отсюда следует, что максимум освещенности будет расположен на оси, т. е. можно положить $y' = z' = K = 0$. Вычислим по формуле (8.9) средние значения $\Delta'^2 = d^2 h^4$ и $\Delta' = dh^2$ на круге, радиус которого соответствует $h = 1$. Получим

$$\overline{\Delta'^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 d^2 h^4 h \partial h \partial \varphi = \frac{d^2}{3}$$

и

$$\overline{\Delta'} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 dh^2 h \partial h \partial \varphi = \frac{d}{2},$$

откуда

$$\overline{\Delta_0^2} = \overline{\Delta'^2} - (\overline{\Delta'})^2 = \frac{d^2}{12},$$

как это и записано в равенстве (8.13).

Наконец, общий допуск на малые аберрации в случае изображения точки можно определить с помощью следующего выражения, полученного из сопоставления равенств (8.12) и (8.13):

$$\frac{d^2}{12} + \frac{ds_1}{6} + \frac{4}{45} s_1^2 + \frac{3}{20} ds_2 + \frac{1}{6} s_1 s_2 + \frac{9}{112} s_2^2 + \frac{K^2}{4} + \frac{KC_1}{3} + \frac{C_1^2}{8} + \frac{KC_2}{4} + \frac{C_1 C_2}{5} + \frac{C_2^2}{12} + \frac{a^2}{6} < \frac{\lambda^2}{180}. \quad (8.14)$$

Можно заметить, что это выражение легко разделить на группы независимых членов, соответствующих дефокусировке и сферической аберрации, коме и, наконец, астигматизму. Если обозначить через S_M допустимую величину сферической аберрации, взятой изолированно или в комби-

нации с дефокусировкой, через C_M — допустимое значение комы и через A_M — допустимое значение астигматизма, то общий допуск можно написать в виде

$$\left(\frac{S}{S_M}\right)^2 + \left(\frac{C}{C_M}\right)^2 + \left(\frac{A}{A_M}\right)^2 \leq 1. \quad (8.15)$$

§ 4. Примеры обсуждения результатов; вычисление допусков

Обсудим в качестве примера некоторые применения выражения (8.14) и выразим допуски в виде, непосредственно пригодном для вычислителей.

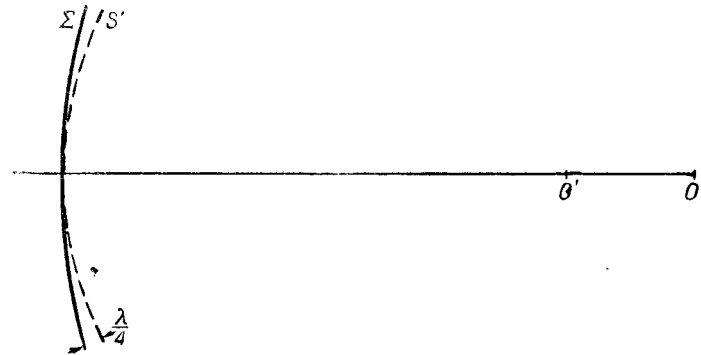
а) Ошибка дефокусировки. Из условия

$$\frac{4\pi^2 d^2}{12\lambda^2} < 0,2$$

получаем

$$d \leq \frac{\lambda}{4}.$$

Это совпадает с правилом Релея: в стигматическом приборе, создающем сферическую волновую поверхность с центром в точке O , можно допустить дефокусировку $e = OO'$ при условии, что расстояние между волновой поверхностью Σ и сферой сравнения с центром в точке O' , измеренное по краю, не превосходит величину $\lambda/4$ (фиг. 69). Для этого достаточно, согласно выражению



Фиг. 69.

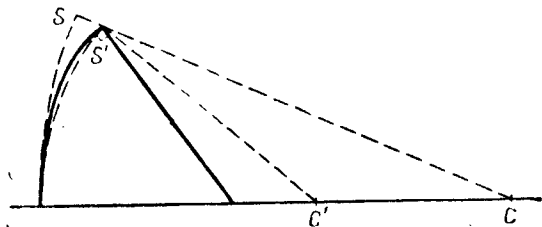
(1.5), чтобы ϵ удовлетворяло условию $\epsilon \alpha'^2/2 \leq \lambda/4$, откуда $\epsilon < \lambda/2\alpha'^2$.

Можно равным образом применить эти соотношения и к пространству объектов, где они определяют точность, с которой можно осуществить продольную установку. Из этой формулы вытекает, что точность наводки изменяется как квадрат отверстия прибора (см. гл. 11).

б) Сферическая aberrация. Рассмотрим прежде всего сферическую aberrацию 3-го порядка, определяемую коэффициентом s_1 . Из выражения (8.13) следует, что можно найти наилучшую фокусировку, при которой величина

$$\frac{d^2}{12} + \frac{ds_1}{6} + \frac{4}{45} s_1^2$$

имеет минимум. Это происходит при $d = -s_1$, т. е. когда дефокусировка соответствует такому положению центра



Фиг. 70.

сферы сравнения S' , при котором S' пересекает поверхность aberrационной волны на краю (фиг. 70). Из соображений геометрической оптики легко найти, что при этом фокусировка осуществляется на середину длины отрезка продольной сферической aberrации (этот отрезок сводится к нулю, когда aberrация мала).

В частном случае такой дефокусировки общий допуск определяется условием

$$s_1 < 0,95 \lambda \approx \lambda.$$

Следовательно, деформация волновой поверхности относительно сферы S с центром в парааксиальном фокусе не должна превышать длину волны. Впрочем, можно убедиться, что при этих условиях максимальное отклонение

относительно сферы S' не превышает $\lambda/4$. Максимальная продольная aberrация тогда равна, как это вытекает из соотношения между продольной и волновой aberrациями¹⁾

$$l = \frac{4\lambda}{\alpha'^2}.$$

В случае сферической aberrации 5-го порядка вопрос ставится обычно следующим образом. Составляющие aberrации 3-го порядка доведены до малой величины, но остаются еще и aberrации 5-го порядка, которые практически трудно уменьшить. Можно попытаться рассчитать, какие остаточные aberrации 3-го порядка надо сохранить, чтобы уменьшить действие составляющих 5-го порядка, а также определить наилучшую фокусировку, обеспечивающую минимум полиномиальной функции от величин d , s_1 , s_2 в соотношении (8.13). Вычисление показывает, что при этом получаем $d = \frac{3}{5} s_2$ и $s_1 = -\frac{3}{2} s_2$. Тогда можем написать общий допуск

$$s_2 \leq 3,75 \lambda.$$

При этом отклонение волновой поверхности от оптимальной сферы сравнения остается значительно меньшим длины волны. Наконец, можно написать, что деформация волновой поверхности Δ относительно парааксиального фокуса выражается следующим образом:

$$\Delta = 3,75 \lambda \left(-\frac{3}{2} h^4 + h^6 \right).$$

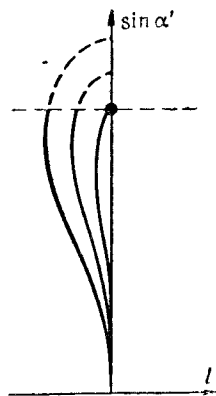
Отсюда можно легко найти продольную aberrацию. Она обращается в нуль для максимального отверстия ($h = 1$); следовательно, оптимальная коррекция aberrаций будет достигнута, если продольная aberrация для края равна нулю (фиг. 71); при этих условиях максимальное значение продольной aberrации равно $6\lambda/\alpha'^2$.

в) Кома. Так же как и для сферической aberrации, мы можем опять найти физический фокус волны, на сей раз используя параметр K , вводящий поперечное смещение

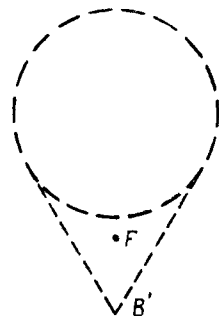
¹⁾ См. Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем, М., 1937, стр. 661, формула (38) (нужно заменить u на α' и считать α' малым). — Прим. ред.

ние центра сферы сравнения внутри геометрического пятна комы, где полностью скрыто и дифракционное пятно.

Для комы 3-го порядка найдем, что минимум полинома имеет место, когда K равно $-\frac{2}{3}C_1$, т. е. когда фокус волновой поверхности расположен в центре сферы сравнения S' и положение его легко определить; он расположен на расстоянии $\frac{2}{9}$ полного раз-



Фиг. 71.



Фиг. 72.

мера пятна комы (фиг. 72). Применяя теперь формулу для общего допуска, найдем

$$C_1 \leq 0,6\lambda.$$

Таким образом, максимальная деформация волновой поверхности относительно сферы, центр которой лежит в области параксиального изображения, не должна превышать $0,6\lambda$, но отклонение относительно сферы S' с центром в физическом фокусе F волны оказывается значительно меньше (фиг. 73).

Впрочем, можно написать допуск и в виде функции от отступления от условия синусов. Используя известное соотношение между комой и отступлением от условия синусов, Δ можно представить в виде

$$\Delta = y' \sin \alpha' \Psi(\sin \alpha'),$$

где Ψ является относительным отступлением от условия

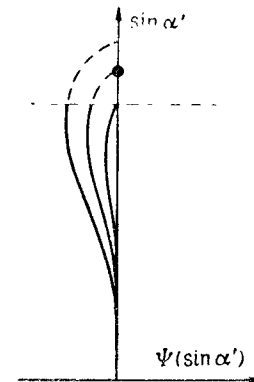
синусов¹. Следовательно, для допуска этой величины можно написать следующее условие:

$$\Psi(\sin \alpha') < \frac{0,6\lambda}{y' \alpha'}.$$

Для наилучшей компенсации комы 5-го порядка с помощью остаточной комы 3-го порядка и введения накло-



Фиг. 73.



Фиг. 74.

на сферы сравнения нужно найти минимум полинома от K , C_1 , C_2 относительно K и C_1 . Это дает

$$C_1 = -\frac{6}{5}C_2 \text{ и } K = \frac{3}{10}C_2;$$

с другой стороны, максимальная величина C_2 равна $2,5\lambda$. Этот результат может быть выведен из допуска для максимального отступления от условия синусов: после некоторых простых вычислений найдем, что кривая на фиг. 74, представляющая функцию $\Psi(\sin \alpha')$, определяе-

¹ Под $\Psi(\sin \alpha')$ следует понимать выражение $n \sin \alpha / \beta n' \sin \alpha' - 1$.
—Прим. ред.

мую в геометрической оптике, должна обратиться в нуль для отверстия, превышающего максимальное (в отношении $\sqrt{1,2}:1$), и что среднее значение максимума не должно превышать $0,9\lambda/y'\alpha'$.

2) **Астигматизм.** Находим в этом случае

$$\frac{a^2}{6} < \frac{\lambda^2}{180}, \text{ откуда } a < 0,17\lambda.$$

Таким образом, допуск для астигматизма оказывается значительно более жестким, чем для других aberrаций.

§ 5. Влияние малых aberrаций на качество изображения линии (некогерентное освещение)

Вернемся к результатам, полученным в гл. 2, § 4. Выражение для распределения интенсивности в изображении тонкой темной линии имеет вид

$$I(y') = I_0 - \epsilon S(y')$$

при

$$S(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(y', z')|^2 dz'.$$

Мы нашли также, что $S(y')$ можно записать следующим образом:

$$S(y') = \frac{R^2}{\lambda} \int |f(\gamma', y')|^2 d\gamma',$$

где

$$f(\gamma', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta', \gamma') h(-k\beta'y') d\beta'.$$

Далее, используя ту же методику, что и при изучении изображения точки, можно вывести выражения, аналогичные (8.8); однако интерпретация их не так проста, и в дальнейшем мы будем изучать влияние классических aberrаций. Но это требует значительных вычислений, которые были выполнены Пьешаром (G. Pieuchard, 1951) и Стилом (W. Steel, 1952), здесь мы приведем лишь их результаты.

Понижение контраста дается выражением

$$\begin{aligned} & \frac{3\pi^2}{4\lambda^2} [0,33962s_1^2 + 0,30542s_2^2 + 2 \times 0,31992ds_1 + \\ & \quad + 2 \times 0,28474ds_2 + \\ & \quad + 2 \times 0,31691s_1s_2 + \\ & + \sin^2 \Phi (0,016549C_1^2 + 0,038678C_1C_2 + 0,023919C_2^2) + \\ & + \cos^2 \Phi (0,65160K^2 + 0,85639KC_1 + 0,63653KC_2 + \\ & \quad + 0,31827C_1^2 + 0,50607C_1C_2 + 0,20991C_2^2) + \\ & + 0,32508(a \cos 2\Phi + d)^2 + 0,812a^2 \sin^2 2\Phi]. \quad (8.16) \end{aligned}$$

В этом выражении Φ представляет азимут линии в плоскости объекта: $\Phi = 0$, когда линия перпендикулярна оси симметрии пятна комы.

По поводу этого можно привести рассуждения, аналогичные приведенным ранее для точки. Все выводы получаются весьма близкими к ним, но ориентация линии относительно aberrационного пятна, не обладающего круговой симметрией (кома, астигматизм), влияет на результат; результаты вычислений мы приводим в табл. 7 на стр. 173.

§ 6. Влияние малых aberrаций на контраст изображения периодического объекта (некогерентное освещение)

Формула (3.8) позволяет выразить множитель контраста в присутствии каких-либо aberrаций и, в частности, изучить влияние малых aberrаций. Такая работа была выполнена Стилом (W. Steel, 1952), который получил общее выражение для контраста в зависимости от aberrаций (предполагаемых малыми) и от пространственной частоты.

Предположим, что пространственная частота может быть охарактеризована величинами $\omega = \cos \theta = \lambda/2\rho\alpha'$ и $\epsilon = \sin \theta$.

С другой стороны, полагая, что

$$P_1 = 3(\theta - \sin \theta \cos \theta) = 3(\theta - \varepsilon \omega),$$

$$P_2 = P_1 - 2\varepsilon^3 \omega,$$

$$P_3 = P_2 - \frac{8}{5} \varepsilon^5 \omega,$$

$$P_4 = P_3 - \frac{48}{35} \varepsilon^7 \omega,$$

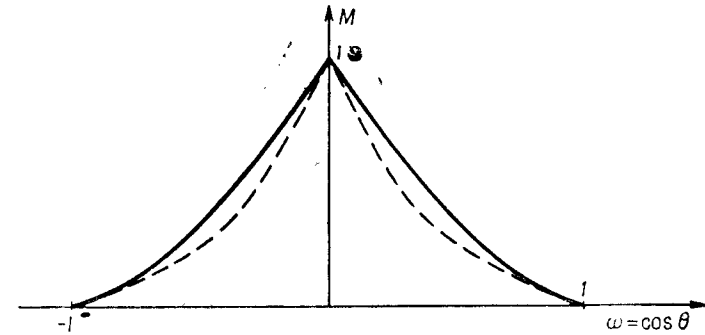
получаем следующее выражение¹⁾ для коэффициента пропускания прибора, обладающего aberrациями (первый член относится к совершенному прибору):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3\pi} P_1 + \\ & + \left\{ -D^2 \times \frac{16}{3} \pi \omega^2 \left[(1 + 4\omega^2) P_3 - \frac{32}{5} \varepsilon^7 \omega \right] - \right. \\ & - 2DS_1 \times \frac{64}{9} \pi \omega^2 \left[(1 + 12\omega^2 + 12\omega^4) P_3 - \frac{24}{5} \varepsilon^7 \omega (3 + 4\omega^2) \right] - \\ & - S_1^2 \times \frac{32}{9} \pi \omega^2 \left[(3 + 68\omega^2 + 192\omega^4 + 96\omega^6) P_3 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{48}{5} \varepsilon^7 \omega (7 + 28\omega^2 + 16\omega^4) \right] - \\ & - 2DS_2 \times \frac{8}{3} \pi \omega^2 \left[(3 + 72\omega^2 + 240\omega^4 + 128\omega^6) P_3 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{16}{5} \varepsilon^7 \omega (21 + 104\omega^2 + 64\omega^4) \right] - \\ & - 2S_1S_2 \times \frac{32}{15} \pi \omega^2 \left[(6 + 225\omega^2 + 1320\omega^4 + 2000\omega^6 + 640\omega^8) P_3 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{16}{5} \varepsilon^7 \omega (57 + 497\omega^2 + 920\omega^4 + 320\omega^6) \right] - \\ & - S_2^2 \times \frac{16}{15} \pi \omega^2 \left[(15 + 828\omega^2 + 7960\omega^4 + 24000\omega^6 + \right. \\ & \quad \left. + 23040\omega^8 + 5120\omega^{10}) P_3 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{64}{35} \varepsilon^7 \omega (315 + 4578\omega^2 + 17298\omega^4 + 19040\omega^6 + 4480\omega^8) \right] - \end{aligned}$$

¹⁾ В этом параграфе коэффициенты aberrаций определены при условии, что $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} & - K^2 \cos^2 \Phi \times \frac{16}{3} \pi \omega^2 P_1 - \\ & - 2KC_1 \cos^2 \Phi \times \frac{16}{3} \pi \omega^2 [(1 + 4\omega^2) P_1 - 8\varepsilon^3 \omega] - \\ & - C_1^2 \cos^2 \Phi \times \frac{8}{3} \pi \omega^2 \left[(3 + 34\omega^2 + 32\omega^4) P_1 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{5} \varepsilon^3 \omega (129 + 206\omega^2) \right] - \\ & - C_1^2 \sin^2 \Phi \times \frac{8}{9} \pi \omega^2 \left[(1 + 6\omega^2) P_4 - \frac{288}{35} \varepsilon^9 \omega \right] - \\ & - A^2 \sin^2 2\Phi \times \frac{16}{3} \pi \omega^2 P_2 \}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Этим сложным выражением можно легко пользоваться на практике, если для разных значений приведенной пространственной частоты ω вычислить коэффициенты



Фиг. 75.

различных составляющих aberrаций. Они приведены в табл. 5.

По поводу этих результатов необходимо сделать следующее общее замечание. Aberrации всех видов довольно сильно влияют на контраст при промежуточных значениях приведенных частот (ω порядка 0,5), однако их влияние на низкие частоты очень слабо, и оно оказывается еще более слабым на частоты, близкие к предельной. Ход кривой фильтрования прибора, обладающего aberrациями, представлен на фиг. 75; эта кривая прибли-

Коэффициенты aberrаций в выражении для контраста

Аберрации	Пространственная частота $\omega = \cos\theta$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
Постоянная	0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374	
$-D^2$	0,5517	1,4761	2,1018	2,1995	1,8326	1,2196	0,61197	0,19508	0,02201	
$-2DS_1$	0,6272	1,4752	1,9358	1,9822	1,7224	1,2642	0,72892	0,27376	0,03682	
$-S_1^2$	0,8000	1,6395	1,9499	1,9108	1,6918	1,3435	0,87853	0,38583	0,06166	
$-2DS_2$	0,6089	1,3046	1,6459	1,6831	1,4941	1,1453	0,71166	0,29911	0,04659	
$-2S_1S_2$	0,8279	1,5411	1,7512	1,6971	1,5165	1,2424	0,86685	0,42329	0,07809	
$-S_2^2$	0,8922	1,5049	1,6294	1,5552	1,3954	1,1706	0,86433	0,46627	0,09897	
$-C_1^2 \cos^2\theta$	0,2234	0,4773	0,5381	0,4467	0,3021	0,1726	0,0816	0,0275	0,00364	
$-C_1^2 \sin^2\theta$	0,0854	0,2096	0,2691	0,2487	0,1778	0,09736	0,03767	0,00823	0,00049	
$-A^2 \sin^2 2\theta$	0,6562	2,1072	3,6476	4,7240	4,9974	4,3880	3,0918	1,5538	0,3678	

Таблица 6

Влияние на коэффициент пропускания дефокусировки, равной $\lambda/4$

	Пространственная частота ω										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Совершенный прибор	1	0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374	0
Дефокусировка ($\lambda/4$)	1	0,8884	0,6548	0,4924	0,3671	0,2765	0,2086	0,1499	0,0919	0,0360	0
Относительная потеря контраста	0	0,04	0,12	0,21	0,27	0,29	0,27	0,20	0,12	0,04	0

жается к кривой совершенного прибора вблизи частот $\omega = 0$ и $\omega = 1$, но значительно отклоняется от нее для промежуточных частот. В частности, можно рассмотреть влияние дефокусировки, равной $\lambda/4$; при этом значении коэффициенты пропускания представлены в табл. 6. Таким образом, кривая передачи контраста периодического объекта мало чувствительна к присутствию aberrаций для частот, близких к предельной. В дальнейшем мы познакомимся с практическими следствиями этого замечания.

§ 7. Случай когерентного освещения

Прежде всего исследуем качество изображения темной точки, выделяющейся на светлом фоне. Мы будем пользоваться результатами гл. 4, § 1, п. «б», где для контраста изображения была получена формула

$$\gamma = \frac{2s}{\lambda^2} R_M \left[\iint h(k\Delta') d\beta' d\gamma' \right]. \quad (8.18)$$

Выразив $h(k\Delta')$ при помощи (8.1) и сохранив только действительную часть, получим

$$\gamma = \frac{2s}{\lambda^2} \left[\iint \left(1 - \frac{k^2 \Delta'^2}{2} \right) d\beta' d\gamma' \right]_M,$$

где индекс M означает, что имеется в виду максимальная величина функции от переменных y' , z' , входящих в Δ' . В результате получаем, что относительная потеря контраста в присутствии aberrаций выразится величиной

$$\frac{k^2}{2} [\overline{\Delta'^2}]_m,$$

где индекс m означает минимум величины в скобках.

Тогда получаем написанное ниже выражение в виде функции от коэффициентов aberrаций:

$$\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left[\frac{d^2}{3} + \frac{ds_1}{2} + \frac{s_1^2 + 2ds_2}{5} + \frac{s_1 s_2}{3} + \frac{s_2^2}{7} + \frac{K^2}{4} + \frac{KC_1}{3} + \frac{KC_2}{4} + \frac{C_1^2}{8} + \frac{C_1 C_2}{5} + \frac{C_2^2}{12} + \frac{a_2^2}{12} \right]. \quad (8.19)$$

В случае темной линии на светлом фоне, освещенном когерентным светом, можно использовать выражение (4.16); комбинируя его с (8.1), получаем для контраста (при-

бор с круглым зрачком и угловым отверстием α') следующую величину:

$$\gamma = \frac{4e\alpha'}{\lambda} \left[1 - \frac{k^2}{2} \overline{\Delta'^2} \right],$$

где $\overline{\Delta'^2}$ означает на сей раз среднее от Δ'^2 , взятое на зрачке вдоль оси $\gamma' = 0$. Если выразить теперь это среднее с помощью коэффициентов aberrаций, то получим для величины понижения контраста формулу

$$\frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left[\frac{(d+a \cos 2\Phi)^2}{5} + \frac{s_1^2}{9} + \frac{s_2^2}{13} + \frac{2s_1(d+a \cos 2\Phi)}{7} + \frac{2s_2(d+a \cos 2\Phi)}{9} + \frac{2s_1 s_2}{11} + \cos^2 \Phi \left(\frac{K^2}{3} + \frac{2KC_1}{5} + \frac{2KC_2}{7} + \frac{C_1^2}{7} + \frac{2C_1 C_2}{9} + \frac{C_2^2}{11} \right) \right]. \quad (8.20)$$

Заметим, наконец, что выражение (8.20) неприменимо к случаю светлой линии при когерентном освещении; в этом случае нужно написать в соответствии с обозначениями гл. 4, § 2, п. «б»:

$$A(y', z') = \varepsilon \varepsilon(y') = iR\varepsilon \int F(\beta', 0) h(-k\beta' y') d\beta',$$

и, поскольку освещенность на изображении линии пропорциональна AA^* , задачу можно решить с помощью формул, полученных в § 2. Относительное уменьшение освещенности выражается следующим образом:

$$k^2 [\overline{\Delta'^2}(\beta', 0) - \overline{(\Delta'(\beta', 0))^2}],$$

где средние теперь берутся вдоль оси $\gamma' = 0$. Это выражение можно преобразовать с помощью коэффициентов aberrаций. Окончательно оно принимает вид

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left[\frac{4(d+a \cos 2\Phi)^2}{45} + \frac{16s_1(d+a \cos 2\Phi)}{15 \times 7} + \frac{16s_1^2}{9 \times 25} + \frac{8s_2(d+a \cos 2\Phi)}{9 \times 7} + \frac{48s_1 s_2}{5 \times 7 \times 11} + \frac{36s_2^2}{13 \times 49} + \cos^2 \Phi \left(\frac{K^2}{3} + \frac{2KC_1}{5} + \frac{2KC_2}{7} + \frac{C_1^2}{7} + \frac{2C_1 C_2}{9} + \frac{C_2^2}{11} \right) \right]. \quad (8.21)$$

Результаты вычислений для различных допусков собраны в табл. 7.

Изучим, наконец, случай периодических объектов при когерентном освещении. Для этого достаточно решить задачу определения коэффициента пропускания прибора для различных составляющих (комплексных) распределения амплитуд на объекте.

Можно ограничиться изучением типового случая синусоидального объекта, который представляет только одну пространственную частоту, но на самом деле имеет две комплексные составляющие. Предположим, например, что штрихи миры ориентированы параллельно оси z' , вследствие чего полагаем

$$\Omega(y, z) = 1 + \cos \frac{2\pi y}{p}$$

Разложение этой функции можно написать в виде

$$\Omega(y, z) = 1 + \frac{1}{2} \left[h\left(\frac{2\pi y}{p}\right) + h\left(-\frac{2\pi y}{p}\right) \right]$$

Распределение $F(\beta', \gamma')$ амплитуд на зрачке при наличии объекта представляется следующими составляющими:

$$\begin{aligned} \beta' &= 0, & 1, \\ -\beta' &= \frac{\lambda}{p}, & \frac{1}{2} h\left(k\Delta\left(\frac{\lambda}{p}, 0\right)\right), \\ -\beta' &= -\frac{\lambda}{p}, & \frac{1}{2} h\left(k\Delta\left(-\frac{\lambda}{p}, 0\right)\right). \end{aligned}$$

Изображение миры будет тогда представлено выражением

$$1 + \frac{1}{2} \left\{ \left[F\left(\frac{\lambda}{p}, 0\right) h\left(-2\pi \frac{y'}{p}\right) + F\left(-\frac{\lambda}{p}, 0\right) h\left(2\pi \frac{y'}{p}\right) \right] \right\};$$

если частота λ/p попадает внутрь зрачка, модуль функции F имеет постоянное значение, которое можно принять равным единице. Так можно написать

$$\begin{aligned} C(y') &= 1 + \frac{1}{2} \left\{ h\left[k\Delta\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right] h\left(-2\pi \frac{y'}{p}\right) + \right. \\ &\quad \left. + h\left[k\Delta\left(-\frac{\lambda}{p}\right)\right] h\left(2\pi \frac{y'}{p}\right) \right\}, \end{aligned}$$

Таблица 7

Значение некоторых aberrаций, вызывающих понижение контраста до 0,2

	Некогерентное освещение		Когерентное освещение		
	точка	линия	точка	темная линия	светлая линия
Дефокусировка	0,25λ	0,29λ	0,17λ	0,22λ	0,24λ
Сферическая aberrация 3-го порядка	$\begin{cases} D \leq \\ S \leq \\ D = -1,00S \\ S \leq 0,95λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,28λ \\ -0,98S \\ 1,04λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,22λ \\ -0,75S \\ 0,90λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,30λ \\ -0,71S \\ 1,00λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,27λ \\ -0,86S \\ 0,92λ \end{cases}$
Сферическая aberrация 3-го и 5-го порядков с дефокусировкой	$\begin{cases} v_0 = \\ S' \leq \end{cases}$	$\begin{cases} 1,00 \\ 4,00λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,89 \\ 4,00λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,85 \\ 4,50λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,91 \\ 3,70λ \end{cases}$
Астигматизм	$\begin{cases} A \leq \\ D \pm A \leq \\ A \leq \end{cases}$	$\begin{cases} 0,17λ \\ 0,29λ \\ 0,18λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,25λ \\ 0,25λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,22λ \\ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,24λ \\ \end{cases}$
Кома 3-го порядка	$\begin{cases} C \leq \\ k = \\ C \leq \end{cases}$	$\begin{cases} 0,20λ \\ -0,67C \\ 0,58λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,28λ \\ -0,67C \\ 0,85λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,27λ \\ -0,60C \\ 0,66λ \end{cases}$	$\begin{cases} 0,19λ \\ -0,60C \\ 0,47λ \end{cases}$
Кома 3-го и 5-го порядков с поперечным смещением	$\begin{cases} r_0 = \\ C' \leq \end{cases}$	$\begin{cases} 1,20 \\ 2,40λ \\ 3,10λ \end{cases}$	$\begin{cases} 1,20 \\ 3,50λ \end{cases}$	$\begin{cases} 1,11 \\ 2,70λ \end{cases}$	$\begin{cases} ? \\ 1,85λ \end{cases}$

откуда после простых преобразований получаем выражение для амплитуды

$$C(y') = 1 + h(\Phi) \cos\left(2\pi \frac{y'}{p} - \varphi\right),$$

где

$$\Phi = k \frac{\Delta\left(\frac{\lambda}{p}\right) + \Delta\left(-\frac{\lambda}{p}\right)}{2} \quad \text{и} \quad \varphi = k \frac{\Delta\left(\frac{\lambda}{p}\right) - \Delta\left(-\frac{\lambda}{p}\right)}{2}.$$

Изменения комплексной амплитуды $C(y')$ остаются синусоидальными. В случае совершенного прибора изображение, очевидно, идентично объекту; в случае малых aberrаций изображение смещается параллельно оси y в направлении, определяемом углом φ . Контраст изображения миры зависит от угла Φ и может быть, в частности, равен нулю, если $\Phi = \pi/2$.

Заметим, впрочем, что изменения освещенности изображения, представленные величиной $|C(y')|^2$, содержат не только частоту $1/p$, но также и вторую гармонику с частотой $2/p$.

Влияние aberrаций: общий случай

§ 1. Общие замечания

В гл. 8 мы ограничились изучением влияния небольших aberrаций (порядка допуска Релея) на контраст изображения точки, линии, периодической структуры. Для этого мы сохранили в разложении в ряд члены, содержащие Δ в степени не выше второй. Это позволило нам при изучении изображения точки определить изменение величины центрального максимума, не уточняя, как изменяется пятно изображения в целом.

Рассмотрим теперь фото II—VII. На них показано, во-первых, изменение дифракционного пятна в случае совершенного прибора с круглым зрачком при увеличении дефокусировки. Когда дефокусировка становится значительной, то пятно изображения практически ограничивается кругом, как это вытекает из геометрической оптики; тем не менее освещенность в пятне долго остается существенно неравномерной, и лишь при очень большой дефокусировке освещенность в центре пятна становится равномерной (эта неравномерность никогда не исчезает вблизи от края дифракционного пятна).

Во-вторых, на этих фотографиях показано изменение дифракционного пятна при увеличении астигматизма. Отчетливо видно постепенное возникновение классического пятна изображения геометрической оптики, однако в действительности это пятно сопровождается еще полосами, причины появления которых будут объяснены в § 6.

Очевидно, что изучение этих изменений структуры пятна представляет довольно сложную проблему. Настоящая глава содержит изложение нескольких методов, позволяющих вычислить распределение амплитуд и интенсивностей в изображении точки, а также множитель

контраста при наличии некоторых aberrаций. Мы увидим, что множитель контраста для малых пространственных частот можно вычислить, используя приближенные методы, аналогичные примененным в гл. 8, § 3.

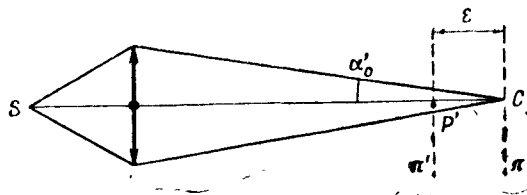
§ 2. Разложение в ряды для изучения малых aberrаций

Выражение амплитуды в некоторой точке плоскости изображений

$$A(y', z') = \frac{iR}{\lambda} \iint h(k\Delta) h[-k(\beta'y' + \gamma'z')] d\beta' d\gamma'$$

можно разложить в ряд по переменной Δ , однако в общем случае члены этого ряда довольно трудно выразить с помощью известных функций. Тем не менее в частных случаях можно получить сравнительно простые разложения. Мы приведем следующие результаты.

а) Изображение при наличии дефокусировки. Вычислим структуру изображения в плоскости π' , расположенной на малом расстоянии от плоскости π , проходящей через совершенное изображение точки (Фиг. 76).

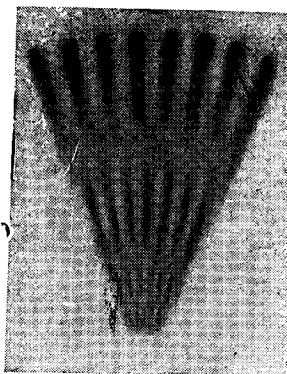


Фиг. 76.

Амплитуда в точке P' плоскости π' определяется выражением (1.6), где Δ' представляет следующую величину¹⁾:

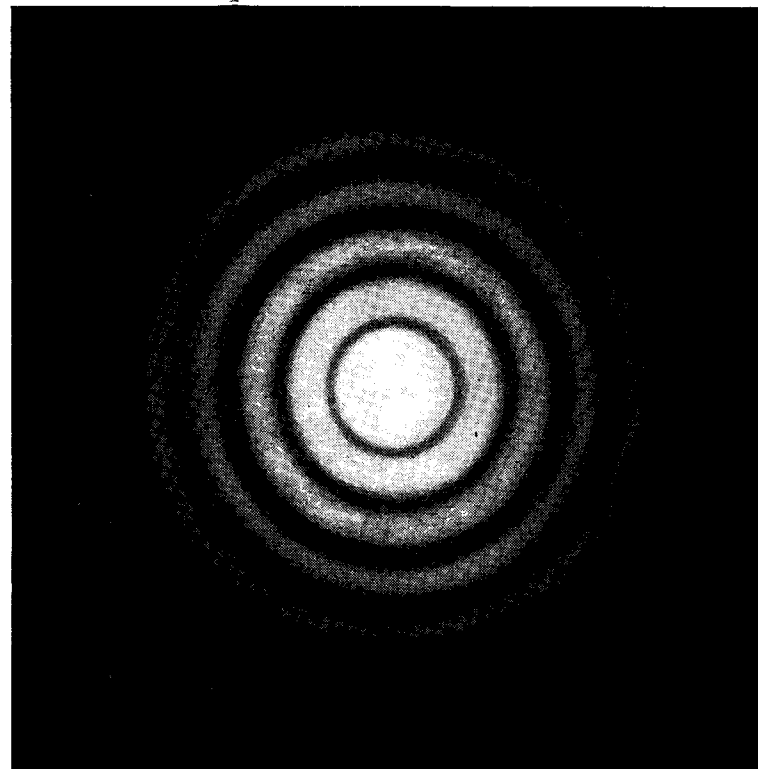
$$\Delta' = \varepsilon \frac{\alpha'^2}{2} - \rho_1 \alpha' \cos \varphi,$$

¹ Вывод этой формулы см., например, Г. Г. Слюсарев, Методы расчета оптических систем, М., 1937, стр. 650. — Прим. ред.



◀ Фото 1

▼ Фото II. Диск Эри.



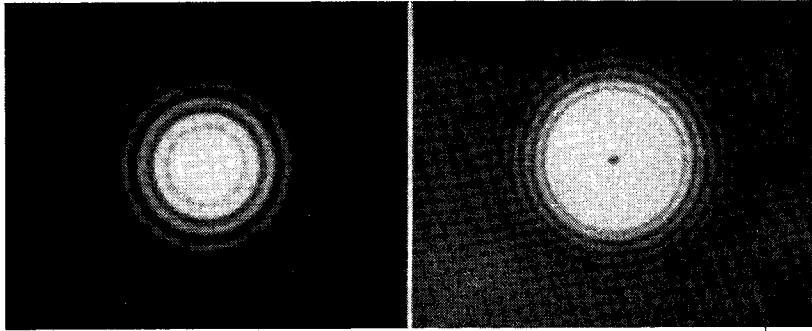


Фото III. Слабая дефокусировка.

Фото IV. Дефокусировка
(в центре — темное пятно).

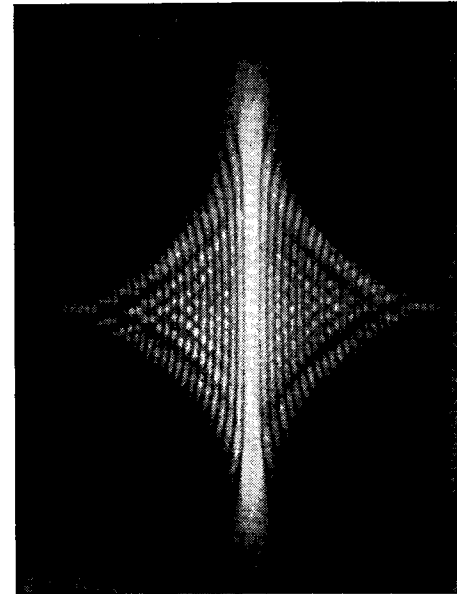


Фото VII. Астигматизм (сильный).

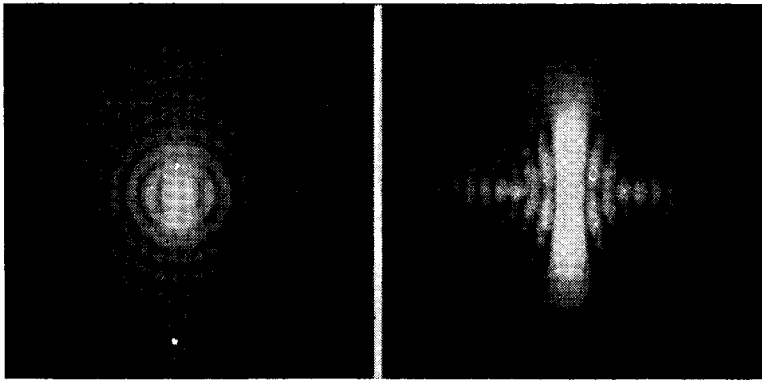


Фото V. Астигматизм (слабый). Фото VI. Астигматизм (средний).

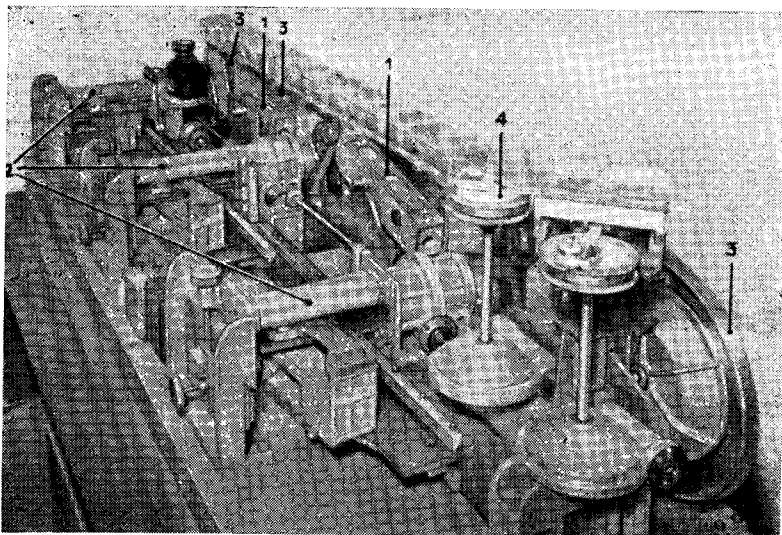


Фото VIII. Механический интегратор.

1 — кулачки и рычаги, вырабатывающие составляющие, соответствующие дефокусировке и сферической aberrации; 2 — кулачки и рычаги, вырабатывающие составляющие исследуемых поперечной комы и астигматизма; 3 — лента сложения составляющих; 4 — интегрирующие колесики.

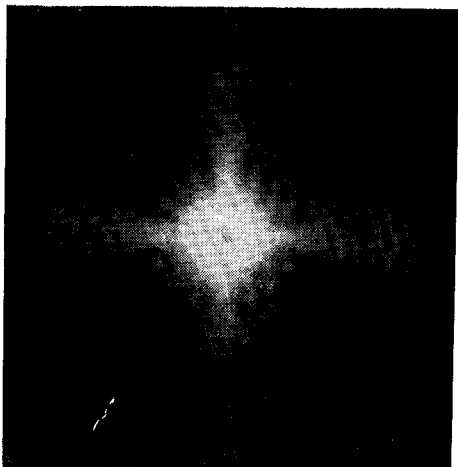


Фото IX. Астигматизм (кружок наименьшего рассеяния).

и мы имеем

$$A(P') = \frac{iR}{\lambda} \int_0^{\alpha'_0} \int_0^{2\pi} h \left(k\varepsilon \frac{\alpha'^2}{2} - k\rho_1 \alpha' \cos \varphi \right) \alpha' d\alpha' d\varphi. \quad (9.1)$$

Положим

$$\frac{\alpha'}{\alpha_0} = t, \quad k\rho_1 \alpha'_0 = Z, \quad \Phi = \frac{k\varepsilon \alpha'^2}{2}. \quad (9.2)$$

Это значит, что Z является параметром, с помощью которого определяется положение точки в плоскости изображений, а Φ представляет максимальную разность фаз между колебаниями, возникающими в центре плоскости изображений от центральных и крайних точек зрачка.

Получаем, интегрируя вначале по переменной φ ,

$$\frac{iR\alpha_0'^2}{\lambda} \int_0^1 h(\Phi t^2) J_0(tZ) t dt. \quad (9.3)$$

Интегралы такого вида были представлены Ломмелем (E. Lommel, 1885) следующим образом:

$$A(P') = \frac{iR\alpha_0'^2}{\lambda} \frac{1}{2i\Phi} \left\{ h\left(-\frac{Z^2}{2\Phi}\right) - h(-\Phi)(V_0 + iV_1) \right\} \quad (9.4)$$

для точек, расположенных в геометрической тени ($Z/\Phi > 1$); и

$$A(P') = \frac{1}{2i\Phi} h(\Phi)(-U_2 + iU_1) \quad (9.5)$$

для точек, расположенных в геометрическом пучке.

Функции U_1 , U_2 , V_0 и V_1 определяются рядами:

$$U_n = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{2\Phi}{Z}\right)^{n+2p} J_{n+2p}(Z), \quad (9.6)$$

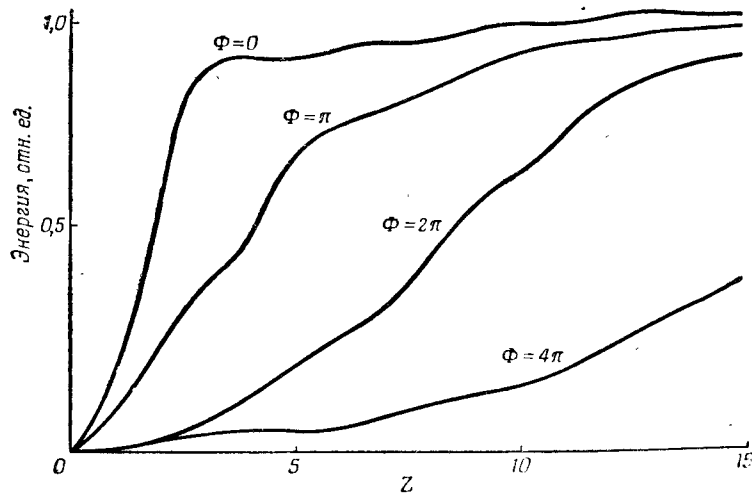
$$V_n = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{Z}{2\Phi}\right)^{n+2p} J_{n+2p}(Z).$$

В табл. 8 приведены результаты расчета освещенности в различных плоскостях установки.

Таблица 8

$Z \backslash \Phi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π	4π
0,000	1,0000	0,8102	0,4051	0,0000	0,0453	0,0000
1,396	0,6008	0,4890	0,2498	0,0047	0,0277	0,0012
2,793	0,0871	0,0884	0,0853	0,0353	0,0065	0,0090
4,189	0,0042	0,0283	0,0708	0,0474	0,0048	0,0119
5,585	0,0145	0,0212	0,0336	0,0330	0,0104	0,0067
6,981	0,0000	0,0023	0,0100	0,0349	0,0143	0,0047
8,378	0,0041	0,0055	0,0102	0,0238	0,0143	0,0050
9,774	0,0004	0,0005	0,0021	0,0124	0,0179	0,0052
11,170	0,0014		0,0028	0,0090	0,0064	0,0062
12,566	0,0006		0,0011	0,0045	0,0114	0,0095
13,963	0,0003		0,0007	0,0035	0,0106	0,0112

С помощью разложения в ряды можно также исследовать, как изменяется концентрация энергии в зависимости от дефокусировки. Можно, например, вычислить полную энергию, содержащуюся внутри круга данного радиуса Z , как это сделал Волф (E. Wolf, 1951), с помощью разложения в ряд по функциям Бесселя; на фиг. 77 представ-



Фиг. 77.

лены результаты его вычислений. Φ означает величину $2\pi d/\lambda$, где d — дефокусировка, выраженная в единицах оптического пути.

б) Частный случай круглых зрачков. Отметим прежде всего интересные результаты, полученные Пихтом (1925) в случае сферической aberrации 2-го порядка. С другой стороны, Лансеро предложил в 1947 г. любопытный метод вычисления, который можно представить схематически так. Нужно в общем виде вычислить интегралы, аналогичные приведенным в § 3; можем написать с точностью до множителя

$$\Gamma(Z) = \int_0^1 F(t) J_0(tZ) dt \quad (9.7)$$

Если функция F четная, то ее можно представить в виде ряда Тейлора по переменной $1 - t^2$:

$$F(t) = a_1 + a_2(1 - t^2) + \dots + a_p(1 - t^2)^{p-1}. \quad (9.8)$$

А тогда можно показать, что $\Gamma(Z)$ выразится следующим образом:

$$\Gamma(Z) = a_1 L_1(Z) + \frac{a_2}{2} L_2(Z) + \dots + \frac{a_p}{p} L_p(Z), \quad (9.9)$$

где функции L_1, L_2, \dots, L_p связаны с функциями Бесселя порядка p соотношением

$$L_p(Z) = 2^p p! \frac{J_p(Z)}{Z^p}. \quad (9.10)$$

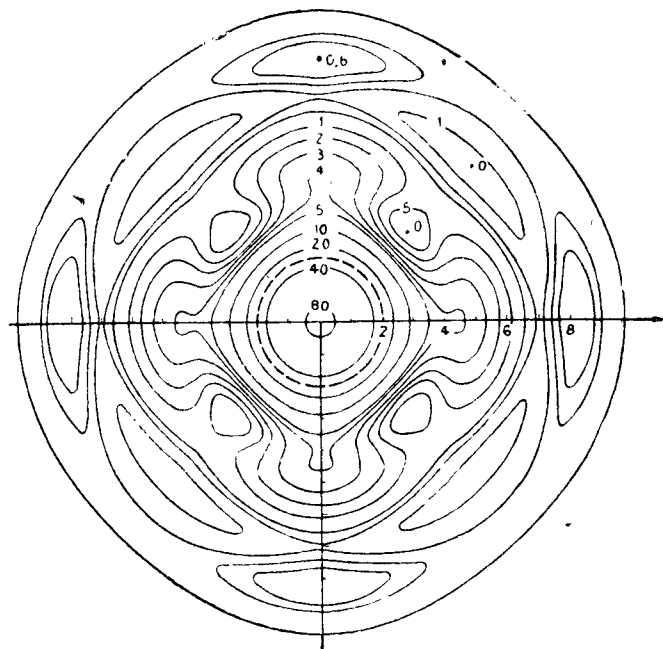
Расчет дифракции оказывается поэтому довольно простым, поскольку имеются таблицы функций $L_p(Z)$.

Мы воспроизведем в качестве примера (табл. 9) результаты расчета сферической aberrации 3-го порядка, равной $\lambda/4$ в точке, соответствующей фокусу крайних лучей ($s_1 = \lambda/4, d = \lambda/2$).

в) Использование ортогональных функций. Для исследования различных aberrаций Цернике и Нийбоер (F. Zernike, B. Nijboer, 1949) предложили предварительно выполнить разложение Δ в виде ортогональных полиномов на зрачке, что позволяет прежде всего классифицировать геометрические aberrации. Для разложения используется выражение вида

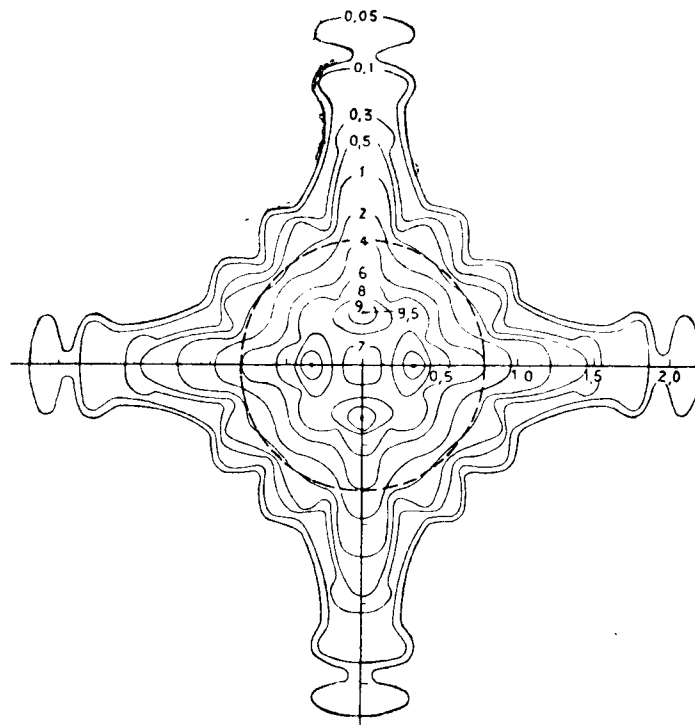
$$k\Delta = \sum_{lmn} b_{lmn} y'^{2l+m} R_n^m(t) \cos m\varphi, \quad (9.11)$$

где l, m, n — целые числа, причем разность $m - n$ — число положительное и четное; R_n^m — особый полином и y' — величина изображения. Тогда можно выразить амплитуду



Фиг. 78.

в некоторой точке плоскости изображений в виде разложения в ряд, содержащий функции Бесселя; фиг. 78 и 79 представляют некоторые из результатов, полученных этим методом, который позволяет рассматривать весьма разнообразные случаи. На этих двух фигурах и на фиг. 80, 81 освещенности выражены в процентах от освещенности в центре диска Эри. На практике различные предложенные здесь разложения приводят к длительным вычислениям. Ряды сходятся довольно быстро, когда аберрации малы, но расчеты становятся трудоемкими при росте аберраций и совсем бесполезными, когда Δ превышает 1λ . Случай средних и больших аберраций, следовательно, требует другой техники вычислений.



Фиг. 79.

§ 3. Численное и механическое интегрирование

Релей численным методом определил освещенность в центре некоторых дифракционных пятен при наличии деформированной волны (деформация зависела только от одного параметра) и нашел, что если волновая поверхность может быть заключена между двумя сферами, отстоящими одна от другой на расстоянии $\lambda/4$, то падение освещенности не превышает 20%. После него Конрад (A. Conrady), затем Бэкстон (A. Buxton) и Мартин (L. Martin) пользовались методами численного интегрирования. Эти методы, очевидно, очень трудоемки, когда присутствуют одновременно несколько различных аберра-

Таблица 9

Численные значения функций $\Gamma_1(W)$, $\Gamma_2(W)$ и $\Gamma(W)$

W	$\Gamma_1(W)$	$\Gamma_2(W)$	$\Gamma(W)$	W	$\Gamma_1(W)$	$\Gamma_2(W)$	$\Gamma(W)$
0	+0,43826	-0,77990	0,8003	6	-0,01104	+0,12615	0,0160
0,5	+0,43082	-0,75135	0,7501	7	-0,02681	+0,01393	0,0009
1	+0,40903	-0,66942	0,6154	8	-0,02174	-0,05775	0,0038
1,5	+0,37461	-0,54455	0,4369	9	-0,00923	-0,05796	0,0034
2	+0,33010	-0,39234	0,2629	10	+0,00085	-0,01222	0,0002
2,5	+0,27875	-0,23117	0,1311	11	+0,00461	+0,03019	0,0009
3	+0,22409	-0,07940	0,0565	12	+0,00331	+0,03681	0,0014
3,5	+0,16968	+0,04720	0,0310	13	+0,00035	+0,01118	0,0001
4	+0,11873	+0,13765	0,0330	14	-0,00152	-0,01860	0,0003
4,5	+0,07380	+0,18696	0,0404	15	-0,00145	-0,02714	0,0007
5	+0,03675	+0,19639	0,0399				

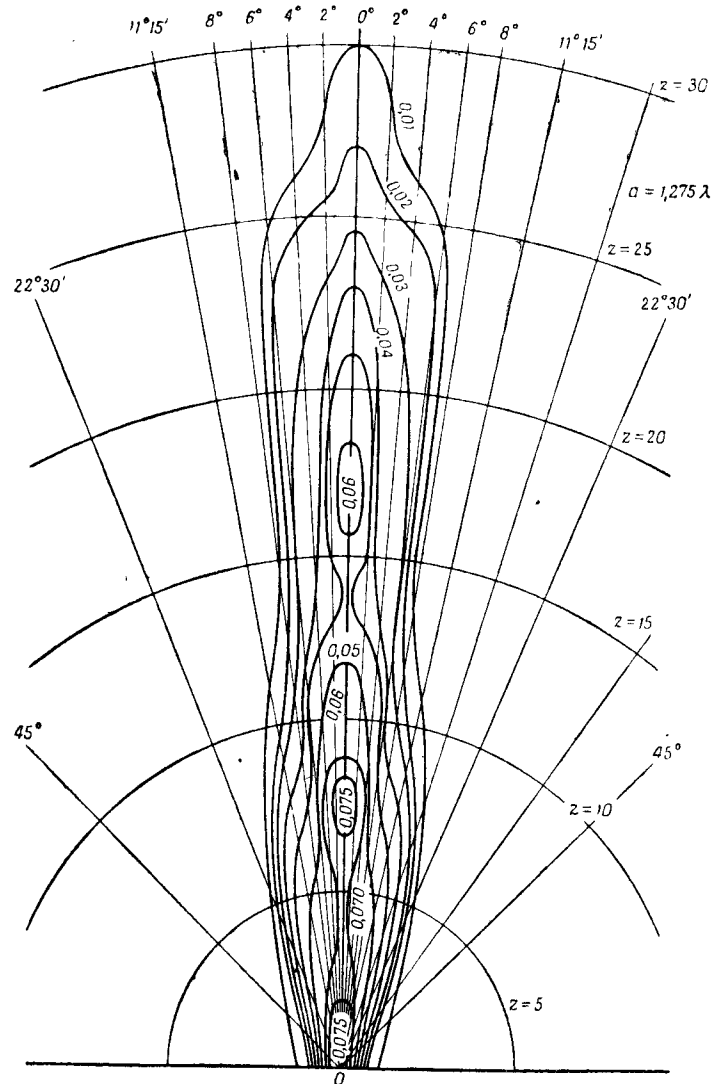
ций, но тем не менее они могут успешно применяться, если при этом использовать электронные машины.

Для этой же цели пригодны и моделирующие машины. В Оптическом институте в Париже сконструирована интегрирующая машина, предназначенная для расчета дифракции при наличии различных aberrаций, изолированных или комбинированных (А. Maréchal, 1947). В этом случае величину Δ удобно разложить на классические составляющие: если t и φ — приведенные полярные координаты на зрачке, то можно написать

$$\Delta' = dt^2 + F_0(t) + F_1(t) \cos \varphi + F_2(t) \cos 2\varphi + At \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (9.12)$$

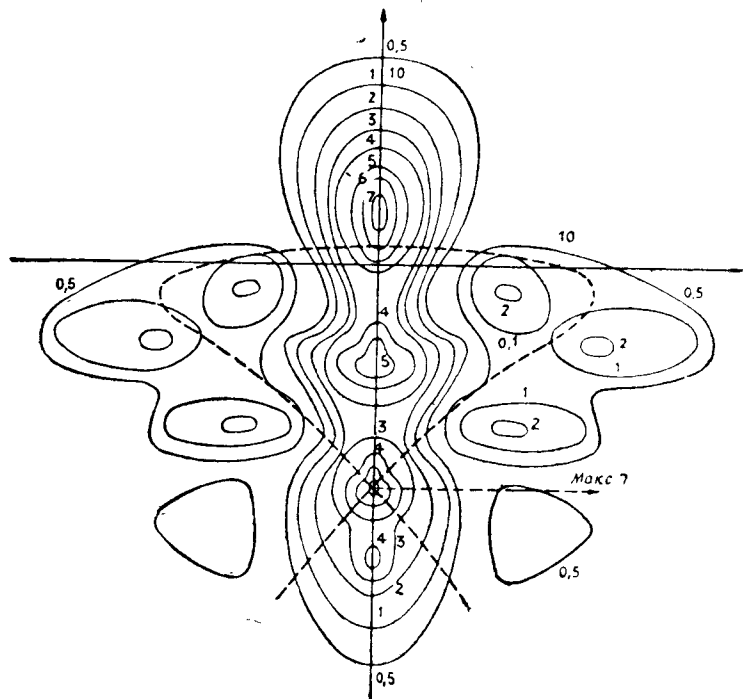
где d — дефокусировка; A и φ_0 — полярные координаты в дифракционном пятне; $F_0(t)$ — четная функция, характеризующая деформацию, вызванную сферической aberrацией; $F_1(t)$ — нечетная функция, характеризующая кому; $F_2(t)$ — четная функция, характеризующая астигматизм.

Функции F_0 , F_1 , F_2 можно распространить на случай, когда присутствуют различные составляющие любых порядков. Практически они представлены в машине соответствующими кулачками и удлиняющимися рычагами, при-



Фиг. 80.

чем сложение составляющих осуществляется с помощью ленты. Двойной интеграл, ограниченный круглым контуром, заменяется простым интегралом вдоль спирали Архимеда



Фиг. 81.

меда с достаточно малым шагом. Интегрирующие колесики выдают действительную и мнимую части комплексного интеграла. На фото VIII приведен снимок этой машины, на котором показаны ее главные узлы¹. Результаты вычислений представлены, в частности, на фиг. 80 и 81. В списке литературы к этой главе приведены все опубликованные до сих пор работы по аналогичным вычислениям.

¹ Прибор, решающий ту же и ряд других задач, был изготовлен в МФТИ в 1956 г. под руководством В. М. Горбункова [Оптико-механ. пром., 9, 5 (1960)] — Прим. ред.

§ 4. Случай больших aberrаций

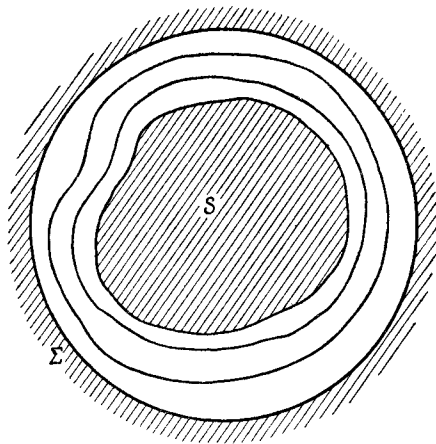
Когда aberrации становятся значительными, опыт и вычисления показывают, что дифракционное пятно постепенно изменяется, приближаясь к пятну, предсказываемому геометрической оптикой (за исключением того, что освещенность никогда не может быть бесконечно большой, даже на каустике). По всей видимости, геометрическое пятно является пределом, к которому дифракционное пятно все более и более приближается по мере роста aberrаций. Мы покажем прежде всего, почему теория дифракции приводит к заключениям, весьма близким к выводам геометрической оптики, и используем для доказательства этого метод стационарной фазы, идея которого исходит, по-видимому, от Релея. Этот метод выявляет роль световых лучей, а затем и роль краев диафрагмы, которые в этом приближении могут рассматриваться как причина появления далеких полос. При этом мы будем пользоваться геометрическими представлениями Френеля (т. е. построением амплитуды в комплексной плоскости), исходя из кривых $\Delta = \text{const}$ на зрачке, что позволит нам много сократить вычисления.

Рассмотрим значительно отклоняющуюся от сферы S_0 волновую поверхность Σ , в центре которой мы предполагаем определить амплитуду колебаний. Нанесем на этой волновой поверхности сетку кривых $\Delta = \text{const}$, что можно легко сделать, наблюдая интерференционные полосы, полученные методом Тваймана — Грина: достаточно для этого воспользоваться сферическим зеркалом сравнения, совпадающим со сферой S_0 . В качестве параметра интегрирования по волновой поверхности Σ возьмем площадь S , заключенную внутри какой-либо кривой $\Delta = \text{const}$, причем за элемент площади dS примем часть ее, заключенную между двумя кривыми из семейства $\Delta = \text{const}$, разность между которыми составляет $d\Delta$ (фиг. 82). Следовательно, можно считать, что Δ является при этих условиях функцией единственного параметра S , и в комплексной плоскости можно вычислить интеграл, который дает амплитуду колебания. Предполагая, что R равно целому числу длин волн, получаем $h(-kR) = 1$. Тогда для центра сферы сравнения ($y' = z' = 0$) напишем, воспользовавшись, например, соот-

ношением (1.6) и замечая, что $dS = R^2 d\beta' d\gamma'$:

$$E(0, 0) = \frac{iE_0}{\lambda R} \iint h(k\Delta) dS. \quad (9.13)$$

Теперь можно построить диаграмму в комплексной плоскости, представляющую интеграл с переменным верхним



Фиг. 82.

пределом: достаточно построить кривую, полученную последовательным прибавлением каждого элемента дуги, представляющего комплексное число:

$$ds = \frac{iE_0}{\lambda R} h(k\Delta) dS. \quad (9.14)$$

Итак, можно поставить в соответствие интерферограмме Тваймана—Грина (см. фиг. 82) диаграмму (фиг. 83) на комплексной плоскости (где можно не принимать во внимание множитель i , так как он несуществен). Когда деформация Δ становится большой, то кривая, полученная в комплексной плоскости, представляет собой спираль с большим числом витков. Вычислим прежде всего кривизну этой кривой. Если

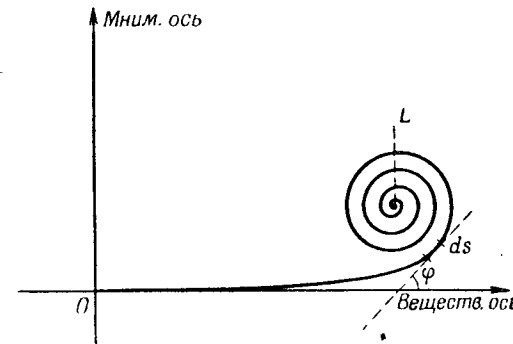
$$\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda},$$

то аргумент дифференциала ds равен $+\varphi$; радиус кри-

визны будет

$$\rho = \frac{|ds|}{d\varphi} = \frac{E_0}{2\pi R} \frac{dS}{d\Delta}. \quad (9.15)$$

Следовательно, элемент дуги ds кривой пропорционален элементу поверхности dS , и радиус кривизны выражается



Фиг. 83.

просто отношением $dS/d\Delta$; это замечание очень полезно для построения кривых.

§ 5. Оценка качества приборов с большими aberrациями. Зоны Релея

Поставим прежде всего задачу приблизительной оценки качества изображения, даваемого прибором с большими aberrациями. Часто случается, что при изучении прибора на интерферометре Тваймана—Грина при соответствующем выборе сферы сравнения можно заметить, что значительная часть волновой поверхности имеет почти сферическую форму, а остальная часть зрачка занята сравнительно сжатыми полосами (см. фиг. 82). В результате соответствующая диаграмма (см. фиг. 83) будет состоять из почти прямолинейной части, представляющей центральную зону, и из сжатой спирали, сходящейся к асимптотической предельной точке. Часть зрачка, соответствующую сферической части волны, можно назвать «зоной Релея», ограничивая ее условно кривой $\Delta = \lambda/4$; длина дуги кривой равна $s = E_0 S / \lambda R$, а длина результиру-

щей близка к $E_0 S_0 / \lambda R$, где S_0 — площадь зоны Релея, полученная на интерферометре. Следовательно, в отношении амплитуды (и освещенности) все происходит, как если бы мы имели дело со стигматическим прибором, имеющим отверстие, ограниченное контуром зоны Релея. Заметим, впрочем, что этот же метод позволяет показать, что интегралы, которые используются при расчете контраста изображения линии [выражение (4.10) и следующие] или периодического объекта [выражение (3.4)], принимают значения, почти равные значениям интегралов, вычисленным при ограничении зрачка зоной Релея. Нужно, однако, предостеречь от заключения, что то же самое относится и к контрасту. В самом деле, сошлемся, например, на выражение (4.4), которое определяет контраст изображения темной точки; имеем

$$\gamma = \frac{s D_M(y', z')}{I_0},$$

где D_M является величиной максимума D в зависимости от возможного поперечного смещения; эта максимальная величина действительно получится, когда центр поверхности сравнения (с координатами y', z') попадет в ту точку, для которой получается максимальная величина площади S_R зоны Релея. В формулу (4.2) для знаменателя I_0 входит площадь всей поверхности зрачка S ; выражение (4.2), очевидно, не зависит от аберраций, поскольку всюду на S выполняется условие

$$F(\beta', \gamma') \cdot F^*(\beta', \gamma') = E_0^2,$$

откуда получаем

$$I_0 = E_0^2 S.$$

С другой стороны, принимая за начало координат точку, в которой величина D максимальна, получаем приближенно

$$D_M = D(0, 0) = \frac{E_0^2}{\lambda^2 R^2} S_R^2,$$

и контраст тогда равен

$$\gamma = \frac{s S_R^2}{\lambda^2 R^2 S}.$$

Если прибор диафрагмировать до отверстия S_R , то он будет стигматическим и даст контраст

$$\gamma_R = \frac{s S_R}{\lambda^2 R^2} = \frac{s \omega_R}{\lambda^2},$$

где ω_R — телесный угол, под которым виден зрачок S_R из центра изображения. Наконец, действительный контраст γ выразится следующей формулой:

$$\gamma = \gamma_R \frac{S_R}{S}. \quad (9.16)$$

Таким образом, все происходит так, как будто бы от зрачка получается стигматическое изображение, на которое накладывается паразитный, совершенно некогерентный фон, происходящий от остальной части зрачка, площадь поверхности которой составляет $S - S_R$.

В заключение отметим, что качество прибора при наличии большой зоны Релея, окруженной зоной больших аберраций, всегда хуже, чем при диафрагмировании этой системы до зрачка S_R : фотографический объектив, открытый до отверстия $f'/3,5$, при наличии зоны Релея, простирающейся до отверстия $f'/4$, по качеству хуже хорошего объектива с отверстием $f'/4$.

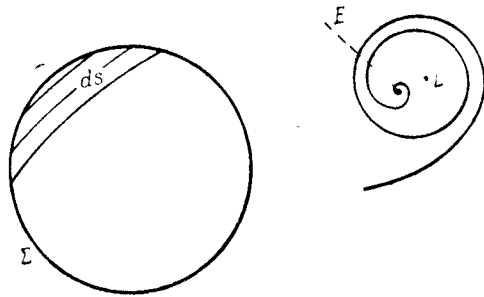
§ 6. Метод Ван-Кампена

Как мы показали, получить ощутимую амплитуду в точке O пространства возможно только тогда, когда большую часть волновой поверхности Σ можно принять за участок сферы S с центром в точке O . Следовательно, если аберрации значительны, то можно вычислить в первом приближении амплитуду дифракционной картины, определив области на волновой поверхности, для которых значение Δ постоянно. Для этого нужно найти на волновой поверхности точку P , для которой направление OP являлось бы нормалью к поверхности Σ , т. е. просто найти лучи, которые проходят через точку O .

В дополнении 2 мы дадим приближенную величину амплитуды дифракции, полученной от тех областей волновой поверхности, которые окружают точки пересечения с волновой поверхностью лучей, проходящих через точку O

(по крайней мере в том случае, когда волновая поверхность не является оскулирующей к сфере), и придем в общих чертах к заключениям геометрической оптики. Чтобы складывать эти различные амплитуды, очевидно, необходимо учитывать разность фаз между амплитудами, соответствующими каждому из этих лучей, другими словами, как бы вычислить картину интерференции внутри геометрического пятна рассеяния. Таким способом Дюран (E. Durand, 1945, 1946) получил довольно хорошее представление сложной структуры картины, наблюдаемой при значительных aberrациях.

Можно получить и лучшее приближение, как показал Ван-Кампен (N. van Kampen, 1949). Для этого нужно исследовать вид спирали в комплексной плоскости и, в частности, конец этой спирали. Вернемся для этого к примеру на фиг. 82. Зона Релея S_R соответствует почти прямолинейному участку кривой вплоть до точки, в которой касательная ортогональна прямолинейному участку. Далее образуется спираль, радиус кривизны которой R , удовлетворяя соотношению (9.15), регулярно меняется, пока производная $d\Delta/dS$ не имеет никаких особенностей. Спираль закручивается виток за витком, обвивая асимптотическую точку L , и можно считать, что после большого числа оборотов мы значительно приблизимся к точке L . Однако когда рассматриваемый участок близок к краю зрачка, то можно найти точки, в которых Δ имеет максимум или минимум на контуре. При приближении к этим точкам элемент dS , соответствующий изменению $d\Delta$, стремится к нулю (фиг. 84) и радиус R также стремится



Фиг. 84.

к нулю. В результате получаем, что спираль определяется дугой, кривизна которой быстро меняется и которая заканчивается предельной точкой E , отличающейся от точки L , которая являлась бы «центром» предыдущих дуг. Ограничение волновой поверхности некоторым контуром приводит, следовательно, к малой амплитуде $\vec{E}L$. Таким образом, за окончательное распределение амплитуд одинаково ответственны не только те области зрачка, где значения Δ стационарны относительно некоторых смещений на волновой поверхности, но еще и те точки контура зрачка, в которых значения Δ стационарны относительно смещения вдоль контура. Это и есть те два первых члена асимптотического разложения, предложенные Ван-Кампеном [и упоминание о которых имеется уже у Вольфсона (Wolfsohn, 1900) и у Рубиновича (Rubinowicz, 1924)].

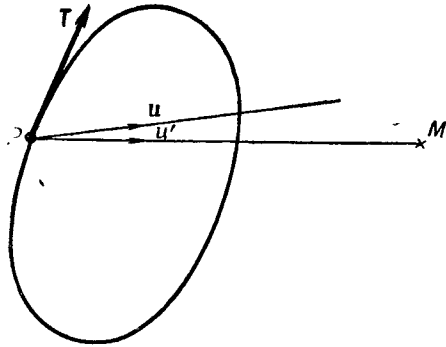
Уточним теперь те точки пространства, в которые от определенной точки P на контуре диафрагмы приходит дифракционная волна с ощутимой амплитудой. К ним относятся точки M пространства, в которых фаза колебаний остается постоянной при перемещении точки P вдоль контура. Рассмотрим волну Σ , исходящую от края диафрагмы; нормаль к этой волне определяется единичным вектором \mathbf{u} ; пусть \mathbf{u}' — единичный вектор, совпадающий с направлением PM . Нужно, чтобы оптический путь $(\vec{SP}) + (\vec{PM})$ был стационарен, т. е., если δP есть смещение вдоль контура, из принципа Ферма должно вытекать, что

$$\delta(SP + PM) = \mathbf{u}\delta P - \mathbf{u}'\delta P = (\mathbf{u} - \mathbf{u}')\delta P = 0.$$

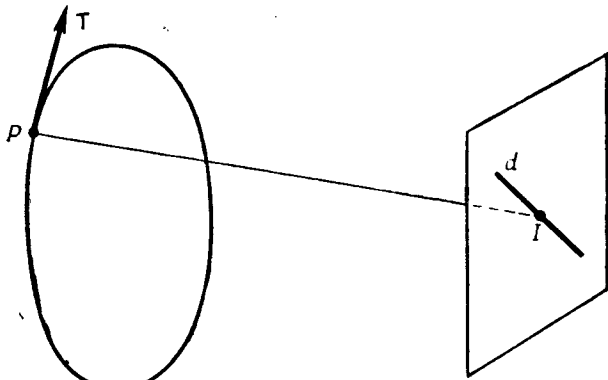
Отсюда следует, что векторы \mathbf{u} и \mathbf{u}' должны образовывать одинаковые углы с касательной \mathbf{T} к контуру (фиг. 85). Другими словами, для падающей волны, характеризующейся лучом \mathbf{u} , направления дифракции расположены на круговом конусе с осью на векторе \mathbf{T} и при условии, что вектор \mathbf{u} совпадает с одной из его образующих.

Если теперь рассмотреть зрачок, ограниченный контуром C , то направление дифракции на плоскости изображений можно найти следующим способом. Для каждой точки P контура зрачка проводим луч, который пересекает плоскость изображений в точке I (фиг. 86). Конус «ди-

фрагментированных лучей», который должен быть получен вращением луча вокруг T , пересекает интересующий нас элемент плоскости изображений вдоль прямой d , перпендикулярной к T и проходящей через I . При смещении



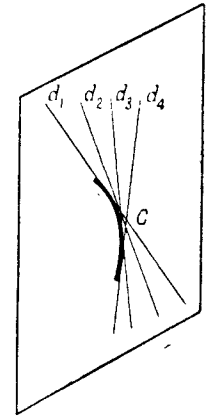
Фиг. 85.



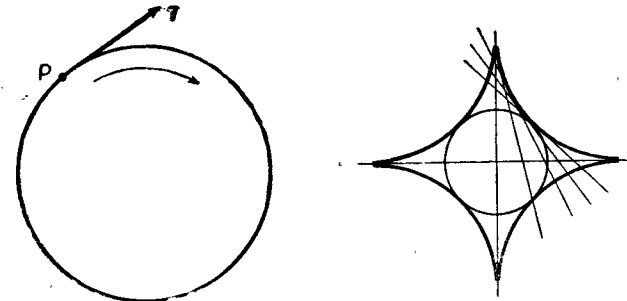
Фиг. 86.

точки P прямая d также смещается. Огибающая этих прямых d обладает замечательным свойством (фиг. 87). Действительно, если рассмотреть точку касания C прямой d с ее огибающей (которая является геометрическим

местом точек пересечения двух бесконечно близких прямых d), то фаза в точке C явится не только стационарной, но ее изменение оказывается величиной 3-го порядка малости по сравнению со смещением вдоль контура; получаем своего рода «каустику дифракции», которую использовал Ниенюис для объяснения структуры некоторых простых явлений. Например, построение прямых d и их огибающей для случая чистого астигматизма с фокусировкой на плоскость «кружка наименьшего рассеяния» показано на фиг. 88; точка P зрачка, обходящая контур зрачка в направлении стрелки, порождает луч, пересекающийся в точке I кружок наименьшего рассеяния; точка I перемещается в направлении, противоположном P , и через I проводим прямую d перпендикулярно T . Огибающая прямых d является астроидой, которая с большой точностью представляет вид дифракционного пятна, получаемого в этом случае (фото IX). Этот метод сравнительно недавно был дополнен Келлером (J. Keller, 1950), которому удалось уточнить значения амплитуд «дифрагированных лучей» в зависимости от радиуса кривизны контура зрачка.



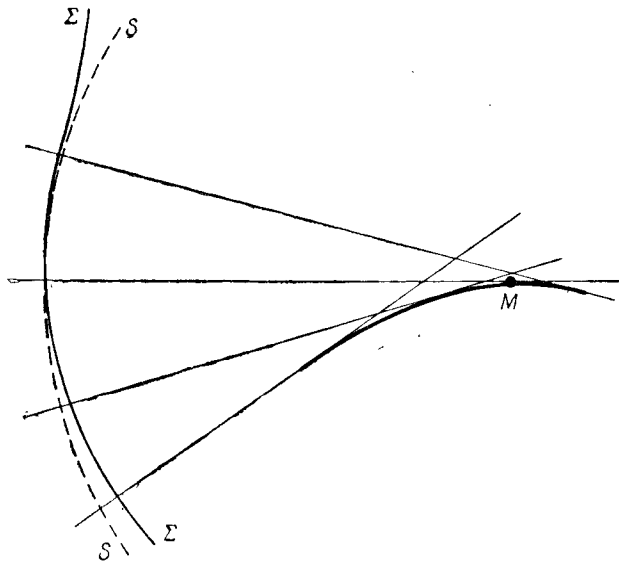
Фиг. 87.



Фиг. 88.

§ 7. Полосы на краю геометрической каустики

Интересно изучить теперь частный случай полос на краю каустики. Пусть M — точка, расположенная на геометрической каустике (она совпадает с одним из центров волновой поверхности); рассмотрим частный слу-



Фиг. 89.

чай, когда одно из сечений волновой поверхности касается сферы с центром в M . За плоскость рисунка выберем плоскость, в которой соприкасаются сфера S и волновая поверхность Σ (фиг. 89). Если волновую поверхность определять обычными координатами β' , γ' , то условие оскуляции S и Σ приводит к тому, что Δ не содержит составляющей β'^2 , а содержит только β'^3 . Тогда мы можем написать

$$\Delta = B\beta'^3 + C\gamma'^2;$$

ограничиваясь точками, расположенными на оси $z' = 0$, получим

$$\Delta' = \Delta + \beta'y'.$$

На практике в случае больших aberrаций нужно вычислить интеграл

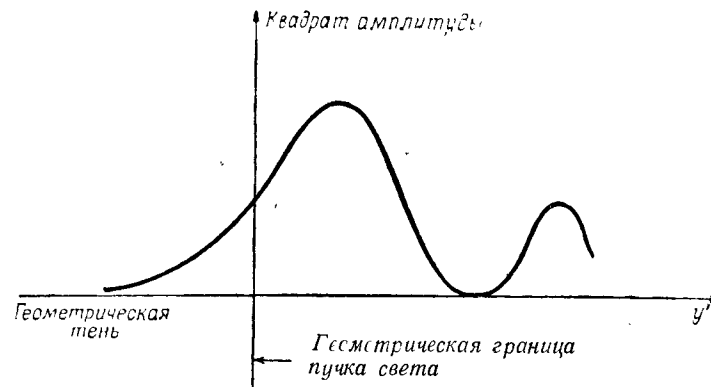
$$\begin{aligned} \iint h[k(\beta'y' + B\beta'^3 + C\gamma'^2)] d\beta' d\gamma' = \\ = f(C) \int h[k(\beta'y' + B\beta'^3)] d\beta', \end{aligned} \quad (9.17)$$

где $f(C)$ — некоторая функция, не представляющая для нас интереса.

Предыдущее выражение может быть приведено к виду

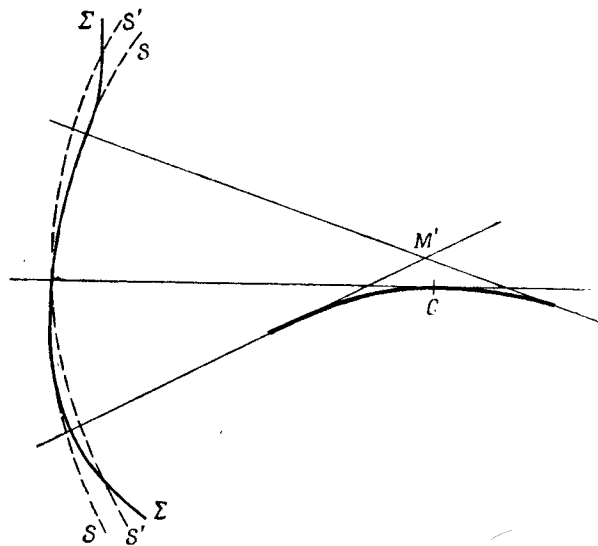
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h[k(\beta'y' + B\beta'^3)] d\beta' = 2 \int_0^{\infty} \cos k(\beta'y' + B\beta'^3) d\beta'.$$

Вычисления показывают (Bouasse, 1923), что изменение квадрата амплитуды в зависимости от y' можно представить кривой, изображенной на фиг. 90. Максимум



Фиг. 90.

освещенности здесь располагается не на краю каустики ($y' = 0$), а в точке M' , расположенной на выпуклой стороне каустики; это легко объяснить, замечая, что сфера S' с центром в M' остается ближе к волновой поверхности Σ на значительно большем участке, чем сфера S (фиг. 91).



Фиг. 91.

§ 8. Влияние произвольных геометрических aberrаций на множитель контраста

В гл. 8, § 6, рассматривалось влияние малых aberrаций на множитель контраста периодической составляющей; результаты, полученные Стилом, познакомили нас с изменением закона фильтрования пространственных частот в том случае, когда aberrации прибора малы. Рассмотрим теперь влияние более значительных aberrаций, следуя методу, разработанному, в частности, Гопкинсом (Н. Hopkins, 1957).

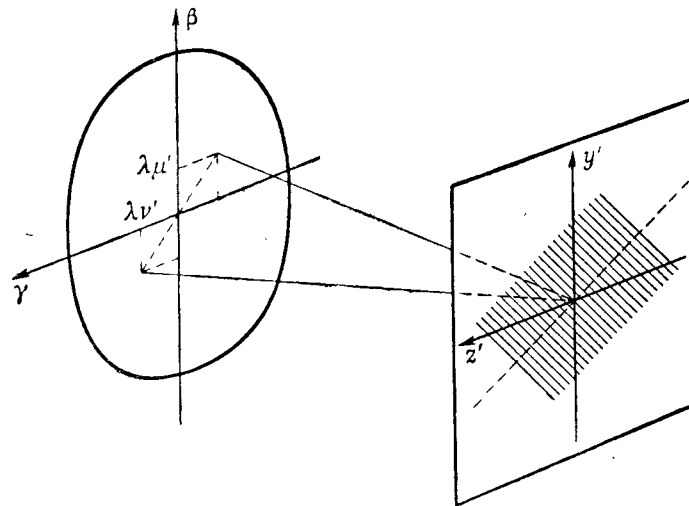
Вернемся к выражению (3.4) для множителя контраста; для упрощения записи составляющие μ' и ν' пространственных частот заменены здесь величинами, им пропорциональными:

$$\beta = \lambda\mu', \quad \gamma = \lambda\nu',$$

которые представляют собой, как показано на фиг. 92, направляющие косинусы одного из двух симметричных

направлений дифракции от синусоидальной решетки, пространственная частота которой имеет составляющие μ' , ν' .

С другой стороны, можно написать выражение (3.8), используя более симметричные обозначения:



Фиг. 92.

$$d = R^2 \iint F\left(\beta' + \frac{\beta}{2}, \gamma' + \frac{\gamma}{2}\right) F^*\left(\beta' - \frac{\beta}{2}, \gamma' - \frac{\gamma}{2}\right) d\beta' d\gamma'.$$

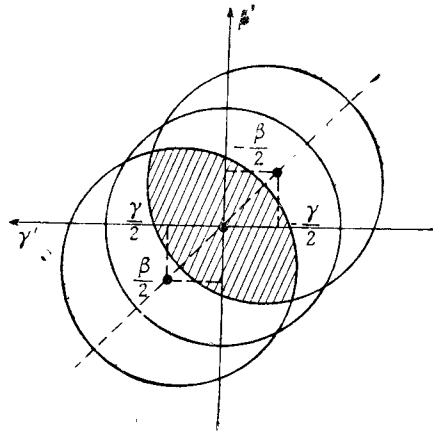
Это означает, что поверхность интегрирования является общей частью площади, заключенной внутри двух контуров зрачков, смещенных соответственно на $\pm\beta/2$, $\pm\gamma/2$ (фиг. 93). Но $F(\beta', \gamma') = E_0 h(k\Delta)$ и $F^*(\beta', \gamma') = E_0 h(-k\Delta)$, откуда выводим основное выражение

$$d(\beta', \gamma') = R^2 \iint h(k\delta) d\beta' d\gamma' \quad (9.18)$$

и

$$\delta(\beta', \gamma', \beta, \gamma) = \Delta\left(\beta' + \frac{\beta}{2}, \gamma' + \frac{\gamma}{2}\right) - \Delta\left(\beta' - \frac{\beta}{2}, \gamma' - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Для заданных значений β, γ интеграл (9.18) имеет тот же вид, что и интеграл, с которым была вычислена функция $E(y', z')$ с помощью $\Delta(\beta', \gamma')$



Фиг. 93.

(см. гл. 8, § 2); следовательно, для вычисления его можно применить те же приемы. Изучим прежде всего случай, когда δ остается малой величиной; разложим в ряд Тейлора экспоненту под интегралом (9.18):

$$\iint h(k\delta) d\beta' d\gamma' = \iint \left(1 + ik\delta - \frac{k^2\delta^2}{2}\right) d\beta' d\gamma',$$

или полагая $\iint d\beta' d\gamma' = \omega$, получаем

$$d(\beta', \gamma') = R^2\omega \left(1 + ik\bar{\delta} - \frac{k^2}{2}\bar{\delta}^2\right).$$

Множитель контраста — комплексное число, модуль которого в этом приближении равен

$$M(\beta, \gamma) = |d(\beta, \gamma)| = R^2\omega \left\{1 - \frac{k^2}{2}[\bar{\delta}^2 - (\bar{\delta})^2]\right\},$$

а аргумент имеет вид

$$\theta(\beta, \gamma) = k\bar{\delta}.$$

Следовательно, модуль множителя контраста в присутствии аберраций убывает, причем падение контраста равно

$$\frac{k^2}{2}[\bar{\delta}^2 - (\bar{\delta})^2].$$

Можно это падение ограничить величиной 20%, что приводит к допустимой аберрации:

$$\boxed{\bar{\delta}^2 - (\bar{\delta})^2 \leq \frac{\lambda^2}{10\pi^2} \approx \frac{\lambda^2}{100}} \quad (9.19)$$

Это условие позволяет определить максимальное значение какой-либо аберрации только в том случае, когда известна величина наблюдаемой пространственной частоты. Однако вопрос упрощается, если изучается случай пространственных частот, малых по сравнению с предельной частотой. В самом деле, известно, что совершенный фотографический объектив, открытый, например, до отверстия $f'/2$, позволяет пропустить все частоты, не превышающие $2\alpha'/\lambda = 1000$ периодов на 1 мм (для $\lambda = 0,5$ мк). Однако обычно применяемые фотографические эмульсии позволяют регистрировать только те сигналы, период которых меньше нескольких сотых миллиметра, т. е. полоса практически используемых частот редко достигает 100 мм^{-1} и в 10 раз меньше группы частот, пропускаемой совершенным прибором. Следовательно, более подробное изучение случая малых пространственных частот представляет определенный интерес.

§ 9. Приближенные формулы для малых пространственных частот

В этом случае можно получить δ с помощью разложения в ряд Тейлора. Если разложить $\Delta(\beta' + \beta/2, \gamma' + \gamma/2)$ и $\Delta(\beta' - \beta/2, \gamma' - \gamma/2)$ по β и γ , то получим, полагая для упрощения записи $\gamma = 0$:

$$\delta(\beta', \gamma', \beta, 0) = \frac{\partial \Delta}{\partial \beta'} \beta + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \beta^3} \beta^3 + \dots$$

Ограничиваясь первым членом, можем написать

$$\delta = \beta \Delta'_{\beta'}.$$

Но $\Delta'_{\beta'}$ представляет наклон волновой поверхности относительно сферы сравнения, или наклон нормали к волновой поверхности относительно нормали к сфере; таким образом, проявляется опять роль лучей, и мы возвращаемся к геометрической оптике. β и γ могут прибли-

жаться к нулю либо когда пространственные частоты μ' и ν' становятся малыми, либо когда длина волны мала: таким образом, постепенно переходим к предельному случаю малых длин волн, т. е. к геометрической оптике.

Известны соотношения¹⁾, которые связывают координаты y' , z' точек пересечения световых лучей с плоскостью изображений и частные производные от Δ , а именно $y' = \Delta'_{\beta'}$, $z' = \Delta'_{\gamma'}$.

Если y' — составляющая поперечной aberrации в вертикальном направлении, то выражение для допустимой величины aberrаций приводит к результату

$$\lambda^2 \mu'^2 [\bar{y}'^2 - (\bar{y}')^2] < \frac{\lambda^2}{100},$$

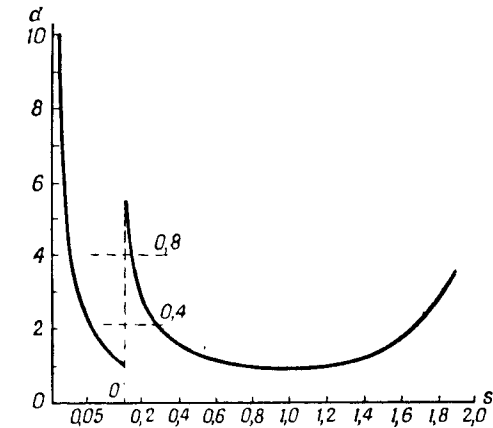
или еще (поскольку λ сокращается и мы приходим к тому приближению, которое дает геометрическая оптика-

$$\bar{y}'^2 - (\bar{y}')^2 < \frac{\rho^2}{100}, \quad (9.20)$$

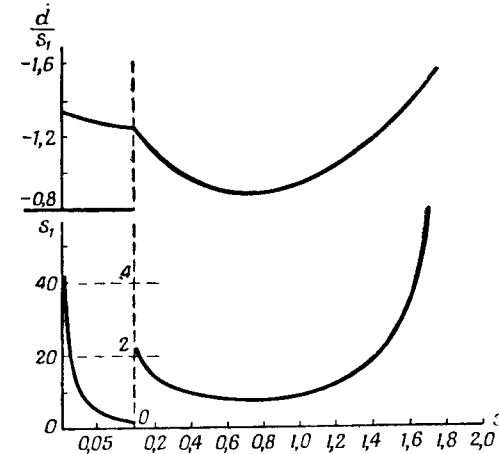
где ρ — период рассматриваемой составляющей.

Другими словами, среднее квадратичное отклонение, характеризующее рассеяние геометрического изображения, должно остаться приблизительно в 10 раз меньше, чем период составляющей. Со своей стороны, Гопкинс (Н. Hopkins, 1957), ограничиваясь областью малых частот, изучил для нескольких классических случаев изменение допустимых отклонений в зависимости от пространственной частоты. На фиг. 94 и 95 приведены в качестве примера полученные им некоторые результаты: здесь $s = \beta/\alpha'$ изменяется от 0 до 2. Эти кривые могут быть равным образом построены и по результатам Стила, если соблюдено условие, что падение контраста остается меньше 0,2. Гопкинс нашел из достаточно общих соображений, что допуски, полученные для $s=0,2$ (т. е. для частот, равных 1/10 от предельной частоты), очень близки к допускам, найденным нами в гл. 8 при изучении центрального максимума дифракционного пятна. Это замечание позволяет легко и быстро вычислять допуски для

¹⁾ См., например, Г. Г. Слюсарев, Геометрическая оптика, Изд-во АН СССР, 1946, стр. 62, формула (III.28); следует учесть, что W и Δ имеют одинаковое толкование. — Прим. ред.



Фиг. 94. Допустимая дефокусировка d (в длинах волн) в зависимости от приведенной пространственной частоты s .



Фиг. 95. Допустимые значения сферической aberrации 3-го порядка s_1 и оптимальные значения d/s_1 в зависимости от пространственной частоты s .

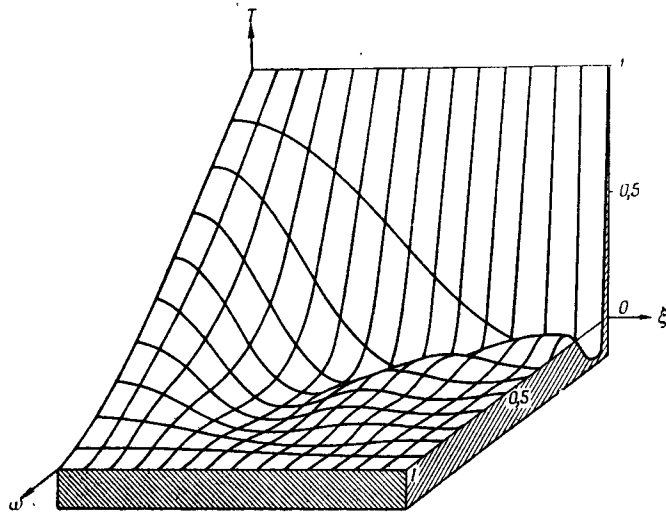
других значений пространственных частот, исходя из предположения, что при малых пространственных частотах допуски обратно пропорциональны этим частотам.

Теория информации и оптическое изображение

§ 1. Общие замечания

Изучив теорию образования оптического изображения совершенным прибором, а также прибором, обладающим aberrациями, рассмотрим теперь вопрос о выборе общего метода оценки качества изображения, не прибегая предварительно к понятию контраста. Для этого можно попытаться применить к оптике теорию информации. Образование оптического изображения может быть уподоблено передаче электрических или акустических сигналов; с этой целью достаточно заменить переменную время пространственными координатами y' , z' в плоскости изображений, что устанавливает достаточно тесную аналогию между этими двумя категориями явлений; частоты электрических сигналов заменяются пространственными частотами; впрочем эти два вида частот пропорциональны, если вести исследование изображения сканированием («выметанием») с постоянной скоростью, как это осуществляется в телевизионных установках. Очевидно, что теория информации позволяет подыскать общий язык для изучения образования изображения и для его передачи средствами радиоэлектроники. Вероятно, можно ждать плодотворных результатов от общего изучения качества оптического изображения с оригинальной точки зрения теории информации. В связи с этим мы приведем здесь некоторые элементы этой теории, позволяющие рассматривать с новой точки зрения ряд обычных простых вопросов.

Теория информации построена на основе теории связи, фундамент которой был заложен главным образом Шенноном, и на основе кибернетики, дисциплины, недавно развитой Винером и изучающей закономерности процессов управления в различных сложных системах или явления, в которых участвует система регулиро-



Фиг. 96.

Ломан (L. Lohmann, 1957) уточнил случай малых пространственных частот, предложив разложение до 4-го порядка. С другой стороны, Лукос (Lukosz, 1958) и Миямото (Miyamoto, 1958) подробно изучили множитель контраста, оставаясь в области геометрической оптики. Наконец, Стил (W. Steel, 1956) исследовал изменение множителя контраста как функции от пространственной частоты и ошибки дефокусировки (фиг. 96).

вания (биологические, демографические явления и т. д.). Мы будем использовать в основном только теорию связи и теперь рассмотрим некоторые ее элементы.

§ 2. Определение количества информации

Чтобы определить понятие количества информации, содержащегося в некотором сообщении или в элементе сообщения, мы приведем сначала простой пример. Предположим, что нам нужно передать на расстояние цифру, которая априори может оказаться одной из десяти цифр с одинаковой вероятностью для каждой из них. Какой бы ни была переданная цифра, информация, содержащаяся в сообщении, должна быть одной и той же, поскольку она устраняет сомнение в существовании десяти равновероятных возможностей.

Предположим теперь, что мы передаем результаты спортивных соревнований между двумя конкурентами A и B , имеющими неравные силы, причем конкурент A имеет априорную вероятность p_A победить, значительно большую, чем вероятность p_B победы B . Если действительно A будет победителем, то сообщение об этом результате никого не удивит: оно может даже остаться незамеченным, и очевидно, что оно приносит очень незначительную информацию. Если же, наоборот, победителем будет B , то сообщение о его победе будет значительно более интересным: это неожиданное событие для большинства из интересующихся, и журналисты не замедлят предать его огласке. Следовательно, это приводит к мысли, что количество информации априори должно быть функцией, убывающей с ростом вероятности события. Событие, которое априори является весьма вероятным, приносит мало информации; событие, априори мало вероятное, наоборот, приносит значительную информацию.

Рассмотрим теперь последовательность многих сообщений. Представим себе, что кто-то рассказывал о далеком путешествии и заявил:

«Я посетил Большой Каньон в сентябре». Здесь содержится два элемента:

- факт посещения Большого Каньона (сообщение a),
- время посещения (сообщение b).

Если теперь рассмотреть вероятность совокупности двух событий, то, очевидно, она равна произведению вероятности p_a посещения Большого Каньона (учитывающей интерес к таким посещениям, вкусы путешественника и т. д.) и вероятности посещения именно в сентябре, когда заранее известно, что речь идет о Большом Каньоне. На математическом языке это значит, что вероятность двух событий a и b равна произведению вероятности $p(a)$ события a на вероятность $p_a(b)$ события b при условии, что событие a совершилось:

$$p(a, b) = p(a) \times p_a(b).$$

С другой стороны, естественно предположить, что количество информации, даваемое последовательностью сообщений, равно сумме информации, приносимых каждым из сообщений. При этих условиях приходим к оценке количества информации с помощью логарифма вероятности априори объявленного события. Эта вероятность всегда меньше единицы, и ее логарифм всегда отрицателен; определим количество информации через $-\log p$. Двойное сообщение a, b принесет, следовательно, информацию

$$\begin{aligned} I(a, b) &= -\log p(a, b) = -\log p(a) - \log p_a(b) = \\ &= I(a) + I(b), \end{aligned} \quad (10.1)$$

которая равна сумме информации $I(a)$ и $I_a(b)$, содержащихся в каждом из двух последовательных событий. Остается правильно выбрать единицу: наиболее пригодной в качестве единицы принимается такая информация, которая соответствует появлению события, вероятность которого априори равна половине; тогда можем написать

$$I(a) = -\frac{\log p_a}{-\log \frac{1}{2}} = -\log_2 p_a, \quad (10.2)$$

обозначая через $\log_2(x)$ — логарифм x при основании 2. Эта двоичная единица в английской литературе обозначается словом bit (сокращение от binary unit); таким образом, объявление результата в игре «орел или решка» приносит единицу информации.

§ 3. Поток информации ¹⁾

Рассмотрим теперь способ передачи информации (канал информации), используя для этого последовательные сигналы a, b, c и т. д., имеющие соответственно вероятности p_a, p_b и т. д. Можно, например, полагать при передаче номера телефона, состоящего исключительно из цифр, что каждое последовательное сообщение дает нам возможность узнать одну новую цифру, вероятность которой равна $1/10$; каждое сообщение приносит, следовательно, информацию, равную

$$-\log_2 \frac{1}{10} = \log_2 10 = \frac{1}{\lg 2} = \frac{1}{0,30103} \approx 3,52 \text{ дв. ед.}$$

Если теперь рассматривать неравновероятные сообщения, то можно оценить средний поток информации на сообщение. Возьмем в качестве примера объявление результатов последовательных проб в игре, где результаты сводятся просто к «выигрышу» или «проигрышу»: если p есть вероятность выигрыша и $(1-p)$ — вероятность проигрыша, то объявление удачного случая приносит информацию $-\log p$, а объявление неудачного случая приносит информацию $-\log(1-p)$. Если теперь рассмотреть последовательность из N сообщений, то общее количество информации будет близко к величине

$$-Np \log p - N(1-p) \log(1-p),$$

поскольку получаем приблизительно Np случаев выигрыша и $N(1-p)$ случаев проигрыша; в среднем для каждого сообщения получаем

$$-p \log p - (1-p) \log(1-p). \quad (10.3)$$

Легко показать, что в наиболее общем случае, когда число возможностей значительно (больше 2), средний поток информации равен

$$-\sum_i p_i \log p_i, \quad (10.4)$$

где p_i — вероятность события i .

¹⁾ Это понятие в литературе по теории информации связывают с понятием энтропии информации. — *Прим. ред.*

Интересно построить кривую, представляющую поток информации в простом случае, когда имеются две возможности с вероятностями p и $1-p$: эта кривая должна проходить через максимум, когда $p=1/2$, т. е. когда два дополняющих друг друга события равным образом вероятны. Очень ловкий игрок выигрывает почти всегда, и объявление его результатов будет состоять из ряда сообщений, в которых будут объявляться только выигрыши, вероятность которых почти равна единице, и эти сообщения будут давать очень мало информации; средний поток информации будет, следовательно, очень малым. Очевидно, то же самое получится и у неумелого игрока; наоборот, игра среднего игрока даст максимум потока информации, причем каждое сообщение приносит почти одно и то же количество информации.

§ 4. Понятие об избыточности кода

Можно применить сказанное выше к оценке (априори достаточно неопределенной) количества информации, содержащегося в письменном сообщении: письменное сообщение состоит из совокупности слов, составленных из букв. Число использованных букв будет ограничено, а частоту появления каждой из букв в сообщении можно уточнить; для этого достаточно сосчитать в достаточно длинном тексте, сколько раз использована каждая буква. По результатам подсчета можно составить таблицу относительных частот, подобную табл. 10, которая дает вероятность употребления 32 знаков, применяемых во французском языке (Chavasse).

Отсюда находим, что средний поток информации равен, согласно формуле (10.4), величине $4,2 \text{ дв. ед.}$ на букву (он был бы равен $\log_2 32 = 5 \text{ дв. ед.}$ на букву, если бы использование всех букв было равновероятным).

В действительности информация, содержащаяся в тексте, несомненно, невелика даже для сжатых и в совершенстве отредактированных текстов. Действительно, каждому известно, что без вреда для ясности текста и не подвергая сомнению его интерпретацию, можно сокращать некоторые слова, следовательно, некоторые буквы совершенно бесполезны и не приносят никакой информации. Об их присутствии было известно и до чтения текста. Например, если в

Таблица 10

Буква	Вероятность	Буква	Вероятность	Буква	Вероятность
<i>a</i>	0,0694	<i>f</i>	0,0111	<i>p</i>	0,0276
<i>â</i>	0,0045	<i>g</i>	0,0077	<i>q</i>	0,0134
<i>â</i>	0,0008	<i>h</i>	0,0081	<i>r</i>	0,0633
<i>b</i>	0,0087	<i>i</i>	0,0738	<i>s</i>	0,0850
<i>c</i>	0,0309	<i>j</i>	0,0060	<i>t</i>	0,0708
<i>c</i>	0,0007	<i>k</i>	0,0000	<i>u</i>	0,0683
<i>d</i>	0,0367	<i>l</i>	0,0569	<i>v</i>	0,0152
<i>e</i>	0,1509	<i>m</i>	0,0304	<i>w</i>	0,00002
<i>e</i>	0,0189	<i>n</i>	0,0724	<i>x</i>	0,0037
<i>ê</i>	0,0040	<i>o</i>	0,0537	<i>y</i>	0,00267
<i>ê</i>	0,0028	<i>ô</i>	0,0003	<i>z</i>	0,00131

тексте известны одна или несколько первых букв слов, то остальные не являются произвольными; так, во французском языке после буквы *q* в большинстве случаев следует *u*, а затем какая-либо гласная буква. Следовательно, указанный выше способ оценки неправилен, поскольку мы молчаливо допустили, что вероятность присутствия какой-то определенной буквы не зависит от наличия предыдущих букв. Для того чтобы получить точную оценку, нужно знать, какова вероятность появления одной из букв, принимая во внимание предыдущие буквы (условная вероятность). Таким образом, мы приходим к заключению, что поток информации оказывается значительно ниже указанной ранее величины и составляет около 1,5 дв. ед. на букву: использование обычно применяемых символов с помощью специального еще не разработанного кода дает возможность утроить поток информации. Говорят, что письменное сообщение обладает большой избыточностью кода, т. е. что поток информации не равен максимально возможному потоку, поскольку вероятность присутствия одной буквы в сильной степени зависит от присутствия других, предыдущих букв; вероятность может даже достичь значения, равного единице, если мы имеем дело с окончанием слова, которое можно без риска сократить. Впрочем, следует отметить, что избыточность кода может быть полезной: она

позволяет контролировать правильность текста и исправлять часто встречающиеся ошибки (опечатки), что было бы невозможно, если бы любые комбинации букв имели смысл.

§ 5. Информация в физических измерениях

Предположим, что мы произвели несколько непрерывных измерений физической величины и передаем ее значение. Априори существует бесконечное число ее возможных значений, и можно предположить, что количество информации, связанное со значением этой величины, также бесконечно, поскольку каждая величина имеет бесконечно малую вероятность. В действительности дело обстоит не так, ибо измерение всегда сопровождается погрешностью. Если априори предположить, что значение величины всегда содержит некую ошибку, происходящую, например, вследствие случайных флуктуаций (называемых в электронике «шумами»), то это положение можно схематически представить следующим образом. Если величина, подлежащая измерению, которую мы будем называть сигналом *S*, может принимать всевозможные значения в интервале длины *s* и если шум характеризуется амплитудой *b*, то можно предположить, что измерение величины сводится к тому, чтобы найти положение значения этой величины в совокупности $N = s/b$ малых равных интервалов; количество информации тогда будет таким:

$$-\log \frac{b}{s} = \log \frac{s}{b}.$$

Когда возможные значения *s* и *b* не распределены с одинаковой вероятностью в интервале их изменений, то вычисление информации становится более сложным. Когда значения *s* размещаются в окрестности средних значений по закону вероятности гауссова типа с дисперсией *s*, а вероятность значений *b* имеет гауссово распределение с дисперсией *b*, то можно показать, что выигрыш информации, полученный при выполнении одного измерения, в среднем равен

$$I = \frac{1}{2} \log \left(\frac{s^2 + b^2}{b^2} \right).$$

Можно сказать, что результатом измерения является уменьшение неопределенности в M раз, где

$$M = \sqrt{\frac{s^2 + b^2}{b^2}}.$$

Для $s/b \gg 1$ эта величина эквивалентна s/b ; с другой стороны, для $s/b \rightarrow 0$

$$1 + \frac{s^2}{b^2} \rightarrow 1 \text{ и } I \rightarrow \log 1 = 0,$$

что вполне естественно, так как в этом случае измерение становится слишком неточным, чтобы дать какую-либо информацию.

§ 6. Информация, содержащаяся в оптическом изображении

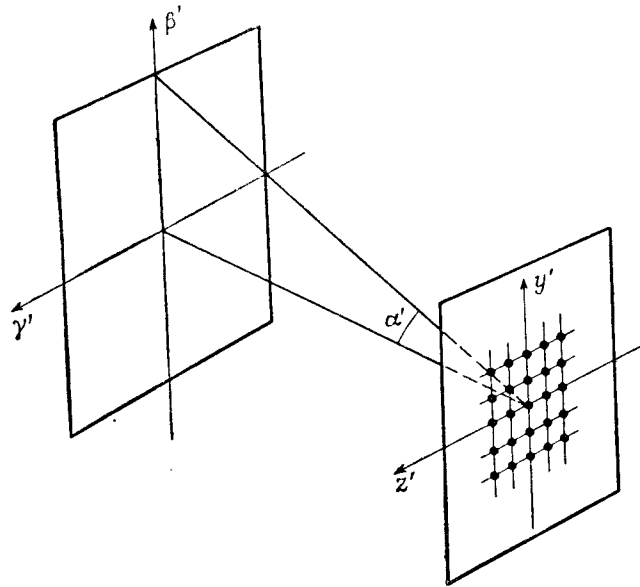
Попробуем применить теперь изложенные выше идеи к случаю оптического изображения. На первый взгляд кажется очень трудным подойти к определению количества информации, содержащейся в изображении. Оптическое изображение действительно может передать всякого рода информацию об объекте: его форму, размеры, цвет, иногда его оптическую толщину (в случае фазового контраста). С другой стороны, очевидно, что в оптическом изображении должно иметь место значительная избыточность кода; в частности, это касается передачи цвета: чаще всего листья зеленые, небо голубое и т. д. (кроме случая, когда речь идет о «современной» живописи...).

Можно тем не менее попытаться применить теорию информации следующим образом. Начнем прежде всего с исключения влияния цвета; тройственность цветового восприятия позволяет, впрочем, предположить, что достаточно иметь три оптических изображения для трех областей длин волн соответственно, чтобы можно было воспроизвести изображение (на этом основан принцип репродукции цветных изображений), и количество информации в цветном изображении, вероятно, не превышает более чем в три раза ту информацию, которая содержится в черно-белом изображении.

Если рассмотреть теперь «черно-белое» изображение, то его можно принять за распределение освещенности на

плоскости изображений, характеризуемое функцией двух переменных $I(y', z')$. Наблюдатель, очевидно, постарается извлечь из этого изображения $I(y', z')$ максимум сведений об объекте $O(y, z)$. Объект $O(y, z)$ может быть совершенно произвольным: его яркость в различных точках априори не подчиняется никаким условиям, и вообще имеет место полная независимость между соседними точками, иначе говоря, функция $O(y, z)$ может испытывать очень сложные изменения и иметь сложную «микроструктуру». Но все это не переходит на изображение: мы знаем, что изображение точки имеет ощутимые размеры (минимальные размеры — это размеры дифракционного пятна) и что изображение протяженного объекта получается интегрированием по различным изображениям элементов объекта, например при использовании освещенностей при некогерентном освещении. Отсюда следует, что если рассмотреть две точки в плоскости изображений, расположенные на расстоянии, значительно меньшем радиуса дифракционного пятна, то освещенности их будут очень близкими. Нельзя говорить о независимости освещенностей в плоскости изображений, по крайней мере для точек, очень близких друг к другу.

Это можно уточнить, если использовать теорему интерполяции гл. 2, § 7: полоса пространственных частот, пропущенных оптическим прибором, ограничена; в результате изображение будет полностью известно, если будет известна освещенность в *конечном* числе точек, надлежащим образом выбранных. Предположим, например, что прибор обладает квадратным зрачком, сторона которого видна из центра плоскости изображений под углом $2\alpha'$ (фиг. 97); пропущенные пространственные частоты не будут превышать по модулю предельную величину $2\alpha'/\lambda$, и общая ширина полосы пропускания будет равна $4\alpha'/\lambda$. Теорема интерполяции, распространенная на случай двух измерений, позволяет показать, что изображение будет полностью известно, если известны значения освещенности $I(y', z')$ в точках, расположенных в узлах (вершинах) квадратиков со стороной $\lambda/4\alpha'$ (см. фиг. 97). Иначе говоря, функция $I(y', z')$ зависит от конечного числа параметров. На единице поверхности в плоскости y', z' достаточно знать значение освещенности в точках, число которых равно $N = 16\alpha'^2/\lambda^2$. Можно показать, что в случае когерентного



Фиг. 97.

освещения полоса пропущенных частот будет в два раза шире; на единице поверхности число независимых параметров равно $4\alpha'^2/\lambda^2$ при квадратном зрачке.

Таким образом, число параметров, от которых зависит оптическое изображение, ограничено, и можно надеяться определить количество информации.

Однако следует теперь ввести понятие о шуме в оптическом изображении, подобном тому, который возникает в системах коммуникаций. Освещенности, создаваемые в оптическом изображении, не могут быть точно известны во всех точках: причинами могут служить флуктуации фотонов, падающих в 1 сек (шум фотонов, который в нашем случае является вообще слабым); случайные свойства приемника: фотографическая пластинка, например, обладает некоторой зернистостью, которая вызывает местные флуктуации оптической плотности; в результате возникает неопределенность в значениях освещенности, воспринимаемой эмульсией; такая же случайность присутствует и при фото-

электрических измерениях — измерения могут быть подвержены влиянию «шума» усилительных цепей и т. д.

Если охарактеризовать сигнал как и «шум» некоторой «мощностью», т. е. средней величиной квадрата его мгновенной величины, то можно показать, что количество информации на единице поверхности равно $N \log(1 + P_s/P_b)$, где P_s и P_b суть соответственно «мощности» сигнала и шума; эта формула применима в случае, когда вероятность как сигнала, так и шума распределена по гауссову закону.

Следовательно, проблемы качества оптического изображения могут быть сопоставлены с проблемами, относящимися к качеству электрических или акустических сигналов.

Целесообразно ли принять окончательно такую точку зрения? Конечно, нет! В такой форме теория не в состоянии объяснить, например, почему несколько штрихов карандаша в руках искусного художника создают однозначное представление о каком-либо объекте, об известном животном, и каково при этом количество информации. Оно, очевидно, ниже максимальной величины, которую мы могли бы подсчитать (поскольку имеет место избыточность кода), а с другой стороны, априори непонятна необходимость введения понятия шума. В этом имеются серьезные трудности, и мы ограничимся приведенными здесь указаниями относительно этой весьма любопытной попытки оценить информацию оптических изображений.

ГЛАВА 11

Приложения

Нам осталось теперь показать, как полученные выше теоретические результаты могут быть применены в некоторых практических вопросах. Как можно на основании результатов расчета прибора определить его качество, предусмотреть его характеристики и по возможности его улучшить? Можно ли, с другой стороны, учесть свойства приемника (фотографической пластинки или светочувствительного слоя) таким образом, чтобы по возможности лучше приспособить к нему оптический прибор? Можно ли в некоторых случаях улучшить классические достижения ценой некоторых уступок (потерь энергии и т. п.)? На такого рода вопросы мы попытаемся в дальнейшем ответить, располагая их в более или менее произвольном порядке.

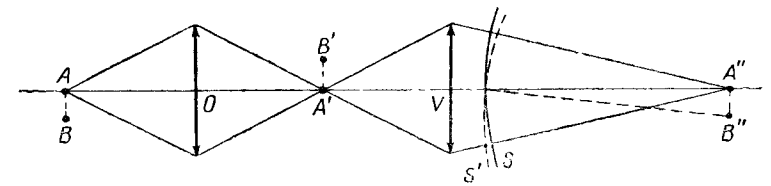
§ 1. Классический предел разрешения оптического прибора. Возможность его улучшения

Дифракционные пятна, создаваемые двумя близкими точечными источниками A и B , оказываются достаточно разделенными для того, чтобы стало очевидным существование двух источников, лишь тогда, когда геометрические изображения A' и B' этих источников находятся на расстоянии порядка радиуса пятна (в том случае, когда интенсивности двух источников равны). При этом получаем картину, приведенную на фото X; просмотр этой картины позволяет сказать, что наличие *двух* источников очевидно. Поэтому в качестве приближенной величины предела разрешения принимают радиус дифракционного пятна $1,2 \lambda/2 \alpha'$. По поводу сказанного необходимо сделать несколько замечаний.

1) Сложение освещенностей, создаваемых двумя источниками, законно лишь в предположении, что источники некогерентны; в случае, если они когерентны, нужно сложить амплитуды и затем сумму возвести в квадрат; легко показать, что в последнем случае разделение пятен происходит значительно медленнее, чем если бы точечные источники были когерентными.

2) Возвращаясь к случаю двух некогерентных источников, заметим, что невозможно точно определить, при каком расстоянии $A'B'$ получается разделение; начиная с очень маленького расстояния $A'B'$, сперва становится заметной эллиптичность центрального пятна (фото XI), затем эллиптичность усиливается и постепенно пятна разделяются (см. фото X). В действительности можно было бы пользоваться чувствительным способом восприятия эллиптичности центрального пятна для того, чтобы еще раньше обнаружить присутствие нескольких точечных объектов: теоретического предела разрешения не существует, если мы располагаем заранее сведениями о природе объекта, например знаем, что имеем дело с двумя идентичными точками.

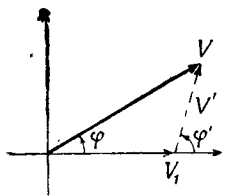
3) Заметим теперь, что некоторые искусственные приемы позволяют получить выигрыш в разрешении втрое или вчетверо по сравнению с обычным значением. Рассмотрим, например, установку, показанную на фиг. 98:



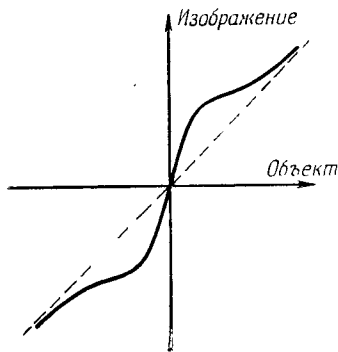
Фиг. 98.

объектив O образует изображение A' точки A объекта, затем оптическая система V воспроизводит окончательное изображение объекта в точке A'' . Когда точка A находится на оси системы, то волновая поверхность, образуемая линзой V , является сферой S с центром в A'' . Если объект слегка смещается от оси, то его изображение переходит в B' и волновой поверхностью становится сфера S' с

центром в B'' , т. е. колебания, распределенные на S , не будут находиться в прежней фазе, а их фаза φ изменится пропорционально расстоянию от оси. Тогда можно попытаться получить искусственное увеличение фазы φ , вычитая из колебания V колебание V_1 с фазой, равной нулю (фиг. 99); это приводит к колебанию V' с фазой $\varphi' > \varphi$. Для этого достаточно поместить маленький непрозрачный экран в плоскости изображения A' ; увеличение



Фиг. 99



Фиг. 100.

фазы приводит к местному ускорению движения центрального максимума дифракционного пятна: положение максимума изображения в виде функции от положения объекта представлено кривой, приведенной на фиг. 100. Эксперимент показывает, что при этих условиях можно разделить две точки объекта, расстояние между которыми в 3—4 раза меньше, чем радиус дифракционного пятна (Р. Ласотте, 1954).

§ 2. Аподизация

К тому же кругу идей относится вопрос о восприятии слабого точечного источника B по соседству с яркой точкой A : дифракционные кольца вокруг изображения A' могут мешать восприятию изображения B' . Желательно, чтобы освещенность, даваемая кольцами, была насколько возможно слабой; можно, в частности, попытаться уменьшить освещенность дифракционных колец, изменяя по

соответствующему закону распределение амплитуд на зрачке. Этот прием называется аподизацией¹⁾ дифракционной фигуры. Первый пример устранения колец уже был дан в гл. 2. Рассмотрим однокоординатный зрачок, на котором амплитуда изменяется по закону Гаусса:

$$f(x) = \exp\left(-\pi \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Из выражений (2.8) и (2.20) вытекает

$$g(u) = \exp(-\pi a^2 u^2),$$

следовательно, преобразование $g(u)$, т. е. распределение в дифракционном изображении, является также функцией Гаусса. Боковые полосы устраняются, т. е. происходит аподизация дифракционной фигуры, поскольку амплитуды монотонно затухают, согласно закону Гаусса, так же, как и освещенность. Можно вообще поставить вопрос о постепенном затухании амплитуды (или освещенности) к краям дифракционной картины. Если функции f и g суть преобразования Фурье одной в другую, то можно написать

$$f(x) = \int g(u) h(-2\pi ux) du,$$

$$f'(x) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} u g(u) h(-2\pi ux) du,$$

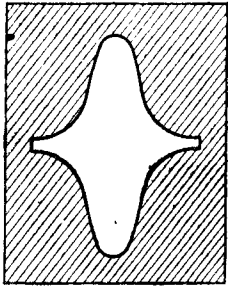
$$f^n(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} u^n g(u) h(-2\pi ux) du.$$

Если n -я производная от $f(x)$ существует во всех точках, то выражающий $f(x)$ интеграл также существует, а для этого необходимо, чтобы в выражение $u^n g(u)$ стремилось к нулю, или чтобы функция $g(u)$ уменьшалась скорее, чем u^{-n} . Таким образом, скорость затухания функции $g(u)$ связана с существованием последовательных производных функции $f(x)$. Если, например, $f(x)$ и $f'(x)$ существуют всюду, но $f''(x)$ имеет иногда разрывы, а $f'''(x)$ не существует всюду, то $g(u)$ должна уменьшаться скорее, чем u^{-1} , — это случай функции «треугольник» из гл. 2, § 6,

¹⁾ А-подизация — словообразование из греческих корней, обозначающее устранение «основания», т. е. устранение побочных колец. — Прим. ред.

преобразование которой $g(u)$ уменьшается как u^{-2} . Это наводит на мысль, что функция $f(x)$ [или, что то же, $F(\beta')$], представляющая распределение амплитуд на зрачке, должна обладать производными порядка n , столь высокого, насколько это возможно; тогда ее преобразование Фурье будет быстро стремиться к нулю на бесконечности.

Вопросы аподизации подробно изучены Жакино и Руазен-Досье для одномерного экрана и Лансро для двумерных экранов, имеющих круговую симметрию. В случае одномерного экрана можно использовать зрачок, обладающий постоянной прозрачностью, но ограниченный контуром выбранной формы, чтобы получить эффект аподизации вдоль одной из осей $A'y'$ или $A'z'$; это приводит к контуру в виде «шляпы жандарма» (фиг. 101).



Фиг. 101.

Рассмотрим экран, форма которого определяется уравнением

$$\gamma' = 0,493 + 0,486 \cos \pi\beta' + 0,020 \cos 2\pi\beta'.$$

Если на плоскости изображений выбрать точку M , расположенную на расстоянии от центра, приблизительно равном 7 диаметрам классического центрального пятна, то освещенность в ней будет равна 10^{-7} (принимая за единицу освещенность в центре), тогда как при прямоугольном зрачке она составляет величину порядка $0,5 \cdot 10^{-3}$. Экран такого вида был использован в спектральных исследованиях Жакино для улавливания слабых полос по соседству с интенсивными полосами. Аналогичные результаты могут быть получены в случае зрачков, обладающих симметрией вращения. Мы отметим только результаты Лансро (G. Lalsgaux, 1947). Если положить

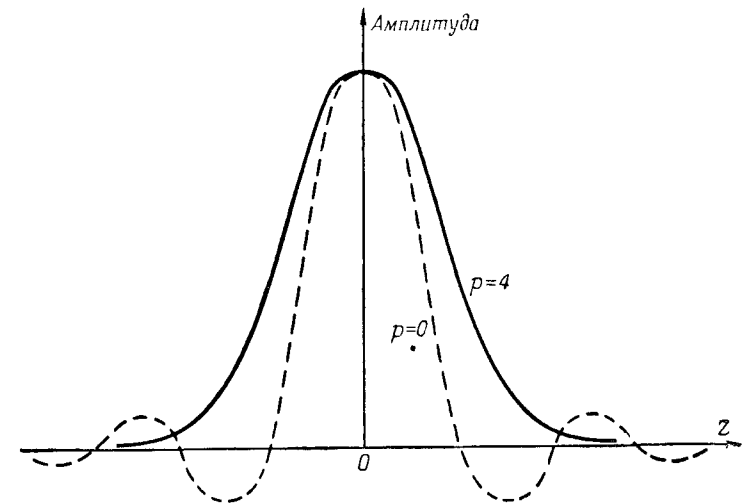
$$F(\beta', \gamma') = \exp\left(-p \frac{\beta'^2 + \gamma'^2}{\alpha_0^2}\right)$$

и дать параметру p значения 0 и 4, то получаются кривые, показанные на фиг. 102. Для $p=0$ получается диск

Эри. Когда $p=4$ и $Z=15$, то амплитуда равна $+0,0017$, тогда как для диска Эри она равна $+0,0274$. Происходит значительная аподизация, поскольку уменьшение энергии составляет

$$\left(\frac{0,0017}{0,0274}\right)^2 = 0,0038.$$

Заметим, что аподизация сопровождается незначительным расширением центрального максимума дифракционного пятна, так что если мы выигрываем в обнаружении слабого источника на некотором расстоянии от сильного источника, то несколько теряем в пределе разрешения двух идентичных источников.



Фиг. 102.

Можно поступить наоборот, уменьшив пятно центральной дифракционной фигуры, — тогда немного увеличивается освещенность колец. При этом возможно улучшение разрешающей силы для точечных источников при потере контраста для протяженных объектов. Для этого следует применить экран, дополнительный тому, который служил для аподизации дифракционных картин. Возможны и другие методы; можно, например, ввести дефазиро-

вание в части пучка лучей, проходящей через центральную часть отверстия (площадь поверхности ее составляет долю m от площади отверстия). Расстояние между двумя первыми нулевыми минимумами дифракционной фигуры уменьшается в $\sqrt{1-2m}$ раз, когда m стремится к $1/2$. Следовательно, можно получить сколь угодно малое центральное пятно, но нужно учесть, что освещенность в центре, поскольку она пропорциональна $(1-2m)^2$, быстро стремится к нулю (значительно быстрее, чем ширина центрального пятна). Впрочем, этот результат имеет общий характер: улучшение предела разрешения всегда сопровождается потерей света и контраста, ограничивающей выигрыш величинами порядка 25%¹⁾. Этот вопрос аналогичен вопросу о «сверхразрешающих антеннах» в области коротких радиоволн.

§ 3. Точность наводки в продольном направлении и некоторые возможности ее улучшения

Дифракция определяет предел точности наводки как в продольном, так и в поперечном направлении. Действительно, если наблюдать изображение светящегося точечного объекта, то небольшую дефокусировку можно уловить, лишь наблюдая распределение освещенности в дифракционном пятне; при этом распределение стационарно по отношению к дефокусировке, и изменения освещенности во всех точках пятна суть величины второго порядка относительно дефокусировки точки. Есть основание считать, что изменения освещенности центрального максимума являются решающими при оценке на опыте изменений формы изображения; мы будем пользоваться этим критерием.

В гл. 8, § 4, мы видели, что допустимое отклонение, соответствующее падению центральной освещенности на 20%, приводит к деформации волновой поверхности, равной $\lambda/4$ (расстоянию по поверхности между сферической поверхностью волны и сферой сравнения). Если

¹⁾ См. Д. Ю. Гальперн, «Об аподизации», Оптика и спектроскопия, 9, 549 (1960). — Прим. ред.

ε — дефокусировка изображения, α' — угловое отверстие, можно написать [используя соотношение (9.2)]

$$\Delta' = \frac{\varepsilon \alpha'^2}{2} \leq \frac{\lambda}{4},$$

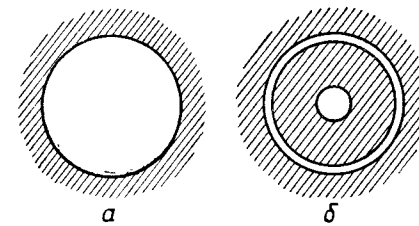
или

$$\varepsilon \leq \frac{\lambda}{2\alpha'^2}; \quad (11.1)$$

Это — величина дефокусировки, соответствующей критерию Релея.

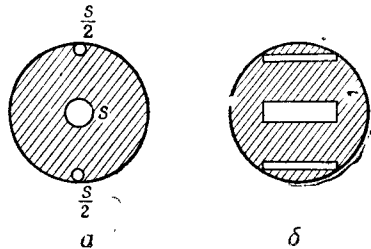
Это выражение в действительности может дать только порядок величины. В самом деле, большинство наблюдателей способны оценить изменения освещенности заметно ниже чем 20%; с другой стороны, дефокусировка обычно комбинируется с aberrациями глаза, и пределы видимой четкости изображения могут не быть симметричными относительно положения точной фокусировки. Для улучшения точности при продольной наводке были предложены различные методы, позволяющие получить по возможности большие изменения одной из величин, характеризующих изображение. Так, в случае точечного объекта Досье, Жакино, Маршаль и Пьешар (1949 г.) пытались придать максимальное значение второй производной от освещенности по абсциссе x [$\partial^2 D(0,0)/\partial x^2$], вдоль которой движется изображение.

Максимум при этом получается, когда зрачок состоит из равных по площади кольцевого отверстия по периферии и центрального отверстия, причем эти площади достаточно малы (фиг. 103). В случае если объект, на который



Фиг. 103. *a* — нормальный зрачок; *b* — зрачок, состоящий из кольца и отверстия в центре, улучшающий точность изображения точечных объектов.

наводят, состоит из тонкой линии, излучающей некогерентный свет, то освещенность в центре изображения линии оказывается связанной с отношением площади сечения дифракционного тела к площади изображения точки. Максимальное изменение этого сечения получается тогда, когда зрачок состоит из трех маленьких отверстий, причем

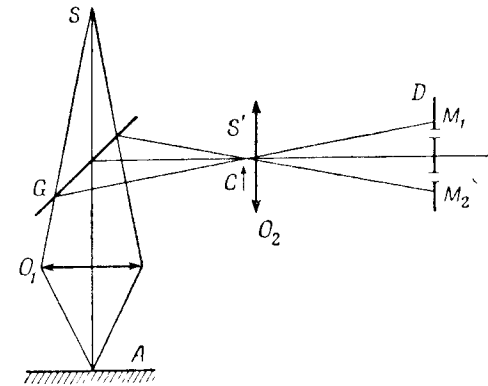


Фиг. 104.

одно из них имеет площадь, равную s , а два других, которые удалены от первого настолько это возможно, — по $s/2$ (фиг. 104, а). Три отверстия могут быть заменены тремя прямыми параллельными щелями (фиг. 104, б). Указанные выше авторы пришли, таким образом, к интерференционному прибору с тремя щелями, предложенному Цернике для измерения разностей хода. Выигрыш в точности при описанных выше зрачках в случае точечного объекта получается приблизительно в 2 раза. Для тонких светлых линий при некогерентном освещении выигрыш составляет величину от 4 до 6 раз. Можно использовать превосходную точность, получаемую в установке Цернике, отыскивая симметричные дефокусировки, для которых разность хода в точности составляет $\lambda/4$.

Другой метод был предложен Арнюльфом и Дюпюи (А. Arnulf, О. Dupuy, 1958). Вместо того чтобы наблюдать изображение объекта наводки, они исследуют зрачок, применяя метод Фуко. Пусть S — точечный источник; объектив микроскопа O_1 (с помощью которого производится наведение) дает его изображение, совпадающее с A (фиг. 105). С помощью наклоненной на 45° полупрозрачной пластинки G в точке S' получают изображение источника S . Поблизости от этого изображения находится

объектив O_2 , который дает на диафрагме D изображение объектива O_1 . В диафрагме D проделаны два маленьких отверстия, размещенных вблизи от края изображения



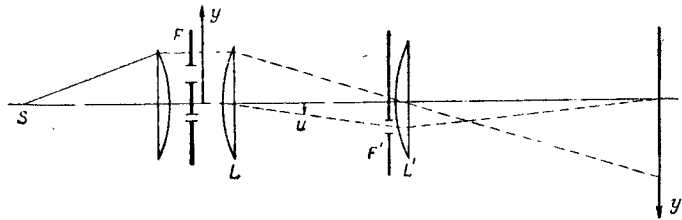
Фиг. 105.

объектива O_1 . Если с изображением S' совместить непрозрачный экран C с прямолинейным краем, как в методе Фуко, то освещенности двух отверстий M_1 и M_2 будут равными. Сместим теперь объект A по отношению к объективу O_1 , т. е. относительно фокусирующего микроскопа. Изображение S' больше не будет попадать на C , и, как в методе Фуко, освещенности отверстий M_1 , M_2 будут неравными. Для упрощения сравнения освещенностей в M_1 и M_2 допустим, что в установке применена двоякопреломляющая призма Волластона, не показанная на фиг. 105. Тогда будут наблюдаться четыре изображения, так как каждое из отверстий даст два изображения. Призма Волластона рассчитана и расположена таким образом, чтобы обыкновенные лучи давали изображение отверстия M_1 рядом с изображением отверстия M_2 необыкновенными лучами. При фотометрическом сравнении двух очень близких изображений точность измерения значительно повышается. Наводка на поверхность A может быть выполнена с очень большой точностью, и можно достичь выигрыша в точности порядка 20 раз.

Отметим еще, что Симон (J. Simon, 1960) предложил метод, основанный на изменениях множителя контраста в зависимости от дефокусировки (см., например, фиг. 96) для частоты, равной приблизительно половине предельной частоты. Если визуально оценить равенство контрастов изображений двух мир, расфокусированных по глубине, то вблизи от плоскости фокусировки, в которой контрасты соответствующих мир исчезают, можно достичь исключительно высокой точности: а именно — превзойти точность фокусировки, равную $\lambda/1000$.

§ 4. Методы увеличения точности поперечной наводки

При совмещении оптического изображения точки (или щели) с реперой, например с нитью сетки, можно, оперируя в условиях максимальной точности, использовать темную нить, ширина которой мала по сравнению с радиусом дифракционного пятна, и добиться разделения



Фиг. 106.

этого пятна пополам: таким образом, достигается совпадение нити и центра пятна с точностью, равной малой доле ($1/20$ и даже меньше) радиуса первого темного кольца. Можно, следовательно, считать, что точность поперечной наводки определяется величиной $(1/n)$ ($1,2\lambda/2\alpha'$), где n — достаточно большое число (20 или больше). Очевидно, существует предел из-за размеров дифракционного пятна, как это происходит в случае разрешающей силы.

Арнюльф (1958 г.) предложил остроумный метод, позволяющий значительно уточнить положение темной нити, движущейся в пределах щели F (фиг. 106), когда нить близка к оси симметрии щели F и смещена на малую

величину ϵ . Обозначая через d расстояние между центрами щелей и через l их ширину, когда нить находится в середине ($\epsilon=0$), положим, что интересующий нас объект обладает единичной прозрачностью в интервалах

$$-\frac{d}{2} - \frac{l}{2} < y < -\frac{d}{2} + \frac{l}{2} + \epsilon$$

и

$$\frac{d}{2} - \frac{l}{2} + \epsilon < y < \frac{d}{2} + \frac{l}{2},$$

причем в других местах прозрачность равна нулю; таким образом, имеем ширину отверстия $d+l$, ширину нити $d-l$ и ее смещение ϵ .

Осветим когерентно этот объект с помощью плоской волны; в фокусе линзы L получим довольно сложную картину дифракции, поскольку амплитуда претерпевает колебания (в результате интерференции между двумя неравными щелями). Можно заметить, что положение тех точек, в которых амплитуда равна нулю, зависит от ϵ ; в одну из этих точек можно поместить малую диафрагму. Изображение объекта, даваемое линзой L' , будет существенно изменяться при смещениях нити. Арнюльф на опыте подтвердил наличие быстрого смещения минимума освещенности, представляющего изображение темной линии, причем это смещение происходит значительно быстрее, чем это вытекает из соображений геометрической оптики.

Пусть y — ордината на плоскости объекта, u — угол дифракции; распределение амплитуд в фокальной плоскости линзы L , совпадающей с плоскостью линзы L' , выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} G(u, \epsilon) &= \int_{-\frac{d}{2} - \frac{l}{2}}^{\frac{d}{2} + \frac{l}{2}} h(kuy) dy - \int_{-\frac{d}{2} - \frac{l}{2} + \epsilon}^{\frac{d}{2} - \frac{l}{2} + \epsilon} h(kuy) dy = \\ &= \frac{2}{ku} \left[\sin ku \left(\frac{d}{2} + \frac{l}{2} \right) - h(ku\epsilon) \sin ku \left(\frac{d}{2} - \frac{l}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если нить находится в центре щели F ($\epsilon=0$), то можно написать выражение:

$$G(u, 0) = 2 \frac{\sin \frac{\pi u l}{\lambda}}{\frac{\pi u}{\lambda}} \cos \frac{\pi u d}{\lambda},$$

которое представляет классическое явление интерференции при наличии дифракции от каждой щели. Амплитуда впервые принимает нулевое значение, когда $u = \lambda/2d$. Поместим на плоскости вблизи линзы L' в направлении u щель F' , края которой соответствуют $u = \lambda/2d \pm V/2$ (следовательно, V есть угол, под которым видна щель F' из плоскости объекта F .) Тогда распределение амплитуд на изображении может быть представлено с точностью до множителя выражением

$$\int_{F'} G(u, \varepsilon) h(-ku y') du.$$

Если ε мало, то $G(u, \varepsilon)$ можно переписать в виде

$$G(u, \varepsilon) = 2 \frac{\sin \frac{\pi u l}{\lambda}}{\frac{\pi u}{\lambda}} \cos \frac{\pi u d}{\lambda} - 2i\varepsilon \sin \frac{\pi u (d-l)}{\lambda},$$

или, полагая, что $v = u - \lambda/2d$ мало,

$$G(u, \varepsilon) = -\frac{4d^2 v}{\lambda} \sin \frac{\pi l}{2d} - 2i\varepsilon \sin \pi \frac{d-l}{2d}.$$

Амплитуда $F(y')$ в плоскости изображения равна (с точностью до множителя)

$$F(y') = \frac{2d^2}{\lambda} \sin \frac{\pi l}{2d} \int_{-\frac{v}{2}}^{+\frac{v}{2}} v h(-kv y') dv + \\ + i\varepsilon \sin \pi \frac{d-l}{2d} \int_{-\frac{v}{2}}^{+\frac{v}{2}} h(-kv y') dv.$$

Полагая y' малым, получаем после преобразований выражение

$$\frac{\pi d^2}{3\lambda^2} \sin \frac{\pi l}{2d} V^3 y' - \sin \pi \frac{d-l}{2d} \varepsilon V,$$

которое обращается в нуль, когда

$$y' = \frac{3\lambda^2}{\pi d^2 V^2} \varepsilon \frac{\sin \pi \frac{d-l}{2d}}{\sin \frac{\pi l}{2d}},$$

в то время как из геометрической оптики вытекает при наших обозначениях, что смещение изображения $y' = \varepsilon$. Это значит, что удалось получить выигрыш G в скорости смещения минимума, равный

$$G = \frac{3\lambda^2}{\pi d^2 V^2} \frac{\sin \pi \frac{d-l}{2d}}{\sin \frac{\pi l}{2d}}.$$

Первый сомножитель обратно пропорционален квадрату отношения ширины V щели F к промежутку между щелями λ/d . Он может быть довольно большим, если пойти на значительную потерю потока. Второй сомножитель мало отличается от $2d/\pi l$ — величины, являющейся его предельным значением при $l \ll d$.

Порядок величины G упрощенно таков:

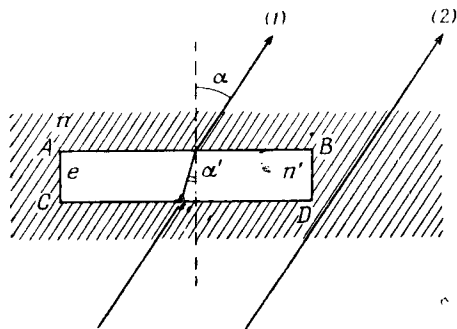
$$G \approx \frac{6\lambda^2}{\pi^2 l d V^2}.$$

Опыт подтверждает возможность получить значительный выигрыш (например, на два порядка).

§ 5. Точность при измерении разности хода в интерференционной микроскопии. Связь с разрешающей силой микроскопа

Когда хотят измерить оптическую толщину маленького прозрачного объекта интерференционным микроскопом, то стараются шире раскрыть диафрагму конденсора для лучшего обнаружения объекта и для облегчения измерений. Препарат тогда освещают бесконечным числом

пучков параллельных лучей, имеющих различные наклоны. Ошибки, получающиеся в результате этого, могут быть заметными. Пусть $ABCD$ — прозрачный объект, схематически изображенный в виде пластинки с параллельными сторонами (фиг. 107). Пусть ее толщина равна e



Фиг. 107.

и показатель преломления $n' = n + \delta n$. При нормальном падении разность хода Δ между лучом (1), пересекающим объект, и лучом (2), проходящим в стороне от него, равна

$$\Delta = (n - n')e = -e\delta n. \quad (11.2)$$

При наклоне α пучка лучей разность хода между лучами (1) и (2) становится равной

$$\Delta_\alpha = (n \cos \alpha - n' \cos \alpha')e. \quad (11.3)$$

Эта та самая разность хода Δ [равенство (11.2)], которую мы предполагаем измерить на интерференционном микроскопе. Если отверстие диафрагмы конденсора очень мало (практически точечный источник), то измерения, несомненно, дают величину Δ , но если отверстие конденсора значительно, то разность хода не является одной и той же для всех лучей, пересекающих объект [равенство (11.3)]. Измеренная разность хода не равна ни Δ , ни Δ_α и, следовательно, нужно проинтегрировать выражение (11.3).

Энергия, содержащаяся в коническом элементе, пропорциональна $\sin^2 \alpha d\alpha$, и можно предположить, что излучающие различные конические элементы некогерентны между собой. При этих условиях выражение $E(e, n, n', \alpha_0)$,

дающее изменение освещенности в изображении в виде функции от толщины объекта e , показателей n и n' и от угла α_0 (максимального значения α), будет иметь вид

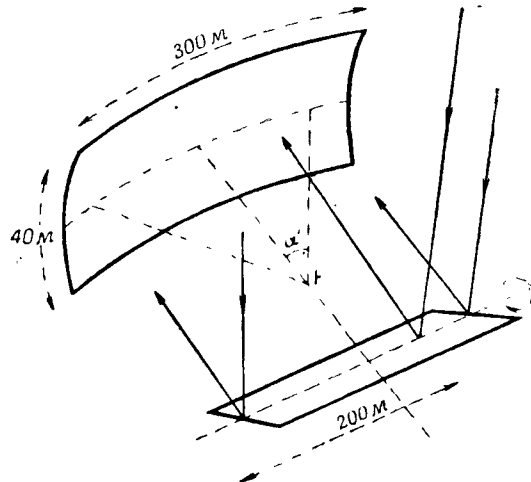
$$E(e, n, n', \alpha_0) = \frac{\int_0^{\alpha_0} \cos^2 \left[\frac{\pi e}{\lambda} (n \cos \alpha - n' \cos \alpha') \right] \sin \alpha d\alpha}{\int_0^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha}.$$

Эти вычисления были выполнены Ингелстамом и Йоханссоном (E. Ingelstam, L. Johansson, 1958), которые нашли, что, если отверстие конденсора велико, возникают значительные ошибки. При числовой апертуре конденсора $n \sin \alpha_0$, равной 0,80, возможна ошибка порядка 10%. Следовательно, поправки оказываются значительными по сравнению с чувствительностью приборов. Их можно избежать лишь путем диафрагмирования конденсора, что влечет за собой потерю в разрешающей силе. Случай отражающих объектов был изучен Толмоном и Вудом, Гейтсом, Брусом и Торнтоном. Результаты оказались теми же самыми: для получения точных измерений нужно уменьшать числовую апертуру падающих световых пучков. Таким образом, как показал Ингелстам (1953 г.), требования к точности в измерении толщины всегда противоречат требованиям к точности в измерении ширины. Для увеличения точности в измерении оптической толщины необходимо смириться с потерей точности поперечных измерений, т. е. с потерей разрешения. Впрочем, Ингелстам указал, что в связи с изложенным существует некий принцип неопределенности, согласно которому произведение поперечных погрешностей на погрешности по глубине является постоянной величиной.

§ 6. Допустимые значения сферической aberrации зеркала, применяемого в радиоастрономии. Станция в Нансе

Чтобы показать, что допустимые значения aberrаций зависят прежде всего от длины волны, мы выберем случай вогнутого сферического зеркала, предназначенного собирать в своем фокусе «шумы», испускаемые на длине вол-

ны $\lambda=21$ см атома водорода. Это «зеркало» (состоящее в действительности из решетки, отражающей короткие радиоволны) должно быть вырезано по прямоугольнику ($l=300$ м, $h=40$ м) из части сферы радиусом 560 м, которая воспринимает плоские волны, отраженные плоским наклонным зеркалом длиной 200 м (фиг. 108). Используемая часть сферического зеркала для заданного точечного источника имеет размеры 200×40 м.



Фиг. 108.

Известно, что продольная сферическая aberrация сферического зеркала выражается следующим образом:

$$l = -f' \frac{\alpha'^2}{8},$$

где f' — фокусное расстояние и α' — половина углового отверстия конуса лучей (см. фиг. 108). В результате смещение Δ поверхности волны относительно сферы с центром в параксиальном фокусе равно

$$\Delta = \frac{1}{32} f' \alpha'^4.$$

Если принять величину допустимого отклонения из гл. 8, § 4, то можно написать

$$\frac{f' \alpha'^4}{32} \leq \lambda,$$

откуда при $f'=280$ м, $\lambda=0,21$ м получаем $\alpha'=0,4$.

Используемое отверстие ($\alpha'=100/300$) меньше величины этого допуска, и практически зеркало будет совершенно: несмотря на внушительные размеры и значительное угловое отверстие оно будет хорошим для коротких длин волн ($\lambda > 20$ см).

В действительности не вполне законно использовать допуски из гл. 8, § 4, установленные для круглого зрачка; правильнее применить выражение (8.12), выполнив вычисление Δ'^2 для прямоугольного зрачка. Полагая, что мы имеем дело с очень вытянутым прямоугольником, видимым под углом $2\alpha'$, напишем

$$\Delta = \frac{1}{32} f' \beta'^4 + \epsilon \frac{\beta'^2}{2} \quad \text{при } |\beta'| < \alpha',$$

где ϵ представляет дефокусировку относительно параксиального фокуса. Отсюда получаем

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{\alpha'} \int_0^{\alpha'} \Delta d\beta' = \frac{f' \alpha'^4}{5 \times 25} + \frac{\epsilon}{6} \alpha'^2,$$

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{\alpha'} \int_0^{\alpha'} \Delta^2 d\beta' = \frac{f'^2}{9 \times 2^{10}} \alpha'^8 + \frac{f' \epsilon}{25 \times 7} \alpha'^6 + \frac{\epsilon}{20} \alpha'^4,$$

$$\bar{\Delta}^2 - (\bar{\Delta})^2 = \frac{f'^2}{9 \times 1600} \alpha'^8 + \frac{1}{4 \times 3 \times 5 \times 7} f' \epsilon \alpha'^6 + \frac{1}{5 \times 9} \epsilon^2 \alpha'^4;$$

минимум этой величины получается при $\epsilon = -3f' \alpha'^2 / (8 \times 7)$ и равен

$$\frac{23}{2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2} f'^2 \alpha'^8,$$

Эта величина должна быть меньше $\lambda^2/180$, что приводит к условию

$$f\alpha'^4 < \frac{7}{\sqrt{2,3}} \lambda,$$

которое является более жестким, чем полученное выше, и приводит к значению

$$\alpha' = \frac{1}{4}.$$

Оказывается, что отверстие зеркала должно быть несколько больше. Действительно, при выполнении точного расчета следует учесть направляющее действие «рупора» приемника, который соответствует определенного вида «аподизации». Нужно также исследовать влияние положения плоского зеркала, которое расположено не точно в плоскости центра зеркала и поэтому вносит небольшую кому. В полном проекте зеркальной системы, предложенном Арсаком, приняты во внимание эти различные обстоятельства. Ниже мы рассмотрим другой вопрос, представляющий общий интерес для классической оптики: о частичной совместимости условий Аббе и Гершеля.

§ 7. Область совместимости условий Аббе и Гершеля

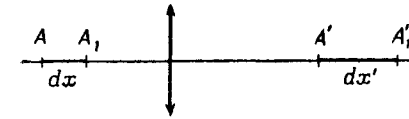
Из геометрической оптики следует, что невозможно получить строгий стигматизм в элементе объема, окружающем точку объекта A (или точку изображения A'), кроме не представляющего интереса случая, когда увеличение равно единице. Практически существуют две возможности — либо получение протяженного поля, удовлетворяющего условию синусов, но в этом случае возникает сферическая aberrация, если точка-объект A смещается вдоль оси; либо сохранение стигматизма вдоль оси, но тогда появляется кома. Мы будем изучать эти два случая.

а) Область соблюдения стигматизма в апланатическом приборе. Рассмотрим апланатический прибор, в котором точка-объект A смещена вдоль оси на dx , точка-изображение A' — на dx' (фиг. 109). Оптический

путь $(A_1A'_1)$ можно оценить, если использовать общее выражение для дифференциала оптического пути:

$$\begin{aligned} (A_1A'_1) - (AA') &= n'T'dA' - nTdA = \\ &= n'dx' \cos \alpha' - ndx \cos \alpha. \end{aligned}$$

Смещение Δ можно получить из обычного соотношения $n'\Delta = L_0 - L$, где L_0 и L — оптические пути, проведенные из A_1 и A'_1 , причем путь L_0 нужен для сравнения;



Фиг. 109.

здесь можно принять за L_0 путь вдоль оси, и тогда получим

$$n'\Delta = n'dx'(1 - \cos \alpha') - ndx(1 - \cos \alpha).$$

Имея в виду приложение к объективу микроскопа, мы будем предполагать, что $n' = 1$ и что соблюдено условие Аббе

$$ny \sin \alpha = y' \sin \alpha' \approx y' \alpha'.$$

В гауссовой области продольное увеличение равно $dx'/dx = g^2/n$, где g — поперечное увеличение y'/y . Можно написать, полагая $A = n \sin \alpha = g \sin \alpha'$ и сохраняя четвертые порядки:

$$\begin{aligned} \Delta &= dx'(1 - \cos \alpha') - ndx(1 - \cos \alpha) = \\ &= dx' [1 - (1 - \sin^2 \alpha')^{1/2}] - ndx [1 - (1 - \sin^2 \alpha)^{1/2}] = \\ &= \frac{A^4 dx}{8n} \left[\frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2} \right], \end{aligned}$$

или, переходя в пространство изображений и замечая, что $g \gg n$,

$$\Delta = -\frac{A^4 dx}{8n^3} = -\frac{A^4}{8n^2 g^2} dx'.$$

Предположим, что в расстоянии от объектива до промежуточного изображения допущена грубая ошибка — на

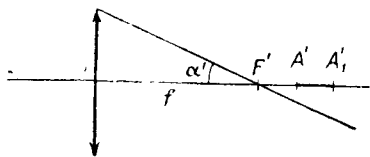
10 мм: тогда, полагая, например, $n = 1$, $\sin \alpha = 0,5$, $g = 40$, получаем

$$\Delta = \frac{1}{160 \times 16 \times 8} \text{ мм},$$

т. е. величину, которая намного меньше допустимого значения $\Delta = 1 \text{ мк}$ (см. гл. 8, § 4). Этот объектив микроскопа может работать достаточно хорошо, даже если длина тубуса имеет значительную ошибку (здесь 1 см); в этом случае можно говорить, что условия Аббе и Гершеля практически совместимы. Необходимо все же отметить, что допуск будет более строгим при большем $\sin \alpha$: объективы с очень большим отверстием требуют более точной установки плоскости фокусировки. С другой стороны, может появиться ошутимая кома, если положение фокуса окажется неправильным.

б) Кома в приборе, удовлетворяющем условию Гершеля. Рассмотрим теперь противоположный случай диоптрийного визира, предназначенного для наводки на действительные или мнимые объекты, расстояние до которых $1/\pi = \xi$, положительное или отрицательное, заметно изменяется. Изображение A' при этом находится около фокуса F' объектива, и нужно отдать предпочтение удовлетворению условия Гершеля для бесконечно удаленного объекта (фиг. 110). Это условие пишется при $n = n' = 1$ так:

$$\frac{h^2}{2} d\xi + dx'(1 - \cos \alpha') = 0,$$



Фиг. 110.

или, если f' — фокусное расстояние объектива,

$$h^2 = 2f'^2 (1 - \cos \alpha').$$

Но деформация Δ волновой поверхности, вызываемая комой, равна

$$\Delta = (h\theta + y' \sin \alpha') \cos \varphi;$$

это выражение можно переписать, заменяя θ на y'/f' , в виде

$$\Delta = y' \left[\frac{h}{f'} - \sin \alpha' \right] \cos \varphi,$$

или, вводя h из условия Гершеля, в виде

$$\begin{aligned} \Delta &= y' \left[2 \sin \frac{\alpha'}{2} - \sin \alpha' \right] \cos \varphi = \\ &= 2y' \sin \frac{\alpha'}{2} \left[1 - \cos \frac{\alpha'}{2} \right] \cos \varphi = 2y' \sin \frac{\alpha'}{2} \frac{\alpha'^2}{8} \cos \varphi, \end{aligned}$$

для 3-го порядка получаем

$$\Delta = y' \frac{\alpha'^3}{8} \cos \varphi.$$

Протяженность поля зрения хорошего качества, определяемую допусками гл. 8, § 4, получим из формулы

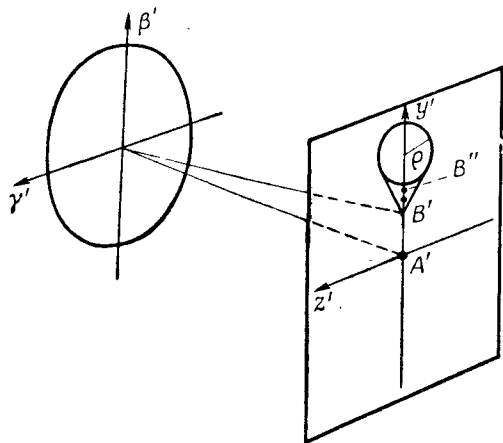
$$y' \frac{\alpha'^3}{8} < 0,6 \lambda, \text{ или } y' < \frac{4,8 \lambda}{\alpha'^3}.$$

Она зависит, очевидно, от отверстия α' , но легко видеть, что размер этого поля будет достаточным. При $\alpha' = 1/10$, например, находим $y' = 2,5 \text{ мм}$; такую величину можно считать удовлетворительной для значения радиуса зоны очень хорошего изображения.

§ 8. Ошибка увеличения (или фокусного расстояния) в приборах, обладающих комой

Когда прибор обладает комой, то максимум дифракционного пятна не совпадает с параксиальным изображением, а слегка смещается в радиальном направлении; это приводит к ошибке в увеличении (или в значении эффективного фокусного расстояния) прибора. Предположим, например, что имеется кома 3-го порядка. Мы видели в гл. 8, § 4, что центральный максимум пятна расположен в точке B'' на расстоянии $B'B'' = 2/3r$ от точки B' , если r — радиус наибольшего кружка комы (фиг. 111). Отсюда

получаем, что действительная величина изображения равна не y' , а $y' + \frac{2}{3}\rho = y'(1 + \frac{2}{3}b\alpha'^2)$, если b — коэффициент комы 3-го порядка. «Внешняя» кома будет увеличивать видимое изображение, а «внутренняя» умень-



Фиг. 111.

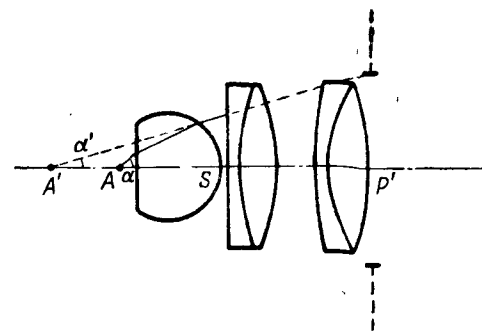
шать его; но этот эффект оказывается значительно меньше, чем вытекает из соображений геометрической оптики. Эта aberrация не имеет значения в обычных приборах, но ее следует учитывать в прецизионных приборах, где необходимо очень точно знать действительную величину изображения (по крайней мере в непосредственной близости от оси).

§ 9. Допустимые децентровки поверхностей при изготовлении приборов

Для определения этих допусков нам достаточно использовать выражения aberrаций децентровки¹⁾ и вывести для них допустимые величины из гл. 8, § 4, приспособляя их соответственно к каждому частному случаю. Мы приведем в качестве примера допустимые величины децентри-

¹⁾ См., например, Н. Н. Губель, Вычисление aberrаций децентрированных систем, Труды ГОИ, XXV, вып. 149 (1956). — Прим. ред.

ровки для линзы-полушара сравнительно сильного «сухого» объектива микроскопа. Этот объектив схематически представлен на фиг. 112; его характеристики следующие: увеличение $G=40,6$, числовая апертура $\sin \alpha=0,63$. Ход лучей в этой системе показывает, что после первой линзы



Фиг. 112

продольная сферическая aberrация $l=-0,43$ мм; параксиальное увеличение, вносимое линзой-полушаром, составляет 2,082, относительное расхождение пучка после линзы-полушара равно 2,208; отступление от условия синусов $\delta g/g=0,06$; положение промежуточного зрачка $A'P'=7,5$ мм.

При этих условиях мы можем перейти к определению допустимых величин децентровки по двум составляющим, определяемым в геометрической оптике: повороту вокруг центра плоскости изображений (иначе говоря, вокруг A'), характеризуемому параметром r из соотношений геометрической оптики; повороту вокруг центра зрачка (P'), характеризуемому параметром P . Деформации поверхности волны, связанные соответственно со сферической aberrацией и комой (если исходить из формул 3-го порядка в промежуточном пространстве, где aberrации не исправлены), определяются следующим образом:

$$\Delta s = \frac{l \sin^2 \alpha'}{4} = 9 \text{ мк},$$

$$\Delta c = y' \sin \alpha' (0,06 - 0,06) \neq 0.$$

Сперва определим допустимую величину r : мы будем пользоваться для этого первым из геометрических равенств¹⁾

$$h_1^4 = h_2^4 - 4rh_2^3 \cos(\varphi_2 - \alpha),$$

которое позволяет переносить aberrации предыдущей части прибора (h_1) на последующую часть (h_2). Принимая максимальное отверстие за единицу, мы можем написать, что если в написанном выше равенстве $\alpha = 0$, то $9 \text{ мк} \times h_1^4 = 9 \text{ мк} \times [h_2^4 - 4rh_2^3 \cos \varphi_2]$ и составляющая кома будет равна величине $36 \text{ мк} \times rh_2^3 \cos \varphi_2$. Эта величина для $h_2 = 1$ (при максимальном отверстии) не должна превышать подлежащий выбору допуск. Мы примем, что в микроскопе, работающем при квазикогерентном освещении, допустима кома порядка $0,3\lambda$: как видно из табл. 7, значение допусков будет порядка $0,85\lambda$ (темная точка), $0,66\lambda$ (темная линия), $0,47\lambda$ (светлая линия). При этом допуске на кому в наиболее неблагоприятном случае (светлая линия) мы потеряем $0,2 \times (0,3/0,47)^2 = 0,08$ величины максимальной освещенности, что является вполне допустимым. Наконец, полагая $\lambda = 0,55 \text{ мк}$, получаем

$$r < \frac{0,3\lambda}{36 \text{ мк}} = \frac{1}{200}.$$

Таким образом, поворот вокруг A' не должен превышать $1/200$ отверстия зрачка, т. е.

$$\alpha' \times \frac{1}{200} \neq \frac{0,3}{200} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Этот угол очень мал и соответствует смещению вершины линзы S на величину

$$SA' \times 1,5 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ мк.}$$

Рассмотрим теперь допустимое отклонение величины ρ : в этом случае оно значительно, поскольку в промежуточном пространстве, где вычисляется максимальная децентрировка, нет комы; действительно, из второго равенства,

¹⁾ См. А. Maréchal, *Imagerie géométrique, Aberrations*, Paris, 1952.

определяющего aberrации децентрировки:

$$h_1^3 y_1 \cos(\varphi_1 - \Psi_1) = h_2^3 y_2 \cos(\varphi_2 - \Psi_2) - \rho h_2^3 \cos(\varphi_2 - \theta) \dots,$$

вытекает, что если коэффициент комы $h_1^3 y_1$ равен нулю, то кома вследствие децентрировки не появится (по крайней мере в первом приближении) при повороте вокруг центра зрачка (параметр ρ). Можно также легко определить все допуски на децентрировку, исходя из результатов расчета прибора, но для практики полезно знать величины лишь некоторых допусков — при расчете можно легко обнаружить те области, где aberrации велики и где децентрировка будет опасна.

§ 10. Методика экспериментальных измерений коэффициента контраста

Старое понятие разрешающей силы приборов малопомалу заменяется понятием коэффициента контраста. Фотографический объектив характеризуют теперь не предельной частотой, которую он может разрешить (последняя иногда трудно определяется), а изменениями множителя контраста в зависимости от пространственной частоты. Для экспериментального определения этой функции можно предложить большое число методов. Мы разделим их на две большие группы: прямые методы и методы, основанные на аналогии.

а) Прямые методы. Они состоят в анализе изображения, даваемого изучаемым объективом. Для этого можно образовать изображение точечного источника или щели и выполнить его гармонический анализ, измеряя поток, проходящий через маску, пропускание которой изменяется по синусоидальному закону. Таким образом, составляется интеграл $\int D(y') \cos(2\pi y'/p) dy'$, который выражает действительную часть преобразования Фурье функции D , и получается элемент функции $d(\mu', \nu')$, которую нужно найти.

Можно также использовать объект периодической яркости, изменяющейся вдоль одной из координатных осей, и исследовать его изображение. Если, например, применить синусоидальную мишуру, то ее изображение бу-

дет также синусоидальным, и для определения модуля d достаточно измерить контраст.

Возвращаясь к обозначениям и результатам гл. 4, § 3, можно сказать, что синусоидальный объект с контрастом C_0 представляется рядом по косинусам

$$\begin{aligned} O(y) &= 1 + C_0 \cos 2\pi \frac{y}{p} = \\ &= 1 + \frac{C_0}{2} \left[h \left(2\pi \frac{y}{p} \right) + h \left(-2\pi \frac{y}{p} \right) \right], \end{aligned}$$

а его изображение [в предположении, что функция d нормирована по условию $d(0) = 1$] представляется в виде

$$I(y') = 1 + \frac{C_0}{2} \left[h \left(\frac{2\pi y}{p} \right) d \left(\frac{1}{p} \right) + h \left(-\frac{2\pi y}{p} \right) d \left(-\frac{1}{p} \right) \right];$$

однако поскольку функция $D(y', z')$ действительна, получаем

$$d \left(-\frac{1}{p} \right) = d^* \left(\frac{1}{p} \right),$$

и если положить

$$d \left(\frac{1}{p} \right) = d_1 + id_2 = \left| d \left(\frac{1}{p} \right) \right| h(\varphi),$$

то будем иметь

$$I(y') = 1 + C_0 |d| \cos \left(\frac{2\pi y'}{p} + \varphi \right).$$

Таким образом, идеальная методика измерений сводится к определению контраста $C_0 |d|$ изображения синусоидальной миры и «дефазировки» (смещения фазы) φ , которая возникает вследствие поперечного сдвига изображения (см. фиг. 37). Эта дефазировка появляется только при наличии несимметричных aberrаций (кома), так как если пятно изображения точки симметрично (сферическая aberrация, астигматизм), то величина $d(1/p)$ будет действительна. Рассмотрим теперь различные возможности для экспериментальных установок.

Желательно, чтобы мира была синусоидальной и чтобы пространственная частота легко менялась. Для этого можно использовать простую периодическую миру (например, П-образную миру, описываемую функцией $1 + \Pi(y/p) = 1 + 4 [\sin(2\pi y/p) + \dots] / \pi$ при единственном условии

исключения влияния ее гармоник, например, путем пропускания через электрический фильтр, если применяется фотоэлектрический метод. Изменение пространственной частоты — более трудная задача. Можно пользоваться мирами, в которых происходит плавное изменение частоты в зависимости от абсциссы y (например, мира Национального Бюро Стандартов, представленная на фиг. 113). Однако преобразование Фурье такого объекта простым образом не выражается; для получения достаточно точных результатов пространственная частота должна меняться медленно. Можно, например, обмотать этой мирой вращающийся круговой цилиндр, часть поверхности которого (постоянной длины) служит объектом (K. Rosenhaeuer, 1957).

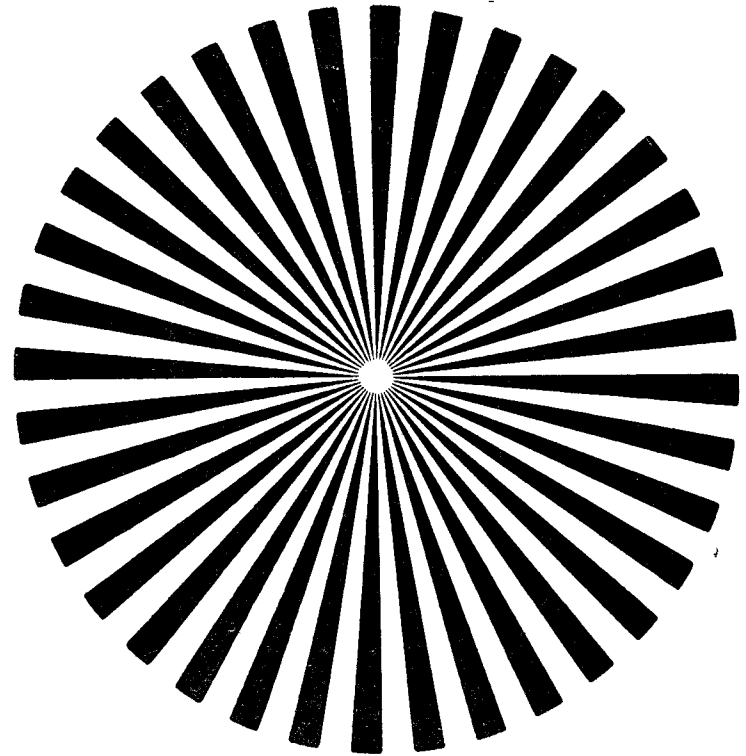
Возможно также использовать радиальную миру (E. Ingelstam, E. Djurle, B. Sjögren, 1956), представленную на фиг. 114, часть которой, расположенная в пределах прямоугольного отверстия, может быть использована в качестве объекта. Меняя положение центра вращения, можно изменять пространственную частоту; здесь также объект не является периодическим в направлении Oy ; сходимость штрихов может внести ошибку, возрастающую по мере приближения к центру (высокие частоты).

Другой довольно удобный прием состоит в использовании муаровых полос. Накладывая друг на друга две периодические системы полос такого вида, какие применяются для фотографии, можно вызвать появление полос, пространственная частота которых в первом приближении пропорциональна углу между линиями систем (A. Lohmann, 1959); при этом появившиеся полосы обладают довольно малым числом гармоник.

Можно также изменять пространственную частоту с помощью оптических систем переменного увеличения (P. Lacombe, 1958) при условии, чтобы качество системы было достаточно хорошим.

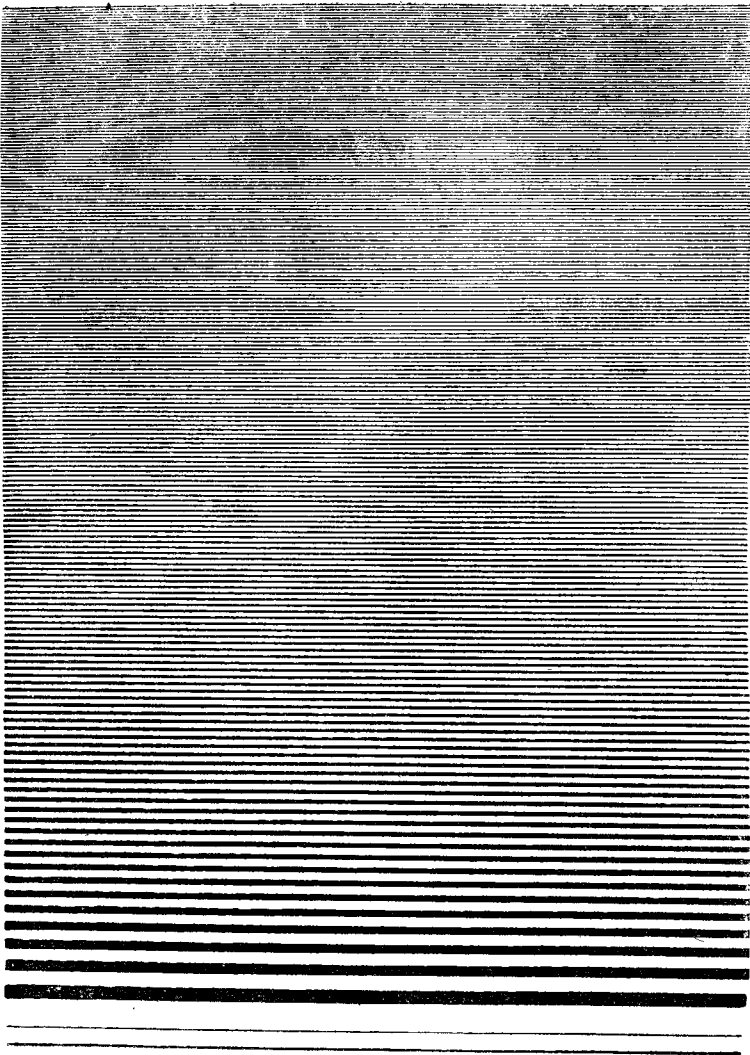
Надо отметить, что все рассмотренные приемы обладают одним общим недостатком: периодический объект в соответствии с математическим определением должен быть бесконечно протяженным. В действительности он ограничен, и в результате получается вредное расплывание спектра частот. Пусть $f(y)$ — используемая мира; функцию

$f(y)$ можно рассматривать как произведение периодической штриховой бесконечно протяженной функции $f_1(y)$ и прямоугольной функции $f_2(y)$ (изображающей отверстие, которое ограничивает используемую область мира, т. е.



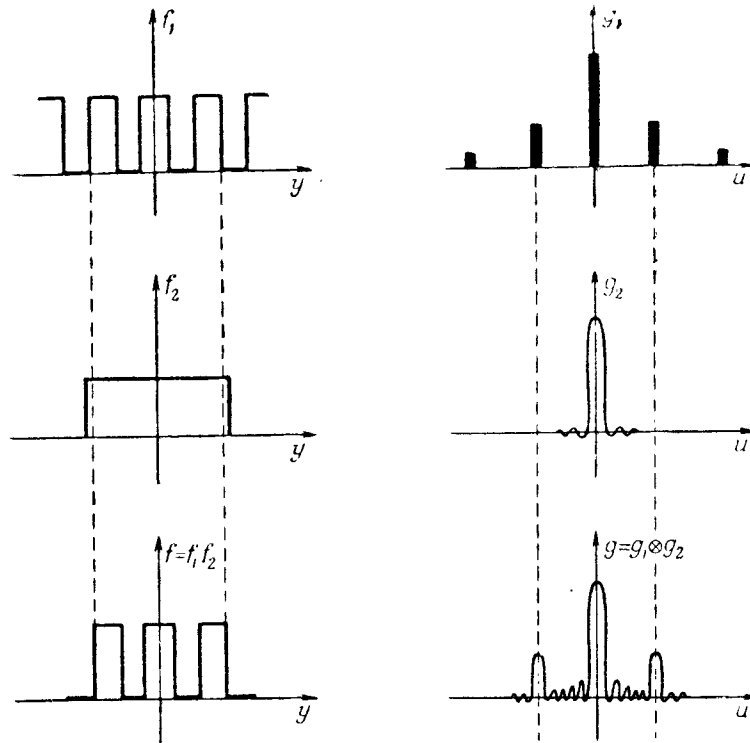
Фиг. 114.

число штрихов). Преобразование $g(u)$ функции $f(y)$ получается как свертка преобразований $g_1(u)$ и $g_2(u)$ функций f_1 и f_2 (фиг. 115); g_1 состоит из локализованных сигналов с частотами k/p , кратными основной частоте, а g_2 выражается функцией $\text{sip } n\text{при}/n\text{при}$, где n — используемое число штрихов. Легко заметить, что свертка g_1 и g_2 дает неприятное размазывание функции g около интересующих нас частот (в частности, около $1/p$). Это размазы-



Фиг. 113.

вание в первом приближении можно считать равным величине $\Delta u = 1/np$; оно будет уменьшаться по мере увеличения числа штрихов n . Вредно пользоваться мирами с



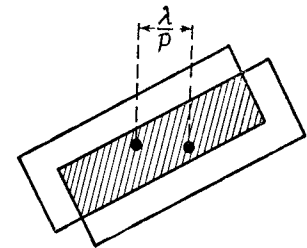
Фиг. 115.

небольшим числом штрихов, так как уменьшение функции $\sin x/x$ происходит сравнительно медленно и измерения какой-либо частоты могут быть значительно искажены соседними частотами. Вполне естественно приходит мысль об использовании такой маски f_2 , чтобы ее преобразование Фурье было быстро затухающим; эта задача аналогична задаче об аподизации, и ее можно решить, в частности, с помощью маски, построенной по кривой Гаусса (Р. Ласотте, 1960). Использование маски по кривой

Гаусса может также улучшить и «спектр» радиальной миры, или миры с непрерывным изменением частоты.

Измерение контраста изображения можно выполнить, исследуя изображение с помощью щели, помещенной перед фотоэлектрическим приемником; усилитель должен быть селективным, чтобы исключить гармоники.

Можно также на глаз сравнить контрасты двух смежных полей для более точной оценки их равенства; любопытно отметить, что такая оценка может быть осуществлена с очень большой точностью (порядка нескольких процентов). Может оказаться поэтому выгодным менять контраст в дополнительном пучке сравнения, освещенность которого остается постоянной. Симон (J. Simon, 1959) предложил использовать с этой целью зрачок не круглый, а имеющий различные размеры в разных направлениях; например, для прямоугольного зрачка автокорреляционная функция (общая часть площадей двух прямоугольников) сильно меняется в зависимости от изменения ориентации прямоугольника относительно направления штрихов миры (на фиг. 116 они предполагаются вертикальными). Эта автокорреляционная функция фактически оказывается равной площади общей части двух прямоугольников, центры которых находятся на фиксированном расстоянии λ/p , в то время как их ориентация относительно миры меняется.



Фиг. 116.

б) Методы, основанные на аналогии. Они состоят в представлении автокорреляционного интеграла, который позволил бы получить $d(\mu', \nu')$, исходя из $F(\beta', \gamma')$, с помощью светового потока. С этой целью Гопкинс (1955) предложил использовать интерферометр Майкельсона, настроенный так, чтобы волны, исходящие из исследуемого прибора, интерферировали между собою. При этом вводится еще поперечное смещение, пропорциональное пространственной частоте, и изменение оптического пути δ , линейно зависящее от времени.

Амплитуда в одной из точек зрачка получается тогда по формуле

$$F(\beta', \gamma') + F(\beta' - \mu' \lambda, \gamma') e^{ik\delta},$$

а полный поток, проходящий через зрачок, можно написать в виде

$$\iint |F(\beta', \gamma') + F(\beta' - \mu' \lambda, \gamma') e^{ik\delta}|^2 d\beta' d\gamma'.$$

Изменение этого потока в зависимости от δ (или от времени) представляется значениями интеграла $\iint F(\beta', \gamma') F^*(\beta' - \mu' \lambda, \gamma') d\beta' d\gamma'$, т. е. величиной d . Осуществление этого остроумного метода аналогична на практике представляет значительные трудности.

Номарский (G. Nomarski, 1959) и Стил предложили более простые и непосредственные методы, основанные на интерференции поляризованного света. Они могут быть с особой пользой применены к объективам микроскопа.

§ 11. Шум фона в фотографии

При исследовании фотографических клише с помощью микрофотометра, даже в том случае, когда плотность клише кажется на глаз равномерной, обнаруживаются значительные флуктуации светового потока вокруг некоторой средней величины. Вид кривой, построенной по показаниям микрофотометра, представляет поразительную аналогию с кривой электрического шума фона, наблюдаемого на катодном осциллографе.

Случайные стационарные функции (функции, значения которых в каждый момент определяются законом вероятности, не зависящим от времени) встречаются при изучении шума фона в электронике. Можно эти функции применять и для фотографических процессов. В этом случае «шум фона» является следствием изменений прозрачности, обусловленных зернистой структурой фотографического изображения.

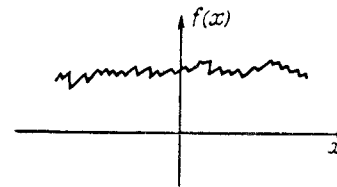
Уместно прежде всего заметить, что микрофотометр регистрирует показания при помощи малого светового зайчика, размеры которого конечны. Следовательно,

определить шум фона очень трудно, так как регистрируемые флуктуации существенно зависят от размеров зайчика. Очевидно, что чем больше зайчик, тем больше и число охваченных фотометрических элементов; флуктуации быстро уменьшаются. Селвин показал, что они изменяются как $1/\sqrt{S}$, где S — площадь зайчика; этот результат находится в согласии с общим результатом, известным из статистики.

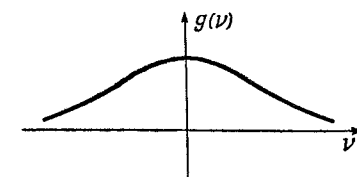
Выразим шум фона случайной функцией $f(x)$, представляющей энергетическое изменение прозрачности. Функция $f(x)$ будет описывать распределение, полученное на микрофотометре с гипотетическим предельно малым зайчиком, размеры которого не превышают размеры зерна (фиг. 117). Спектр функции $f(x)$ вычисляется с помощью преобразования Фурье

$$g(\nu) = \int f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx,$$

пределы интеграла определяются размерами наблюдаемого поля, ν представляет собой пространственную частоту (фиг. 118). Если флуктуации шума фона



Фиг. 117.



Фиг. 118.

«сжаться», то функция $g(\nu)$ растянута. Когда «сжатие» флуктуаций уменьшается, спектр $g(\nu)$ становится более узким и вытянутым вверх (высокие «частоты» отсутствуют).

Функция $g(\nu)$ вполне пригодна для характеристики шума фона. К сожалению, функции $g(\nu)$ и $f(x)$ случайны. Однако их можно связать с некоторыми конкретными функциями, определяемыми из измерений.

Рассмотрим функцию автокорреляции

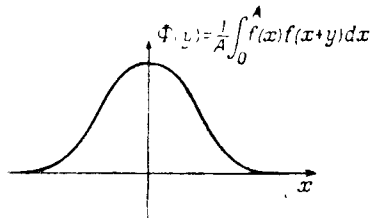
$$\Phi(y) = \frac{1}{A} \int_0^A f(x)f(x+y) dx \text{ (для } A \text{ очень большого);}$$

она уточняет, насколько функция $f(x+y)$ абсциссы $x+y$ зависит от значения функции $f(x)$ абсциссы x .

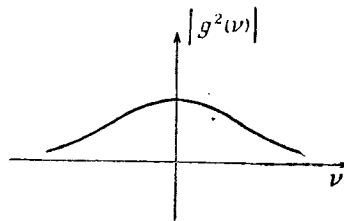
Функция автокорреляции $\Phi(y)$ есть преобразование Фурье функции $|g^2(v)|$:

$$T[\Phi(y)] = \frac{1}{A} |g^2(v)|,$$

где символ T означает, что функции $|g(v)|$ и $\Phi(y)$ суть преобразования Фурье одной в другую. «Энергетический» спектр флуктуаций равен преобразованию Фурье функции автокорреляции. Эти две функции представлены на фиг. 119 и 120.



Фиг. 119.



Фиг. 120.

Придадим пятну форму щели, и пусть $F(x)$ будет функция «щель» (фиг. 121). Она принимает значения $F(x)$ в интервале от $-a/2$ до $+a/2$ и равна нулю вне этого интервала. Ее спектр равен

$$G(v) = \int F(x) e^{-2\pi i v x} dx.$$

Форма кривой $G(v)$ приведена на фиг. 122. Если a возрастает, т. е. ширина пятна увеличивается, то спектр становится более острым. Если же a уменьшается, он уширяется.

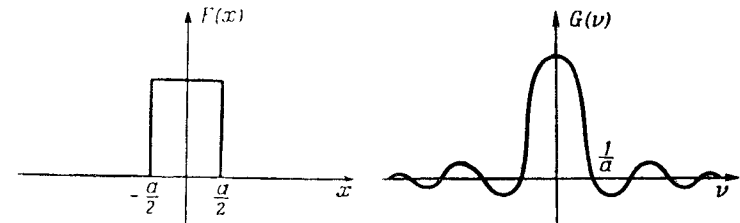
Пусть $f_s(x)$ — кривая флуктуаций, когда зайчик имеет конечную площадь S . Имеем

$$f_s(x_0) = \int_{x_0 - \frac{a}{2}}^{x_0 + \frac{a}{2}} f(x) dx = \int f(x) F(x - x_0) dx.$$

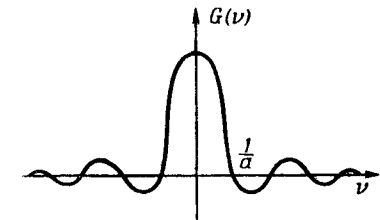
Так как это соотношение представляет свертку, то преобразование Фурье функции $f_s(x)$ равно произведению преобразований Фурье функции «щель» $F(x)$ и функции $f(x)$

$$T[f_s(x)] = G(v)g(v).$$

Если зайчик очень узок, то его спектр $G(v)$ будет сильно растянут и будет мало влиять на



Фиг. 121.



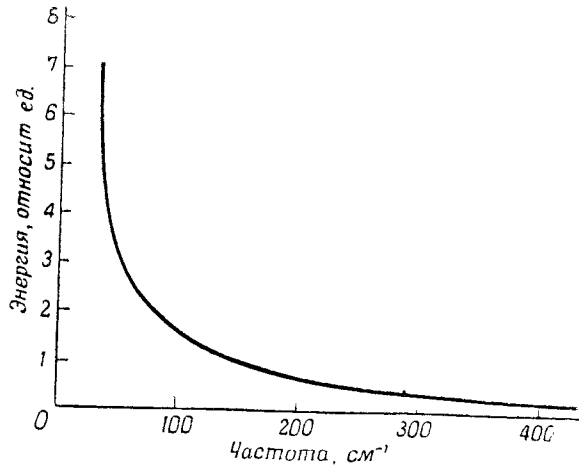
Фиг. 122.

произведение $G(v)g(v)$, которое остается близким к $g(v)$. Функция $f_s(x)$, данная измерениями, приближается к виду функции $f(x)$. Если зайчик будет расширяться, то могут вступить в игру нулевые значения $G(v)$ и кривая $G(v)g(v)$ начнет сильно отличаться от $g(v)$ (теряется информация о высоких частотах). Со своей стороны, Кларк-Джонс вновь пришел к закону Селвина в виде \sqrt{S} , предполагая, что $g(v)$ практически постоянна в полезной области.

Различные авторы, среди которых можно назвать Фризе, Ингелстама, Цвейга, Филджета, пытались путем измерений получить значение $|g^2(v)|$. Оказалось, что для пространственных частот, содержащихся в пределах между $0,01 \text{ мк}^{-1}$ (т. е. $p = 100 \text{ мк}$) и $0,1 \text{ мк}^{-1}$ (т. е. $p = 10 \text{ мк}$), функция $|g^2(v)|$ практически постоянна, Ин-

гелстам нашел, что функция $|g^2(\nu)|$ уменьшается при приближении размеров зайчика к размерам зерна.

На фиг. 123 показана экспериментальная кривая. Пре-
дыдущие результаты относятся, конечно, к равномерно

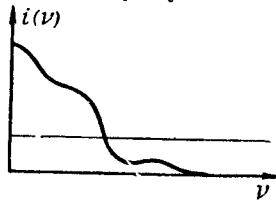


Фиг. 123. Энергия (в относительных единицах) в зависимости от пропущенных частот.

Эмульсия «Plus X»; оптическая плотность изображения $d = 0,3$.

экспонированной пластинке. Но на практике получают изображение, на которое накладывается шум, изменяющий его, и вопрос становится более сложным.

Именно фон обычно ограничивает предел разрешения: детали, размеры которых не превышают размеров зерен, «тонут» в них и исчезают. Чтобы узнать практический предел разрешения, можно обратиться к схеме, представляющей пропускание пространственных частот.



Фиг. 124.

Предположим, что объект не обладает преобладающими частотами: заметных скачков в его спектре нет. При этих условиях спектр изображения в зависимости от пространственных частот может быть представлен схематически кривой фиг. 124. Спектр

зерна (тонкая горизонтальная линия) имеет приблизительно постоянное значение, и все частоты, амплитуды которых не превышают амплитуду шума, практически будут исключены. Предельная частота зависит поэтому от уровня шума.

§ 12. Фотографические изображения; пропускание пространственных частот и техника компенсационного фильтрования

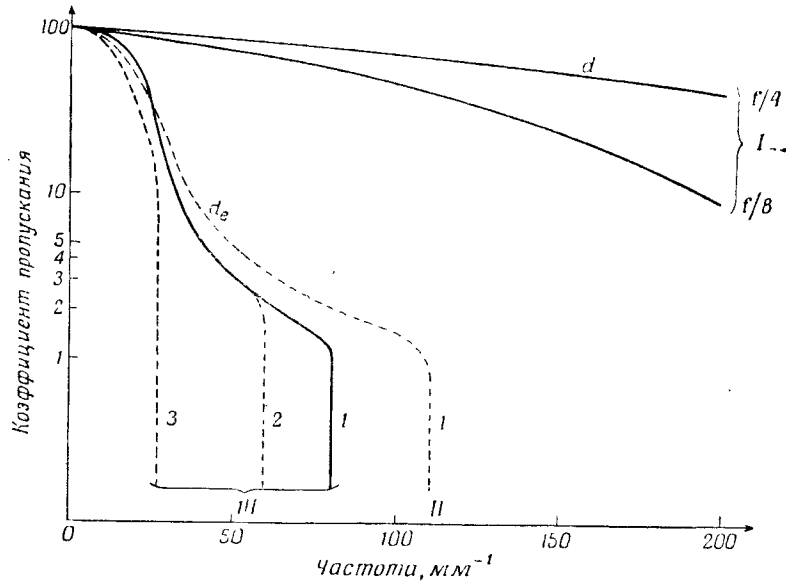
Образование фотографического изображения можно схематически описать следующим образом. Объектив дает оптическое изображение объекта, характеризуемое некоторым законом распределения освещенности $I(y', z')$. Это оптическое изображение получается на фотографической эмульсии, где оно претерпевает рассеяние; следовательно, получается новое распределение светового потока, которое можно назвать действующим изображением. Действующее изображение ответственно за фотохимические процессы, которые обуславливают образование окончательного изображения, — некоторые зерна бромистого серебра приобретают способность к проявлению и их совокупность образует после проявления фотографическое изображение.

Можно принять, что переход от оптического изображения к действующему изображению является линейным процессом. Действительно, если осветить одну точку эмульсии, то вследствие рассеяния света произойдет перераспределение светового потока по закону, который может быть охарактеризован функцией $D_e(y', z')$; действующее изображение возникает согласно свертке функций оптического изображения I и закона рассеяния D_e , свойственного эмульсии. Можно также сказать, что преобразование Фурье действующего изображения подвергается новому фильтрованию с помощью функции d_e , преобразованной из D_e .

Дальнейшие процессы, к сожалению, уже не линейны; коэффициент пропускания после проявления не является линейной функцией от поглощенного потока. Следовательно, нужно осторожно применять теорию пропускания пространственных частот, за исключением случаев, когда

соблюдаются условия линейности, что, в частности, имеет место при слабом контрасте изображения, — в интервале слабых освещенностей закон почернения можно всегда считать линейным.

Можно, следовательно, принять, что при переходе от объекта к действующему изображению происходят два



Фиг. 125. Зависимость коэффициента пропускания от частоты.

I — совершенный объектив, *II* — фотопластинка Microfilm Lumière, *III* — фотопластинка Panatomic.

последовательных фильтрования: фильтрование прибором, определяемое функцией $d(\mu', \nu')$, и фильтрование фотографической эмульсией, определяемое функцией $d_e(\mu', \nu')$; общий закон фильтрования представляется произведением dd_e .

На фиг. 125 по оси ординат отложены коэффициенты пропускания эмульсии (контраст изображения, деленный на контраст объекта) и по оси абсцисс — частоты в мм^{-1} . Объектом является мира Национального Бюро Стандартов (Вашингтон). Контраст определяется по разности

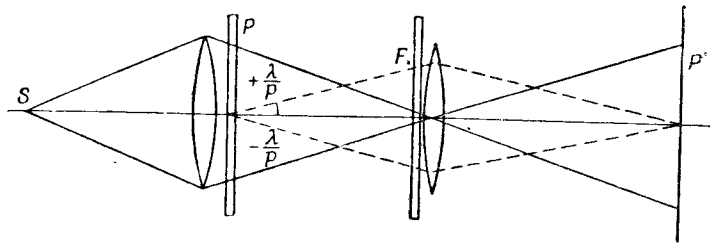
плотностей на мире. Две кривые в верхней части фиг. 125 (кривые *I*) определяют коэффициенты пропускания совершенного объектива для двух отверстий. Можно заметить, что пропущенные пространственные частоты вообще сравнительно слабые — качество фотографического объектива, несомненно, позволяет пропустить более широкую полосу частот.

Отсюда естественно возникает мысль, что новое фильтрование пространственных частот, осуществленное в фотографическом изображении, может его улучшить. Действительно, законы фильтрования — оптический $[d(\mu', \nu')]$ и эмульсии $[d_e(\mu', \nu')]$ — оба являются законами «пропускания низких частот», и различные частоты постепенно ослабляются вплоть до той, при которой пропускание равно нулю (например, при предельной оптической частоте). Но мы видели, что контраст подробностей в изображениях в сильной степени зависит от хода закона фильтрования — даже стигматический прибор с круглым зрачком дает для изображения маленькой темной линии контраст $\varepsilon/(1,2\lambda/\alpha')$ в случае некогерентного освещения и приблизительно вдвое больше при когерентном освещении. Однако полная ширина полосы пропускания частот при некогерентном освещении равна $4\alpha'/\lambda$ и только $2\alpha'/\lambda$ при когерентном освещении пучком, параллельным оси. Следовательно, изменяя множитель контраста в пределах полосы пропускания, можно заметно влиять на контраст участков изображения. Предыдущие соображения наводят на мысль, что преобразование этого закона, исходя из случая некогерентного освещения, можно, в частности, четверо увеличить контраст изображения маленькой темной линии.

Способы для осуществления такого фильтрования могут быть самыми разнообразными. Если фильтрование требуется лишь в одном направлении, можно применить метод, используемый в телевидении, согласно которому воздействуют на видеосигнал электрическим фильтрованием различных частот.

Если требуется двумерное фильтрование, лучше предусмотреть оптические способы. Можно осуществить, например, новую свертку изображения по закону, который привел бы к компенсирующему фильтрованию. Та-

ким образом приходят к давно известному способу «не-резкой маски». Можно выполнить такое же компенсационное фильтрование и при когерентном освещении. На



Фиг. 126.

фиг. 126 представлена установка, использованная Кросом (P. Crose, 1956). Негатив, предназначенный для фильтрования, освещается с помощью источника S ; в плоскости изображения источника S получается распределение амплитуд, которое является преобразованием Фурье от распределения коэффициента пропускания амплитуд на снимке. Составляющая с частотой $1/p$ на фотографическом отпечатке даст два сигнала в направлениях, образующих углы $\pm \lambda/p$ с осью. На этот «спектр пространственных частот» можно воздействовать, ослабляя с помощью поглощающего фильтра слишком сильные (главным образом низкие) частоты. Таким образом получают отфильтрованное изображение P' . Для этого достаточно поместить в плоскости «спектра» амплитудный фильтр F ; если он имеет минимум пропускания в центре (низкие частоты), то можно получить улучшение контраста участков изображения, как это видно из фото XII (K. Dietzel). Фото XIII иллюстрирует, как можно воссоздать контраст букв текста, слегка размытого дефокусировкой (J. Tsujuchi). Наконец, если полностью устранить некоторые частоты (при черно-белом фильтре), мы возвратимся к известным опытам Аббе, которые могут быть использованы, в частности, для устранения мешающих частот; на фото XIV представлены (M. Magquet) результаты опытов по устранению сетки на фотографии. Таким образом, при когерентном освещении можно выполнить

фильтрование пространственных частот, если только есть возможность изготовить амплитудный фильтр, отвечающий заданному закону распределения коэффициентов пропускания. Этот фильтр не должен дефазировать (в противном случае может возникнуть нежелательное действие фазового контраста), и, кроме того, если расстояние до клише не очень велико, то фильтру нужно придать небольшие размеры (например, полуширина равна 1 мм для пространственной частоты $1/p = 10$ периодов на 1 мм на клише, а расстояние между клише и фильтром составляет 200 мм). Эти фильтры можно изготовить фотографическим способом, но при этом следует исключить дефазирование, вносимое иммерсией.

При выборе закона фильтрования приходится решить тонкий вопрос. Поскольку полоса пропускаемых пространственных частот дана прибором, с помощью которого выполнен снимок, каков должен быть закон распределения коэффициентов контраста в пределах этой полосы для получения наилучшего изображения? Прежде всего нужно условиться, что понимать под качеством изображения; мы теперь приведем некоторые указания по этому поводу.

§ 13. Соответствие между объектом и изображением и выбор оптимального закона фильтрования

Напомним, что между объектом и изображением существует соотношение свертки

$$I = O \otimes D,$$

а между преобразованиями Фурье этих функций — соотношение «фильтрования»

$$i = o \cdot d.$$

Функция d , являющаяся функцией автокорреляции функции $F(\beta', \gamma')$, равной нулю вне некоторой конечной области (отверстия зрачка), также равна нулю вне некоторой конечной области. Если зрачок круглый и угловой радиус этой области равен α' , то областью d является круг радиусом $2\alpha'$. Иначе говоря, изображение не содержит высоких частот. Отсюда вытекает, что изменения освещен-

ности $I(y', z')$ не могут обладать произвольно крутыми спадами.

При изучении этого вопроса Арсак (J. Arsac, 1956) указал, что можно воспользоваться одной теоремой Бернштейна, расширенной Боасом на интересующий нас случай¹⁾.

Если функция $g(u)$ равна нулю вне интервала конечной протяженности

$$-L \leq u \leq +L,$$

то производные ее преобразования Фурье ограничены.

Уточним это положение; пусть M — верхняя граница функции $|f(x)|$; тогда

$$|f^{(p)}(x)| \leq (2\pi L)^p M.$$

Как частный случай рассмотрим $f(x) = \cos(2\pi Lx)$; имеем $M = 1$ и

$$f^{(p)}(x) = (2\pi L)^p \cos\left(2\pi Lx + p\frac{\pi}{2}\right);$$

$f^{(p)}(x)$ действительно достигает величины $(2\pi L)^p$. Граница, определенная теоремой Бернштейна, является, следовательно, достаточно точной, а значит, и достижимой.

Рассмотрим теперь функцию двух переменных. Легко установить следующий результат. Если область A существования функции $G(u, v)$ может быть заключена в пределах полосы $-L_x \leq u \leq +L_x$, то

$$\left| \frac{\partial^p F}{\partial x^p} \right| \leq (2\pi L_x)^p M. \quad (11.4)$$

Так как можно всегда с помощью операции поворота привести ось x в любое заранее данное направление при условии выполнения такого же поворота осей в плоскости u, v , предыдущий результат остается справедливым для любого направления.

Если, в частности, область A вписана в круг радиусом R с центром в начале координат, то для всех направлений мы получим следующее выражение для функции I , представляющей оптическое изображение:

$$\left| \frac{\partial^p I}{\partial x^p} \right| < (2\pi R)^p M. \quad (11.5)$$

¹⁾ См. Boas, Journ. London Mathem. Soc., 12, 164 (1937).

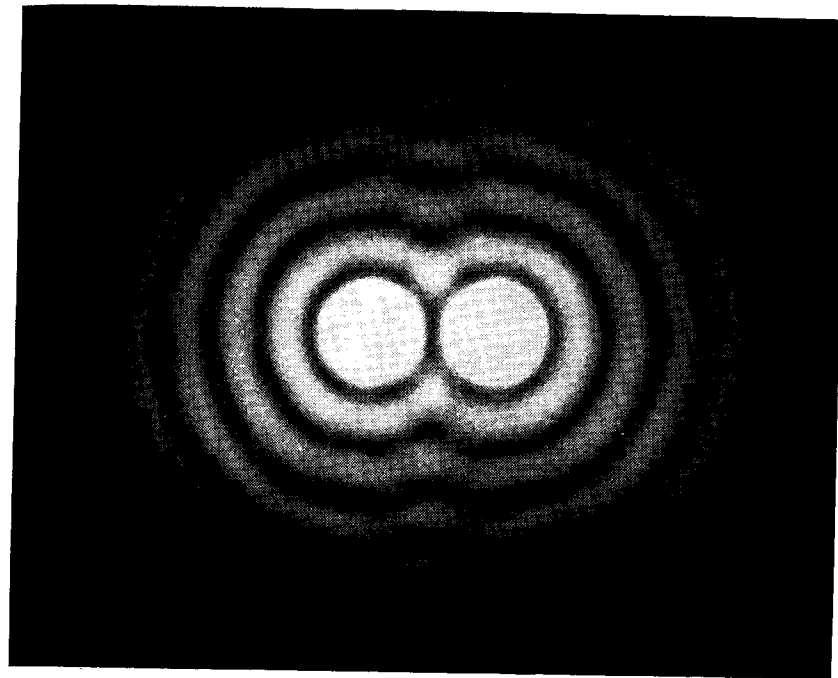


Фото X. Два близких точечных источника.

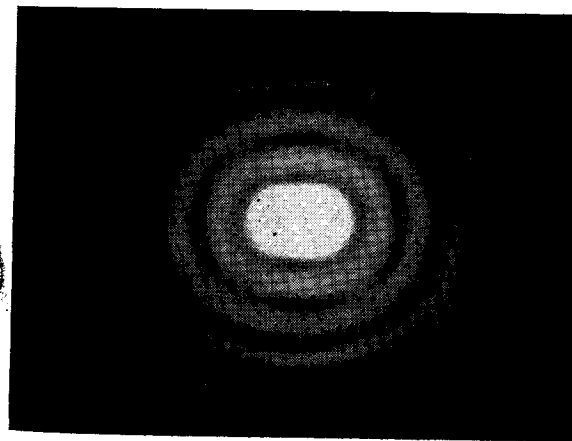
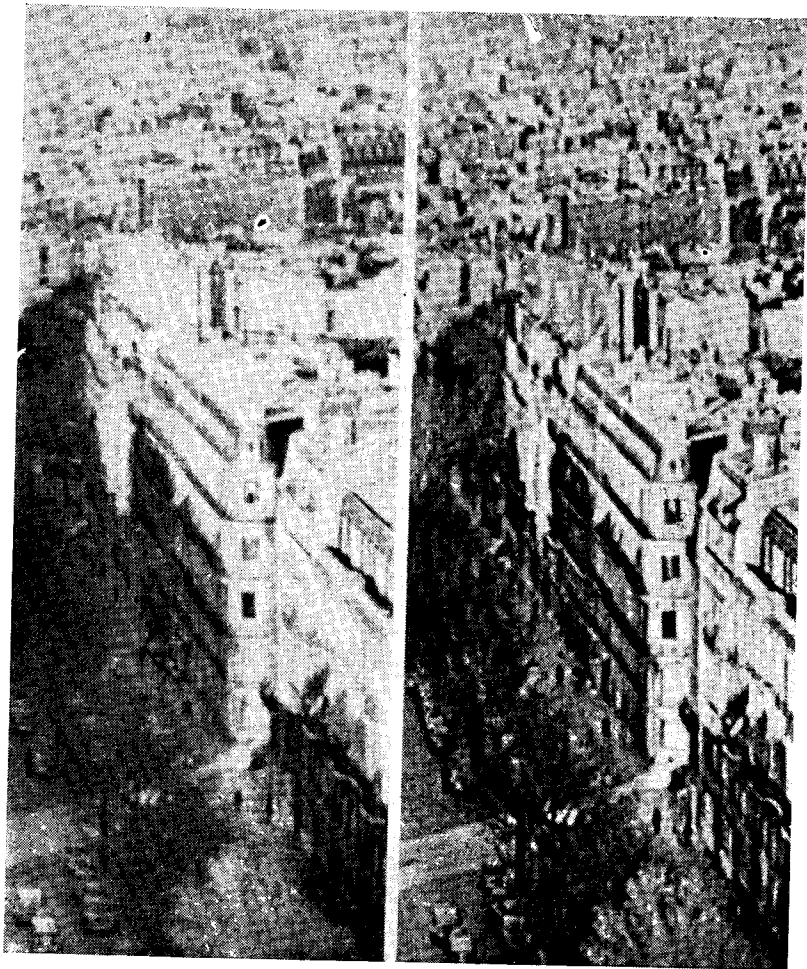
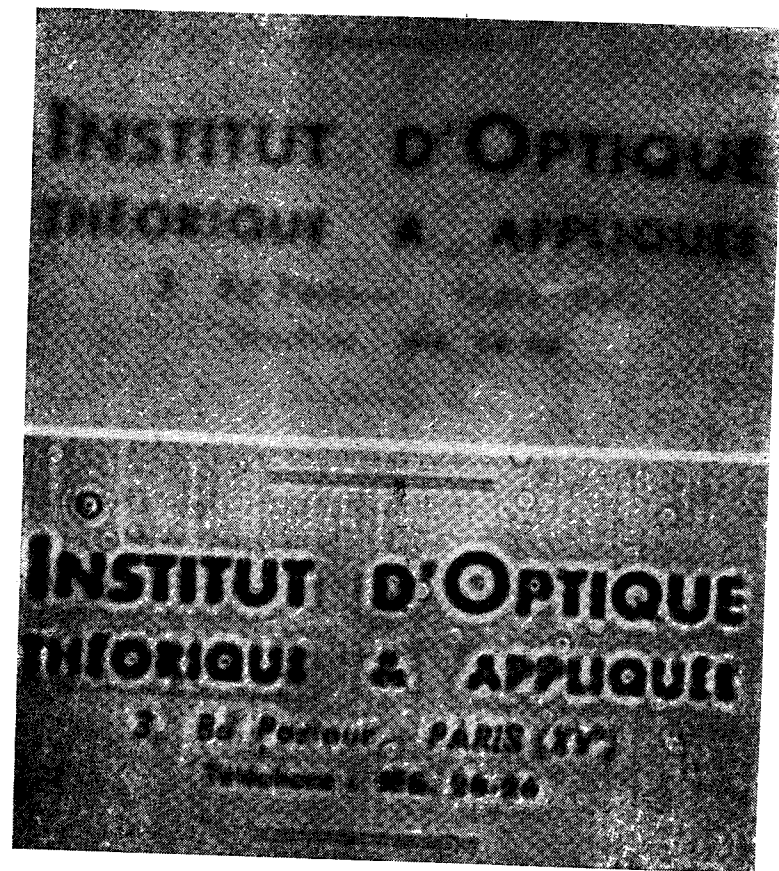


Фото XI. Два точечных источника на пределе разрешения



Φοτο XII.



Φοτο XIII.



Фото XIV.

Отметим, что функция I является существенно положительной. Функция $I - M/2$ имеет свое преобразование Фурье, вписанное в область A ; она обладает теми же производными, что и I . Ее модуль ограничен величиной $M/2$. Поэтому можно во всех предыдущих формулах заменить M на $M/2$.

Дадим некоторые практические приложения этих результатов.

а) Обозначим через $I(M_1)$ и $I(M_2)$ значения освещенности в каких-либо двух точках изображения. Используя теорему о конечном приращении, находим

$$|I(M_1) - I(M_2)| < \pi R \overline{M_1 M_2} M. \quad (11.6)$$

Рассмотрим изображение границы равномерно освещенного поля. Освещенность на предмете принимает последовательно значение 0 и M . Освещенность на изображении будет представлена подобными изменениями M . Сопоставим M_1 области $I(M_1) = 0$ и M_2 освещенной области $I(M_2) = M$. Тогда из (11.6) имеем $1 \leq \pi R M_1 M_2$, откуда

$$M_1 M_2 > \frac{1}{\pi R}.$$

Освещенность не может перейти от нулевого к максимальному значению на интервале более коротком, чем $1/\pi R$, где R — максимальная пропущенная пространственная частота. Поскольку $R = 2\alpha'/\lambda$, то минимальный интервал равен $(1/\pi)(\lambda/2\alpha')$; это согласуется с заключением гл. 5, § 2, где было найдено, что интервал $\Delta y'$, соответствующий максимальному спаду кривой, равен $3\pi\lambda/16\alpha'$. Это приблизительно соответствует разрешающей силе прибора.

б) Аналогично предыдущему получаем

$$|I(M_1) + I(M_2) - 2I(M_0)| < \frac{1}{2} (\pi d R)^2 M, \quad (11.7)$$

где M_0 — середина сегмента $M_1 M_2$ и d — длина сегмента $M_1 M_2$.

Рассмотрим дифракционное пятно прибора. Пусть значение центрального максимума пятна равно M_0 , и выбо-

рем значения M_1 и M_2 с одной и с другой стороны от этого максимума с таким расчетом, чтобы

$$I(M_1) = I(M_2) = \frac{1}{2} M.$$

Тогда из соотношения (11.7) следует, что $d \gg \sqrt{2}/\pi R$ [и $(\sqrt{2}/\pi)(\lambda/2\alpha')$ для круглого зрачка]. Но d — ширина полумаксимума пятна рассеяния, т. е. практически разрешающая сила прибора. Следовательно, существует прямая зависимость между разрешающей силой и предельной частотой функции фильтрации прибора.

Качество изображения. Оптический прибор дает изображение I объекта O . Назначение прибора состоит в том, чтобы изображение оказалось насколько возможно подобным объекту. Поэтому существенный интерес представляет изучение различий между объектом и изображением. Это изучение можно вести с двух точек зрения:

а) **Общая я.** Важны не различия для каждой точки, а только некоторое среднее значение их. Тогда следует брать в качестве критерия среднюю квадратичную разность между объектом и изображением. Это — классическая точка зрения. Оптимальной функцией фильтрации $d(u, v)$ является функция, постоянная в области A , где она отлична от нуля. В этом случае изображение идентично с объектом, если только объект не содержит частот, превышающих предельную частоту прибора.

б) **Местная я.** Интерес представляют теперь различия между объектом и изображением в каждой точке изображения. Это приводит к более тонкому анализу дефектов изображения. Математический аппарат, необходимый для этого, становится значительно более сложным. При изучении исходяют из свойств пятна рассеяния $D(y', z')$, ход изменения которого всегда имеет следующий характер: максимум при $y' = z' = 0$, более или менее быстрое затухание при $y' \rightarrow \infty$ и $z' \rightarrow \infty$. Изложим кратко ход решения.

Для простоты рассмотрим случай одного измерения:

$$I(y') = O \otimes D = \int_{-\infty}^{+\infty} O(y' - y) D(y) dy.$$

Объект O , равномерно освещенный, дает равномерно освещенное изображение; можно выбрать такие единицы, что эти освещенности будут измеряться одним и тем же числом; для этого нужно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D(y) dy = 1.$$

Разность $I - O$ тогда можно выразить интегралом

$$I - O = \int_{-\infty}^{+\infty} [O(y' - y) - O(y')] D(y) dy.$$

Величина разности зависит: в области, где $D(y)$ является максимумом, — от величины $O(x - y) - O(x)$ около точки $y = 0$, т. е. от регулярности функции объекта около точки x ; вне этой области — от скорости затухания функции $D(x)$. Эти рассуждения приводят к следующим интересным особенностям.

1°. Разность уменьшается, когда функции D быстро убывают. Если D убывает на бесконечности как $1/x^{\alpha+1}$, то в лучшем случае можно достичь разности порядка $1/R^{\alpha}$, где R — предельная частота. Но скорость убывания D связана с регулярностью функции $d(u)$, рассматриваемой на всей прямой (u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$). Если d имеет разрыв первого рода (например, d постоянна между $-R$ и $+R$ и равна нулю вне этого промежутка), то D убывает как $1/x$, т. е. $\alpha = 0$ и разность не имеет никаких границ. Это следствие явления Гиббса; вблизи от точки разрыва функции O функция I представляет паразитные колебания, амплитуда которых не убывает, если увеличить R . Если функция d имеет особую точку, то D возрастает как $1/x^2$ и разность будет порядка $1/R$. Этот случай присущ большинству приборов, зрачок которых не имеет резких темных краев (освещенность не равна нулю в непосредственном соседстве с краями зрачка).

2°. Уточнение подобия между объектом и изображением имеет местный характер; другими словами, разность в некоторой точке зависит от регулярности функции объекта только в малой области, окружающей эту точку. Если,

например, функция объекта претерпевает разрыв первого рода (край равномерно освещенного поля), то имеется малая возмущенная область с той и с другой стороны точки. Интересующая нас область имеет некоторую протяженность, сравнимую с разрешаемым интервалом прибора (она может превышать ее в несколько раз); этот интервал можно уменьшить, увеличивая регулярность функции d . Это хорошо согласуется с объяснением появления дифракционных полос, окружающих все места резких изменений на объекте.

3°. Имеется «насыщение аппроксимации». Если функция D задана, то разность уменьшается с ростом регулярности функции объекта. Но это уменьшение не беспредельно; в этом и заключается насыщение. Насыщение уменьшают, увеличивая число производных функции $d(u)$, равных нулю при $u=0$. Не насыщаются только функции d , имеющие постоянное значение вокруг точек $u=0$, — это, впрочем, случай частичной когерентности при слабых контрастах (см. гл. 7, § 9). Для этих функций не существует нижнего предела разности. При этом объект и изображение идентичны. Здесь мы вновь находим результат, который получили, исходя из средней квадратичной разности. Необходимо отметить, что если функцию D искусственно поддерживать на положительном уровне, то нельзя получить $d'''(0)=0$. Для классических оптических приборов всегда имеется насыщение аппроксимации. Или, точнее, на изображении всегда существует точка, где разность объект — изображение достигает величины порядка $1/R^2$ при наилучших условиях.

4°. Теорема Бернштейна вносит в этот вопрос некоторую ясность. Там, где у функции объекта имеются производные более высоких порядков, значения которых выходят из пределов, определяемых теоремой Бернштейна, неизбежно возникает заметная разность, поскольку производные от изображения не могут превысить эти пределы.

Таким образом, разрыв первого рода всегда ведет к разности, значение которой составляет до половины величины разрыва функции объекта в непосредственном соседстве с ним; то же самое происходит в областях, где велики первые производные.

Оптимальная форма функции фильтрации. В случае, когда шум фона не играет определяющей роли в вопросе разрешения, определение оптимальной формы функции фильтрации зависит от выбранного критерия для оценки качества изображения. Если за этот критерий выбрать минимум средней квадратичной разности между объектом и изображением, то оптимальная функция будет постоянна в пределах некоторой полосы и равна нулю вне ее. Этот выбор может оказаться весьма неудачным, если освещенность объекта быстро изменяется.

Если необходимо получить возможно лучшее качество изображения в каждой точке, то следует устранить угловую точку, находящуюся в начале обычно встречаемых функций фильтрации. Тогда качество изображения улучшается в тех частях, где объект представляет сильные изменения освещенности на небольших интервалах, или там, где функция O имеет значительные кривизны. Целесообразно выбрать такую функцию d , которая имела бы возможно большее число плавных производных на всей прямой (u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$).

Если можно каким-либо способом искусственно построить функции D , не обязательно являющиеся положительными, то желательно приравнять нулю возможно большее число производных функции d в точке $u=0$. Тогда качество изображения улучшается в тех частях, где преобладают медленные изменения освещенности.

В качестве примера на фиг. 127 приведены, согласно Арсаку (J. Arzac, 1956), несколько видов изображений краев светлого поля при наличии различных законов фильтрации, показанных для каждого случая соответствующим графиком функции $d(u)$.

§ 14. Остаточное рассеяние оптическими полированными поверхностями

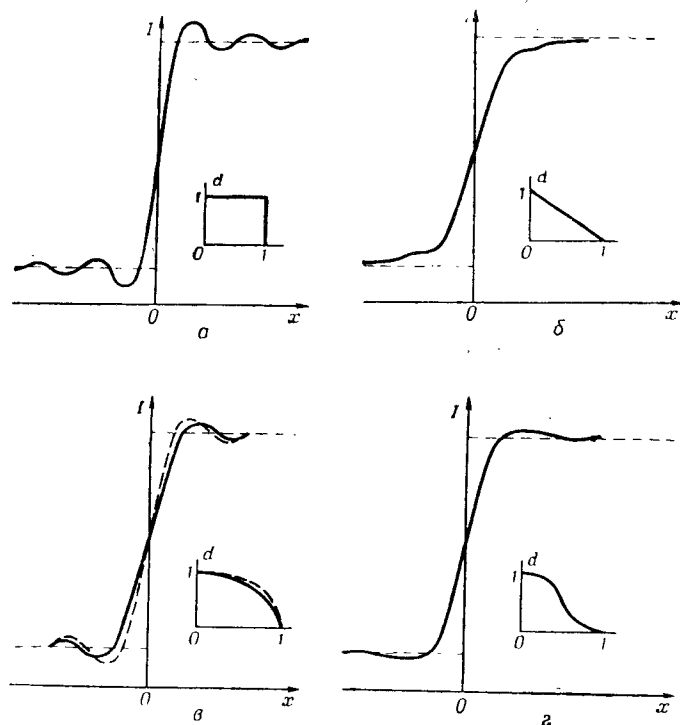
Перейдем теперь к решению задачи об остаточном рассеянии полированными поверхностями. Она близка к аналогичной задаче для случайных флуктуаций (шум, зернистость и т. д.); в этом случае «спектр» флуктуаций точно представлен рассеянным светом.

Рассмотрим волну Σ , падающую на оптическую поверхность. Небольшие неправильности поверхности вызывают деформацию волны, а вычисление изменений оптического пути показывает, что деформация ϵ поверхности вызывает деформацию пути, равную

$$n'\Delta = (n' \cos i' - n \cos i) \epsilon \quad \text{для прошедших пучков лучей,}$$

$$n'\Delta = 2n\epsilon \cos i \quad \text{для отраженных пучков лучей,}$$

где i и i' — углы соответственно падения и преломления (фиг. 128).



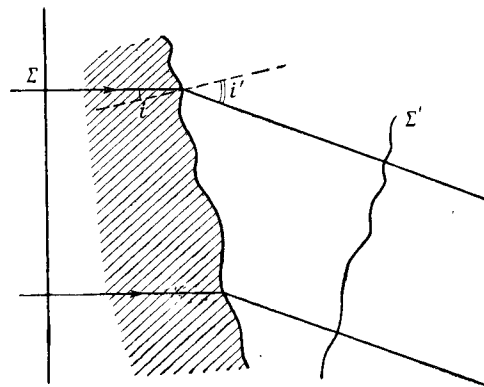
Фиг. 127.

Поверхность волны, полученная при этих условиях, больше не будет сферической, а будет беспорядочно отклоняться в одну и другую сторону относительно

средней сферы. Другими словами, на сфере сравнения комплексная амплитуда $F(\beta', \gamma') = h(k\Delta)$ будет претерпевать небольшие беспорядочные изменения фазы. В первом приближении можно написать

$$F(\beta', \gamma') = E_0 h(k\Delta) \approx E_0 [1 + ik\Delta(\beta', \gamma')].$$

При этих условиях поле F является суммой двух составляющих: равномерно распределенной амплитуды



Фиг. 128.

$F_1 = E_0$ и амплитуды флуктуаций $F_2 = iE_0 k\Delta$, средняя величина которой может быть равна нулю, если выбрать радиус сферы сравнения так, чтобы $\Delta = 0$.

Поле дифракции в «фокусе» волны состоит из двух составляющих: обычного поля A_1 , амплитуда которого существенно зависит от контура зрачка, — можно добиться того, чтобы это поле распространялось на ограниченную часть плоскости изображений (например, используя методику аподизации); поля флуктуаций A_2 , распространяющегося на значительно большую область, так как относительные изменения A_2 на поверхности стекла (и соответственно на сфере сравнения) обычно очень быстры — флуктуации, протяженность которых не превышает нескольких микронов, дифрагируют свет в пределах угла, значительно большего, чем угол дифракции, вызываемой

контуром зрачка, размеры которого исчисляются миллиметрами или даже сантиметрами.

Определим сначала всю рассеянную энергию. Применяя соотношение (2.23), получим

$$\begin{aligned} \iint |A_2(y', z')|^2 dy' dz' &= R^2 \iint |F_2(\beta', \gamma')|^2 d\beta' d\gamma' = \\ &= R^2 k^2 E_0^2 \iint \Delta^2 d\beta' d\gamma'. \end{aligned}$$

Однако вся энергия, проходящая через зрачок, равна $R^2 E_0^2 \iint d\beta' d\gamma'$; таким образом, относительная рассеянная энергия выразится величиной

$$k^2 \bar{\Delta}^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \bar{\Delta}^2.$$

Мы снова пришли к выражению, которое идентично выражению для спада освещенности в центре дифракционного пятна при наличии малых aberrаций [равенство (8.10)], т. е. относительная потеря освещенности равна относительной рассеянной энергии, что вполне естественно, хотя и не очевидно.

Изучим теперь пространственное распределение освещенности. Амплитуда, характеризующая рассеянный свет, равна

$$A_2(y', z') = \frac{iR}{\lambda} \iint F_2(\beta', \gamma') e^{-ik(\beta'y' + \gamma'z')} d\beta' d\gamma',$$

а его интенсивность $D_2 = |A_2|^2$.

Гармонический анализ функции D_2 можно представить в виде функции автокорреляции от F_2 [соотношение (2.25)], которое здесь можно написать так:

$$d_2(\mu', \nu') = R^2 k^2 E_0^2 \iint \Delta(\beta', \gamma') \Delta(\beta' - \lambda\mu', \gamma' - \lambda\nu') d\beta' d\gamma'.$$

Положим $\mu'\lambda = \beta$ и $\nu'\lambda = \gamma$, тогда интеграл можно переписать в виде

$$\iint \Delta(\beta', \gamma') \Delta(\beta' - \beta, \gamma' - \gamma) d\beta' d\gamma'.$$

Эта функция является функцией автокорреляции случайных деформаций волновой поверхности. Она зависит только от параметров β и γ , характеризующих корреля-

ционное расстояние ошибок на зрачке; для нормировки ее можно написать в виде

$$\iint \Delta(\beta', \gamma') \Delta(\beta' - \beta, \gamma' - \gamma) d\beta' d\gamma' = S \bar{\Delta}^2 A(\beta, \gamma),$$

где S — телесный угол $\iint d\beta' d\gamma'$ и $A(\beta, \gamma)$ — нормированная функция автокорреляции [поскольку $A(0, 0) = 1$].

Таким образом, мы отделили воздействие амплитуд ошибок (характеризуемых величиной $\bar{\Delta}^2$) от их распространения по поверхности [характеризуемого функцией автокорреляции $A(\beta, \gamma)$]. Очевидно, что функцией автокорреляции можно пренебречь в том случае, если составляющие β, γ смещений на зрачке становятся большими по сравнению со средним размером ошибок.

Можно, наконец, написать распределение рассеянной энергии в таком виде:

$$D_2(y', z') = \iint d(\mu', \nu') e^{-i2\pi(\mu'y' + \nu'z')} d\mu' d\nu',$$

или

$$D_2 = \frac{R^2 k^2 E_0^2 S \bar{\Delta}^2}{\lambda^2} \iint A(\beta, \gamma) e^{-i2\pi(\mu'y' + \nu'z')} d\mu' d\nu';$$

окончательно

$$D_2(y', z') = 4\pi^2 R^2 E_0^2 S \frac{\bar{\Delta}^2}{\lambda^4} \Phi\left(\frac{y'}{\lambda}, \frac{z'}{\lambda}\right),$$

где функция Φ является преобразованием Фурье нормированной функции автокорреляции $A(\beta, \gamma)$.

Таким образом, энергия рассеяния зависит от длины волны двояким образом:

— благодаря множителю λ^{-4} , который встречается также в объемном рассеянии (Релей);

— благодаря функции $\Phi(y'/\lambda, z'/\lambda)$.

Экспериментальное исследование в принципе позволяет определить:

1) полную рассеянную энергию, откуда выводится средняя квадратичная флуктуация $\bar{\Delta}^2$;

2) среднюю протяженность ошибок поверхности; действительно, можно экспериментально найти функцию Φ и с помощью преобразования Фурье определить A .

Так поступают при исследовании качества полировки поверхностей (например, при изготовлении астрономических объективов), когда остаточные ошибки относительно протяженны и становится сравнительно трудно разделить амплитуды A_1 и A_2 . Классическое дифракционное пятно изменяется, и дифракционные кольца заметно искажаются, причем характер этих искажений связан с бугристостью преломляющей поверхности.

Отметим, с другой стороны, работы Дидерикса (E. Diederichs, 1958) и Ломана (A. Lohmann, 1957) по изучению влияния нерегулярных ошибок волновой поверхности на множитель контраста.

Упомянем еще об одном аналогичном вопросе — об астрономическом мерцании: флуктуации показателя преломления земной атмосферы вызывают появление флуктуаций оптического пути лучей и производят случайные колебания интенсивности изображений, известных под названием «мерцаний». Когда флуктуации оптического пути малы, их можно представить в виде ряда, сохранив величины первого порядка. Единственное серьезное отличие от предыдущего случая состоит в том, что оптический прибор сфокусирован на бесконечность, тогда как та область, где возникают возмущения, не совпадает со зрачком, а расположена на конечном расстоянии от него. Арсак показал, что это равносильно фильтрованию частот пространства. На это фильтрование накладывается еще два других. С одной стороны, наблюдаемое светило имеет отличный от нуля кажущийся диаметр — известно, что в видимой области спектра планеты не мерцают; в оптике коротких радиоволн (например, с длиной волны 3 см) критический диаметр составляет величину, равную нескольким секундам дуги, и может сказываться на практике (солнечные пятна). С другой стороны, оптический прибор создает некоторое дифракционное пятно, и мерцание уменьшается обратно пропорционально отверстию прибора. Полный расчет явления мерцания интенсивности требует рассмотрения всех этих факторов. Практический результат расчета приводит к тому, что роль атмосферы в объяснении этого явления настолько искажается другими причинами, что изучение мерцаний приносит очень мало сведений о неоднородностях атмосферы.

ДОПОЛНЕНИЕ

1. Законы геометрической оптики как предельные формы законов распространения волн малой длины

Для доказательства этого будем исходить из уравнений Максвелла, написанных для среды с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью, равной единице, используя известный метод, при котором E определяют в единицах CGSE, а H — в единицах CGSM:

$$\frac{\epsilon}{c} \mathbf{E}' = \text{rot } \mathbf{H},$$

$$\frac{1}{c} \mathbf{H}' = -\text{rot } \mathbf{E}.$$

Предположим далее, что в этой среде распространяются волны с очень высокой частотой f . Чтобы дать наглядное представление о предельной форме законов распространения, полезно отделить в выражениях полей модуль и фазу векторов. Можно, например, написать в комплексных обозначениях

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z) h \left[\omega \left(t - \frac{L(x, y, z)}{c} \right) \right],$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z) h \left[\omega \left(t - \frac{L'(x, y, z)}{c} \right) \right],$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 — векторы, составляющие которых действительны; величины L и L' характеризуют местную фазу \mathbf{E} и \mathbf{H} и по-прежнему тождественны оптическому пути. Эта запись предполагает только, что три составляющие каждого из векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} находятся в одной и той же фазе, что не нарушает общности рассуждений.

Приложим эти выражения к уравнениям Максвелла. Из тождества $\text{rot } s\mathbf{V} = s \text{rot } \mathbf{V} + [\text{grad } s \times \mathbf{V}]$ получаем, в частности,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \left[\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - \frac{i\omega}{c} [\operatorname{grad} L \times \mathbf{E}_0] \right] h \left[\omega \left(t - \frac{L}{c} \right) \right].$$

Когда ω велико, то первым членом в скобках можно пренебречь по сравнению со вторым. Подставим $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ в уравнения Максвелла. Получим предельную форму для одного из уравнений, сокращая общий множитель $h(\omega t)$ и полагая $k = \omega/c$:

$$\mathbf{E}_0 h(-kL) = -[\operatorname{grad} L' \times \mathbf{H}_0] h(-kL').$$

Поскольку комплексные величины вводятся лишь через экспоненциальные функции, то из этого тождества неизбежно следует

$$L(x, y, z) \equiv L'(x, y, z),$$

что выражает условие одинаковости фаз векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , поскольку L — оптический путь. Тогда получаем предельную форму уравнений Максвелла

$$\varepsilon \mathbf{E}_0 = -[\operatorname{grad} L \times \mathbf{H}_0],$$

$$\mathbf{H}_0 = [\operatorname{grad} L \times \mathbf{E}_0].$$

Очевидно, что вектор $\operatorname{grad} L$ будет играть основную роль в распространении волны. Этот вектор нормален к поверхности, которую отныне будем называть волновой поверхностью. Из уравнений Максвелла вытекает, что тройка векторов \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и $\operatorname{grad} L$ образует прямоугольный

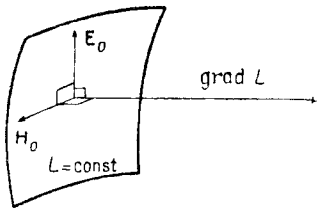
триедр — векторы \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 касательны к волновой поверхности и перпендикулярны друг к другу (фиг. 129).

Найдем теперь модуль вектора $\operatorname{grad} L$. Два предыдущих уравнения приводят к следующим условиям (поскольку векторы попарно ортогональны друг другу):

$$\varepsilon |\mathbf{E}_0| = |\operatorname{grad} L| |\mathbf{H}_0|,$$

$$|\mathbf{H}_0| = |\operatorname{grad} L| |\mathbf{E}_0|,$$

Откуда легко выводим фундаментальное соотношение $|\operatorname{grad} L|^2 = \varepsilon$.



Фиг. 129.

Положим $\sqrt{\varepsilon} = n$, где n — показатель преломления, и получаем окончательно

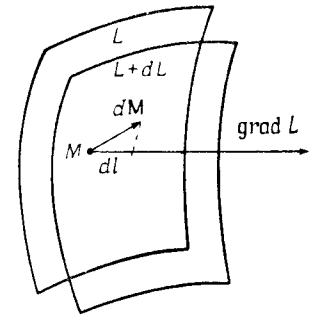
$$|\operatorname{grad} L| = n.$$

Это означает, что если рассмотреть две соседние волновые поверхности, соответствующие оптическим путям L и $L + dL$, то должно соблюдаться уравнение

$$dL = (\operatorname{grad} L \cdot d\mathbf{M}) = ndl.$$

Две соседние волновые поверхности разделены на такое расстояние dl вдоль нормали, что величина ndl постоянна и не зависит от положения точки M (фиг. 130).

С другой стороны, уравнение, выражающее поле \mathbf{E} в области, окружающей рассматриваемую точку M_0 , можно написать в виде



Фиг. 130.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 h \left[\omega \left\{ t - \frac{L}{c} [\operatorname{grad} L \times (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)] \right\} \right].$$

Это есть уравнение волны, фаза которой распространяется в направлении вектора $\operatorname{grad} L$ со скоростью $v = c/|\operatorname{grad} L|$; следовательно, скорость распространения фазы равна $v = c/n$.

Найдем, наконец, вектор Пойнтинга, который определяет направление распространения энергии; из предыдущих уравнений следует, что

$$\mathbf{H}_0 = n\mathbf{E}_0.$$

Вектор $\mathbf{P} = (c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, таким образом, оказывается коллинеарен вектору $\operatorname{grad} L$; мгновенные значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} будут равны соответственно $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t - L/c)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \omega(t - L/c)$. Модуль вектора \mathbf{P} тогда будет равен

$$|\mathbf{P}| = \frac{ncE_0^2}{4\pi} \cos^2 \omega \left(t - \frac{L}{c} \right).$$

Этот вектор определяет направление распространения энергии, т. е. направление светового луча: световые лучи всегда нормальны к волновым поверхностям. Полученные результаты могут быть подытожены следующим образом.

1. Электрическое и магнитное поля находятся в одной фазе, ортогональны между собой и касаются поверхности равных фаз (волновой поверхности).

2. Фаза колебания равна $-kL$, причем функция L удовлетворяет условию $|\text{grad } L| = n$.

3. Траектории переноса энергии (световые лучи) нормальны к волновым поверхностям.

Таким образом, мы пришли к основным свойствам распространения света в рамках геометрической оптики.

2. Прохождение волны через «фокус» и обоснование мнимого коэффициента в выражении принципа Гюйгенса

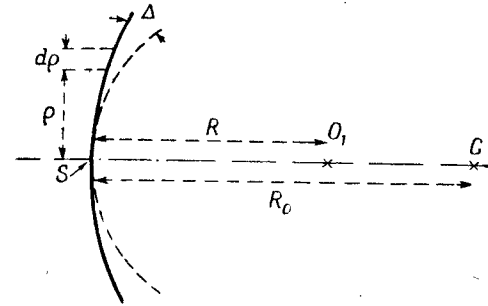
Рассмотрим сферическую волну, сходящуюся в точке S , и вычислим с помощью выражения (1.4) амплитуду дифрагированной волны в точке O_1 , расположенной перед точкой S . Из точки S как из центра можно провести ряд концентрических сфер, радиусы которых изменяются в арифметической прогрессии с разностью $\lambda/2$. Этим мы определим на поверхности Σ классические «зоны Френеля».

Для выяснения влияния различных зон можно рассмотреть на поверхности Σ тонкое кольцо радиусом ρ , шириной $d\rho$ (фиг. 131). Его площадь dS равна $2\pi\rho d\rho$. Доля амплитуды в точке O_1 , вносимая этим кольцом в предположении, что расстояние $SO_1 = R$ есть целое число длин волн, будет равна

$$\frac{i}{\lambda R} E_0 h(k\Delta) 2\pi\rho d\rho = \frac{i\pi}{\lambda R} E_0 h(k\Delta) d(\rho^2).$$

Длина элемента дуги кривой в комплексной плоскости равна модулю этого выражения, т. е.

$$ds = \frac{\pi E_0}{\lambda R} d(\rho^2).$$



Фиг. 131.

Расстояние Δ между двумя сферами (их радиус R и R_0) в первом приближении равно

$$\Delta = -\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right),$$

т. е. Δ пропорционально ρ^2 , а ориентацию единичного вектора в комплексной плоскости можно определить так (принимая во внимание множитель i):

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - k \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right).$$

Кривизна $d\varphi/ds$ описываемой кривой почти постоянна (фиг. 132), и мы имеем дело с окружностью радиусом

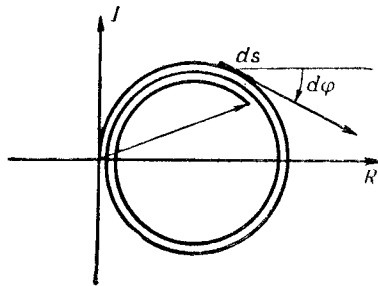
$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{E_0}{1 - \frac{R}{R_0}} = E_0 \frac{R_0}{O_1 C}.$$

Кривая, соответствующая центральной части поверхности Σ , весьма близка к окружности, касающейся мнимой оси (для очень малых значений ρ величина Δ мала и $\varphi \approx \pi/2$), но с ростом Δ формула (1.4) перестает быть строгой и ее следует заменить формулой (1.3). Подробное изучение показывает, что кривизна $d\varphi/ds$ постепенно увеличивается, так как доля амплитуды, вносимая отдаленными зонами, уменьшается. Отсюда вытекает, что в комплексной плоскости кривая принимает вид спирали. В общем случае эта спираль кончается в некоторой точке, положение которой меняется с изменением отверстия, но если последнее велико, то может быть достигнута пре-

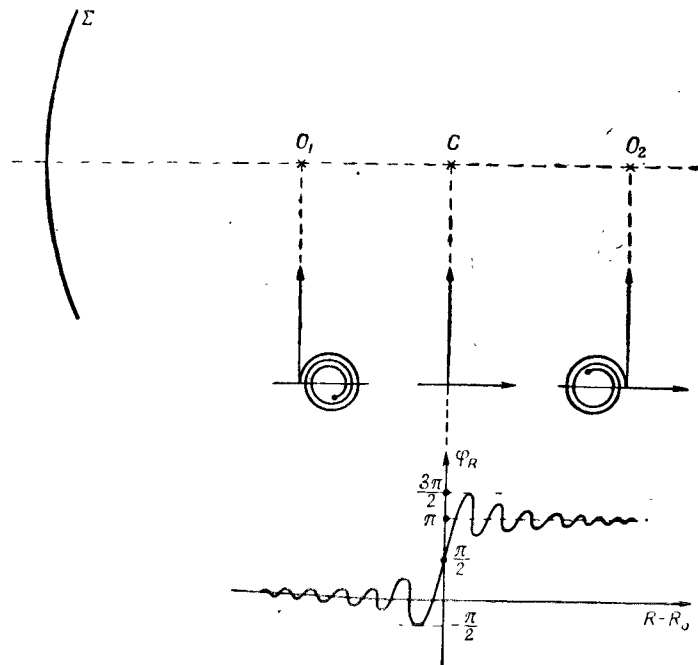
дельная точка спирали, расположенная на действительной оси на расстоянии $E_0[1 - (R/R_0)]^{-1}$.

Как предполагалось ранее, колебание в O_1 совпадает по фазе с колебанием из S . Но для этого необходимо присутствие множителя i , осуществляющего изменение фазы на $\pi/2$ в выражении амплитуды, дифрагированной различными элементами поверхности.

Когда точка O_1 приближается к C , а отверстие зрчка ограничено, то кривизна спирали уменьшается — спираль понемногу раскручивается и результирующая фаза



Фиг. 132.



Фиг. 133.

колеблется (относительно ожидаемой в точке O) с амплитудой $\pm \pi/2$. Перед «фокусом» C фаза колеблется около среднего нулевого значения. Когда точка O_1 проходит через C , результирующая колебаний становится чисто мнимой, но дальше спираль тотчас же начинает закручиваться в противоположном направлении, и фаза в точке O_2 осциллирует около величины π , причем амплитуда этих колебаний достигает $\pm \pi/2$ (фиг. 133). Таким образом, мы приходим к заключению, что «скачок фазы» при переходе через «фокус» волны есть не что иное, как непрерывное изменение фазы, колеблющейся перед фокусом около значения 0, а за фокусом — около значения π .

3. Когерентность и ширина спектральных линий

Уточним здесь некоторые вопросы, связанные с механизмом излучения источника, степенью когерентности в зависимости от разности хода, законом вероятности для комплексной амплитуды и т. д.

1. Представление об излучении неподвижного атома. Если применить приведенную в гл. 7, § 2, схему, можно сказать, что неподвижный атом, излучающий основную частоту f_0 , колеблется по закону типа

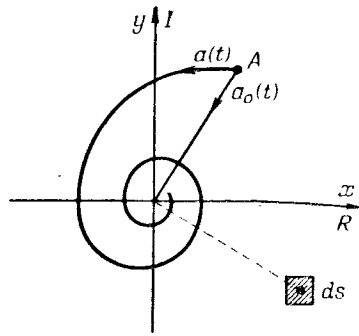
$$f(t) = R [a_0(t) e^{i2\pi f_0 t}].$$

Здесь $a_0(t)$ — комплексная амплитуда, изменения которой медленны по сравнению с колебаниями множителя с частотой f_0 , но все же очень быстры в нашей шкале времени: если множитель $a_0(t)$ затухает по экспоненциальному закону с постоянной времени τ порядка 10^{-8} сек (соответствующей естественной ширине линий), то при очень большом числе колебаний его амплитуда изменится мало, тем не менее скорость изменений $a_0(t)$ оказывается очень большой для тех средств наблюдения, которыми мы располагаем. В комплексной плоскости $a_0(t)$ приближается к началу координат, описывая прямую OA , но не вращаясь (фиг. 134).

2. Влияние эффекта Доплера. Атом, двигаясь со скоростью v относительно наблюдателя, излучает сложное колебание с амплитудой

$$a_0(t) h(2\pi f_0 t) h(2\pi \delta f t),$$

где δf — изменение частоты, обусловленное эффектом Доплера, который может быть выражен уравнением $\delta f/f = v/c$. Кажущуюся амплитуду можно достаточно точно записать в виде $a(t) h(2\pi f_0 t)$, но мгновенная амплитуда $a(t) = a_0(t) h(2\pi \delta f t)$ вращается вокруг начала координат с угловой скоростью δf .



Фиг. 134.

3. Закон вероятности мгновенной амплитуды источника. Газовый источник состоит из большого числа атомов, излучающих волны с разными амплитудами, величина каждой из которых зависит от радиальной скорости атомов, статистическое распределение которой задано законом Максвелла для газа.

Полная амплитуда A источника равна сумме весьма большого числа амплитуд $a(t)$, изменения которых определены главным образом эффектом Доплера. Мы будем искать закон вероятности для величины полной амплитуды

$$A(t) = \sum a(t).$$

Известно, что если случайная переменная x_1 характеризуется законом вероятности $p_1(x_1)$, а другая переменная x_2 , не зависящая от x_1 , — законом $p_2(x_2)$, то плотность вероятности переменной $z = x_1 + x_2$ определяется интегрированием вероятностей различных пар величин x_1 и x_2 , которые приводят к тому же значению величины z , т. е.

$$p(z) = \int p_1(x_1) p_2(z - x_1) dx_1.$$

Мы получили свертку функций p_1 и p_2 и заключаем отсюда, что если рассмотреть преобразования Фурье функций p , p_1 , p_2 , то

$$g(u) = g_1(u) g_2(u)$$

(эти функции называются характеристическими функциями законов вероятностей p , p_1 , p_2). Определим закон

вероятности амплитуды A в комплексной плоскости, причем будем считать ее равной сумме большого числа n амплитуд колебаний отдельных атомов

$$A(t) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i(t).$$

Можно предположить, что все амплитуды a имеют один и тот же закон вероятности $p(a)$ в комплексной плоскости, выражающий симметрию вращения вокруг начала координат [вероятность $p(a) dS$ того, что конец вектора, представляемого амплитудой a , располагается внутри элемента поверхности dS , зависит только от модуля a]. Пусть $g(u, v)$ — преобразование Фурье функции $p(x, y)$, причем функция g обладает симметрией вращения. Закон вероятности $P(x, y)$ амплитуды A вытекает из n свертков, действующих на закон вероятности амплитуд p , и его характеристическая функция равна

$$G(u, v) = [g(u, v)]^n.$$

Но вследствие того, что значение $p(a)$ всегда положительно, функция $g(u, v)$ имеет абсолютный максимум при $u = v = 0$ (так же как и амплитуда дифрагированной волны имеет максимум, если все колебания имеют одну и ту же фазу). Этот максимум равен

$$g(0, 0) = \iint p(x, y) dx dy = 1.$$

Для всех других значений u и v , когда функция $g(u, v) < 1$ и величина $[g(u, v)]^n$ стремится к нулю с ростом n , можно получить приближенную величину $G = g^n$ вблизи от начала координат, написав, что

$$g(u, v) \approx 1 + \frac{1}{2} g''_{uv}(u^2 + v^2),$$

где $g''_{uv} = g''_{vu}$ — значение второй производной в начале координат, всегда меньше нуля.

Отсюда вытекает

$$\log G \approx n \log \left[1 + \frac{1}{2} g''(u^2 + v^2) \right] \approx \frac{n}{2} g''(u^2 + v^2).$$

$$G \approx \exp \left[\frac{n}{2} g''(u^2 + v^2) \right],$$

откуда [применяя формулу (2.21)] выводим закон вероятности

$$F(x, y) \approx \frac{2\pi}{n g''} \exp \left[\frac{2\pi^2}{n g''} (x^2 + y^2) \right].$$

Но g'' можно выразить просто. Так как g есть преобразование Фурье функции f , то, дифференцируя равенство (2.13), получаем

$$g''_{u^2}(u, v) = -4\pi^2 \iint x^2 f(x, y) h[2\pi(ux + vy)] dx dy$$

и

$$g''_{u^2}(0, 0) = -4\pi^2 \iint x^2 f(x, y) dx dy < 0.$$

Таким образом, функция $F(x, y)$ представляет собой закон Гаусса, постоянная которого выражается с помощью момента второго порядка закона вероятности $f(x, y)$ комплексной амплитуды $a = x + iy$.

Если положить

$$\sigma^2 = \iint (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy$$

(где σ — среднее квадратичное значение модуля a), то получим

$$g'' = -2\pi^2 \sigma^2$$

и, наконец,

$$F(x, y) = \frac{1}{n\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{n\sigma^2} \right).$$

4. Зависимость частичной когерентности от оптической разности хода. Вычислим произведение функций $A(t)A^*(t + \theta)$, характеризующее частичную когерентность колебаний, излучаемых через интервал времени θ , соответствующий разности оптического пути $c\theta$. Вычислим среднее значение величины

$$\overline{\sum a_i(t) \sum a_i^*(t + \theta)},$$

в которой можно выделить «прямоугольные» сомножители (т. е. такие, у которых $i \neq j$) с равным нулю средним значением и «квадратные» ($i = j$) сомножители, которые одни и остаются:

$$\overline{A(t)A^*(t + \theta)} = \overline{\sum a_i(t) a_i^*(t + \theta)} = \overline{na(t)a^*(t + \theta)}.$$

Таким образом, степень частичной когерентности для множества атомов источника изменяется точно так же, как и для отдельного атома, и легко показать, что нормализованная степень частичной когерентности, определяемая равенством (7.4), будет одинакова в обоих случаях. Эту степень частичной когерентности можно определить, измеряя экспериментально контраст (а также сдвиг) полос в зависимости от разности хода.

Можно также отметить, что поскольку амплитуда колебаний в каждый момент времени равна

$$A(t)h(2\pi f_0 t),$$

ее преобразование Фурье будет равно свертке преобразований функции A и единичного сигнала с частотой f_0 , иначе говоря, она просто получается путем переноса значения f_0 , приложенного к преобразованию функции A , центр которой совпадает с нулевой частотой.

Таким образом, преобразование функции A представляет распределение амплитуд в спектре (в собственном смысле этого слова) световых колебаний. При этих условиях распределение энергии в спектре равно преобразованию Фурье функции автокорреляции от функции A , т. е. степени частичной когерентности.

Отметим в заключение, что известные в настоящее время наиболее монохроматические излучения (линии Kr^{86} при $T=63^\circ K$) позволяют осуществить интерференцию с разностью хода порядка 1 м, соответствующую времени корреляции порядка до $3 \cdot 10^{-9}$ сек (это время определяется глазным образом эффектом Допплера, а не естественной шириной линии, соответствующей более длительному интервалу времени).

4. Изображение объектов со слабым контрастом при частично когерентном освещении

Вернемся к выкладкам, проделанным в гл. 7, § 10, принимая во внимание результаты, достигнутые в последнее время. Необходимо прежде всего непосредственно доказать, что, когда объект имеет слабый контраст, существует соотношение свертки между распределениями амплитуд на объекте и освещенности на изображении.

Определим объект со слабым контрастом комплексной функции

$$\Omega(M) = 1 + \Omega'(M) \quad \text{при} \quad \Omega'(M) \ll 1.$$

Тогда равенство (7.10) позволяет приближенно написать функцию

$$I(M') = \iint [1 + \Omega'(M_1) + \Omega'^*(M_2)] \times \\ \times E(M' - M_1) E^*(M' - M_2) \gamma(M_2 - M_1) dM_1 dM_2. \quad (\text{Д4.1})$$

Степень частичной когерентности может быть заменена выражением, получаемым из (7.6), т. е. с точностью до множителя

$$\gamma(M_2 - M_1) = \int \varepsilon(P) h[2\pi P(M_2 - M_1)] dP. \quad (\text{Д4.2})$$

Оценим теперь три последовательных слагаемых, входящих в интеграл для $I(M')$. Примем во внимание соотношения между зрачком и изображением:

$$E(M') = \int F(P) h(-2\pi PM') dP, \\ F(P) = \int E(M') h(2\pi PM') dM'. \quad (\text{Д4.3})$$

Полагая $M'_1 = M' - M_1$ и $M'_2 = M' - M_2$, находим для первого слагаемого

$$\iint \iint E(M'_1) h(2\pi PM'_1) E^*(M'_2) h(-2\pi PM'_2) \varepsilon(P) dM'_1 dM'_2 dP = \\ = \int F(P) F^*(P) \varepsilon(P) dP = I_0 = \text{const.} \quad (\text{Д4.4})$$

Второе слагаемое может быть вычислено аналогичным образом

$$\int \Omega'(M_1) E(M' - M_1) \times \\ \times \left\{ \iint E^*(M'_2) h(-2\pi PM'_2) \varepsilon(P) h[2\pi P(M' - M_1)] dM'_2 dP \right\} dM_1 = \\ = \int \Omega'(M_1) E(M' - M_1) \left\{ F^*(P) \varepsilon(P) \times \right. \\ \left. \times h[2\pi P(M' - M_1)] dP \right\} dM_1. \quad (\text{Д4.5})$$

Используем теперь функцию

$$E_c(M') = \int E(P) \varepsilon(P) h(-2\pi PM') dP. \quad (\text{Д4.6})$$

представляющую распределение амплитуд в дифракционном пятне при зрачке, «диафрагмированном» до отверстия конденсора, причем это отверстие характеризуется функцией $\varepsilon(P)$.

Второе слагаемое функции $I(M')$ окончательно может быть написано так:

$$\int \Omega'(M_1) E(M' - M_1) E_c^*(M' - M_1) dM_1,$$

и для всего изображения получим

$$I(M') = I_0 + 2R \left[\int \Omega'(M) E(M' - M) E_c^*(M' - M) dM \right]. \quad (\text{Д4.7})$$

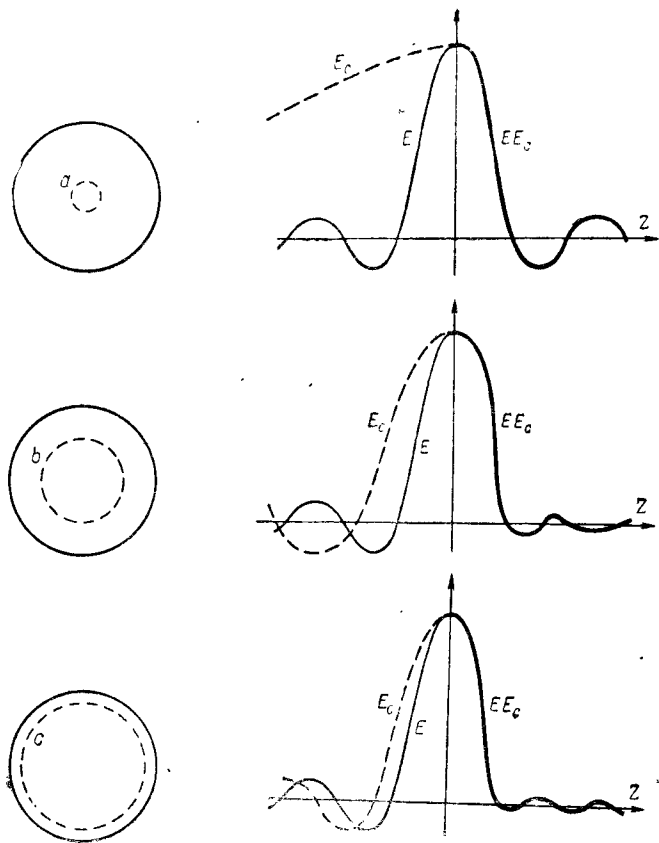
Это равенство, где R обозначает действительную часть комплексной величины, выражает весьма важный результат.

Для перехода от объекта со слабым контрастом к его изображению нужно вычислить свертку функции объекта и функции EE_c^* , характеризующей изображение малого изолированного участка.

Уточним теперь природу этой характеристической функции EE_c^* . Рассмотрим прежде всего случай стигматического микроскопа, имеющего круглый зрачок при круглом конденсоре. Если $\sigma = \sin \alpha_c / \sin \alpha_0$ есть отношение отверстий конденсора (α_c) и объектива (α_0), то обе функции E и E_c выразятся соответственно через $2J_1(Z)/Z$ и $2J_1(\sigma Z)/\sigma Z$.

На фиг. 135 показано, как меняется функция EE_c , если постепенно переходить от когерентного освещения (случай a ; σ очень мало) к некогерентному освещению (случай c ; это соответствует отверстию конденсора, равному отверстию объектива: $\sigma = 1$). Из графиков становится понятным, как последовательно изменяется изображение точки при переходе от функции $2J_1(Z)/Z$ к функции $[2J_1(Z)/Z]^2$.

Аналогичным образом может быть изучен случай микроскопа с фазовым контрастом. Если предположить конденсор кольцевым при очень небольшой ширине кольца, изображение которого образуется на фазовой пластинке, то при фактическом наличии фазовой плас-



Фиг. 135.

тинки функция E_c становится чисто мнимой; функция $\Omega'(M)$ проявит себя также только своей мнимой частью (фазовый объект). Отсюда заключаем, что если теперь положить $\sigma = \sin \alpha_l / \sin \alpha_0$, где α_l — угловое отверстие конденсора (или фазовой пластинки), то для изображения маленькой дефазирующей «точки» получим выражение

$$\frac{2J_1(Z)}{Z} J_0(\sigma Z),$$

изменения которого близки к изменениям, представленным на фиг. 135.

Влияние aberrаций. Рассмотрим, например, случай амплитудного объекта в микроскопе, обладающем малыми aberrациями. Применяв метод, описанный в гл. 8, § 2, можем написать

$$EE_c^* = \left[1 + ik\bar{\Delta}_0 - \frac{k^2}{2} \bar{\Delta}_0^2 \right] \left[1 - ik\bar{\Delta} - \frac{k^2}{2} \bar{\Delta}^2 \right],$$

где $\bar{\Delta}_0$ обозначает среднее значение Δ на всем зрачке, а $\bar{\Delta}$ — среднее значение Δ на части зрачка, диафрагмированной конденсором. Чтобы определить допустимые значения aberrаций, напишем выражение

$$\frac{k^2}{2} [\bar{\Delta}_0^2 - \bar{\Delta}^2 - 2\bar{\Delta}_0\bar{\Delta}].$$

Оно, очевидно, сводится к формуле (8.8) или (8.18), если $\bar{\Delta}_0^2 = \bar{\Delta}^2$ и $\bar{\Delta}_0 = \bar{\Delta}$ (некогерентное освещение) или если $\bar{\Delta}_0 = \bar{\Delta} = 0$ (когерентное освещение).

Сланский¹ изучил влияние различных составляющих aberrаций (сферическая aberrация, кома и т. д.) и привел выражения для допустимых значений каждой из них.

¹ S. Slansky, Compt. Rend., 1960; Opt. Acta, 9, 277 (1962).

Библиография

К главе 1

- Baker B. B., Copson E. T., The Mathematical theory of Huygens' principle, Oxford, 2nd Ed., 1950.
- Born M., Wolf E., Principles of optics, London, 1959.
- Croze, Darmois, Durand, Compl. Rend., 228, 824 (1949).
- De Broglie L., Problèmes de propagation guidée des ondes électromagnétiques, Paris, 1941, p. 96—98.
- Robieux J., Thèse, Paris, 1959; Annales de Radioélect., 14, No. 57, 187 (1959).
- Stratton I. A., Electromagnetic theory, New York, 1941, p. 466
- Toraldo di Francia G. Onde elettromagnetiche, Bologna, 1953.
- Toraldo di Francia G., La diffrazione della luce, Torino, 1958.
- Vasseur. Onde Électrique. No. 298, 3 (janvier 1959); No. 299, 55 (février 1952); No. 300, 97 (mars 1952).

К главе 2

- Angot A., Compléments de Mathématiques, 3^e éd., Paris, 1957.
- Arsac J. La transformation de Fourier et la théorie des distributions, Paris.
- Duffieux P. M., L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique, Université de Besançon.
- Linfoot E. H., Recent advances in optics, Oxford, 1955.
- Watson G. N., Whittaker E. T., Modern Analysis, New York, 1946. (См. перевод: Ватсон Г. и Уиттекер Е., Курс современного анализа, т. I, II, М., 1962.)

К главам 3—5

- Born M., Wolf E., Principles of optics, London, 1959.
 Duffieux P. M., L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique, Université de Besançon.
 Dumontet P., Opt. Acta, **2**, 53 (1955).
 Elias P., Grey D. S., Robinson D. Z., Fourier treatment of optical processes, Journ. Opt. Soc. Am., **42**, 127 (1952).
 Linfoot E. H., Recent advances in optics, Oxford, 1955.
 Maréchal A., Contrastes des images de quelques objets types dans un instrument stigmatique, Rev. Opt., **32**, 649 (1953).
 Maréchal A., The contrast of optical images and the influence of aberrations, Nat. Bur. Stand. Circ. 526, Proc. of Sympos. on Optical Image Evaluation, Octobre, 1951.
 O'Neill E. L., The modulation function in optics, Tech. Note 110, B.U.P.R.L., janvier 1954.

К главе 6

- Barer R., A vector theory of phase-contrast and interference contrast, Journ. roy. micr. Soc., **75**, 23 (1955).
 Bennett A. H., Jupnik H., Osterberg H., Richards O. W., Phase microscopy, principles and applications, New York, 1951.
 Françon M., Le microscope à contraste de phase et le microscope interférentiel, Paris, 1954; см. также Handbuch der Physik, Bd. 24, 1956, S. 346.
 Hopkins H. H., A note on the theory of phase-contrast images, Proc. Phys. Soc., **66**, 331 (1953).
 Lyot B., Procédés permettant d'étudier les irrégularités d'une surface bien polie in Théorie des images optiques, Paris, 1949.
 Wolter H., Farbige Phasenkontrastverfahren, Naturwiss., **37**, 491 (1950).
 Zernike F., Phase-contrast, a new method for microscopic observation of transparent objects, Achievements in Optics, Amsterdam, 1946, p. 116.

К главе 7

- Blanc-Lapierre A., Dumontet P., Rev. Opt. **34**, 1 (1955).
 Blanc-Lapierre A., Perrot M., Peri C., Opt. Acta, **2**, 1 (1955).

- Born M., Wolf E., Principles of Optics, London, 1959.
 Brown H., Twiss R. Q., Nature, **178**, 1046 (1956): Proc. Roy. Soc., **A248**, 199, 222 (1958).
 Canals-Fraud D., Rousseau M., Opt. Acta, **5**, 15 (1958).
 Duffieux P. M., Rev. Opt., **32**, 129 (1953).
 Dumontet P., Publ. Sci. Univ. Alger, **B1**, 33 (1955).
 Gamo M., Journ. Appl. Phys. Japan, **25**, 431 (1956).
 Hopkins H. H., Proc. Roy. Soc., **208**, 263 (1951).
 Hopkins H. H., Proc. Roy. Soc., **217**, 408 (1953).
 Maréchal A., Rev. Opt., **32**, 649 (1953).
 Menzel E., Optik, **15**, 460 (1958).
 Nomarski G., Rousseau M., Journ. Phys., **16**, 13 (1955).
 Slansky S., Opt., Acta, **2**, 119 (1955); Journ. Phys., **20**, 13 (1959).
 Steel W. H., Opt. Acta, **3**, 65 (1956); Journ. Opt. Soc. Amer., **47**, 405 (1957); Proc. Roy. Soc., **249**, 574 (1959).
 Vernier P., Thèse, Paris, 1958.
 Wolf E., Proc. Roy. Soc., **225**, 96 (1954); **230**, 246 (1955).
 Zernike F., Physica **5**, 785 (1938).
 Zernike F., Proc. Phys. Soc., **61**, 158 (1948).

К главам 8 и 9

- Airy C. B., Trans. Cambridge Phil. Soc., **5**, 283 (1835).
 Berek M., Zs. f. Phys., **40**, 421 (1926).
 Blacke G., Linfoot E. M., Proc. Roy. Soc., **A239**, 522 (1957).
 Born M., Wolf E., Principles of Optics, London, 1959.
 Bouasse, Optique géométrique supérieure, Paris, 1926.
 Bouwkamp C. J., Rep. Progr. Phys., **17**, 35 (1954).
 Bromilow M. S., Proc. Phys. Soc., **71**, 231 (1958).
 Buxton A., Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **81**, 547 (1921); **83**, 475 (1923).
 Conrady A. E., Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **79**, 575 (1919); **80**, 321 (1920).
 Chrétien H., Cours de calcul des combinaisons optiques, Paris, 1938.
 Couder A., Compt. Rend., **219**, 677 (1944).
 De M., Proc. Roy. Soc., **A233**, 96 (1955).
 Duffieux P. M., Lansraux G., Rev. Opt., **24**, 65, 151, 215 (1945).
 Durand E., La théorie des images optiques, Paris, 1949, p. 127.

- Epstein L., Journ. Opt. Soc. Amer., **39**, 226 (1949).
 Focke J., Opt. Acta, **3**, 10 (1956).
 Françon M., Cah. Phys., No. 26, 15 (1944); Rev. Opt., **26**, 254, 369 (1947); **27**, 157, 595, 767 (1948); Thèse (Revue d'Optique, 1948); Compt. Rend., **299**, 293 (1949); Handbuch der Physik, Bd. 24, 1956, S. 171.
 Goodbody A. M., Proc. Phys. Soc., **B72**, 411 (1958).
 Hönl M., Zs. f. Phys., **131**, 290 (1952).
 Hopkins H. H., Proc. Roy. Soc., **A231**, 91 (1955); Proc. Phys. Soc., **B55**, 116 (1943); **B69**, 562 (1956); **B70**, 449, 1002, 1162 (1957).
 Kampen van N. G., Physica, **14**, 575 (1949).
 Keller J. B., Diffraction by an Aperture. I. New York University, June 1956, Research Report No. Em-92.
 Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D., Diffraction by an Aperture. II. New York University, August 1956, Research Report No. EM-96.
 Kingslake R., Proc. Phys. Soc., **B61**, 147 (1948).
 König A., Handbuch der Experimental physik, Bd. 20, part. II, 1929, S. 141.
 Korringa J. B., Nijboer B. R. A., Maréchal A., Document S. O. 48-8, Commission Internationale d'Optique, Paris.
 Lansraux G., Rev. Opt., **31**, 319 (1952); **32**, 475 (1953); **34**, 65 (1955); Thèse (Revue d'Optique, 1952).
 Linfoot E. H., Recent advances in optics, Oxford, 1955.
 Linfoot E. H., Wolf E., Proc. Phys. Soc., **B66**, 145 (1953); **B69**, 823 (1956); Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **112**, 452 (1952).
 Lohmann A., Optik, **14**, 510 (1957).
 Lukosz, Optik, **14**, 490 (1957); **15**, 299 (1958).
 Lommel E., Abh. Bayer Akad., Abth 2, 229 (1885); Abth 3, 529 (1886).
 Luneberg, Mathematical theory of optics (Providence, R. I., Brown University, 1944).
 Maréchal A., Compt. Rend., **218**, 345, 395 (1944); Cah. Phys., No. 26, 1 (1944); Rev. Opt., **26**, 257 (1947); **27**, 73 (1948); **32**, 649 (1953). Thèse (Revue d'Optique, 1948); Journ. Opt. Soc. Amer., **37**, 403 (1947); Handbuch der Physik, Bd. 24, 1956, S. 44.
 Maréchal A., Pieuchard G., Compt. Rend., **229**, 999 (1949).
 Martin L. C., Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **82**, 310 (1922).
 Miyamoto, Journ. Opt. Soc. Amer., **48**, 57 (1958).

- Nienhuis K., Thesis (University of Groningen, 1948).
 Nienhuis K., Nijboer B. R. A., Physica, **14**, 590 (1949).
 Nijboer B. R. A., Physica, **10**, 679 (1943); **13**, 605 (1947).
 Picht J., Ann. Phys., **4**, 77, 685 (1925); **80**, 492 (1926); Optische Abbildung, Braunschweig, 1931.
 Rayleigh Lord, Phil. Mag., **5**, **8**, 403 (1879); Scientific Papers, Cambridge, 1899, **1**, 432.
 Richter J., Zs. f. Instr., **45**, 1 (1925).
 Sommerfeld A., Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. IV, Optik, Wiesbaden, 1950; Leipzig, 1959. (См. перевод издания 1950 г. Зоммерфельд А., Оптика, ИЛ, 1953).
 Steel W. H., Rev. Opt., **31**, 334 (1952); **32**, 4 (1953); Opt. Acta, **3**, 65 (1956).
 Steward G. C., Phil. Trans. Roy. Soc., **A225**, 132 (1925).
 Струве Г., Mem. Acad. Sci. St. Pétersbourg, VII-e serie, **34**, No. 5 (1886).
 Wolf E., Proc. Roy. Soc., **A204**, 533 (1951); Rep. Progr. Phys., **14**, 95 (1951).
 Wolfssohn, Handbuch der Physik, Bd. 20, 1928, S. 263.
 Zernike F., Physica, **1**, 689 (1934).
 Zernike F., Nijboer B. R. A., La théorie des images optiques. Paris, 1949, p. 227.

Список опубликованных работ о расчете дифракционного пятна при наличии абераций

- Buxton A., Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **81**, 547 (1921).
 Buxton A., Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **83**, 475 (1923).
 Conrady A. E., Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **79**, 575 (1919).
 Focke J., Opt. Acta, **3**, 110 (1956).
 Focke J., Opt. Acta, **4**, 17 (1957).
 Françon M., Thèse (Revue d'Optique, 1948).
 Kingslake R., Proc. Phys. Soc., **61**, 147 (1948).
 Lansraux G., Thèse (Revue d'Optique), **31**, 319 (1952).
 Maréchal A., Thèse (Revue d'Optique, 1948).
 Maréchal A., Communication de laboratoire de l'Institut d'Optique, tome II, fascicule IV, 1953.
 Martin L. C., Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., **82**, 310 (1922).
 Nienhuis K., Thèse (Université de Groningen, 1948).
 Nijboer B. R. A., Thèse (Université de Groningen, 1942).

- Rayleigh Lord, *Phil. Mag.*, **8**, 403 (1879).
 Steel W. H., *Thèse (Revue d'Optique)*, **32**, 4 (1953).
 Горбунков В. М., Прибор для вычисления распределения амплитуд и фаз в дифракционном изображении точки. *Оптико-механ. пром.*, **9**, 5 (1960). — *Добавл. ред.*

К главе 10

- Problems in contemporary optics. Proceedings of the Florence meeting, 1954 (1st part: Optics and information theory). Istituto nazionale di Ottica, Florence.

К главе 11

- Arnulf A., Dupuy O., *Compt. Rend.*, **246**, 2350 (1958); **250**, 97 (1960); **250**, 1013 (1960).
 Arzac J., *Opt. Acta*, **3**, 55 (1956); **6**, 77, 103 (1959).
 Birch K. G., *Acta Electronica*, **2**, 271 (1957—1958).
 Boughon P., Dossier B., Jacquinet P., *Compt. Rend.* **223**, 661 (1946).
 Bruce C. F., *Opt. Acta*, **4**, 127 (1957).
 Bruce C. F., Thornton B. S., *Journ. Sci. Instr.*, **34**, 203 (1957).
 Clark Jones R., *Journ. opt. Soc. Amer.*, **45**, 799 (1955).
 Croce P., *Rev. Opt.*, **35**, 569 (1956).
 Croce P., Maréchal A., *Problems in contemporary optics*, 1956, p. 76.
 Croce P., Marquet M., *Opt. Acta*, **2**, 107 (1955).
 De M., *Opt. Acta*, **4**, 45 (1957).
 Diederichs E., Lohmann A., *Optik*, **15**, 751 (1958).
 Dossier B., *Journ. Phys.*, **13**, 169, 246 (1952); *Rev. Opt.* **33**, 57, 147, 267 (1954).
 Dossier B., Jacquinet P., *Journ. Rech. C.N.R.S.*, **9**, No. 12, 123.
 Dossier B., Jacquinet P., Maréchal A., Pieuchard, *Journ. Phys.*, **12**, 142, 565, 567 (1951).
 Fellgett P., *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **43**, 271 (1953).
 Frieser H., *Mitteilungen AGFA*, **1**, 129 (1955); *Wissenschaftliche Photographie, Intern. Konf. Köln, 1956 (Helwich, Darmstadt 1958)*, S. 505.
 Gates J. W., *Journ. Sci. Instr.*, **33**, 507 (1956).

- Hopkins H. H., *Opt. Acta*, **2**, 23 (1955).
 Ingelstam E., *Arkiv Fys.*, **7**, No. 24, 309 (1953); *Journ. Phys.*, **19**, 209 (1958).
 Ingelstam E., Djurle E., Sjögren B., *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **46**, 707 (1956).
 Ingelstam E., Johansson L. P., *Journ. Sci. Instr.*, **35**, 15 (1958).
 Jacquinet P., Boughon P., Dossier B., *La théorie des images optiques*, Paris, 1949, p. 183.
 Kelsall D., *Acta Electronica*, **2**, 266 (1957—1958); *Opt. Acta*, **5**, hors série, 166 (1958).
 Lacomme P., *Opt. Acta*, **1**, 33 (1954); **5** (hors série) 263 (1958); *Acta Electronica*, **2**, 263 (1957—1958); *Opt. Acta*, **7**, 331 (1960).
 Lansraux G., *Compt. Rend.*, **222**, 1434 (1946); *Rev. Opt.*, **26**, 24, 278 (1947); **32**, 475 (1953).
 Lohmann A., *Optik*, **14**, 510 (1957); *Opt. Acta*, **6**, 37 (1959).
 Maréchal A., *Opt. Acta*, **5**, 70 (1958).
 Maréchal A., Croce P., *Compt. Rend.*, **237**, 607 (1953).
 Maréchal A., Croce P., Dietzel K., *Acta Electronica*, **2**, 256 (1957—1958); *Opt. Acta*, **5**, hors série, 256 (1958).
 Marquet M., *Opt. Acta*, **6**, 404 (1959); *Rev. Opt.* **39**, 1960 (в печати).
 Naish J. M., *Opt. Acta*, **6**, 152 (1959).
 Nomarski G., *Compt. Rend.*, 1959 (в печати).
 O'Neill E., *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **46**, 285 (1956); **48**, 945 (1958).
 Osterberg H., Wilkins J. E., *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **39**, 553 (1949).
 Rosenhauer K., *Wissenschaftliche Photographie, Intern. Konf. Köln, 1956 (Helwich, Darmstadt, 1958)*, S. 632.
 Rosenhauer K., Rosenbruch K. J., *Opt. Acta*, **4**, 21 (1957).
 Selwyn E., *Phot. Journ.*, **79**, 513 (1939); **88**, 6 (1948).
 Simon J., *Opt. Acta*, **6**, 279 (1959); *thèse (Paris, 1960)*.
 Thornton B. S., *Opt. Acta*, **4**, 41 (1957).
 Tolmon F. R., Wood J. G., *Journ. Sci. Instr.*, **33**, 236 (1956).
 Toraldo di Francia G., *Nuovo Cimento, Suppl.* **9**, 426 (1952).
 Tsujiuchi J., *Rev. Opt.*, **37**, 1 (1958); *Opt. Acta*, **7** (1960).
 Ukita Y., Tsujiuchi J., *Opt. Acta*, **5**, 39 (1958).
 Zweig H. J., *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **46**, 805 (1956).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Введение	9

Часть первая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Глава 1. Принцип Гюйгенса — Френеля	17
§ 1. Различные формулировки принципа Гюйгенса	17
§ 2. Упрощенное выражение дифрагированного поля	20
§ 3. Образование изображения в оптическом приборе	24
§ 4. Случай приборов с не очень большим относительным отверстием. Преобразование Фурье	26
Глава 2. Преобразование Фурье	28
§ 1. Представление периодической функции рядом Фурье	28
§ 2. Представление некоторых функций с помощью интеграла Фурье	23
§ 3. Интеграл Фурье в комплексных обозначениях	33
§ 4. Полезная теорема: теорема Парсеваля	35
§ 5. Случай функции двух переменных	36
§ 6. Некоторые часто встречающиеся преобразования Фурье	38
§ 7. Случай функции с ограниченным спектром. Теорема об интерполяции	42
§ 8. Применение преобразования Фурье для выражения принципа Гюйгенса	44
§ 9. Примеры применения преобразований Фурье к расчету явлений дифракции. Изучение возникновения «духов» в спектрах решеток	45

Часть вторая

ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Глава 3. Соотношения между объектом и его изображением. Передача пространственных частот	57
§ 1. Некогерентное освещение. Основные соотношения	57
§ 2. Передача пространственных частот при некогерентном освещении	58

§ 3. Фильтрация частот с точки зрения теории дифракции	65
§ 4. Когерентное освещение	66
§ 5. Фильтрация пространственных частот при когерентном освещении. Опыты Аббе	69

Глава 4. Теоретический расчет контраста изображений для некоторых типов объектов	72
--	----

§ 1. Контраст изображения темной точки	72
§ 2. Контраст изображения темной линии и границы светлого поля	75
§ 3. Периодические структуры	80

Глава 5. Стигматический прибор с круглым зрачком	85
--	----

§ 1. Изображение изолированной точки; дифракционное пятно Эри	85
§ 2. Распределение светового потока в пятне Эри	89
§ 3. Изображение при некогерентном освещении	90
§ 4. Изображение освещенных объектов при когерентном освещении	97
§ 5. Примеры практических приложений	101

Глава 6. Фазовый контраст	106
-------------------------------------	-----

§ 1. Принцип метода	106
§ 2. Распределение амплитуд на изображении	111
§ 3. Дифракционные полосы, вызываемые фазовой пластинкой	114
§ 4. Случай периодических объектов. Амплитудная решетка, фазовая решетка	116
§ 5. Фильтрация пространственных частот при фазовом контрасте	119

Глава 7. Частичная когерентность. Освещение в интерферометрах и образование изображения в микроскопе	120
--	-----

§ 1. Некогерентность, когерентность, частичная когерентность	120
§ 2. Пути волн и когерентность	123
§ 3. Определение степени частичной когерентности	127
§ 4. Вычисление степени частичной когерентности для двух точек, освещаемых одним источником	131
§ 5. Когерентность между колебаниями, излучаемыми одним источником в двух различных направлениях; освещение интерферометров	134
§ 6. Когерентность в изображении протяженного источника	135

§ 7. Обычное освещение микроскопов	138
§ 8. Образование изображения при частично когерентном освещении	139
§ 9. Гармонический анализ изображения	141
§ 10. Случай слабого контраста	143
§ 11. Некоторые приложения: образование изображения в микроскопе; интерпретация эффекта Калье	146

Часть третья

ВЛИЯНИЕ АБЕРРАЦИЙ

Глава 8. Влияние малых aberrаций	153
§ 1. Общие соотношения и определения	153
§ 2. Изображение точки	154
§ 3. Общее выражение для допустимого значения малых aberrаций, влияющих на качество изображения точки	157
§ 4. Примеры обсуждения результатов; вычисление допусков	159
§ 5. Влияние малых aberrаций на качество изображения линии (некогерентное освещение)	164
§ 6. Влияние малых aberrаций на контраст изображения периодического объекта (некогерентное освещение)	165
§ 7. Случай когерентного освещения	170
Глава 9. Влияние aberrаций: общий случай	175
§ 1. Общие замечания	175
§ 2. Разложение в ряды для изучения малых aberrаций	176
§ 3. Численное и механическое интегрирование	181
§ 4. Случай больших aberrаций	185
§ 5. Оценка качества приборов с большими aberrациями. Зоны Релея	187
§ 6. Метод Ван-Кампена	189
§ 7. Полосы на краю геометрической каустики	194
§ 8. Влияние произвольных геометрических aberrаций на множитель контраста	196
§ 9. Приближенные формулы для малых пространственных частот	199
Глава 10. Теория информации и оптическое изображение	203
§ 1. Общие замечания	203
§ 2. Определение количества информации	204
§ 3. Поток информации	206
§ 4. Понятие об избыточности кода	207
§ 5. Информация в физических измерениях	209
§ 6. Информация, содержащаяся в оптическом изображении	210

Глава 11. Приложения	214
§ 1. Классический предел разрешения оптического прибора. Возможность его улучшения	214
§ 2. Аподизация	216
§ 3. Точность наводки в продольном направлении и некоторые возможности ее улучшения	220
§ 4. Методы увеличения точности поперечной наводки	224
§ 5. Точность при измерении разности хода в интерференционной микроскопии. Связь с разрешающей силой микроскопа	227
§ 6. Допустимые значения сферической aberrации зеркала, применяемого в радиоастрономии. Станция в Нансе	229
§ 7. Область совместимости условий Аббе и Гершеля	232
§ 8. Ошибка увеличения (или фокусного расстояния) в приборах, обладающих комой	235
9. Допустимые децентрировки поверхностей при изготовлении приборов	236
§ 10. Методика экспериментальных измерений коэффициента контраста	239
§ 11. Шум фона в фотографии	246
§ 12. Фотографические изображения; пропускание пространственных частот и техника компенсационного фильтрования	251
§ 13. Соответствие между объектом и изображением и выбор оптимального закона фильтрования	255
§ 14. Остаточное рассеяние оптическими полированными поверхностями	261

ДОПОЛНЕНИЕ

1. Законы геометрической оптики как предельные формы законов распространения волн малой длины	269
2. Прохождение волны через «фокус» и обоснование мнимого коэффициента в выражении принципа Гюйгенса	272
3. Когерентность и ширина спектральных линий	275
4. Изображение объектов со слабым контрастом при частично когерентном освещении	279
Библиография	285