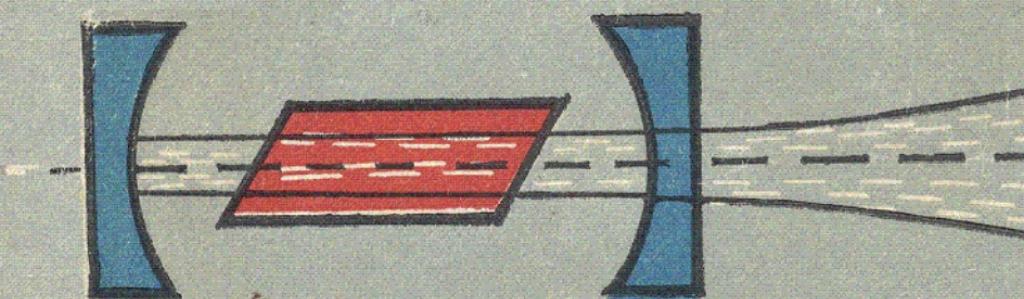


А. М. Гончаренко

# ГАУССОВЫ ПУЧКИ СВЕТА



Издательство «Наука и техника»

АКАДЕМИЯ НАУК БССР  
Ордена Трудового Красного Знамени  
институт физики

А. М. ГОНЧАРЕНКО

# ГАУССОВЫ ПУЧКИ СВЕТА

Минск  
Издательство «Наука и техника»  
1977

535+6Ф2

Г65

УДК 535.3

Гончаренко А. М. Гауссовые пучки света. Мин., «Наука и техника», 1977, 144 с.

Гауссовые световые пучки хорошо описывают реальные узкие пучки света, в частности излучение лазеров, собственные волны открытых резонаторов и оптических лучеводов. В монографии рассмотрены свойства гауссовых пучков в изотропных и анизотропных средах. Исследованы как круговые, так и эллиптические пучки. Первые представляют собой собственные волны (моды) резонаторов со сферическими зеркалами с изотропным заполнением, вторые — моды астигматических резонаторов ОКГ или резонаторов, заполненных анизотропной средой, и астигматических лучеводов. Изучено распространение световых пучков в неоднородных линзоподобных средах с учетом усиления и поглощения. Выяснено влияние анизотропии диэлектрической проницаемости среды на пространственную форму, фазовую поверхность и расходимость световых пучков.

Монография рассчитана на студентов старших курсов физических факультетов, преподавателей, инженеров и научных сотрудников, работающих в области оптической и квантовой электроники.

Таблиц 1. Иллюстрацій 29. Библиография — 64 названия.

Редактор член-корреспондент АН БССР Б. В. Бокуть

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук П. А. Апанасевич,  
кандидаты физико-математических наук  
Б. А. Сотский, А. Г. Хаткевич

Г 20405—029  
—————  
М316—77 88—77

При первоначальном анализе или описании большинства оптических явлений обычно используют плоские электромагнитные волны как наиболее простой вид волн. Понятие плоской волны включает в себя неизменность в пространстве и во времени формы фазовой (плоской) поверхности и амплитуды. Реальные световые пучки, однако, всегда ограничены прежде всего в поперечных направлениях. Дифракция такого пучка приводит к постоянному изменению в пространстве амплитуды и к искривлению фазовой поверхности. Эти особенности пучка приходится учитывать при описании распространения узких световых пучков, например излучения оптических квантовых генераторов (ОКГ).

Когерентное излучение, генерируемое лазерами и мазерами, представляет собой узкие пучки, поперечные размеры которых, однако, намного больше длины волны. Поэтому дифракционная расходимость таких пучков сравнительно невелика, и их амплитуда медленно изменяется с продольной координатой. Такие световые пучки хорошо описываются гауссовыми пучками, в которых амплитуда в поперечной плоскости изменяется по закону Гаусса — Эрмита, а фазовая поверхность искривается по мере распространения пучка. Сейчас доказано и общепризнано, что гауссовые пучки наиболее просто и полно описывают свойства лазерных световых пучков и собственные типы колебаний (моды) открытых резонаторов ОКГ. Правда, гауссовые пучки тоже являются приближением, но достаточно хорошим.

Область применения лазерных лучей весьма велика в настоящее время и простирается от чисто научных сфер, таких, как нелинейная и интегральная оптика, до машиностроительной промышленности. При этом приходится рассматривать особенности распространения и

свойства лазерных лучей в самых разных средах: прозрачных и непрозрачных, однородных и неоднородных, изотропных и анизотропных и т. д. В связи с этим желательно провести подробное исследование свойств гауссовых (лазерных) пучков света в самых разных средах. Данная монография как раз и преследует такую цель. В ней используются методы волновой оптики, хотя для описания гауссовых пучков можно применять и геометрическую оптику (см. например, [1]). В монографии нашли отражение результаты работ советских и зарубежных авторов, а также исследования автора и сотрудников, выполненные в последние десять лет.

В книге не рассматривается распространение гауссовых пучков в нелинейных и гиротропных средах, а также отражение, преломление и дифракция гауссовых пучков. Нам представляется, что эти вопросы пока еще недостаточно разработаны, хотя они и представляют интерес для квантовой электроники и интегральной оптики.

Автор выражает искреннюю благодарность Б. В. Бокутю, П. А. Апанасевичу, Б. А. Сотскому и А. Г. Хаткевичу за ценные советы и замечания, а также Л. А. Белоусовой, Э. Н. Бойко и Н. А. Солоновичу за помощь по подготовке рукописи.

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ В ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

## § 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

При рассмотрении свойств световых пучков будем исходить из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  — векторы электрической и магнитной индукции. Предполагается, что заряды и токи в среде отсутствуют.

К системе (1.1) необходимо добавить материальные уравнения связи, которые в наших случаях линейных сред можно записать в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.2)$$

Тем самым считается, что диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$  соответственно не зависят от времени и интенсивности светового излучения. Физическая сущность уравнений (1.2) состоит в том, что значения векторов индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  полностью определяются значениями полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в данный момент времени и в данной точке пространства.

В изотропной прозрачной среде величины  $\epsilon$  и  $\mu$  — вещественные скаляры, т. е. простые коэффициенты пропорциональности. В анизотропных средах это тензоры. Мы ограничиваемся рассмотрением немагнитных и неги-ротропных сред. Поэтому магнитная проницаемость  $\mu$  совпадает с проницаемостью вакуума, а диэлектрическая проницаемость может быть вещественным или комплексным симметричным тензором 2-го ранга:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Простейшими решениями уравнений Максвелла (1.1) и (1.2) являются плоские монохроматические волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})], \quad (1.4)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})].$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки пространства,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ ,  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к фазовой поверхности,  $\omega$  — циклическая частота,  $v$  — скорость световой волны в среде.

Для плоских волн из (1.1) следуют уравнения [9,10]:

$$\omega\epsilon\mathbf{E} = -[\mathbf{k}, \mathbf{H}], \quad (1.5)$$

$$\omega\mu\mathbf{H} = [\mathbf{k}, \mathbf{E}],$$

где квадратные скобки означают векторное произведение векторов. Соотношения (1.5) иногда называют уравнениями Максвелла для плоских волн. Из них с очевидностью вытекает поперечность плоских электромагнитных волн, синфазность векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и их взаимная перпендикулярность. Из (1.5) следует также дисперсионное уравнение

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2, \quad (1.6)$$

которое связывает постоянную распространения плоских волн с частотой света  $\omega$  и свойствами изотропной среды.

## § 2. ВОЛНОВОЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЯ

При исследовании волновых электромагнитных процессов обычно от уравнений Максвелла (1.1), (1.2) переходят к волновому уравнению, которое для гармонических волн имеет вид

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.1)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  — оператор Лапласса,  $u$  — любая декартова компонента векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  или  $\mathbf{B}$ .

Если среды изотропные и однородные, то уравнение (2.1) удовлетворяется точно.

Но реальные среды не всегда однородные. Неоднородность среды по отношению к электромагнитным свойствам проявляется в зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей от пространственных координат. Однако поскольку магнитная проницаемость даже в магнитных средах мало отличается для световых частот от магнитной проницаемости вакуума, то зависимостью  $\mu$  от координат всегда можно пренебречь. Свойства электромагнитных волн в неоднородных средах определяются, следовательно, только видом функции  $\epsilon(x, y, z)$ .

При распространении электромагнитных волн в неоднородных изотропных средах их поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют следующим волновым уравнениям:

$$\Delta \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon (x, y, z) \mathbf{E} + \operatorname{grad} \left[ \frac{1}{\epsilon} (\operatorname{grad} \epsilon \cdot \mathbf{E}) \right] = 0.$$

$$\Delta \mathbf{H} + \omega^2 \mu \epsilon (x, y, z) \mathbf{H} + \frac{1}{\epsilon} \left[ \operatorname{grad} \epsilon, \operatorname{rot} \mathbf{H} \right] = 0.$$

Если неоднородность среды невелика, так что можно пренебречь последними членами в этих уравнениях, то опять приходим к уравнениям вида (2.1). Следовательно, в неоднородных средах уравнение (2.1) удовлетворяется приближенно при условии, что изменения диэлектрической проницаемости незначительны на расстоянии порядка длины волны (см. также [1]). Мы предполагаем, что для световых волн такие условия выполняются достаточно хорошо и все компоненты электромагнитных векторов удовлетворяют уравнению (2.1). В неоднородных средах при этом «постоянная» распространения  $k = \omega / c \sqrt{\mu \epsilon}$  будет некоторой заданной функцией координат.

Для анизотропных сред волновое уравнение можно получить следующим образом. Уравнения (1.1) запишем в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Подействуем вначале тензором  $\epsilon^{-1}$ , обратным тензору  $\epsilon$  ( $\epsilon\epsilon^{-1} = 1$ ), а затем оператором  $\text{rot}$  на уравнение (2.2). В результате будем иметь

$$\text{rot } \epsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H} = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Меняя теперь местами операторы дифференцирования по времени и пространственным координатам и используя уравнение (2.3), находим

$$\text{rot } \epsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

Таким же образом получаем волновые уравнения для остальных векторов электромагнитного поля:

$$\epsilon^{-1} \text{rot} \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

$$\mu^{-1} \text{rot } \epsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{B} = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

$$\text{rot} \text{rot } \epsilon^{-1} \mathbf{D} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Волновые уравнения (2.1), (2.4)–(2.7) описывают электромагнитные волны во всех точках пространства. В узких световых (лазерных) пучках поле сконцентрировано около одной продольной координаты (оси пучка) и быстро спадает до нуля в поперечных направлениях. Поэтому для таких пучков нет необходимости рассматривать точки пространства, где поле практически равно нулю. Учесть это можно следующим образом. Предположим, что световая монохроматическая волна распространяется в направлении оси  $oz$  и ее амплитуда сравнительно быстро уменьшается в поперечных направлениях и медленно в направлении оси  $oz$ . Тогда любую из компонент поля (например,  $E_y$  или  $H_y$ ) можно представить в виде

$$u = \varphi(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (2.8)$$

где  $\varphi$  — медленно уменьшающаяся с ростом  $z$  комплексная функция. Подставляя (2.8) в уравнение (2.1) и пренебре-

гая членом  $\partial^2\phi/\partial z^2$  по сравнению с  $k \partial\phi/\partial z$  и другими членами, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) называется параболическим. Переход к параболическому уравнению от волнового в теории распространения волн был впервые применен М. А. Леоновичем и В. А. Фоком [2]. Сейчас этот метод широко используется в теории дифракции волн и в теории лазерных пучков и резонаторов ОКГ [3—5]. В работах [6—8] дано обобщение параболического уравнения на анизотропные среды. Далее это уравнение используется нами для рассмотрения свойств гауссовых пучков в различных средах. Приближение, которое сделано при выводе параболического уравнения, хорошо выполняется для световых пучков, генерируемых мазерами и лазерами, для собственных колебаний открытых резонаторов и для мод линзовых лучеводов [1].

### § 3. КРУГОВЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ

Простейшим решением параболического уравнения (2.9) служит функция [5]

$$\phi = \exp \left[ -i \left( P + \frac{k}{2q} (x^2 + y^2) \right) \right]. \quad (3.1)$$

Здесь  $P, q$  — комплексные функции продольной координаты  $z$ . Постоянная распространения  $k$  и двойка в знаменателе экспоненты взяты для удобства. Параметр  $P(z)$  определяет комплексное смещение фазы, а  $q(z)$  характеризует распределение амплитуды в поперечных плоскостях и кривизну фазовой поверхности.

Выражение (3.1) описывает простейший тип гауссовых пучков, так называемую нулевую моду круговых гауссовых пучков. Это означает, что поле такого пучка имеет круговую симметрию и спадает в поперечной плоскости по закону Гаусса  $\exp(-ar^2)$ . Позже рассмотрим высшие типы круговых гауссовых пучков, а также эллиптические пучки, а сейчас подробно изучим свойства основной моды.

Подставляя (3.1) в (2.9) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях переменных  $x$  и  $y$  (уравнение (2.9) должно удовлетворяться при любых значениях этих переменных), получаем следующие уравнения для определения  $q$  и  $P$ :

$$\frac{dq}{dz} = 1, \quad (3.2)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{i}{q}. \quad (3.3)$$

Из (3.2) следует решение

$$q(z) = q_0 + z. \quad (3.4)$$

Постоянная интегрирования  $q_0$  находится из граничных условий. Обычно [1, 5] предпочтительнее выбирать начало координат ( $z=0$ ) в том месте, где фазовая поверхность электромагнитного поля может быть плоской. В таком случае можно положить, что при  $z=0$  амплитуда  $\varphi(x, y, z)$  должна иметь вид

$$\varphi = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right), \quad (3.5)$$

где  $w_0$  — радиус светового пучка в поперечнике. Он определяется тем, что амплитуда поля на расстоянии  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = w_0$  в  $e$  раз меньше ее значения в точке на оси пучка ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ). Сравнивая (3.5) с (3.1), видим также, что в начале координат смещение фазы  $P(z) = 0$ . При этом постоянная интегрирования  $q_0$  равна чисто мнимой величине

$$q_0 = \frac{ikw_0^2}{2} = iz_0. \quad (3.6)$$

Но иногда (в теории дифракции для фазированных отверстий или решеток, в теории эллиптических пучков и астигматических резонаторов ОКГ (см. § 6, 8)) предпочтительнее считать  $q_0$  некоторым заданным комплексным числом. В этом же параграфе мы ограничиваемся, как уже было указано, простейшим случаем гауссовых пучков, для которого  $q_0$  определяется соотношением (3.6). При этом

$$q(z) = iz_0 + z. \quad (3.7)$$

Из (3.2) имеем

$$iP(z) = \ln(iz_0 + z) + \ln P_0. \quad (3.8)$$

Учитывая, что  $P(0) = 0$ , находим  $P_0 = -\ln iz_0$ . Следовательно,

$$iP(z) = \ln \frac{iz_0 + z}{iz_0} = \ln \left( 1 - \frac{iz}{z_0} \right). \quad (3.9)$$

С учетом (3.9) простым преобразованием получаем

$$\exp[-iP(z)] = \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( i \operatorname{arctg} \frac{z}{z_0} \right). \quad (3.10)$$

Таким образом, мы определили функции  $P(z)$  и  $q(z)$  и, следовательно, нашли решение уравнения (2.9). Рассмотрим теперь свойства таких пучков. Для этого удобно ввести, следуя Когельнику и Ли [5], два новых параметра  $R$  и  $w$  посредством соотношения

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2}. \quad (3.11)$$

Из (3.7), (3.11) находим:

$$R(z) = z \left( 1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right), \quad (3.12)$$

$$w^2(z) = w_0^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right). \quad (3.13)$$

Подставляя теперь соотношения (3.10)–(3.13) в (3.1), а затем в (2.8), убеждаемся, что любая компонента электромагнитного поля гауссова пучка может быть представлена в виде

$$u = \frac{w_0}{w} \exp \left\{ -ikz + i\phi - i \frac{k}{2R} (x^2 + y^2) - \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right\}, \quad (3.14)$$

где  $\phi = \operatorname{arctg} z/z_0$ . Как видим, третий и четвертый члены в показателе экспоненты (3.14) определяют изменение фазового фронта и амплитуды пучка в отличие от плоской волны, а второй член — отличие фазы пучка от фазы плоской волны, обусловленное дифракционной расходностью.

Фазовая поверхность пучка в соответствии с (3.14) определяется уравнением

$$kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R} - \phi = kz_1, \quad (3.15)$$

которое получается приравниванием чисто мнимого показателя экспоненты выражения (3.14) постоянной  $kz_1$ .

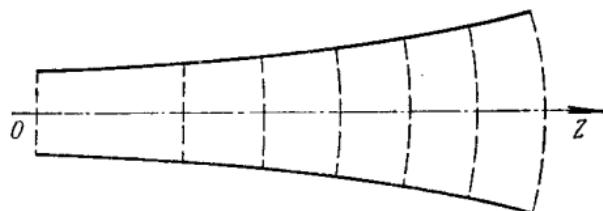


Рис. 3.1. Гауссов световой пучок. Сплошными линиями изображена пространственная форма пучка, штриховыми — фазовая поверхность

Поскольку смещение фазы  $\phi$  невелико по сравнению с другими членами в (3.15), им можно пренебречь, и тогда из (3.15) следует

$$\frac{x^2 + y^2}{2R} = z_1 - z. \quad (3.16)$$

Это уравнение поверхности вращения. Параметр  $R$  является радиусом кривизны этой поверхности для точек, лежащих на оси пучка  $oz$  (рис. 3.1). Центр кривизны данной поверхности имеет координаты  $(0, 0, -z_0^2/z_1)$ . Поскольку при  $x=0, y=0$ , величина  $z_1=z$ , следовательно,  $z_1$  равно значению координаты  $z$ , где фазовая поверхность пересекает ось  $oz$ . Взяв производную от  $R$  по  $z$ , видим, что максимальное искривление фазовой поверхности гауссова пучка наблюдается при  $z=\pm z_0$ . В этих точках  $R_{\min}=2z_0$ . Следовательно, радиус кривизны фазовой поверхности уменьшается от  $R=\infty$  при  $z=0$  до  $R_{\min}=2z_0$  при  $z=z_0$ , а затем вновь возрастает до бесконечности при  $z\rightarrow\infty$ . Это означает, что первоначальная плоская поверхность фазы при  $z=0$  искривляется (см. рис. 3.1, штриховые линии), а затем опять стремится к плоскости. Для лазерных пучков ( $\lambda \sim 1 \text{ мкм}, w_0 \sim 1 \text{ мм}$ )  $R_{\min} \sim 2-3 \text{ м}$ .

Пространственная форма пучка определяется изменением его амплитуды. Как следует из (3.14),

амплитуда  $\phi(x, y, z)$  убывает в поперечных плоскостях при удалении от оси  $oz$  по гауссову закону. При этом с увеличением глубины прохождения пучка (с увеличением  $z$ ) увеличивается и гауссов коэффициент  $w^2$ , который определяет поперечный размер пучка. Это означает, что гауссов пучок расширяется, его поперечные размеры

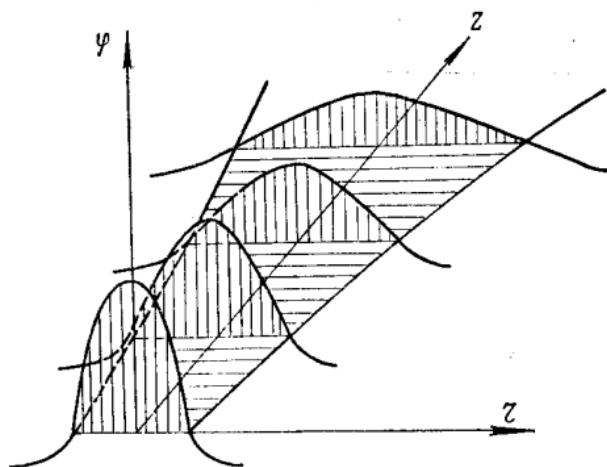


Рис. 3.2. Изменение распределения амплитуды основного гауссова пучка с глубиной проникновения его в среду

увеличиваются (рис. 3.1, 3.2). Наименьший размер пучка определяется величиной  $w_0$ . Множитель  $w_0/w$  в (3.14) характеризует медленное уменьшение амплитуды с ростом  $z$ , которое является следствием дифракционной расходимости и о котором упоминалось выше при выводе параболического уравнения.

Форму пространственной поверхности гауссовых пучков можно найти, если предварительно условиться, каким образом ее определять. В теории гауссовых пучков принято определять форму пучка видом поверхности, которую образуют точки в пространстве, в которых амплитуда поля в  $e$  раз меньше, чем в точках на центральной оси пучка соответствующего поперечного сечения. Поэтому пространственная форма гауссова пучка описывается уравнением, которое получается при приравнивании единице вещественного показателя экспоненты выражения (3.14). В результате находим

$$\frac{x^2 + y^2}{w^2} = 1, \quad (3.17)$$

или

$$x^2 + y^2 = w_0^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right). \quad (3.18)$$

Это уравнение однополостного гиперболоида вращения (рис. 3.3).

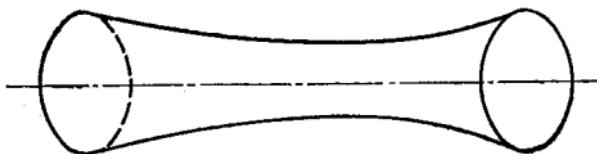


Рис. 3.3. Пространственная форма гауссова пучка

Угол дифракционной расходимости пучка в дальней зоне равен углу между асимптотами данного гиперболоида и его центральной осью. В соответствии с (3.18) получаем

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.19)$$

Если ввести наименьший диаметр пучка  $D_0 = 2w_0$  и записать соотношение (3.19) в виде

$$\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{D_0} \simeq 0,63 \frac{\lambda}{D_0},$$

то убеждаемся, что расхождение гауссовых пучков несколько больше, чем дифракционное расхождение плоской волны при дифракции на круглом отверстии  $\left( \theta \simeq 0,61 \frac{\lambda}{D} \right)$ .

Мы рассмотрели свойства так называемой нулевой моды гауссовых пучков, иначе эту моду называют гауссовым пучком нулевого порядка. Амплитуда такого пучка максимальна в центре его и плавно спадает до нуля при удалении от оси ( $x, y \rightarrow \infty$ ). Покажем сейчас, что параболическому уравнению (2.9) удовлетворяют более общие решения, которые описывают гауссовые пучки высших порядков.

Амплитуда гауссовых пучков может быть представлена произведением

$$\Phi(x, y, z) = \Psi(x, y, z) \Phi_0(x, y, z), \quad (3.20)$$

где  $\Psi$  — неизвестная пока функция, а  $\varphi_0$  — представляет амплитуду нулевой моды. Дифференцируя (3.20) по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и учитывая соотношения (3.1) и (3.10) — (3.13), получаем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \varphi_0 - \frac{4x}{w^2} \left( 1 + i \frac{z}{z_0} \right) \varphi_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \hat{\Psi}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \varphi_0 - \frac{4y}{w^2} \left( 1 + i \frac{z}{z_0} \right) \varphi_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \hat{\Psi}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \hat{\Psi} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \varphi_0. \quad (3.23)$$

Подставляя теперь (3.21) — (3.23) в уравнение (2.9) и учитывая, что этому же уравнению удовлетворяет функция  $\varphi_0$ , приходим к следующему уравнению для  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{4x}{w^2} \left( 1 + i \frac{z}{z_0} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{4y}{w^2} \times \\ & \times \left( 1 + i \frac{z}{z_0} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Сделаем замену переменных

$$\xi = \frac{\sqrt{2}x}{w}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2}y}{w}, \quad z' = \frac{z}{z_0}. \quad (3.25)$$

После несложных преобразований уравнение (3.24) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - 2\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - 2\eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - iw^2 \frac{k}{z_0} \frac{\partial \Psi}{\partial z'} = 0. \quad (3.26)$$

Решение уравнения (3.26) ищем методом разделения переменных. Вначале полагаем, что  $\Psi = f(\xi) F(\eta, z')$ . Тогда из (3.26) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\xi}{f} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \\ & - 2 \frac{\eta}{F} \frac{\partial F}{\partial \eta} - i \frac{w^2 k}{z_0 F} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\xi}{f} \frac{\partial f}{\partial \xi} = - \left[ \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\eta}{F} \frac{\partial F}{\partial \eta} - i \frac{w^2 k}{z_0 F} \frac{\partial F}{\partial z'} \right] = -2m. \quad (3.27)$$

Здесь  $2m$  — постоянная разделения переменных. Из (3.27), таким образом, имеем два уравнения:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} + 2mf = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \eta} - i \frac{w^2 k}{z_0 F} \frac{\partial F}{\partial z'} - 2m = 0. \quad (3.29)$$

Уравнение (3.28) есть уравнение Эрмита, и его решениями являются функции Эрмита  $H_m(\xi)$ . Иначе говоря, мы получили, что  $f(\xi) = H_m(\xi)$ . Решение уравнения (3.29) также ищем разделением переменных. Полагая  $F(\eta, z') = q(\eta)h(z')$  и подставляя в (3.29), аналогичным образом получаем

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \eta} = i \frac{w^2 k}{z_0 h} \frac{\partial h}{\partial z'} + 2m = -2n. \quad (3.30)$$

В этом случае постоянная разделения переменных обозначена через  $-2n$ . Из (3.30) следуют уравнения:

$$\frac{d^2 g}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dg}{d\eta} + 2ng(\eta) = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{dh}{dz'} - (m+n)i \frac{h}{1+z'} = 0. \quad (3.32)$$

Уравнение (3.31) есть уравнение Эрмита и, следовательно,  $g(\eta) = H_n(\eta)$ . Решением же уравнения (3.32) служит функция

$$h(z') = \exp [i(m+n) \operatorname{arctg} z']. \quad (3.33)$$

Таким образом, параболическому уравнению (2.9) удовлетворяет также функция

$$\varphi = H_m(\xi) H_n(\eta) \exp \left[ i(m+n) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{z_0} \right] \varphi_0. \quad (3.34)$$

Учитывая сделанные обозначения, получаем, что амплитуда гауссовых пучков представляется в виде

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{w_0}{w} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R} - \frac{x^2 + y^2}{w^2} + \right. \\ & \left. + i(1+m+n) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{z_0} \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Это комплексная амплитуда гауссовых пучков высших порядков. Как видим, изменение амплитуды в поперечной плоскости определяется теперь функцией Эрмита—Гаусса.

Как известно [41, 42], функции Эрмита — это полиномы, которые можно представить следующим образом:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}). \quad (3.36)$$

Для примера приведем явный вид нескольких функций Эрмита низшего порядка:

$$\begin{aligned} H_0(\xi) &= 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2, \quad H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi, \\ H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12, \\ H_5(\xi) &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi, \\ H_6(\xi) &= 64\xi^6 - 480\xi^4 + 720\xi^2 - 120. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Графики первых трех полиномов представлены на рис. 3.4.

Как видим из рис. 3.4, для полиномов Эрмита при  $n \neq 0$  имеется определенное число точек, в которых функция обращается в ноль. Это означает, что поле гауссова

пучка в поперечной плоскости будет иметь некоторую структуру в виде темных и светлых пятен. При этом число точек, в которых  $H_n(\xi) = 0$  на интервале  $-\infty \leq \xi \leq \infty$  совпадает со значением индекса  $n$ . Поперечная структура поля гауссовых пучков высших порядков представлена на рис. 3.5.

Здесь необходимо отметить следующее. Все гауссовые пучки (моды) высшего порядка с одинаковыми значениями суммы чисел  $m+n$ , как это вытекает из (3.35), имеют одинаковое изменение фазы вдоль оси  $z$ , определяемое выражением  $\Psi(z) = -kz + (m+n+1) \operatorname{arctg} z/z_0$ .

Это означает, что все моды с одинаковыми значениями  $m+n$  вырождены по фазовой скорости. Поэтому любая линейная комбинация таких вырожденных пучков будет образовывать поле, которое распространяется, сохраняя

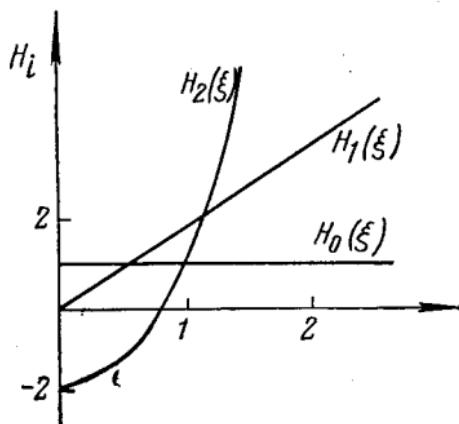


Рис. 3.4. Полиномы Эрмита

неизменной свою форму. Следовательно, и это новое поле тоже будет собственным решением параболического уравнения, или иначе некоторой модой гауссовых пучков. Одна из таких линейных комбинаций образует систему функций, аргументы которых разделяются в цилиндрической системе координат [44]. Эти новые пучки представляются функциями Лагерра—Гаусса [41]. Мы же используем только функции Эрмита—Гаусса, поскольку они применимы и для эллиптических пучков, где не соблюдается круговая симметрия и невозможно использовать цилиндрическую систему координат.

Так как для высших мод гауссовых пучков поперечное распределение поля сложное и амплитуда их обращается в ноль не только при стремлении  $x, y$  к бесконечности, но и в точках, лежащих на оси пучка или при конечных значениях координат  $x, y$ , то прежнее определение пространственной формы и расходимости пучка требуют уточнений [45, 46]. Но оказывается, что более удобного и применимого для любых мод высшего порядка метода определения пространственной формы гауссовых пучков трудно подобрать. Поэтому для пучков лю-

бого порядка обычно оставляют в силе прежнее определение их формы по экспоненциальному убыванию амплитуды в  $e$  раз. В действительности таких точек в поперечном сечении высших типов пучков может быть несколько, поскольку поле много раз может спадать до нуля и опять возрастать в соответствии с поведением функций Эрмита. Просто для определения формы пучка любого порядка

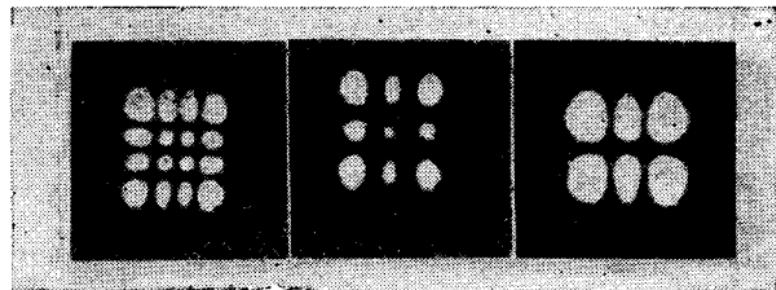


Рис. 3.5. Распределение интенсивности в поперечном сечении гауссовых пучков высших порядков [44]

учитывается только гауссова функция, хотя это и не совсем корректно [45].

Так как все сомножители перед экспонентой в выражении (3.35) вещественные, то фаза пучков высших порядков отличается от нулевого пучка только на величину  $\phi' = (m+n) \operatorname{arctg} z/z_0$ . Поэтому, если по-прежнему пренебречь небольшим суммарным фазовым смещением  $\phi = (1+m+n) \operatorname{arctg} z/z_0$ , фазовую поверхность можно описывать уравнением (3.16).

Подводя итоги нашему анализу свойств пучков высших порядков, можно принять, что параметр пучка  $\omega$  и кривизна фазовой поверхности  $R$  сохраняются одинаковыми для пучков любого порядка. Правда, сама фаза зависит от модовых чисел  $m, n$ , и фазовые скорости разных мод будут различаться. Но исследование свойств фазовой поверхности и пространственной формы любых пучков может быть проведено на основе рассмотрения нулевого гауссова пучка.

Наконец, последнее замечание о гауссовых пучках. Функции Эрмита—Гаусса (3.35) образуют полную систему ортогональных функций, и поэтому любое поле может быть разложено в ряд по этим функциям. Однако это будет приближенным решением волнового уравнения (1.1).

Уже упоминалось, что гауссовые пучки хорошо описывают собственные типы колебаний резонаторов ОКГ и линзовых лучеводов. Но в лазерной технике очень часто используются составные генераторы из нескольких резонаторов. С другой стороны, на практике бывают ситуации, когда нужно лазерное излучение направлять в резонатор или лучёвод. В таких случаях желательно согласовать (привести в соответствие) собственное колебание одной системы с собственными же колебаниями другой. Такое согласование осуществляется преобразованием гауссовых пучков. Рассмотрим этот вопрос, следуя в основном работе Когельника и Ли [5].

Процесс преобразования пучков подразумевает приведение в соответствие поперечных размеров и фазовых поверхностей гауссовых пучков в соседних системах при прохождении пучка из одной в другую. Поскольку для пучков любого порядка размеры и форма их фазовых поверхностей совпадают с этими же характеристиками основного (нулевого) пучка, достаточно ограничиться рассмотрением только особенностей преобразования основного типа.

Так как основные свойства гауссовых пучков определяются комплексным параметром  $q(z)$ , нахождение закона преобразования пучков в пространстве или в какой-либо оптической системе сводится к установлению вида соответствующего преобразования параметра  $q$ . Например, если на одном зеркале резонатора (на входе) световой пучок характеризуется параметром  $q_1$ , то в соответствии с формулой (3.7) на втором зеркале (на выходе) получаем

$$q_2 = q_1 + d, \quad (4.1)$$

где  $d$  — расстояние между зеркалами. Чтобы пучок на втором зеркале неискажался, остается только выбрать кривизну этого зеркала соответственно с кривизной фазовой поверхности пучка, определяемой параметром  $q_2$ .

Наиболее часто световые пучки преобразовываются тонкими линзами (рис. 4.1). Линзы используются для фокусировки лазерного луча или просто для изменения поперечного размера и кривизны фазовой поверхности светового поля. При этом предполагается, что идеальные

линзы не нарушают поперечной структуры поля. Как известно [5, 10], сферические волны, имеющие радиус кривизны волнового фронта  $R_1$ , преобразуются линзами в сферические волны с кривизной фронта  $R_2$  по закону

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}, \quad (4.2)$$

где  $f$  — фокусное расстояние линзы. Так как гауссов пучок имеет сферическую фазовую поверхность с опреде-

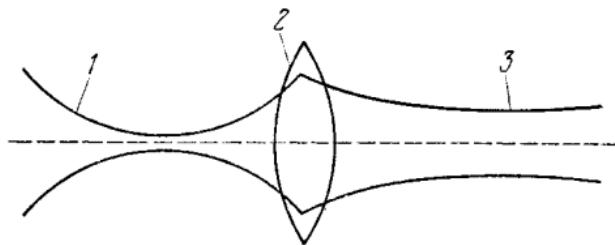


Рис. 4.1. Преобразование гауссова пучка тонкой линзой [1]: 1 — падающий пучок, 2 — линза, преобразующая пучки, 3 — преобразованный пучок

ленным радиусом кривизны, закон преобразования фазовой поверхности пучка будет совпадать с законом (4.2). Если к тому же учесть, что поперечный размер пучка не должен изменяться тонкой линзой, то с учетом формул (3.11) и (4.2) приходим к следующему закону преобразования гауссовых пучков тонкими линзами:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}, \quad (4.3)$$

где  $q_1$  — параметр пучка на входе линзы, а  $q_2$  — на выходе.

Для установления закона преобразования пучка, находящегося на расстоянии  $d_1$  от линзы, в пучок на расстоянии  $d_2$  за линзой необходимо наряду с законом (4.3) учесть формулу (4.1). Тогда с учетом знаков перед  $d_1$ ,  $d_2$  получаем систему трех уравнений:

$$q'_1 = q_1 - d_1, \quad \frac{1}{q'_2} = \frac{1}{q'_1} - \frac{1}{f}, \quad (4.4)$$

$$q_2 = q'_2 + d_1,$$

где  $q_1, q_2$  — параметры пучка перед и после линзы соответственно. Из (4.4) находим

$$q_2 = \frac{\left(1 - \frac{d_2}{f}\right)q_1 + \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}\right)}{-\frac{q_1}{f} + \left(1 - \frac{d_1}{f}\right)}. \quad (4.5)$$

Преобразование гауссовых пучков произвольными системами (линзами, лучеводами, резонаторами и т. д.) можно свести к простому матричному преобразованию комплексного параметра  $q$ . Действительно (см. [1, 5]), законы преобразования (4.1), (4.3), (4.5) можно представить в общем виде так называемого закона  $ABCD$ :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (4.6)$$

При этом коэффициенты  $A, B, C, D$  образуют соответственно для (4.1), (4.3) и (4.5) следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f}, & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f}, & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Нетрудно убедиться, что матрица (4.9) сложного преобразования получается простым перемножением матриц простых последовательных преобразований. Самое привлекательное здесь состоит в том, что матрицы простых преобразований есть  $ABCD$  матрицы преобразований параксиальных лучей [5] и поэтому для всех оптических структур они обычно известны.

Следовательно, чтобы найти закон преобразования гауссовых пучков любой сложной оптической системой, достаточно определить матрицу этой системы простым

## Элементы преобразования световых лучей

Оптическая система	Схема оптической системы	Матрица преобразования
Пространственный промежуток		$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Тонкая линза		$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Система двух линз		$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f_1} \\ 1 & -\frac{d_2}{f_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} \\ 1 & -\frac{d_1}{f_2} - \frac{d_2}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix}$
Плоскопараллельная пластинка		$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Плоскопараллельный слой квадратичной неоднородной среды		$\begin{pmatrix} \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}}, & 0 & 1 \\ -\sqrt{n_0 n_2} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}}, & \frac{1}{\sqrt{n_0 n_2}} \sin \sqrt{\frac{n_2}{n_0}}, & \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \end{pmatrix}$

перемножением матриц составных частей системы. Для примера в таблице приведены матрицы преобразования лучей простыми оптическими элементами [5].

Закон Когельника  $ABCD$  справедлив для многих простых оптических систем и даже для квадратичных неоднородных сред. Он, однако, неприменим для гауссовых пучков в средах с произвольным законом поперечного распределения показателя преломления и для линз с аберрациями, которые нарушают гауссов закон изменения интенсивности пучка в поперечной плоскости.

Наконец заметим, что строгое решение задачи о преобразовании пучков оптическими системами необходимо было бы проводить с учетом отражения части энергии пучка на границах раздела сред. Однако это связано с весьма громоздкими вычислениями [11, 12] и в приближенной теории гауссовых пучков не всегда оправдано.

## § 5. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ

До сих пор рассматривались свойства гауссовых пучков с круговой симметрией, в которых пространственная форма и фазовая поверхность представлялись поверхностями вращения около оси пучка. Такие пучки излучаются лазерами, резонаторы которых образованы сферическими зеркалами и которые не содержат элементов, нарушающих круговую симметрию резонатора. Круговые пучки распространяются и в лучеводах, в которых также сохраняется симметрия вращения. Но, во-первых, на практике не всегда соблюдается сферичность зеркал резонаторов ОКГ, иногда они бывают даже цилиндрическими [13, 14]. Круговая симметрия нарушается и тогда, когда сферический резонатор содержит лазерную трубку с окошками Брюстера или просто любые наклонные плоскопараллельные пластинки [24], а также при различных преобразованиях световых пучков и даже при их отражении [15], [43], [44].

Следовательно, в общем случае гауссовые пучки должны иметь в поперечных сечениях не круговую, а эллиптическую форму. Свойства таких пучков рассмотрены в работах [16—21]. В этом и следующем параграфе из-

ложена общая теория эллиптических гауссовых пучков в изотропных прозрачных средах \*).

Как уже говорилось, изучение свойств гауссовых световых пучков сводится к нахождению и исследованию решения параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (5.1)$$

в котором  $\Phi(x, y, z)$  — амплитуда светового пучка, зависящая от всех пространственных координат, но медленно изменяющаяся с продольной координатой  $z$ . Решение этого уравнения мы брали в форме кругового пучка

$$\Phi = \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2q} - iP \right]. \quad (5.2)$$

В простейшем случае нарушение круговой симметрии электромагнитного излучения будет учтено, если вместо (5.2) искать решение уравнения (5.1) в форме

$$\Phi_0 = \exp \left[ -i \left( \frac{kx^2}{2q_x} + \frac{ky^2}{2q_y} + P \right) \right], \quad (5.3)$$

где комплексные параметры  $q_x \neq q_y$ . Как и прежде, подставляя (5.3) в (5.1) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях переменных  $x, y$ , получаем:

$$\frac{dq_x}{dz} = 1, \quad \frac{dq_y}{dz} = 1, \quad (5.4)$$

$$2i \frac{dP}{dz} = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}. \quad (5.5)$$

Чтобы решить эти уравнения, необходимо задать граничные условия. Возьмем вначале самый простой случай, а именно полагаем, что при  $z=0$  амплитуда гауссова пучка имеет вид

$$\Phi_0 = \exp \left[ -\frac{x^2}{w_{0x}^2} - \frac{y^2}{w_{0y}^2} \right]. \quad (5.6)$$

\* ) В этом параграфе, а также в шестом и восьмом использованы (с любезного согласия Л. Белоусовой) результаты по исследованию ею свойств гауссовых пучков и астигматических резонаторов ОКГ.

Из предыдущего известно, что при  $z=0$  фазовая поверхность пучка плоская, а поперечная его форма эллиптическая. Параметры  $w_{0x}$ ,  $w_{0y}$  представляют собой минимальные размеры полуосей эллипсов поперечных сечений в направлении осей  $ox$  и  $oy$  соответственно.

С учетом граничных условий из (5.4) и (5.5) находим:

$$q_x = z + iz_{0x}, \quad z_{0x} = \frac{kw_{0x}^2}{2}, \quad (5.7)$$

$$q_y = z + iz_{0y}, \quad z_{0y} = \frac{kw_{0y}^2}{2}, \quad (5.8)$$

$$2iP = \ln \left( 1 - \frac{iz}{z_{0x}} \right) + \ln \left( 1 - \frac{iz}{z_{0y}} \right). \quad (5.9)$$

Подставляя (5.7) — (5.9) в (5.3), получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_0 = & \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0x}^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0y}^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ & \times \exp \left[ -\frac{x^2}{w_x^2} \left( 1 + i \frac{z}{z_{0x}} \right) \right] \exp \left[ -\frac{y^2}{w_y^2} \times \right. \\ & \times \left. \left( 1 + i \frac{z}{z_{0y}} \right) \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0x}} + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0y}} \right], \end{aligned} \quad (5.10)$$

где

$$w_x^2 = w_{0x}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0x}^2} \right), \quad w_y^2 = w_{0y}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0y}^2} \right). \quad (5.11)$$

Из (5.10), (5.11) заключаем, что пространственная форма пучка будет определяться теперь уравнением

$$\frac{x^2}{w_{0x}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0x}^2} \right)} + \frac{y^2}{w_{0y}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0y}^2} \right)} = 1. \quad (5.12)$$

Из (5.12) видно, что в любом поперечном сечении пучка ( $z=\text{const}$ ) получаем уравнение эллипса. Поэтому такие пучки и называются эллиптическими. Величины  $2w_x(z)$

и  $2\omega_y(z)$  определяют поперечные диаметры пучка в направлении осей  $ox$  и  $oy$ .

Однако в целом гауссов пучок не представляет собой эллиптический параболоид в отличие от кругового пучка, который описывается однополостным гиперболоидом вращения. Отличие от эллиптического параболоида состоит в том, что поперечная форма эллиптического пучка изменяется от эллиптической с одной ориентацией боль-

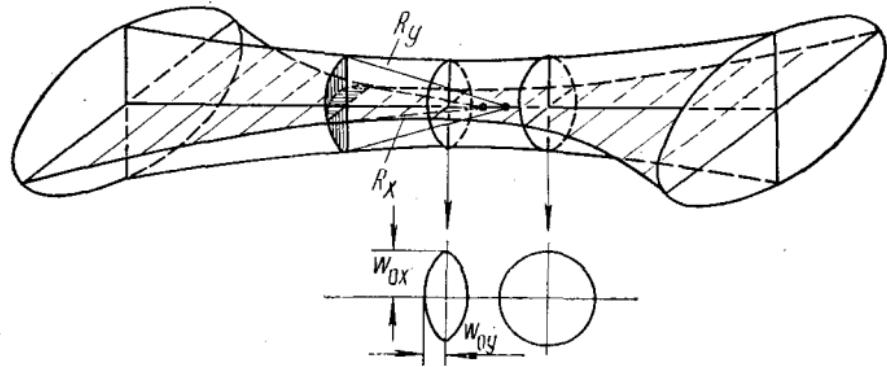


Рис. 5.1. Вид эллиптического гауссова пучка

шой оси эллипса при  $z=0$  до эллиптической с перпендикулярным направлением большой оси. Изменение это происходит не в результате поворота осей эллипса, а вследствие изменения их величин. Поэтому при значении координаты  $z=\pm w_{0x}w_{0y}\pi/\lambda$  поперечное сечение пучка становится круговым (рис. 5.1).

В соответствии с (5.10) фазовая поверхность эллиптических пучков определяется уравнением

$$\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{z}{z_{0x}} + \frac{y^2}{w_y^2} - \frac{z}{z_{0y}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0x}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0y}} + kz = kz_1. \quad (5.13)$$

Пренебрегая малыми членами  $1/2 \operatorname{arctg} z/z_{0x}$ ,  $1/2 \operatorname{arctg} z/z_{0y}$  и вводя обозначения

$$R_x = \frac{k\omega_x^2 z_{0x}}{2z} = z \left( 1 + \frac{z_{0x}^2}{z^2} \right), \quad (5.14)$$

$$R_y = \frac{k\omega_y^2 z_{0y}}{2z} = z \left( 1 + \frac{z_{0y}^2}{z^2} \right), \quad (5.15)$$

уравнение (5.13) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} = z_1 - z. \quad (5.16)$$

Сравнивая (5.16) с (3.16), заключаем, что фазовая поверхность эллиптического пучка астигматическая с главными радиусами кривизны  $R_x, R_y$ . В реальных лазерных (гауссовых) пучках радиусы кривизны фазовой поверхности намного больше его поперечных сечений ( $R_x, R_y \gg w_x, w_y$ ). Поэтому в окрестности около продольной оси пучка (это пространство и заполняет гауссов пучок) величины  $R_x, R_y$  можно считать постоянными при небольших изменениях координаты  $z$ , определяемых кривизной фазовой поверхности. В этом приближении уравнение (5.16) есть уравнение поверхности второго порядка, кривизна которой изменяется с изменением  $z$ .

При  $z=0$  и  $z=\pm\infty$  главные радиусы кривизны  $R_x, R_y$  стремятся к бесконечности. Это означает превращение волнового фронта пучка в плоский. При  $z=\pm w_{0x}w_{0y}\pi/\lambda$ , когда поперечное сечение пучка имеет круговую форму, фазовая поверхность является астигматической и имеет главные радиусы кривизны:

$$R_x = \pm \frac{\pi}{\lambda} w_{0x} w_{0y} \left( 1 + \frac{w_{0x}^2}{w_{0y}^2} \right), \quad (5.17)$$

$$R_y = \pm \frac{\pi}{\lambda} w_{0x} w_{0y} \left( 1 + \frac{w_{0y}^2}{w_{0x}^2} \right). \quad (5.18)$$

Угловая расходимость гауссова эллиптического пучка неодинаковая в плоскостях ( $xz$ ) и ( $yz$ ) и равна соответственно

$$\theta_x = \frac{\lambda}{\pi w_{0x}}, \quad \theta_y = \frac{\lambda}{\pi w_{0y}}. \quad (5.19)$$

Рассмотренное решение (5.3) параболического уравнения представляет, однако, простейший эллиптический пучок нулевого порядка. Немного позже мы убедимся, что существуют более сложные гауссовые пучки даже нулевого порядка. А сейчас предварительно докажем, что и эллиптические пучки в общем случае описываются функциями Эрмита—Гаусса.

Действительно, как и прежде, предположим, что решение уравнения (5.1) представляется произведением

$$\varphi = \psi(x, y, z) \Phi_0(x, y, z), \quad (5.20)$$

где  $\Phi_0$  — амплитуда нулевого эллиптического пучка,  $\psi$  — неизвестная функция. Дифференцируя  $\varphi$  по координатам и учитывая (5.10), из (5.1) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{4x}{w_x^2} \left( 1 + i \frac{z}{z_{0x}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \\ - \frac{4y}{w_y^2} \left( 1 + i \frac{z}{z_{0y}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

По-прежнему введем систему координат:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}x}{w_x}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2}y}{w_y}, \quad z' = z, \quad (5.22)$$

после чего уравнение (5.21) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{w_y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{2\xi}{w_x^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \\ - \frac{2\eta}{w_y^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - ik \frac{\partial \psi}{\partial z'} = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Разделением переменных

$$\psi(\xi, \eta, z') = f(\xi) g(\eta) h(z') \quad (5.24)$$

из (5.23) получаем три следующих уравнения:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} + 2mf(\xi) = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{d^2 g}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dg}{d\eta} + 2ng(\eta) = 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{dh}{dz} - ih \left[ \frac{m}{z_{0x} \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0x}^2} \right)} + \frac{n}{z_{0y} \left( 1 + \frac{z^2}{z_{0y}^2} \right)} \right] = 0. \quad (5.27)$$

Уравнения (5.25), (5.26) определяют функции Эрмита, а решением уравнения (5.27) служит функция

$$h_{mn}(z) = \exp \left( im \operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0x}} + in \operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0y}} \right). \quad (5.28)$$

Таким образом, как и раньше, амплитуда гауссова пучка представляется в форме

$$\Phi = H_m(\xi) H_n(\eta) h_{mn}(z) \varphi_0(x, y, z). \quad (5.29)$$

Окончательное выражение для компонент векторов электромагнитного поля эллиптических гауссовых пучков произвольного порядка может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} u = \Phi(x, y, z) \exp(-ikz + i\omega t) = \\ = \left(1 + \frac{z^2}{z_{0x}^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{z^2}{z_{0y}^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_y}\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} - i \frac{x^2}{w_x^2} \frac{z}{z_{0x}} - i \frac{y^2}{w_y^2} \frac{z}{z_{0y}} + \right. \\ + i \left(\frac{1}{2} + m\right) \operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0x}} + i \left(\frac{1}{2} + n\right) \times \\ \times \left.\operatorname{arctg} \frac{z}{z_{0y}} - ikz + i\omega t\right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Но рассмотренные пучки оказываются все-таки частным случаем более общего вида световых пучков. Это обусловлено слишком жесткими граничными условиями (5.6). Попытаемся сейчас найти наиболее общее решение уравнений (5.4) и (5.5) для эллиптических пучков.

В произвольном случае из (5.4) следуют решения

$$q_x = z + c_x, \quad q_y = z + c_y, \quad (5.31)$$

где  $c_x, c_y$  — постоянные интегрирования. Поскольку  $q_x$  и  $q_y$  — комплексные функции, то естественно считать

комплексными и величины  $c_x$ ,  $c_y$ . Положим в отличие от предыдущего, что

$$c_x = a + iz_{0x}, \quad (5.32)$$

$$c_y = a + iz_{0y}. \quad (5.33)$$

В (5.33) можно было бы вместо  $a$  брать некоторую постоянную  $b$ . Но фактически никакого обобщения теории при этом не получается. Просто выбором  $b=a$  фиксируем начало координат  $z=0$  таким образом, что электромагнитное поле справа и слева от плоскости  $z=0$  становится весьма похожим, и, следовательно, в этом случае  $z=0$  является как бы центром пучка. В этом можно убедиться, рассматривая свойства пучков.

При выбранных значениях постоянных  $c_x$ ,  $c_y$  получаем, что параметр  $q_x(z)$  становится чисто мнимой величиной  $q_x = iz_{0x}$  при  $z=-a$ , а  $q_y(z) = iz_{0y}$  при  $z=a$ , тогда как раньше это имело место в одной точке в начале координат  $z=0$ .

В соответствии с (5.5) комплексное смещение фазы  $P(z)$  определяется теперь соотношением

$$2iP(z) = \ln(z+a+iz_{0x}) + \ln(z-a+iz_{0y}) + \ln c. \quad (5.34)$$

Если положить (ниже мы убедимся, что это весьма целесообразно)  $\ln c = -\ln(iz_{0x}) - \ln(iz_{0y})$ , то

$$2iP(z) = \ln\left(1 - i\frac{z+a}{z_{0x}}\right) + \ln\left(1 - i\frac{z-a}{z_{0y}}\right). \quad (5.35)$$

Введем принятые ранее обозначения

$$\frac{1}{q_j} = \frac{1}{R_j} - i \frac{2}{k\omega_j^2} (j = x, y). \quad (5.36)$$

Выше мы уже видели, что величины  $R_j$  — главные радиусы кривизны фазовой поверхности пучка, а  $\omega_j$  — радиусы поперечных размеров. Из (5.31) — (5.33) и (5.36) находим:

$$R_x = (z+a) \left[ 1 + \frac{z_{0x}^2}{(z+a)^2} \right], \quad (5.37)$$

$$R_y = (z-a) \left[ 1 + \frac{z_{0y}^2}{(z-a)^2} \right], \quad (5.38)$$

$$w_x^2 = w_{0x}^2 \left[ 1 + \frac{(z+a)^2}{z_{0x}^2} \right], \quad (5.39)$$

$$w_y^2 = w_{0y}^2 \left[ 1 + \frac{(z-a)^2}{z_{0y}^2} \right], \quad (5.40)$$

где по-прежнему  $w_{0j} = \frac{2}{k} z_{0j}$ .

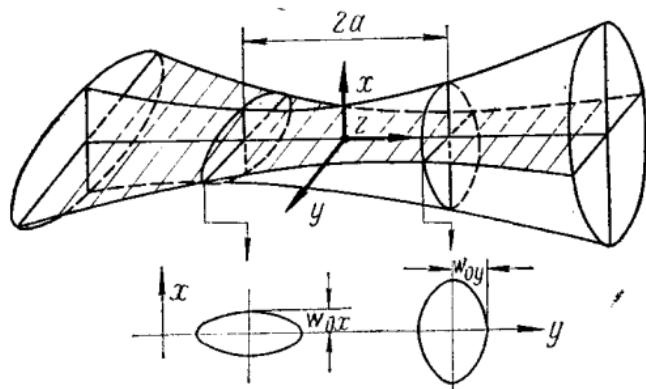


Рис. 5.2. Пространственная форма произвольного эллиптического пучка

Окончательное выражение для амплитуды гауссовых эллиптических пучков принимает, следовательно, вид

$$\Phi = \left[ 1 + \frac{(z+a)^2}{z_{0x}^2} \right]^{-\frac{1}{4}} \left[ 1 + \frac{(z-a)^2}{z_{0y}^2} \right]^{-\frac{1}{4}} \times \\ \times \exp \left( \frac{i}{2} \delta_x + \frac{i}{2} \delta_y \right) \exp \left( -i \frac{kx^2}{2R_x} - i \frac{ky^2}{2R_y} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} \right). \quad (5.41)$$

Здесь  $\delta_x = \operatorname{arctg}(z+a)/z_{0x}$ ,  $\delta_y = \operatorname{arctg}(z-a)/z_{0y}$ .

Исследуем теперь свойства таких пучков. Прежде всего из (5.37) — (5.41) заключаем, что минимальный поперечный размер пучка в плоскости ( $xz$ ) наблюдается при  $z=-a$ , а в плоскости ( $yz$ ) при  $z=a$  (рис. 5.2). Следовательно, отличительной особенностью этих гауссовых пучков является то, что их минимальные размеры во взаимно перпендикулярных плоскостях ( $x, z$ ) и ( $y, z$ ) на-

ходятся не при одном и том же значении координаты  $z$ , а раздвинуты на расстояние  $\Delta z = 2a$ . В дальнейшем (§ 8) увидим, что именно такие пучки являются собственными колебаниями (модами) резонаторов ОКГ с астигматическими зеркалами. В точках  $z = \pm a$  главные радиусы кривизны соответственно равны  $R_x = -\infty$ ,  $R_y = -2a \times \left[ 1 + \frac{z_{0y}^2}{4a^2} \right]$  и  $R_x = 2a \left[ 1 + \frac{z_{0x}^2}{4a^2} \right]$ ,  $R_y = \infty$ . Это означает, что при  $z = \pm a$  фазовая поверхность пучка пред-

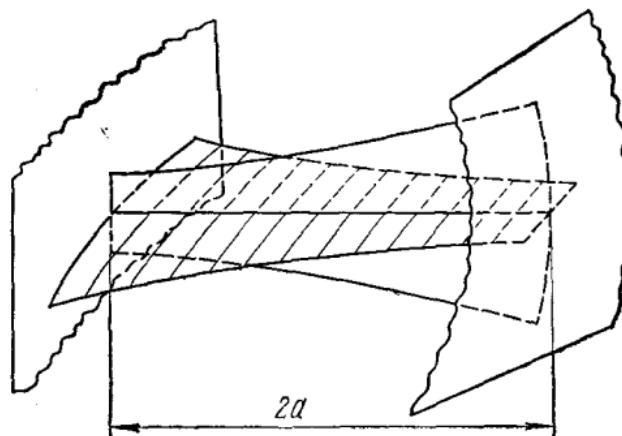


Рис. 5.3. Вид фазовой поверхности эллиптического пучка при  $z = -a$  и  $z = a$

ставляется соответствующими взаимно перпендикулярными цилиндрическими поверхностями (рис. 5.3).

Пространственная форма рассматриваемого пучка определяется уравнением

$$\frac{x^2}{w_x^2} + \frac{y^2}{w_y^2} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{w_{0x}^2 \left[ 1 + \frac{(z+a)^2}{z_{0x}^2} \right]} + \frac{y^2}{w_{0y}^2 \left[ 1 + \frac{(z-a)^2}{z_{0y}^2} \right]} = 1. \quad (5.42)$$

Вид этого пучка показан на рис. 5.2. Поперечные сечения его — эллипсы, деформирующиеся с изменением про-

дольной координаты  $z$ . Из равенства  $w_x = w_y$  получаем, что при

$$z = \frac{-a(z_{0x} + z_{0y}) \pm \sqrt{z_{0x}z_{0y}[(z_{0x} - z_{0y})^2 + 4a^2]}}{z_{0y} - z_{0x}} \quad (5.43)$$

поперечные сечения пучка превращаются в окружности.

Фазовая поверхность в соответствии с (5.41) определяется уравнением

$$\frac{kx^2}{2R_x} + \frac{ky^2}{2R_y} + k(z - z_1) - \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y) = 0. \quad (5.44)$$

Пренебрегая малыми смещениями фазы  $\delta_x$  и  $\delta_y$ , из (5.44) имеем

$$\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} = z', \quad (5.45)$$

где  $z' = z_1 - z$ . По-прежнему видим, что  $z_1 = z$ , если  $x, y = 0$ , т. е.  $z_1$  — это значение координаты точки пересечения фазовой поверхности с осью  $oz$ .

Для анализа свойств этой поверхности необходимо учитывать знаки радиусов кривизны. Принимаем, что радиус кривизны имеет положительное направление, если выпуклость поверхности направлена в сторону увеличения координаты  $z$ , т. е. направо. Противоположное направление кривизны считается отрицательным.

Как видим из (5.37), (5.38), при значениях  $z > a$  и  $z < -a$  главные радиусы кривизны  $R_x, R_y$  имеют один и тот же знак (+ или — соответственно). Следовательно, фазовая поверхность при этих  $z$  является выпуклой астигматической и представляет собой эллиптический параболоид. При  $|z| < a$  радиусы кривизны имеют разные знаки, и уравнение (5.45) поэтому оказывается уравнением гиперболического параболоида. Последнее означает, что фазовая поверхность в промежутке между плоскостями  $z = a$  и  $z = -a$  седлообразная. При  $z = \pm a$ , как мы уже отмечали, фазовая поверхность принимает форму параболического цилиндра. Наконец, при  $z \rightarrow \pm \infty$  радиусы кривизны  $R_x, R_y$  стремятся к бесконечности.

Более детально за изменением формы фазовой поверхности эллиптического пучка можно проследить с помощью ее поперечных сечений ( $z = \text{const}$ ) [21]. Предположим, что некоторая произвольная плоскость  $z = c$

пересекает фазовую поверхность. В этой плоскости в соответствии с (5.45) получаем кривую, уравнение которой есть

$$\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} = z_1 - c, \quad (5.46)$$

где

$$R_x = (c + a) \left[ 1 - \frac{z_{0x}^2}{(c + a)^2} \right], \quad (5.47)$$

$$R_y = (c - a) \left[ 1 + \frac{z_{0y}^2}{(c - a)^2} \right].$$

Если  $c = z_1$ , плоскость сечения проходит через точку пересечения фазовой поверхности с осью  $oz$ . Если к тому же  $|z_1| < a$ , то  $R_x > 0$ , а  $R_y < 0$  и из (5.46) получаем две пересекающиеся прямые (рис. 5.4, а), уравнения которых

$$y = \pm \left( \frac{|R_y|}{R_x} \right)^{\frac{1}{2}} x. \quad (5.48)$$

Угол между этими прямыми изменяется с изменением радиусов кривизны  $R_x$ ,  $R_y$ , зависимость которых от  $z$  дана на рис. 5.5. Если  $z_1 = a$ , то в сечении имеется одна прямая  $x = 0$ , а при  $z_1 = -a$  прямая  $y = 0$ . Это объяс-

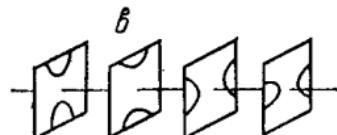
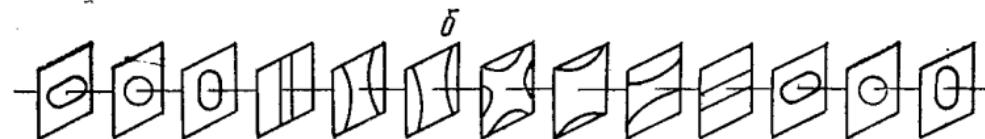
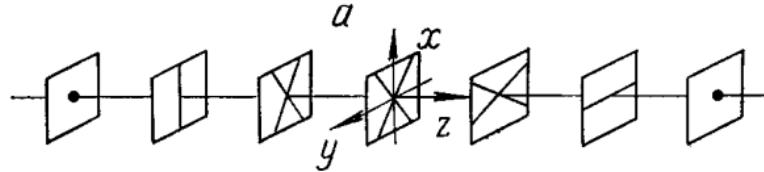


Рис. 5.4. Сечения фазовой поверхности плоскостями  $z = c$ : а —  $c = z$ , б —  $|c| < z$ , в —  $|c| > z_1$

няется тем, что при  $z = \pm a$  цилиндрические фазовые поверхности просто касаются плоскостей сечения. При  $c = z_1 > a$  или  $c = z_1 < -a$  величины  $R_x, R_y$  имеют одинаковые знаки и уравнению (5.46) удовлетворяют только точки, лежащие на оси  $oz$ . В этих случаях плоскости  $c = z_1$  также являются касательными плоскостями к выпуклой фазовой поверхности.

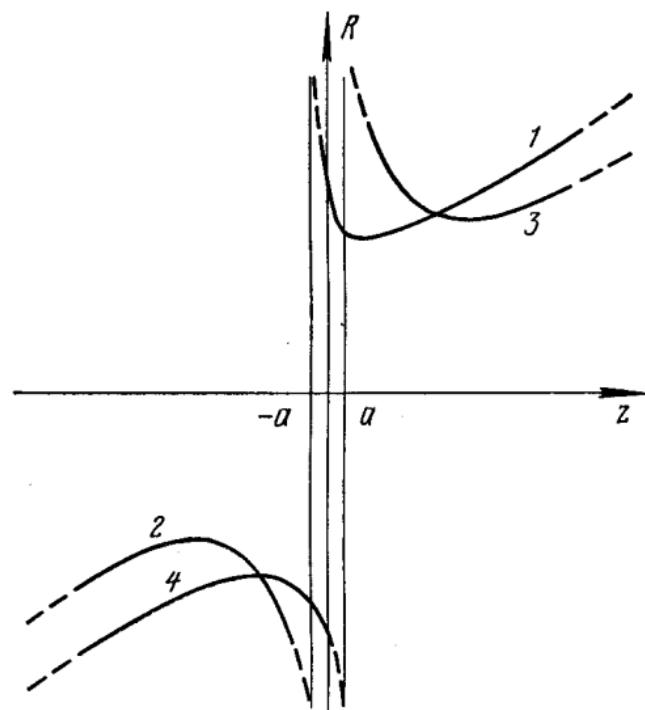


Рис. 5.5. Зависимость главных радиусов кривизны фазовой поверхности эллиптического пучка от продольной координаты: 1, 2 — зависимость  $R_x(z)$ , 3, 4 —  $R_y(z)$ ,  $|R_x|_{\min} = 2z_{0x}$  при  $z = z_{0x} - a$  и  $z = -(z_{0x} + a)$ ,  $|R_y|_{\min} = 2z_{0y}$  при  $z = z_{0y} + a$  и  $z = -(z_{0y} - a)$

Если  $c \neq z_1$ , но  $|c| < |z_1|$ , то плоскости сечений расположены ближе к началу координат ( $z=0$ ), чем точка пересечения фазовой поверхности с осью  $oz$ . Обозначим  $z_1 - c = b$ , тогда из (5.46) получаем

$$\frac{x^2}{2bR_x} + \frac{y^2}{2bR_y} = 1. \quad (5.49)$$

Если же, кроме того,  $0 \leq c < a$ , то  $R_x > 0, R_y < 0$  и из (5.49) следует уравнение

$$\frac{x^2}{2bR_x} - \frac{y^2}{2b|R_y|} = 1. \quad (5.50)$$

Это уравнение гиперболы, эксцентриситет которой при увеличении постоянной  $c$  возрастает, а расстояние между вершинами уменьшается (см. рис. 5.4,б). При  $c=0$  эти гиперболы имеют асимптоты

$$y = \pm \sqrt{\frac{a^2 + z_{0y}^2}{a^2 + z_{0x}^2}} x, \quad (5.51)$$

а расстояние между вершинами

$$2A = 2 \sqrt{\frac{2z_1(a^2 + z_{0x}^2)}{a}}.$$

В случае, если  $-a \leq c \leq 0$ , т. е. если сечение проходит в промежутке, аналогичном только что рассмотренному, но расположенному слева от начала координат, наблюдаются подобные изложенным результаты. Отличие состоит в том, что координаты  $x$  и  $y$  меняются ролями. Это хорошо видно на рис. 5.4,б.

При  $c=a$   $b>0$ , а при  $c=-a$  величина  $b<0$ . В этих случаях  $R_y$  или  $R_x$  соответственно обращаются в бесконечность, и поэтому в сечениях получаем по две прямые, параллельные осям  $ox$  или  $oy$ .

В сечениях  $|c|>a$  наблюдаются эллипсы

$$\frac{x^2}{2bR_x} + \frac{y^2}{2bR_y} = 1, \quad (5.52)$$

эксцентриситет которых изменяется от сечения к сечению (рис. 5.4,б). При

$$c = \frac{z_{0y}^2 - z_{0x}^2 \pm \sqrt{(z_{0x}^2 - z_{0y}^2) + 8a^2(2a^2 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2)}}{4a}$$

эллипсы вырождаются в окружности.

Наконец, для области  $|c|<a$ , где фазовая поверхность седлообразная, имеет смысл рассматривать сечения  $|c|>|z_1|$ , которые расположены дальше от начала координат, чем точка пересечения фазовой поверхности с осью  $oz$ . В этих случаях получаются гиперболы, уравнение которых аналогично (5.50) и отличается от него только переменой местами координат  $x$  и  $y$ . Это хорошо видно из рис. 5.4,б,в.

Как уже упоминалось, собственные волны (моды) резонаторов ОКГ и оптических лучеводов представляются гауссовыми пучками. Но линзы лучеводов и зеркала резонаторов могут быть астигматическими, а главные плоскости таких астигматических поверхностей произвольно ориентированы друг относительно друга. Физическая сущность установления собственных мод резонаторов (и лучеводов) в виде гауссовых пучков заключается в том, что в системе устанавливается такое поле, для которого фазовая поверхность должна совпадать с формой поверхности зеркала. Последнее, правда, справедливо при отсутствии дифракционных потерь, которые приводят к дополнительному искривлению фазовой поверхности и которые здесь не учитываются. Поэтому следует ожидать, что если главные плоскости поверхностей астигматических зеркал повернуты друг относительно друга на произвольный угол, то и соответствующий гауссов пучок должен определенным образом не только деформироваться при распространении от одного зеркала к другому, но и поворачиваться.

В предыдущем параграфе рассмотрены свойства эллиптических пучков, поперечные сечения пространственной формы и фазовая поверхность которых деформируются, однако ориентация главных плоскостей пучка остается неизменной. В данном параграфе покажем, что уравнения Максвелла допускают существование эллиптических вращающихся гауссовых пучков. Иначе говоря, возможны такие гауссовые пучки, поперечные сечения формы которых, например, представляются эллипсами, но отношение величин и ориентация осей этих эллипсов являются функциями продольной координаты.

По-прежнему будем исходить из параболического уравнения (2.9)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (6.1)$$

Попытаемся найти решение этого уравнения в виде произвольного гауссова пучка, который можно представить в форме

$$\Phi = \exp \left\{ -i \left[ \frac{kx^2}{2q_{11}(z)} + \frac{ky^2}{2q_{22}(z)} + \right. \right.$$

$$+ \frac{kxy}{q_{12}(z)} + P(z) \Big] \Big\}. \quad (6.2)$$

Здесь, как и раньше,  $q_{11}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{12}$ ,  $P$  — неизвестные пока комплексные функции продольной координаты  $z$ . При  $1/q_{12} \rightarrow 0$  решение (6.2) переходит в ранее рассмотренное решение параболического уравнения (5.3) и определяет обычные эллиптические пучки. Выражение (6.2) — естественное математическое обобщение решения (5.3), так как оно имеет показатель экспоненты в общей биквадратной форме.

Подставляя (6.2) в (6.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменных  $x$ ,  $y$ , для функций  $q_{11}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{12}$ ,  $P$  получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{11}^2} + \frac{1}{q_{12}^2} - \frac{1}{q_{11}^2} \cdot \frac{dq_{11}}{dz} &= 0, \\ \frac{1}{q_{22}^2} + \frac{1}{q_{12}^2} - \frac{1}{q_{22}^2} \cdot \frac{dq_{22}}{dz} &= 0, \\ \frac{1}{q_{11}} + \frac{1}{q_{22}} - \frac{1}{q_{12}} \cdot \frac{dq_{12}}{dz} &= 0, \\ \frac{1}{q_{11}} + \frac{1}{q_{22}} - 2i \cdot \frac{dP}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Решать эту систему будем таким образом. Вычтем из первого уравнения второе и запишем результат в виде

$$\frac{1}{q_{11}} + \frac{1}{q_{22}} = \left( \frac{q'_{11}}{q_{11}^2} - \frac{q'_{22}}{q_{22}^2} \right) \left( \frac{1}{q_{11}} - \frac{1}{q_{22}} \right)^{-1}. \quad (6.4)$$

Здесь штрих означает производную по  $z$ . Подставим в левую часть уравнения (6.4) значение суммы  $1/q_{11} + 1/q_{22}$  из третьего уравнения системы (6.3) и учтем, что

$$\frac{q'_{22}}{q_{12}} = - \left( \frac{1}{q_{12}} \right)' \left( \frac{1}{q_{12}} \right)^{-1}. \quad (6.5)$$

После этого имеем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{q_{12}} \right)' \left( \frac{1}{q_{12}} \right)^{-1} = \\ & = \left[ \left( \frac{1}{q_{11}} \right)' - \left( \frac{1}{q_{22}} \right)' \right] \left( \frac{1}{q_{11}} - \frac{1}{q_{22}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из (6.6) следует равенство

$$\ln \frac{1}{q_{12}} = \ln \left( \frac{1}{q_{11}} - \frac{1}{q_{22}} \right) + \ln c_1, \quad (6.7)$$

или

$$\frac{1}{q_{12}} = c_1 \left( \frac{1}{q_{11}} - \frac{1}{q_{22}} \right), \quad (6.8)$$

где  $c_1$  — некоторая постоянная.

Таким образом, функции  $q_{11}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{12}$  связаны между собой соотношением (6.8). Это существенно облегчает решение системы (6.3), ибо вместо системы первых трех уравнений (6.3) можем решать систему из двух следующих уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_{11}^2} + c_1^2 \left( \frac{1}{q_{11}} - \frac{1}{q_{22}} \right)^2 - \frac{1}{q_{11}^2} q'_{11} = 0, \\ & \frac{1}{q_{22}^2} + c_1^2 \left( \frac{1}{q_{11}} - \frac{1}{q_{22}} \right)^2 - \frac{1}{q_{22}^2} q'_{22} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Складывая и вычитая эти уравнения и вводя обозначения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_{11}} + \frac{1}{q_{22}} = \Phi, \\ & \frac{1}{q_{11}} - \frac{1}{q_{22}} = \Psi, \end{aligned} \quad (6.10)$$

получаем

$$\Phi^2 + \Psi^2 (1 + 4c_1^2) + 2\Phi' = 0, \quad (6.11)$$

$$\Phi\Psi + \Psi' = 0. \quad (6.12)$$

С помощью (6.12) исключаем из (6.11) функцию  $\Phi$  и в результате приходим к одному уравнению

$$\psi''\psi - \frac{3}{2}\psi' + c\psi^4 = 0, \quad (6.13)$$

где

$$c = -\frac{1 + 4c_1^2}{2}.$$

Уравнение (6.13) решается следующим образом [22]. Вводим новую функцию

$$Q(\psi) = \psi'(z) \quad (6.14)$$

и дифференцируем ее по аргументу  $\psi$

$$Q'_\psi \psi' = \psi'', \text{ или } Q'_\psi Q(\psi) = \psi''.$$

Подставляя это соотношение в (6.13), находим

$$Q(\psi) Q'_\psi (\psi) \psi - \frac{3}{2} Q^2(\psi) + c\psi^4 = 0. \quad (6.15)$$

Далее полагаем

$$Q(\psi) = \psi^2 u(t), \quad (6.16)$$

где  $t = \ln \psi$ . При этом

$$Q'_\psi = 2\psi u(t) + \psi u'_\psi. \quad (6.17)$$

Используя (6.16), (6.17), из (6.15) получаем

$$udu + \left( \frac{1}{2} u^2 + c \right) dt = 0. \quad (6.18)$$

Уравнение (6.18) решается прямым интегрированием [23], в результате которого имеем

$$t = -\ln \left[ c + \frac{1}{2} u^2(t) - \ln b \right], \quad (6.19)$$

где  $b$  — постоянная интегрирования. Из (6.19) следует, что

$$u(t) = (ae^{-t} - 2c)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.20)$$

Здесь  $a = 2/b$ .

Теперь можем возвращаться к решению уравнения (6.16), которое запишем в виде

$$\frac{d\psi}{\psi^{\frac{1}{2}}} = dz. \quad (6.21)$$

$$\psi^2 [a \exp(-\ln \psi) - 2c]^{\frac{1}{2}}$$

Учитывая, что  $\exp(-\ln \psi) = \frac{1}{\psi}$ , из (6.21) получаем

$$\int \frac{d\psi}{\psi^{3/2} (a - 2c\psi)^{1/2}} = z + c_2,$$

или

$$\frac{\sqrt{2a\psi - 2c\psi^2}}{a\psi} = z + c_2. \quad (6.22)$$

Из последнего уравнения окончательно находим

$$\psi = \frac{4a}{a^2 z^2 + 2c_2^2 a^2 z + a^2 c_2^2 + 8c}. \quad (6.23)$$

С помощью (6.10) — (6.12), (6.23) нетрудно убедиться, что решение системы (6.3) можно представить в виде:

$$\frac{1}{q_{11}} = \frac{\alpha z + \beta}{\alpha z^2 + (\beta + \gamma) z + 1},$$

$$\frac{1}{q_{22}} = \frac{\alpha z + \gamma}{\alpha z^2 + (\beta + \gamma) z + 1},$$

$$(6.24)$$

$$\frac{1}{q_{12}} = \pm \frac{\sqrt{\gamma z + 1}}{2z^2 + (\beta + \gamma) z + 1},$$

$$2iP = \ln [\alpha z^2 + (\beta + \gamma) z + 1] + \ln c,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, c$  — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Как мы уже убедились, в случае произвольных гауссовых пучков для величин  $q_{11}(z)$ ,  $q_{22}(z)$  и  $P(z)$  нужно брать граничные условия в виде:

$$q_{11}(0) = a + iz_{01}, \quad q_{22}(0) = -a + iz_{02}, \quad (6.25)$$

$$2iP(0) = \ln \left[ \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right) \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right) \right].$$

Далее увидим, что вращение пучка сохранится, но пространственная форма его будет иметь главную ориентацию в начале координат ( $z=0$ ), если предположить, что  $q_{12}(0)=z_{012}$ . Подставляя эти равенства в (6.24), находим постоянные  $\alpha, \beta, \gamma, c$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{z_{012}^2 - (iz_{01} + a)(iz_{02} - a)}{(iz_{01} + a)(iz_{02} - a) z_{012}^2}, \\ \beta &= \frac{1}{iz_{01} + a}, \quad \gamma = \frac{1}{iz_{02} - a}, \\ \ln c &= \ln \left[ \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right) \left( 1 - \frac{ia}{z_{02}} \right) \right].\end{aligned}\quad (6.26)$$

Используя, наконец, (6.26), из (6.24) окончательно получаем, что решение системы (6.3) представляется в форме:

$$\begin{aligned}\frac{1}{q_{11}} &= \frac{\left[ \frac{1}{z_{01}z_{02}} + \frac{1}{z_{012}^2} \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right) \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right) \right] z +}{\left[ \frac{1}{z_{01}z_{02}} + \frac{1}{z_{012}^2} \left( 1 - \frac{ia}{z_{02}} \right) \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right) \right] z^2 +} \\ &\rightarrow \frac{+ \frac{i}{z_{01}} \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right)}{+ i \left( \frac{1}{z_{01}} + \frac{1}{z_{02}} \right) z - \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right) \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right)}, \\ \frac{1}{q_{22}} &= \frac{\left[ \frac{1}{z_{01}z_{02}} + \frac{1}{z_{012}^2} \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right) \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right) \right] z +}{\left[ \frac{1}{z_{01}z_{02}} + \frac{1}{z_{012}^2} \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right) \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right) \right] z^2 +} \\ &\rightarrow \frac{+ \frac{i}{z_{02}} \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right)}{+ i \left( \frac{1}{z_{01}} + \frac{1}{z_{02}} \right) z - \left( 1 - \frac{ia}{z_{01}} \right) \left( 1 + \frac{ia}{z_{02}} \right)},\end{aligned}\quad (6.27)$$

$$\frac{1}{q_{12}} = \frac{-\frac{1}{z_{012}} \left(1 - \frac{ia}{z_{01}}\right) \times}{\left[ \frac{1}{z_{01}z_{02}} + \frac{1}{z_{012}^2} \left(1 - \frac{ia}{z_{01}}\right) \left(1 + \frac{ia}{z_{02}}\right) \right] z^2 +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\times \left(1 + \frac{ia}{z_{02}}\right)}{+ i \left(\frac{1}{z_{01}} + \frac{1}{z_{02}}\right) z - \left(1 - \frac{ia}{z_{01}}\right) \left(1 + \frac{ia}{z_{02}}\right)},$$

$$iP = \frac{1}{2} \ln \left\{ \left(1 - \frac{ia}{z_{01}}\right) \left(1 + \frac{ia}{z_{02}}\right) - i \left(\frac{1}{z_{01}} + \frac{1}{z_{02}}\right) z - \left[ \frac{1}{z_{01}z_{02}} - \frac{1}{z_{012}^2} \left(1 - \frac{ia}{z_{01}}\right) \left(1 + \frac{ia}{z_{02}}\right) \right] z^2 \right\}.$$

Это решение и определяет произвольные эллиптические гауссовые пучки, вращающиеся в пространстве. Но, как видим, в общем случае оно довольно громоздкое, и исследовать свойства таких пучков поэтому трудно. В связи с этим необходимо вводить определенные упрощения и приближения, которые, однако, сохранили бы основные особенности вращающихся световых пучков.

Вначале предположим  $a=0$  и скорость поворота пучка вокруг продольной оси с изменением координаты  $z$  невелика, что означает выполнение неравенства

$$\frac{z^2}{z_{012}^2} \ll \frac{z^2}{z_{01}z_{02}}.$$

В этом приближении получаются следующие сравнительно простые выражения для функций  $q_{11}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{12}$  и  $P$ :

$$q_{11} = iz_{01} + z, \quad q_{22} = iz_{02} + z,$$

$$q_{12} = z_{012} \left(1 - i \frac{z}{z_{01}}\right) \left(1 - i \frac{z}{z_{02}}\right), \quad (6.28)$$

$$iP = \frac{1}{2} \ln \left[ \left(1 - \frac{iz}{z_{01}}\right) \left(1 - \frac{iz}{z_{02}}\right) \right].$$

Для дальнейшего анализа свойств пучков удобно ввести, как это мы уже делали, обозначения

$$\frac{1}{q_{ij}} = \frac{1}{R_{ij}} - i \frac{2}{k w_{ij}^2}, \quad i, j = 1, 2. \quad (6.29)$$

Правда, сейчас параметры  $R_{ij}$  и  $W_{ij}$  не имеют такого простого геометрического смысла, как раньше, но они облегчают тем не менее математические расчеты.

В результате в соответствии с соотношением (6.2), (6.28) и (6.29) амплитуда пучка запишется в виде

$$\varphi = \exp \left( -\frac{x^2}{w_{11}^2} - \frac{y^2}{w_{22}^2} - 2 \frac{xy}{w_{12}^2} \right) \times \\ \times \exp \left[ -i \left( \frac{kx^2}{2R_{11}} + \frac{ky^2}{2R_{22}} - \frac{kxy}{R_{12}} + P \right) \right], \quad (6.30)$$

где

$$R_{11} = z \left( 1 + \frac{z_{01}^2}{z^2} \right), \quad R_{22} = z \left( 1 + \frac{z_{02}^2}{z^2} \right), \quad (6.31)$$

$$w_{11}^2 = w_{01}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{01}^2} \right), \quad w_{22}^2 = w_{02}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{02}^2} \right), \quad (6.32)$$

$$R_{12} = \frac{z_{012} z^2 R_{11} R_{22}}{z_{01} z_{02} (z_{01} z_{02} - z^2)}, \quad w_{12}^2 = -\frac{z_{012} w_{11}^2 w_{22}^2}{z (w_{01}^2 + w_{02}^2)}. \quad (6.33)$$

Здесь по-прежнему  $w_{0j}^2 = \frac{2}{k} z_{0j}$ .

Пространственная форма рассматриваемого пучка описывается уравнением

$$\frac{x^2}{w_{01}^2 \left( 1 - \frac{z^2}{z_{01}^2} \right)} + \frac{y^2}{w_{02}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{02}^2} \right)} - \\ - \frac{2xyz (w_{01}^2 + w_{02}^2)}{z_{012} w_{01}^2 w_{02}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_{01}^2} \right) \left( 1 + \frac{z^2}{z_{02}^2} \right)} = 1. \quad (6.34)$$

Исследовать вид и свойства этой поверхности можно с помощью анализа изменения формы ее поперечных сечений. При  $z=0$  из (6.34) получаем

$$\frac{x^2}{w_{01}^2} + \frac{y^2}{w_{02}^2} = 1. \quad (6.35)$$

Это уравнение эллипса, оси которого параллельны координатным осям  $ox$ ,  $oy$ . Параметры  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  суть полуоси эллипса. Следовательно, как и отмечалось выше, выбранные граничные условия приводят к главной ориентации поперечной формы пучка в начале координат ( $z=0$ ).

При  $z=\text{const}$ , отличной от нуля, уравнение (6.34) также определяет эллипсы, но размеры и ориентация осей этих эллипсов зависят от значения продольной координаты  $z$ . Последнее означает, что эллиптический световой пучок при распространении в однородной среде деформируется и поворачивается. Угол  $\theta$  поворота осей эллипсов его поперечных сечений находится из равенства

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2z(z_{01} + z_{02}) z_{01} z_{02}}{z_{012}(z_{01} - z_{02})(z_{01} z_{02} - z^2)}. \quad (6.36)$$

В частности, при  $z=-\infty$  угол  $\theta=\pi/2$ , а при  $z=\infty$   $\theta=-\pi/2$ , если  $z_{02} > z_{01}$ .

Фазовая поверхность пучка в соответствии с (6.31) — (6.34) определяется уравнением

$$\frac{x^2}{2R_{11}} + \frac{y^2}{2R_{22}} + \frac{xy}{R_{12}} + (z - z_1) = 0, \quad (6.37)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{zx^2}{z_{01}^2 + z^2} + \frac{zy^2}{z_{02}^2 + z^2} + \\ & + 2 \frac{xy(z_{01} z_{02} - z^2) z_{01} z_{02}}{z_{012}(z^2 + z_{01}^2)(z^2 + z_{02}^2)} + 2(z - z_1) = 0. \end{aligned} \quad (6.37a)$$

Как видим, уравнение этой поверхности достаточно сложное. Поэтому свойства ее также лучше исследовать с помощью поперечных сечений. При  $z=c$  уравнение (6.37) удобней переписать в классической форме

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0. \quad (6.38)$$

Здесь коэффициенты  $a_{11}=1/2R_{11}$ ,  $a_{22}=1/2R_{22}$ ,  $a_{12}=1/2R_{12}$  и  $a_{33}=-(z_1-c)$  суть постоянные числа для выбранного сечения.

Поскольку форма плоской кривой 2-го порядка определяется его инвариантами [41]

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

$J = a_{11} + a_{22}$  и  $A = -(z_1 - c)D$ , то прежде всего необходимо оценить знаки этих инвариантов. В соответствии с (6.37), (6.38) получаем

$$D = \frac{z_{012}^2 z^2 (z^2 + z_{01}^2)(z^2 + z_{02}^2) - z_{01}^2 z_{02}^2 (z_{01} z_{02} - z^2)}{4z_{012}^2 (z^2 + z_{01}^2)^2 (z^2 + z_{02}^2)^2}. \quad (6.39)$$

Легко убедиться, что при  $z > z_{01}, z_{02}$  или  $z$ , сравнимых со значениями этих параметров, инвариант  $D > 0$ , а инвариант  $A \neq 0$  при  $z \neq z_1$ . Это означает, что поперечные сечения фазовой поверхности пучка имеют действительные кривые (точки) при условии  $|z| \leq |z_1|$ . Сама же фазовая поверхность выпуклая во всем пространстве за исключением непосредственной окрестности точки  $z=0$ .

Поперечные сечения фазовой поверхности представляют собой эллипсы, за исключением указанной области, деформирующиеся и поворачивающиеся с изменением координаты  $z$ . Угол направления осей этих эллипсов относительно оси  $ox$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2z_{01}z_{02}(z_{01}z_{02} - z^2)}{z_{012}^2(z_{02}^2 - z_{01}^2)}. \quad (6.40)$$

При  $z = 0$  угол  $\delta = \pi/4$ . С ростом  $z$  от нуля до  $z = \infty$  угол убывает до  $\delta = -\pi/4$ , проходя через значение  $\delta = 0$  при  $z = +\sqrt{z_{01}z_{02}}$ . Если же  $z$  убывает от нуля до  $z = -\infty$ , угол  $\delta$  возрастает до  $\delta = 3\pi/4$ , проходя через значение  $\delta = \pi/2$  при  $z = -\sqrt{z_{01}z_{02}}$ . Таким образом, при  $z = \pm \sqrt{z_{01}z_{02}}$  фазовая поверхность имеет главную ориентацию в выбранной системе координат ( $\delta = 0, \pi/2$ ), тогда как форма пучка имеет главную ориентацию только при  $z = 0$ .

При  $z^2 = z_{01}z_{02}$  параметр  $R_{12}^{-1} = 0$ , поэтому величины  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  являются в этом случае главными радиусами кривизны фазовой поверхности, причем

$$R_{11} = \sqrt{z_{01}z_{02}} \left( 1 + \frac{z_{01}}{z_{02}} \right), \quad (6.41)$$

$$R_{22} = \sqrt{z_{01}z_{02}} \left( 1 + \frac{z_{02}}{z_{01}} \right).$$

Из (6.41) следует, что астигматичность фазовой поверхности в этих точках определяется поперечными размерами пучка при  $z=0$ .

Рассмотрим теперь окрестность начала координат [25]. Если  $z=0$ , инвариант  $D<0$ . При этом если  $c \neq z_1$ , то  $A \neq 0$  и в сечении получаются гиперболы. Если же  $c=z_1$ , то  $A=0$  и в сечении получаем две пересекающиеся прямые. При  $z < z_{01}z_{02}/z_{012}$  (это малая окрестность точки  $z=0$ , так как мы предполагали неравенство  $z_{01}z_{02}/z_{012} \ll 1$ ) инвариант  $D<0$  и в сечениях имеем гиперболы или пересекающиеся прямые. Следовательно, в очень малой окрестности точки  $z=0$  фазовая поверхность пучка седлообразная и при этом она поворачивается (подробнее см. [25]). При  $z=\pm z_{01}z_{02}/z_{012}$  фазовая поверхность становится цилиндрической, а затем при увеличении  $z$  — выпуклой астигматической.

Попытаемся, наконец, определить форму фазовой поверхности вращающегося пучка при  $a \neq 0$ . В этом случае, как мы уже убедились в предыдущем параграфе, положения минимальных размеров пучка на продольной оси не совпадают между собой. Для упрощения анализа предположим, что по-прежнему скорость поворота пучка около оси невелика ( $z_{01}z_{02} \ll z_{012}^2$ ), и дополнительно предположим, что  $a^2 \ll z_{01}z_{02}$ . Последнее неравенство всегда выполняется при небольшой астигматичности фазовой поверхности. При этом, естественно, будет невелика и эллиптичность пространственной формы пучков, т. е.  $(z_{01}-z_{02})^2 \ll z_{01}z_{02}$ .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f(z) &= z_{012}^2 (z^2 - z_{01}z_{02}), \\ g(z) &= [a(z_{01}-z_{02})(z^2 - z_{012}^2) + zz_{012}^2(z_{01}+z_{02})], \\ h_1 &= za(z_{01}-z_{02}) + z_{01}z_{012}^2, \\ h_2 &= za(z_{01}-z_{02}) + z_{02}z_{012}^2. \end{aligned} \tag{6.42}$$

После этого, пренебрегая членами второго порядка малости, в рамках указанного приближения из (6.27), (6.29) получаем

$$\frac{1}{R_{11}} = \frac{(z-a)z_{012}^2 f + h_2 g}{f^2 + g^2},$$

$$\frac{1}{R_{22}} = \frac{(z+a) z_{012}^2 f + h_1 g}{f^2 + g^2}, \quad (6.43)$$

$$\frac{1}{R_{12}} = - \frac{z_{012} [z_{01} z_{02} f + a(z_{01} - z_{02}) g]}{f^2 + g^2}.$$

Уравнение (6.37) для фазовой поверхности справедливо и в данном случае, только параметры  $R_{11}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{12}$  определяются сейчас соотношениями (6.43). Для поперечных сечений этой поверхности также справедливо прежнее уравнение (6.38). Но теперь инвариант  $D$  записывается в форме

$$D = \frac{1}{4} \left\{ [(z-a) z_{012}^2 f + h_2 g] [(z+a) z_{012}^2 f + h_1 g] - \right. \\ \left. - z_{012}^2 [z_{01} z_{02} f + a(z_{01} - z_{02}) g]^2 \right\} [(f^2 + g^2)^2]^{-1}. \quad (6.44)$$

Определить знак величины  $D$  как функции координаты  $z$  весьма трудно, так как это сводится к решению уравнения 6-й степени относительно  $z$ . Поэтому рассмотрим вид фазовой поверхности в отдельных областях изменения  $z$ . Предположим вначале, что  $z^2 \ll z_{01} z_{02}$  и обозначим  $z=na$ , где  $n$  — некоторое действительное число. При этом получаем

$$D = \frac{1}{4} \frac{z_{012}^6 z_{01}^2 z_{02}^2 [z_{012}^2 a^2 (n^2 - 1) - z_{01}^2 z_{02}^2]}{(f^2 + g^2)^2}. \quad (6.45)$$

Из (6.45) следует, что  $D = 0$  при

$$n^2 = \frac{z_{01}^2 z_{02}^2}{z_{012}^2 a^2} + 1,$$

или

$$z^2 = \frac{z_{01}^2 z_{02}^2}{z_{012}^2} + a^2. \quad (6.46)$$

При  $z^2 \geq z_{01}^2 z_{02}^2 / z_{012}^2 + a^2$  инвариант  $D \geq 0$  соответственно. Определяя знаки инвариантов  $J$  и  $A$  уравнения плоской кривой поперечного сечения фазовой поверхности, приходим к выводу, что в области

$$z^2 < \frac{z_{01}^2 z_{02}^2}{z_{012}^2} + a^2 \quad (6.47)$$

сечения представляют собой параболы при  $z_1 \neq z = c$ . Это означает, что в этом случае фазовая поверхность пучка седлообразная.

При

$$z^2 > \frac{z_{01}z_{02}^2}{z_{012}^2} + a^2 \quad (6.48)$$

и  $|z_1| > |c|$  в сечении получаются эллипсы, а при выполнении равенства (6.46) — две прямые, если  $|z_1| > c$ , и одна прямая при  $z_1 = c$ . Последнее означает, что фазовая поверхность принимает цилиндрическую форму.

Таким образом, форма фазовой поверхности эллиптического вращающегося пучка подобна форме поверхности обычного пучка, рассмотренного в пятом параграфе. Отличие состоит лишь в том, что, во-первых, область седлообразности несколько больше величины  $\Delta z = 2a$ , во-вторых, сама поверхность поворачивается по мере распространения пучка.

Угол этого поворота определяется следующим соотношением:

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2z_{012}[z_{01}z_{02}f + a(z_{01} - z_{02})g]}{2az_{012}^2f - g(h_2 - h_1)}. \quad (6.49)$$

При  $z = 0$   $\operatorname{tg} 2\delta = z_{01}z_{02}/az_{012}$  (если  $a = 0$ , угол  $\delta = \pi/4$ ). При значениях  $z = \pm V z_{01}z_{02}$  угол  $\delta = 0, \pi/2$  соответственно. Это означает, что фазовая поверхность в этом случае имеет главную ориентацию. Как видно из (6.49), при  $z_{012}^{-1} \rightarrow 0$  угол  $\delta \rightarrow 0$ , т. е. поворот пучка отсутствует. Это еще раз показывает, что параметр  $z_{012}^{-1}$  характеризует вращение гауссова эллиптического пучка.

Если воспользоваться системой координат  $x', y', z$ , вращающейся вместе с фазовой поверхностью пучка, то уравнение последней принимает вид

$$\frac{x'^2}{2\rho_{11}} + \frac{y'^2}{2\rho_{22}} = z_1 - z, \quad (6.50)$$

где величины

$$\frac{1}{\rho_{11}} = \frac{\cos^2 \delta}{R_{11}} + \frac{\sin^2 \delta}{R_{22}} + \frac{\sin 2\delta}{R_{12}}, \quad (6.51)$$

$$\frac{1}{\rho_{22}} = \frac{\sin^2 \delta}{R_{11}} + \frac{\cos^2 \delta}{R_{22}} - \frac{\sin 2\delta}{R_{12}}$$

являются главными радиусами кривизны фазовой поверхности для точек на оси пучка.

Пространственная форма произвольных эллиптических пучков определяется уравнением

$$\frac{x^2}{w_{11}^2} + \frac{y^2}{w_{22}^2} + \frac{2xy}{w_{12}^2} = 1. \quad (6.52)$$

В приближении, принятом выше о слабом вращении и малости величины  $a$ , параметры  $w_{11}$ ,  $w_{22}$  и  $w_{12}$  можно записать в виде:

$$w_{11}^2 = \frac{2}{k} z_{01} \left[ 1 + \frac{(z+a)^2}{z_{01}^2} \right], \quad (6.53)$$

$$w_{22}^2 = \frac{2}{k} z_{02} \left[ 1 + \frac{(z-a)^2}{z_{02}^2} \right], \quad (6.54)$$

$$w_{12}^2 = \frac{2}{k} \times \\ \times \frac{z_{012}^2 z^4 + 2a(z_{01}^2 - z_{02}^2)z^3 + z_{012}^2(z_{02}^2 + z_{02}^2)z^2}{z_{012}z[a(z_{012} - z_{02})z - z_{01}z_{02}(z_{01} + z_{02})]} + \\ + \frac{2}{k} \frac{2a(z_{02} - z_{01})z_{012}^2 z + z_{012}^2 z_{01}^2 z_{02}^2}{z_{012}z[a(z_{01} - z_{02})z - z_{01}z_{02}(z_{01} + z_{02})]}. \quad (6.55)$$

Из (6.52) убеждаемся, что параметры  $w_{11}$  и  $w_{22}$  определяют радиусы светового пятна в направлениях осей  $ox$  и  $oy$  соответственно в поперечных плоскостях  $z = \text{const}$ . Однако они сейчас не являются полуосями эллипсов поперечных сечений пучка, поскольку полуоси поворачиваются с изменением  $z$  на угол  $\beta$ , который находится из равенства

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2z[a(z_{01} - z_{02})z - z_{01}z_{02}(z_{01} - z_{02})]}{z_{012}[(z_{01} - z_{02})z^2 - 2a(z_{01} + z_{02})z - z_{01}z_{02}(z_{01} - z_{02})]}. \quad (6.56)$$

При  $z = 0$  и  $z \rightarrow \infty$  эти эллипсы имеют главную ориентацию ( $\beta = 0, \pi/2$ ). Если

$$z = \frac{a(z_{01} + z_{02})}{z_{01} - z_{02}} \pm \sqrt{z_{01}z_{02}}, \quad (6.57)$$

угол  $\beta = \pm \pi/4$ , при этом, естественно, выполняется равенство  $w_{11} = w_{22}$ .

Величина полуосей  $A$  и  $B$  эллипсов поперечных сечений гауссова пучка определяется соотношениями

$$\frac{1}{A^2} = \frac{\cos^2 \beta}{w_{11}^2} + \frac{\sin^2 \beta}{w_{22}^2} + \frac{\sin 2\beta}{w_{12}^2},$$

$$\frac{1}{B^2} = \frac{\sin^2 \beta}{w_{11}^2} + \frac{\cos^2 \beta}{w_{22}^2} - \frac{\sin 2\beta}{w_{12}^2}. \quad (6.58)$$

Можно также убедиться, что для вращающегося пучка ни при каких значениях  $z$  не наблюдается кругового сечения, т. е. никогда не выполняется равенство  $A=B$ .

Наконец, заметим, что продольные сечения вращающегося пучка плоскостями  $x=0$  или  $y=0$  представляют собой гиперболы с различными эксцентриситетами.

Угол расходимости вращающихся пучков в дальней зоне ( $z \rightarrow \infty$ ) определяется обычным образом (см. § 5):

$$\theta_x = \frac{\lambda}{\pi w_{0x}}, \quad \theta_y = \frac{\lambda}{\pi w_{0y}}.$$

## ТЕОРИЯ РЕЗОНАТОРОВ ОКГ

Процесс установления собственных колебаний (мод) резонаторов ОКГ заключается в последовательном отражении и дифракции светового поля на зеркалах, образующих резонатор. В результате многократных преобразований формируется электромагнитное поле, фазовая поверхность которого у зеркала соответствует форме поверхности этого зеркала. Если размеры (апертура) зеркал велики, так что дифракционные потери энергии пре-небрежимо малы, то в резонаторе устанавливаются колебания, которые хорошо аппроксимируются гауссовыми пучками. Поэтому основные свойства таких резонаторов можно рассматривать с помощью гауссовых пучков.

Теория резонаторов ОКГ в настоящее время достаточно полно и глубоко развита и изложена во многих монографиях по оптическим квантовым генераторам [14, 44, 47—50]. В данной главе мы ограничимся применением гауссовых пучков для рассмотрения свойств открытых резонаторов, потери в которых практически отсутствуют. Такая теория резонаторов ОКГ наиболее простая и наглядная, хотя и приближенная. Она неприменима, если зеркала резонаторов малы и, следовательно, велики дифракционные потери. В таких случаях задача о собственных колебаниях (модах) резонатора сводится, как правило, к численному решению соответствующих интегральных уравнений [26, 14]. Метод гауссовых пучков неприменим и для резонаторов с зеркалами, поверхность которых трудно или невозможно привести в соответствие с фазовой поверхностью пучка (например, резонаторы с зеркалами, имеющими отверстия или изломы и т. д.).

Однако в подавляющем большинстве реальных резонаторов ОКГ гауссовые пучки служат достаточно хорошим приближением для описания их внутреннего поля (мод) [1, 5]. Размещая на определенных расстояниях

два зеркала, поверхности которых могут совпадать с фазовыми поверхностями гауссовых пучков, получаем резонатор с собственными колебаниями в виде гауссовых пучков. В этом случае установившаяся мода, отражаясь от зеркал, переходит сама в себя. В предыдущей главе мы убедились, что геометрические формы фазовых поверхностей пучков могут быть довольно разнообразными: плоскими, выпуклыми (вогнутыми) сферическими и астигматическими и даже седлообразными. Следовательно, и набор возможных зеркал для резонаторов ОКГ, излучающих гауссовые световые пучки, тоже достаточно разнообразен.

## § 7. ТЕОРИЯ СФЕРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Рассмотрим вначале наиболее простой и часто применяемый резонатор, образованный двумя сферическими зеркалами. Пусть имеется два зеркала (радиусы кривизны их  $R_1, R_2$ ), расположенных на одной оптической оси на расстоянии  $d$  друг от друга (рис. 7.1). Предположим, что начало координат ( $z=0$ ) совмещено с положением минимума поперечного размера круговых гауссовых пучков (независимо от того, находится ли оно внутри резонатора или вне его). Обозначая расстояния от начала координат до зеркал через  $z_1$  и  $z_2$  и учитывая, что радиусы кривизны фазовой поверхности мод резонатора должны совпадать с кривизной зеркал, получаем следующую систему трех уравнений:

$$R_1 = z_1 \left( 1 + \frac{z_0^2}{z_1^2} \right), \quad R_2 = z_2 \left( 1 + \frac{z_0^2}{z_2^2} \right), \quad (7.1)$$

$$z_1 + z_2 = d.$$

Заданными величинами здесь являются  $R_1, R_2, d$ , неизвестными — параметры  $z_1, z_2, z_0$ .

Исключая из первых двух уравнений (7.1) величину  $z_0$ , имеем

$$(R_1 - z_1) z_1 = z_2 (R_2 - z_2), \quad (7.2)$$

$$z_1 + z_2 = d.$$

Из (7.2) находим, что положение минимума поперечных размеров пучка (начало координат) определяется кривизной зеркал и расстоянием между ними с помощью следующих выражений:

$$z_1 = \frac{(R_2 - d) d}{R_1 + R_2 - 2d}, \quad (7.3)$$

$$z_2 = \frac{(R_1 - d) d}{R_1 + R_2 - 2d}. \quad (7.4)$$

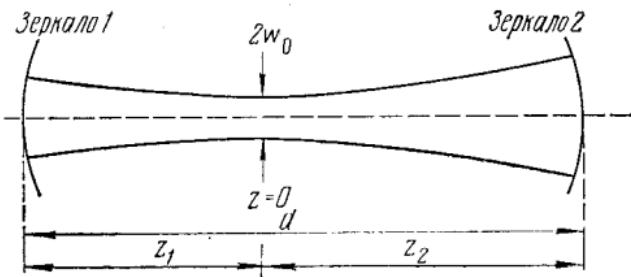


Рис. 7.1. Резонатор ОКГ

После чего из (7.1) получаем

$$z_0^2 = \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)^2 = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2}. \quad (7.5)$$

Соотношение (7.5), во-первых, определяет величину минимального поперечного размера гауссова пучка в резонаторах  $w_0$ , во-вторых, оно дает возможность определить условия устойчивости резонатора.

Действительно, в соответствии с (7.5) параметр  $z_0$  должен быть вещественным. Поэтому устойчивым считается резонатор, для которого выполняется условие

$$d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d) > 0. \quad (7.6)$$

Отсюда следует, что устойчивым будет резонатор, у которого зеркала с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  расположены на расстоянии  $d < R_1, R_2$  и  $\max(R_1, R_2) < d < R_1 + R_2$ . Иначе говоря, для устойчивого резонатора расстояние между зеркалами должно быть либо меньше меньшего радиуса кривизны зеркал, либо больше большего радиуса кривизны, но меньше суммы величин  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 7.2).

Размер световых пятен на зеркалах  $w_1$  и  $w_2$  (см. (3.14)) определяется соотношениями

$$w_i^4 = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{(z_i^2 + z_0^2)^2}{z_0^2} = \\ = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{z_i^2}{z_0^2} R_i^2 \quad (i = 1, 2), \quad (7.7)$$

или

$$w_1^4 = \left( \frac{\lambda R_1}{\pi} \right)^2 \frac{(R_2 - d) d}{(R_1 - d)(R_1 + R_2 - d)}, \quad (7.8)$$

$$w_2^4 = \left( \frac{\lambda R_2}{\pi} \right)^2 \frac{(R_1 - d) d}{(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}. \quad (7.9)$$

Из формул (7.8), (7.9) следует, что размеры пятен на обоих зеркалах изменяются в зависимости от расстояния между зеркалами неодинаково. Эта зависимость приведена на рис. 7.3.

Для лазерного излучения важным вопросом является расходимость светового пучка. Естественно предположить, что она зависит от размера пятна на выходном зеркале и определяется расходимостью гауссова пучка, установленного внутри резонатора. Однако вблизи областей неустойчивости расходимость лазерного пучка резко возрастает (рис. 7.4). Это вполне понятно из простых физических соображений, из которых следует, что только в устойчивом резонаторе электромагнитное поле локализовано около его продольной оси. В неустойчивом же резонаторе энергия излучается в пространство, что и означает увеличение размеров пучка до бесконечности. При многомодовой генерации расходимость лазерного

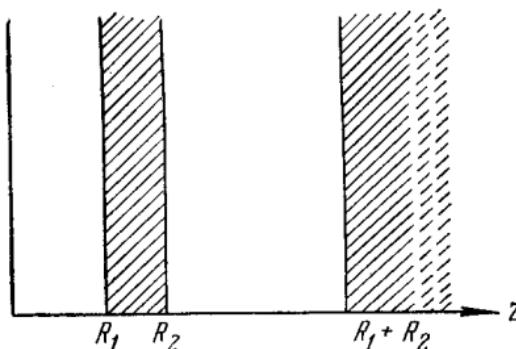


Рис. 7.2. Области устойчивости (незаштрихованная часть) и области неустойчивости (заштрихованная часть) резонатора ОКГ

пучка определяется в основном расходимостью высшей моды (подробней см. [45, 46]).

Электромагнитное поле в резонаторе, отражаясь от зеркал, проходит пространство между зеркалами в одну и другую стороны. Обе бегущие навстречу друг другу волны интерферируют и образуют стоячую волну. Условие образования стоячей волны ограничивает спектр частот, так что излучается только дискретный набор

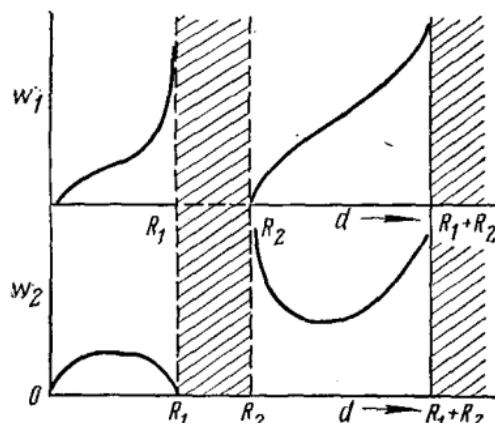


Рис. 7.3. Изменение размера пятна на зеркалах резонатора со сферическими зеркалами в зависимости от расстояния между ними [50]:  $w_1$  — размер пятна на зеркале 1,  $w_2$  — на зеркале 2

частот. Эти резонансные частоты определяются из требования, чтобы разность фаз на зеркалах была кратной целому числу  $\pi$ :

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \pi N. \quad (7.10)$$

Используя формулу (3.35) и полагая, что для первого зеркала  $z = -z_1$ , а для второго  $z = z_2$ , из (7.10) получаем

$$k(z_1 + z_2) - (m + n + 1) \times \\ \times \left( \operatorname{arctg} \frac{z_1}{z_0} + \operatorname{arctg} \frac{z_2}{z_0} \right) = N\pi. \quad (7.11)$$

После несложных преобразований равенство (7.11) можно записать в следующих двух более удобных формулах:

$$\frac{v}{v_0} = N + \frac{1}{\pi} (m + n + 1) \operatorname{arc cos} \times \\ \times \sqrt{\left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)}, \quad (7.12)$$

или

$$\frac{v}{v_0} = N + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \times$$

$$\times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 - d)(R_2 - d)}}. \quad (7.12a)$$

Здесь  $v$  — частота генерации,

$$v_0 = \frac{c}{2d}, \quad (7.13)$$

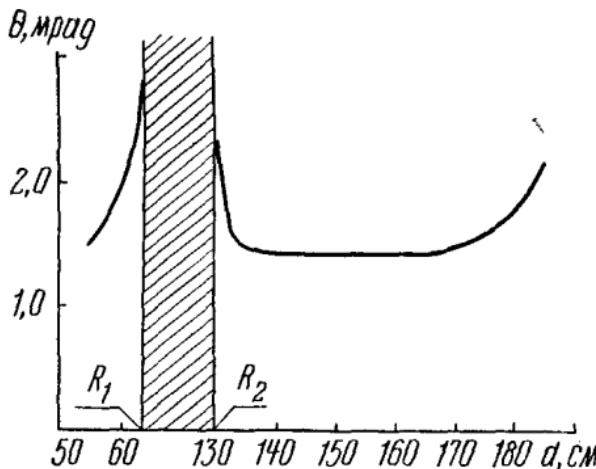


Рис. 7.4. Зависимость расходимости светового пучка лазера от расстояния между зеркалами резонатора [50]:  $R_1 = 63,5 \text{ см}$ ,  $R_2 = 130 \text{ см}$

где  $c$  — скорость света в вакууме, величина  $v_0$  — разность частот двух соседних продольных мод ( $\Delta v = v_0$  при  $\Delta N = 1$ ),  $N$  — число полуволн, укладывающихся между зеркалами.

Из (7.12) видим, что все собственные колебания высшего порядка с одинаковым численным значением суммы модовых чисел  $m+n$  вырождены по частоте, т. е. имеют одну и ту же резонансную частоту.

Если резонатор образован зеркалами одинаковой кривизны  $R_1 = R_2 = R$ , то условие устойчивости (7.6) принимает вид

$$d < 2R, \quad (7.14)$$

а размер пятна на зеркалах и частота генерации определяются соответственно формулами

$$\omega^4 = \left( \frac{\lambda R}{\pi} \right)^2 \frac{d}{2R-d}, \quad (7.15)$$

$$\frac{v}{v_0} = N - \frac{1}{\pi} (m+n+1) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{d(2R-d)}}{R-d}. \quad (7.16)$$

Для конфокального резонатора, в котором  $R_1 = R_2 = d = b$ , получаем

$$w^2 = \frac{\lambda b}{\pi}, \quad w_0^2 = \frac{\lambda b}{2\pi}, \quad (7.17)$$

$$\frac{v}{v_0} = N + \frac{1}{2} (m+n+1). \quad (7.18)$$

Более подробные сведения о свойствах различных резонаторов ОКГ можно найти в имеющейся по этим вопросам литературе (см., например, [44—50]). Мы ограничились здесь только теми их свойствами, которые непосредственно вытекают из теории резонаторов, основанной на использовании гауссовых пучков.

## § 8. СВОЙСТВА АСТИГМАТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

В лазерной технике сферичность зеркал резонаторов соблюдается не всегда, иногда используются и цилиндрические зеркала. С другой стороны, круговая симметрия (симметрия вращения около продольной оси) резонатора нарушается, если в нем используются наклонные плоскопараллельные пластинки. Свойства открытых резонаторов, в которых не сохраняется круговая симметрия, нужно рассматривать с помощью эллиптических пучков. Примером такого резонатора служит резонатор, образованный двумя астигматическими зеркалами.

Как известно [42], кривизна любой произвольной поверхности в заданной точке ее может характеризоваться минимальным и максимальным значениями радиуса кривизны. Плоскости, проходящие через центры экстремальной кривизны и соответствующие окружности, перпендикулярны. Эти плоскости мы называем главными плоскостями кривизны астигматической (несферической) поверхности, а соответствующие экстремальные значения радиусов кривизны — главными радиусами.

Предположим вначале, что на расстоянии  $d$  друг от друга помещены два астигматических зеркала, главные

плоскости кривизны которых параллельны (перпендикулярны), а их оптические оси совпадают. Главные радиусы кривизны обоих зеркал обозначим соответственно  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$  и  $R_{2x}$ ,  $R_{2y}$ . Так как в условиях установившегося резонанса фазовая поверхность собственных колебаний мод резонатора, которыми сейчас должны быть гауссовые эллиптические пучки, совпадает с формой поверхности зеркал, то приходим к необходимости выполнения следующих равенств (см. (5.37), (5.38)):

$$R_{1x} = (z_1 + a) \left[ 1 + \frac{z_{0x}^2}{(z_1 + a)^2} \right], \quad R_{1y} = (z_1 - a) \left[ 1 + \frac{z_{0y}^2}{(z_1 - a)^2} \right], \quad (8.1)$$

$$R_{2x} = (z_2 + a) \left[ 1 + \frac{z_{0x}^2}{(z_2 + a)^2} \right], \quad R_{2y} = (z_2 - a) \left[ 1 + \frac{z_{0y}^2}{(z_2 - a)^2} \right].$$

Здесь  $z_1$ ,  $z_2$  — алгебраические значения координат центров 1-го и 2-го зеркал соответственно. В данном случае произвольных зеркал удобнее учитывать (сохранять) знаки при значениях координат положения зеркал и их радиусов кривизны. При этом принимаем  $R > 0$ , если выпуклость зеркала обращена вправо. Полагаем также, что второе зеркало находится справа, т. е.  $z_2 > z_1$ . Расстояние между зеркалами тогда

$$z_2 - z_1 = d > 0. \quad (8.2)$$

Соотношения (8.1), (8.2) фактически представляют собой систему пяти уравнений, в которых известными являются характеристики зеркал ( $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ ,  $R_{2x}$ ,  $R_{2y}$ ) и расстояние между ними  $d$ , а неизвестными — характеристики собственных колебаний электромагнитного поля в резонаторе (параметры гауссовых пучков)  $z_{0x}$ ,  $z_{0y}$ ,  $a$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ . Величины  $z_1$ ,  $z_2$  определяют положение центра гауссова эллиптического пучка, а величина  $2a$  (см. § 5) — расстояние между положениями минимумов поперечных размеров пучка в главных его плоскостях.

Решая уравнения (8.1), (8.2), находим:

$$z_{0x}^2 = \frac{d(R_{2x} - d)(R_{1x} + d)(R_{1x} - R_{2x} + d)}{(R_{1x} - R_{2x} + 2d)^2}, \quad (8.3)$$

$$z_{0y}^2 = \frac{d(R_{2y} - d)(R_{1y} + d)(R_{1y} - R_{2y} + d)}{(R_{1y} - R_{2y} + 2d)^2}, \quad (8.4)$$

$$z_1 = \frac{d}{2} \left( \frac{R_{2x} - d}{R_{1x} - R_{2x} + 2d} + \frac{R_{2y} - d}{R_{1y} - R_{2y} + 2d} \right), \quad (8.5)$$

$$z_2 = \frac{d}{2} \left( \frac{R_{1x} + d}{R_{1x} - R_{2x} + 2d} + \frac{R_{1y} + d}{R_{1y} - R_{2y} + 2d} \right), \quad (8.6)$$

$$a = \frac{d}{2} \frac{(R_{1x} + R_{2x} - R_{1x} - R_{2x})d - R_{1x}R_{2x} + R_{1y}R_{2y}}{(R_{1y} - R_{2y} + 2d)(R_{1x} - R_{2x} + 2d)}. \quad (8.7)$$

Из соотношения (8.7) заключаем, что расстояние  $2a$  между минимумами поперечных размеров гауссова эллиптического пучка в резонаторе в главных плоскостях ( $xz$ ) и ( $yz$ ) действительно обращается в ноль ( $a=0$ ), если зеркала резонатора сферические ( $R_{1x}=R_{1y}$ ,  $R_{2x}=R_{2y}$ ). Этот параметр может быть равен нулю и в астигматическом резонаторе, но только при вполне определенном расстоянии  $d$  между зеркалами, а именно при

$$d = \frac{R_{1x}R_{2x} - R_{1y}R_{2y}}{R_{1x} + R_{2x} - R_{2y} - R_{1y}}. \quad (8.8)$$

Естественно, что это весьма частный (редкий) случай астигматического резонатора. А в общем случае, как видим, в астигматическом резонаторе будут устанавливаться эллиптические гауссовые пучки, у которых величина  $a \neq 0$  (рис. 8. 1).

Минимальные размеры  $w_{0x}$  и  $w_{0y}$  пучка в резонаторе определяются соотношением

$$w_{0i}^4 = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{d(R_{2i} - d)(R_{1i} + d)(R_{1i} - R_{2i} + d)}{(R_{1i} - R_{2i} + 2d)^2}, \quad (8.9)$$

где  $i=x, y$ . Поперечные размеры светящихся пятен на первом зеркале, например, равны

$$w_{1i}^4 = \left( \frac{\lambda R_{1i}}{\pi} \right)^2 \frac{d(R_{2i} - d)}{(R_{1i} - R_{2i} + d)(R_{1i} + d)}. \quad (8.10)$$

Определяя фазовый сдвиг эллиптических гауссовых пучков из соотношения (5.41) и используя условие резонанса (7.10), можно определить резонансные частоты.

Например, резонансная частота  $v_N$  нулевой моды астигматического резонатора равна

$$v_N = Nv_0 + \frac{v_0}{2\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{d(R_{1x} - R_{2x} + d)}{(R_{2x} - d)(R_{1x} + d)} \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left[ \frac{d(R_{1y} - R_{2y} + d)}{(R_{2y} - d)(R_{1y} + d)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (8.11)$$

где  $v_0 = \frac{c}{2d}$ ,  $c$  — скорость света.

Как и прежде, пользуясь соотношениями (8.3), (8.4), выясним, при каких условиях астигматический резонатор будет устойчивым. При этом возможны разные взаимные расположения и формы зеркал.

1. Оба зеркала выпуклые астигматические и расположены на расстоянии  $d > 2a$  так, что центр первого зеркала находится в точках  $z_1 \leq -a$ , а второго — в точках  $z_2 \geq a$ . В этом случае  $R_{1x}, R_{1y} < 0$ , а  $R_{2x}, R_{2y} > 0$ . Такой резонатор будет иметь устойчивый режим при расстоянии  $d < |R_{\min}|$ , где  $R_{\min}$  — наименьший по величине из всех четырех главных радиусов кривизны обоих зеркал. Данный резонатор будет устойчивым также при  $|R_{\max}| < d < |R_{1x}| + R_{2x}$  и  $|R_{1y}| + R_{2y}$  (т. е. при  $d$ , меньших каждой из этих сумм), где  $R_{\max}$  — максимальный радиус кривизны. Если, кроме этого, выполняется неравенство  $|R_{1x}|, R_{2x} > |R_{1y}|, R_{2y}$ , то резонатор будет устойчивым при  $|R_{1y}|, R_{2y} < d < |R_{1x}| + R_{2x}$  и  $|R_{1y}| + R_{2y}$ .

2. Первое зеркало седлообразное с главными радиусами кривизны  $R_{1x} > 0$ ,  $R_{1y} < 0$  и расположено в точках  $|z_1| < a$ . Второе зеркало выпуклое с  $R_{2x}, R_{2y} > 0$ . Такой

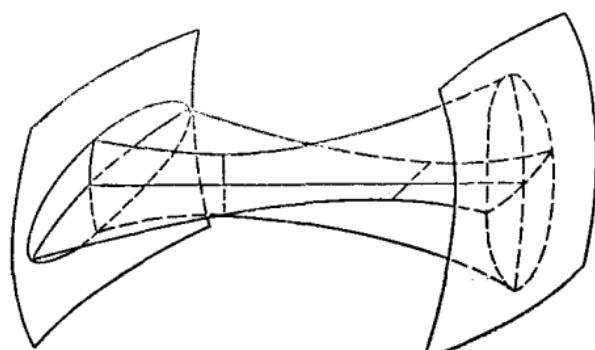


Рис. 8.1. Астигматический резонатор ОКГ и гауссов пучок в нем

резонатор будет устойчивым, если расстояние между зеркалами  $d$  меньше величины любого из радиусов кривизны  $R_{2x}$ ,  $R_{1y}$ ,  $R_{2y}$ , но больше разности  $R_{2y} - R_{1x}$  (т. е.  $d > R_{2x} - R_{1x}$ ). Кроме этого, устойчивый режим в данном резонаторе возможен при расстоянии между зеркалами, большем значений величин  $R_{2x} - R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ ,  $R_{2y}$ , но меньшем  $R_{2x}$  и  $|R_{1y}| + R_{2y}$  (т. е. при условиях  $R_{2x} - R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ ,  $R_{2y} < d < R_{2x}$ ,  $|R_{1y}| + R_{2y}$ ).

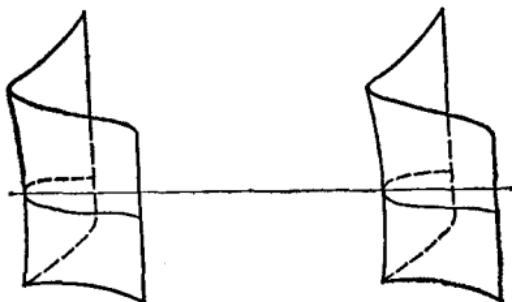


Рис. 8.2. Астигматический резонатор с седлообразными зеркалами

3. В астигматическом резонаторе возможен случай, когда оба зеркала седлообразные, такие, например, что  $R_{1x} > 0$ ,  $R_{1y} < 0$  и  $R_{2x} > 0$ ,  $R_{2y} < 0$  (рис. 8.2). Оказывается, что и такой казалось бы явно несовершенный резонатор может быть устойчивым и будет, следовательно, излучать световые эллиптические гауссовые пучки. Устойчивый режим в нем наблюдается, если его зеркала находятся на расстоянии, удовлетворяющем неравенствам

$$R_{2x} - R_{1x}, |R_{1y}| - |R_{2y}| < d < R_{2x}, |R_{1y}|. \quad (8.12)$$

Отсюда можно сделать вывод, что в принципе любые два каких угодно кривых зеркала могут образовать устойчивый резонатор оптического квантового генератора. Для этого необходимо только определить главные радиусы кривизны обоих зеркал и разместить зеркала на расстоянии в соответствии с неравенством (8.12).

4. Наконец, аналогично случаю сферических резонаторов можно взять два выпуклых астигматических зеркала, таких, например, что все главные радиусы кривизны  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ ,  $R_{2x}$ ,  $R_{2y} > 0$ . Если при этом выполняется неравенство

$$(R_{2x} - R_{1x}), (R_{2y} - R_{1y}) < d < R_{2\min},$$

то режим генерации будет устойчивым.

Как видим, с помощью эллиптических гауссовых пучков сравнительно просто определяются свойства резонаторов с любыми зеркалами. Однако до сих пор рассматривался частный случай астигматических резонаторов, у которых главные плоскости кривизны обоих зеркал совпадают. Более общим случаем, естественно, является произвольная взаимная ориентация этих плоскостей [64]. Но исследовать свойства совершенно произвольных резонаторов очень трудно. Поэтому для упрощения будем использовать определенные приближения, не сводящие, однако, на нет основные особенности таких резонаторов.

Предположим вначале, что имеются два зеркала, таких, что в резонаторе устанавливаются собственные колебания в виде вращающихся эллиптических пучков, у которых  $a=0$ . Тогда уравнение поверхности, например, первого зеркала, совпадающей с фазовой поверхностью соответствующего гауссова пучка, согласно (6.30), нужно записать в виде

$$\frac{x^2}{2R_{1x}} + \frac{y^2}{2R_{1y}} + \frac{xy}{R_{1xy}} + (z - z_1) = 0. \quad (8.13)$$

Здесь  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ ,  $R_{1xy}$ —параметры, которые в соответствии с (6.31), (6.33) связаны с координатами центра зеркала  $z_1$  и параметрами гауссова пучка  $z_{0x}$ ,  $z_{0y}$  соотношениями:

$$R_x = z_1 \left( 1 + \frac{z_{0x}^2}{z_1^2} \right), \quad R_y = z_1 \left( 1 + \frac{z_{0y}^2}{z_1^2} \right), \quad (8.14)$$

$$R_{1xy} = \frac{z_{0xy} z_1^2 R_{1x} R_{1y}}{z_{0x} z_{0y} (z_{0x} z_{0y} - z_1^2)}.$$

Прежнее обозначение параметра  $z_{012}$  (см. § 6) заменили на  $z_{0xy}$ . Направления осей  $ox$ ,  $oy$  выбраны так, чтобы центральное сечение  $z=0$  пространственной формы гауссова пучка в резонаторе имело главную ориентацию (см. § 6).

Угол поворота  $\alpha_1$  главных плоскостей ( $x'z$ ), ( $y'z$ ) первого зеркала относительно осей  $ox$ ,  $oy$  определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2z_{0x} z_{0y} (z_{0x} z_{0y} - z_1^2)}{z_{0xy} z_1 (z_{0x}^2 - z_{0y}^2)}. \quad (8.15)$$

Уравнение поверхности первого зеркала в системе осей  $(x', y', z)$  запишется в обычном виде

$$\frac{x'^2}{2\rho_{1x'}} + \frac{y'^2}{2\rho_{1y'}} = z_1 - z, \quad (8.16)$$

где  $\rho_{1x'}$ ,  $\rho_{1y'}$  — главные радиусы кривизны зеркала. Они связаны с  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$  и  $R_{1xy}$  соотношениями:

$$\frac{1}{\rho_{1x'}} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{R_{1x}} + \frac{\sin^2 \alpha_1}{R_{1y}} + \frac{\sin 2\alpha_1}{R_{1xy}}, \quad (8.17)$$

$$\frac{1}{\rho_{1y'}} = \frac{\sin \alpha_1}{R_{1x}} + \frac{\cos^2 \alpha_1}{R_{1y}} - \frac{\sin 2\alpha_1}{R_{1xy}}. \quad (8.18)$$

Формулы, аналогичные (8.13) — (8.18), необходимо записать и для второго зеркала. Из них, в частности, находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{1x'}} + \frac{1}{\rho_{1y'}} &= \frac{1}{\rho_{1x}} + \frac{1}{\rho_{1y}}, \\ \frac{1}{\rho_{1x'}} - \frac{1}{\rho_{1y'}} &= \frac{1}{\cos 2\alpha_1} \left( \frac{1}{R_{1x}} - \frac{1}{R_{1y}} \right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Как и следовало ожидать, из последних соотношений вытекает, что при углах поворота зеркал  $\alpha_1$  (или  $\alpha_2$ ), кратных  $\pi$ , величины  $R_{1i}$  ( $i = x, y$ ) совпадают (являются) с главными радиусами кривизны зеркал  $\rho_{1i}$ . При  $\alpha_1$ , кратных  $\pi/2$ ,  $R_{1x} = \rho_{1y'}$ ,  $R_{1y} = \rho_{1x'}$ . Естественно, что такой поворот зеркал физически равносителен отсутствию какого-либо взаимного поворота.

Введем обозначения:

$$\frac{1}{\rho_{jx'}} + \frac{1}{\rho_{jy'}} = A_j, \quad \frac{1}{\rho_{jx'}} - \frac{1}{\rho_{jy'}} = B_j \quad (j = 1, 2), \quad (8.20)$$

тогда

$$R_{jx} = \frac{2}{A_j + B_j \cos 2\alpha_j}, \quad R_{jy} = \frac{2}{A_j - B_j \cos 2\alpha_j}. \quad (8.21)$$

Таким образом, если известны параметры зеркал и их ориентация, то легко находятся и параметры  $R_{ji}$  ( $i = x, y$ ;

$j=1, 2$ ). При этом, подобно случаю главной ориентации зеркал, характеристики такого резонатора ( $z_1, z_2, z_{0x}, z_{0y}$  и  $z_{0xy}$ ) определяются формулами:

$$z_1 = \frac{d(R_{2x} - d)}{R_{1x} - R_{2x} + 2d} = \frac{d(R_{2y} - d)}{R_{1y} - R_{2y} + 2d}, \quad (8.22)$$

$$z_2 = \frac{d(R_{1x} - d)}{R_{1x} - R_{2x} + 2d} = \frac{d(R_{1y} - d)}{R_{1y} - R_{2y} + 2d}, \quad (8.23)$$

$$z_{0i}^2 = \frac{d(R_{2i} - d)(R_{1i} + d)(R_{1i} - R_{2i} + d)}{(R_{1i} - R_{2i} + 2d)^2}, \quad (8.24)$$

$$z_{0xy} = \frac{z_{0x}z_{0y}(z_{0x}z_{0y} - z_1^2)}{(R_{1y} - R_{1x})z_1^2 \operatorname{tg} 2\alpha_1} = \frac{z_{0x}z_{0y}(z_{0x}z_{0y} - z_2^2)}{(R_{2y} - R_{2x})z_2^2 \operatorname{tg} 2\alpha_2}. \quad (8.25)$$

В том, что величины  $z_1, z_2$  и  $z_{0xy}$  выражаются двойными равенствами, нет никакого противоречия. Просто здесь проявляются условия, накладываемые на параметры резонатора, при которых величина  $a = 0$  (см. выше). Из (8.24) легко находятся минимальные размеры пучка  $w_{0x}$  и  $w_{0y}$ , а через них по формулам  $w_{ji}^2 = w_{0i}^2(1 - z_j^2/z_{0i}^2)^2$ , где  $j = 1, 2, i = x, y$ , определяются размеры пятен на зеркалах в направлении осей  $ox$  и  $oy$ . Напоминаем, что сейчас эти значения не являются экстремальными (т. е. это не полуоси эллипсов поперечного сечения пучка).

Резонансные частоты также формально записываются в прежнем виде

$$\frac{v_N}{v_0} = N + \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{d(R_{1x} - R_{2x} + d)}{(R_{2x} - d)(R_{2x} + d)} \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left[ \frac{d(R_{1y} - R_{2y} - d)}{(R_{2y} - d)(R_{1y} + d)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (8.26)$$

Но сейчас величины  $R_{ji}$  определяют кривизну зеркал в плоскостях  $ox$  и  $oy$ , а не являются главными значениями радиусов кривизны поверхности зеркала. Они зависят поэтому от угла поворота зеркал. Отсюда следует вывод, что в соответствии с формулой (8.26) взаимным

поворотом астигматических зеркал резонатора можно менять его собственную частоту.

Произвольный резонатор, в котором возможны собственные колебания в виде вращающихся гауссовых пучков с  $a \neq 0$ , можно формально исследовать таким же образом, каким только что исследовали резонатор в частном случае. Нужно только учесть, что величины  $R_{ji}$  связаны с расстояниями  $z_1, z_2$  центров зеркал от начала координат  $z=0$  соотношениями (5.37), (5.38).

## ГАУССОВЫ ПУЧКИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В настоящее время большое практическое значение имеют неоднородные среды, способные направлять (канализовать) и преобразовывать электромагнитное излучение. Существуют, например, оптические волокна, называемые самофокусирующими (selfoc), газовые линзы, усиливающие неоднородные среды, в которых диэлектрическая проницаемость слабо или почти совсем не изменяется вдоль одного направления (оси неоднородности) и сравнительно быстро уменьшается в поперечных направлениях при удалении от точек, лежащих на оси неоднородности. Такие среды способны локализовывать и направлять электромагнитную энергию подобно диэлектрическому волноводу. Причем неоднородность может создаваться мощным лазерным лучом и в первоначально однородной среде. В этой главе мы убедимся, что особенности распространения электромагнитных волн вдоль оси неоднородности в таких средах можно и удобно исследовать с помощью гауссовых пучков.

### § 9. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ В ПРОЗРАЧНЫХ ЛИНЗОПОДОБНЫХ СРЕДАХ

Изменение диэлектрической проницаемости в направляющих неоднородных средах можно записать в виде

$$\epsilon = \epsilon_0 - \alpha' x^2 - \beta' y^2. \quad (9.1)$$

Это так называемый квадратичный закон изменения диэлектрической проницаемости. Его можно рассматривать как первое приближение любого симметричного относительно точек оси  $oz$  закона изменения  $\epsilon$ , поскольку разложение  $\epsilon(x, y)$  в ряд Тейлора при этом будет содержать только члены четного порядка. Пользуясь функцией (9.1), необходимо только всегда помнить, что пределы

изменения переменных  $x, y$  ограничены, ибо в противном случае может оказаться, что показатель преломления станет меньше единицы, а это в оптическом диапазоне не имеет смысла.

Если диэлектрическая проницаемость среды изменяется по закону (9.1), то квадрат «постоянной» распространения ( $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ ) можно записать в виде

$$k^2 = k_0^2 - \alpha x^2 - \beta y^2. \quad (9.2)$$

Ограничимся пока случаем плоской неоднородности, т. е. положим  $\beta = 0$ .

В первом параграфе отмечалось, что при слабой неоднородности компоненты векторов электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0. \quad (9.3)$$

Как и раньше, будем искать решение уравнения (9.3) в виде пучка

$$\phi = \psi(x, y) \exp(-ik_0 z). \quad (9.4)$$

Подставляя (9.4) в (9.3), получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \alpha x^2 \psi = 0. \quad (9.5)$$

С учетом малости изменения амплитуды  $\psi(x, z)$  с координатой  $z$  из (9.5) приходим к следующему параболическому уравнению для неоднородных сред

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \alpha x^2 \psi = 0. \quad (9.6)$$

Решение уравнения (9.6) можно искать в виде гауссова пучка [36]

$$\psi = \exp \left\{ -i \left( P + \frac{1}{2} Q x^2 \right) \right\}. \quad (9.7)$$

Это выражение отличается по форме записи от предыдущего (см. § 3). Объясняется такой выбор исключительно удобствами математического изложения. Подставляя (9.7) в (9.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $x$ , получаем следую-

щие дифференциальные уравнения для функций  $Q(z)$  и  $P(z)$ :

$$Q^2 + k_0 Q' + \alpha = 0, \quad (9.8)$$

$$iP' = \frac{1}{2k_0} Q. \quad (9.9)$$

Здесь штрих означает производную по  $z$ .

Уравнение (9.8) является уравнением Риккати [27]. Его решение ищется следующим образом. Записываем  $Q$  в виде суммы

$$Q = Q_1 + \frac{1}{u}, \quad (9.10)$$

где  $Q_1$  — частное решение (9.8),  $u$  — неизвестная функция. Очевидным частным решением (9.8) есть

$$Q_1 = -i\sqrt{\alpha}. \quad (9.11)$$

Функция  $u$  при этом удовлетворяет уравнению

$$u' + 2i \frac{\sqrt{\alpha}}{k_0} u - \frac{1}{k_0} = 0. \quad (9.12)$$

Решение уравнения (9.12) представляется в виде [28, 29]

$$u = c \exp \left\{ -i \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right) \right\} - \frac{i}{2\sqrt{\alpha}}, \quad (9.13)$$

где  $c, \beta$  — вещественные постоянные интегрирования. Подставляя теперь (9.13), (9.11) в (9.10), для параметра  $Q$  получаем следующее выражение:

$$Q = \frac{4c\alpha \cos \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right) + i\sqrt{\alpha} (1 - 4c^2\alpha)}{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \sin \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right)}. \quad (9.14)$$

Как и прежде, радиус кривизны  $R$  фазовой поверхности световых пучков определяется вещественной, а по-перечные размеры  $w$  мнимой частями величины  $Q$  (в

данном случае  $Q = k_0/q = k_0/R - 2i/\pi\omega^2$ . Из (9.14) следует:

$$R = \frac{k_0 \left[ 1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \sin \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right) \right]}{4c\alpha \cos \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right)}, \quad (9.15)$$

$$\omega^2 = \frac{2 \left[ 1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \sin \left( 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right) \right]}{\pi\sqrt{\alpha}(4c^2\alpha - 1)}. \quad (9.16)$$

Подставляя (9.14) в (9.9), получаем

$$2ik_0P = \int \frac{4c\alpha \cos \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right) - i\sqrt{\alpha}(1 - 4c^2\alpha)}{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \sin \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right)} dz + c_1,$$

или (см. [23])

$$4iP = \ln \left[ 1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \sin \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \beta \right) \right] + \\ + 2i \operatorname{arctg} \frac{(1 + 4c^2\alpha) \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{k_0} z + \frac{\beta}{2} \right) + 4c\sqrt{\alpha}}{1 - 4c^2\alpha} + c_1, \quad (9.17)$$

где  $c_1$  — постоянная интегрирования.

Для определения постоянной  $\beta$  предположим, что при  $z=0$  гауссов пучок имеет плоский фазовый фронт. Это означает, что  $R=\infty$ , и, следовательно, в соответствии с формулой (9.15) находим, что  $\beta=\pi/2$ . Если же дополнительно предположить, что при  $z=0$  и фазовый сдвиг вдоль оси  $oz$  равен нулю, т. е.  $P(z)=0$ , то из (9.17) определяем постоянную  $c_1$ . Оказывается, что

$$c_1 = -\ln [1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha}] - 2i \operatorname{arctg} \frac{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha}}{1 - 4c^2\alpha}. \quad (9.18)$$

Последняя постоянная интегрирования  $c$  может быть определена заданием поперечных размеров светового пучка при  $z=0$ .

Окончательные выражения для параметров гауссова пучка  $Q$ ,  $R$ ,  $w$  и  $P$  принимают сейчас вид:

$$Q = \frac{i \sqrt{\alpha} (1 - 4c^2\alpha) - 4c \sqrt{\alpha} \sin \gamma z}{1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha} \cos \gamma z}, \quad (9.19)$$

$$R = \frac{k_0 [1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha} \cos \gamma z]}{-4c \sqrt{\alpha} \sin \gamma z}, \quad (9.20)$$

$$w^2 = \frac{2(1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha} \cos \gamma z)}{\pi \sqrt{\alpha} (4c^2\alpha - 1)}, \quad (9.21)$$

$$4iP = \ln \frac{1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha} \cos \gamma z}{1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha}} + \\ + 2i \left[ \operatorname{arctg} \frac{4c \sqrt{\alpha} + (1 + 4c^2\alpha) \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \gamma z + \frac{\pi}{4} \right)}{1 - 4c^2\alpha} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \frac{1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha}}{1 - 4c^2\alpha} \right]. \quad (9.22)$$

Здесь введено обозначение  $\gamma = 2\sqrt{\alpha}/k_0$ . Из формулы (9.22) следует, что множитель  $e^{-iP}$  выражения (9.7) запишется в форме

$$e^{-iP} = \left( \frac{1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha}}{1 + 4c^2\alpha + 4c \sqrt{\alpha} \cos \gamma z} \right)^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{4c \sqrt{\alpha} + (1 + 4c^2\alpha) \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \gamma z + \frac{\pi}{4} \right)}{1 - 4c^2\alpha} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{4c \sqrt{\alpha} + 4c^2\alpha + 1}{1 - 4c^2\alpha} \right] \right\}. \quad (9.22a)$$

Подставляя теперь соотношения (9.19) — (9.22) в (9.7) и (9.4), окончательно получаем, что гауссов пучок в неоднородных квадратичных средах определяется выражением

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \left( \frac{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha}}{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \cos \gamma z} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \\
 & \times \exp \left[ -\frac{(4c^2 - 1)\sqrt{\alpha}x^2}{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \cos \gamma z} \right] \times \\
 & \times \exp \left\{ -ik_0z + \frac{i}{2}c\sqrt{\alpha} \frac{x^2 \sin \gamma z}{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \cos \gamma z} - \right. \\
 & - \frac{i}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{4c\sqrt{\alpha} + (1 + 4c^2\alpha) \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2}\gamma z + \frac{\pi}{4} \right)}{1 - 4c^2\alpha} \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha}}{1 - 4c^2\alpha} \right] \right\}. \quad (9.23)
 \end{aligned}$$

Из выражения (9.23) заключаем, что амплитуда гауссова пучка в центральных его точках, которая определяется первым множителем, поперечный размер, кривизна фазовой поверхности и продольное смещение фазы (в сравнении с фазой плоской волны) периодически изменяются с координатой  $z$ . Это означает, что в целом световое поле, образующее гауссов пучок, распространяющийся вдоль оси неоднородности, периодически изменяется. Иначе говоря, некоторое начальное состояние светового поля периодически воспроизводится. Такой процесс периодического восстановления электромагнитного поля (без учета затухания) наблюдается в линзовом лучеводе [1]. Следовательно, направляющие свойства неоднородной квадратичной среды аналогичны свойствам линзовых лучеводов. Поэтому квадратичные среды и получили название линзоподобных.

Пространственная форма гауссова пучка определяется уравнением

$$(4c^2\alpha - 1)\sqrt{\alpha}x^2 = 1 + 4c^2\alpha + 4c\sqrt{\alpha} \cos \gamma z. \quad (9.24)$$

Из этой формулы видно, что пучок периодически изменяет величину своего поперечного сечения. Максимальные и минимальные значения поперечных размеров его наблюдаются в точках

$$z = \frac{k_0\pi}{2\sqrt{\alpha}} N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (9.25)$$

Из (9.20) заключаем, что для точек (9.25) радиус кривизны фазовой поверхности  $R = \infty$ . Это означает, что фазовый фронт становится плоским. Расстояние по оси  $oz$  между такими точками

$$\Delta z = \frac{k_0 \pi}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (9.26)$$

На рис. 9.1 изображен световой пучок.

Величина изменения поперечного радиуса (глубина модуляции) пучка зависит от постоянной  $c$  и, следова-

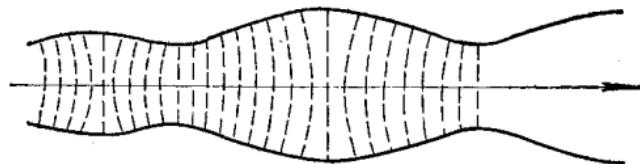


Рис. 9.1. Световой пучок в неоднородной квадратичной среде. Сплошные линии — пространственная форма пучка, штриховые — форма фазовой поверхности

тельно, от граничных условий, точнее говоря, от условий возбуждения (ввода) светового пучка в линзоподобной среде. Если  $c \rightarrow 0$ , то размер пучка  $w < 0$  и пучок расползается в ширину до бесконечности. Последнее означает, что в этом случае просто не будет наблюдаться локализации электромагнитной энергии в области неоднородности. Таким образом, приходим к выводу, что электромагнитная энергия локализуется и направляется областью неоднородности только при таком возбуждении, когда  $c > 1/2\sqrt{\alpha}$ .

Если  $c \rightarrow \infty$ , то в соответствии с (9.13) и (9.14) получаем, что

$$Q = Q_1 = -i\sqrt{\alpha}. \quad (9.27)$$

Так как радиус кривизны фазовой поверхности  $R$  и размер пучка  $w$  связаны с  $Q$  соотношением  $Q = k_0/R - 2i/\pi w^2$ , то из (9.27) следует  $R \rightarrow \infty$ ,

$$w^2 = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha}}. \quad (9.28)$$

Это означает, что в среде распространяется не изменяющийся световой пучок, а неизменный однородный пучок (световая нить), фазовая поверхность которого плоская.

Иначе говоря, среди различных собственных волн неоднородной среды имеется такой гауссов пучок, дифракционная расходимость в котором в любой точке оси  $oz$  в точности компенсируется (подавляется) сжатием пучка, вызванным неоднородностью среды. Для возбуждения такого пучка в среде нужно, чтобы поперечные размеры падающего гауссова пучка равнялись размерам однородного пучка в среде (9.28), а фазовый фронт его на границе ( $z=0$ ) был плоским. Это явление известно и используется в газовых неоднородных лучеводах [51].

Конечный по глубине (толщине) участок неоднородной квадратичной среды может выполнять роль плоско-параллельной линзы, фокусное расстояние которой  $f$  определяется соотношением [1]:

$$f = \frac{k_0}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{k_0} L, \quad (9.29)$$

где  $L$  — толщина участка неоднородной среды. Как видим, фокусное расстояние такой линзы зависит не только от величины неоднородности  $\alpha$ , но и от толщины ее. При этом простым изменением толщины  $L$  можно создать как собирающую, так и рассеивающую линзу. Может быть, с развитием технологии получения неоднородных сред такие линзы заменят даже в некоторых случаях обычные однородные линзы.

## § 10. ГАУССОВЫ ПУЧКИ В ЛИНЗОПОДОБНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ СРЕДАХ

При рассмотрении линзоподобной неоднородности сред предполагалось, однако, что в направлении продольной координаты  $z$  среда остается однородной. Практический интерес представляют также и среды, линзоподобность (квадратичная неоднородность) которых изменяется с глубиной. Такая неоднородность образуется, например, в среде под действием мощного лазерного луча, энергия которого уменьшается с глубиной проникновения в среду. Известны также способы сужения световых пучков в конических участках квадратичных сред (конических сельфоках). Наконец, просто продольная однородность диэлектрической проницаемости линзопо-

добрьих сред часто случайно или целенаправленно не соблюдается.

Теория распространения световых пучков в таких неоднородных средах достаточно сложна. В работах [53, 54] используются методы геометрической оптики для исследования свойств неоднородных по глубине квадратичных сред. В данном параграфе применим волновую теорию (метод гауссовых пучков) для таких сред [52]. Для простоты полагаем, что диэлектрическая проницаемость является функцией только двух координат

$$\epsilon(x, z) = \epsilon_0 [1 - \alpha(z)x^2 + \beta(z)]. \quad (10.1)$$

Здесь зависимость  $\alpha(z)$  определяет фактическое изменение параметра квадратичной неоднородности с продольной координатой, т. е. продольное изменение линзости среды. Функция  $\beta(z)$  выражает изменение  $\epsilon$  с глубиной вдоль оси  $oz$ .

Предполагая малую неоднородность среды, из уравнений Максвелла получаем

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon(x, z) H_y = 0. \quad (10.2)$$

По-прежнему полагаем

$$H_y = \psi(x, z) \exp(-ik_0 z), \quad (10.3)$$

где  $k_0 = \omega \sqrt{\mu \epsilon_0}$ . Медленно изменяющаяся по  $z$  амплитуда  $\psi$  удовлетворяет сейчас уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - k_0^2 \alpha(z) x^2 \psi + k_0^2 \beta(z) \psi = 0. \quad (10.4)$$

Решение этого уравнения можно искать в виде гауссова пучка

$$\psi = \exp \left[ -i \left( P + \frac{1}{2} Qx^2 \right) \right]. \quad (10.5)$$

Обычным методом, неоднократно уже применявшимся, для функций  $Q(z)$  и  $P(z)$  получаем уравнения:

$$Q^2 + k_0 \frac{dQ}{dz} + k_0 \alpha(z) = 0, \quad (10.6)$$

$$iQ + 2k_0 \frac{dP}{dz} - k_0^2 \beta(z) = 0. \quad (10.7)$$

Так как мнимая часть комплексного параметра  $Q$  определяет поперечные размеры и пространственную форму гауссовых пучков, а вещественная — форму фазовой поверхности, из (10.6), (10.7) сразу можно сделать вывод о том, что размеры, форма пучка и кривизна его фазовой поверхности в продольно неоднородной линзоподобной среде зависят только от неоднородности диэлектрической проницаемости в поперечной плоскости и от изменения величины этой неоднородности с продольной координатой. Чисто продольное изменение диэлектрической проницаемости влияет только на фазу пучка (его фазовую скорость).

Следовательно, чтобы определить основные свойства гауссовых пучков в неоднородных средах, необходимо прежде всего решить уравнение (10.6) и найти параметр  $Q$ . При известном  $Q$  интегрирование уравнения (10.7) не составит особого труда. Поэтому остановимся несколько подробнее на особенностях решения уравнения (10.6). Как мы уже отмечали выше, это уравнение типа Риккати [22]. Подстановкой

$$u(z) = \exp \int \frac{1}{k_0} Q dz \quad (10.8)$$

оно приводится к виду

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \alpha(z) u = 0. \quad (10.9)$$

При этом

$$Q = \frac{k_0}{u} \frac{du}{dz}. \quad (10.10)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению решения уравнения (10.9). Подобные уравнения очень часто встречаются в квантовой механике и теории распространения волн (см., например, [30—34]). Решение уравнения (10.9) может быть выражено через известные функции только при некоторых частных видах зависимости  $\alpha(z)$ . Мы здесь рассмотрим для примера два наиболее интересных случая реальных неоднородных сред, встречающихся в устройствах волоконной и интегральной оптики и при распространении лазерного излучения в нелинейных средах.

Пусть вначале

$$\alpha(z) = az + b. \quad (10.11)$$

Такая неоднородность может возникать в лазерных самоаведенных волноводных каналах, а также имеет место в конических участках самофокусирующих световодов (конических сельфоках). В этих случаях решением уравнения (10.9) являются функции

$$u = \sqrt{az + b} Z_{1/3}(t). \quad (10.12)$$

Здесь  $Z_{1/3}(t)$  — функции Бесселя порядка  $1/3$  от аргумента  $t = 2/3a(az + b)^{3/2}$ . Поскольку параметр  $Q$  — комплексная величина, то функция  $u(z)$  должна быть комплексной. Поэтому общее решение уравнения (10.9) необходимо брать в виде суммы

$$u = \sqrt{az + b} [AH_{1/3}^{(1)}(t) + BH_{1/3}^{(2)}(t)]. \quad (10.13)$$

Здесь  $H_{1/3}^{(1)}$ ,  $H_{1/3}^{(2)}$  — функции Ганкеля первого и второго рода соответственно,  $A$ ,  $B$  — постоянные.

Подставляя (10.13) в (10.10), получаем

$$Q = k_0 \sqrt{az + b} \frac{AH_{-2/3}^{(1)}(t) + BH_{-2/3}^{(2)}(t)}{AH_{1/3}^{(1)}(t) + BH_{1/3}^{(2)}(t)}. \quad (10.14)$$

Это общее выражение для параметра  $Q$  гауссовых пучков. Из него, как известно, можно найти формулы, определяющие пространственную форму пучка и кривизну его фазовой поверхности. Для этого нужно только разделить вещественные и мнимые части. Последняя процедура, однако, связана с громоздкими вычислениями. Поэтому воспользуемся некоторыми упрощенными предположениями.

Во многих (если не в абсолютном большинстве) реальных случаях изменение диэлектрической проницаемости вдоль оси намного меньше изменения ее в поперечном направлении. При этом, как следует из (10.1) и (10.11), можно считать, что коэффициент  $a \ll b$ . Тогда аргумент функций Ганкеля  $t = 2/3a(az + b)^{3/2}$  при любых  $z > 0$  представляется достаточно большим, и мы имеем право использовать приближенные формулы для функций Ганкеля (см., например, [23]):

$$H_{1/3}^{(1,2)}(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left[ \pm i \left( t - \frac{5}{12} \pi \right) \right], \quad (10.15)$$

$$H_{-2/3}^{(1,2)}(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left[ \pm i \left( t + \frac{1}{12} \pi \right) \right].$$

В этом приближении из (10.14) получаем

$$Q = k_0 \sqrt{az+b} \times \\ \times \frac{A \exp \left[ i \left( t + \frac{1}{12} \pi \right) \right] + B \exp \left[ -i \left( t + \frac{1}{12} \pi \right) \right]}{A \exp \left[ i \left( t - \frac{5}{12} \pi \right) \right] + B \exp \left[ -i \left( t - \frac{5}{12} \pi \right) \right]}. \quad (10.16)$$

Вводя обозначение  $A/B = Ce^{i\delta}$ , где  $C, \delta$  — вещественные величины, вместо (10.16) находим

$$Q = k_0 \sqrt{az+b} \times \\ \times \frac{C \exp \left[ i \left( t + \frac{1}{12} \pi + \delta \right) \right] + \exp \left[ -i \left( t + \frac{1}{12} \pi \right) \right]}{C \exp \left[ i \left( t - \frac{5}{12} \pi + \delta \right) \right] + \exp \left[ -i \left( t - \frac{5}{12} \pi \right) \right]}. \quad (10.16a)$$

Из (10.16 а) видно, что параметр  $Q$  является осциллирующей функцией продольной координаты  $z$ . При этом амплитуда осцилляций изменяется из-за наличия множителя  $\sqrt{az+b}$ . Следовательно, характеристики гауссова пучка (поперечный размер, кривизна фазовой поверхности) тоже будут осциллирующими функциями координаты  $z$  с увеличивающимися или уменьшающимися амплитудами осцилляций. Примерная пространственная форма такого пучка изображена на рис. 10.1 (сплошные кривые), штриховые линии представляют фазовые поверхности. Такая картина должна наблюдаться, например, при самофокусировке лазерного луча. По мере проникновения его в нелинейную среду энергия луча уменьшается и уменьшается эффект самофокусировки, а

поперечные размеры светового пучка при этом будут возрастать.

Формула (10.16а) допускает и частное решение, при котором  $c=0$ . Тогда

$$Q = -ik_0 \sqrt{az + b}. \quad (10.17)$$

В этом случае поперечный размер гауссова пучка

$$w^2 = \frac{\lambda}{\pi^2 \sqrt{az + b}}, \quad (10.18)$$

а радиус кривизны при любых  $z$  равен бесконечности.

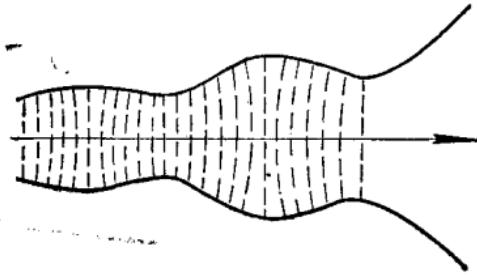


Рис. 10.1. Гауссов пучок в неоднородной линзоподобной среде

Следовательно, если величина  $\alpha = az + b$  растет (увеличивается поперечная неоднородность среды), размер пучка монотонно уменьшается, и наоборот. Физически это совершенно очевидное следствие. Не совсем ясно то, что при таком равномерном сужении или расширении светового пучка фазовый фронт остается плоским. Это в какой-то мере можно понять из предыдущего общего случая осциллирующего и постепенно расширяющегося или сужающегося пучка, изображенного на рис. 10.1. Из рисунка видно, что при уменьшении осцилляций фазовая поверхность действительно должна стремиться к плоской.

Таким образом, из решения уравнения (10.6) удалось выяснить основные особенности свойств гауссовых пучков в неоднородных линзоподобных средах. Чтобы найти полное математическое выражение для них, необходимо задать конкретный вид функции  $\beta(z)$  и подставить ее вместе с соотношением (10.16) для  $Q$  в уравнение (10.7). Однако проделывать здесь это нецелесообразно, так как в любой конкретной ситуации такие вычисления можно провести без особого труда.

Рассмотрим, наконец, квадратичные неоднородные среды, в которых функция  $\alpha(z)$  в (10.9) есть некоторая

периодическая, например, четная функция. Условие четности, правда, совсем не обязательно, и оно не уменьшает общности задачи. Такую функцию, как известно, можно разложить в ряд Фурье по косинусам:

$$\alpha(z) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos 2nz', \quad z' = \frac{\pi z}{d}, \quad (10.19)$$

$d$  — период изменения  $\alpha$ .

Неоднородность типа (10.19) может быть в линзоподобных средах, если в них дополнительно создается распределенная обратная связь. Оптические лучеводы с газовыми линзами тоже можно рассматривать как периодическую квадратичную среду. Решение основного уравнения (10.9) в этих случаях проводится следующим образом.

Подставляя (10.19) в (10.9), получаем уравнение Хилла [55, 56]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} + \left[ c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos 2nz' \right] u = 0. \quad (10.20)$$

В соответствии с теорией Флоке [56] решение уравнения (10.20) можно записать в виде

$$u_{1,2}(z') = e^{\pm i h z'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\pm 2i n z'}.$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $a_n$  и продольной постоянной  $h$  необходимо подставить это решение в уравнение Хилла (10.20), в результате чего приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$-(h + 2n)^2 a_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m a_{n-m} = 0, \quad (10.21)$$

где индекс  $n$  пробегает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а  $c_{-m} = c_m$ .

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения системы (10.21) является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при  $a_n$ . Этот определитель играет роль характеристического уравнения для продольной постоянной  $h$

в рассматриваемой среде. Он может быть приведен к виду \*)

$$\sin^2 \frac{\pi h}{2} = \Delta(0) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{c_0}}{2}, \quad (10.22)$$

где  $\Delta(0)$  — определитель матрицы  $[M]$  с элементами

$$M_{mm} = 1, \quad (10.23)$$

$$M_{mn} = \frac{c_{m-n}}{c_0 - (2m)^2}, \quad m \neq n.$$

В общем случае  $\Delta(0)$  — бесконечный определитель, и решение уравнения (10.22) можно получить только численным путем с помощью вычислительной техники. Если же  $c_1, c_2, \dots$  достаточно малы, то можно доказать (пользуясь разложением функции  $\operatorname{ctg} x$ ), что

$$\begin{aligned} \Delta(0) \simeq 1 + & \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \pi \sqrt{c_0}}{4 \sqrt{c_0}} \times \\ & \times \left[ \frac{c_1^2}{1 - c_0} + \frac{c_2^2}{2^2 - c_0} + \frac{c_3^2}{3^2 - c_0} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (10.24)$$

С помощью (10.24) решается уравнение (10.22), из которого и определяется постоянная  $h$ , характеризующая искомое решение исходного уравнения.

Отметим, что определитель  $\Delta(h)$  — четная периодическая по  $h$  функция с периодом, равным 2. Это означает, что все особенности поведения  $\Delta(h)$  можно рассматривать только на промежутке  $0 \leq \operatorname{Re} h \leq 1$ .

Итак, общее решение уравнения Хилла (10.20) имеет вид

$$u(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp [z' i (h + 2n)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \exp [-iz'(h+2n)], \quad (10.25)$$

\*) Здесь мы используем вычисления, проделанные Л. А. Мазаник.

а параметр  $Q$  при этом записывается следующим образом:

$$Q = ik_0 \frac{\pi}{d} \rightarrow \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (h + 2n) a_n \exp [iz' (h + 2n)] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp [iz' (h + 2n)] +}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (h + 2n) b_n \exp [-iz' (h + 2n)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp [-iz' (h + 2n)]}.$$

## § 11. СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ В СРЕДАХ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ ИЛИ УСИЛЕНИЕМ

До сих пор рассматривались совершенно прозрачные среды. В действительности же всегда наблюдается поглощение электромагнитной энергии в обычных средах либо усиление в активных лазерных элементах. Как обычное, так и отрицательное поглощение феноменологически учитывается в электромагнитной теории введением комплексной постоянной распространения  $\tilde{k} = k + +i\alpha$ . Поскольку мы используем зависимость поля от координаты  $z$  в виде  $\exp(-ikz)$ , то при комплексном  $\tilde{k}$  усиление будет наблюдаться, если  $\alpha > 0$ , а поглощение, если  $\alpha < 0$ .

При наличии поглощения или усиления в неоднородной квадратичной среде невозможна полная локализация электромагнитной энергии около оси (плоскости) неоднородности. Это объясняется тем, что в поглащающих средах полное отражение волн на границе неоднородности диэлектрической проницаемости нарушается [34, 35]. В прозрачных средах поток энергии, перпендикулярный направлению области неоднородности, отсутствует, а в поглащающих средах он отличен от нуля и пропорционален величине поглощения. Следовательно, часть энергии, локализованной около оси неоднородности, может излучаться в пространство. В средах с обычным поглощением это приведет к увеличению затухания светового пучка, а в усиливающих — к соответствующему

му уменьшению коэффициента усиления. Излучение части энергии в окружающую среду вызывает также дополнительное искривление фазовой поверхности направляемых электромагнитных волн [34]. Последнее с очевидностью следует из того, что в математическом выражении для волн, бегущих в направлении оси  $oz$  и излучающих часть энергии в окружающее пространство, появляется множитель вида  $\exp(-iux)$  наряду с обычной зависимостью  $\exp(-ikz)$ . Поэтому даже первоначально плоская неоднородная поверхностная волна становится неплоской в поглощающих средах.

Но наиболее интересным оказывается тот факт, что неоднородное усиление (и даже поглощение) может создавать нерасходящийся, а значит, устойчивый световой пучок в однородной по показателю преломления среде и даже в дефокусирующей среде, т. е. в среде, в которой показатель преломления в центре области неоднородности меньше по величине, чем в окружающем пространстве. Этот интересный факт объясняется тем, что при наличии скачка коэффициента поглощения независимо от его знака среда может вести себя как волновод [31, 36—38]. Но в обычной поглощающей среде световой пучок быстро затухает с глубиной, а в усиливающей среде его энергия может не только убывать, но и возрастать. В последнем случае источником энергии для усиления пучка и компенсации потерь на излучение в окружающее пространство является сама активная среда, обладающая лазерным эффектом, вызванным ее внешней накачкой.

В поглощающих или усиливающих неоднородных средах возможно и еще одно любопытное и важное явление. Если около оси неоднородной области коэффициент усиления больше или коэффициент поглощения меньше, чем в окружающем пространстве, то в первоначально периодически изменяющемся (осциллирующем) световом пучке амплитуды осцилляций постепенно уменьшаются. В результате на некоторой глубине в такой среде образуется однородный световой жгут (световая нить) [39]. Возможно, что в этом состоит одна из причин возникновения лазерных световых нитей (филаментов) в реальных средах [40], которые всегда имеют определенное поглощение, а нужная неоднородность поглощения вызывается просветляющим эффектом мощного лазерного луча.

Итак, рассмотрим свойства гауссовых световых пучков, распространяющихся в поглощающих линзоподобных средах. Как и прежде, исходим из волнового уравнения

$$\Delta\varphi + \tilde{k}^2(x, y)\varphi = 0; \quad (11.1)$$

в котором полагаем

$$\tilde{k}^2 = k_0^2 \left( 1 - \frac{x^2}{x_1^2} - \frac{y^2}{y_1^2} \right) + 2i\alpha_0 k_0 \left( 1 - \frac{x^2}{x_2^2} - \frac{y^2}{y_2^2} \right). \quad (11.2)$$

Здесь  $k_0$  — вещественная постоянная распространения в центре области неоднородности,  $\alpha_0$  — соответствующий коэффициент отрицательного поглощения, величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  — параметры неоднородности. Здесь и в дальнейшем предполагается малость поглощения ( $\alpha_0 \ll k_0$ ).

Будем искать решение уравнения (11.1) в виде пучка

$$\varphi = \psi(x, y, z) \exp(-i\tilde{k}_0 z), \quad (11.3)$$

где  $\tilde{k}_0 = k_0 + i\alpha_0$ , а  $\psi$  — медленно изменяющаяся по  $z$  функция. Подставляя (11.2), (11.3) в (11.1), получаем приближенно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left( k_0^2 \frac{x^2}{x_1^2} - k_0^2 \frac{y^2}{y_1^2} + \right. \\ \left. + 2ik_0 \alpha_0 \frac{x^2}{x_2^2} + 2ik_0 \alpha_0 \frac{y^2}{y_2^2} \right) \psi = 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Далее полагаем, что амплитуду  $\psi(x, y, z)$  можно по-прежнему представить в гауссовой форме

$$\psi = \exp \left[ -i \left( P + \frac{1}{2} Q_1 x^2 + \frac{1}{2} Q_2 y^2 \right) \right]. \quad (11.5)$$

Из (11.5) следует, что мы ищем решение уравнения (11.1) в виде эллиптического гауссова пучка. Это связано с тем, что неоднородность среды, определенная соотношением (11.2), также эллиптическая. Как увидим далее, это естественное обобщение практически не усложняет решение задачи.

Подставляя (11.5) в (11.4), обычным образом находим дифференциальные уравнения для параметров пучка  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $P$ :

$$Q_1^2 + k_0 \frac{dQ_1}{dz} + \frac{k_0^2}{x_1^2} + 2i\alpha_0 \frac{k_0}{x_2^2} = 0, \quad (11.6)$$

$$Q_2^2 + k_0 \frac{dQ_2}{dz} + \frac{k_0^2}{y_1^2} + 2i\alpha_0 \frac{k_0}{y_2^2} = 0,$$

$$iQ_1 + iQ_2 + 2k_0 \frac{dP}{dz} = 0. \quad (11.7)$$

Уравнения (11.6) фактически совпадают по форме с уравнением (9.8), и их решения ищутся так же, как это было указано в девятом параграфе. Там же мы видели, что в неоднородной квадратичной среде возможен однородный гауссов пучок. Поэтому и здесь вначале рассмотрим свойства однородного пучка, а затем осциллирующего.

Для однородного пучка в соответствии с (9.10), (9.27) и (11.6) получаем:

$$Q_1^2 = \left( \frac{k_0}{R_1} - i \frac{2}{\pi w_1^2} \right)^2 = -\frac{k_0^2}{x_1^2} - 2i\alpha_0 \frac{k_0}{x_2^2}, \quad (11.8)$$

$$Q_2^2 = \left( \frac{k_0}{R_2} - i \frac{2}{\pi w_2^2} \right)^2 = -\frac{k_0^2}{y_1^2} - 2i\alpha_0 \frac{k_0}{y_2^2}. \quad (11.9)$$

Из этих соотношений находим, что поперечные размеры однородного эллиптического пучка и главные радиусы кривизны его фазовой поверхности определяются соответственно формулами:

$$w_1^2 = 2 \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_0^4}{x_1^4} + 4\alpha_0^2 \frac{k_0^2}{x_2^4}} + \frac{k_0^2}{x_1^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (11.10)$$

$$R_1 = k_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_0^4}{x_1^4} + 4\alpha_0^2 \frac{k_0^2}{x_2^4}} - \frac{k_0^2}{x_1^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (11.11)$$

Формулы для  $w_2^2$ ,  $R_2$  отличаются от (11.10), (11.11) только заменой  $x_1$ ,  $x_2$  на  $y_1$ ,  $y_2$ . Функция  $P(z)$  выражается при этом следующим образом:

$$P(z) = \frac{1}{k_0} \left( \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right) z - \frac{i}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) z. \quad (11.12)$$

Постоянную интегрирования полагаем здесь равной нулю, приняв, что при  $z=0$  фазовый фронт пучка должен быть плоским.

Из (11.10), (11.11) видим, что размеры однородного пучка и главные радиусы кривизны его фазовой поверхности зависят от всех в совокупности параметров неоднородной среды. Изменение амплитуды пучка в направлении распространения определяется в усиливающей среде главным образом множителем

$$\exp \left[ \alpha_0 z - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) z \right]. \quad (11.13)$$

Отсюда следует, что усиление для пучка меньше соответствующего усиления плоской однородной волны. Дополнительные потери, как видим, связаны с кривизной фазовой поверхности, которая обусловлена наличием неоднородного поглощения (усиления). При однородном поглощении ( $x_2, y_2 \rightarrow \infty$ ), как следует из (11.11), радиусы кривизны  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$  и усиление пучка будет равно усилию плоской волны.

Во многих реальных случаях, вероятно, можно считать параметры  $x_1$  и  $x_2$ , а также параметры  $y_1$  и  $y_2$  сравнимыми по величине ( $x_1 \approx x_2, y_1 \approx y_2$ ). Тогда получаем:

$$\begin{aligned} w_1^2 &= \frac{2x_1}{k_0}, & w_2^2 &= \frac{2y_1}{k_0}, \\ R_1 &= \frac{k_0 x_2^2}{\alpha_0 x_1}, & R_2 &= \frac{k_0 y_2^2}{\alpha_0 y_1}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Следовательно, в этих случаях поперечные размеры пучка определяются только параметрами неоднородности показателя преломления, а радиусы кривизны — всеми параметрами неоднородности, а также и величиной отрицательного поглощения. Физически это вполне понятно, ибо при слабом поглощении, которое предполагалось, локализация электромагнитной энергии связана в основном с неоднородностью показателя преломления, а излучение энергии и, следовательно, кривизна волнового фронта зависят как от неоднородности среды, так и от величины коэффициента поглощения. Как и следовало ожидать, при  $\alpha_0 \rightarrow 0$  фазовая поверхность становится плоской ( $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ ).

Если имеется дефокусирующая неоднородная среда, такая, для которой

$$\tilde{k}^2 = k_0^2 \left( 1 + \frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} \right) + 2ik_0\alpha_0 \left( 1 - \frac{x^2}{x_2^2} - \frac{y^2}{y_2^2} \right), \quad (11.15)$$

то при  $x_1 \approx x_2$ ,  $y_1 \approx y_2$  получаем

$$w_1^2 = \frac{2x_2^2}{\alpha_0 x_1}, \quad w_2^2 = \frac{2y_2^2}{\alpha_0 y_1}, \quad (11.16)$$

$$R_1 = x_1, \quad R_2 = y_1.$$

Изменение амплитуды пучка с координатой  $z$  и в этом неблагоприятном случае определяется формулой (11.13). Из этой формулы заключаем, что если  $\alpha_0 \neq 0$  и усиление достаточное, чтобы компенсировать дифракционные потери, вызванные кривизной фазовой поверхности, то даже в дефокусирующей среде может распространяться незатухающий световой пучок.

В соответствии с (11.16) кривизна фазовой поверхности такого пучка определяется только параметрами неоднородности, а его поперечные размеры зависят еще и от величины отрицательного поглощения. Последнее объясняется тем, что устойчивый пучок поддерживается только энергией, запасенной в усиливающей среде. Именно поэтому, как это видно из (11.16), при  $\alpha_0 \rightarrow 0$  размеры пучка стремятся к бесконечности, т. е. пучок расплывается, теряет свою локализованную форму.

Рассмотрим теперь, как изменяется форма произвольного светового пучка в неоднородной поглощающей или усиливающей среде. Для простоты положим, что вместо (11.2) имеем

$$\tilde{k}^2(x) = k_0^2 \left( 1 - \frac{x^2}{x_1^2} \right) + 2i\alpha_0 k_0 \left( 1 - \frac{x_2}{x_1^2} \right). \quad (11.17)$$

По-прежнему предполагаем, что в среде существует неоднородность как показателя преломления, так и коэффициента поглощения (усиления). При этом коэффициент обычного поглощения ( $\alpha_0 < 0$ ) является минимальным в центре области неоднородности ( $x=0$ ) и возрастает с удалением от точек плоскости  $x=0$ . Такая

ситуация наблюдается, например, во всех случаях, когда происходит самофокусировка и просветление реальных слабо поглощающих сред в поле мощного лазерного луча.

Для амплитуды пучка  $\psi$  в этом случае из (11.4) получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left( \frac{k_0^2}{x_1^2} + i \frac{2\alpha_0 k_0}{x_2^2} \right) x^2 \psi = 0. \quad (11.18)$$

Решение этого уравнения ищем в обычной форме гаусса пучка и способом, изложенным в девятом параграфе. Для комплексного параметра  $Q(z)$  находим следующее выражение:

$$Q = -i(\alpha_1 + i\alpha_2) -$$

$$2|\alpha|^2$$

$$-\frac{2|\alpha|^2 ce^{\alpha_2 \xi} \cos(\alpha_1 \xi + \beta) - \alpha_2 - i[2|\alpha|^2 ce^{\alpha_2 \xi} \sin(\alpha_1 \xi + \beta) + \alpha_1]}{(11.19)}$$

Здесь  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = \sqrt{k_0^2/x_1^2 + 2\alpha_0 k_0 i/x_2^2}$ ,  $c$ ,  $\beta$  — вещественные постоянные интегрирования,  $\xi = 2z/k_0$ . Параметр  $\alpha_2 > 0$ , если в центре области неоднородности имеется максимум усиления или минимум коэффициента поглощения. Если же, наоборот, в центре области неоднородности имеется максимальное поглощение или минимальное усиление, то  $\alpha_2 < 0$ .

Из (11.19) видим, что при  $\alpha_2 > 0$  с увеличением  $\xi$ , т. е. с увеличением глубины проникновения светового пучка в среду, параметр  $Q$  стремится к постоянному значению

$$Q = -i(\alpha_1 + i\alpha_2). \quad (11.20)$$

Это означает, что на некоторой глубине в неоднородной среде произвольный (осциллирующий) гауссов пучок превращается в однородный световой пучок (нить) постоянного поперечного сечения. Поперечные размеры световой нити определяются параметром неоднородности  $\alpha_1 (\psi \sim \exp(-\alpha_1 x^2/2))$ . Следовательно, независимо от способа возбуждения в поглощающей (усиливающей) неоднородной среде устанавливается однородный световой жгут.

Если же неоднородность среды такова, что  $\alpha_2 < 0$ , то при  $z \rightarrow \infty$  из (11.19) получаем

$$Q = i\alpha_1 - \alpha_2. \quad (11.21)$$

В этом случае амплитуда пучка  $\Psi \sim \exp(\alpha_1 x^2/2)$ , и пучок быстро расплывается.

Рассмотрим, наконец, еще один практически интересный случай неоднородных усиливающих сред. До сих пор предполагалось, что положение максимума показателя преломления в поперечной плоскости совпадает с положением максимума коэффициента усиления. Однако, например, в инжекционных лазерах и в активных элементах устройств интегральной оптики эти максимумы могут быть смещены друг относительно друга. При этом прежде всего возникает вопрос, какая же область неоднородности будет играть роль волноводного канала. Как мы знаем, волноводность может создаваться как неоднородностью показателя преломления, так и неоднородностью коэффициента поглощения.

Точное решение уравнений Максвелла в этом случае не удается получить. Поэтому воспользуемся методом гауссовых пучков. Предположим, что

$$\tilde{k}(x) = k_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2x_1^2} \right) + i\alpha_0 \left[ 1 - \frac{(x-\delta)^2}{x_2^2} \right]. \quad (11.22)$$

Здесь  $k_0$  — постоянная распространения в центре области неоднородности показателя преломления ( $x=0$ ),  $\alpha_0$  — коэффициент отрицательного поглощения (усиления) в центре активной области ( $x=\delta$ ),  $\delta$  — величина смещения центра активной области относительно центра области неоднородности показателя преломления. Предположим сейчас, что неоднородность коэффициента усиления даже больше, чем неоднородность показателя преломления ( $1/x_1^2 \ll 1/x_2^2$ ), так что

$$\tilde{k}^2(x) = k_0^2 \left( 1 - \frac{x^2}{x_1^2} \right) + 2i\alpha_0 k_0 \left[ 1 - \frac{(x-\delta)^2}{x_2^2} \right]. \quad (11.23)$$

Пусть по-прежнему

$$E_y = \Psi(x, z) \exp[-i(k_0 + i\alpha)z]. \quad (11.24)$$

Функция  $\Psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2ik_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \left( k_0^2 \frac{x^2}{x_1^2} + 2i\alpha_0 k_0 \frac{x^2}{x_2^2} - 4i\alpha_0 k_0 \frac{x\delta}{x_2^2} + 2i\alpha_0 k_0 \frac{\delta^2}{x_2^2} \right) \Psi = 0. \quad (11.25)$$

В отличие от предыдущего решения уравнения (11.25) нужно искать в более сложном виде

$$\psi = \exp \left[ -i \left( P + \frac{1}{2} Qx^2 + Lx \right) \right]. \quad (11.26)$$

Обычным образом подставляя (11.26) в (11.25) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $x$ , для функций  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $L(z)$  получаем уравнения:

$$Q^2 + k_0 \frac{dQ}{dz} + \frac{k_0^2}{x_1^2} + 2i\alpha_0 \frac{k_0}{x_2^2} = 0, \quad (11.27)$$

$$QL + k_0 \frac{dL}{dz} - 2i\alpha_0 k_0 \frac{\delta}{x_2^2} = 0, \quad (11.28)$$

$$L^2 + iQ - 2k_0 \frac{dP}{dz} + 2i\alpha_0 k_0 \frac{\delta^2}{x_2^2} = 0. \quad (11.29)$$

Как видим, сейчас параметры гауссова пучка определяются довольно сложно. Поэтому ограничимся для простоты случаем однородного пучка, для которого

$$Q = -i \sqrt{\frac{k_0^2}{x_1^2} + 2i\alpha_0 \frac{k_0}{x_2^2}},$$

или

$$Q = -i \frac{k_0}{x_1} \left( 1 + i \frac{\alpha_0}{k_0} \frac{x_1^2}{x_2^2} \right). \quad (11.30)$$

В этом случае из (11.28) и (11.29) находим:

$$\begin{aligned} L = & \frac{2\alpha_0 \delta x_1}{x_2^2} \left[ \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) \cos \frac{z}{x_1} - 1 \right] + \\ & + \frac{2\alpha_0^2 \delta x_1^3}{k_0 x_2^4} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) \sin \frac{z}{x_1} + \\ & + i \frac{2\alpha_0 \delta x_1}{x_2^2} \sin \frac{z}{x_2} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) - \\ & - i \frac{2\alpha_0 \delta x_1^3}{k_0 x_2^4} \left[ \cos \frac{z}{x_1} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (11.31)$$

$$P = -\frac{z}{2x_1} - i \frac{\alpha_0 x_1}{2k_0 x_2^2} z - i \frac{\alpha_0 \delta^2}{x_2^2} z. \quad (11.32)$$

При этом мы предполагаем, что на поверхность  $z=0$  падает световой пучок с центром в точке  $x=0$ .

Окончательное выражение для пучка принимает вид:

$$\begin{aligned} E_y = & \exp \left\{ -ik_0 z - i \frac{z}{2x_1} - \frac{i\alpha_0 x_1}{2x_2^2} x^2 - \right. \\ & - \frac{2\alpha_0 \delta x_1}{x_2^2} \left[ \cos \frac{z}{x_1} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) - 1 \right] x - \\ & - i \frac{2\alpha_0^2 \delta x_1^3}{k_0 x_2^4} \sin \frac{z}{x_1} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) x + \alpha_0 z - \frac{k_0}{2x_1} x^2 - \\ & - \frac{\alpha_0 x_1}{2k_0 x_2^2} z - \frac{\alpha_0 \delta^2}{x_2^2} z + \frac{2\alpha_0 x_1 \delta}{x_2^2} \sin \frac{z}{x_1} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) x - \\ & \left. - \frac{2\alpha_0^2 \delta x_1^3}{k_0 x_2^4} \left[ \cos \frac{z}{x_1} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) - 1 \right] \right\}. \quad (11.33) \end{aligned}$$

Как видим, общее выражение даже для однородного пучка в рассматриваемом случае достаточно громоздкое. Но из него следует, что положение максимума амплитуды (интенсивности) в поперечном направлении определяется равенством

$$\begin{aligned} x_{\max} = & \frac{2\alpha_0 \delta x_1^2}{k_0 x_2^2} \sin \frac{z}{x_1} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) - \\ & - \frac{2\alpha_0^2 \delta x_1^4}{k_0^2 x_2^4} \left[ \cos \frac{z}{x_1} \exp \left( -\frac{\alpha_0 x_1}{k_0 x_2^2} z \right) - 1 \right]. \quad (11.34) \end{aligned}$$

Как видим, вначале на небольшой глубине в неоднородной среде световой однородный пучок совершает некоторое криволинейное (колебательное) движение, но затем с ростом  $z$  колебания быстро уменьшаются. Положение центра пучка после этого определяется равенством

$$x_{\max} = \frac{2\alpha_0^2 x_1^4}{k_0^2 x_2^4} \delta. \quad (11.35)$$

Последнее означает, что смещение пучка от центра области неоднородности показателя преломления в общем случае не равно  $\delta$ . Выше мы предположили, что неоднородность коэффициента усиления больше, чем неоднородность показателя преломления ( $x_2^2 \ll x_1^2$ ). Из (11.35) видим, что при достаточно большой неоднородности коэффициента усиления даже в слабо усиливающих средах ( $\alpha_0 \ll k_0$ ) смещение центра пучка  $x_{\max}$  от начала координат может быть равно  $\delta$ . Это означает, что именно область неоднородности коэффициента усиления будет выполнять роль направляющего волноводного канала, около которого локализуется и вдоль которого распространяется электромагнитная энергия.

Если же неоднородность коэффициента усиления не очень велика, то  $x_{\max} \approx 0$ . А это означает, что в таком случае пучок будет распространяться вдоль области неоднородности показателя преломления, которая играет теперь роль волноводного канала. Коэффициент усиления в центре этого канала ( $x=0$ ) определяется соотношением

$$\eta = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 x_1}{2k_0 x_2^2} - \frac{\alpha_0 \delta^2}{x_2^2}. \quad (11.36)$$

Второй член в (11.36) обусловлен излучением энергии в окружающее пространство (что вызывает кривизну фазовой поверхности), а третий — смещением активной области. Если смещение велико ( $\delta \rightarrow \infty$ ), то коэффициент усиления  $\eta$  может быть равен нулю либо даже станет отрицательным ( $\eta < 0$ ), что при наших обозначениях означает обычное затухание энергии пучка. Следовательно, усиление (и генерация) электромагнитных волн в активной неоднородной среде возможно только в том случае, если активная область и область неоднородности показателя преломления перекрываются.

## ГАУССОВЫ ПУЧКИ СВЕТА В КРИСТАЛЛАХ

В предыдущих главах достаточно подробно рассматривались свойства гауссовых световых пучков в изотропных средах. Цель настоящей главы — распространить теорию гауссовых пучков на анизотропные кристаллические среды. Особенности гауссовых пучков в кристаллических средах сводятся в основном к двум аспектам, которые в конечном итоге обусловливают многие их весьма разнообразные свойства. Первый аспект заключается в том, что вследствие двойного преломления направление распространения пучка составляет определенный угол с направлением фазовой нормали в точках центра пучка, второй состоит в изменении кривизны фазовой поверхности, формы пучка и угла расходимости его.

### § 12. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В КРИСТАЛЛАХ

Рассмотрим распространение в кристалле плоской монохроматической волны частоты  $\omega$  в направлении единичного вектора волновой нормали  $\mathbf{n}$  с фазовой скоростью  $v_f = c/n$ . В дополнение к этой скорости (фактически скорости по нормали) в анизотропных средах приходится вводить еще и лучевую скорость (скорость энергии), которая как по направлению, так и по величине отличается от фазовой. Уравнения Максвелла для плоских волн и в кристалле записываются в форме (1.5):

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{D} &= -[\mathbf{kH}], \\ \omega \mathbf{B} &= [\mathbf{kE}].\end{aligned}\tag{12.1}$$

Из них видно, что векторы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  перпендикулярны векторам  $\mathbf{k}=n\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ , вектор  $\mathbf{D}$  перпендикулярен также вектору  $\mathbf{n}$ . Вектор  $\mathbf{E}$  не перпендикулярен вектору волновой

нормали  $n$ , поскольку в кристаллах векторы  $E$  и  $D$  не параллельны между собой. Ограничимся здесь немагнитными средами и поэтому считаем векторы  $B$  и  $H$  параллельными (рис. 12.1).

Вектор потока энергии Умова—Пойнтинга

$$S = [EH] \quad (12.2)$$

перпендикулярен векторам  $E$  и  $H$ . Единичный вектор  $s$  потока энергии образует с вектором волновой нормали  $n$  угол  $\alpha$ , равный углу между векторами  $E$  и  $D$ . Следовательно, в кристаллах энергия распространяется не в направлении волновой нормали.

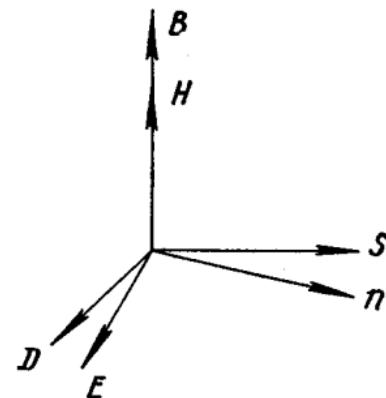


Рис. 12.1. Направление векторов плоской электромагнитной волны в кристалле

Величина лучевой скорости  $v_r$  численно равна отношению энергии  $S$ , которая протекает в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку, к энергии единицы объема  $w$ , т. е.

$$v_r = \frac{S}{w} . \quad (12.3)$$

Используя определение полной плотности энергии и соотношения (12.2), (12.3), получаем, что фазовая и лучевая скорости связаны между собой равенством

$$v_\phi = v_r \cos \alpha. \quad (12.4)$$

Из него следует, что фазовая скорость равна проекции лучевой скорости на направление волновой нормали. Угол  $\alpha$  можно определить через главные значения показателей преломления кристалла. Например, для одноосных кристаллов

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_e^2 \operatorname{ctg} \varphi + n_o^2 \operatorname{tg} \varphi} , \quad (12.5)$$

где  $\phi$  — угол между направлением волновой нормали и оптической осью;  $n_o$ ,  $n_e$  — главные значения показателя преломления.

Подробно останавливаться на законах распространения плоских электромагнитных волн в кристаллах не будем. Эти сведения содержатся во многих учебных пособиях и монографиях (см., например, [9, 10, 57]). Но для лучшего понимания свойств гауссовых пучков света в

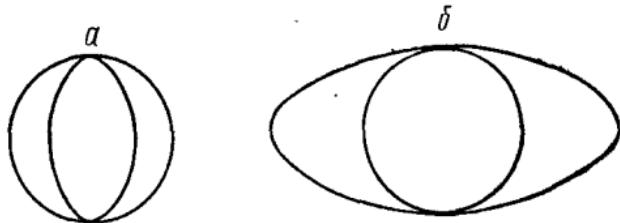


Рис. 12.2. Волновые поверхности положительных (а) и отрицательных (б) одноосных кристаллов

кристаллах полезно напомнить основные особенности волновых поверхностей.

Предположим, что внутри кристалла находится точечный источник света. Тогда мгновенное положение волнового фронта (геометрическое место точек, до которых доходит колебание) и является волновой поверхностью. Поскольку в кристалле имеется две волны, скорости которых различаются, волновая поверхность всегда является двуполостной поверхностью.

Волновая поверхность одноосного кристалла состоит из сферы (обыкновенная волна) и эллипсоида вращения для необыкновенных волн. Обе эти поверхности касаются друг друга в точках, лежащих на оптической оси (рис. 12.2). Длины осей эллипсоидов вращения для необыкновенных волн пропорциональны величинам  $1/n_e$ ,  $1/n_o$ .

Рассмотрим немного подробней волновую поверхность необыкновенных волн (рис. 12.3). Направление распространения энергии (луча) совпадает с отрезком  $OP$ , а направление волновой нормали — с нормалью к волновому фронту в точке  $P$ . Как видим, эти направления не совпадают. Фазовая скорость для участка волнового фронта в точке  $P$  пропорциональна отрезку  $ON$ , перпендикулярному касательной в точке  $P$ , а лучевая скорость пропорциональна отрезку  $OP$  [57].

Из формы волновой поверхности необыкновенной волны легко убедиться, что если узкий пучок света образуется плоскими волнами, распространяющимися в некотором конусе направлений (рис. 12.4), то волновая поверхность такого пучка будет не сферической, как это наблюдается в изотропных средствах, а астигматической.

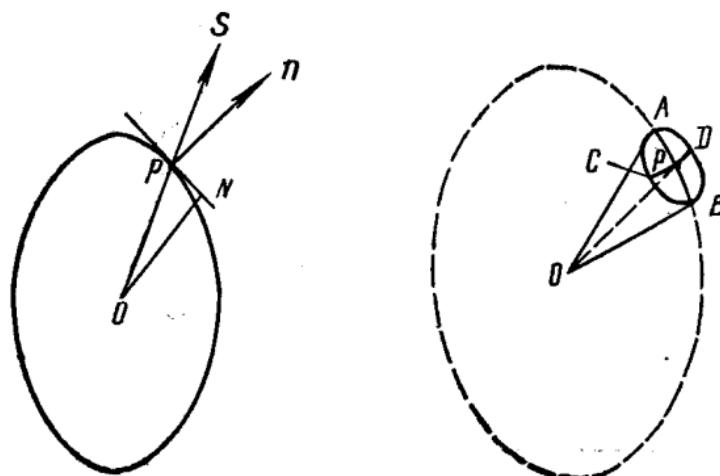


Рис. 12.3. Волновая поверхность необыкновенной волны

Рис. 12.4. Пучок волн в кристалле и его фазовая поверхность

Кривизна волнового фронта на отрезках  $AB$  и  $CD$  различная. При этом световой пучок распространяется в направлении отрезка  $OP$ , а фаза в точках его центральной оси — в направлении нормали к фазовой поверхности в точке  $P$ . Именно эти особенности и проявляются в гауссовых световых пучках, которые можно представить как набор плоских волн, распространяющихся в узком конусе направлений.

Волновая поверхность двуосного кристалла намного сложнее, чем в одноосных кристаллах. Но сечения этой поверхности главными плоскостями кристалла аналогичны форме главных сечений одноосных кристаллов (рис. 12.5). Во всяком случае главные сечения волновой поверхности двуосных кристаллов тоже имеют вид окружностей и эллипсов, но только они не касаютсяся, а расположены внутри друг друга либо пересекаются в четырех точках в главной плоскости, проходящей через оптические оси кристалла. Точки пересечения главных сечений волновой поверхности лежат на оптических осях. Окружность в главном сечении волновой поверхности

двуосных кристаллов соответствует тем плоским волнам, в которых электрический вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости сечения, а эллипс — волнам, электрический вектор которых параллелен этой плоскости. По аналогии с одноосными кристаллами первые волны часто называют обычновенными волнами, а вторые — необыкновенными.

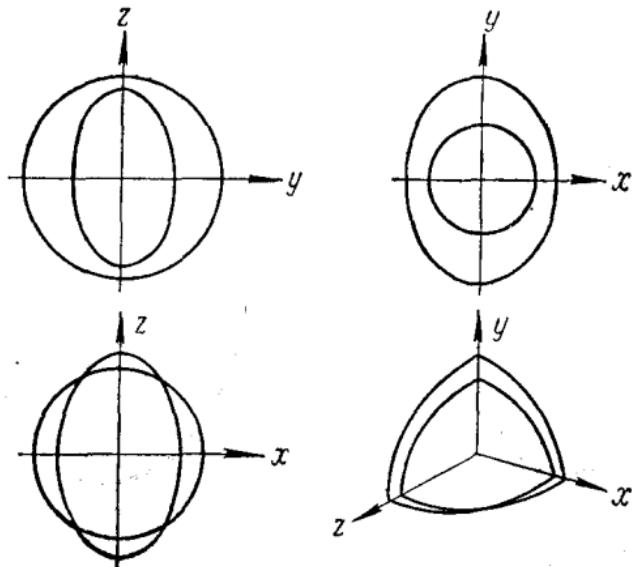


Рис. 12.5. Главные сечения волновой поверхности двуосных кристаллов

ми. Это название иногда распространяется и на световые пучки, центральная ось которых лежит в главной плоскости кристалла. Однако название «обыкновенные пучки» в случае двуосных кристаллов неудачное, поскольку свойства такого пучка, как мы убедимся далее (это легко понять и из рис. 12.5), не совпадают со свойствами пучков в изотропных средах. Например, волновая поверхность для любого узкого конуса направлений плоских волн в двуосном кристалле является некоторой астигматической поверхностью, а не сферической, как это должно быть в обычновенных пучках.

Наконец, заметим, что мы остановились здесь кратко только на свойствах обычных негиротропных кристаллов, у которых тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  симметричен. Это связано с тем, что в данной монографии рассматриваются гауссовые пучки в анизотропных средах с симметричным тензором  $\epsilon$ . Некоторые особенности распространения световых пучков в гиротропных средах можно найти, например, в работе [58].

## § 13. СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ В ОДНОРОДНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Для простоты начнем рассмотрение гауссовых пучков в кристаллических средах с простейшего случая двумерных (цилиндрических) пучков в одноосном кристалле. При этом можем предположить, что пучок распространяется в плоскости ( $xz$ ) и его поле не зависит от координаты  $y$ . Кроме этого, полагаем, что в плоскости ( $xz$ ) лежит также оптическая ось кристалла. Тензор диэлектрической проницаемости в этом случае принимает вид

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (13.1)$$

а уравнения Максвелла записываются следующим образом:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon_{22} E_y, \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega\mu H_z;$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = i\omega (\epsilon_{31}E_x + \epsilon_{33}E_z),$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = -i\omega (\epsilon_{11}E_x + \epsilon_{13}E_z), \quad (13.3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y.$$

Уравнения (13.2) определяют обыкновенные волны и обыкновенные световые пучки. Последние для одноосных кристаллов полностью совпадают с пучками в изотропных средах. Система уравнений (13.3) характеризует необыкновенные волны. Исключая из (13.3) компоненты  $E_x, E_y$ , находим уравнение для  $H_y$

$$\epsilon_{11} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + 2\epsilon_{13} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} + \epsilon_0 \epsilon_e \omega^2 \mu H_y = 0, \quad (13.4)$$

где  $\epsilon_0, \epsilon_e$  — главные значения тензора диэлектрической проницаемости.

Для волнового пучка, распространяющегося в плоскости  $(x, z)$ , можем записать

$$H_y = H_0 \psi(x, z) \exp(-ikr). \quad (13.5)$$

Здесь  $\psi(x, z)$  — комплексная функция,  $k$  — волновой вектор,  $r$  — радиус-вектор точки наблюдения. Подставляя (13.5) в (13.4), получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2\epsilon_{13} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - 2ik_x \epsilon_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \\ - 2ik_z \epsilon_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2i\epsilon_{33} \left( k_x \frac{\partial \psi}{\partial z} + k_z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Без ограничения общности можем положить, что пучок распространяется вдоль оси  $oz$ . Учтем также, что для гауссовых пучков функция  $\psi(x, z)$  настолько медленно изменяется с продольной координатой, что можно пренебречь в уравнении (13.6) второй производной  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  и что для малой анизотропии можно также пренебречь членом  $\epsilon_{13} \partial^2 \psi / \partial x \partial z$ . После этого из (13.6) приближенно находим

$$\epsilon_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2ik\epsilon_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2ik\epsilon_{13} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (13.7)$$

Простейшим (нулевым пучком) из решений этого уравнения является функция

$$\psi(x, z) = \exp \left\{ -i \left[ P + \frac{k}{2q} (x + b)^2 \right] \right\}. \quad (13.8)$$

Подставляя (13.8) в (13.7) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях координаты  $x$ , получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq}{dz} = \epsilon, \quad \frac{db}{dz} = -\epsilon_1, \quad \frac{dP}{dz} = -i \frac{\epsilon}{q}, \quad (13.9)$$

где  $\epsilon = \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}$ ,  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}}$ . Предполагая, что при  $z = 0$

$$\psi(x, 0) = \exp \left[ -\frac{x^2}{w_0^2} \right], \quad (13.10)$$

из уравнения (13.9) находим:

$$q = \epsilon z + iz_0, \quad b = -\epsilon_1 z,$$

$$iP = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - i \operatorname{arctg} \frac{\epsilon z}{z_0} \right\}. \quad (13.11)$$

Окончательное выражение для необыкновенного гауссова пучка имеет вид

$$\begin{aligned} H_y = H_0 & \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ - \frac{(x - \epsilon_1 z)^2}{w_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right)^2 \right]} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i \left[ kz - \frac{k(x - \epsilon_1 z)^2}{2\epsilon z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{\epsilon z} \right)^2 \right]} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon z}{z_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Форма этого пучка определяется уравнением

$$(x - \epsilon_1 z)^2 = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right)^2 \right]. \quad (13.13)$$

Это уравнение гиперболы в косоугольной системе координат (рис. 13.1). Следовательно, необыкновенный пучок распространяется в направлении, отличном от направления оси  $oz$ , и составляет с осью  $oz$  угол  $\alpha = \operatorname{arctg} \epsilon_1$ . Направление распространения пучка совпадает с направлением потока энергии, и угол  $\alpha$  поэтому можно находить из равенства (12.5). Отклонение необыкновенных световых пучков от обычных проявляется и учитывается, например, при оптической генерации второй гармоники по частоте в нелинейных кристаллах. Для кристалла  $ADP$   $\alpha_{\max} \approx 1^\circ 46'$  при  $\lambda = 550 \text{ нм}$ .

Расхождение пучка, как известно, характеризуется половинным углом между асимптотами гиперболы. Из (13.13) следует

$$\theta_e = \frac{\lambda \epsilon}{\pi w_0 n_e}, \quad (13.14)$$

где  $n_e$  — показатель преломления необыкновенной волны, распространяющейся в  $z$ -направлении,  $\lambda$  — длина волны излучения в вакууме. Из (13.14) видим, что угол расхождения светового пучка в кристалле отличается от угла расхождения его в изотропной среде ( $\theta_0 = \lambda / \pi w_0 n$ ) с таким же показателем преломления ( $n = n_e$ ). Это различие вызвано отличием фазового фронта пучка от сферическо-

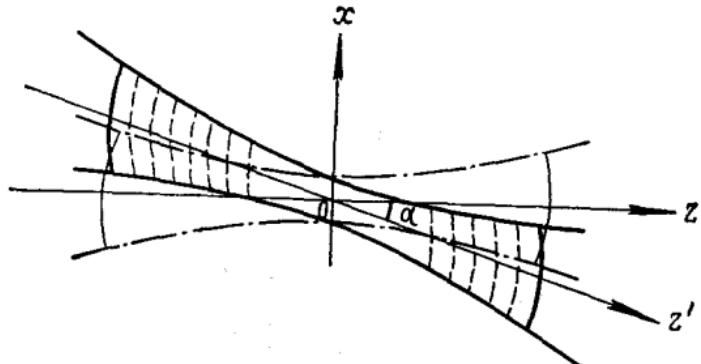


Рис. 13.1. Обыкновенный (штрих-пунктирные линии) и необыкновенный (сплошные линии) гауссовые пучки. Штриховые линии — фазовая поверхность

го. При распространении пучка под углом в  $45^\circ$  к оптической оси  $\epsilon = 1$  и  $\theta_e = \theta_0$ . Если же пучок распространяется параллельно или перпендикулярно оптической оси, то различие между  $\theta_e$  и  $\theta_0$  максимально и угол расхождения  $\theta_e$  соответственно равен  $\theta_0 n_o^2 / n_e^2$  либо  $\theta_0 n_e^2 / n_o^2$ . В последних двух случаях обыкновенный и необыкновенный световые пучки распространяются в одном и том же направлении, но имеют различное угловое расхождение.

Радиус кривизны фазовой поверхности пучка в кристалле можно определить из уравнения, которое в соответствии с (13.12) записывается в виде

$$kz - \frac{k(x - \epsilon_1 z)^2}{2\epsilon z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{\epsilon z} \right)^2 \right]} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon z}{z_0} = kz_1. \quad (13.15)$$

Отсюда следует, что фазовая поверхность является круговым цилиндром с центром в точках  $(\alpha z, -z_0/\epsilon z)$ . Радиус кривизны ее

$$R = \epsilon z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{\epsilon z} \right)^2 \right]. \quad (13.16)$$

Сравнивая (13.16) с (13.13), заключаем, что кривизна фазовой поверхности пучков в кристаллах действительно зависит от анизотропии среды и при  $\epsilon=1$  совпадает со случаем круговых пучков в изотропной среде.

Рассмотрим теперь особенности свойств трехмерных световых пучков в кристаллах. По-прежнему будем исходить из системы уравнений Максвелла и искать их решение в виде пучка, распространяющегося в  $z$ -направлении. Математические операции несколько упрощаются, если использовать вектор магнитной напряженности  $\mathbf{H}$ , а не вектор электрического поля  $\mathbf{E}$ . Это объясняется тем, что вектор  $\mathbf{H}$  является ортогональным вектором к направлению распространения волн, а вектор  $\mathbf{E}$  не ортогонален этому направлению. Запишем вектор  $\mathbf{H}$  следующим образом:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(x, y, z) e^{-ikz}, \quad (13.17)$$

где  $\mathbf{A}(x, y, z)$  — вектор амплитуды поля, медленно изменяющийся в направлении оси  $oz$ .

Было бы правильней и интересней рассмотреть распространение гауссовых пучков света в произвольных направлениях в кристалле. Однако сделать это невозможно и вот почему. Если световой пучок распространяется в произвольном направлении двуосного кристалла, то из уравнения Максвелла для компонент его амплитуды получаем систему трех уравнений в частных производных 2-го порядка, решить которую практически нельзя. В таком общем случае трудно даже разделить световые пучки со взаимно перпендикулярной прецессией поляризаций, соответствующие двум видам изонормальных волн в кристалле. Но фактически же любой первоначально падающий на кристалл пучок должен разделиться на два вследствие двойного лучепреломления.

В связи с этим для упрощения предположим, что световые пучки распространяются в главных плоскостях кристалла. В таком случае можем раздельно рассматривать так называемые обыкновенные и необыкновенные пучки. Но и в этом случае нужно сделать еще одно замечание. Непосредственную окрестность оптических осей приходится исключать из рассмотрения. Последнее ограничение связано с тем фактом, что при выводе параболического уравнения принимается во внимание малое изменение

нение направления вектора  $\mathbf{A}$  (малое изменение поляризации электромагнитных волн) в пределах узкого светового пучка, что справедливо только вдали от оптических осей [9, 10]. Предположим также, что ось  $ox$  лежит в главной плоскости, в которой распространяется пучок, а ось  $oy$  совпадает с главным направлением в кристалле, перпендикулярным этой плоскости. В такой системе координат тензор диэлектрической проницаемости имеет прежнюю форму (13.1).

Сделанные предположения не ликвидируют характерных особенностей гауссовых пучков в кристаллах, вызванных анизотропией диэлектрической проницаемости, а теоретическое исследование их свойств намного упрощается. Произвольный световой пучок, падающий на кристалл, в этом случае разделяется на два пучка, один из которых близок к обыкновенному, а другой является необыкновенным пучком. Во втором преимущественная поляризация (направление вектора  $\mathbf{H}$ ) совпадает с осью  $oy$ , в первом — с осью  $ox$ . Однако, как уже отмечалось, не только необыкновенный, но и обыкновенный пучок отличается по своим свойствам от пучков в изотропных средах.

**Необыкновенные пучки.** Из уравнений Максвелла для компонент вектора  $\mathbf{H}$  можно получить в рассматриваемом случае следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - 2\epsilon_{13} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \\ + \epsilon_{11} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} = \epsilon_{11} \epsilon_{33} \omega^2 \mu H_y. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Если бы рассматривалась плоская волна или даже двумерный цилиндрический пучок, то компоненты  $H_x$  и  $H_z$  обращались бы в ноль и уравнение (13.18) приняло бы простой вид. В трехмерном необыкновенном световом пучке компоненты  $H_x$ ,  $H_z \ll H_y$ , но не равны нулю, и соответствующие члены в уравнении (13.18) являются величинами только первого порядка малости. Для преобразования (13.18) воспользуемся уравнением  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . Сумму первого и последнего членов в левой части (13.18) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} = \\
 & = \varepsilon_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} = \\
 & = -\varepsilon_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y}. \quad (13.19)
 \end{aligned}$$

Последним членом в (13.19) можно уже пренебречь, так как он является величиной второго порядка малости в кристаллах с малой анизотропией. При этом уравнение (13.18) содержит только одну компоненту  $H_y$  и записывается таким образом:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \\
 & + 2\varepsilon_{13} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} \omega \mu H_y = 0. \quad (13.20)
 \end{aligned}$$

Из этого уравнения с очевидностью следует параболическое уравнение

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik\varepsilon_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2ik\varepsilon_{13} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (13.21)$$

где  $\psi(x, y, z) = A_y(x, y, z)$ . Заменой переменных

$$x' = x - \varepsilon_1 z, \quad y' = \sqrt{\varepsilon} y, \quad z' = \varepsilon z \quad (13.22)$$

(13.21) преобразуется к обычному виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z'} = 0. \quad (13.23)$$

Уравнение (13.23) совпадает по форме с аналогичным параболическим уравнением для изотропных сред (см. § 3). Поэтому можем воспользоваться предыдущими результатами и сразу записать выражение для компоненты  $H_y$

$$\begin{aligned}
 H_y = \frac{w_0}{w} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x'}{w} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y'}{w} \right) \exp \left\{ -ikz + i\phi - \right. \\
 \left. - (x'^2 + y'^2) \left( \frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} \right) \right\}. \quad (13.24)
 \end{aligned}$$

Здесь  $w_0$  — разм... при  $z=0$  в направлении оси  $ox$ ,

$$w^2 = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right)^2 \right], \quad (13.25)$$

$$R = \epsilon z \left[ 1 - \left( \frac{z_0}{\epsilon z_0} \right)^2 \right], \quad (13.26)$$

$$\phi = (m + n + 1) \operatorname{arctg} \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right), \quad (13.27)$$

$H_m, H_n$  — полиномы Эрмита,  $m, n$  — поперечные модовые числа.

Выражение (13.24) и определяет световые гауссовые пучки в анизотропных средах. Рассмотрим свойства этих пучков.

Форма пучков определяется поверхностью, уравнение которой имеет вид

$$(x - \epsilon_1 z) + \epsilon y^2 = w_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right)^2 \right]. \quad (13.28)$$

Это однополостный эллиптический гиперболоид, ось которого составляет угол  $\alpha = \operatorname{arctg} \epsilon_1$  с осью  $oz$ . Поперечные сечения этого пучка представляют собой эллипсы, при  $z=0$  уравнение эллипса записывается таким образом:

$$\frac{x^2}{w_0^2} + \frac{\epsilon y^2}{w_0^2} = 1. \quad (13.29)$$

Следовательно, в данном случае кристаллических сред эллиптичность световых гауссовых пучков обусловлена анизотропией, которая фактически нарушает круговую симметрию среды. Выше мы уже убедились, что эллиптичность гауссовых пучков всегда связана с нарушением круговой симметрии. Поэтому если эллиптичность световых пучков обусловлена различными причинами, среди которых присутствует и анизотропия, то последняя может либо усиливать отклонения параметров пучка от случая круговых (симметричных) пучков, либо компенсировать их. Особенности распространения эллиптических гауссовых пучков в анизотропных средах пока еще не изучены. Однако можно сказать, что если даже в кристаллах и возможны круговые пучки по своей прост-

ранственной форме, то такие особенности анизотропных сред, как отклонение направления распространения потока энергии от направления волновой нормали и искривление фазовой поверхности пучков, по-видимому, ничем компенсировать не удастся.

Расхождение пучка в кристаллах также неодинаковое в плоскостях ( $xz$ ) и ( $yz$ ) и равно соответственно

$$\theta_x = \epsilon \theta_0, \quad \theta_y = \sqrt{\epsilon} \theta_0, \quad (13.30)$$

где  $\theta_0 = \lambda / \pi \omega_0 n$  — угол расхождения гауссовых пучков в отсутствие анизотропии.

Фазовая поверхность пучков в соответствии с соотношением (13.24) определяется уравнением

$$kz - \phi + k \frac{x'^2 + y'^2}{2R} = z_1 k, \quad (13.31)$$

где  $z_1$  — некоторая постоянная. Пренебрегая величиной  $\phi$ , получаем

$$x'^2 + y'^2 = (z_1 - z) 2R. \quad (13.32)$$

В обычной прямоугольной системе координат уравнение, подобное (13.32), описывает поверхность вращения. Однако в нашем случае косоугольных координат эта поверхность не является поверхностью вращения, а представляет собой более сложную поверхность трехосного овалоида. Например, при  $z \approx z_0 / \epsilon$  из (13.32) следует

$$x^2 + \epsilon y^2 + 4 \epsilon z^2 - 2 \epsilon_1 xz - 4 z_1 \epsilon z = 0.$$

Это уравнение эллипсоида с полуосами  $a = \sqrt{\epsilon} z_1$ ,  $b = z_1$ ,  $c = z_1 / 2$ . Следовательно, фазовая поверхность гауссовых трехмерных пучков в кристаллах так же, как и любых эллиптических световых пучков, астигматическая. Главные плоскости кривизны этой поверхности совпадают в рассматриваемом случае с главными плоскостями кристалла ( $xz$ ), ( $yz$ ).

Для описания такого пучка иногда более удобно ввести параметры, относящиеся к его взаимно перпендикулярным главным плоскостям. Для этого выражение (13.24) перепишем следующим образом:

$$H_y = \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon z}{z_{0x}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \left[ 1 + \frac{z^2}{z_{0y}^2} \right]^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times H_m \left( \frac{\sqrt{2}x'}{w_x} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w_y} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ -ikz + i\phi - x'^2 \left( \frac{1}{w_x^2} + \frac{ik}{2R_x} \right) - \right. \\ & \left. - y^2 \left( \frac{1}{w_y^2} + \frac{ik}{2R_y} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Здесь  $z_{0x} = z_0$ ,  $z_{0y} = z_0/\sqrt{\epsilon}$ ,  $w_x^2 = w_{0x}^2 [1 + (\epsilon z/z_{0x})^2]$  — размер пучка в  $x$ -направлении,  $w_y^2 = w_{0y}^2 [1 + (z^2/z_{0y}^2)]$  — его размер в  $y$ -направлении, величины

$$\begin{aligned} R_x &= \epsilon z \left[ 1 - \left( \frac{z_{0x}}{\epsilon z} \right)^2 \right], \\ R_y &= z \left[ 1 + \frac{z_{0y}^2}{z^2} \right] \end{aligned} \quad (13.34)$$

— главные радиусы кривизны фазовой поверхности, а продольное смещение фазы принимает вид

$$\phi = \left( \frac{1}{2} + m \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\epsilon z}{z_0} \right) + \left( \frac{1}{2} + n \right) \operatorname{arctg} \frac{z \sqrt{\epsilon}}{z_{0y}}. \quad (13.35)$$

Уравнения для пространственной формы гауссова пучка и его фазовой поверхности при этом можно записать соответственно в простом виде:

$$\frac{x'^2}{w_x^2} + \frac{y^2}{w_y^2} = 1, \quad (13.36)$$

$$\frac{x'^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} = z - z_1. \quad (13.37)$$

Радиусы кривизны  $R_x$ ,  $R_y$  удовлетворяют равенству  $R_x/R_y = \epsilon$ . Это означает, что астигматичность фазовой поверхности определяется величиной анизотропии  $\epsilon$ . В случае одноосных кристаллов при распространении пучков под углом в  $45^\circ$  к оптической оси  $\epsilon = 1$  и  $R_x = R_y$ , а в перпендикулярном направлении  $\epsilon = n_e^2/n_o^2$ .

Обыкновенные пучки. При таких же предположениях, которые делались для необыкновенных пучков, из уравнений Максвелла для обыкновенного пучка получаем

$$\varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \varepsilon_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2ik_0 \varepsilon_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (13.38)$$

где  $\Phi = A_x(x, y, z)$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_{22}}$  — постоянная распространения обыкновенных волн. Заменой  $y' = \sqrt{\varepsilon_{33}/\varepsilon_{22}} y$  уравнение (13.38) приводится к обычному параболическому уравнению, и поэтому компоненту  $H_x$  можем записать в следующем виде:

$$H_x = \left[ 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right]^{-\frac{1}{2}} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w_x} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w_y} \right) \times \\ \times \exp \left\{ -ik_0 z + i\phi - x^2 \left( \frac{1}{w_x^2} + \frac{ik}{2R_x} \right) - y^2 \left( \frac{1}{w_y^2} + \frac{ik}{2R_y} \right) \right\}. \quad (13.39)$$

Здесь введены размеры пучка

$$w_x^2 = w_0^2 \left[ 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right], \quad w_y^2 = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} w_0^2 \left[ 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right], \quad (13.40)$$

а также главные радиусы кривизны

$$R_x = z \left[ 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right], \quad R_y = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} z \left[ 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right]. \quad (13.41)$$

Набег фазы по оси  $oz$

$$\phi = (m + n + 1) \operatorname{arctg} \frac{z}{z_0}. \quad (13.42)$$

Таким образом, действительно, как это отмечалось раньше, вследствие анизотропии диэлектрической проницаемости среды обыкновенный гауссов пучок также не имеет симметрии вращения ( $w_x \neq w_y$ ,  $R_x \neq R_y$ ). Поэтому его свойства несколько отличаются от свойств пучков в изотропных средах. Как известно, свойства обыкновенных волн в кристалле совпадают со свойствами волн в изотропных средах. Это объясняется тем, что для обыкновенной волны, распространяющейся в любой главной пло-

скости двуосных кристаллов, направление электрического вектора  $\mathbf{E}$  остается параллельным одному и тому же главному направлению. Пучок же имеет определенные угловые размеры, и поэтому электрический вектор волн, образующих его, не может оставаться все время параллельным какому-либо одному (в данном случае главному) направлению. Но в обыкновенном пучке все же направление распространения энергии (центральная ось пучка) совпадает с направлением волновой нормали к его фазовой поверхности в точках оси пучка. Отличие его свойств от круговых пучков сводится только к эллиптичности пространственной формы и астигматичности фазовой поверхности.

#### § 14. СВОЙСТВА АНИЗОТРОПНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ОКГ

Метод гауссовых пучков является весьма эффективным и для изучения свойств резонаторов ОКГ с кристаллическим заполнением. Для простоты вначале рассмотрим случай двумерного резонатора с цилиндрическими зеркалами. Предполагаем, что цилиндрические зеркала с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  расположены на расстоянии  $d$  друг от друга, а кристаллическая среда, заполняющая резонатор такова, что оптическая ось кристалла перпендикулярна или параллельна продольной оси резонатора (рис. 14.1). Собственные колебания такого резонатора представляются гауссовыми пучками. В данном случае рассмотрим необыкновенные пучки как моды резонатора. Они определяются выражением (13.12). В условиях резонанса радиус кривизны фазовой поверхности пучка у зеркала равен радиусу кривизны зеркала. В седьмом параграфе отмечалось, что именно в этом случае световой гауссов пучок при отражении от зеркала преобразуется сам в себя. Отсюда следует, что радиусы кривизны зеркал анизотропного резонатора должны быть равны

$$R_1 = \epsilon z_1 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{\epsilon z_1} \right)^2 \right],$$

$$R_2 = \epsilon z_2 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{\epsilon z_2} \right)^2 \right], \quad (14.1)$$

где  $z_1, z_2$  — значения координат центров зеркал на продольной оси  $oz$ , так что  $z_1 + z_2 = d$  — расстояние между зеркалами (предполагается, что центр пучка  $z=0$  находится между зеркалами).

Схема определения параметров анизотропного резонатора полностью аналогична той, которая использовалась в седьмом параграфе. Поэтому здесь сразу выпишем

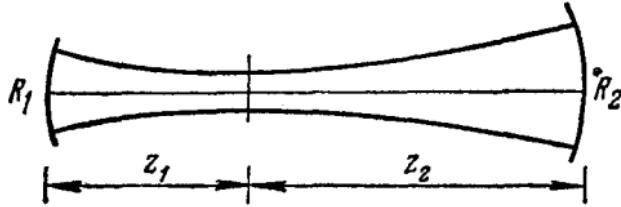


Рис. 14.1. Резонатор ОКГ с оптической осью кристалла, параллельной или перпендикулярной оси резонатора

готовые соотношения, характеризующие свойства резонатора. В частности, для параметра  $z_0 = w_0^2 k / 2$  получаем

$$z_0^2 = \frac{\epsilon d (R_1 - \epsilon d) (R_2 - \epsilon d) (R_1 + R_2 - \epsilon d)}{(R_1 + R_2 - 2\epsilon d)}. \quad (14.2)$$

Величина  $z_0$  — вещественное число для устойчивых резонаторов. Этому условию, как видим из (14.2), удовлетворяют только определенные значения расстояния  $d$ , при которых резонатор будет работать в устойчивом режиме. В этом случае как постоянная распределения  $k$ , так и поперечный размер пучка  $w_0$  остаются вещественными, и, следовательно, амплитуда пучка не будет затухать в отсутствие потерь в самой заполняющей среде, а поле будет локализовано в окрестности продольной оси резонатора. Из (14.2) получаем, что устойчивый режим будет при  $\epsilon d < R_1$  и  $R_2 < \epsilon d < R_1 + R_2$ , неустойчивый — при  $R_1 < \epsilon d < R_2$  и  $\epsilon d > R_1 + R_2$ . Естественно, что при  $\epsilon = 1$  эти условия совпадают с аналогичными условиями изотропного резонатора (см. § 7), а также для обыкновенных пучков. Из последнего заключаем, что условия устойчивости резонаторов, генерирующих обыкновенные или необыкновенные пучки, разные, и поэтому возможна ситуация, когда резонатор будет устойчивым только для одной какой-либо поляризации. Такая возможность раз-

деления волн в общем случае кристаллического резонатора обеспечивается еще и тем, что при произвольной ориентации кристалла в резонаторе, генерирующем необыкновенные световые пучки, центр одного зеркала необходимо сместить относительно центра другого на расстояние  $ad$  по оси  $ox$  из-за смещения необыкновенных пучков (рис. 14.2).

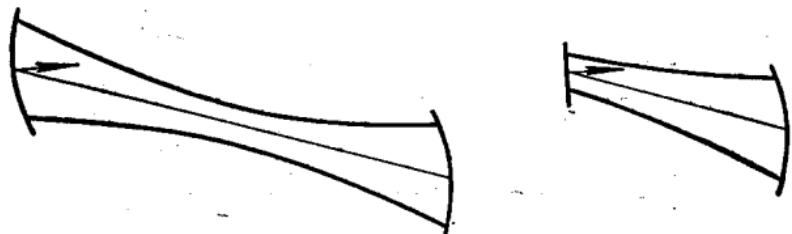


Рис. 14.2. Оптические резонаторы с произвольным направлением оптической оси кристалла

Резонансная частота находится из условия равенства изменения фазы за один проход резонатора величине  $N\pi$ . Пренебрегая скачком фазы на зеркалах, имеем

$$kd - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\epsilon d (R_1 + R_2 - \epsilon d)}{(R_1 - \epsilon d)(R_2 - \epsilon d)} = N\pi$$

и соответственно

$$\frac{v_N}{v_0} = N + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon d (R_1 + R_2 - \epsilon d)}{(R_1 - \epsilon d)(R_2 - \epsilon d)}, \quad (14.3)$$

где по-прежнему  $v_0 = c/2\pi d$  — разность частот между продольными модами ( $\Delta v_{\min} = v_0$ ).

В произвольных кристаллических открытых резонаторах с нецилиндрическими зеркалами, в которых собственными колебаниями являются трехмерные гауссовые пучки, зеркала должны быть астигматическими. Это вытекает из астигматичности фазовой поверхности гауссовых пучков в кристаллах. Поэтому и предполагаем, что на расстоянии  $d$  друг от друга помещены два астигматических зеркала с радиусами кривизны  $R_{1x}, R_{1y}$  и  $R_{2x}, R_{2y}$ , между которыми находится анизотропная среда. Напоминаем, что центры зеркал должны быть смещены.

В принципе можно было бы брать и сферические зеркала, но тогда из-за анизотропии среды в резонаторе будет реализовываться ситуация, аналогичная той, которая

рассматривалась нами в пятом и седьмом параграфах для произвольных эллиптических пучков и астигматических резонаторов. Это интересный вопрос, но он еще не исследован. Здесь пока предполагаем, что астигматичность фазовой поверхности гауссовых пучков как собственных мод резонатора вызвана только анизотропией среды. В этом случае кривизна зеркал должна быть согласована с анизотропией, а именно зеркала должны определяться соотношениями (13.34). Кроме этого, только в этом случае получаем минимальные размеры пучка в обоих главных плоскостях резонатора при одном и том же значении координаты  $z(z=0)$ . Свойства произвольного астигматического и сферического резонатора с анизотропным заполнением необходимо исследовать дополнительно.

Используя соотношения (13.33), (13.34) и условие резонанса, находим характеристики резонатора. Например, минимальные размеры гауссова пучка в рассматриваемом резонаторе и его размеры на зеркалах определяются равенствами:

$$w_{0x}^4 = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{\epsilon d (R_{2x} - \epsilon d) (R_{2x} + \epsilon d) (R_{1x} + R_{2x} - \epsilon d)}{(R_{1x} + R_{2x} - 2\epsilon d)^2}, \quad (14.4)$$

$$w_{0y}^4 = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{d (R_{1y} - d) (R_{2y} - d) (R_{1y} + R_{2y} - d)}{(R_{1y} + R_{2y} - 2d)^2}, \quad (14.5)$$

$$w_{1x}^4 = \left( \frac{\lambda R_{1x}}{\pi} \right)^2 \frac{\epsilon d (R_{2x} - \epsilon d)}{(R_{1x} - \epsilon d) (R_{1x} + R_{2x} - \epsilon d)}, \quad (14.6)$$

$$w_{1y}^4 = \left( \frac{\lambda R_{1y}}{\pi} \right)^2 \frac{d (R_{2y} - d)}{(R_{1y} - d) (R_{1y} + R_{2y} - d)}. \quad (14.7)$$

Выражения для поперечных размеров пучка  $w_{2x}$  и  $w_{2y}$  на втором зеркале получаются соответственно из (14.6) и (14.7) заменой  $R_{1x}$  и  $R_{1y}$  на  $R_{2x}$  и  $R_{2y}$  и наоборот.

Расстояния  $z_1$  и  $z_2$  от зеркал до положения минимального размера (перемычки) пучка в резонаторе равны

$$d_1 = \frac{d (R_{2x} - \epsilon d)}{R_{1x} + R_{2x} - 2\epsilon d} = \frac{d (R_{2y} - d)}{R_{1y} + R_{2y} - 2d}, \quad (14.8)$$

$$d_2 = \frac{d (R_{1x} - \epsilon d)}{R_{1x} + R_{2x} - 2\epsilon d} = \frac{d (R_{1y} - d)}{R_{1y} + R_{2y} - 2d}.$$

Резонансное условие записывается таким образом:

$$kd - \left( \frac{1}{2} + m \right) \operatorname{arctg} \left[ \frac{\epsilon d (R_{1x} + R_{2x} - \epsilon d)}{(R_{1x} - \epsilon d)(R_{2x} - \epsilon d)} \right]^{\frac{1}{2}} - \\ - \left( \frac{1}{2} + m \right) \operatorname{arctg} \left[ \frac{d (R_{1y} + R_{2y} - d)}{(R_{1y} - d)(R_{2y} - d)} \right]^{\frac{1}{2}} = N\pi.$$

Частота собственных колебаний кристаллического резонатора равна

$$\frac{v}{v_0} = N + \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + m \right) \arccos \left[ \left( 1 - \epsilon \frac{d}{R_{1x}} \right) \times \right. \\ \times \left. \left( 1 - \epsilon \frac{d}{R_{2x}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + n \right) \times \\ \times \arccos \left[ \left( 1 - \frac{d}{R_{1y}} \right) \left( 1 - \frac{d}{R_{2y}} \right) \right]. \quad (14.9)$$

Полученные соотношения характеризуют резонатор, генерирующий необыкновенные пучки. Аналогичным образом можно определить параметры и для обыкновенных пучков. Оказывается, что зеркала резонаторов и в этом случае нужно брать астигматическими. В противном случае даже для обыкновенных пучков в двуосных кристаллах будут иметь место условия, которые наблюдаются в произвольных астигматических резонаторах, о которых мы только что упоминали. В обыкновенных пучках не наблюдается смещения их от оси резонатора, и параметр анизотропии  $\epsilon = \epsilon_{11}/\epsilon_{33}$  нужно заменить на  $\epsilon_2 = \epsilon_{22}/\epsilon_{33}$ .

## § 15. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ В НЕОДНОРОДНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Практический интерес представляет исследование распространения световых пучков в неоднородных анизотропных средах. Как мы уже видели, неоднородность диэлектрической проницаемости среды заметно влияет на свойства гауссовых пучков. Неоднородными кристаллами

лическими средами могут быть оптические волноводы интегральной оптики [34], особенно волноводы фокусирующего типа (селфоки) [59], область  $p-p$  перехода инжекционных лазеров [60, 61], лазерные кристаллические элементы, в которых либо имеется естественная неоднородность, либо она может быть создана искусственно с помощью неоднородного электрического поля.

Вначале выясним особенности двумерных (цилиндрических) пучков, распространяющихся в одноосных кристаллах либо в одной из главных плоскостей двуосных кристаллов. Если такой плоскостью служит плоскость ( $xz$ ), то для необыкновенных волн из уравнений Максвелла получаем следующее уравнение для  $y$ -компоненты вектора  $\mathbf{H}$ :

$$\epsilon_{11} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + 2\epsilon_{13} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial x} + \omega^2 \mu \epsilon_{11} \epsilon_{33} H_y = 0. \quad (15.1)$$

Напоминаем, что мы пренебрегаем членами, пропорциональными производной от  $\epsilon$ . По-прежнему полагаем

$$H_y = \Psi(x, y) e^{-ikz}, \quad (15.2)$$

где  $\Psi$  — медленно изменяющаяся функция координаты  $z$ ,  $k$  — волновое число в  $z$ -направлении. Подставляя (15.2) в (15.1) и пренебрегая членами с  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$  и  $\epsilon_{13} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}$ , находим

$$\epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2ik\epsilon_{33} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 2ik\epsilon_{13} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - (k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{11} \epsilon_{33}) \Psi = 0. \quad (15.3)$$

Решение этого уравнения может быть получено, например, в случае плоскослоистых неоднородных сред, когда тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ik}(x)$  симметрично убывает при удалении от некоторой выделенной плоскости, называемой нами плоскостью неоднородности. Для слабо неоднородной симметричной среды в разложении компонент тензора  $\epsilon_{ik}$  по координате  $x'$  (ось  $ox'$  перпендикулярна плоскости неоднородности) достаточно ограничиться квадратичными членами. Поэтому принимаем, что

$$\epsilon_{ik}(x) = \epsilon_{ik}^{(0)} - \delta_{ik} \alpha' x'^2, \quad (15.4)$$

где  $\epsilon_{ik}^{(0)}$  — значения компонент тензора  $\epsilon_{ik}(x)$  на плоскости неоднородности ( $x = 0$ ),  $|x|$  — расстояние по нормали к этой плоскости,  $\alpha'$  — положительный коэффициент неоднородности, характеризующий скорость убывания диэлектрической проницаемости с ростом  $x'$ ,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Здесь предполагается также и малая анизотропия кристалла, и поэтому учитываем только изменение в пространстве диагональных элементов тензора  $\epsilon$ .

Для световых пучков в анизотропных средах наибольший интерес представляет направление потока энергии (направление движения центра светового пучка) и направление распространения фазы. Предположим вначале, что плоскость неоднородности совпадает с направлением потока энергии. Если при этом положить  $x' = x - \epsilon z$ ,  $z' = z$  и учесть, что  $k^2 \simeq \omega^2 \mu \epsilon_{11}^{(0)}$ , то из (15.3) получаем

$$\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z'} - \alpha x'^2 \psi = 0, \quad (15.5)$$

где  $\alpha = \omega^2 \mu \alpha'$ . Функцию  $\psi$  ищем в виде

$$\psi = \exp \left\{ -i \left( P + \frac{1}{2} Q x'^2 \right) \right\}. \quad (15.6)$$

Из (15.5) и (15.6) имеем:

$$Q^2 - \frac{k}{\epsilon} \frac{dQ}{dz'} + \frac{\alpha}{\epsilon} = 0, \quad (15.7)$$

$$\frac{dP}{dz} = - \frac{i \epsilon Q}{2k}. \quad (15.8)$$

Так как уравнение (15.7) является уравнением типа Риккати, его решение ищется следующим образом. Представляем  $Q$  в форме

$$Q = Q_1 + \frac{1}{u}, \quad (15.9)$$

где  $Q_1$  — частное решение. Очевидным частным решением есть

$$Q_1 = -i \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}}, \quad (15.10)$$

а функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{du}{dz'} + 2i \frac{\sqrt{\alpha\epsilon}}{k} u - \frac{\epsilon}{k} = 0. \quad (15.11)$$

Решение (15.11) равно (см. § 9)

$$u = c \exp \left[ -i \left( \frac{2\sqrt{\alpha\epsilon}}{k} z + \beta \right) \right] - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\alpha}}, \quad (15.12)$$

где  $c, \beta$  — вещественные постоянные. Для параметра  $Q$  получаем

$$Q = \frac{\frac{4c\alpha}{\epsilon} \cos \gamma - i \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \left( 4 \frac{c^2\alpha}{\epsilon} - 1 \right)}{1 + 4 \frac{c^2\alpha}{\epsilon} + 4c \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \sin \gamma}. \quad (15.13)$$

Здесь введено обозначение  $\gamma = 2\sqrt{\alpha\epsilon}z/k + \beta$ . Радиус кривизны фазовой поверхности пучка  $R$  и его поперечный размер  $w$  определяются следующими выражениями:

$$R = \frac{k \left[ 1 + 4 \frac{c^2\alpha}{\epsilon} + 4c \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \sin \gamma \right]}{4 \frac{ca}{\epsilon} \cos \gamma}, \quad (15.14)$$

$$w = \frac{2 \left[ 1 - 4 \frac{c^2\alpha}{\epsilon} + 4c \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \sin \gamma \right]}{\sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \left( 4 \frac{c^2\alpha}{\epsilon} - 1 \right)}. \quad (15.15)$$

Из этих выражений следует, что световой пучок, распространяющийся в неоднородном кристалле вдоль плоскости неоднородности, периодически меняет величину своего поперечного размера, и в этом отношении его свойства совпадают со свойствами пучка в неоднородных изотропных средах. В местах максимального и минимального поперечного размера радиус кривизны  $R$  стремится к бесконечности. Расстояние между такими точками равно

$$\Delta z = \frac{\pi}{2} \frac{k}{\sqrt{\alpha\epsilon}}. \quad (15.16)$$

Отличие от изотропной среды состоит в том, что сейчас нормаль к фазовой поверхности пучка в его центре параллельна оси  $oz$ , а распределение энергии симметрично относительно плоскости  $x'=0$  (рис. 15.1). С ростом постоянной интегрирования  $c$ , которая определяется граничными условиями, отклонение размеров пучка от среднего значения уменьшается, и при  $c \rightarrow \infty$  световой

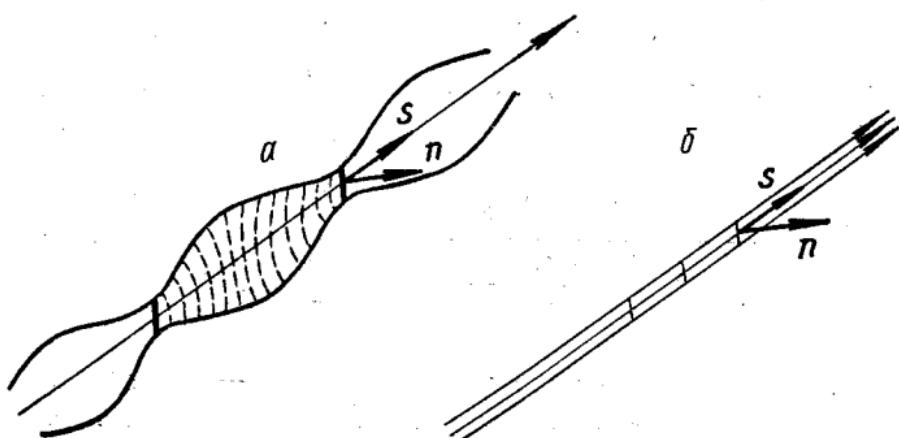


Рис. 15.1. Необыкновенный пучок в кристаллической линзоподобной среде: *a* — переменный пучок, *б* — однородный световой пучок

пучок превращается в однородный жгут (нить) постоянного сечения, в котором энергия идет вдоль плоскости (оси) неоднородности, а фазовая нормаль совпадает с осью  $oz$  (рис. 15.1).

Теперь предположим, что диэлектрическая проницаемость симметрично убывает при удалении от плоскости  $x=0$ . При этом

$$\epsilon_{ik}(x) = \epsilon_{ik}^{(0)} - \delta_{ik}\alpha' x^2 \quad (15.17)$$

и из (15.3) получаем

$$\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2ik \epsilon_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \alpha x^2 \psi = 0, \quad (15.18)$$

где  $\alpha = \omega^2 \mu \alpha'$ . Решение этого уравнения нельзя искать в прежнем виде (15.6). Поэтому предположим, что [62, 63]

$$\psi = \exp \left[ -i \left( P + \frac{1}{2} Qx^2 + Lx \right) \right]. \quad (15.19)$$

Функции  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $L(z)$  удовлетворяют уравнениям:

$$Q^2 + \frac{k}{\epsilon} \frac{dQ}{dz} + \frac{\alpha}{\epsilon} = 0, \quad (15.20)$$

$$\frac{dL}{dz} + \frac{Q}{k} \epsilon L + Q \epsilon_1 = 0, \quad (15.21)$$

$$\frac{dP}{dz} + \frac{iQ\epsilon}{2k} + \epsilon_1 L + \frac{\epsilon}{2k} L^2 = 0. \quad (15.22)$$

Уравнение (15.20) совпадает с (15.7), и его решение поэтому представляется прежним соотношением (15.12). Из уравнения (15.21) находим, что

$$L = \exp \left\{ -\frac{\epsilon}{k} \int_0^z Q dz \right\} \left[ c_1 - \epsilon_1 \int_0^z Q \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{\epsilon}{k} \int_0^{z'} Q dz' \right\} dz \right],$$

где  $c_1$  — постоянная интегрирования. Как видим, функция  $L(z)$  довольно сложная. Еще более сложным будет выражение для функции  $P(z)$ . И в данном случае просто нет возможности получить общее выражение для амплитуды гауссова пучка  $\psi$  и тем более исследовать его свойства. Но чтобы выяснить все-таки некоторые особенности распространения гауссовых пучков в неоднородных лицензоподобных кристаллах, рассмотрим однородный световой пучок как наиболее простой, но в то же время подверженный действию анизотропии среды.

Итак, ограничимся случаем однородного пучка, для которого  $Q = -i \sqrt{\alpha/\epsilon}$ . Тогда

$$L = c_1 \exp \left\{ i \left( \frac{\sqrt{\alpha\epsilon}}{k} z + \beta \right) \right\} - \frac{k \epsilon_1}{\epsilon}. \quad (15.23)$$

Если принять, что при  $z = 0$  имеется чисто гауссово распределение поля пучка, то  $\beta = 0$ ;  $c_1 = k \epsilon_1 / \epsilon$ . При этом

$$L = k \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \left[ \exp \left( \frac{i \sqrt{\alpha\epsilon}}{k} z \right) - 1 \right]. \quad (15.24)$$

В этом случае находим и функцию  $P(z)$

$$P = \frac{\sqrt{\alpha\epsilon}}{2k} z + \frac{k\epsilon_1^2}{2\epsilon} z + \frac{ik^2\epsilon_1^2}{4\epsilon\sqrt{\alpha\epsilon}} \times \\ \times \left[ \exp \left( i \frac{2\sqrt{\alpha\epsilon}}{k} \right) - 1 \right]. \quad (15.25)$$

Подставляя найденные формулы для  $Q$ ,  $L$ ,  $P$  в (15.19), а затем (15.19) в (15.2), найдем окончательное выражение для светового однородного пучка в анизотропной линзоподобной среде. Поскольку оно, однако, весьма громоздкое, выпишем и исследуем только множитель, характеризующий распределение амплитуды (интенсивности) пучка:

$$\Psi_a = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \left( x - \frac{k\epsilon_1}{\sqrt{\alpha\epsilon}} \sin \frac{\sqrt{\alpha\epsilon}}{k} z \right)^2 \right\}. \quad (15.26)$$

Из (15.26) заключаем, что поперечные размеры светового пучка, как и следовало ожидать, определяются величиной неоднородности  $\alpha$  и анизотропией среды  $\epsilon$ . Но самое замечательное то, что его центральные точки, в которых амплитуда принимает максимальные значения, удовлетворяют уравнению

$$x - \frac{k\epsilon_1}{\sqrt{\alpha\epsilon}} \sin \frac{\sqrt{\alpha\epsilon}}{k} z = 0. \quad (15.27)$$

Из этого уравнения следует, что однородный световой пучок в неоднородном кристалле распространяется не по прямой линии, как это было до сих пор, а по синусоидальной кривой. Можно сказать, что пучок, распространяясь вдоль плоскости неоднородности, совершает поперечные колебания около этой плоскости с амплитудой, пропорциональной величине анизотропии диэлектрической проницаемости и обратно пропорциональной корню квадратному от параметра неоднородности (рис. 15.2). Однако ничего неожиданного в этом факте нет. Суть физических процессов здесь очевидна. Чем больше анизотропия среды, тем на больший угол отклоняется световой пучок в кристалле от направления его первоначального падения на кристалл. С другой стороны, неоднородность среды

возвращает его в область неоднородности и тем лучше, чем больше величина неоднородности.

В точках

$$z = \frac{k}{\sqrt{\alpha\epsilon}} m\pi, \quad m = 0, 1, 2 \dots \quad (15.28)$$

центр пучка пересекает плоскость  $x=0$ . Расстояние по оси между такими точками

$$\Delta z = \frac{k}{\sqrt{\alpha\epsilon}} \pi \quad (15.29)$$

совпадает с пространственным периодом изменения толщины неоднородного пучка в предыдущем случае.

Если же световой пучок падает на неоднородный кристалл таким образом, что плоскость неоднородности и ось  $oz$  образуют некоторый небольшой угол  $\theta$ , то тензор диэлектрической проницаемости принимает форму

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} - \delta_{ik}\alpha'x'^2, \quad (15.30)$$

где  $x' = x + \theta z$ . Уравнение (15.3) записывается в этом случае в виде

$$\epsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 2ik(\epsilon + \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x'} - \alpha x'^2 \Psi = 0. \quad (15.31)$$

Это уравнение отличается от (15.18) только величиной коэффициента при производной  $\partial\Psi/\partial x'$ . Поэтому и решение его ищется так, как это мы делали ранее. В частности, амплитуда однородного пучка сейчас будет определяться множителем

$$\Psi_a = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}} \left[ x' - \frac{k(\epsilon_1 + \theta)}{\sqrt{\alpha\epsilon}} \sin \frac{\sqrt{\alpha\epsilon}}{k} z \right] \right\}. \quad (15.32)$$

Следовательно, однородный пучок и в этом случае совершает синусоидальное движение, но его отклонения от плоскости неоднородности зависят как от анизотропии, так и от угла  $\theta$ . Чем больше этот угол, тем больше амплитуда колебаний и, естественно, при больших углах пучок уйдет из области неоднородности.

Таким образом, можно сделать следующее заключение. Если при падении светового пучка на неоднородный



Рис. 15.2. Распространение однородного светового пучка вдоль плоскости неоднородности

кристалл первоначальное направление его потока энергии в кристалле совпадает с направлением плоскости (центра области) неоднородности, то пучок распространяется вдоль этой плоскости, изменяя или не изменяя свои поперечные размеры. Если же первоначальное направление потока энергии в кристалле не совпадает с плоскостью неоднородности, то под действием анизотропии и неоднородности среды пучок распространяется по синусоидальной кривой. В общем случае при этом также изменяются и его поперечные размеры.

## § 16. ТРЕХМЕРНЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ В НЕОДНОРОДНЫХ КРИСТАЛЛАХ

В изотропной среде трехмерные световые гауссовые пучки могли не отличаться по своим основным свойствам от двумерных цилиндрических пучков. В анизотропных же средах свойства трехмерных пучков оказываются намного разнообразнее, чем двумерных [28, 62, 63]. Рассмотрим особенности трехмерных пучков в эллиптически неоднородной анизотропной среде. Как известно, исследование гауссовых пучков в кристаллах существенно упрощается, а характерные особенности их не исчезают, если предполагать, что пучки распространяются в одной из главных плоскостей кристалла. При этом произвольный падающий на кристалл пучок распадается на «обыкновенный» и «необыкновенный», каждый из которых отличается от световых пучков в изотропных средах.

**Необыкновенные пучки.** Предположим, что пучок света падает нормально на грань кристалла  $z=0$  и в этой плоскости он имеет гауссово распределение поля и плоский фронт. Главную плоскость кристалла, в которой распространяется пучок, по-прежнему обозначаем

(xz). Напоминаем, что тензор диэлектрической проницаемости в этом случае записывается в виде

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (16.1)$$

В необыкновенном пучке компоненты  $H_y \gg H_x, H_z$ . Для слабо неоднородных и слабо анизотропных сред из уравнений Максвелла получаем

$$\epsilon_{11} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + 2\epsilon_{13} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} + \omega^2 \mu \epsilon_{11} \epsilon_{33} H_y = 0. \quad (16.2)$$

Полагая

$$H_y = \psi(x, y, z) \exp(-ikz) \quad (16.3)$$

и подставляя (16.3) в (16.2), находим

$$\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2ik \epsilon_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\omega^2 \mu \epsilon_{11} - k^2) \psi = 0, \quad (16.4)$$

где по-прежнему  $\epsilon = \epsilon_{11}/\epsilon_{33}$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_{13}/\epsilon_{33}$ .

Решение уравнения (16.4) определяется зависимостью компонент тензора  $\epsilon_{ik}$  от координат. Оно может быть получено, например, для фокусирующих сред, когда диэлектрическая проницаемость убывает при удалении от точек некоторой выделенной прямой, называемой нами осью неоднородности. В эллиптически неоднородной линзоподобной среде можно записать

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} - \delta_{ik} (\alpha' x'^2 + \alpha'_2 y'^2), \quad (16.5)$$

где  $\epsilon_{ik}^{(0)}$  — значения компонент тензора  $\epsilon_{ik}$  на оси неоднородности,  $\alpha'_1$ ,  $\alpha'_2$  — коэффициенты неоднородности,  $x' = x + \theta z$ ,  $y' = y + \gamma z$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  — углы между осью неоднородности и осью  $og$  в соответствующих плоскостях. Предполагается, естественно, что эти углы малы.

В системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z' = z$  уравнение (16.4) принимает вид

$$\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} - ia \frac{\partial \psi}{\partial x'} - ib \frac{\partial \psi}{\partial y'} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - \\ - (\alpha_1 x'^2 + \alpha_2 y'^2) \psi = 0. \quad (16.6)$$

Здесь введены обозначения  $a = 2k(\epsilon_1 + \theta)$ ,  $b = 2k\gamma$ ,  $\alpha_1 = \omega^2 \mu \alpha'_1$ ,  $\alpha_2 = \omega^2 \mu \alpha'_2$  и учтено, что  $k^2 \simeq \omega^2 \mu \epsilon_{11}^{(0)}$ .

Ищем решение уравнения (16.6) в форме

$$\psi = \exp \left\{ -i \left[ P + \frac{1}{2} (Q_1 x'^2 + Q_2 y'^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + L_1 x' + L_2 y' \right] \right\}, \quad (16.7)$$

где  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  — некоторые функции координаты  $z$ . Подставляя (16.7) в (16.6) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $x'$ ,  $y'$ , получаем следующую систему уравнений:

$$Q_1^2 + \frac{k}{\epsilon} \frac{dQ_1}{dz} + \frac{\alpha_1}{\epsilon} = 0, \quad (16.8)$$

$$Q_2^2 + k \frac{dQ_2}{dz} + \alpha_2 = 0, \quad (16.9)$$

$$\frac{dL_1}{dz} + \frac{\epsilon}{k} Q_1 L_1 + (\epsilon_1 + \theta) Q_1 = 0, \quad (16.10)$$

$$\frac{dL_2}{dz} + \frac{1}{k} Q_2 L_2 + \gamma Q_2 = 0, \quad (16.11)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{i}{2k} (\epsilon Q_1 + Q_2 + iaL_1 + ibL_2 - i(\epsilon L_1^2 - L_2^2)). \quad (16.12)$$

Уравнения (16.8)–(16.11) по форме совпадают с (15.20), (15.21). Из-за сложности общего их решения ограничимся и здесь рассмотрением свойств однородного пучка, для которого

$$Q_1 = -i \sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon}}, \quad Q_2 = -i \sqrt{\alpha_2}, \quad (16.13)$$

$$L_1 = (\epsilon_1 + \theta) \frac{k}{\epsilon} \left[ \exp \left( i \frac{\sqrt{\alpha_1 \epsilon}}{k} z \right) - 1 \right], \quad (16.14)$$

$$L_2 = \gamma k \left[ \exp \left( i \frac{\sqrt{\alpha_2}}{k} z \right) - 1 \right]. \quad (16.15)$$

Подставляя (16.13) — (16.15) в (16.12), находим

$$\begin{aligned} P = & -\frac{\sqrt{\epsilon \alpha_1} - \sqrt{\alpha_2}}{2k} z + \frac{k}{2} \left[ \frac{1}{\epsilon} (\epsilon_1 + \theta)^2 + \gamma^2 \right] z + \\ & + \frac{i k^2 (\epsilon_1 + \theta)^2}{4 \sqrt{\epsilon \alpha_1} \epsilon} \left[ \exp \left( i \frac{2 \sqrt{\alpha_1 \epsilon}}{k} z \right) - 1 \right] + \\ & + \frac{i k^2 \gamma^2}{4 \sqrt{\alpha_2}} \left[ \exp \left( i \frac{2 \sqrt{\alpha_2}}{k} z \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Таким образом, все параметры светового пучка определены и можно выписать для него общее математическое выражение и исследовать его свойства. Но наибольший интерес представляет распределение и распространение энергии пучка в пространстве. Пространственная форма рассматриваемого однородного пучка определяется амплитудным множителем

$$\begin{aligned} \Psi_a = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon}} \left( x' - \frac{k(\epsilon_1 + \theta)}{\sqrt{\alpha_1 \epsilon}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_1 \epsilon}}{k} z \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\alpha_2} \left( y' - \frac{k \gamma}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_2}}{k} z \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16.17)$$

Из этого выражения заключаем, что точки центра светового пучка удовлетворяют уравнениям:

$$x' - \frac{k(\epsilon_1 + \theta)}{\sqrt{\alpha_1 \epsilon}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_1 \epsilon}}{k} z = 0, \quad (16.18)$$

$$y' - \frac{k \gamma}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_2}}{k} z = 0. \quad (16.19)$$

Следовательно, распространяясь около оси неоднородности в глубь кристалла, световой пучок одновременно со-

вершает колебания в плоскостях  $(x'z)$  и  $(y'z)$  с пространственными периодами соответственно:

$$\Delta z_x = \frac{2\pi k}{\sqrt{\alpha_1 \epsilon}}, \quad (16.20)$$

$$\Delta z_y = \frac{2\pi k}{\sqrt{\alpha_2}}. \quad (16.21)$$

В анизотропных средах параметр  $\epsilon \neq 1$ , и поэтому даже при круговой симметрии неоднородности ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) пространственные периоды  $\Delta z_x$  и  $\Delta z_y$  различные. Это приводит к тому интересному факту, что пучок распространяется по сложной кривой линии, напоминающей винтообразную кривую около оси неоднородности. Только в частном случае при  $\epsilon \alpha_1 = \alpha_2$ , когда эллиптическая неоднородность определенным образом скомпенсирует эффект анизотропии, колебания пучка совершаются в одной плоскости. Пространственная форма пучка при этом представляется синусоидальной кривой в некоторой плоскости, наклон которой зависит от величины анизотропии и неоднородности среды. Максимальные отклонения центра пучка от оси неоднородности (амплитуды колебаний) равны

$$x'_{\max} = \frac{k(\epsilon_1 + \theta)}{\sqrt{\alpha_1 \epsilon}}, \quad (16.22)$$

$$y'_{\max} = \frac{ky}{\sqrt{\alpha_2}}. \quad (16.23)$$

Из (16.17) следует также, что поперечное сечение пучка имеет форму эллипса, величина полуосей которого также определяется анизотропией и неоднородностью.

Если же ось неоднородности совпадает с первоначальным направлением потока энергии пучка в кристалле, то  $\gamma = 0$ ,  $\theta \approx -\epsilon_1$ . В этом случае можно искать решение параболического уравнения (16.6) и в виде осциллирующего пучка

$$\Psi = \exp \left\{ -i \left[ P + \frac{1}{2} (Q_1 x'^2 + Q_2 y^2) \right] \right\}. \quad (16.24)$$

Параметры пучка  $Q_1$ ,  $Q_2$  определяются равенствами:

$$Q_1 = \frac{4c_1 \frac{\alpha_1}{\epsilon} \cos \theta_1 - i \sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon}} \left( 4c_1^2 \frac{\alpha_1}{\epsilon} - 1 \right)}{1 + 4c_1^2 \frac{\alpha_1}{\epsilon} + 4c_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon}} \sin Q_1}, \quad (16.25)$$

$$Q_2 = \frac{4c_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - i \sqrt{\alpha_2} (4c_2^2 \alpha_2 - 1)}{1 + 4c_2^2 \alpha_2 + 4c_2 \alpha_2 \sin \theta_2}, \quad (16.26)$$

где  $\theta_1 = 2\sqrt{\alpha_1 \epsilon} z/k + \beta_1$ ,  $\theta_2 = 2\sqrt{\alpha_2} z/k + \beta_2$ ,  $c_1$ ,  $\beta_1$ , и  $c_2$ ,  $\beta_2$  — постоянные интегрирования.

Размеры пучка в  $x'$ - ,  $y$ -направлениях определяются соответственно выражениями:

$$w_x^2 = \frac{2 \left[ 1 + 4c_1^2 \frac{\alpha_1}{\epsilon} + 4c_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon}} \sin \theta_1 \right]}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon}} \left( 4c_1^2 \frac{\alpha_1}{\epsilon} - 1 \right)}, \quad (16.27)$$

$$w_y^2 = \frac{2 [1 + 4c_2 \alpha_2 + 4c_2 \sqrt{\alpha_2} \sin \theta_2]}{\sqrt{\alpha_2} (4c_2^2 \alpha_2 - 1)}. \quad (16.28)$$

Как видим, при произвольных значениях постоянных интегрирования  $c_1$ ,  $c_2$  поперечные размеры пучка  $w_x$ ,  $w_y$  являются периодическими функциями продольной координаты  $z$ . Но периоды изменений  $w_x$  и  $w_y$  разные. Поэтому пространственная форма пучка получается сложной. Распространяясь в глубь кристалла, гауссов световой пучок сохраняет в поперечнике эллиптическую форму, но величина эксцентриситета соответствующего эллипса изменяется с глубиной. В частном случае при  $c_1$  и  $c_2 \rightarrow \infty$  в кристалле распространяется однородный световой пучок с эллиптической формой поперечного сечения, величина полуосей эллипса  $w_x^2 = 2\sqrt{\epsilon/\alpha_1}$ ,  $w_y^2 = 2\sqrt{1/\alpha_2}$ .

Главные радиусы кривизны фазовой поверхности переменного (неоднородного) гауссова пучка определяются следующими формулами:

$$R_x = \frac{k \left[ 1 + 4c_1^2 \frac{\alpha_1}{\epsilon} + 4c_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon}} \sin \theta_1 \right]}{4c_1 \frac{\alpha_1}{\epsilon} \cos \theta_1}, \quad (16.29)$$

$$R_y = \frac{k[1 + 4c_2^2\alpha_2 + 4c_2\sqrt{\alpha_2}\sin\theta_2]}{4c_2\alpha_2\cos\theta_2}. \quad (16.30)$$

Отсюда заключаем, что фазовая поверхность пучка в анизотропной среде более сложная, чем в случае изотропных сред. Это некоторая астигматическая поверхность с периодическими изменениями ее главных радиусов кривизны. Поскольку и здесь периоды разные, то и форма фазовой поверхности все время изменяется. Например, в точках  $z = (m + 1/2)\pi k/2\sqrt{\alpha_1}\epsilon$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , радиус кривизны  $R_x = \infty$ , а в точках  $z = (m + 1/2)\pi k/2\sqrt{\alpha_1}\epsilon$ , наоборот,  $R_2 = \infty$ . В промежутках между этими точками главные радиусы кривизны  $R_x, R_y$  могут иметь разные знаки. Это означает, что фазовая поверхность может быть и седлообразной, но она нигде не становится плоской.

**Обыкновенные пучки.** Как известно, вследствие анизотропии даже обыкновенные световые пучки в одноосных кристаллах отличаются от пучков в изотропных средах. Это же наблюдается и в неоднородных анизотропных средах. Для компоненты электрического вектора  $E_y$ , например, обыкновенного пучка в слабо неоднородной среде имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon_{22} E_y = 0, \quad (16.31)$$

где  $\epsilon_2 = \epsilon_{22}/\epsilon_{33}$ .

Если ось неоднородности совпадает с направлением распространения светового пучка, тензор диэлектрической проницаемости записывается в виде

$$\epsilon_{ik}(x, y) = \epsilon_{ik}^{(0)} - \delta_{ik}(\alpha'_1 x^2 + \alpha'_2 y^2). \quad (16.32)$$

Полагая по-прежнему  $E_y = \psi(x, y, z) \exp(-ikz)$  и учитывая, что  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{22}^{(0)}$ , из (16.31) получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2) \psi = 0, \quad (16.33)$$

где  $\alpha_1 = \omega^2 \mu \alpha'_1$ ,  $\alpha_2 = \omega^2 \mu \alpha'_2$ .

Решение уравнения (16.33) необходимо искать в форме (16.24). При этом параметры  $Q_1, Q_2, P$  удовлетворяют уравнениям:

$$Q_1^2 + k \frac{dQ_1}{dz} + \alpha_1 = 0, \quad (16.34)$$

$$Q_2^2 + \frac{k}{\epsilon_2} \frac{dQ_2}{dz} + \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} = 0, \quad (16.35)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{i}{2k} (Q_1 + \epsilon_2 Q_2). \quad (16.36)$$

Из решений этих уравнений находим, что размеры обыкновенного пучка в  $x$ - и  $y$ -направлениях определяются соответственно равенствами:

$$w_x^2 = \frac{2 \left[ 1 + 4c_2^2 \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} + 4c_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\epsilon_2}} \sin \theta_1 \right]}{\sqrt{\alpha_1} (4c_1^2 \alpha_1 - 1)},$$

$$w_y^2 = \frac{2 \left[ 1 + 4c_2^2 \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} + 4c_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\epsilon_2}} \sin \theta_2 \right]}{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\epsilon_2}} \left( 4c_2^2 \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} - 1 \right)}. \quad (16.37)$$

$$\text{Здесь } Q_1 = \frac{2\sqrt{\alpha_1}}{k} z + \beta_1, \quad Q_2 = \frac{2\sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}}{k} z + \beta_2.$$

Размеры однородного пучка равны

$$w_x^2 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad w_y^2 = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\alpha_2}}. \quad (16.38)$$

Как видим, аналогично необыкновенному пучку обыкновенный пучок в поперечном сечении также имеет эллиптическую форму даже при круговой симметрии неоднородности  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Это, впрочем, совершенно очевидный факт, ибо и при круговой симметрии неоднородности кристаллическая среда не имеет симметрии вращения. Для обыкновенного неоднородного пучка пространственные периоды изменения поперечных размеров в плоскостях ( $xz$ ) и ( $yz$ ) также различные. Поэтому и его пространственная форма сложная. Величина эксцентриситета эллипса поперечного сечения пучка изменяется с глубиной проникновения в кристалл.

Фазовая поверхность обыкновенных пучков, как уже отмечалось выше, тоже астигматическая. Главные радиусы кривизны ее определяются выражениями:

$$R_x = \frac{k [1 + 4c_1^2 \alpha_1 + 4c_1 V \alpha_1 \sin \theta_1]}{4c_1 \alpha_1 \cos \theta_1}, \quad (16.39)$$

$$R_y = \frac{k \left[ 1 + 4c_2^2 \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} + 4c_2 V \sqrt{\frac{\alpha_2}{\epsilon_2}} \sin \theta_2 \right]}{4c_2 \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} \cos \theta_2}. \quad (16.40)$$

Таким образом, свойства фазовой поверхности обыкновенного пучка аналогичны свойствам этой поверхности необыкновенных пучков. Так же как и раньше, волновой фронт обыкновенного неоднородного пучка ни на какой глубине в кристалле не может быть плоским, поскольку знаменатели в (16.39) и (16.40) обращаются в ноль в разных точках. В промежутках между этими точками фазовая поверхность может быть седлообразной.

Рассмотрим далее кратко свойства обыкновенного пучка в том случае, когда ось неоднородности образует некоторый малый угол с осью ог. Как и раньше, перейдем к косоугольной системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z$ . Для амплитуды  $\psi$  получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} - 2ik \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + \theta \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial y'} \right) - \\ - (\alpha_1 x'^2 + \alpha_2 y'^2) \psi = 0. \quad (16.41)$$

Решением этого уравнения может быть функция

$$\psi = \exp \left\{ -i \left[ P + \frac{1}{2} (Q_1 x'^2 + Q_2 y'^2) + L_1 x' + L_2 y' \right] \right\}. \quad (16.42)$$

Исследуем лишь однородный пучок, для которого

$$Q_1 = -i V \alpha_1, \quad Q_2 = -i \sqrt{\frac{\alpha_2}{\epsilon_2}}, \quad (16.43)$$

$$L_1 = \theta k \left[ \exp \left( i \frac{V \alpha_1}{k} z \right) - 1 \right], \quad (16.44)$$

$$L_2 = \frac{\gamma k}{\epsilon_2} \left[ \exp \left( i \frac{\sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}}{k} z \right) - 1 \right], \quad (16.45)$$

$$\begin{aligned} P = & \frac{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}}{2k} z - \frac{k^2}{2} \left( \theta^2 + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2} \right) z + \\ & + \frac{ik^2 \theta^2}{4\sqrt{\alpha_1}} \left[ \exp \left( i \frac{2\sqrt{\alpha_1}}{k} z \right) - 1 \right] + \\ & + \frac{ik^2 \gamma^2}{4\epsilon_2 \sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}} \left[ \exp \left( i \frac{2\sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}}{k} z \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (16.46)$$

Не останавливаясь подробно на всех особенностях этого пучка, рассмотрим лишь его пространственную форму. Амплитудный множитель его записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_a = & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\alpha_1} \left( x' - \frac{k\theta}{\sqrt{\alpha_1}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_1}}{k} z \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\epsilon_2}} \left( y' - \frac{\gamma k}{\sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}}{k} z \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16.47)$$

Из (16.47) заключаем, что точки центра светового пучка удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} x' = & \frac{k\theta}{\sqrt{\alpha_1}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_1}}{k} z, \\ y' = & \frac{k\gamma}{\sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}} \sin \frac{\sqrt{\alpha_2 \epsilon_2}}{k} z. \end{aligned} \quad (16.48)$$

Следовательно, и однородный световой пучок в этом случае совершает синусоидальные колебания в плоскостях  $(x'z)$  и  $(y'z)$  с разными пространственными периодами и амплитудами. Иначе говоря, и обыкновенный пучок также описывает некоторую пространственную винтообразную кривую.

Наконец, необходимо отметить, что такой винтообразный вид траектории пучка будет наблюдаться и в изотропных ( $\epsilon_2=1$ ) неоднородных средах, если только неоднородность носит эллиптический характер ( $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ).

а световой пучок падает на среду не в направлении оси неоднородности.

Таким образом, мы рассмотрели особенности свойств гауссовых пучков, распространяющихся в неоднородных прозрачных кристаллах. Раньше достаточно подробно были изучены свойства световых пучков в изотропных неоднородных поглощающих и усиливающих средах. Исследование же гауссовых пучков в кристаллических средах с неоднородным поглощением и усилением не дает принципиально новых явлений по сравнению с теми, которые нами уже описаны. Поэтому в заключение только выясним, каким образом изменяются свойства гауссовых пучков в неоднородных поглощающих (усиливающих) средах под действием анизотропии диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим необыкновенный пучок, распространяющийся в одной из главных плоскостей кристалла, например в плоскости ( $xz$ ). Как и раньше, пренебрегая членами, квадратичными относительно малых величин, из уравнений Максвелла получаем

$$\tilde{\epsilon}_{11} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \tilde{\epsilon}_3 \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \tilde{\epsilon}_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + 2\tilde{\epsilon}_{33} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} + \\ + \omega^2 \mu \tilde{\epsilon}_{11} \tilde{\epsilon}_{33} H_y = 0. \quad (16.49)$$

Здесь  $\tilde{\epsilon}_{ik}$  — комплексный тензор диэлектрической проницаемости.

Пусть по-прежнему

$$H_y = \psi(x, y, z) \exp(-i\tilde{k}_0 z), \quad (16.50)$$

где  $\psi$  — медленно изменяющаяся по  $z$  функция,  $\tilde{k} = k_0 - ia_0$  — комплексное волновое число в центре области неоднородности. Предположим, что неоднородность среды имеет круговую симметрию. Тогда можем записать

$$\tilde{\epsilon}_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} - \delta_{ik} \alpha' (x'^2 + y'^2) - i [\sigma_{ik}^{(0)} + \delta_{ik} \alpha'' (x'^2 + y'^2)], \quad (16.51)$$

где  $\epsilon_{ik}^{(0)}$ ,  $\sigma_{ik}^{(0)}$  — значения вещественной и мнимой частей тензора диэлектрической проницаемости в точках оси неоднородности,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  — параметры неоднородности,  $x' = x + \theta z$ ,  $y' = y + \gamma z$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  — углы, определяющие ориентацию оси неоднородности.

В системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z$  уравнение (16.49) после подстановки в него (16.50), (16.51) принимает вид

$$\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} - ia \frac{\partial \psi}{\partial x'} - ib \frac{\partial \psi}{\partial y'} + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \alpha (x'^2 + y'^2) \psi = 0. \quad (16.52)$$

Здесь  $\epsilon = \epsilon_{22}^{(0)}/\epsilon_{33}^{(0)}$ ,  $a = 2k_0(\epsilon_1 + \theta)$ ,  $b = 2k_0\gamma$ ,  $\alpha = (\alpha_1 - i\alpha_2) = \omega^2\mu(\alpha' - \alpha'')$ , учтено также, что  $k_0^2 = \omega^2\mu\epsilon_1^{(0)}$ .

Решение уравнения (16.52) нужно искать в форме

$$\psi = \exp \left\{ -i \left[ P - \frac{1}{2} (Q_1 x'^2 + Q_2 y'^2) + L_1 x' + L_2 y' \right] \right\}. \quad (16.53)$$

Параметры  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $P$  удовлетворяют уравнениям:

$$Q_1^2 + \frac{k_0}{\epsilon} \frac{dQ_1}{dz} + \frac{\alpha}{\epsilon} = 0, \quad (16.54)$$

$$Q_2^2 + k_0 \frac{dQ_2}{dz} + \alpha = 0, \quad (16.55)$$

$$\frac{dL_1}{dz} + \frac{\epsilon}{k_0} Q_1 L_1 + (\epsilon_2 + \theta) Q_1 = 0, \quad (16.56)$$

$$\frac{dL_2}{dz} + \frac{1}{k_0} Q_2 L_2 + \gamma Q_2 = 0, \quad (16.57)$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{i}{2k_0} (\epsilon Q_1 + Q_2 - iaL_1 - ibL_2 + i\epsilon L_1^2 + iL_2^2). \quad (16.58)$$

Из уравнения (16.54) находим

$$Q_1 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\epsilon}} - i \frac{\alpha_1}{\sqrt{\epsilon}} + \\ + \frac{2\alpha \left[ |\alpha| c \exp \left( \frac{2\sqrt{\epsilon}\alpha_2}{k_0} z \right) (\cos \xi - i \sin \xi) - \sqrt{\epsilon}(i\alpha_1 - \alpha_2) \right]}{\left[ 2|\alpha| c \exp \left( \frac{2\sqrt{\epsilon}\alpha_2}{k_0} z \right) (\cos \xi - i \sin \xi) - \sqrt{\epsilon}(i\alpha_1 - \alpha_2) \right]^2}, \quad (16.59)$$

где  $\xi = 2\sqrt{\epsilon}\alpha_1 z/k_0 + \beta$ ,  $c$ ,  $\beta$  — вещественные постоянные интегрирования. Выражение для параметра  $Q_2$  получается из (16.59) заменой величины  $\epsilon$  единицей.

Для однородного гауссова пучка ( $c \rightarrow \infty$ ) получаем:

$$Q_1 = -i \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}}, \quad Q_2 = -i \sqrt{\alpha}. \quad (16.60)$$

Из уравнений (16.56) — (16.58) можно определить и параметры  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $P$ . Ограничимся рассмотрением изменения пространственной формы пучка в плоскости  $(x'z)$ . В этой плоскости амплитуда однородного пучка определяется соотношением

$$\begin{aligned} \Psi_a = \exp \left\{ -\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\epsilon}} x'^2 - \frac{(\epsilon_1 + \theta)^2 k_0^2}{4\epsilon\sqrt{\epsilon}|\alpha|^2} \left[ \alpha_1 - \right. \right. \\ \left. - \alpha_1 \exp \left( -\frac{2\sqrt{\epsilon}\alpha_2}{k_0} z \right) \cos \frac{2\alpha_1\sqrt{\epsilon}}{k_0} z - \right. \\ \left. - \alpha_2 \exp \left( -\frac{2\alpha_2\sqrt{\epsilon}}{k_0} z \right) \sin \frac{2\alpha_1\sqrt{\epsilon}}{k_0} z \right] - \\ \left. - x' (\epsilon_2 + \theta) \frac{k_0}{\epsilon} \exp \left( -\frac{\alpha_2\sqrt{\epsilon}}{k_0} z \right) \sin \frac{\alpha_1\sqrt{\epsilon}}{k_0} z \right\}. \end{aligned} \quad (16.61)$$

Из (16.61) следует, что однородный световой пучок в поглощающих неоднородных кристаллах совершает довольно сложное движение около оси неоднородности. Напомним, что при отсутствии поглощения он описывает винтообразную кривую. Но наличие неоднородного поглощения или усиления, когда  $\alpha_2 \neq 0$ , приводит к тому факту, что отклонения пучка от оси неоднородности быстро затухают и дальше пучок распространяется в кристалле вдоль оси неоднородности. Если же световой пучок неоднородный, то так же, как и в изотропных средах с поглощением, он превращается в однородный световой жгут, распространяющийся вдоль оси неоднородности.

Таким образом, анизотропия неоднородной поглощающей среды только вначале, у поверхности кристалла, усложняет его траекторию и пространственную форму. Затем сильнее оказывается действие неоднородного погло-

щения (усиления), оно быстро гасит сложные колебания пучка и превращает его в однородный пучок.

Итак, мы рассмотрели свойства гауссовых пучков в различных средах и убедились, во-первых, в большом многообразии интересных особенностей гауссовых пучков и, во-вторых, в эффективности метода гауссовых пучков для рассмотрения направленного распространения электронной энергии в самых разных случаях, многие из которых практически невозможно рассматривать волноводными методами.

Интерес к гауссовым пучкам широко проявился с открытием лазеров. Уже первая работа Фокса и Ли [26] по теории открытых резонаторов оптических квантовых генераторов свидетельствовала о том, что собственные колебания таких резонаторов представляют собой световые пучки, поперечное распределение поля в которых может представляться произведением функции Гаусса и функций Эрмита. Последующие работы по теории резонаторов ОКГ подтвердили этот вывод. Но не только лазерные, а и обычные световые узкие пучки во многих случаях хорошо представляются гауссовыми пучками. Узкие пучки электромагнитных волн коротких диапазонов также могут успешно описываться гауссовыми пучками. Например, в недавно вышедшей монографии В. П. Шестопалова [65], в которой рассматриваются особенности генерации и распространения электромагнитных волн миллиметрового диапазона, показано, что собственные колебания соответствующего резонатора представляют собой эллиптические гауссовые пучки.

Наиболее плодотворно метод гауссовых пучков проявил себя в теории резонаторов ОКГ с малыми дифракционными потерями и в теории неоднородных линзоподобных сред. В этих случаях гауссовые пучки позволяют достаточно просто и наглядно определять основные характеристики систем. И приближение гауссовых пучков при этом ничуть не хуже приближений, используемых в других методах. Например, распространение волн вдоль линзоподобной неоднородности можно рассматривать волноводными методами. Но соответствующая волноводная задача даже с круговой симметрией среды может быть решена только приближенно. И уж совсем трудно решать волноводную задачу о распространении волн вдоль эллиптической линзоподобной среды. Иначе гово-

ря, метод гауссовых пучков позволяет сравнительно просто решать большой круг задач в теории резонаторов ОКГ и теории распространения волн.

К настоящему времени теория гауссовых пучков достаточно хорошо развита (надеемся, что читатель в этом убедился). Однако это не означает, что свойства гауссовых пучков уже полностью изучены. Дальнейших исследований требуют, например, эллиптические врачающиеся пучки. Такие пучки, как мы уже видели, должны существовать внутри оптического резонатора с астигматическими зеркалами, главные плоскости которых развернуты на произвольный угол. Из более внимательного анализа свойств такого резонатора следует вывод, что даже в том случае, если главные плоскости обоих зеркал совпадают (параллельны), то наряду с обычными и общеизвестными невращающимися модами в резонаторе могут существовать и врачающиеся гауссовые пучки (вращающиеся моды). Такие моды при распространении от одного зеркала к другому должны совершать поворот по меньшей мере на  $90^\circ$ . О врачающихся пучках вопрос не может возникать в резонаторе со сферическими зеркалами, в котором сохраняется круговая симметрия. Но при астигматических зеркалах врачающиеся пучки становятся реальностью.

Требует дальнейшего изучения также и вопрос о распространении гауссовых пучков в анизотропных средах. Как правило, при всех процессах преобразования лучей лазера в нелинейных кристаллах возникают эллиптические пучки. Свойства же эллиптических пучков в анизотропных средах совершенно не изучены. Правда, соответствующая теория будет достаточно сложной и не все особенности таких пучков в кристаллах удастся рассмотреть, но хотя бы главные черты их нужно знать.

Интересны, кроме этого, и вопросы, относящиеся к распространению гауссовых пучков в плазме, в гиротропных средах, в устройствах интегральной оптики и неустойчивых резонаторах ОКГ.

Автор надеется, что данная монография окажется полезной и будет способствовать дальнейшему развитию исследований по гауссовым пучкам.

1. Д. Маркузе. Оптические волноводы. М., 1974.
2. М. А. Леонович, В. А. Фок. ЖЭТФ, 16, 557, 1946.
3. Г. Губо, Ф. Шверинг. Зарубежная радиоэлектроника, № 11, 3, 1961.
4. G. D. Boyd, J. Gordon. Bell Syst. Techn. Journ., 40, 489, 1961.
5. H. Kogelnik, T. Li. Appl. Opt., 5, 1550, 1966.
6. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. Нелинейная оптика. М., 1964.
7. А. М. Гончаренко. ЖПС, 8, 604, 1968.
8. D. D. Bhawalkar, A. M. Goncharenko, R. C. Smith. Brit. Journ. Appl. Phys., 18, 1431, 1967.
9. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.
10. М. Бори, Э. Вольф. Основы оптики. М., 1970.
11. Ю. А. Курчатов, И. В. Маликов. Опт. и спектр., 31, 283, 1971.
12. А. И. Бельский, А. П. Хапалюк. Опт. и спектр., 35, 117, 1973.
13. Г. Я. Левин и др. Радиотехника и электроника, 19, 2249, 1974.
14. Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М., 1966.
15. А. И. Бельский, А. П. Хапалюк. Опт. и спектр., 38, 154, 1975.
16. W. H. Garten. Journ. Opt. Soc. Am., 62, 1195, 1972.
17. А. М. Гончаренко. ДАН БССР, 18, 122, 1974.
18. А. М. Гончаренко, Л. А. Белоусова. ЖПС, 24, 981, 1976.
19. А. М. Гончаренко. ДАН БССР, 19, 1067, 1975.
20. А. М. Гончаренко, Л. К. Гончаренко. Известия АН БССР, серия физ.-мат. наук, вып. 6, 53, 1975.
21. Л. А. Белоусова, А. М. Гончаренко. Известия АН БССР, серия физ.-мат. наук, вып. 1, 76, 1976.
22. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961.
23. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

24. S. I. Chao, J. M. Forsyth. Journ. Opt. Soc. Am., **65**, 867, 1975.
25. Л. А. Белоусова. Весці АН БССР, серия физ.-мат. наук, вып. 1, 1977.
26. A. G. Fox, T. L. Bell. Syst. Techn. Journ., **40**, 453, 1961.
27. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 2. М., 1956.
28. Н. А. Гусак, А. М. Гончаренко. Весці АН БССР, серия физ.-мат. наук, вып. 2, 92; 1971.
29. А. М. Гончаренко, Н. А. Гусак. ЖПС, **11**, 237, 1969.
30. А. М. Гончаренко, Н. А. Гусак, В. А. Карпенко. ЖПС, **11**, 104, 1969.
31. С. Н. Столяров. Известия вузов. Радиофизика, **13**, 749, 1970.
32. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., 1957.
33. Ф. М. Морс, Т. Фешбах. Методы теоретической физики. М., 1958.
34. А. М. Гончаренко, В. П. Редько. Введение в интегральную оптику. Минск, 1975.
35. S. Boguslawski. Ann. Phys., **44**, 1967, 1914.
36. H. Kogelnik. Appl. Opt., **4**, 1562, 1965.
37. А. М. Гончаренко. ДАН БССР, **15**, 22, 1971.
38. А. М. Гончаренко. ДАН БССР, **15**, 587, 1971.
39. А. М. Гончаренко. ЖПС, **17**, 708, 1972.
40. Т. А. Аскарьян и др. Письма в ЖЭТФ, **14**, 452, 1971.
41. Т. Арфкен. Математические методы в физике. М., 1970.
42. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5. М., 1959.
43. Н. Бломберген. Нелинейная оптика. М., 1966.
44. А. Яри. Квантовая электроника и нелинейная оптика. М., 1973.
45. W. B. Bridges. Appl. Opt., **14**, 2346, 1975.
46. Ф. А. Абрамский. Опт. и спектр., **22**, 611, 1967.
47. Б. И. Степанов. Методы расчета оптических квантовых генераторов. Минск, 1966.
48. А. Л. Микаэлян, М. Л. Тер-Микаэлян, Ю. Г. Турков. Оптические генераторы на твердом теле. М., 1967.
49. В. М. Файн, Я. И. Ханин. Квантовая радиофизика. М., 1965.
50. Л. Аллен, Д. Джонс. Основы физики газовых лазеров. М., 1970.
51. Б. М. Берковский, О. Г. Мартыненко, А. М. Жилкин, О. Н. Порохов. Тепло-гидродинамические световоды. Минск, 1969.
52. А. М. Гончаренко. ДАН БССР, **17**, 902, 1973.
53. M. S. Sodha et all. Journ. Opt. Soc. Am., **61**, 1492, 1971.
54. A. K. Ghatak et all. Journ. Opt. Soc. Am., **62**, 594, 1972.
55. Л. Бриллюэн. Распространение волн в периодических структурах. М., 1956.

56. Н. В. Мак-Лахман. Теория и приложения функций Мате. М., 1953.
57. Дж. Най. Физические свойства кристаллов. М., 1967.
58. Ю. Я. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер. Известия вузов. Радиофизика, 12, 1339, 1969.
59. T. Uchida et all. IEEE Journ. Q. E., 6, 606, 1970.
60. J. C. Dymont, T. H. Zachos. Journ. Appl. Phys., 39, 2923, 1968.
61. D. F. Nelson, J. McKenna. Journ. Appl. Phys., 33, 4057, 1967.
62. Н. А. Гусак. ДАН БССР, 13, № 9, 1969.
63. А. М. Гончаренко. Гауссовые пучки света в кристаллах. Препринт Института физики АН БССР. Минск, 1972.
64. М. М. Попов. Опт. и спектр., 25, 314, 394, 1968.
65. В. П. Шестopalов. Дифракционная электроника. Харьков, 1976.

<b>Введение . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>Глава первая</b>	
<b>Распространение гауссовых пучков в однородных изотропных средах . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1. Уравнения Максвелла. Плоские волны . . . . .	5
§ 2. Волновое и параболическое уравнения . . . . .	6
§ 3. Круговые гауссовые пучки . . . . .	9
§ 4. Преобразование гауссовых пучков . . . . .	20
§ 5. Эллиптические гауссовые пучки . . . . .	24
§ 6. Эллиптические вращающиеся пучки . . . . .	38
<b>Глава вторая</b>	
<b>Теория резонаторов ОКГ . . . . .</b>	<b>53</b>
§ 7. Теория сферических резонаторов . . . . .	54
§ 8. Свойства астигматических резонаторов . . . . .	59
<b>Глава третья</b>	
<b>Гауссовые пучки в неоднородных средах . . . . .</b>	<b>68</b>
§ 9. Распространение гауссовых пучков в прозрачных линзоподобных средах . . . . .	68
§ 10. Гауссовые пучки в линзоподобных неоднородных в продольном направлении средах . . . . .	75
§ 11. Световые пучки в средах с неоднородным поглощением или усилением . . . . .	83

## Глава четвертая

Гауссовые пучки света в кристаллах . . . . .	94
§ 12. Некоторые особенности распространения света в кристаллах . . . . .	94
§ 13. Световые пучки в однородных кристаллах . . . . .	99
§ 14. Свойства анизотропных резонаторов ОКГ . . . . .	110
§ 15. Распространение цилиндрических гауссовых пучков в неоднородных кристаллах . . . . .	114
§ 16. Трехмерные гауссовые пучки в неоднородных кристаллах	122
Заключение . . . . .	136
Литература . . . . .	138

АНДРЕЙ МАРКОВИЧ ГОНЧАРЕНКО

ГАУССОВЫ ПУЧКИ СВЕТА

Редактор И. А. Шарапанович

Обложка В. Ф. Гринкевич

Художественный редактор Ю. С. Сергачев

Технический редактор В. И. Крученок

Корректор А. М. Садовская

ИБ № 312

Печатается по постановлению РИСО АН БССР.  
АТ 13013. Сдано в набор 4.XI 1976 г. Подписано  
в печать 20.I 1977 г. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бум. тип.  
№ 1. Печ. л. 4,5. Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 6,4.  
Тираж 1800 экз. Изд. № 238. Зак. № 1278. Цена  
78 коп.

Издательство «Наука и техника». Минск, Ленин-  
ский проспект, 68. Типография им. Франциска  
(Георгия) Скорины издательства «Наука и техни-  
ка» АН БССР и Госкомитета СМ БССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Минск, Ленинский проспект, 68.