Л. Р. ВОЛЕВИЧ
С. Г. ГИНДИКИН

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ

Л. Р. ВОЛЕВИЧ
С. Г. ГИНДИКИН

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА» ВО «НАУКА»
1994

ББК 22.161.5
В67
УДК 517.5

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований согласно проекту 94—01—01913.

Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. **Обобщенные функции и уравнения в свертках.**— М.: Физматлит, 1994.— 336 с.— ISBN 5-02-014601-3.

Содержит систематическое изложение теории обобщенных функций. Основной упор делается на описание свертывателей на пространствах обобщенных функций и изучение уравнений в свертках. Полученные результаты применяются к задаче Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заключительная часть книги посвящена построению исчисления псевдодифференциальных операторов с неоднородными символами и его применению к задаче Коши для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Для специалистов в области математической физики, обобщенных функций и псевдодифференциальных уравнений. Основная часть доступна студентам-математикам старших курсов.

Библиогр. 67 назв.

В $\dfrac{1602070000-045}{053(02)-94}$ 5-92

ISBN 5-02-014601-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге предпринята попытка дать современное прочтение классической работы И. Г. Петровского 1938 года «О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений в частных производных в области неаналитических функций». В этой работе было получено необходимое и достаточное условие корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с частными производными весьма общего вида с коэффициентами, зависящими от времени. В случае систем с постоянными коэффициентами условие Петровского становится более эффективным: оно переходит в алгебраическое условие на детерминант символа системы — условие корректности И. Г. Петровского для полиномов.

В понятие корректности у Петровского включалась однозначная разрешимость задачи Коши в классах функций, непрерывных и ограниченных вместе с производными до конечного (фиксированного) порядка, и непрерывная зависимость решений (в соответствующей топологии) от начальных условий и правых частей. Л. Шварц показал, что работа И. Г. Петровского допускает естественное развитие в рамках его теории распределений: условие Петровского является необходимым и достаточным условием корректности задачи Коши в классе медленно растущих распределений конечного порядка, гладких по времени. При этом естественно расширить класс рассматриваемых систем, заменив дифференциальные операторы по пространственным переменным на более общие операторы свертки с распределениями.

Указанная связь вопроса о корректности задачи Коши с теорией обобщенных функций (распределений) и переход к сверточным уравнениям представляются принципиальными. Отправляясь от этой связи, мы описываем в книге общую схему получения результатов типа теоремы Петровского, фиксируем и иллюстрируем на разных примерах структуры, ответственные за такие результаты. Показано, что теоремы такого рода возникают, когда мы имеем дело с таким пространством распределений, на котором уравнение в свертках разрешимо тогда и только тогда, когда существует фундаментальное решение, являющееся свертывателем. Реализация схемы включает изучение исходного пространства обобщенных функций, ассоциированных с ним шкал функциональных пространств типа пространств С. Л. Соболева, описание свертывателей на этом пространстве распределений, наконец, специализация условия разрешимости для того случая, когда уравнение в свертках на самом деле является дифференциальным.

Мы последовательно проводим эту схему для обобщенных функций степенного роста во всем пространстве (гл. I) и в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ (гл. II). В гл. IV дается развитие теории обобщенных функций и теории свертывателей, необходимые для рассмотрения задачи Коши в классической постановке. Глава III посвящена изучению «экспоненциального» аналога пространства $\mathcal{S}'$ — пространству распределений экспоненциального роста. Как нам кажется, этот достаточно элементарный объект заслуживает внимания. Он приводит, в частности, к интересному классу дифференциальных операторов, которые мы называем экспоненциально корректными. Эти операторы связаны с экспоненциально растущими распределениями таким же образом, как корректные по Петровскому операторы связаны с распределениями степенного роста. Именно для них оказался возможен переход к переменным коэффициентам.

Глава V посвящена изучению задачи Коши для экспоненциально корректных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в функциональных пространствах, рассмотренных в предшествующих главах. Здесь основным моментом является построение исчислений псевдодифференциальных операторов с неоднородными символами. Подробные мотивировки приведены во введениях к главам и отдельным параграфам.

Глава VI посвящена изложению метода Винера — Хопфа на языке теории распределений. Вводится соответствующий класс свертывателей — свертыватели Винера — Хопфа. При этом, следуя Вишику — Эскину и Буте де Монвею, мы выделяем подкласс свертывателей Винера — Хопфа с условием трансмиссии. Для этих распределений изучается проблема факторизации и показывается, что существование факторизации является необходимым и достаточным условием разрешимости соответствующего уравнения Винера — Хопфа. Полученные результаты можно интерпретировать как обобщение на случай распределений теорий М. Г. Крейна интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.

Как видно из приведенного выше краткого обзора содержания книги, интересующие нас вопросы теории дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений оказываются органически включенными в теорию пространств обобщенных функций и свертывателей на них. Большая часть книги посвящена детальному построению и изучению шкал функциональных пространств, многие из излагаемых нами вопросов до сих пор не нашли достаточно подробного отражения в учебной и монографической литературе по теории обобщенных функций. Изложению указанных вопросов мы стремились придать замкнутый характер, предполагая от читателя лишь знакомство с элементами теории распределений и преобразования Фурье, включаемыми в обычные университетские курсы функционального анализа. Необходимые сведения из теории линейных топологических пространств изложены в специальном дополнении к гл. I. Таким образом, настоящая монография может служить систематическим введением в современную теорию распределений и функциональных пространств.

В каждой главе принята автономная нумерация параграфов и формул в них, пункты имеют двойную нумерацию (п. 2.1 — пункт 1 § 2). Внутри пунктов принята автономная нумерация теорем, предложений, лемм и т. д. Если в пункте лишь одна теорема, предложение, лемма и т. д., то они не имеют номера. Ссылаясь на материал из другого пункта данного параграфа, мы указываем номер пункта: например, предложение 3.1. Если в данном пункте несколько предложений, то мы пишем предложение 1, 2 и т. д. из п. 3.1. При ссылках на формулы из других параграфов мы сначала указываем номер соответствующего параграфа: например, (3.20) — формула (20) из § 3. При ссылках на материал из других глав мы перед номерами параграфов, пунктов или формул указываем номер главы. Например: § V.2, п. V.2.1, (V.2.13) будут (соответственно) § 2 из главы V, п. 1 из § 2 главы V, формула (13) из § 2 главы V.

ГЛАВА I

СВЕРТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТЕПЕННОГО УБЫВАНИЯ И РОСТА

Введение

Эта глава посвящена замечательному функциональному пространству, введенному Л. Шварцем — пространству $\mathscr{S}$ *бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на* $\mathbb{R}^n$. Более точно, $\mathscr{S}$ состоит из C^∞ функций, у которых все производные убывают быстрее любой степени $|x|$. Иначе, $\mathscr{S} = \bigcap C_{(l)}^{(k)}$, где $C_{(l)}^{(k)}$ состоит из функций, у которых все производные до порядка k ограничены в норме C с весом $(1 + |x|^2)^{l/2}$ (точное определение см. п. 1.3). Пространство $\mathscr{S}$ оказалось очень удобным для получения точных теорем о разрешимости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для того, чтобы правильно оценить место пространства $\mathscr{S}$ в теории дифференциальных уравнений, важно учесть, что непрерывные операторы на $\mathscr{S}$ автоматически продолжаются до операторов, действующих в шкале банаховых пространств $C_{(l)}^{(k)}$. В результате утверждения о разрешимости уравнений в быстро убывающих C^∞ функциях автоматически влекут результаты о разрешимости в функциях конечной гладкости, убывающих быстрее некоторой фиксированной степени. Существование двух эквивалентных языков: шкалы пространств $C_{(l)}^{(k)}$ и «предельного» пространства $\mathscr{S}$ — важнейшая особенность излагаемой теории. При этом работать с пространством $\mathscr{S}$ обычно проще, но фактически это лишь компактная форма результатов о шкалах.

Указанное представление $\mathscr{S}$ позволяет ввести на $\mathscr{S}$ структуру счетно-нормированного пространства. Это достаточно хороший класс линейных топологических пространств: они, в частности, являются пространствами Фреше (полными метризуемыми) и на них переносятся основные теоремы Банаха (о замкнутом графике, обратном операторе и т. д.).

В аналитическом плане пространство $\mathscr{S}$ обладает целым рядом замечательных свойств. Прежде всего $\mathscr{S}$ самодвойственно относительно преобразования Фурье. Это утверждение, в соответствии с общей ситуацией, имеет эквивалентную формулировку в шкалах $C_{(l)}^{(k)}$: шкала $C_{(l)}^{(k)}$ самодвойственна, т. е. образ $C_{(l)}^{(k)}$ относительно преобразования Фурье содержит некоторое пространство $C_{(l')}^{(k')}$, а в некотором $C_{(l'')}^{(k'')}$ содержится, если k, l достаточно велики. Соответствующую оценку нормы в силу очевидной аналогии называем неравенством Парсеваля.

Следующее замечательное свойство пространства $\mathscr{S}$ — существование на нем структуры счетно-гильбертова пространства, или (что эквивалентно) существование шкалы гильбертовых пространств $H_{(l)}^{(s)}$, эквивалентной шкале $C_{(l)}^{(k)}$; $\mathscr{S} = \bigcap H_{(l)}^{(s)}$. Это утверждение сводится к некоторой теореме вложения, восходящей к классической теореме С. Л. Соболева. Возможность параллельной работы с гельдеровскими и гильбертовскими нормами — важная техническая возможность; в гельдеровских нормах обычно проще делать оценки интегралов, а в гильбертовских — удобнее рассматривать преобразование Фурье (мы имеем равенство Парсеваля вместо неравенства), сопряженную шкалу, градуировать шкалу при помощи дифференциальных или псевдодифференциальных операторов, в частности продолжить шкалу по гладкости s на пространства распределений (им отвечают отрицательные s).

Пусть $H_{(l)}$ — это L_2 по мере $(1+|x|^2)^l dx$. Тогда $H_{(l)}^{(s)}$, $s \geqslant 0$, четное, можно определить как области определения в $H_{(l)}$ дифференциальных операторов $(1-\Delta)^{s/2}$ с индуцированной нормой. Соответственно $H_{(l)}^{(-s)}$ определяется как образ $H_{(l)}$ при действии дифференциального оператора $(1-\Delta)^{s/2}$ ($\mathscr{S}$ пополняется по соответствующей норме). Рассматривая градуирующие псевдодифференциальные операторы $(1-\Delta)^{s/2}$, можно сделать параметр s в $H_{(l)}^{(s)}$ любым вещественным. Тогда сопряженное пространство $\mathscr{S}'$ к $\mathscr{S}$ совпадает с $\bigcup H_{(l)}^{(s)}$. Элементы $\mathscr{S}'$ называются распределениями (обобщенными функциями) умеренного роста.

Здесь смыкаются два основных подхода к определению распределений: либо их можно воспринимать как элементы сопряженного пространства к некоторому пространству основных (достаточно хороших) функций (в данном случае $\mathscr{S}$) либо их можно рассматривать как образы каких-то классических функциональных пространств (в данном случае $H_{(l)}$) при действии дифференциальных операторов. В любом случае представление $\mathscr{S}'$ в виде индуктивного предела гильбертовых пространств — важное техническое средство. Важно, в частности, что распределения из $\mathscr{S}'$ представимы в виде дифференциальных операторов от регулярных функций.

Один из основных результатов главы — необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $P(D_x)u = f$ в $\mathscr{S}$ или $\mathscr{S}'$ (а также, что эквивалентно, в шкалах $H_{(l)}^{(s)}$, $C_{(l)}^{(k)}$). Условие состоит в том, что символ $P(\xi)\neq 0$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Этот результат является следствием теории операторов свертки на $\mathcal{S}$.

Мы называем оператором свертки на $\mathcal{S}$ всякий непрерывный оператор, перестановочный со сдвигами на $\mathbb{R}^n$. Разумеется, этим свойством обладает не только оператор $P(D_x)$, но и обратный к нему оператор, если $P(D_x)$ изоморфно действует на $\mathcal{S}$. Замечательно, что всякий оператор свертки на $\mathcal{S}$ представим в виде свертки с некоторым распределением из $\mathcal{S}'$ — свертывателем. Все возможные свертыватели точно описываются: это быстро убывающие распределения (пространство таких распределений обозначается через $\mathcal{O}'$). Благодаря этому описанию получается не только условие разрешимости дифференциального уравнения $P(D_x)u = f$, но и любого сверточного уравнения $F * u = f$, $F\in\mathcal{O}'$. Однако в случае дифференциального уравнения некоторые степенные оценки выполняются автоматически в силу теоремы Зайденберга — Тарского и окончательное условие разрешимости проще, чем для общего сверточного. Это поучительный пример погружения результатов о дифференциальных операторах в более общие результаты о псевдодифференциальных и выявления роли условия дифференциальности.

Пространство распределений $\mathcal{O}'$ реализуется как сопряженное к пространству медленно растущих функций $\mathcal{O}$. Мы параллельно с парой $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ изучаем пару пространств $(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$, причем это достаточно сложные линейные топологические пространства и их рассмотрение доставляет некоторые дополнительные хлопоты.

Отметим, что пространства $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ получаются из банаховых или гильбертовых пространств с помощью операций пересечения (перехода к проективному пределу) и объединения (перехода к индуктивному пределу). Необходимые сведения о проективных и индуктивных пределах собраны в Дополнении к этой главе.

Подробное изложение некоторых вопросов, затронутых в этой главе, можно найти в монографиях Л. Шварца [1], С. Л. Соболева [1, 2], И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [1—3], Л. Хёрмандера [1, 2], К. И. Иосиды [1], И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [1] и др.

§ 1. Пространства основных функций и распределений

1.1. Обозначения. Рассматривается n-мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^n_x$, в котором фиксирована система координат $x = (x_1, \ldots, x_n)$, евклидова норма $|x| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$ и элемент объема $dx = dx_1\ldots dx_n$. Положим $D=(D_1, \ldots, D_n), D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $i=\sqrt{-1}$.

Через $\mathbb{R}^n_\xi$ обозначим двойственное пространство к $\mathbb{R}^n_x$. Пусть $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — такие координаты в $\mathbb{R}^n_\xi$, что двойственность выражается билинейной формой

$$\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n.$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор целых неотрицательных чисел (мультииндекс), то $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Если β — другой мультииндекс, то

$$a_{(\alpha)}^{(\beta)}(x, \xi) = D_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi),$$

где $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, $\partial_k = \partial/\partial\xi_k$, $k = 1, \ldots, n$.

1.2. Распределения. *Носителем* непрерывной функции $\varphi(x)$ (обозначается $\operatorname{supp}\varphi$) называется замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) \neq 0\}$. Таким образом, $\operatorname{supp}\varphi$ является наименьшим замкнутым множеством, вне которого φ обращается в нуль.

Следуя Л. Шварцу [1], обозначим через $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем (финитных функций), через $\mathscr{D}(\Omega)$ обозначим совокупность таких $\varphi \in \mathscr{D}$, носители которых принадлежат области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если Ω_j — строго возрастающая система подмножеств в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n = \bigcup \Omega_j$, то $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup \mathscr{D}(\Omega_j)$.

Определим систему норм в $\mathscr{D}(\Omega)$:

$$|\varphi|_\Omega^{(m)} = \sup_{x\in\Omega, |\alpha|\leqslant m} |D^\alpha\varphi(x)|. \tag{1}$$

Если область Ω относительно компактна, то неравенства

$$|\varphi|_\Omega^{(m)} < \varepsilon, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \varepsilon > 0,$$

задают систему окрестностей в $\mathscr{D}(\Omega)$, порождающую локально выпуклую топологию. Если Ω пробегает базу относительно компактных множеств в $\mathbb{R}^n$, то система норм (1) задает топологию в $\mathscr{D}$. В дальнейшем $\mathscr{D}$ рассматривается в заданной топологии. Из приведенного определения следует, что последовательность $\varphi_j \in \mathscr{D}$ сходится к $\varphi \in \mathscr{D}$ при $j \to \infty$, если носители всех функций φ_j принадлежат некоторой фиксированной области Ω и в этой области $\varphi_j(x) - \varphi(x)$ равномерно сходятся к нулю вместе со всеми производными.

Отметим, что если $\mathbb{R}^n = \bigcup \Omega_j$ (и последовательность Ω_j строго возрастает), то $\mathscr{D}$ является индуктивным пределом пространств $\mathscr{D}(\Omega_j)$ (по поводу определения индуктивных и проективных пределов см. Дополнение).

Через $\mathscr{D}'(\Omega)$ и $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространства линейных непрерывных функционалов соответственно на $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}$, снабженные сильной топологией сопряженного пространства (см. Дополнение).

Элементы $\mathscr{D}'$ называются *распределениями* (*обобщенными функциями*). Через (f, φ) обозначим значение функционала $f \in$

$\in \mathcal{D}'$ на элементе $\varphi \in \mathcal{D}$. Если f — локально абсолютно суммируемая измеримая функция $(f \in L_1^{\mathrm{loc}})$, то ей сопоставляется функционал на $\mathcal{D}$:

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Другими словами, определено каноническое (при заданном элементе объема dx) отображение $L_1^{\mathrm{loc}} \to \mathcal{D}$. Доказывается (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], гл. II, § 1, п. 5 или Хёрмандер [1], п. 1.2), что если $f \in L_1^{\mathrm{loc}}$, а функционал (2) равен 0, то функция $f(x)$ равна 0 почти всюду. Иными словами, отображение $L_1^{\mathrm{loc}} \to \mathcal{D}'$ является вложением, и мы можем отождествлять функцию f с функционалом (2). В частности, возникает каноническое вложение $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}'$, и мы можем рассматривать $\mathcal{D}$ как подмножество $\mathcal{D}'$. Хорошо известно (см., например, Хёрмандер [1], теорема I.6.3)

Предложение. *Каноническое вложение $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ непрерывно, а образ $\mathcal{D}$ плотен в $\mathcal{D}'$.*

Пространство $\mathcal{D}$ замкнуто относительно дифференцирований, а дифференциальные операторы непрерывны в топологии, определяемой системой окрестностей (1). Если f, $\varphi \in \mathcal{D}$, $P(\xi)$ — произвольный полином, то после интегрирования по частям получаем

$$(P(D)f, \varphi) = (f, P(-D)\varphi). \tag{3}$$

Отправляясь от этого равенства, для $f \in \mathcal{D}'$ обозначим через $P(D)f$ такой элемент $\mathcal{D}'$, что (3) имеет место для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Тем самым в $\mathcal{D}'$ определено действие дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, согласованное с их действием на гладких функциях.

Для распределений, как и для функций, можно дать определение носителя; оно понадобится нам в последующих главах.

Будем говорить, что распределение $f \in \mathcal{D}'$ равно нулю в области U, если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. *Носителем* $\operatorname{supp} f$ называется наименьшее замкнутое множество, на дополнении к которому функционал f равен 0. Для $f \in L_1^{\mathrm{loc}}$, ввиду сказанного выше, носитель (в смысле распределений) является наименьшим замкнутым множеством, на дополнении к которому функция f равна нулю почти всюду. Таким образом, для непрерывных функций ранее определенный носитель совпадает с носителем в смысле $\mathcal{D}'$.

1.3. Пространства $C_{(l)}^{(m)}$. Натуральному $m \geqslant 0$ и вещественному l сопоставим норму

$$|\varphi|_{(l)}^{(m)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leqslant m} (1 + x^2)^{l/2} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|. \tag{4}$$

При $l = 0$ или $m = 0$ соответствующий индекс будем опускать и писать (соответственно) $|\varphi|^{(m)}$ или $|\varphi|_{(l)}$.

Через $C_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций с конечной нормой (4). Как правило, мы будем писать $C_{(l)}^{(m)}$, опуская $\mathbb{R}^n$; при $m=0$ или $l=0$ соответствующий индекс опускается (т. е. пишем $C_{(l)}$ или $C^{(m)}$).

Покажем, что пространства $C_{(l)}^{(m)}$ при разных l изоморфны друг другу, причем изоморфизмы задаются операторами умножения на функцию.

Лемма 1. *Пусть $a(x)$ — m раз непрерывно дифференцируемая функция, допускающая при $|\alpha| \leqslant m$ оценки*

$$|D^\alpha a(x)| \leqslant K_\alpha (1+|x|^2)^{r/2}.$$

Тогда непрерывен оператор

$$C_{(l)}^{(m)} \to C_{(l-r)}^{(m)} \qquad (\varphi \mapsto \psi = a\varphi).$$

Доказательство. По формуле Лейбница при $|\alpha| \leqslant m$

$$(1+|x|^2)^{(l-r)/2} D^\alpha (a\varphi) | \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (1+|x|^2)^{(l-r)/2} |D^\beta a| |D^{\alpha-\beta}\varphi| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} K_\beta (1+|x|^2)^{l/2} |D^{\alpha-\beta}\varphi|,$$

откуда и следует неравенство

$$|a\varphi|_{(l-r)}^{(m)} \leqslant K |\varphi|_{(l)}^{(m)}, \quad K = \sum \binom{\alpha}{\beta} K_\beta.$$

Предложение. *Для любых l, $r \in \mathbb{R}$ отображение*

$$C_{(l)}^{(m)} \to C_{(l-r)}^{(m)} \quad \left(\varphi \mapsto (1+|x|^2)^{r/2}\varphi\right) \tag{5}$$

является изоморфизмом пространств.

Доказательство. Из леммы 1 следует непрерывность оператора (5) и оператора

$$C_{(l-r)}^{(m)} \to C_{(l)}^{(m)} \quad \left(\psi \mapsto (1+|x|^2)^{-r/2}\psi\right). \tag{5'}$$

Так как композиции (5) и (5′) являются тождественными операторами, то предложение доказано.

При $r=l$ получается

Следствие. *Включение $\psi \in C_{(l)}^{(m)}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\psi = (1+|x|^2)^{-l/2}\varphi$, $\varphi \in C^{(m)}$. При этом найдется такая константа $K_{ml} > 0$, что*

$$K_{ml}^{-1} |\varphi|^{(m)} < |\psi|_{(l)}^{(m)} < K_{ml} |\varphi|^{(m)}.$$

Предложение позволяет переносить на все пространства $C_{(l)}^{(m)}$ свойства, доказанные при одном фиксированном l, скажем $l=0$. У функции $\varphi \in C_{(l)}^{(m)}$, очевидно, конечны все нормы $|\varphi|_{(l')}^{(m')}$ при

$m' \leqslant m$, $l' \leqslant l$, и имеют место неравенства

$$|\varphi|_{(l')}^{(m')} < |\varphi|_{(l)}^{(m)}, \quad m' \leqslant m, \quad l' \leqslant l.$$

Таким образом, определены непрерывные вложения

$$C_{(l)}^{(m)} \subset C_{(l')}^{(m')}, \quad m \geqslant m', \quad l \geqslant l'. \tag{6}$$

Пространство $\mathscr{D}$ не плотно в $C_{(l)}^{(m)}$. При $l=0$ это следует из того, что $1 \in C^{(m)}$, а для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$

$$|1-\varphi|^{(m)} \geqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |1-\varphi(x)| \geqslant 1.$$

Лемма 2. *Для любых $l > l'$ пространство $\mathscr{D}$ плотно в $C_{(l)}^{(m)}$ в топологии $C_{(l')}^{(m)}$.*

Доказательство. Нам нужно приблизить функцию $\varphi \in C_{(l)}^{(m)}$ финитными функциями по норме $|\ |_{(l')}^{(m)}$, где $l' < l$. Эту аппроксимацию мы проведем в два этапа.

1) Сначала рассмотрим случай функций, имеющих компактный носитель. Пусть $\varphi \in C_{(l)}^{(m)}$ и $\varphi(x)=0$ при $|x| > R$. В этом случае φ приближается финитными функциями с помощью стандартной техники осреднения (см., например, Хёрмандер [1], теорема I.2.1). Поскольку для функций с компактным носителем нормы $|\ |_{(l)}^{(m)}$ при разных l эквивалентны, то достаточно рассмотреть случай $l = l' = 0$. Выберем функцию $\chi \in \mathscr{D}$ со следующими свойствами:

$$\chi(x) \geqslant 0, \quad \int \chi(x)\,dx = 1, \quad \chi(x) = 0 \text{ при } |x| \geqslant 1,$$

и рассмотрим «регуляризацию» функции φ

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int \chi((x-y)/\varepsilon)\,\varphi(y)\,dy = \int \chi(y)\,\varphi(x-\varepsilon y)\,dy.$$

Очевидно, что функция $\varphi_\varepsilon(x)$ бесконечно дифференцируема, а ее носитель принадлежит шару $|x| < R+\varepsilon < R+1$ при $\varepsilon < 1$. Так как $\int \chi\,dx = 1$, то

$$\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x) = \int \chi(y)\,[\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)]\,dy.$$

Так как (ввиду компактности носителя) функция $\varphi(x)$ равномерно непрерывна, то функции $\varphi_\varepsilon(x)$ равномерно сходятся к $\varphi(x)$ при $\varepsilon \to 0$. Дифференцируя по x под знаком интеграла, мы докажем равномерную сходимость $D^\alpha \varphi_\varepsilon \to D^\alpha \varphi$ при $|\alpha| \leqslant m$. Итак, $|\varphi - \varphi_\varepsilon|_{(\lambda)}^{(m)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Теперь мы покажем, что $\varphi \in C_{(l)}^{(m)}$, $l > l'$, можно с любой степенью точности приблизить по норме $|\ |_{(l')}^{(m)}$ элементами $C_{(l)}^{(m)}$, имеющими компактный носитель. Выберем функцию $\theta(t)$ от

одного переменного:

$$\theta(t)\in C^{\infty},\quad 0\leqslant\theta(t)\leqslant 1,\quad \theta(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\leqslant 0,\\ 0 & \text{при } t\geqslant 1,\end{cases}$$

и положим $\varphi_N(x)=\theta(|x|^2-N^2)\varphi(x)$. Проверим, что

$$|\varphi_N-\varphi|_{(l')}^{(m)}\leqslant \mathrm{const}\cdot N^{-(l-l')}|\varphi|_{(l)}^{(m)},\quad N\geqslant 1.$$

Рассмотрим сначала случай $m=0$. Тогда

$$|\varphi_N-\varphi|_{(l')}\leqslant \sup_{|x|\geqslant N}(1+|x|^2)^{l'/2}|\varphi(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|\varphi|_{(l)}\sup_{|x|\geqslant N}(1+|x|^2)^{(l'-l)/2},$$

откуда следует нужная нам оценка. Случай $m>0$ легко получается при помощи формулы Лейбница

$$D^{\alpha}(\varphi_N-\varphi)=\sum_{\beta\geqslant 0}\binom{\alpha}{\beta}D^{\beta}(1-\theta(|x|^2-N^2))\,D^{\alpha-\beta}\varphi(x),$$

причем надо учесть, что $D^{\beta}(1-\theta(|x|^2-N^2))=0$ при $|x|\leqslant N$ для всех $\beta\geqslant 0$.

Обозначим через $\mathring{C}_{(l)}^{(m)}$ замыкание $\mathscr{D}$ по норме в $C_{(l)}^{(m)}$. Ввиду леммы $\mathring{C}_{(l)}^{(m)}$ можно также определить как замыкание $C_{(l'')}^{(m'')}$, $m''\geqslant m$, $l''>l$, по норме в $C_{(l)}^{(m)}$. Отметим, что $\mathring{C}_{(l)}^{(m)}$ является нетривиальным подпространством $C_{(l)}^{(m)}$.

Упражнение. Проверьте, что $\mathring{C}_{(l)}^{(m)}$ состоит из тех и только тех $\varphi\in C_{(l)}^{(m)}$, для которых $(1+|x|^2)^{l/2}\varphi(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$.

Из леммы 2 вытекает

Следствие. *Имеют место вложения*

$$\mathring{C}_{(l)}^{(m)}\subset C_{(l)}^{(m)}\subset \mathring{C}_{(\lambda)}^{(\mu)},\quad \mu\leqslant m,\quad \lambda<l.$$

1.4. Пространство $\mathscr{S}$ как векторное пространство является пересечением пространств $C_{(l)}^{(m)}$:

$$\mathscr{S}\overset{\text{def}}{=}\bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+,\,l\in\mathbb{R}}C_{(l)}^{(m)}\overset{\text{def}}{=}C_{(\infty)}^{(\infty)}, \tag{7}$$

т. е. *$\mathscr{S}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, у которых конечны все нормы* (4). Мы придем к тому же самому пространству, если ограничимся в (7) целыми l.

При помощи системы норм (4) введем на $\mathscr{S}$ структуру счетно-нормированного пространства, т. е. система окрестностей в $\mathscr{S}$ задается неравенствами

$$|\varphi|_{(l)}^{(m)}<\varepsilon,\quad m,l\in\mathbb{Z}_+,\quad \varepsilon\in\mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Топологию, определяемую окрестностями (8), можно интерпретировать как топологию проективного предела пространств $C_{(l)}^{(m)}$ (см. Дополнение).

По системе норм (4) можно определить расстояние в $\mathcal{S}$ (подробнее, см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], гл. I), т. е. превратить $\mathcal{S}$ в пространство Фреше.

Напомним, что подмножество B линейного топологического пространства называется *ограниченным*, если оно поглощается любой окрестностью нуля U (т. е. $\lambda B \subset U$ для некоторого $\lambda = \lambda(U)$). В случае $\mathcal{S}$ *подмножество* $B \subset \mathcal{S}$ *будет ограниченным, если* $\forall m,\ l \in \mathbb{Z}_+\ \ \exists K_{ml} > 0$, *так что*

$$|\varphi|_{(l)}^{(m)} < K_{ml} \quad \forall \varphi \in B.$$

Пространство $\mathcal{S}$ не плотно в $C_{(l)}^{(m)}$ (это проверяется таким же образом, как в случае $\mathcal{D}$). Однако элементы $C_{(l)}^{(m)}$ в более слабой топологии можно приблизить функциями из $\mathcal{S}$ (см. следствие 1.3).

Лемма. $\mathcal{S}$ *плотно в* $C_{(l)}^{(m)}$ *по норме* $|\ |_{(l')}^{(m)}$, *где* $l' < l$.

Замечание. Ввиду леммы $\mathcal{S}$ можно эквивалентным образом определить как проективный предел подпространств $\mathring{C}_{(l)}^{(m)}$.

Если E, F — линейные топологические пространства, то через $\mathcal{L}(E, F)$ обозначим пространство линейных непрерывных отображений E в F. Согласно определению непрерывного оператора включение $A \in \mathcal{L}(E, F)$ означает, что для любой окрестности $V \subset F$ можно подобрать такую окрестность $U \subset E$, что $AU \subset V$.

Рассмотрим случай $E = F = \mathcal{S}$. Так как окрестности в $\mathcal{S}$ выделяются неравенствами (8), то $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда $\forall m,\ l\ \exists \mu,\ \lambda$, так что

$$|A\varphi|_{(l)}^{(m)} \leqslant K|\varphi|_{(\lambda)}^{(\mu)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \tag{9}$$

В силу неравенства (9) оператор A по непрерывности продолжается до непрерывного оператора A' из $\mathring{C}_{(\lambda)}^{(\mu)}$ в $C_{(l)}^{(m)}$. Согласно следствию 1.3, $C_{(l')}^{(m')} \subset \mathring{C}_{(\lambda)}^{(\mu)}$, если $m' \geqslant \mu$ и $l' > \lambda$. Тем самым оператор A' определен на всем пространстве $C_{(l')}^{(m')}$. Так как норма $|\ |_{(l')}^{(m')}$ сильнее нормы $|\ |_{(\lambda)}^{(\mu)}$, то из непрерывности A' по норме $|\ |_{(\lambda)}^{(\mu)}$ вытекает, что A' является непрерывным оператором из $C_{(l')}^{(m')}$ в $C_{(l)}^{(m)}$.

Предложение. *Линейный оператор* $A\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *является непрерывным* (*т. е.* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$), *тогда и только тогда, когда* $\forall m,\ l\ \exists m',\ l'$, *так что* A *является сужением на* $\mathcal{S}$ *непрерывного оператора* $A_{m'l'}^{ml}\colon C_{(l')}^{(m')} \to C_{(l)}^{(m)}$.

Необходимость уже доказана. Достаточность вытекает из того, что для оператора A, являющегося сужением на $\mathcal{S}$ оператора $A_{\mu\lambda}^{ml} \in \mathcal{L}\left(C_{(\lambda)}^{(\mu)}, C_{(l)}^{(m)}\right)$, справедлива оценка (9) (см. Дополнение, п. 5).

Замечание. Набор операторов $A_{\mu\lambda}^{ml}$, фигурирующих в предложении, естественно интерпретировать как оператор, действующий в шкале $\{C_{(l)}^{(m)}, i_{ml}^{m'l'}\}$, где $i_{ml}^{m'l'}$ — вложения (6). При этом условие совпадения различных операторов $A_{\mu\lambda}^{ml}$ на $\mathcal{S}$ естественно заменить условиями согласованности этих операторов с вложениями (6) (подробнее см. Дополнение).

1.5. Пространство $\mathscr{S}'$ — это векторное пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{S}$. Непрерывность функционала $f \in \mathscr{S}'$ по определению означает, что $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $U_\varepsilon \subset \mathscr{S}$, что $|(f, \varphi)| < \varepsilon$ для $\forall \varphi \in U_\varepsilon$. Так как полный набор окрестностей в $\mathscr{S}$ можно задать неравенствами (8), то последнее означает, что $\forall f \in \mathscr{S}'$ $\exists m, l', K > 0$, так что

$$|(f, \varphi)| < K |\varphi|_{(l')}^{(m)} \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Отсюда вытекает, что функционал $f \in \mathscr{S}'$ по непрерывности продолжается до непрерывного функционала на $\overset{\circ}{C}{}_{(l')}^{(m)}$, и, тем самым, определен на всех $\varphi \in C_{(l)}^{(m)}$, $l > l'$. Так как норма $|\ \ |_{(l)}^{(m)}$ сильнее нормы $|\ \ |_{(l')}^{(m)}$, то функционал f непрерывен по норме $|\ \ |_{(l)}^{(m)}$, т. е. принадлежит банахову сопряженному $\left(C_{(l)}^{(m)}\right)'$ пространства $C_{(l)}^{(m)}$.

Вложения (6) индуцируют сопряженные вложения, и можно рассмотреть объединение $\bigcup \left(C_{(l)}^{(m)}\right)'$. Мы уже показали, что $\mathscr{S}' \subset \bigcup \left(C_{(l')}^{(m')}\right)'$. Так как противоположное включение очевидно, то доказана

Лемма. *$\mathscr{S}'$ как векторное пространство совпадает с объединением пространств* $\left(C_{(l)}^{(m)}\right)'$:

$$\mathscr{S}' = \bigcup_{m, l \in \mathbb{Z}_+} \left(C_{(l)}^{(m)}\right)'.$$

Правое пространство можно снабдить топологией индуктивного предела (см. Дополнение), в левом пространстве можно ввести топологию сильного сопряженного к $\mathscr{S}$; фундаментальной системой окрестностей в $\mathscr{S}'$ являются поляры ограниченных множеств в $\mathscr{S}$, т. е. V — окрестность в $\mathscr{S}'$, если существует некоторое ограниченное множество $M \subset \mathscr{S}$, так что

$$f \in V \Leftrightarrow |(f, \varphi)| < 1 \quad \forall \varphi \in M.$$

Таким образом, $f_j \to f$ в $\mathscr{S}'$, если для любого ограниченного множества $B \subset \mathscr{S}$ $(f_j, \varphi) \to (f, \varphi)$ равномерно по $\varphi \in B$.

В § 2 будет доказано, что $\mathscr{S}'$ рефлексивно и является регулярным индуктивным пределом, откуда следует совпадение двух указанных выше топологий в $\mathscr{S}'$. Из регулярности $\mathscr{S}'$ следует, что для каждого ограниченного множества $B \subset \mathscr{S}'$ можно указать такие m и l, что $B \subset \left(C_{(l)}^{(m)}\right)'$. Отсюда, в свою очередь, следует, что для любой сходящейся в $\mathscr{S}'$ последовательности можно указать такие m и l, что эта последовательность будет сходиться по норме банахового сопряженного к $C_{(l)}^{(m)}$.

В заключение пункта покажем, что пространства $C_{(l)}^{(m)}$ можно рассматривать как подмножества $\mathscr{S}'$; нам понадобится

Лемма. *Если* $f \in C_{(l)}$ *и* $\varphi \in C_{(-l+2\varkappa)}$, $\varkappa > n/2$, *то интеграл* (2) *абсолютно сходится и справедлива оценка*

$$|(f, \varphi)| \leqslant K_\varkappa^2 |f|_{(l)} |\varphi|_{(-l+2\varkappa)}. \tag{10}$$

Доказательство основано на неравенстве Шварца

$$|(f, \varphi)| < \left(\int (1+|x|^2)^{l-\varkappa} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \times \\ \times \left(\int (1+|x|^2)^{-l+\varkappa} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

и очевидном неравенстве

$$\left(\int |g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \left(\int (1+|x|^2)^{-\varkappa} dx\right)^{1/2} |g|_{(\varkappa)} = K_\varkappa |g|_{(\varkappa)}, \quad \varkappa > n/2. \quad (11)$$

Если в (11) заменить g соответственно на $(1+|x|^2)^{(l-\varkappa)/2}f$ или на $(1+|x|^2)^{(-l+\varkappa)/2}\varphi$, а полученные оценки подставить в неравенство Шварца, то получим (10).

Согласно лемме возникает вложение

$$C_{(l)} \subset (C_{(-l+2\varkappa)})' \quad (f \mapsto (f, \varphi)),$$

откуда следуют вложения

$$C_{(l)}^{(m)} \subset C_{(l)} \subset (C_{(-l+2\varkappa)})' \subset \mathscr{S}'.$$

Для заданного элемента объема dx эти вложения являются каноническими.

1.6. Пространства $\mathscr{O}$ и $\mathscr{M}$. С помощью операций пересечения и объединения можно определить ряд важных для дальнейшего векторных пространств функций

$$C_{(l)}^{(\infty)} = \bigcap_m C_{(l)}^{(m)}, \quad C_{(\infty)}^{(m)} = \bigcap_l C_{(l)}^{(m)}, \quad C_{(-\infty)}^{(m)} = \bigcup_l C_{(l)}^{(m)}).^1$$

Эти пространства мы превратим в линейные топологические пространства, внеся в них топологию проективного (индуктивного) предела. Из этих пространств с помощью операций пересечения и объединения мы образуем важные для дальнейшего пространства

$$\mathscr{O} = \bigcup_l C_{(l)}^{(\infty)}, \quad \mathscr{M} = \bigcap_m C_{(-\infty)}^{(m)}. \quad (12)$$

Пространство $\mathscr{O}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, у которых все производные $D^\alpha\varphi(x)$ при $|x| \to \infty$ растут не быстрее некоторой фиксированной степени $|x|$, зависящей только от φ. Пространство $\mathscr{M}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, у которых каждая производная оценивается через свою степень $|x|$. Очевидно, что

$$\mathscr{O} \subset \mathscr{M}. \quad (13)$$

---

[1]) В обозначении $C_{(0)}^{(\infty)}$ индекс (0) мы опускать не будем, чтобы не путать это пространство (Л. Шварц обозначает его через $\mathscr{B}^\infty$) с пространством $C^{(\infty)}$ всех бесконечно дифференцируемых функций без ограничения роста.

Упражнение. Докажите, что включение (13) строгое.

Указание. Проверьте, что $\exp(i|x|^2)\in\mathscr{M}$, но $\exp(i|x|^2)\notin\mathscr{O}$.

Пространство $\mathscr{O}$ можно наделить топологией индуктивного предела счетно-нормированных пространств. Ограниченность подмножества $B\subset\mathscr{O}$ в топологии индуктивного предела означает, что для любого l подмножество $B_l=B\cap C_{(l)}^{(\infty)}$ ограничено в $C_{(l)}^{(\infty)}$. С этим определением работать трудно. Мы будем иметь дело с более узким классом ограниченных множеств в $\mathscr{O}$. Назовем подмножество $B\subset\mathscr{O}$ регулярно ограниченным, если для некоторого l оно принадлежит $C_{(l)}^{(\infty)}$ и является ограниченным подмножеством этого пространства, т. е. найдутся такие $K_m>0$, $m=0, 1, \ldots$, что

$$|\varphi|_{(l)}^{(m)}<K_m, \quad m=0, 1, 2, \ldots \quad \forall\varphi\in B.$$

В $\mathscr{O}$ можно ввести сходимость (секвенциальную топологию), отвечающую набору регулярно ограниченных множеств. Скажем, что последовательность $\varphi_j(x)\in\mathscr{O}$ регулярно стремится к нулю при $j\to\infty$, если найдутся такие l и j_0, что $\varphi_j(x)\in C_{(l)}^{(\infty)}$ при $j>j_0$ и $\forall m \quad |\varphi_j|_{(l)}^{(m)}\to 0, \ j\to\infty$.

Аналогично скажем, что последовательность $\varphi_j(x)\in\mathscr{M}$ регулярно стремится к нулю в $\mathscr{M}$ при $j\to\infty$, если $\forall\alpha \ \exists l_\alpha$, так что $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{l_\alpha}|D^\alpha\varphi_j(x)|\to 0$ при $j\to\infty$. Очевидно, что из регулярной сходимости в $\mathscr{O}$ следует регулярная сходимость в $\mathscr{M}$.

Линейный оператор $A\colon \mathscr{O}\to\mathscr{O}$ называется *регулярным*, если каждое регулярно ограниченное множество $B\subset\mathscr{O}$ он переводит в регулярно ограниченное множество в $\mathscr{O}$. Обозначим через A_l сужение A на $C_{(l)}^{(\infty)}$:

$$A_l\colon C_{(l)}^{(\infty)}\to\mathscr{O} \quad \left(A_l\varphi=A\varphi \ \ \forall\varphi\in C_{(l)}^{(\infty)}\subset\mathscr{O}\right).$$

Регулярность A означает, что $\forall l \ \exists l'$, так что A_l является ограниченным оператором из $C_{(l)}^{(\infty)}$ в $C_{(l')}^{(\infty)}$. Так как $C_{(l)}^{(\infty)}$ — счетно-нормированное пространство, то всякий ограниченный оператор в нем является непрерывным[1]), т. е. $A_l\in\mathscr{L}\left(C_{(l)}^{(\infty)}, C_{(l')}^{(\infty)}\right)$. Для таких операторов дословным повторением рассуждений предложения п. 1.4 доказывается, что $\forall m\exists m'$, так что A_l является сужением на $C_{(l)}^{(\infty)}$ оператора $A_{m'l}^{ml'}\in\mathscr{L}\left(C_{(l)}^{(m')}, C_{(l')}^{(m)}\right)$. Итак, имеет место

Предложение 1. *Линейный оператор $A\colon\mathscr{O}\to\mathscr{O}$ является регулярным тогда и только тогда, когда $\forall l \ \exists l' \ \forall m \ \exists m'$ и такой оператор $A_{m'l}^{ml'}\in\mathscr{L}\left(C_{(l)}^{(m')}, C_{(l')}^{(m)}\right)$, что сужения A и $A_{m'l}^{ml'}$ на $C_{(l)}^{(\infty)}$ совпадают.*

Замечание. Следует иметь в виду, что всякий регулярный оператор на $\mathscr{O}$ является непрерывным (в топологии индуктивного предела). В самом деле, согласно определению индуктивной

---

[1]) Этот факт верен для широкого класса линейных топологических пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], гл. I; см. также Дополнение, п. 1).

топологии все вложения $C_{(l)}^{(\infty)} \to \mathcal{O}$ непрерывны, а поэтому из непрерывности A_l: $C_{(l)}^{(\infty)} \to C_{(l')}^{(\infty)}$ следует непрерывность A_l: $C_{(l)}^{(\infty)} \to \mathcal{O}$, откуда, в свою очередь, следует непрерывность A: $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ (см. Эдварс [1], теорема 6.3.2 и Дополнение).

Через $\mathcal{O}'$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{O}$. Как векторное пространство $\mathcal{O}'$ можно отождествить с проективным пределом сопряженных пространств $(C_{(l)}^{(\infty)})'$ (см. Дополнение). Последние пространства как векторные пространства отождествляются с индуктивными пределами $\bigcup_m (C_{(l)}^{(m)})'$ (см. лемму 1.5). Таким образом,

$$\mathcal{O}' = \bigcap_l \Big(\bigcup_m (C_{(l)}^{(m)})' \Big).$$

Топологию в $\mathcal{O}'$ мы сейчас определять не будем, к этому вопросу мы вернемся в § 2.

Перейдем теперь к пространству $\mathcal{M}$. Непосредственно из определений $\mathcal{S}$ и $\mathcal{M}$ следует

Предложение 2. (i) *$\mathcal{M}$ — коммутативное кольцо относительно умножения.*

(ii) *$\mathcal{S}$ является идеалом в $\mathcal{M}$, т. е. определено умножение*

$$\mathcal{M} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S} \quad (\{a(x), \varphi(x)\} \mapsto a(x)\varphi(x)),$$

и этот оператор является непрерывным.

Непрерывная функция $a(x)$ называется *мультипликатором* на некотором пространстве гладких функций Ψ, если $a\psi \in \Psi$ для всех $\psi \in \Psi$. Мультипликаторы образуют коммутативную алгебру, которую обозначим через $\mathfrak{M}(\Psi)$.

Всякий элемент $a \in \mathfrak{M}(\Psi)$ порождает оператор в сопряженном пространстве Ψ':

$$(af, \psi) = (f, a\psi), \quad f \in \Psi', \quad \psi \in \Psi,$$

и по определению будем считать $\mathfrak{M}(\Psi') = \mathfrak{M}(\Psi)$.

В предложении 2 (i) доказано, что $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{M})$. Так как $1 \in \mathcal{M}$, то $a \cdot 1 = a \in \mathcal{M}$ при $a \in \mathfrak{M}(\mathcal{M})$, т. е. $\mathfrak{M}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

В предложении 2 (ii) доказано, что $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{S}) = \mathfrak{M}(\mathcal{S}')$. В § 4 мы докажем, что $\mathfrak{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$.

Пространства $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{O}'$ были введены Л. Шварцем [1] [1]), (который использовал ставшую теперь общепринятой терминологию: *$\mathcal{S}$ — пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, $\mathcal{S}'$ — пространство медленно растущих (умеренных) распределений, $\mathcal{M}$ — пространство медленно растущих бесконечно дифференцируемых функций, $\mathcal{O}'$ — пространство быстро убывающих распределений.* Пространство $\mathcal{O}'$ играет важную роль во всем дальнейшем изложении. В § 2 мы приведем эквивалентное и более эффективное описание, которое пояснит указанное выше название пространства $\mathcal{O}'$.

---

[1]) Шварц обозначал $\mathcal{M}$ и Q' через Q_M и $\mathcal{O}'_C$.

1.7. Преобразование Фурье в $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$. Обозначим через $\widehat{\varphi}(\xi)$ преобразование Фурье функции $\varphi(x) \in \mathscr{S}$:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle x, \xi\rangle)\varphi(x)\,dx. \tag{14}$$

Так как этот интеграл абсолютно сходится и сходимость сохраняется при замене $\varphi(x)$ на $x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ при любых α, β, то, дифференцируя под знаком интеграла (14) и интегрируя по частям, получим

$$\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\beta|} \exp(-i\langle x, \xi\rangle) x^\beta D^\alpha \varphi(x)\,dx. \tag{15}$$

Если $n' > n$, то из равенства (15) следует оценка

$$|\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \int (1 + |x|)^{-n'}\,dx \times \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{n'} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)|.$$

Беря максимум по всем $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant l$, m, $l \in \mathbb{Z}_+$, получим неравенство

$$|\widehat{\varphi}|^{(l)}_{(m)} \leqslant K(m, l, n, n')\,|\varphi|^{(m)}_{(l+n')}, \quad \varphi \in C^{(m)}_{(l+n')}. \tag{16}$$

Таким образом, доказана (ср. п. 1.4).

Лемма. *Для любых целых m, $l \geqslant 0$ и $n' > n$ непрерывен оператор Фурье*

$$\mathscr{F}\colon C^{(m)}_{(l+n')} \to C^{(l)}_{(m)} \quad (\varphi(x) \mapsto \widehat{\varphi}(\xi)),$$

т. е. имеет место неравенство (16).

Оценки типа (16) мы будем называть *«неравенствами Парсеваля»*. В силу предложения 1.4 справедливо

Следствие. *Непрерывен оператор Фурье*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_x) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_\xi) \quad (\varphi(x) \mapsto \widehat{\varphi}(\xi)). \tag{17}$$

Из непрерывности оператора (17) и оператора отражения

$$I\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S} \quad (\varphi(x) \mapsto \varphi(-x)) \tag{18}$$

следует непрерывность композиции этих операторов:

$$I\mathscr{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_\xi) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_x) \quad (\psi(\xi) \mapsto \widehat{\psi}(-x)). \tag{19}$$

Известно (см., например, Л. Хёрмандер [1] или К. Иосида [1]), что для $\varphi \in \mathscr{S}$ композиция операторов (17) и (19) будет единичным оператором, т. е. имеет место формула обращения

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle x, \xi\rangle)\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Таким образом, оператор (19) является обратным к (17):

$$I\mathscr{F} = \mathscr{F}^{-1}, \tag{21}$$

а отображения (17) и (19) — изоморфизмы.

По сопряженности определяется преобразование Фурье в $\mathscr{S}'$; для $f \in \mathscr{S}'$ положим

$$(\widehat{f},\ I\widehat{\varphi}) = (f,\ \varphi). \tag{22}$$

Как мы уже говорили, $I\mathscr{F}\mathscr{S} = \mathscr{S}$, поэтому функционал $\widehat{f}$ определен на всем $\mathscr{S}$.

Согласно классическому равенству Парсеваля (см., например, Л. Хёрмандер [1] и К. Иосида [1]) равенство (22) справедливо для любых φ, $f \in \mathscr{S}$. Отсюда вытекает, что преобразование Фурье на $\mathscr{S}$ коммутирует с каноническим вложением $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$, т. е. для $f \in \mathscr{S}$ мы можем понимать $\widehat{f}$ как интеграл (14) и как преобразование Фурье в смысле $\mathscr{S}'$.

Если в (22) положить $\varphi(x) = \widehat{\psi}(x)$, где $\psi(\xi) \in \mathscr{S}$, то равенство примет вид

$$(\widehat{f},\ \psi) = (f,\ \widehat{\psi}), \tag{23}$$

т. е. оператор

$$\mathscr{F}\colon\ \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \quad (f \mapsto \widehat{f}) \tag{24}$$

будет сопряженным к оператору (17) и, следовательно, будет изоморфизмом. Итак, доказана

Теорема. *Пространства $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$ самодвойственны относительно преобразования Фурье*:

$$\mathscr{F}\mathscr{S} = \mathscr{S}, \quad \mathscr{F}\mathscr{S}' = \mathscr{S}'.$$

Замечание. Поскольку $\mathscr{S}$ является плотным подмножеством в $\mathscr{S}'$, то оператор Фурье на $\mathscr{S}'$ можно также определять как продолжение по непрерывности оператора (17).

1.8. Псевдодифференциальные операторы (п. д. о.) в $\mathscr{S}$. *Псевдодифференциальными операторами* (*п. д. о.*) называются операторы вида

$$(a(x,\ D)\,\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp(i\langle x,\ \xi\rangle)\, a(x,\ \xi)\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

Этот оператор удобно записать в виде композиции трех операторов

$$(a(x,\ D)\,\varphi)(x) = \mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x} a(x,\ \xi)\, \mathscr{F}_{x\to\xi}\varphi. \tag{25}$$

Функция $a(x,\ \xi)$ называется *символом* оператора. Если символ $a(x,\ \xi)$ является полиномом по ξ, т. е. $a(x,\ \xi) = \sum a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, то выражение (25) можно переписать в виде

$$(a(x,\ D)\,\varphi)(x) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\, D^\alpha \varphi(x),$$

и мы приходим к стандартному определению дифференциального оператора.

Если символ $a(x, \xi)$ не зависит от x, то отвечающий ему п. д. о. (25) будем называть п. д. о. с постоянными коэффициентами [1]):

$$(a(D)\varphi)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} a(\xi) \mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi. \qquad (26)$$

До сих пор все определения носили формальный характер, мы не говорили, на каких функциях рассматривается оператор (25), (26) и почему соответствующие интегралы имеют смысл.

Рассмотрим теперь случай функций $\varphi \in \mathcal{S}$, а в качестве символов $a(\xi)$ будем брать функции из $\mathcal{M}$. Тогда в силу предложения 2 (ii) и теоремы 1.7 оператор (26) будет композицией трех непрерывных операторов, переводящих $\mathcal{S}$ в себя, и, следовательно, будет непрерывным оператором из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. При композиции операторов (26) их символы перемножаются:

$$b(D)(a(D)\varphi) = a(D)(b(D)\varphi) = (ab)(D)\varphi, \quad a, b \in \mathcal{M}, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Если $f \in \mathcal{S}'$ и $a(\xi) \in \mathcal{M}$, то через $a(D)f$ обозначим функционал

$$(a(D)f, \varphi) = (f, a(-D)\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \qquad (27)$$

В случае полиномов $a(\xi)$ это определение согласуется с определением дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. С помощью (22) легко проверяется справедливость (27) для $f \in \mathcal{S}$. Таким образом, оператор $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ $(f \mapsto a(D)f)$ будет непрерывным как сопряженный к непрерывному оператору $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ $(\varphi \mapsto a(-D)\varphi)$.

§ 2. Шкала гильбертовых пространств, ассоциированная с $\mathcal{S}'$ (пространства С. Л. Соболева)

В предыдущем параграфе мы ввели шкалы банаховых пространств $C^{(m)}_{(l)}$ и из этих пространств с помощью операций индуктивного и проективного пределов построили пространства Л. Шварца $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$, а также по сопряженности пространства распределений $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{O}'$. В настоящем параграфе мы рассмотрим шкалы гильбертовых пространств $H^{(s)}_{(l)}$, состоящих из функций, имеющих s производных (в смысле теории распределений), интегрируемых в квадрате с весом $(1+|x|^2)^l$. Мы установим соотношения включения между пространствами $C^{(m)}_{(l)}$ и $H^{(s)}_{(\lambda)}$ при различных соотношениях параметров m, l, s, λ (теоремы вложения С. Л. Соболева), откуда будет следовать, что $\mathcal{S}$ является проективным пределом $H^{(m)}_{(l)}$, т. е. $\mathcal{S}$ — счетно-гильбертово пространство.

Шкалы $H^{(s)}_{(l)}$ имеют естественное продолжение на дробные и отрицательные s, причем пространства $H^{(s)}_{(l)}$ и $H^{(-s)}_{(-l)}$ двойствен-

---

[1]) Эта терминология оправдывается тем, что в случае символов $a(x, \xi)$, полиномиальных по ξ и не зависящих от x, мы получаем дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

ны. Отсюда вытекает возможность описания $\mathscr{P}'$ как индуктивного предела пространств $H^{(s)}_{(l)}$. в терминах объединений и пересечений этих пространств описывается и пространство $\mathcal{O}'$.

Первая половина параграфа посвящена определению и детальному изучению пространств $H^{(s)}_{(l)}$, вторая половина посвящена «предельным» пространствам $\mathscr{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{S}'$, $\mathcal{O}'$.

2.1. Пространства $H_{(l)}(\mathbb{R}^n)$ (или просто $H_{(l)}$) состоят из измеримых локально интегрируемых в квадрате функций, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_{(l)} = \left(\int |\psi(x)|^2 (1+|x|^2)^l\, dx\right)^{1/2}. \tag{1}$$

При $l=0$ получается пространство $L_2(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{=} H \overset{\text{def}}{=} H_{(0)}$. Очевидно, что норма (1) при фиксированном ψ является строго возрастающей функцией l, так что имеют место вложения $i_l^{l'}$: $H_{(l)} \to H_{(l')}$, $l' < l$, и можно рассмотреть шкалу $\{H_{(l)}, i_l^{l'}\}$ (см. Дополнение).

Если $\psi \in C_{(l+\varkappa)}$, то для этой функции определена норма (1) и справедливо неравенство

$$\|\psi\|_{(l)} \leqslant K_\varkappa |\psi|_{(l+\varkappa)}, \quad \varkappa > n/2, \quad \psi \in C_{(l+\varkappa)}. \tag{2}$$

Для доказательства этого неравенства надо в (1.11) заменить g на $(1+|x|^2)^{l/2}\psi$. Таким образом, $C_{(l+\varkappa)} \subset H_{(l)}$, причем топология левого пространства сильнее топологии правого.

Из неравенства Шварца и неравенства (2) (в котором надо l заменить на $-l$) следует, что при $\psi \in H_{(l)}$ и $\varphi \in C_{(-l+\varkappa)}$

$$\left|\int \psi(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \|\psi\|_{(l)} \|\varphi\|_{(-l)} \leqslant K_\varkappa \|\psi\|_{(l)} |\varphi|_{(-l+\varkappa)}, \tag{3}$$

т. е. отображение

$$H_{(l)} \ni \psi \mapsto \int \psi(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in C_{(-l+\varkappa)}, \quad \varkappa > n/2,$$

индуцирует каноническое (для заданного элемента объема dx) вложение (с топологией) $H_{(l)} \subset (C_{(-l+\varkappa)})' \subset \mathscr{S}'$. Таким образом, определены вложения (с топологией)

$$\mathscr{S} \subset C_{(l+\varkappa)} \subset H_{(l)} \subset (C_{(-l+\varkappa)})' \subset \mathscr{S}'. \tag{4}$$

Пространство $H_{(l)}$ становится гильбертовым, если определить в нем эрмитово скалярное произведение

$$[\varphi, \psi]_{(l)} = ((1+|x|^2)^{l/2}\varphi, \ (1+|x|^2)^{l/2}\bar{\psi}).$$

При $l=0$ индекс l опускаем.

Из очевидного равенства

$$\|\psi\|_{(l)} = \|(1+|x|^2)^{r/2}\psi\|_{(l-r)}$$

по схеме предложения 1.3 выводится

Предложение 1. *При любых l и r отображение*

$$H_{(l)} \to H_{(l-r)} \quad (\psi \mapsto (1+|x|^2)^{r/2}\psi)$$

является изометрическим изоморфизмом.

Следствие. *Включение* $\psi \in H_{(l)}$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\psi = (1+|x|^2)^{-l/2}\varphi$, *где* $\varphi \in H$ *и* $\|\varphi\| = \|\psi\|_{(l)}$.

Предложение 1, как и предложение 1.3, позволяет переносить на все $H_{(l)}$ свойства, доказанные при одном фиксированном l. В частности, из полноты L_2 следует полнота всех пространств $H_{(l)}$.

Лемма. $\mathscr{D}$ *(а следовательно,* $\mathscr{S}$*) плотно в* $H_{(l)}$ $\forall l \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Поскольку оператор умножения на $(1+|x|^2)^{l/2}$ переводит $\mathscr{D}$ и $\mathscr{S}$ в себя, то достаточно доказать лемму для $l=0$.

Если $\theta_N(x)$ — характеристическая функция шара $|x| \leqslant N$, то очевидно, что $\|\varphi - \theta_N\varphi\| \to 0$ при $N \to \infty$ $\forall \varphi \in H$. Таким образом, нам надо доказать, что всякую функцию $\varphi \in H$, имеющую компактный носитель, можно по норме $\| \; \|$ приблизить финитными функциями. Это утверждение доказывается с помощью осреднения (см. лемму 2 из п. 1.3: более подробно см. Хёрмандер [1], теорема 1.2.1 или С. Л. Соболев [1]).

В силу леммы $H_{(l)}$ является пополнением $\mathscr{S}$ по норме (1).

Предложение 2. *Билинейная форма* (1.2) *по непрерывности продолжается с* $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$ *на* $H_{(l)} \times H_{(-l)}$. *Индуцированное этой формой вложение*

$$H_{(-l)} \to (H_{(l)})' \quad (\psi \mapsto (\psi, \cdot)) \tag{5}$$

является каноническим (относительно элемента объема dx) изометрическим изоморфизмом $H_{(-l)}$ *и банахова сопряженного к* $H_{(l)}$:

$$(H_{(l)})' = H_{(-l)}. \tag{6}$$

Доказательство. При $l=0$ наше утверждение является известной теоремой Рисса — Фишера. При $l \neq 0$ надо заметить, что по соображениям сопряженности из предложения 1 (при $l=r$) следует, что оператор умножения на $(1+|x|^2)^{l/2}$ является изометрическим изоморфизмом $(H_{(l)})'$ и H'.

2.2. Пространства $H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$. Как уже отмечалось в п. 1.7, оператор Фурье $\mathscr{F}$: $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ является взаимно однозначным оператором, переводящим в себя подмножество $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$. Аналогичными свойствами обладает оператор отражения I. Имеем: $\mathscr{S} \subset H_{(s)} \subset \mathscr{S}'$. Обозначим через $H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ (или просто $H^{(s)}$) образ $H_{(s)}$ под действием оператора $I\mathscr{F}$:

$$H^{(s)}(\mathbb{R}^n_x) = I\mathscr{F}H_{(s)}(\mathbb{R}^n_\xi). \tag{7}$$

Так как композиция $\mathscr{F}$ и $I\mathscr{F}$ является единичным оператором в $\mathscr{S}'$, то

$$\mathscr{F}H^{(s)}(\mathbb{R}^n_x) = H_{(s)}(\mathbb{R}^n_\xi). \tag{7'}$$

В пространстве $H^{(s)}$ введем норму

$$\|f\|^{(s)} = \|\mathscr{F}f\|_{(s)}. \tag{8}$$

Таким образом, $H^{(s)}$ состоит из тех $f \in \mathscr{S}'$, которые имеют преобразование Фурье, являющееся локально квадратично суммируемой функцией, и для которых конечна норма (8). С другой стороны, поскольку $\mathscr{S}$ плотно в $H_{(s)}$, а операторы $\mathscr{F}$ и I переводят $\mathscr{S}$ в себя, то $\mathscr{S}$ плотно в $H^{(s)}$, поэтому $H^{(s)}$ можно определять как пополнение $\mathscr{S}$ по норме (8).

Если в равенство (1.23) подставить $f \in \mathscr{S}$ и $\varphi = \bar{f}$ и заметить, что $(\mathscr{F}\bar{f})(-\xi) = \overline{\mathscr{F}f(\xi)}$, то для $f \in \mathscr{S}$ получим равенство Парсеваля:

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{9}$$

Таким образом, при $s = 0$ нормы в $H^{(s)}$ и $H_{(s)}$ совпадают на $\mathscr{S}$, откуда следует совпадение этих пространств. Таким образом, соглашения $H^{(0)} = H$ и $H_{(0)} = H$ не противоречат друг другу. Норму в H обозначим через $\|\ \|$.

Вспоминая определение псевдодифференциального оператора $(1 + |D|^2)^{s/2}$ (см. (1.26)), получим

$$\|f\|^{(s)} = \|(1 + |D|^2)^{s/2} f\|. \tag{8'}$$

Из определения (7) и предложений предыдущего пункта вытекает

Предложение 1. (i) *При любых s, r отображение $H^{(s)} \to H^{(s-r)}$ $\left(f \mapsto (1 + |D|^2)^{r/2} f\right)$ является изометрическим изоморфизмом.*

(ii) *Включение $f \in H^{(s)}$ имеет место тогда и только тогда, когда $f = (1 + |D|^2)^{-s/2} g$, причем $g \in H$ и $\|f\|^{(s)} = \|g\|$.*

(iii) *Билинейная форма (1.2) по непрерывности продолжается с $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$ на $H^{(s)} \times H^{(-s)}$. Индуцированное этой формой вложение $H^{(-s)} \to (H^{(s)})'$ является изометрическим изоморфизмом $H^{(-s)}$ и банахова сопряженного к $H^{(s)}$:*

$$(H^{(s)})' = H^{(-s)}. \tag{10}$$

Пространство $H^{(s)}$ можно превратить в гильбертово, определив эрмитово скалярное произведение

$$[f, g]^{(s)} = [\mathscr{F}f, \mathscr{F}g]_{(s)} = [(1 + |D|^2)^{s/2} f,\ (1 + |D|^2)^{s/2} g].$$

Предложение 2. *Пусть $m \geqslant 0$ и целое. Включение $f \in H^{(s)}$ имеет место тогда и только тогда, когда $D^\alpha f \in H^{(s-m)}$, $|\alpha| \leqslant m$, причем норма* (8) *эквивалентна норме*

$$\left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \left(\|D^\alpha f\|^{(s-m)}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Доказательство. Согласно предложению 1 (i) $f \in H^{(s)}$ представляется в виде $f = (1 + |D|^2)^{-m/2} g$, где $g \in H^{(s-m)}$ и $\|g\|^{(s-m)} = \|f\|^{(s)}$. Тогда $D^\alpha f = c_\alpha(D) g$, где п. д. о. $c_\alpha(D) = (1 + |D|^2)^{-m/2} D^\alpha$ имеет ограниченный символ и, следовательно, является ограниченным оператором в любом $H^{(\mu)}$. Таким образом, норма (11) конечна и оценивается через норму (8).

Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим сначала случай $m=1$. Из тождества

$$\sqrt{1+|\xi|^2}=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\xi_i \tag{12}$$

следует, что если $f\in H^{(s-1)}$ и $D_j f\in H^{(s-1)}$, $j=1, \ldots, n$, то $(1+|D|^2)^{1/2}f\in H^{(s-1)}$, т. е. $f\in H^{(s)}$. Случай $m>1$ мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Следствие. *Пусть $m\geqslant 0$ и целое. Включение $f\in H^{(m)}$ имеет место тогда и только тогда, когда $D^\alpha f\in L_2$, $|\alpha|\leqslant m$, причем*

$$\|f\|^{(m)}\approx\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|^2\Big)^{1/2}. \tag{11'}$$

Предложение 2'. *Пусть $m\geqslant 0$ и целое. Включение $h\in H^{(s)}$ имеет место тогда и только тогда, когда найдутся такие $h_{m\alpha}\in H^{(s+m)}$, $\|h_{m\alpha}\|^{(s+m)}\leqslant \mathrm{const}\cdot\|h\|^{(s)}$, что h представляется в виде*

$$h=\sum_{|\alpha|\leqslant m}D^\alpha h_{\alpha m}. \tag{13}$$

Доказательство. Если $h\in H^{(s)}$, то $h_m\overset{\mathrm{def}}{=}(1+|D|^2)^{-m/2}h\in H^{(s+m)}$, так что $h=(1+|D|^2)^{m/2}h_m$. Возводя обе части (12) в степень m, получим $(1+|D|^2)^{m/2}=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}c_\alpha(D)D^\alpha$, где функции $c_\alpha(\xi)$ ограничены. Полагая $h_{\alpha m}=c_\alpha(D)h_m$, мы докажем необходимость представления (13). Достаточность следует из непрерывности оператора D^α: $H^{(s+m)}\to H^{(s)}$, $|\alpha|\leqslant m$.

Следствие. *Пусть $m\geqslant 0$ и целое. Включение $h\in H^{(-m)}$ имеет место тогда и только тогда, когда найдутся такие $h_\alpha\in L_2$, $\|h_\alpha\|\leqslant\mathrm{const}\cdot\|h\|^{(-m)}$, что h представляется в виде*

$$h=\sum_{|\alpha|\leqslant m}D^\alpha h_\alpha. \tag{12'}$$

Следствия из предложений 2, 2' дают удобное для приложений описание пространств $H^{(s)}$ при целых s.

Для полноты изложения дадим известное описание пространств $H^{(s)}$ при $0<s<1$.

Предложение 3. *Включение $f\in H^{(\lambda)}$, $0<\lambda<1$, имеет место тогда и только тогда, когда конечно выражение*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}}\,dx\,dy+\int|f(x)|^2\,dx. \tag{14}$$

При доказательстве достаточно проверить равенство

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|f(x+z)-f(x)|^2}{|z|^{n+2\lambda}}\,dx\,dz=c_{n\lambda}\int|\xi|^{2\lambda}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi. \tag{14'}$$

По формуле обращения преобразования Фурье имеем

$$f(x+z)-f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\left(e^{i\langle z,\xi\rangle}-1\right)\hat f(\xi)\,d\xi.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\int|f(x+z)-f(x)|^2\,dx=\int|\hat f(\xi)|^2\,|1-\exp(i\langle z,\xi\rangle)|^2\,d\xi,$$

откуда левая часть (14′) равна

$$\int|\xi|^{2\lambda}\,|\hat f(\xi)|^2\,d\xi\int\frac{|\exp(i\langle z,\xi\rangle)-1|^2}{|\xi|^{2\lambda}\,|z|^{n+2\lambda}}\,dz.$$

Обозначим внутренний интеграл через $c_{n\lambda}(\xi)$. Нетрудно проверить, что $c_{n\lambda}(\xi)=c_{n\lambda}(|\xi|)$. По соображениям однородности

$$c_{n\lambda}(|\xi|)=c_{n\lambda}(\rho|\xi|),\ \rho>0,\ \text{ т. е. } c_{n\lambda}(\xi)=c_{n\lambda}.$$

Из предложений 2 и 3 вытекает

Следствие. *Пусть $s>0$. Включение $f\in H^{(s)}$ имеет место тогда и только тогда, когда $D^\alpha f\in L_2$ при $|\alpha|\leqslant[s]$ и конечны интегралы*

$$\int\int|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|^2\,|x-y|^{-n-2(s-[s])}\,dx\,dy,\quad|\alpha|\leqslant[s].$$

2.3. Пространства $H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^n)$. В пп. 2.1, 2.2 мы рассмотрели однопараметрические семейства пространств, в которых градуировка по гладкости или по росту (убыванию) на бесконечности задавалась операторами $(1+|D|^2)^{s/2}$ и $(1+|x|^2)^{l/2}$. В этом пункте мы хотим включить эти семейства в единую двупараметрическую шкалу пространств с градуировкой как по гладкости, так и по росту. Поскольку операторы $(1+|D|^2)^{s/2}$ и $(1+|x|^2)^{l/2}$ не коммутируют, то их порядок в определении нормы существен.

Определим вначале пространство

$$H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathcal{S}',\ (1+|x|^2)^{l/2}f\in H^{(s)}\}\tag{15}$$

и снабдим его нормой

$$\|f\|_{(l)}^{(s)}=\|(1+|x|^2)^{l/2}f\|^{(s)}=\|(1+|D|^2)^{s/2}(1+|x|^2)^{l/2}f\|.\tag{16}$$

Аналогично определим пространство

$$'H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathcal{S}',\ (1+|D|^2)^{s/2}f\in H_{(l)}\}\tag{15′}$$

и снабдим его нормой

$$'\|f\|_{(l)}^{(s)}=\|(1+|D|^2)^{s/2}f\|_{(l)}=\|(1+|x|^2)^{l/2}(1+|D|^2)^{s/2}f\|.\tag{16′}$$

Так как операторы $(1+|D|^2)^{s/2}$ и $(1+|x|^2)^{l/2}$ переводят $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ в себя, то имеют место непрерывные плотные вложения

$$\mathcal{S}\subset H_{(l)}^{(s)}\subset\mathcal{S}',\quad\mathcal{S}\subset{}'H_{(l)}^{(s)}\subset\mathcal{S}',$$

позволяющие рассматривать пространства (15), (15′) как пополнения $\mathcal{S}$ по норме (16) (соответственно по норме (16′)).

Пространства (15), (15′) можно сделать гильбертовыми, определив скалярные произведения

$$[f, g]_{(l)}^{(s)} = [(1+|x|^2)^{l/2}f,\ (1+|x|^2)^{l/2}g]^{(s)},$$
$$'[f, g]_{(l)}^{(s)} = [(1+|D|^2)^{s/2}f,\ (1+|D|^2)^{s/2}g]_{(l)}.$$

Из результатов пп. 2.1, 2.2 вытекает

Предложение 1. (i) *При любых s, l, r отображение*

$$H_{(l)}^{(s)} \to H_{(l-r)}^{(s)} \quad (f \mapsto (1+|x|^2)^{r/2}f)$$

является изометрическим изоморфизмом.

(i′) *При любых s, l, r отображение*

$$'H_{(l)}^{(s)} \to {}'H_{(l)}^{(s-r)} \quad (f \mapsto (1+|D|^2)^{r/2}f)$$

является изометрическим изоморфизмом.

(ii) *Включение $f \in H_{(l)}^{(s)}$ имеет место тогда и только тогда, когда найдется такое g, что*

$$f = (1+|x|^2)^{-l/2}(1+|D|^2)^{-s/2}g, \quad \|f\|_{(l)}^{(s)} = \|g\|. \tag{17}$$

(ii′) *Включение $f' \in H_{(l)}^{(s)}$ имеет место тогда и только тогда, когда найдется такое h, что*

$$f = (1+|D|^2)^{-s/2}(1+|x|^2)^{-l/2}h, \quad '\|f\|_{(l)}^{(s)} = \|h\|. \tag{17}$$

(iii) *Билинейная форма* (1.2) *по непрерывности продолжается на $H_{(l)}^{(s)} \times H_{(-l)}^{(-s)}$ или $'H_{(l)}^{(s)} \times {}'H_{(-l)}^{(-s)}$ и индуцирует канонические изометрические изоморфизмы*

$$\left(H_{(l)}^{(s)}\right)' = H_{(-l)}^{(-s)}, \quad \left('H_{(l)}^{(s)}\right)' = {}'H_{(-l)}^{(-s)}. \tag{18}$$

Поскольку преобразование Фурье переводит операторы $(1+|D|^2)^{s/2}$ и $(1+|x|^2)^{s/2}$ друг в друга, то из определений (15) и (15′) вытекают изометрические изоморфизмы

$$\mathscr{F} H_{(l)}^{(s)} = {}'H_{(s)}^{(l)}, \quad \mathscr{F}\, 'H_{(l)}^{(s)} = H_{(s)}^{(l)}. \tag{19}$$

Предложение 2. *Нормы* (16) *и* (16′) *при любых s и l эквивалентны, т. е. найдется такая константа $K = K(s, l, n)$, что*

$$K^{-1}\|f\|_{(l)}^{(s)} \leqslant {}'\|f\|_{(l)}^{(s)} \leqslant K\|f\|_{(l)}^{(s)} \quad \forall f \in \mathscr{S}. \tag{20}$$

Эти неравенства, доказанные Л. Р. Волевичем и А. Г. Мехтиевым [1], можно вывести из более общих результатов, изложенных ниже в п. V.2.3. Для наших дальнейших целей мы можем ограничиться четными s, l любого знака. В этом частном случае доказательство более элементарно, оно намечено нами в приложении к этому параграфу.

Из предложений 1 (ii) и 1 (ii′) легко следует плотность $\mathscr{S}$ в $H_{(l)}^{(s)}$ и $'H_{(l)}^{(s)}$. Ввиду предложения 2 эти пространства совпадают по запасу элементов, т. е. $H_{(l)}^{(s)} = {}'H_{(l)}^{(s)}$. В дальнейшем пространства (15), (15′) мы будем обозначать через $H^{(s)}_{(l)}$, сохранив разные обозначения для норм (16) и (16′).

Из совпадения пространств (15), (15′) и (19) вытекает изоморфизм

$$\mathscr{F} H^{(s)}_{(l)} = H^{(l)}_{(s)}. \tag{21}$$

Из определения (15) тривиально следует вложение $H^{(s)}_{(l)} \subset \subset H^{(s')}_{(l)}$ при $s > s'$. Аналогично, из (15′) следует, что $'H^{(s)}_{(l)} \subset \subset {}'H^{(s)}_{(l')}$ при $l > l'$. Из совпадения пространств (15) и (15′) следует, что

$$'H^{(s)}_{(l)} = H^{(s)}_{(l)} \subset {}'H^{(s')}_{(l')} = H^{(s')}_{(l')}, \quad s \geqslant s', \quad l \geqslant l'. \tag{22}$$

Предложение 3. *При целых $s = m \geqslant 0$ норма* (16) *эквивалентна норме*

$$\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha f \|^2_{(l)} \Big)^{1/2}. \tag{23}$$

Доказательство. В силу следствия из предложения 2 п. 2.2 при $s = m$ норма (16′) эквивалентна норме

$$\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha ((1 + |x|^2)^{l/2} f) \|^2 \Big)^{1/2}.$$

Из формулы Лейбница легко следует эквивалентность этой нормы норме (23).

Следствие. *При целых s, l нормы* (16), (16′) *эквивалентны норме*

$$\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant s, \, |\beta| \leqslant l} \| x^\beta D^\alpha f \|^2 \Big)^{1/2}. \tag{24}$$

В пространстве $C^{(m)}_{(l)}$ наряду с нормой (1.4) можно рассмотреть аналог нормы (16′)

$$'| f |^{(m)}_{(l)} = | (1 + | x |^2)^{l/2} f |^{(m)}. \tag{25}$$

С помощью формулы Лейбница легко доказывается

Предложение 4. *Нормы* (1.4) *и* (25) *эквивалентны.*

2.4. Теоремы вложения для пространств $C^{(m)}_{(l)}$ и $H^{(s)}_{(l)}$.

Теорема. *Для любого целого $m \geqslant 0$, $l \in \mathbb{R}$ и $\forall \varkappa > n/2$ имеют место вложения (с топологией)*

$$C^{(m)}_{(l+\varkappa)} \subset H^{(m)}_{(l)}, \tag{26}$$

$$H^{(m+\varkappa)}_{(l)} \subset C^{(m)}_{(l)}. \tag{27}$$

Замечания. 1) Как уже отмечалось выше, для пространств $C^{(m)}_{(l)}$ и $H^{(m)}_{(l)}$ определено каноническое отождествление с некоторыми подмножествами в $\mathscr{S}'$. Поэтому (26) и (27) фактически состоят из двух утверждений:

(i) левые пространства (26), (27) содержатся в правых в теоретико-множественном смысле;

(ii) правые пространства (26), (27) индуцируют на левых пространствах топологии, которые слабее исходных.

2) Полезно иметь в виду, что для банаховых пространств (26), (27) (ii) является прямым следствием (i). В самом деле, пусть E и F — это левое и правое пространства (26), (27), а J: $E \to F$ — оператор (вложения), сопоставляющий каждому элементу $\varphi \in E$ его же, но рассматриваемого как элемент F. Из непрерывности вложения J': $E \to \mathscr{S}'$ следует замкнутость этого оператора. Так как он определен на всем E, то по теореме о замкнутом графике оператор J непрерывен, т. е. имеет место (i).

3) Вместо (27) мы фактически докажем несколько более сильное утверждение

$$H_{(l)}^{(m+\varkappa)} \subset \overset{\circ}{C}{}_{(l)}^{(m)}. \tag{27°}$$

Отметим, что левые пространства в (26), (27°) плотны в правых.

Доказательство теоремы. Вложение (26) является автоматическим следствием оценки

$$\| \varphi \|_{(l)}^{(m)} \leqslant K_{ml\varkappa} | \varphi |_{(l+\varkappa)}^{(m)} \quad \forall \varphi \in C_{(l+\varkappa)}^{(m)}, \tag{28}$$

а вложение (27°) является следствием оценки

$$| \varphi |_{(l)}^{(m)} \leqslant K'_{ml\varkappa} \| \varphi \|_{(l)}^{(m+\varkappa)} \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}. \tag{29}$$

Неравенство (28) доказывается совсем просто. Подставив в (1.11) вместо g функцию $(1+|x|^2)^{l/2} D^\alpha \varphi$, $|\alpha| \leqslant m$, получим

$$\| D^\alpha f \|_{(l)} \leqslant K_\varkappa | D^\alpha f |_{(l+\varkappa)} \leqslant K_\varkappa | f |_{(l+\varkappa)}^{(m)}.$$

Суммируя эти оценки по α, $|\alpha| \leqslant m$, и пользуясь предложением 3 из п. 2.3, получим (28).

Докажем теперь оценку (29). Согласно формуле обращения для преобразования Фурье для $\varphi(x) \in \mathscr{S}$

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \left| \int \exp(i\langle x, \xi\rangle) \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[(2\pi)^{-n} \int |\xi^\alpha|^2 (1+|\xi|^2)^{-m-\varkappa} d\xi \right]^{1/2} \left[\int (1+|\xi|^2)^{m+\varkappa} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2}.$$

При $|\alpha| \leqslant m$ и $\varkappa > n/2$ первый интеграл в правой части сходится, откуда

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leqslant K_{\alpha, m+\varkappa} \|\varphi\|^{(m+\varkappa)}.$$

Взяв верхнюю грань левой части по $x \in \mathbb{R}^n$ и просуммировав по α, $|\alpha| \leqslant m$, получим

$$|\varphi|^{(m)} \leqslant K_{m,\varkappa} \|\varphi\|^{(m+\varkappa)}.$$

Заменяя φ на $(1+|x|^2)^{l/2}\varphi$, придем к неравенству

$$|\varphi|_{(l)}^{(m)} \leqslant K_{m,\varkappa} \|\varphi\|_{(l)}^{(m+\varkappa)},$$

и нам остается воспользоваться предложением 4 из п. 2.3.

Замечание. Из вложений (26), (27) вытекают соответствующие вложения для банаховых сопряженных:

$$\left(H_{(l)}^{(m)}\right)' \subset \left(C_{(l+\varkappa)}^{(m)}\right)', \quad \left(C_{(l)}^{(m)}\right)' \subset \left(H_{(l)}^{(m+\varkappa)}\right)'.$$

Воспользовавшись изоморфизмом (18), получим

$$H_{(-l+\varkappa)}^{(-m)} \subset \left(C_{(l)}^{(m)}\right)' \subset H_{(-l)}^{(-m-\varkappa)}. \tag{30}$$

2.5. $\mathscr{S}$ как счетно-гильбертово пространство. Норма (16) при фиксированных f и l является возрастающей функцией s; аналогично, норма (16′) — возрастающая функция l (при фиксированных s и f). Ввиду эквивалентности этих норм определим непрерывные плотные вложения (см. (22))

$$i_{sl}^{s'l'}: H_{(l)}^{(s)} \to H_{(l')}^{(s')}, \quad s \geqslant s', \quad l \geqslant l', \tag{31}$$

т. е. пространства $H_{(l)}^{(s)}$ образуют шкалу $\{H_{(l)}^{(s)}, i_{sl}^{s'l'}\}$. Рассмотрим проективный предел этой шкалы $H_{(\infty)}^{(\infty)} \overset{\text{def}}{=} \bigcap H_{(l)}^{(s)}$. Пространство $H_{(\infty)}^{(\infty)}$ не изменится, если брать пересечение по любой счетной последовательности s, l, стремящихся к $+\infty$ (скажем, s, l — целые). Таким образом, пространство $H_{(\infty)}^{(\infty)}$ является счетно-гильбертовым.

Из вложений (26), (27) следует, что пространства $C_{(\infty)}^{(\infty)}$ и $H_{(\infty)}^{(\infty)}$ совпадают по запасу элементов, а системы норм $|\ \ |_{(l)}^{(m)}$ и $\|\ \ \|_{(l)}^{(m)}$ определяют системы окрестностей, содержащиеся друг в друге. Таким образом,

$$\mathscr{S} = C_{(\infty)}^{(\infty)} = H_{(\infty)}^{(\infty)} = \bigcap_{s,l} H_{(l)}^{(s)}, \tag{32}$$

т. е. *$\mathscr{S}$ является счетно-гильбертовым пространством.*

Рассмотрим индуктивный предел

$$H_{(-\infty)}^{(-\infty)} = \bigcup_{s,l} H_{(l)}^{(s)}. \tag{33}$$

Так как пространства $H_{(l)}^{(s)}$ гильбертовы и, следовательно, рефлексивные банаховы пространства, то $H_{(-\infty)}^{(-\infty)}$ будет регулярным индуктивным пределом (см. Дополнение). Канонические изоморфизмы (18) индуцируют равенства векторных пространств

$$\left(H_{(\infty)}^{(\infty)}\right)' = H_{(-\infty)}^{(-\infty)}, \quad \left(H_{(-\infty)}^{(-\infty)}\right)' = H_{(\infty)}^{(\infty)}. \tag{34}$$

Из свойств индуктивных пределов рефлексивных пространств следует (см. Дополнение), что изоморфизмы (34) являются топологическими, т. е.

$$\mathscr{S}' = H_{(-\infty)}^{(-\infty)} = \bigcup_{m,l} \left(C_{(l)}^{(m)}\right)', \tag{35}$$

причем топология сильного сопряженного к $\mathscr{S}$ эквивалентна топологиям правых пространств (35). Сказанное выше резюмируем в виде теоремы.

Теорема. *Имеют место изоморфизмы линейных топологических пространств* (32), (35).

Следствие. *Для любого* $f\in\mathscr{S}'$ *можно указать* $\lambda\in\mathbb{R}$, *целое* $\varkappa\geqslant 0$ *и функцию* $f_0\in C_{(\lambda)}$ *так, что* $f=(1+|D|^2)^\varkappa f_0$.

Доказательство. Согласно (35), для f можно указать такие λ и σ, что $f\in H^{(\sigma)}_{(\lambda)}$. Согласно предложению 1 (i′) из п. 2.3 мы можем представить f в виде $f=(1+|D|^2)^{-(\sigma-\sigma_0)/2}f_0$, где $f_0\in\in H^{(\sigma_0)}_{(\lambda)}$. Если $\sigma_0>n/2$, то согласно (27) $f_0\in C_{(\lambda)}$. Число $-(\sigma-\sigma_0)/2$ мы можем считать целым и положительным (в противном случае мы так уменьшим σ, чтобы выполнялось это условие).

Замечание. Ввиду следствия $\mathscr{S}'$ можно представить как индуктивный предел пространств $(1+|D|^2)^sC_{(l)}$:

$$\mathscr{S}'=\bigcup_{s,l}(1+|D|^2)^sC_{(l)} \tag{35′}$$

(причем можно ограничиться целыми $s\geqslant 0$). Иными словами, каждый элемент $\mathscr{S}'$ является суммой производных от непрерывных функций из $C_{(-\infty)}$.

Используя (32) и плотность $\mathscr{S}$ в $H^{(s)}_{(l)}$, мы сможем переформулировать предложение 1.4.

Предложение 1. *Линейный оператор* $A\colon\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ *является непрерывным тогда и только тогда, когда* $\forall s,l\ \exists s',l'$, *так что справедлива оценка*

$$\|A\varphi\|^{(s)}_{(l)}\leqslant K_{sl}\|\varphi\|^{(s')}_{(l')}\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}.$$

Замечание. Согласно предложению 1 непрерывный оператор $A\colon\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ для любых s, l продолжается до непрерывного оператора $A^{sl}_{s'l'}\in\mathscr{L}\left(H^{(s')}_{(l')},H^{(s)}_{(l)}\right)$. Из конструкции операторов $A^{sl}_{s'l'}$ следует, что они согласованы с вложениями (31), т. е. являются компонентами оператора в шкале $\mathbb{H}=\{H^{(s)}_{(l)},i^{s'l'}_{sl}\}$ (см. Дополнение). Обратно, если задан оператор в шкале $\mathbb{H}$, причем для любых s, l можно подобрать s', l' так, что существует его компонента $A^{sl}_{s'l'}$, то этот оператор индуцирует непрерывный оператор на проективном пределе $\mathscr{S}$ этой шкалы (Дополнение, п. 5).

Двойственным утверждением к предложению 1 является

Предложение 2. *Линейный оператор* $A\colon\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$ *является непрерывным тогда и только тогда, когда* $\forall s,\ l\ \exists s',\ l'$, *так что*

$$\|Af\|^{(s')}_{(l')}\leqslant K\|f\|^{(s)}_{(l)}\quad\forall f\in H^{(s)}_{(l)}.$$

Доказательство. Обозначим через A_{sl} сужение A на $H^{(s)}_{(l)}$. Если $A\in\mathscr{L}(\mathscr{S}',\mathscr{S}')$, то $A_{sl}\in\mathscr{L}\left(H^{(s)}_{(l)},\mathscr{S}'\right)$ и, следовательно, оператор A_{sl} переводит любое ограниченное множество $B\subset H^{(s)}_{(l)}$ в ограниченное множество в $\mathscr{S}'$. Поскольку $\mathscr{S}'$ — регулярный индуктивный предел, то $\exists s', l'$, так что $A_{sl}B$ принадлежит некоторому шару в $H^{(s')}_{(l')}$. Итак, доказано, что $A_{sl} \in \mathscr{L}\left(H^{(s)}_{(l)}, H^{(s')}_{(l')}\right)$.

Обратно, если $A \in \mathscr{L}\left(H^{(s)}_{(l)}, H^{(s')}_{(l')}\right)$, то $A_{sl} \in \mathscr{L}\left(H^{(s)}_{(l)}, \mathscr{S}'\right)$, откуда следует, что $A \in \mathscr{L}(\mathscr{S}', \mathscr{S}')$ (ср. Дополнение, п. 4). Для дальнейшего нам будет удобен вариант предложения 2.

Предложение 2'. *Пусть Ψ — векторное пространство, являющееся плотным подмножеством $\mathscr{S}'$ (например, $\Psi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$), A_0: $\Psi \to \Psi$ — линейный оператор. Если $\forall s, l\ \exists s', l'$, так что*

$$\|A_0\psi\|^{(s')}_{(l')} \leqslant K \|\psi\|^{(s)}_{(l)} \quad \forall \psi \in \Psi \cap H^{(s)}_{(l)},$$

то оператор A_0 является сужением на Ψ оператора $A \in \mathscr{L}(\mathscr{S}', \mathscr{S}')$.

Доказательство. Из условий предложения следует, что оператор A_0 по непрерывности продолжается до непрерывного оператора $A_{sl} \in \mathscr{L}\left(H^{(s)}_{(l)}, H^{(s')}_{(l')}\right) \subset \mathscr{L}\left(H^{(s)}_{(l)}, \mathscr{S}'\right)$, причем операторы A_{sl} перестановочны с вложениями (31). Отсюда следует, что операторы A_{sl} являются сужениями на $H^{(s)}_{(l)}$ непрерывного оператора $A \in \mathscr{L}(\mathscr{S}', \mathscr{S}')$ (Дополнение, п. 4).

С помощью операций проективного и индуктивного предела можно определить пространства

$$H^{(\infty)}_{(l)} = \bigcap_s H^{(s)}_{(l)}, \qquad H^{(s)}_{(\infty)} = \bigcap_l H^{(s)}_{(l)}, \tag{36}$$

$$H^{(-\infty)}_{(l)} = \bigcup_s H^{(s)}_{(l)}, \qquad H^{(s)}_{(-\infty)} = \bigcup_l H^{(s)}_{(l)}. \tag{37}$$

Пространства (37) являются регулярными индуктивными пределами, откуда следует двойственность между пространствами (36) и (37). Иными словами, двойственности (18) остаются в силе, если один из индексов s, l конечен, а другой принимает значения $+\infty$ или $-\infty$. Равенства (34) показывают, что (18) остается в силе при $s = l = \pm\infty$. Отметим также, что

$$\mathscr{S} = \bigcap_l H^{(\infty)}_{(l)} = \bigcap_s H^{(s)}_{(\infty)}, \qquad \mathscr{S}' = \bigcup_l H^{(-\infty)}_{(l)} = \bigcup_s H^{(s)}_{(-\infty)}.$$

2.6. Пространства $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}'$, $\mathscr{M}$. Из вложений (26), (27) следуют вложения для проективных пределов по параметру m, т. е.

$$C^{(\infty)}_{(l+\varkappa)} \subset H^{(\infty)}_{(l)} \subset C^{(\infty)}_{(l)}. \tag{38}$$

Но тогда $\mathscr{O}$ как по запасу элементов, так и по топологии совпадает с индуктивным пределом $\bigcup\limits_l H^{(\infty)}_{(l)}$. Аналогично, пространство $\mathscr{M}$ по запасу элементов совпадает с пересечением $\bigcap\limits_m H^{(m)}_{(-\infty)}$.

Вложения (30) индуцируют вложение индуктивных пределов

$$H^{(-\infty)}_{(-l+\varkappa)} \subset \left(C^{(\infty)}_{(l)}\right)' \subset H^{(-\infty)}_{(-l)}. \tag{39}$$

Отсюда следует, что пространство $\mathscr{O}'$ (см. (1.14)) по запасу элементов совпадает с проективным пределом $\bigcap\limits_l H^{(-\infty)}_{(l)}$. Итак, доказана

Теорема 1. *Имеют место следующие изоморфизмы векторных пространств*:

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)=\bigcup_l H_{(l)}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)=\bigcup_l\bigcap_s H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^n), \tag{40}$$

$$\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)=\bigcap_l H_{(l)}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n)=\bigcap_l\bigcup_s H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^n), \tag{41}$$

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)=\bigcap_s H_{(-\infty)}^{(s)}(\mathbb{R}^n)=\bigcap_s\bigcup_l H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^n). \tag{42}$$

Следствие (ср. следствие 2.5). *Если* $f\in\mathcal{O}'$, *то* $\forall l\in\mathbb{R}$ *можно указать дифференциальный оператор* $P_l(D)$ *и такой элемент* $f_l\in C_{(l)}$, *что* $f=P_l(D)f_l$.

Замечание. Ввиду следствия имеем (ср. (35′))

$$\mathcal{O}'=\bigcap_l\bigcup_k(1+|D|^2)^kC_{(l)}. \tag{43}$$

Из равенств (21) вытекает

Теорема 2. *Имеют место изоморфизмы векторных пространств*

$$\mathcal{F}\mathcal{S}=\mathcal{S},\qquad \mathcal{F}\mathcal{S}'=\mathcal{S}', \tag{44}$$

$$\mathcal{F}\mathcal{O}'=\mathcal{M},\qquad \mathcal{F}\mathcal{O}=\mathcal{M}', \tag{45}$$

причем изоморфизмы (44) *являются и топологическими.*

В п. 1.6 было введено понятие регулярно ограниченного множества в $\mathcal{O}$. В силу (26), (27) множество $B\subset\mathcal{O}$ регулярно ограничено тогда и только тогда, когда для некоторого l оно принадлежит $H_{(l)}^{(\infty)}$ и является ограниченным подмножеством этого пространства. Из предложения 1 п. 1.6 вытекает

Предложение 1. *Линейный оператор* $A\colon\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ *будет регулярным тогда и только тогда, когда* $\forall l\exists l'\quad\forall s\cdot\exists s'$, *так что*

$$\|A\varphi\|_{(l')}^{(s)}\leqslant c\|\varphi\|_{(l)}^{(s')}\quad\forall\varphi\in H_{(l)}^{(\infty)}.$$

Пространство $\mathcal{O}'$ мы снабдим топологией индуктивного предела $\bigcap_l H_{(l)}^{(-\infty)}$. Окрестностями в $\mathcal{O}'$ будут множества вида $U_l\cap\mathcal{O}'$, где U_l — окрестность в $H_{(l)}^{(-\infty)}$. Множество $B\subset\mathcal{O}'$ будет ограниченным, если $\forall l\in\mathbb{R}$ оно ограничено в $H_{(l)}^{(-\infty)}$. Так как $H_{(l)}^{(-\infty)}$ — регулярный индуктивный предел, то $\forall l\ \exists s=s(l)$, так что $B\subset\subset H_{(l)}^{(s(l))}$ и ограничено в этом пространстве. Таким образом, ограниченное множество в B задается двумя последовательностями $s(l)$, $K(l)$ такими, что

$$\|\varphi\|_{(l)}^{(s(l))}\leqslant K(l)\quad\forall\varphi\in B,\quad l\in\mathbb{R}.$$

Из определения топологии в $\mathcal{O}'$ следует, что $f_j\to 0$ в $\mathcal{O}'$ при $j\to\infty$, если $\forall l\ \exists s=s(l)$, так что $f_j\to 0$ в $H_{(l)}^{(s(l))}$. Действительно, по определению последовательность f_j попадает в любую окрестность нуля в $\mathcal{O}'$ и, следовательно, в любую окрестность нуля в $H_{(l)}^{(-\infty)}$. Таким образом, для любого $l\in\mathbb{R}$ $f_j\to 0$ в $H_{(l)}^{(-\infty)}$. Последнее означает, что для любого s подпоследовательность $\{f_j\} \cap \cap H^{(s)}_{(l)}$ сходится в $H^{(s)}_{(l)}$. Так как $H^{(-\infty)}_{(l)}$ — регулярный индуктивный предел, то для некоторого s_l имеем: $\{f_j\} \subset H^{(s_l)}_{(l)}$, т. е. $f_j \to 0$ в $H^{(s_l)}_{(l)}$.

Из приведенного описания сходимости в $\mathcal{O}'$ следует, что если $f_j \to f$ в $\mathcal{O}'$ и $\varphi \in \mathcal{O}$, то $(f_j, \varphi) \to (f, \varphi)$, т. е. топология в $\mathcal{O}'$ сильнее слабой топологии, индуцированной $\mathcal{O}$ в $\mathcal{O}'$.

Непрерывность оператора $A\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{O}'$ означает, что $\forall l$ и любой окрестности $U_l \subset H^{(-\infty)}_{(l)}$ можно подобрать l' и такую окрестность $U_{l'} \subset H^{(-\infty)}_{(l')}$, что $A(U_{l'} \cap \mathcal{O}') \subset U_l \cap \mathcal{O}'$. Это определение малоэффективно, и мы ограничимся рассмотрением более узкого класса операторов.

Линейный оператор $A\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ называется *регулярным*, если $\forall l\ \exists l'$, так что A является сужением на $H^{(-\infty)}_{(l')}$ некоторого оператора $A^l_{l'} \in \mathcal{L}\left(H^{(-\infty)}_{(l')}, H^{(-\infty)}_{(l)}\right)$. Модифицируя предложение 2 из п. 2.5, мы получим, что последнее включение имеет место тогда и только тогда, когда сужение $A^l_{l'}$ на $H^{(s)}_{(l')}$ является непрерывным оператором из $H^{(s)}_{(l')}$ в $H^{(s')}_{(l)}$, где $s' = s'(s, l)$. Из плотности $\mathcal{S}$ в любом $H^{(s)}_{(l)}$ вытекает

Предложение 2. *Пусть A_0: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ — линейный оператор, причем $\forall l\ \exists l'\ \forall s\ \exists s'$, так что справедливо неравенство*

$$\|A_0\varphi\|^{(s')}_{(l)} \leqslant c\|\varphi\|^{(s)}_{(l')} \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}. \tag{46}$$

Тогда A_0 является сужением на $\mathcal{S}$ регулярного оператора $A\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{O}'$.

Доказательство. В силу (46) при заданных s, l, s', l' A_0 продолжается до непрерывного оператора $A^{s'l}_{sl'} \in \mathcal{L}\left(H^{(s)}_{(l')}, H^{(s')}_{(l)}\right)$. При фиксированных l, l' операторы $A^{s'l}_{sl'}$ перестановочны с вложениями (31) и определяют оператор, действующий из шкалы $\{H^{(s)}_{(l)}, i^{\sigma l}_{sl}\}$ в шкалу $\{H^{(s)}_{(l')}, i^{\sigma l'}_{sl'}\}$. Из Дополнения к главе следует, что можно построить непрерывный оператор $A^l_{l'} \in \mathcal{L}\left(H^{(-\infty)}_{(l')}, H^{(-\infty)}_{(l)}\right)$, так что $A^{s'l}_{sl'}$ будет сужением этого оператора на $H^{(s)}_{(l')}$. Более того, операторы $A^l_{l'}$ согласованы с вложениями $H^{(-\infty)}_{(\lambda)} \to H^{(-\infty)}_{(\lambda')}$, $\lambda > \lambda'$ и, тем самым, определяют единый оператор A на проективном пределе $\mathcal{O}' = \bigcap H^{(-\infty)}_{(l)}$. Из способа построения A видно, что этот оператор регулярен.

Важным для дальнейшего свойством регулярных операторов на $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ является двойственность между ними.

Предложение 3. *Всякому регулярному оператору A: $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}'$ отвечает регулярный оператор B: $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$, так что*

$$(Af, \varphi) = (f, B\varphi) \quad \forall f \in \mathcal{O}',\ \forall\varphi \in \mathcal{O}. \tag{47}$$

Обратно, каждому регулярному оператору B: $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ отвечает регулярный оператор A: $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}'$, связанный с B равенством (47).

Доказательство. Оператор A: $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}'$ однозначно определяется семейством операторов (компонент) $A_{sl'}^{s'l} \in \mathcal{L}(H_{(l')}^{(s)}, H_{(l)}^{(s')})$, где s', l' определяются по s и l. Обозначим через $B_{s'l}^{sl'}$ оператор из $\mathcal{L}(H_{(l)}^{(s')}, H_{(l')}^{(s)})$, являющийся сопряженным к оператору $A_{-s,-l'}^{-s',-l}$ относительно двойственности (18). Полученные операторы $B_{s'l}^{sl'}$ являются компонентами регулярного оператора B: $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ (проверку этого факта мы оставляем читателю), причем выполнено (47).

Обратно, если B: $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ — регулярный оператор, а $B_{s'l}^{sl'}$ — отвечающие ему компоненты, то набор операторов $A_{sl'}^{s'l} = (B_{-s',-l}^{-s,-l'})^*$ определяет регулярный оператор A: $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}'$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 2 из п. 2.3. Мы далее будем считать, специально не оговаривая, что числа s, l принимают целые четные значения любого знака. Ввиду предложений 1 (ii), (ii′) из п. 2.3 левая оценка (20) эквивалентна ограниченности оператора

$$A_{sl} = (1+|D|^2)^{s/2}(1+|x|^2)^{l/2}(1+|D|^2)^{-s/2}(1+|x|^2)^{-l/2}: H \to H, \tag{48}$$

а правая оценка (20) эквивалентна ограниченности оператора

$$B_{sl} = (1+|x|^2)^{l/2}(1+|D|^2)^{s/2}(1+|x|^2)^{-l/2}(1+|D|^2)^{-s/2}: H \to H. \tag{49}$$

Между операторами (48), (49) имеют место соотношения сопряженности (относительно скалярного произведения в H)

$$A_{sl} = (B_{-s,-l})', \qquad B_{sl} = (A_{-s,-l})' \tag{50}$$

и соотношения двойственности относительно преобразования Фурье (вытекающие из определения п. д. о.)

$$\mathcal{F}A_{sl} = B_{ls}, \qquad \mathcal{F}B_{ls} = A_{sl}. \tag{51}$$

Ввиду (50), (51), если мы доказали, что $A_{sl} \in \mathcal{L}(H, H)$, то тем самым уже доказано, что $B_{-s,-l}$; $B_{l,s}$; $A_{-l,-s} \in \mathcal{L}(H, H)$. Аналогично, из включения $B_{s,l} \in \mathcal{L}(H, H)$ следует, что $A_{-s,-l}$; $A_{l,s}$; $B_{-l,-s} \in \mathcal{L}(H, H)$.

В силу сказанного для доказательства ограниченности операторов (48), (49) для любых s, l, достаточно проверить, что

$$B_{sl} \in \mathcal{L}(H, H), \quad s \geqslant 0, \quad -\infty < l < \infty, \tag{52}$$

$$A_{sl} \in \mathcal{L}(H, H), \quad s \geqslant 0, \quad l \leqslant 0. \tag{53}$$

Включение (52) легко следует из формулы Лейбница дифференцирования произведения двух функций, записанной в форме Хёрмандера [1] (см. 1.4.12); если P — полином, то

$$P(D)(uv) = \sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u P^{(\alpha)}(D)v. \tag{54}$$

Доказательство (53) основано на модификации формулы (54)

$$uP(D)w = \sum \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D)(D^\alpha u \cdot w) \tag{55}$$

и лемме.

Лемма. *Если $\lambda(\xi) \in \mathcal{M}$, а $Q(x)$ — полином, то*

$$\lambda(D)(Qv) = \sum \frac{1}{\alpha!} Q^{(\alpha)}(x)\lambda^{(\alpha)}(D)v, \; v \in \mathcal{S}. \tag{56}$$

§ 3. Свертка в пространствах умеренных распределений

Если f, g — непрерывные функции, а при всяком $x \in \mathbb{R}^n$ функции (от y) $f(x-y)g(y)$ и $f(y)g(x-y)$ абсолютно интегрируемы, то для них определена классическая операция свертки

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy = \int f(y)\, g(x-y)\, dy, \tag{1}$$

причем $f * g = g * f$, т. е. эта операция коммутативна. В этом параграфе мы, прежде всего, уточним оценки свертки (1) для шкалы $\{C_{(l)}^{(m)}\}$. В частности, мы приведем достаточные условия на числа m_j, l_j, $j = 1, 2, 3$, при которых свертка определена для $f \in C_{(l_1)}^{(m_1)}$, $g \in C_{(l_2)}^{(m_2)}$ и принадлежит $C_{(l_3)}^{(m_3)}$.

Далее мы определим свертку некоторых умеренных распределений, пользуясь тем, что они являются дифференциальными операторами от функций из $C_{(\lambda)}$. Определенная таким образом свертка сохраняет свойство перестановочности с дифференциальными операторами. Именно, мы определим свертку $f * g$ для $f \in \mathscr{S}'$, $g \in \mathscr{O}'$ и покажем, что она получается продолжением по непрерывности классической свертки, определенной, скажем, на $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$.

Для разных подпространств $\Phi_1 \subset \mathscr{S}'$ и $\Phi_2 \subset \mathscr{O}'$ мы выясним, к какому подпространству $\Phi_3 \subset \mathscr{S}'$ принадлежит свертка $f * g$, $f \in \Phi_1$, $g \in \Phi_2$, т. е. установим включение вида $\Phi_1 * \Phi_2 \subset \Phi_3$.

В последней части параграфа мы изучим свойство оператора свертки с распределениями из $\mathscr{O}'$.

Чтобы не загромождать изложение, ряд вспомогательных утверждений мы вынесли в Приложение.

3.1. Свертка в шкале $C_{(l)}^{(m)}$.

Предложение 1. *Пусть* $f \in C_{(l)}^{(k)}$ *и* $g \in C_{(\lambda)}^{(m)}$. *Тогда при* $l > |\lambda| + n$ *определена свертка* $f * g = g * f \in C_{(\lambda)}^{(m+k)}$ *и*

$$|f * g|_{(\lambda)}^{(k+m)} \leqslant c(k, m, \lambda, l, n)\, |f|_{(l)}^{(k)}\, |g|_{(\lambda)}^{(m)}. \tag{2}$$

Далее, если $|\alpha| \leqslant k$ *и* $|\beta| \leqslant m$, *то*

$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = D^{\alpha} f * D^{\beta} g. \tag{3}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай $k = m = 0$. Согласно определению нормы в $C_{(l)}$

$$|f(z)| < (1 + |z|^2)^{-l/2} |f|_{(l)}, \quad |g(z)| < (1 + |z|^2)^{-\lambda/2} |g|_{(\lambda)},$$

откуда

$$|(f * g)(x)| \leqslant |f|_{(l)}\, |g|_{(\lambda)} \int (1 + |x - y|^2)^{-\lambda/2} (1 + |y|^2)^{-l/2} dy. \tag{4}$$

Оценим правый интеграл в (4). Согласно неравенству (2) из приложения

$$(1 + |x - y|^2)^{-\lambda/2} \leqslant 2^{|\lambda|/2} (1 + |y|^2)^{|\lambda|/2} (1 + |x|^2)^{-\lambda/2},$$

откуда при $l > |\lambda| + n$

$$\int (1+|x-y|^2)^{-\lambda/2}(1+|y|^2)^{-l/2}dy \leqslant$$

$$\leqslant 2^{|\lambda|/2}(1+|x|^2)^{-\lambda/2}\int (1+|y|^2)^{-(l-|\lambda|)/2}dy =$$

$$= \mathrm{const}\cdot(1+|x|^2)^{-\lambda/2}.$$

Подставляя эту оценку в (4), мы получим (2) для $k=m=0$.

2) Если формула (3) доказана, то, оценивая правую часть с помощью оценок (2), доказанных в случае $k=m=0$, мы получим (2) в общем случае.

3) Согласно 1) свертка в правой части (3) определена для любых α, β, если $|\alpha| \leqslant k$, $|\beta| \leqslant m$, и интеграл в правой части абсолютно сходится. Отсюда вытекает дифференцируемость левой части и законность дифференцирования под знаком интеграла. Применяя к правому интегралу (1) оператор D_x^α и интегрируя по частям, получим

$$D^\alpha(f*g)(x) = D_x^\alpha \int f(x-y)\,g(y)\,dy = \int (D^\alpha f)(x-y)\,g(y)\,dy =$$

$$= \int \left(D^\alpha f\right)(y)\,g(x-y)\,dy.$$

Полученное выражение можно дифференцировать $|\beta| \leqslant m$ раз под знаком интеграла. В результате мы получим равенства (3).

В предложении 1 мы доказали, что если одна из функций, скажем f, имеет степенной рост (убывание), а другая g достаточно быстро убывает, то свертка $f*g$ имеет степенной рост (убывание) того же порядка, что и f. Что касается гладкости свертки, то она не менее суммы гладкостей фигурирующих в свертке функций. Если одна из функций f, g бесконечно дифференцируемая, то этим же свойством обладает и свертка. Итак, имеет место

Следствие. *Справедливы включения*

$$\mathcal{O}*\mathcal{S}\subset\mathcal{O},\quad \mathcal{S}*\mathcal{O}\subset\mathcal{O},\quad \mathcal{S}*\mathcal{S}\subset\mathcal{S}. \tag{5}$$

Отметим свойство ассоциативности свертки.

Предложение 2. *Пусть* $f_i \in C_{(l_i)}$, $i=1, 2, 3$, *причем*, $l_2 > |l_1| + n$ *и* $l_3 > |l_2| + n$. *Тогда*

$$f_1*(f_2*f_3) = (f_1*f_2)*f_3. \tag{6}$$

Доказательство. Ввиду предложения 1 все свертки в (6) имеют смысл, а все фигурирующие в них интегралы абсолютно сходятся. Согласно (1) равенство (6) означает, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\int f_1(x-y)\Big(\int f_2(y-z)\,f_3(z)\,dz\Big)dy = \int\Big(\int f_1(x-y-z)\,f_2(z)\,dz\Big)f_3(y)dy.$$

С помощью теоремы Фубини мы можем повторные интегралы заменить двойными. Делая в правом интеграле замену $y \to y-z$, получим (6).

Нам понадобится также вариант предложения 1, когда одно из пространств берется из гельдеровской шкалы, а другое — из гильбертовой.

Предложение 1'. *Пусть* $f \in \dot{C}^{(k)}_{(l)}$, $g \in H^{(m)}_{(\lambda)}$. *Тогда при* $l > |\lambda| + n$ *определена свертка* $f * g = g * f \in H^{(m+k)}_{(l)}$; *для нее справедливы равенства* (3) *и*

$$\|f * g\|^{(k+m)}_{(\lambda)} \leqslant c'(k, m, l, n) |f|^{(k)}_{(l)} \|g\|^{(m)}_{(\lambda)}. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k = m = 0$ и положим $g(y) = (1 + |y|^2)^{-\lambda/2} g_0(y)$, $g_0 \in H$. Тогда

$$(1 + |x|^2)^{\lambda/2} |(f * g)(x)| \leqslant \int K(x, y) |g_0(y)| \, dy \, |f|_{(l)},$$

где

$$K(x, y) = (1 + |x|^2)^{\lambda/2} (1 + |y|^2)^{-\lambda/2} (1 + |x - y|^2)^{-l/2}. \tag{8}$$

Ввиду оценок п. 1 приложения и условия предложения

$$K(x, y) \leqslant \text{const} \cdot (1 + |x - y|)^{-l+|\lambda|} \overset{\text{def}}{=} h(x - y), \quad h \in L_1.$$

Воспользовавшись частным случаем известного неравенства Юнга (см., например, Стейн, Вейс [1], теорема 1.3 гл. I)

$$\|h * \varphi\|_{L_p} \leqslant \|h\|_{L_1} \|\varphi\|_{L_p}, \quad p \geqslant 1, \tag{9}$$

мы получим, что

$$\|f * g\|_{(\lambda)} \leqslant |f|_{(l)} \|h * g_0\| \leqslant \|h\|_{L_1} |f|_{(l)} \|g_0\| = \text{const} \cdot |f|_{(l)} \|g\|_{(\lambda)},$$

т. е. неравенство (7) доказано для $k = m = 0$.

Если $g \in C^{(m)}_{(\lambda')}$, $\lambda' > \lambda + n$, то ввиду предложения 1 имеют место равенства (3). Применяя к ним оценку (7), доказанную для $k = m = 0$, мы получим оценку для произвольных k и m для $g \in C^{(m)}_{(\lambda')} \subset H^{(m)}_{(\lambda)}$. Теперь остается воспользоваться плотностью $C^{(m)}_{(\lambda')}$ в $H^{(m)}_{(\lambda)}$.

Следствие. *Для любого* $l \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\mathcal{S} * H^{(\infty)}_{(l)} \subset H^{(\infty)}_{(l)}. \tag{10}$$

3.2. Свертка умеренных распределений. Основным результатом этого параграфа является

Предложение 1. *Операция свертки, первоначально определенная на плотном подмножестве* $\mathcal{O} \times \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \times \mathcal{O}'$, *по непрерывности продолжается до отображения* $\mathcal{S}' \times \mathcal{O}'$ *в* $\mathcal{S}'$. *Получившаяся операция коммутирует с дифференцированием, т. е. для всех* α, β *имеют место равенства* (3).

Доказательство. Прежде всего мы дадим конструктивное определение свертки для $f \in \mathcal{S}'$ и $g \in \mathcal{O}'$. Из свойств пространства $\mathcal{S}'$ следует, что можно подобрать такие λ_0 и целое $k_0 \geqslant 0$, что $(1 + |D|^\lambda)^{-k} f \in C_{(\lambda)}$ при $\lambda \leqslant \lambda_0$ и целом $k \geqslant k_0$ (см. (2.35')).

Аналогично, (см. (2.43)) по заданному l можно подобрать целое $m(l)\geqslant 0$ так, чтобы $(1+|D|^2)^{-m}g\in C_{(l)}$, $m\geqslant m(l)$. Далее мы будем считать, что l достаточно велико, т. е. $l>|\lambda|+n$. Положим

$$f*g=(1+|D|^2)^{k+m}(f_0*g_0), \tag{11}$$

где

$$f=(1+|D|^2)^k f_0,\quad g=(1+|D|^2)^m g_0,\quad k\geqslant k_0,\quad m\geqslant m(l). \tag{11'}$$

Чтобы принять (11) за определение свертки между $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{O}'$, мы покажем, что:

(a) определение корректно, т. е. правая часть (11) зависит от f, g, но не зависит от выбора чисел k, m в представлении (11');

(b) в случае обычных функций (скажем, $f\in C_{(\lambda)}$, $g\in C_{(l)}$ и $l>|\lambda|+n$) свертка (11) совпадает с классической сверткой (1).

Для доказательства (a) достаточно проверить, что правая часть не изменится при замене k на k' при фиксированном m или замене m на m' при фиксированном k. Пусть $f=(1+|D|^2)^{k'}f_0'$ и, для определенности, $k'>k$. Тогда $f_0=(1+|D|^2)^{k'-k}f_0'$, а в силу предложения 1 из п. 3.1 $f_0*g_0=(1+|D|^2)^{k'-k}(f_0'*g_0)$. Подставляя в (11) получим, что левая часть не изменится при замене k и f_0 на k' и f_0'.

Если в (11) $f\in C_{(\lambda)}$, $g\in C_{(l)}$, то ввиду (a) можно положить $k=m=0$, т. е. придем к определению (1).

Теперь мы проверим, что

(c) $\quad\{f_j\to f$ в $\mathcal{S}'$, $g_j\to g$ в $\mathcal{O}'\}\Rightarrow\{f_j*g_j\to f*g$ в $\mathcal{S}'\}$,

т. е. свертка (11) определяет секвенциально непрерывное отображение $\mathcal{S}'\times\mathcal{O}'$ в $\mathcal{S}'$.

Из определения сходимости в $\mathcal{S}'$ следует, что можно подобрать такое целое k, что для некоторого λ

$$f_{0j}=(1+|D|^2)^{-k}f_j\to(1+|D|^2)^{-k}f=f_0 \text{ в } C_{(\lambda)}.$$

Аналогично, для заданного $l>|\lambda|+n$ можно подобрать такое m, что

$$g_{0j}=(1+|D|^2)^{-m}g_j\to(1+|D|^2)^{-m}f=g_0 \text{ в } C_{(l)}.$$

Так как k, m целые, то с учетом равенств (3) получим

$$f_j*g_j=(1+|D|^2)^k f_{0j}*(1+|D|^2)^m g_{0j}=(1+|D|^2)^{k+m}(f_{0j}*g_{0j}).$$

Согласно предложению 1 из п. 3.1 последовательность $f_{0j}*g_{0j}$ будет сходиться в $C_{(\lambda)}$, откуда следует сходимость f_j*g_j в $\mathcal{S}'$.

Проверим теперь равенства (3) для свертки $f\in\mathcal{S}'$, $g\in\mathcal{O}'$. Пусть α, β — произвольные мультииндексы, а k, m выбраны таким образом, чтобы

$$(1+|D|^2)^{-k}D^\alpha f\in C_{(\lambda)},\quad (1+|D|^2)^{-m}D^\beta g\in C_{(l)},\quad l>|\lambda|+n.$$

Тогда, в силу равенств (3) и перестановочности п. д. о. с дифференциальными операторами, получим из (11)

$$D^{\alpha+\beta}(f*g)=(1+|D|^2)^{k+m}D^{\alpha+\beta}((1+|D|^2)^{-k}f*(1+|D|^2)^{-m}g)=$$
$$=(1+|D|^2)^{k+m}((1+|D|^2)^{-k}D^\alpha f*(1+|D|^2)^{-m}D^\beta g)=D^\alpha f*D^\beta g.$$

Замечания. 1) Дословным повторением рассуждения предложения доказывается, что свертка с $\mathscr{S}\times\mathcal{O}$ по непрерывности продолжается на $\mathcal{O}'\times\mathscr{S}'$, эта операция перестановочна с дифференцированием (т. е. выполнены равенства (3)) и

$$f * g = g * f, \quad f \in \mathscr{S}', \mathcal{O}'. \tag{12}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\mathscr{S}' * \mathcal{O}' \subset \mathscr{S}', \quad \mathcal{O}' * \mathscr{S}' \subset \mathscr{S}'. \tag{13}$$

2) В определении свертки (11) участвовали градуирующие операторы $(1+|D|^2)^s$. Можно определить свертку, используя другие семейства таких операторов, скажем, можно взять операторы $\left(1+D_1^{2k_1}+\ldots+D_n^{2k_n}\right)^s$, где $k_1, \ldots, k_n$ — натуральные числа. Из последней части доказательства предложения 1 фактически следует, что наше определение свертки не зависит от выбора семейства градуирующих операторов.

Операция (13) определяет свертку между подпространствами пространств $\mathscr{S}'$ и $\mathcal{O}'$.

Предложение 2. *Для* $\Phi = \mathcal{O}', \mathcal{O}, \mathscr{S}, \quad C_{(l)}^{(\infty)}, H_{(l)}^{(\pm\infty)}$ *справедливы включения*

$$\mathcal{O}' * \Phi \subset \Phi. \tag{14}$$

Далее, имеем

$$\mathscr{S}' * \mathscr{S} \subset \mathcal{O}. \tag{15}$$

Указанные операции свертки можно получить из (5), (10) *с помощью продолжения по непрерывности.*

Доказательство. Так как $\mathcal{O}' \subset \mathscr{S}'$, то для $f, g \in \mathcal{O}'$ определена операция свертки с помощью (11), где $f_0 \in C_{(\lambda)}$, $g_0 \in C_{(l)}$, $l > |\lambda| + n + 1$, причем можно взять произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$, откуда следует (14) для $\Phi = \mathcal{O}'$.

Если $f \in \mathscr{S}'$ и $g \in \mathscr{S}$, то согласно предложению 1 из п. 3.1 $(1+|D|^2)^{-k} f * g \in C_{(\lambda)}^{(\infty)}$, если $(1+|D|^2)^{-k} f \in C_{(\lambda)}$. Но тогда согласно (11)

$$\begin{aligned} f*g &= (1+|D|^2)^k \left((1+|D|^2)^{-k} f * g\right) = \\ &= (1+|D|^2)^{-k} f * (1+|D|^2)^k g \in C_{(\lambda)}^{(\infty)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Для доказательства (14) при $\Phi = \mathscr{S}, \mathcal{O}$ надо воспользоваться равенством (16), считая, что $g \in C_{(\lambda)}^{(\infty)}$ и $(1+|D|^2)^{-k} f \in C_{(l)}$, $l > |\lambda| + n$. Если λ фиксированно, получаем (14) для $\Phi = \mathcal{O}$. Если λ можно считать произвольным, то приходим к (14) для $\Phi = \mathscr{S}$. Случай $\Phi = H_{(l)}^{(\pm\infty)}$ получается из определения (11) с учетом предложения 1' из п. 3.1.

В заключение отметим свойства ассоциативности свертки умеренных распределений, вытекающие из предложения 1 п. 3.1 и коммутативности свертки.

Лемма. *Пусть выполнено одно из двух условий:*

(i) $f \in \mathcal{S}', \; g \in \mathcal{O}', \; \varphi \in \mathcal{O}',$

(ii) $f \in \mathcal{O}, \; g \in \mathcal{O}', \; \varphi \in \mathcal{S}'.$

Тогда имеют место равенства

$$f*(g*\varphi)=g*(f*\varphi)=(f*g)*\varphi. \tag{17}$$

Для доказательства (17) надо аппроксимировать f, g, φ гладкими функциями, применить равенства (6) и воспользоваться предложениями 1 и 2.

3.3. Операторы свертки с распределениями из $\mathcal{O}'$. В предыдущем пункте мы определили операцию свертки на целом ряде пространств (см. (14)). Справедливо

Предложение 1. (i) *Оператор*

$$\mathrm{con}_f\colon\ \Phi \to \Phi, f \in \mathcal{O}' \ (\varphi \to f*\varphi) \tag{18}$$

является непрерывным при $\Phi=\mathcal{S}, \mathcal{S}', H_{(l)}^{(+\infty)}, C_{(l)}^{(\infty)}$ *и регулярным при* $\Phi=\mathcal{O}, \mathcal{O}'$.

(ii) *Операторы*

$$\mathrm{con}_f\colon\ \mathcal{S}' \to \mathcal{O} \quad (\varphi \mapsto f*\varphi, f\in \mathcal{S}),$$

$$\mathrm{con}_f\colon\ \mathcal{O}' \to \mathcal{O} \quad (\varphi \to f*\varphi, f\in \mathcal{O})$$

переводят ограниченные множества в $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$ в регулярно ограниченные множества в $\mathcal{O}$ и, следовательно, сходящиеся последовательности в $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$ в регулярно сходящиеся в $\mathcal{O}$.

Все утверждения предложения 1 являются следствием предложения 1.4, предложений 1 из п. 1.6, 2 из п. 2.5, 2 из п. 2.6 и следующей леммы.

Лемма. *Пусть* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, *причем* $\lambda=\min(l_1, l_2)$ *и* $|\lambda|+n< <\max(l_1, l_2)$. *Тогда справедливы оценки*

$$|f*g|_{(\lambda)}^{(m)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\left|(1+|D|^2)^{-k} f\right|_{(l_1)} |g|_{(l_2)}^{(2k+m)}, \tag{19}$$

$$\|f*g\|_{\lambda}^{(2s)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\left|(1+|D|^2)^{-k} f\right|_{(l_1)} \|g\|_{(l_2)}^{(2s+2k)}, \quad s \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

где f и g такие распределения, для которых правая часть (19), (20) *имеет смысл*, $m, k \in \mathbb{Z}_+$, $s+k>0$.

Доказательство. Неравенство (19) является непосредственным следствием равенства (16) и предложения 1 из п. 3.1.

Для доказательства (20) выберем столь большое целое $m>0$, чтобы $s+m \geqslant 0$. Тогда согласно (11)

$$(1+|D|^2)^s f*g=(1+|D|^2)^{s+m}\left((1+|D|^2)^{-k} f*(1+|D|^2)^{-m+k} g\right).$$

Заметим, что согласно условиям леммы $(1+|D|^2)^{-k} f \in C_{(l_1)}$, а $(1+|D|^2)^{-m+k} g \in H_{(l_2)}^{(s+2m)}$, т. е. мы находимся в условиях применимости предложения 1' из п. 3.1. Действуя дифференциальным оператором $(1+|D|^2)^{s+m}$ на вторую функцию в правой части, получим

$$(1+|D|^2)^s(f*g)=(1+|D|^2)^{-k}f*(1+|D|^2)^{s+k}g.$$

Применяя оценку (7), мы получим (20).

Предложение 2. (i) *$\mathcal{O}'$ является коммутативной алгеброй относительно свертки (определенной в предложении* 1 *из п.* 3.2));

(ii) *$\mathcal{S}$ — идеал алгебры $\mathcal{O}'$*;

(iii) *отображение* $f\mapsto \operatorname{con}_f$: $\Phi\to\Phi$, $f\in\mathcal{O}'$, *является отображением алгебры $\mathcal{O}'$ в алгебру непрерывных отображений Φ в Φ для $\Phi=\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ и в алгебру регулярных отображений Φ в Φ для $\Phi=\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$.*

Доказательство. Утверждения (i), (ii) непосредственно следуют из (14), (17) и (12). Что касается (iii), то согласно лемме 3.2 (ii) для f, $g\in\mathcal{O}'$ и $\forall\varphi\in\mathcal{S},\mathcal{O},\mathcal{S}'.\mathcal{O}'$

$$\operatorname{con}_f\operatorname{con}_g\varphi\overset{\text{def}}{=}f*(g*\varphi)=(f*g)*\varphi\overset{\text{def}}{=}\operatorname{con}_{f*g}\varphi,$$

т. е.

$$\operatorname{con}_f\operatorname{con}_g=\operatorname{con}_{f*g}. \tag{21}$$

Известна тесная связь в классическом случае между операциями свертки и преобразованием Фурье. А именно, если f, $g\in L_1$, то

$$(\mathcal{F}(f*g))(\xi)=(2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}f)(\xi)(\mathcal{F}g)(\xi). \tag{22}$$

Поясним доказательство этого равенства. Так как $f*g\in L_1$, то в левой части стоит абсолютно сходящийся интеграл

$$(2\pi)^{-n/2}\int\exp(-i\langle x,\xi\rangle)\left(\int f(x-y)g(y)\,dy\right)dx.$$

Поскольку интегралы по x и y абсолютно сходятся, то можно поменять местами порядки интегрирования. Таким образом, наш интеграл равен

$$\int\exp(-i\langle y,\xi\rangle)g(y)(2\pi)^{-n/2}\int\exp(-i\langle x-y,\xi\rangle)f(x-y)\,dx\,dy,$$

т. е. имеет место (22).

Равенство (22) остается в силе и в том случае, когда f, $g\in\mathcal{O}'$. В самом деле, определим $f*g$ с помощью (11), где m и k выбраны столь большими, что для некоторого $l>n$ имеем: f_0, $g_0\in C_{(l)}\subset L_1$. Тогда, с учетом (22),

$$(\mathcal{F}(f*g))(\xi)=(1+|\xi|^2)^{k+m}\widehat{f}_0(\xi)\widehat{g}_0(\xi)=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Предложение 3. (i). *Равенство $\mathcal{F}\mathcal{O}'=\mathcal{M}$ является изоморфизмом алгебр (напомним, что $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра относительно умножения).*

(ii) *Оператор* con_f: $\Phi\to\Phi$, $f\in\mathcal{O}'$, $\Phi=\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, *является п. д. о. с символом* $(2\pi)^{n/2}\widehat{f}(\xi)$, *т. е.*

$$\operatorname{con}_f=(2\pi)^{n/2}\widehat{f}(D)\quad\forall f\in\mathcal{O}'. \tag{23}$$

Согласно определению дельта-функции Дирака $\delta(x)$

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = (2\pi)^{-n/2} \int \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n/2}(1, \widehat{\varphi}),$$

т. е. $\widehat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}$, откуда $\widehat{\delta} \in \mathscr{M}$, т. е. $\delta(x) \in \mathscr{O}'$. Из (22) следует, что $\delta(x)$ является единицей кольца $\mathscr{O}'$:

$$f * \delta = \delta * f = f$$

для $f \in \mathscr{O}'$. По непрерывности это равенство продолжается на $\mathscr{S}'$, т. е. оператор con_δ: $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ является тождественным.

Отметим, что если $h \in \mathbb{R}^n$, то, скажем, для $\varphi \in \mathscr{S}$

$$(\delta(x-h), \varphi(x)) = \varphi(h) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle h, \xi\rangle} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом, преобразование Фурье $\delta(x-h)$ равно $(2\pi)^{-n/2} \times$ $\times \exp(i\langle h, \xi\rangle)$, так что

$$\mathrm{con}_{\delta(x-h)} = (2\pi)^{-n/2} \exp(i\langle h, D\rangle). \tag{24}$$

3.4. Дополнительные замечания о свертке распределений с основными функциями. Каждому вектору $h \in \mathbb{R}^n$ сопоставим оператор сдвига

$$(T_h\varphi)(x) = \varphi(x+h). \tag{25}$$

Очевидно, что операторы (25) образуют коммутативную группу, изоморфную $\mathbb{R}^n$. Из результатов Приложения следует, что оператор $\Phi \to \Phi\,(\varphi(x) \mapsto \varphi(x+h))$, при $\Phi = C_{(l)}^{(m)}, C_{(l)}^{(\infty)}, \mathscr{S}$ будет непрерывным, а при $\Phi = \mathscr{O}$ — регулярным. Из определения преобразования Фурье следует (ср. доказательство (22)), что

$$\left(\widehat{T_h\varphi}\right)(\xi) = \exp(-i\langle h, \xi\rangle)\, \widehat{\varphi}(\xi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Сравнивая с (24), мы получим, что оператор (25) на $\mathscr{S}$ совпадает с п. д. о. (24).

Для функций из $\mathscr{S}$

$$(T_h\varphi, \psi) = \int \varphi(x+h)\psi(x)\, dx = \int \varphi(x)\psi(x-h)\, dx = (\varphi, T_{-h}\psi).$$

Исходя из этого равенства, можно определить сдвиг на $\mathscr{S}'$. Сужение этого оператора на $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$ будет совпадать с оператором (25). Оператор сдвига на $\mathscr{S}'$ будет п. д. о. (24).

Используя оператор сдвига, правый интеграл в (1) можно переписать в виде $\int f(y)(IT_x g)(y)\, dy$, т. е. свертка (1) может быть определена с помощью равенства

$$(f * \varphi)(x) = (f, IT_x\varphi). \tag{26}$$

Если $\varphi \in \Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}$, то $IT_x\varphi \in \Phi$, и правая часть имеет смысл для любого распределения $f \in \Phi'$.

С другой стороны, левая часть согласно п. 3.2 также определена для $f \in \Phi'$ (и принадлежит $\mathscr{O}$).

Предложение 1. *Пусть* $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}$. *Тогда для* $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$ *имеет место равенство* (26) (*т. е. правая часть* (26) *может служить определением свертки на* $\Phi' \times \Phi$).

Доказательство. Как мы уже отметили, равенство (26) на гладких функциях вытекает из определения (1). В общем случае аппроксимируем $f \in \mathcal{S}', \mathcal{O}'$ последовательностью гладких функций. Так как топология в $\mathcal{S}', \mathcal{O}'$ сильнее топологии сходимости на каждом элементе $\varphi \in \mathcal{S}, \mathcal{O}$, то при фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$

$$(f_j, IT_x\varphi) \to (f, IT_x\varphi) \text{ при } f_j \to f \text{ в } \Phi'.$$

С другой стороны, согласно предложению 2 (ii) из п. 3.3 последовательность $(f_j * \varphi)(x)$ является регулярно сходящейся в $\mathcal{O}$, т. е. для некоторого l она сходится в $C_{(l)}^{(\infty)}$ и заведомо сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.

Предложение 2. (i) *Пусть* $f \in \mathcal{O}'$ *и* $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}$. *Тогда операторы*

$$\mathrm{con}_f\colon \Phi \to \Phi, \quad \mathrm{con}_{If}\colon \Phi' \to \Phi'$$

сопряжены друг другу относительно канонической двойственности между Φ *и* Φ'.

(ii) *Пусть* $f \in \mathcal{S}'$, *тогда операторы*

$$\mathrm{con}_f\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{S}', \quad \mathrm{con}_{If}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{O}$$

сопряжены друг другу.

Доказательство. Оба утверждения являются следствием равенства

$$(f * g, \varphi) = (g, If * \varphi), \tag{27}$$

где либо

(i) $\qquad f \in \mathcal{O}', \quad g \in \mathcal{S}', \mathcal{O}', \quad \varphi \in \mathcal{S}, \mathcal{O},$

либо

(ii) $\qquad f \in \mathcal{S}', \quad g \in \mathcal{O}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$

Случай (ii) следует из (i) ввиду (12). Для доказательства (27) в случае (i) прежде всего отметим полезную формулу, которая получается, если в (26) положить $x = 0$:

$$(f, \varphi) = (f * I\varphi)(0).$$

Применяя лемму 3.2, получим

$$(f * g, \varphi) = ((f * g) * I\varphi)(0) = (g * (f * I\varphi))(0).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Прежде всего приведем элементарные неравенства, которые используются при оценке свертки.

Лемма 1. *Для любых* $x, h \in \mathbb{R}^n$ *и* $\forall s \in \mathbb{R}$

$$(1 + |x + h|)^s \leqslant (1 + |h|)^{|s|}(1 + |x|)^s, \tag{1}$$

$$(1 + |x + h|^2)^s \leqslant 2^{|s|}(1 + |h|^2)^{|s|}(1 + |x|^2)^s. \tag{2}$$

Доказательство. Неравенства (1) и (2) являются автоматическими следствиями неравенств

$$(1') \quad (1+|h|)^{-1}(1+|x|) \leqslant 1+|x+h| \leqslant (1+|x|)(1+|h|),$$

$$(2') \quad \frac{1}{2}(1+|h|^2)^{-1}(1+|x|^2) < 1+|x+h|^2) \leqslant 2(1+|h|^2)(1+|x|^2).$$

Правое неравенство (1′) следует из неравенства треугольника

$$1+|x+h| < 1+|x|+|h| < (1+|x|)(1+|h|),$$

левое неравенство (1′) получается из правого, если в последнем заменить x на $x-h$, а затем h на $-h$. Аналогично левое неравенство (2) выводится из правого. Последнее вытекает из неравенств

$$2(1+|h|^2)(1+|x|^2)-1-|x+h|^2 > 1+|x-h|^2+|x|^2|h|^2 > 0.$$

Лемма 2. *Оператор сдвига*

$$C_{(l)}^{(m)} \to C_{(l)}^{(m)} \quad (\varphi(x) \mapsto (T_z\varphi)(x) = \varphi(x+z))$$

непрерывен, а его норма не превосходит $2^{|l|/2}(1+|z|^2)^{|l|}$.

Доказательство. Согласно определению нормы в $C_{(l)}^{(m)}$

$$T_z\varphi| = \sup_{|\alpha|\leqslant m, x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{l/2}|D^\alpha\varphi(x+z)| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi|_{(l)}^{(m)} \sup_x (1+|x|^2)^{l/2}(1+|x+z|^2)^{-l/2},$$

и остается воспользоваться правым неравенством (2).

Из доказанной леммы следует, что оператор

$$T_z\colon \Phi \to \Phi \tag{3}$$

при $\Phi = \mathcal{S}$, $C_{(l)}^{(m)}$ будет непрерывным, а при $\Phi = \mathcal{O}$ — регулярным.

Как уже отмечалось в п. 3.3, оператор T_z является псевдодифференциальным с символом $\exp(-i\langle z, \xi\rangle)$, равным по модулю единице. Отсюда вытекает изометричность этого оператора в любом $H^{(s)}$.

Повторяя рассуждения леммы 2, докажем оценку

$$'\|T_z\varphi\|_{(l)}^{(s)} = \|(1+|x|^2)^{l/2}T_z(1+|D|^2)^{s/2}\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{|s|/2}(1+|z|^2)^{l/2}\|\varphi\|_{(l)}^{(s)}. \tag{4}$$

Из этой оценки вытекает непрерывность (3) для $\Phi = H_{(l)}^{(\pm\infty)}$, $\mathcal{S}'$ и регулярность для $\Phi = \mathcal{O}'$.

Обозначим через $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, n$, единичные координатные векторы. Рассмотрим разностные операторы

$$\Delta_{j,h} = (T_{he_j} - 1)/h, \; j = 1, \ldots, n.$$

Предложение. (i) *Пусть* $m \geqslant 2$. *Справедлива оценка*

$$\left|\Delta_{j,h}\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|_{(l)}^{(m-2)} \leqslant \mathrm{const}\cdot|h||\varphi|_{(l)}^{(m)} \quad \forall\varphi\in C_{(l)}^{(m)}. \tag{5}$$

(ii) *Для любого* $s \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$'\left\|\Delta_{j,h}\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|_{(l)}^{(s-2)} \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|\|\varphi\|_{(l)}^{(s)} \quad \forall\varphi\in H_{(l)}^{(s)}. \tag{6}$$

Доказательство. Неравенство (5) следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\left(T_{he_j}\varphi\right)(x) = \varphi(x) + h\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi(\tilde{x})}{\partial x_j^2},$$

где $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \theta h, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $|\theta| < 1$.

Что касается (6), то заметим, что $\Delta_{j,h} - \frac{\partial}{\partial x_j}$ является п. д. о. с символом $\left(e^{ih\xi_j} - 1 - ih\xi_j\right)/h$, который ввиду формулы Тейлора не превосходит $|h|\,|\xi_j|^2/2$.

§ 4. Сверточные уравнения в пространствах гладких функций и умеренных распределений на $\mathbb{R}^n$

Хорошо известна связь операции свертки с группой сдвигов в $\mathbb{R}^n$. Эта связь становится еще более полной в рамках свертки распределений. Как отмечалось в п. 3.3, оператор con_f: $\Phi \to \Phi$ непрерывен при $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{S}'$, регулярен при $\Phi = \mathcal{O}, \mathcal{O}'$ и коммутирует со сдвигами. Перечисленные свойства полностью характеризуют этот оператор. В первой половине параграфа будет доказано, что всякий непрерывный (регулярный) оператор на $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, перестановочный со сдвигами, является сверткой с распределением из $\mathcal{O}'$.

Далее мы рассмотрим сверточное уравнение $A * \varphi = f$, где $A \in \mathcal{O}'$. Будет доказано, что разрешимость этого уравнения на $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$ эквивалентна обратимости распределения A в алгебре $\mathcal{O}'$; последнее условие формулируется в терминах оценки снизу для символа $\widehat{A}$. Параграф заканчивается обсуждением вопросов разрешимости сверточных уравнений в шкалах пространств $\{H_{(l)}^{(s)}\}$ и $\{C_{(l)}^{(m)}\}$.

4.1. Операторы свертки. Непрерывный (регулярный) оператор A: $\Phi \to \Phi$, $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{S}'$ $(\Phi = \mathcal{O}, \mathcal{O}')$, перестановочный со сдвигами, называется *оператором свертки* на Φ.

Теорема. *Пусть $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, \mathcal{S}', \mathcal{O}'$. Для каждого оператора свертки A: $\Phi \to \Phi$ найдется такое распределение $f \in \mathcal{O}'$, что*

$$A\varphi = \mathrm{con}_f\,\varphi = f*\varphi \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{1}$$

В частности, каждый оператор свертки на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{O}$ представляется в форме (3.26):

$$(A\varphi)(x) = (f, IT_x\varphi) \quad \forall\varphi \in \Phi, f \in \mathcal{O}'. \tag{2}$$

Мы начнем с доказательства того, что каждый оператор свертки на $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ можно представить в виде (2), и укажем функционал f.

Предложение 1. *Пусть $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}$. Для каждого оператора свертки A: $\Phi \to \Phi$ найдется такое распределение $f \in \Phi'$, что A представляется в виде* (2).

Доказательство. Сопоставим оператору A семейство линейных функционалов

$$(f_x, IT_x\varphi)=(A\varphi)(x). \tag{2'}$$

Так как операторы I и T_x взаимно однозначно отображают $\mathscr{S}$, $\mathscr{O}$ в себя, то функционал (2′) определен на всем пространстве Φ. Предложение будет доказано, если мы покажем, что

(i) f_x — непрерывный линейный функционал, т. е. $f_x \in \Phi'$;

(ii) функционал f_x не зависит от x: $f_x = f \in \Phi'$.

Для доказательства (i) заметим, что топологии в $\mathscr{S}$ и $\mathscr{O}$ сильнее топологии поточечной сходимости, а оператор A: $\Phi \to \Phi$ непрерывен (непрерывность A: $\mathscr{O} \to \mathscr{O}$ следует из регулярности A в силу замечания 1.6).

(ii) вытекает из перестановочности A со сдвигами. В самом деле, при $\psi \in \Phi$

$$(f_x, \psi) = (f_x, IT_xT_{-x}I\psi) \overset{\text{def}}{=} (AT_{-x}I\psi)(x) = T_{-x}(AI\psi)(x) = (AI\psi)(0).$$

Отметим, что из предложения следует справедливость теоремы в случае $\Phi = \mathscr{O}$; что касается $\Phi = \mathscr{S}$, то теорема теперь редуцируется к следующему утверждению:

$$\{f \in \mathscr{S}', f*\varphi \in \mathscr{S} \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}\} \Rightarrow \{f \in \mathscr{O}'\}. \tag{3}$$

Замечание. При доказательстве предложения 1 мы фактически установили, что всякий непрерывный оператор A: $\mathscr{O} \to \mathscr{O}$, перестановочный со сдвигами, представляется в виде (2). Но тогда согласно предложению 1 (ii) из п. 3.3 он будет регулярным. Таким образом, непрерывный оператор на $\mathscr{O}$, перестановочный со сдвигами, является оператором свертки.

Пусть Φ — некоторое пространство гладких функций, инвариантное относительно сдвигов и отражений. Формула (2) позволяет определить свертку для $f \in \Phi'$ и $\varphi \in \Phi$. Распределение $f \in \Phi'$ называется *свертывателем*, если $f*\varphi \in \Phi \quad \forall \varphi \in \Phi$. *Совокупность свертывателей обозначим через* $\mathfrak{C}(\Phi)$.

В предложении 4.1 мы фактически доказали, что если топология в Φ сильнее топологии поточечной сходимости, то каждому оператору свертки на Φ (т. е. непрерывному оператору, перестановочному со сдвигами) отвечает свертыватель и имеет место (2).[1]

Обратно, если $f \in \mathfrak{C}(\Phi)$, то можно рассмотреть оператор con_f, определенный на всем Φ и переводящий Φ в себя. Если для

---

[1]) Если топология (секвенциальная) в Φ сильнее топологии поточечной сходимости, то (2) определяет замкнутый оператор. Действительно, если $\varphi_j \to \varphi$, $\psi_j = f_j * \varphi_j \to \psi$ в топологии Φ, то $\psi_j(x^0) \to \psi(x^0)$ для $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$. С другой стороны, так как f — непрерывный функционал в Φ', то $(f, IT_{x^0}\varphi_j) \to (f, IT_{x^0}\varphi)$, т. е. $(f*\varphi)(x^0) = \psi(x^0)$. Так как x^0 — произвольная точка $\mathbb{R}^n$, то $f*\varphi = \psi$.

пространства Φ справедлива теорема Банаха о замкнутом графике, то оператор con_f будет непрерывным и, следовательно, оператором свертки. Теорема о замкнутом графике верна для пространств Фреше и их индуктивных пределов (см. Иосида [1], Бурбаки [1], Эдвардс [1]) и, следовательно, для $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ (отметим, что для $\Phi = \mathcal{O}$ мы этой теоремой не пользуемся). Таким образом, в случае $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ теорема означает, что

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}', \quad \mathfrak{C}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'. \tag{4}$$

Второе равенство (4) уже доказано, а согласно (3.14) $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{C}(\mathcal{S})$, т. е. для доказательства (4) достаточно проверить, что

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{O}'. \tag{4'}$$

Предложение 2. (i) *Каждый оператор свертки* A_0: $\Phi \to \Phi$ ($\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$) *по непрерывности продолжается до оператора свертки* A: $\Psi \to \Psi$, *где* $\Psi = \mathcal{O}'$, $\mathcal{S}'$ *соответственно.*

(ii) *Пусть* A: $\Psi \to \Psi$ ($\Psi = \mathcal{O}'$, $\mathcal{S}'$) — *оператор свертки. Тогда его сужение* A_0 *на подпространство* $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ *является оператором свертки на* Φ.

Прежде чем доказывать предложение, закончим доказательство теоремы.

Пусть A: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ — оператор свертки. Тогда (предложение 1) $A\varphi = f * \varphi$, $f \in \mathcal{S}'$ и $f * \varphi \in \mathcal{O}'$ $\forall \varphi \in \mathcal{O}'$ (предложение 2 (i)). Так как $\delta(x) \in \mathcal{O}'$, то $f = f * \delta \in \mathcal{O}'$.

Если A: $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}'$ — оператор свертки, то сужение A на $\mathcal{S}$ также будет оператором свертки (предложение 2 (ii)), т. е. $A\varphi = f * \varphi$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, причем $f \in \mathcal{O}'$. В силу предложения 1 из п. 3.2 непрерывное продолжение этого оператора на $\mathcal{O}'$ имеет вид (1).

Как уже отмечалось выше, представление (1) для $\Phi = \mathcal{O}$ следуют из предложения 1. Тогда из предложения 2 оно следует для $\Phi = \mathcal{S}'$.

Ввиду предложений 1 и 2 естественно положить

$$\mathfrak{C}(\mathcal{O}') = \mathfrak{C}(\mathcal{S}), \quad \mathfrak{C}(\mathcal{S}') = \mathfrak{C}(\mathcal{O}),$$

и равенства (4) приводят к цепочке равенств

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}) = \mathfrak{C}(\mathcal{O}) = \mathfrak{C}(\mathcal{S}') = \mathfrak{C}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}'. \tag{5}$$

Доказательство предложения 2 (i). Если $\Phi = \mathcal{S}$, то согласно предложению 1 из п. 2.5 непрерывность $A = \mathrm{con}_f$, $f \in \mathcal{S}'$, означает, что $\forall s, l \quad \exists s' = s'(s, l), l' = l'(s, l)$, так что справедлива оценка

$$\|f * \varphi\|_{(l)}^{(s)} \leqslant K_{sl} \|\varphi\|_{(l')}^{(s')}. \tag{6}$$

В частности, при $s = 0$ получим оценку

$$\|f * \varphi\|_{(l)} \leqslant K_l \|\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(\sigma(l))}.$$

Заменяя φ на $(1 + |D|^2)^{s/2}\varphi$, получим (с учетом предложения 2 из п. 2.3)

$$\|f*(1+|D|^2)^{s/2}\varphi\|_{(l)}\leqslant K_l\|(1+|D|^2)^{s/2}\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(\sigma(l))}\leqslant$$
$$\leqslant K_l'\,'\|(1+|D|^2)^{s/2}\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(\sigma(l))}=K_l'\,'\|\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(s+\sigma(l))}\leqslant K_l''\|\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(s+\sigma(l))},$$

Как было отмечено в п. 3.4, п. д. о. с символами из $\mathscr{M}$ являются операторами свертки с распределениями из $\mathscr{O}'$, поэтому в силу (3.12)

$$K_l''\|\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(s+\sigma(l))}\geqslant\|(1+|D|^2)^{s/2}(f*\varphi)\|_{(l)}='\|f*\varphi\|_{(l)}^{(s)}.$$

Таким образом, мы показали, что из (6) следует оценка

$$\|f*\varphi\|_{(l)}^{(s)}\leqslant\text{const}\cdot\|\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(s+\sigma(l))}\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}$$

или, заменяя s на $s-\sigma(l)$, получим

$$\|f*\varphi\|_{(l)}^{(s-\sigma(l))}\leqslant\text{const}\cdot\|\varphi\|_{(\lambda(l))}^{(s)}\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}.$$

Применяя предложение 2 из п. 2.6, мы получим, что оператор con_f продолжается до регулярного оператора на $\mathscr{O}'$.

Если $\Phi=\mathscr{O}$, то согласно предложению 1 $A=\mathrm{con}_f$, $f\in\mathscr{O}'$, и наше утверждение следует из предложения 1 п. 3.2.

(ii) Прежде всего покажем, что оператор свертки $A\colon\Psi\to\Psi$ коммутирует с п. д. о. $(1+|D|^2)^k$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$:

$$(1+|D|^2)^kA=A(1+|D|^2)^k,\ k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots\tag{7}$$

Для доказательства (7) заметим, что из перестановочности A со сдвигами T_z следует их перестановочность с операторами разностного дифференцирования:

$$\Delta_{h,j}A\varphi=A\Delta_{h,j}\varphi\quad\forall h\in\mathbb{R},\quad j=1,\ldots,n,\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}',\ \mathscr{O}'.$$

Переходя к пределу при $h\to0$ и пользуясь предложением из приложения к § 3, получим, что $AD_j=D_jA$. Отсюда вытекает перестановочность A с любыми дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами и, в частности, соотношения (7) для целых $k\geqslant0$. Так как операторы $(1+|D|^2)^{-k}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, являются обратными к $(1+|D|^2)^k$, $k\in\mathbb{Z}_+$, то соотношения (7) доказаны.

Из регулярности $A\colon\mathscr{O}'\to\mathscr{O}'$ следует, что $\forall l\ \exists l'\ \forall s\ \exists s'$, так что справедливы оценки

$$\|A\varphi\|_{(l)}^{(s')}\leqslant\text{const}\cdot\|\varphi\|_{(l')}^{(s)}$$

(здесь и ниже мы считаем, что s', s — целые четные числа). Аналогично, непрерывность $A\colon\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$ означает оценку: $\forall s,\ l\ \exists s',\ l$

$$\|A\varphi\|_{(l')}^{(s')}\leqslant\text{const}\cdot\|\varphi\|_{(l)}^{(s)}.$$

Используя соотношение (7), мы, как и выше, докажем, что $\exists\sigma(l)$, $\lambda(l)$, так что

$$s'=s+\sigma(l),\quad l'=\lambda(l),\tag{8}$$

откуда следуют оценки

$$\|A\varphi\|_{(l)}^{(s)} \leqslant \text{const} \cdot \|\varphi\|_{(l')}^{(s')} \quad \forall s,\ l \quad \exists s',\ l',$$

$$\|A\varphi\|_{(l')}^{(s)} \leqslant \text{const} \cdot \|\varphi\|_{(l)}^{(s')} \quad \forall l \exists l' \ \forall s \ \exists s',$$

означающие непрерывность (регулярность) сужения A на $\mathscr{S}$ (соответственно на $\mathscr{O}$).

Как отмечалось в § 2 (см. предложение 3 из п. 2.6), каждый непрерывный (регулярный) оператор B: $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ ($\mathscr{O}' \to \mathscr{O}'$) является сопряженным к непрерывному (регулярному) оператору A: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ ($\mathscr{O} \to \mathscr{O}$). Из перестановочности одного из этих операторов со сдвигами вытекает перестановочность сопряженного оператора. Таким образом, операторы свертки на $\mathscr{O}'$, $\mathscr{S}'$ будут сопряженными к операторам свертки на $\mathscr{O}$ и $\mathscr{S}$. Но тогда из предложения 1 следует, что каждый оператор свертки B: $\Phi' \to \Phi'$, $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, является сопряженным к оператору con_f, $f \in \mathfrak{C}(\Phi)$, т. е. (предложение 2 из п. 3.4) оператором $\text{con}_{\check{f}}$. Вообще, в случае пространств Φ, инвариантных относительно сдвигов и отражений и имеющих топологию более сильную, чем топология поточечной сходимости, естественно положить

$$\mathfrak{C}(\Phi') = \mathfrak{C}(\Phi).$$

С учетом соображений двойственности для доказательства теоремы вместо предложения 2 достаточно только доказать, что операторы свертки на $\mathscr{S}$ по непрерывности продолжаются до операторов свертки на $\mathscr{O}'$. Однако предложение 2 в полном объеме представляет и самостоятельный интерес.

В качестве следствия из теоремы можно получить описание мультипликаторов на $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$:

$$\mathfrak{M}(\mathscr{S}) = \mathfrak{M}(\mathscr{S}') = \mathscr{M}. \tag{9}$$

4.2. Сверточные уравнения.

Теорема. *Пусть $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}'$ и $A \in \mathfrak{C}(\Phi) = \mathscr{O}'$. Следующие условия эквивалентны*:

(I) *Для любого $f \in \Phi$ сверточное уравнение*

$$A * u = f \tag{10}$$

имеет единственное решение $u \in \Phi$.

(II) *Уравнение* (10) *имеет фундаментальное решение $G \in \in \mathfrak{C}(\Phi) = \mathscr{O}'$*:

$$A * G = G * A = \delta(x). \tag{11}$$

Доказательство. (I)$\Rightarrow$(II). Для случая $\Phi = \mathscr{O}'$ это утверждение — тавтология, поскольку $\delta(x) \in \mathscr{O}'$. В случае $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}$ согласно теореме Банаха об обратном операторе, справедливой для пространств Фреше и их индуктивных пределов (Эдвардс [1], § 6, 7), условие (1) эквивалентно существованию непрерывного оператора

$$(\text{con}_A)^{-1}\colon \ \Phi \to \Phi, \ \Phi = \mathscr{S},\ \mathscr{S}',\ \mathscr{O}. \tag{12}$$

Так как оператор con_A коммутирует со сдвигами, то этим же свойством обладает оператор (12). Следовательно, $(\mathrm{con}_A)^{-1}$ — оператор свертки на $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}$ (в последнем случае надо воспользоваться замечанием 4.1). Согласно теореме 4.1 найдется такое $G \in \mathscr{O}'$, что $(\mathrm{con}_A)^{-1} = \mathrm{con}_G$.

По определению обратного оператора

$$(A * (G * f))(x) = (G * (A * f))(x) = f(x) \quad \forall f \in \mathscr{S}.$$

Полагая $x = 0$ и пользуясь леммой 3.2, получим

$$(A * G, If) = (G * A, If) = f(0) \quad \forall f \in \mathscr{S},$$

т. е. имеет место (11).

(II)$\Rightarrow$(I). Если $G \in \mathscr{O}'$ удовлетворяет (11), то $G * f$ является решением уравнения (10), поскольку $A * (G * f) = (A * G) * f = \delta * f = f$. Далее, если $A * u = 0$, то $0 = G * (A * u) = (G * A) * u = \delta * u = u$, т. е. уравнение (10) имеет не более одного решения.

Оператор con_A, $A \in \mathscr{O}'$, имеет *символ* $\widehat{A}(\xi) \in \mathscr{M}$, а условие (II) эквивалентно условию:

($\widehat{\mathrm{II}}$). *Найдутся такие константы* $c > 0$ *и* μ, *что*

$$|\widehat{A}(\xi)| > c(1 + |\xi|)^{\mu} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

В самом деле, согласно п. 3.3 условие (II) эквивалентно условию

$$\widehat{A}^{-1}(\xi) \in \mathscr{M}. \tag{14}$$

Лемма. *Для функции* $\widehat{A}(\xi) \in \mathscr{M}$ *включение* (14) *выполняется тогда и только тогда, когда выполнено условие* (13).

Доказательство. Необходимость (13) очевидна; достаточность следует из правила дифференцирования сложной функции

$$D^{\alpha}\widehat{A}^{-1}(\xi) = \sum c^{\alpha}_{\gamma^1 \dots \gamma^k} D^{\gamma^1}\widehat{A}(\xi) \dots D^{\gamma^k}\widehat{A}(\xi) \cdot \widehat{A}^{-k-1}(\xi),$$

где $\gamma^1, \dots, \gamma^k$ — мультииндексы, $\gamma^1 + \dots + \gamma^k = \alpha$, $c^{\alpha}_{\gamma^1 \dots \gamma^k}$ — константы.

4.3. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Из (13) следует более слабое условие

$$\widehat{A}(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

необходимое для однозначной разрешимости уравнения (10). Это условие, вообще говоря, не является достаточным, поскольку символ $\widehat{A}(\xi) \in \mathscr{M}$, удовлетворяющий (15), может при $|\xi| \to \infty$ стремиться к нулю быстрее любой степени. Однако если оператор con_A дифференциальный, т. е. $A(x) = P(D)\delta(x)$, где $P(\xi)$ — полином, т. е. $\widehat{A}(\xi) = P(\xi)$, то согласно теореме Тарского — Зайденберга (см., например, Хёрмандер [1], Приложение) $\widehat{A}(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ не быстрее некоторой степени $|\xi|$, т. е. с учетом (15) выполняется условие ($\widehat{\mathrm{II}}$). Таким образом, доказана

Теорема. *Дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами*

$$P(D)u = f$$

однозначно разрешимо на $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$ *тогда и только тогда, когда его символ* $P(\xi)$ *отличен от нуля на всем* $\mathbb{R}^n$.

4.4. Некоторые варианты теорем 4.2 и 4.3. В условиях теоремы 4.2 оператор con_A: $\Phi \to \Phi$, $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, имеет обратный, который непрерывен при $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ и регулярен при $\Phi = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$. Расшифровывая условия непрерывности (регулярности) этого оператора с помощью предложений 1, 2 из п. 2.5 (или 1.4), 1 из п. 2.6 (или из п. 1.6) и 2 из п. 2.6, мы получим, что в число эквивалентных условий теоремы 4.2 можно включить условия:

($\mathrm{I_a}$) $\forall s, l\ \exists s', l'$, *так что уравнение* (10) $\forall f \in H^{(s')}_{(l')}$ (*или* $C^{(s')}_{(l')}$) *имеет единственное решение* $u \in H^{(s)}_{(l)}$ (*соответственно* $u \in C^{(s)}_{(l)}$).

($\mathrm{I_b}$) $\forall s, l\ \exists s', l'$, *так что уравнение* (10) $\forall f \in H^{(s)}_{(l)}$ *имеет единственное решение* $u \in H^{(s')}_{(l')}$.

($\mathrm{I_c}$) $\forall l\ \exists l'\ \forall s\ \exists s'$, *так что уравнение* (10) $\forall f \in H^{(s')}_{(l)}$ (*или* $C^{(s')}_{(l)}$) *имеет единственное решение* $u \in H^{(s)}_{(l')}$ (*соответственно* $C^{(s)}_{(l')}$).

($\mathrm{I_d}$) $\forall l\ \exists l'\ \forall s\ \exists s'$, *так что уравнение* (10) $\forall f \in H^{(s)}_{(l')}$ *имеет единственное решение* $u \in H^{(s')}_{(l)}$

Из перестановочности оператора con_A, $A \in \mathcal{O}'$, с семейством п. д. о. $(1 + |D|^2)^{s/2}$ (ср. предложение 2 из п. 4.1) следует, что если утверждения ($\mathrm{I_a}$) — ($\mathrm{I_d}$) выполнены для всех $l \in \mathbb{R}$ и некоторого $s = \bar{s}$, то они справедливы для всех s, причем s' и l' выражаются через s, l по формулам (8).

Таким образом, в число эквивалентных условий теоремы 4.2 можно включить условия,

($\mathrm{I_{ad}}$) $\forall l\ \exists \sigma(l), \lambda(l)$, *так что уравнение* (10) $\forall f \in H^{(s+\sigma(l))}_{(\lambda(l))}$ *имеет единственное решение* $u \in H^{(s)}_{(l)}$.

($\mathrm{I_{bc}}$) $\forall l\ \exists \sigma(l), \lambda(l)$, *так что уравнение* (10) $\forall f \in H^{(s)}_{(l)}$ *имеет единственное решение* $u \in H^{(s-\sigma(l))}_{(\lambda(l))}$.

Отметим, что из (I_{ad}) следуют условия (I_a), (I_d), а из (I_{bc}) следуют условия (I_b) и (I_c).

Наконец, из непрерывности оператора con_G, $G \in \mathcal{O}$, в любом $H^{(\infty)}_{(l)}$ следует условие более сильное, чем (I_{ad}) и (I_{bc})

($\mathrm{I_e}$) $\forall l\ \exists \sigma(l)$, *так что уравнение* (10) $\forall f \in H^{(s+\sigma(l))}_{(l)}$ (*или* $C^{(s+\sigma(l))}_{(l)}$) *имеет единственное решение* $u \in H^{(s)}_{(l)}$ (*или* $C^{(s)}_{(l)}$)

Теорему 4.2 можно переформулировать как некоторое утверждение о разрешимости сверточного уравнения в шкале пространств.

Введем шкалу $\mathbb{H}_{(l)} = \{H^{(s)}_{(l)}, i^{s'}_s\}$, где $i^{s'}_s$: $H^{(s)}_{(l)} \to H^{(s')}_{(l)}$, $s' < s$, — вложения. Каждому распределению $A \in \mathcal{O}'$ отвечает оператор конечного порядка [1])

$$\mathrm{con}_A\colon \mathbb{H}_{(l)} \to \mathbb{H}_{(l)} \quad \forall l \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{O}'$. Оператор* (16) *для любого $l \in \mathbb{R}$ имеет обратный конечного порядка тогда и только тогда, когда выполнено условие* (13).

Доказательство. Если выполнено (13), то существует $G \in \mathcal{O}'$, связанное с A соотношением (11). Распределению G отвечает оператор

$$\mathrm{con}_G\colon \mathbb{H}_{(l)} \to \mathbb{H}_{(l)} \quad \forall l \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

причем композиции (16) и (17) будут тождественными операторами конечного порядка (см. Дополнение).

Обратно, если оператор (16) имеет обратный конечного порядка, то выполнено условие (I_e), откуда и следует (13).

4.5. Общие замечания. В этой главе мы столкнулись с ситуацией, которая еще не раз повторится в различных (и более сложных) контекстах. Она состоит в том, что в некотором функциональном пространстве Φ имеется определение свертывателей (конструктивное или аксиоматическое через условие инвариантности) и при этом оказывается, что пространство свертывателей $\mathfrak{C}(\Phi)$ можно достаточно эффективно описать. Далее, разрешимость уравнения в свертках оказывается равносильной существованию фундаментального решения, являющегося свертывателем. Благодаря имеющемуся описанию свертывателей (и особенно их фурье-образов), упомянутое выше условие разрешимости становится эффективным. При этом теорема Зайденберга — Тарского позволяет в случае дифференциального оператора упростить условие благодаря тому, что необходимые степенные оценки будут выполнены автоматически.

В описанных выше результатах проявилось важное обстоятельство: разрешимость сверточных уравнений в шкалах и в «предельных» пространствах (т. е. в $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$) равносильны.

§ 5. Пространства $\mathcal{S}_{[\omega]}$ и связанные с ними шкалы

5.1. Если Φ — одно из рассмотренных в § 1, 2 пространств функций (распределений) на $\mathbb{R}^n$, а $\omega \in \mathbb{R}^n$, то через $\Phi_{[\omega]}$ обозначим пространство функций (распределений) вида

$$\Phi_{[\omega]} = \{u = \exp\langle -\omega, x\rangle \varphi,\ \varphi \in \Phi\}, \tag{1}$$

снабженное индуцированной топологией. Если Φ — нормированное пространство, то в $\Phi_{[\omega]}$ определена естественная норма

$$|u, \Phi_{[\omega]}| \overset{\text{def}}{=} |\exp\langle \omega, x\rangle u, \Phi|. \tag{2}$$

---

[1]) Оператор $A\colon \mathbb{H}_{(l)} \to \mathbb{H}_{(l)}$ называется оператором конечного порядка, если найдется такое $d \in \mathbb{R}$, что $\forall s \in \mathbb{R}$ и $\forall s' \leqslant s - d$ определены (непрерывные) компоненты $A_s^{s'}\colon H_{(l)}^{(s)} \to H_{(l)}^{(s')}$ этого оператора.

Если Φ' — сопряженное пространство к Φ, то двойственность (f, φ), $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, индуцирует двойственность между $\Phi_{[\omega]}$ и $(\Phi')_{[-\omega]}$, так что

$$(\Phi_{[\omega]})' = (\Phi')_{[-\omega]}. \tag{3}$$

Согласно (1), (3) мы имеем определение $\Phi_{[\omega]}$ для $\Phi = C_{(l)}^{(m)}$, $H_{(l)}^{(s)}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$ $\mathcal{O}'$. Расшифровав определения проективного и индуктивного предела, нетрудно показать, что переход к проективному и индуктивному пределу коммутирует с умножением на $\exp\langle\omega, x\rangle$, поэтому если в выражениях для пространств $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$ мы заменим $C_{(l)}^{(m)}$ или $H_{(l)}^{(s)}$ соответственно на $C_{(l)[\omega]}^{(m)}$, $H_{(l)[\omega]}^{(s)}$, то получим соответствующие представления для пространств $\mathcal{S}_{[\omega]}$, $\mathcal{O}_{[\omega]}$, $(\mathcal{S}')_{[\omega]}$, $(\mathcal{O}')_{[\omega]}$.

5.2. Из определения (3.1) свертки гладких функций следует, что если для f и g формула (3.1) имеет смысл, то она имеет смысл и для $\exp\langle\omega, x\rangle f$ и $\exp\langle\omega, x\rangle g$, причем

$$(\exp\langle\omega, x\rangle f) * (\exp\langle\omega, x\rangle g) = \exp\langle\omega, x\rangle (f * g). \tag{4}$$

Из этого равенства вытекает, что если пространства Φ_i, $i = 1, 2, 3$, таковы, что $\Phi_1 * \Phi_2 \subset \Phi_3$ (например, это тройки пространств из (3.5), (3.10), (3.14), (3.15)), то имеет место включение

$$\Phi_{1[\omega]} * \Phi_{2[\omega]} \subset \Phi_{3[\omega]}. \tag{5}$$

Теорема 4.1 останется в силе при замене $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{S}_{[\omega]}, \ldots, (\mathcal{O}')_{[\omega]}$, так что

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}_{[\omega]}) = \mathfrak{C}(\mathcal{O}_{[\omega]}) = \mathfrak{C}((\mathcal{O}')_{[\omega]}) = \mathfrak{C}((\mathcal{S}')_{[\omega]}) = \mathcal{O}'_{[\omega]}. \tag{6}$$

5.3. В связи с преобразованием Фурье рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ точек $\zeta = \xi + i\omega$ и реализуем $\mathbb{R}_\xi^n$ как подпространство $\{\operatorname{Im}\zeta = 0\}$ в $\mathbb{C}^n$.

С $\omega \in \mathbb{R}^n$ свяжем комплексное преобразование Фурье (Лапласа)

$$\widehat{\varphi}(\xi + i\omega) = (\mathcal{F}_\omega\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp(-i\langle\xi + i\omega, x\rangle)\,\varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Для оператора (7) можно написать формулу обращения

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp(i\langle\xi + i\omega, x\rangle)\,\widehat{\varphi}(\xi + i\omega)\,d\xi. \tag{7'}$$

В силу (7)

$$(\xi + i\omega)^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}(\xi + i\omega) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}(-i)^{|\beta|} \int \exp(-i\langle\xi, x\rangle) \exp\langle x, \omega\rangle\, x^\beta D^\alpha \varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Аналогично, $x^\beta D^\alpha \varphi(x)$ по формуле обращения (7′) выражается через левую часть (8).

На преобразование (7) естественным образом переносится равенство Парсеваля

$$(\varphi, \psi) = (\mathscr{F}_\omega \varphi, I\mathscr{F}_{-\omega}\varphi), \tag{9}$$

где справа стоит интеграл по $\mathbb{R}^{n+i\omega}$.

В связи с преобразованием Фурье (7) мы будем рассматривать пространства $\Psi^{[\omega]}$ функций $\psi(\zeta)$, определенных на подпространстве $\operatorname{Im}\zeta = \omega$ и таких, что функции $\psi_\omega(\xi) = \psi(\xi + i\omega)$ принадлежат Ψ (ω играет роль параметра). Соответствующим образом определи пространства $\mathscr{S}^{[\omega]}$, $\mathscr{M}^{[\omega]}$, причем

$$\mathscr{S}^{[\omega]} = \bigcap_{m,l} C_{(l)}^{(m)[\omega]}, \quad \mathscr{M}^{[\omega]} = \bigcap_{m} \bigcup_{l} C_{(l)}^{(m)[\omega]}.$$

Преобразование Фурье устанавливает изоморфизмы

$$\mathscr{F}_\omega \mathscr{S}_{[\omega]} = \mathscr{S}^{[\omega]}, \quad \mathscr{F}_\omega (\mathscr{O}')_{[\omega]} = \mathscr{M}^{[\omega]}. \tag{10}$$

Пространство $\mathscr{M}^{[\omega]}$ является кольцом мультипликаторов на пространстве $\mathscr{S}^{[\omega]}$:

$$\mathfrak{M}(\mathscr{S}^{[\omega]}) = \mathscr{M}^{[\omega]}. \tag{11}$$

Для пространств $\Phi_{[\omega]}$, $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}'$, имеет место аналог теоремы 4.2. В частности, дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $P(D)u = f$ разрешимо в этих пространствах тогда и только тогда, когда

$$P(\xi + i\omega) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Опираясь на преобразование Фурье (7) и (7′) можно определить псевдодифференциальные операторы, действующие на пространствах типа $\Phi_{[\omega]}$:

$${}_{[\omega]}a(D)\varphi = (2\pi)^{-n/2} \int \exp(i\langle \xi + i\omega, x\rangle)\, a(\xi + i\omega)\, \widehat{\varphi}(\xi + i\omega)\, d\xi. \tag{12}$$

В частности, если $a(\xi + i\omega) \in \mathscr{M}$, то с учетом (11) оператор (12) будет переводить в себя пространство $\mathscr{S}_{[\omega]}$.

5.4. В дальнейших главах нам придется иметь дело с пересечениями пространств $\Phi_{[\omega]}$, отвечающих различным $\omega \in \mathbb{R}^n$. Если Φ — пространство обычных функций, то одновременная принадлежность функции к $\Phi_{[\omega_j]}$, $j = 1, 2$, имеет естественный смысл. Пусть Φ — пространство распределений, скажем, $\Phi = \Psi'$, где Ψ — пространство гладких функций. В этом случае мы будем иметь дело с пространствами линейных непрерывных функционалов над $\Psi_{[-\omega_j]}$, $j = 1, 2$. Предположим, для определенности, что эти пространства содержат $\mathscr{D}$ в качестве плотного подмножества (так будет для $\Psi = H_{(-l)}^{(-s)}$, т. е. $\Phi = H_{(l)}^{(s)}$). Тогда мы определим $\Phi_{[\omega_1]} \cap \Phi_{[\omega_2]}$ как совокупность таких $f \in \mathscr{D}'$, которые по непрерывности продолжаются как на $\Psi_{[-\omega_1]}$, так и на $\Psi_{[-\omega_2]}$.

Остановимся на вопросе о действии п. д. о. на пересечениях пространств $\Phi_{[\omega]}$. Формулу (12) удобно переписать в виде

$$_{[\omega]}a(D)\varphi = \exp\langle -\omega,\ x\rangle a(D+i\omega)\exp\langle\omega,\ x\rangle\varphi, \tag{13}$$

где $a(D+i\omega)$ — обычный п. д. о. (зависящий от ω как от параметра). Если оператор $a(D+i\omega)$ при $\omega=\omega_1$, ω_2 переводит пространство Φ в себя, то операторы $_{[\omega_j]}a(D)$, $j=1, 2$, переводят в себя пространства $\Phi_{[\omega_j]}$. Возникает естественный вопрос о согласованности этих операторов на пересечении; верно ли, что

$$_{[\omega_1]}a(D)\varphi = {}_{[\omega_2]}a(D)\varphi \quad \forall\varphi\in\Phi_{[\omega_1]}\cap\Phi_{[\omega_2]}?. \tag{14}$$

Ввиду определения пересечения пространств $\Phi_{[\omega]}$ равенство (14) означает, что

$$_{[-\omega_1]}a(-D)\psi = {}_{[-\omega_2]}a(-D)\psi \quad \forall\psi\in\mathcal{D}. \tag{15}$$

Для символов общего вида равенства (15) не обязаны выполняться. Однако при естественных предположениях о голоморфности символа равенства (15) будут выполнены.

Выберем переменные таким образом, чтобы векторы ω_1 и ω_2 различались только первой компонентой, т. е. будем считать, что $\omega_1=(\gamma',\ \omega')$, $\omega_2=(\gamma'',\ \omega')$, где $\gamma'\leqslant\gamma''$ и $\omega'=(0,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)$. Соответственно будем писать $\xi=(\xi_1,\ \xi')$, $x=(x_1,\ x')$.

Лемма. *Пусть символ* $a(-\xi_1-i\rho,\ -\xi'-i\omega')$ *при фиксированных* ρ, ω' *растет не быстрее степени* $|\xi|$ *при* $|\xi|\to\infty$, *непрерывен при* $\gamma'\leqslant\rho\leqslant\gamma''$ *и голоморфен по* $\xi_1+i\rho$ *при* $\gamma'<\rho<\gamma''$. *Тогда имеет место равенство* (15).

Доказательство. Так как преобразование Фурье $\widehat{\varphi}(\xi+i\omega)$ функции $\varphi\in\mathcal{D}$ голоморфно по всем переменным и убывает быстрее любой степени $|\xi|$, то (15) является равенством абсолютно сходящихся интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp(i\langle\xi'-i\omega',x'\rangle)\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(-\xi_1-i\gamma',-\xi'-i\omega')\widehat{\varphi}(\xi_1-i\gamma',\xi'-$$
$$-i\omega')\exp(i(\xi_1-\gamma')x_1)\,d\xi_1\,d\xi' =$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(-\xi_1-i\gamma'',\ -\xi'-i\omega')\widehat{\varphi}(\xi_1-i\gamma'',\xi'-i\omega')\,d\xi_1\,d\xi'.$$

Применяя к внутреннему интегралу теорему Коши, придем к равенству (15)

В дальнейшем если символ п. д. о. удовлетворяет условиям леммы, то в обозначении (12) мы будем опускать индекс ω.

5.5. В гл. II нам понадобятся оценки операторов Фурье и операторов вложения для шкал $C^{(m)}_{(l)[\omega]}$, $H^{(s)}_{(l)[\omega]}$, при этом для нас будет важно, что константы в этих оценках не зависят от ω. Подобные оценки удается получить не в нормах (2), а в эквивалентных нормах (константы эквивалентности зависят от ω).

В частности, для целых m, l мы будем рассматривать нормы

$$|\varphi|_{(l)[\omega]}^{(m)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n |\alpha|\leqslant m} \exp\langle\omega, x\rangle (1+|x|^2)^{l/2} |D^\alpha\varphi(x)|, \qquad (16)$$

$$|\varphi|_{(l)}^{(m)[\omega]} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leqslant m} (1+|\xi+i\omega|^{l/2} |\partial^\alpha\varphi(\xi+i\omega)|, \qquad (17)$$

и аналогичные интегральные нормы

$$\|\varphi\|_{(l)[\omega]}^{(m)} = \left(\int \exp(2\langle\omega, x\rangle)(1+|x|^2)^l \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad (18)$$

$$\|\varphi\|_{(l)}^{(m)[\omega]} = \int (1+|\xi+i\omega|^2)^l \sum_{|\alpha|\leqslant m} |\partial^\alpha\varphi(\xi+i\omega)|^2 d\xi\Big)^{1/2}. \qquad (19)$$

Дословно повторяя рассуждения леммы 1.7 применительно к преобразованию Фурье (7), мы получим неравенства Парсеваля для шкалы $C_{(l)[\omega]}^{(m)}$:

$$|\widehat{\varphi}|_{(m)}^{(l)[\omega]} \leqslant c_{mln'} |\varphi|_{(l+n')[\omega]}^{(m)}, \quad n' > n, \ m, \ l, \ n' \in \mathbb{Z}_+; \qquad (20)$$

$$|\varphi|_{(l)[\omega]}^{(m)} \leqslant c'_{mlm'} |\widehat{\varphi}|_{(m+m')[\omega]}^{(l)}, \quad m' > n, \ m, \ l, \ m' \in \mathbb{Z}_+. \qquad (21)$$

Если к обеим частям (8) применить равенство Парсеваля, то получим

$$\int |(\xi+i\omega)^\alpha \partial^\beta\widehat{\varphi}(\xi+i\omega)|^2 d\xi = \int \exp(2\langle\omega, x\rangle) |x^\beta D^\alpha\varphi(x)|^2 dx. \quad (22)$$

Из равенств (22) для $\beta = 0$ вытекает изометричность оператора $H_{[\omega]}^{(m)} \to H^{(m)[\omega]}$ $(\varphi \mapsto \widehat{\varphi})$, т. е.

$$\|\varphi\|_{[\omega]}^{(m)} = \|\widehat{\varphi}\|_{(m)}^{[\omega]}. \qquad (22')$$

Заменяя в доказательстве теоремы 2.4 преобразование Фурье $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}_\omega$, несложно получить равномерные по ω оценки операторов вложения:

$$\|\varphi\|_{(l)[\omega]}^{(m)} \leqslant c_{ml\varkappa} |\varphi|_{(l+\varkappa)[\omega]}^{(m)}, \quad \varkappa > n/2, \qquad (23)$$

$$|\varphi|_{(l)[\omega]}^{(m)} \leqslant c'_{ml\varkappa} \|\varphi\|_{(l)[\omega]}^{(m+\varkappa)}. \qquad (24)$$

§ 6. Пространства функций, имеющих различную гладкость по разным переменным. Теоремы о ядре

Пусть переменные $x \in \mathbb{R}^n$ разбиты на две группы: $x = (x', x'')$, $x' \in \mathbb{R}^m$, $x'' \in \mathbb{R}^{n-m}$. В этом параграфе мы рассмотрим шкалы функциональных пространств, которые можно воспринимать как тензорные произведения пространств, изученных в § 1, 2. Построение теории таких пространств не требует новых соображений по сравнению с § 1, 2, поэтому мы ограничимся определениями и сводкой основных формул.

В условиях разбиения переменных на две группы появляется большее разнообразие в образовании предельных пространств с помощью операций проективного и индуктивного пределов. В частности, мы строим важное для дальнейшего пространство распределений $\mathscr{K}' \subset \mathscr{S}'$, элементы которого убывают по группе переменных быстрее любой степени, а по остальным переменным могут допускать степенной рост.

Распределения, в которых переменные разбиты на две группы, естественно возникают в различных вариантах теоремы Л. Шварца о ядре (см. Шварц [2], И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин [1]). В простейших ситуациях эта теорема утверждает, что произвольный непрерывный оператор из пространства Φ основных функций от переменных x' в некоторое пространство распределений Ψ' от переменных x'' задается ядром, являющимся распределением от переменных (x', x''). В конце параграфа мы приводим теорему о ядре для случая $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\Psi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-m})$, $\mathscr{O}(\mathbb{R}^{n-m})$. эта теорема используется в следующей главе.

6.1. Пространства $C_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)}$ состоят из функций $\varphi(x', x'')$, непрерывных вместе с производными $D_{x'}^{\alpha} D_{x''}^{\beta}\varphi$, $|\alpha| \leqslant m_1$, $|\beta| \leqslant \leqslant m_2$, и имеющих конечную норму

$$|\varphi|_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)} = \sup_{\substack{x' \in \mathbb{R}^m, x'' \in \mathbb{R}^{n-m} \\ |\alpha| \leqslant m_1, |\beta| \leqslant m_2}} (1 + |x'|^2)^{l_1/2} (1 + |x''|^2)^{l_2/2} \left| D_{x'}^{\alpha} D_{x''}^{\beta} \varphi \right|.$$

Эти пространства образуют 4-х параметрическую шкалу, проективный предел этой шкалы совпадает с $\mathscr{S} = C_{(\infty,\infty)}^{(\infty,\infty)}$.

Рассмотрим пространство

$$\mathscr{K} = \bigcup_{l_2} C_{(\infty,l_2)}^{(\infty,\infty)} = \bigcup_{l_2} \bigcap_{m_1,m_2,l_1} C_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)}. \tag{2}$$

Очевидно, что если $\varphi(x', x'') \in \mathscr{K}$, то при фиксированном x'' эта функция принадлежит $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, а при фиксированном x' она является элементом $\mathscr{O}(\mathbb{R}^{n-m})$. Имеют место вложения (с топологией):

$$\mathscr{S} \subset \mathscr{K} \subset \mathscr{O}.$$

6.2. Пространства $H_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)}$. Теперь мы построим шкалу гильбертовых пространств, эквивалентную шкале $\left\{C_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)}\right\}$. Заменяя в определениях пространств $H_{(l)}$ и $H^{(s)}$ вес $(1 + |x|^2)^{l/2}$ и п. д. с. $(1 + |D|^2)^{s/2}$ соответственно на $(1 + |x'|^2)^{l_1/2} (1 + |x''|)^{l_2/2}$ и $(1 + |D'|^2)^{s_1/2} (1 + |D''|^2)^{s_2/2}$ мы определим пространства $H_{(l_1,l_2}$, $H^{(s_1,s_2)}$ и снабдим их естественными нормами. Проводя аналогичные замены в определении пространств $H_{(l)}^{(s)}$ из п. 2.3, определим пространства

$$H_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)} = \left\{ f \in \mathscr{S}', (1 + |x'|^2)^{l_1/2} (1 + |x''|^2)^{l_2/2} f \in H^{(s_1,s_2)} \right\} \tag{3}$$

и снабдим их нормами

$$\|f\|_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)} = \|(1+|x'|^2)^{l_1/2}(1+|x''|^2)^{l_2/2} f\|^{(s_1,s_2)}. \tag{4}$$

Меняя местами операторы $(1+|x'|^2)^{l_1/2}(1+|x''|^2)^{l_2/2}$ и $(1+|D'|^2)^{s_1/2}(1+|D''|^2)^{s_2/2}$ в (3) и (4), определим пространства $'H_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)}$ и соответствующие нормы

$$'\|f\|_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)} = \|(1+|D'|^2)^{s_1/2}(1+|D''|^2)^{s_2/2} f\|_{(l_1,l_2)}. \tag{5}$$

Поскольку п. д. о. по переменным x' и x'' коммутируют с операторами умножения на функции от x'' (соответственно от x'), то из доказательства предложения 2 п. 2.3 следует эквивалентность норм (4) и (5) и, тем самым, совпадение соответствующих пространств (для которых мы сохраним обозначение (5)).

Для пространств (5) имеют место двойственности

$$\left(H_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)}\right)' = H_{(-l_1,-l_2)}^{(-s_1,-s_2)}. \tag{6}$$

На введенные пространства переносятся теоремы вложения п. 2.4:

$$C_{(l_1+\varkappa_1,l_2+\varkappa_2)}^{(m_1,m_2)} \subset H_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)}, \quad \varkappa_1 > \frac{m}{2}, \quad \varkappa_2 > \frac{n-m}{2}, \tag{7}$$

$$H_{(l_1,l_2)}^{(m_1+\varkappa_1,m_2+\varkappa_2)} \subset C_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)}, \quad \varkappa_1 > \frac{m}{2}, \quad \varkappa_2 > \frac{n-m}{2}. \tag{8}$$

В силу этих вложений в определениях пространств $\mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{K}$ можно заменить $C_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)}$ на $H_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)}$. Ввиду двойственностей (7) в определениях $\mathscr{S}'$ и $\mathscr{O}'$ пространства $H_{(l)}^{(s)}$ можно заменить на $H_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)}$. Положим

$$\mathscr{K}' = \bigcap_{l_2} H_{(-\infty,l_2)}^{(-\infty,\infty)} = \bigcap_{l_2} \bigcup_{s_1,s_2,l_1} H_{(l_1,l_2)}^{(s_1,s_2)}. \tag{9}$$

Пространство $\mathscr{K}'$ как векторное пространство совпадает с пространством линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{K}$. Что касается топологии, то мы снабдим $\mathscr{K}'$ топологией проективного предела пространств $H_{(-\infty,l_2)}^{(-\infty,-\infty)}$ (которые, в свою очередь, являются регулярными индуктивными пределами). Распределения из $\mathscr{K}'$ имеют конечный порядок, растут по x' не быстрее степени и убывают по x'' быстрее любой степени. Имеют место вложения (с топологией)

$$\mathscr{O}' \subset \mathscr{K}' \subset \mathscr{S}'.$$

6.3. Преобразование Фурье по группе переменных. Если $\varphi(x', x'') \in C_{(l_1,l_2)}^{(m_1,m_2)}$ и $l_2 > n - m$, то определено частичное преобразование Фурье функции φ по переменным x'':

$$(\mathcal{F}_{x''\to\xi''}\varphi)(x',\xi'') = (2\pi)^{-(n-m)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \exp(-i\langle\xi'', x''\rangle)\,\varphi(x',x'')\,dx'', \tag{10}$$

где $\xi=(\xi',\xi'')$ — разбиение двойственных переменных, т. е. $\xi'\in\mathbb{R}^m$, $\xi''\in\mathbb{R}^{n-m}$ и $\langle x,\xi\rangle=\langle x',\xi'\rangle+\langle x'',\xi''\rangle$. Аналогично при $l_1>m/2$ определяется частичное преобразование Фурье $(\mathcal{F}_{x'\to\xi'}\varphi)(\xi',x'')$.

Для частичного преобразования Фурье имеют место аналоги неравенств Парсеваля из п. 1.7, откуда следует изоморфизм

$$\mathcal{F}_{x''\to\xi''}\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n_{(x',x'')}\right) = \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n_{(x',\xi'')}\right). \tag{11}$$

По соображениям двойственности определяется частичное преобразование Фурье в $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, так что можно говорить о частичном преобразовании Фурье в пространствах (5). Из определения и эквивалентности этих пространств следует, что

$$\mathcal{F}_{x''\to\xi''}H^{(s_1,s_2)}_{(l_1,l_2)}\left(\mathbb{R}^n_{(x',x'')}\right) = H^{(s_1,l_2)}_{(l_1,s_2)}\left(\mathbb{R}^n_{(x',\xi'')}\right). \tag{12}$$

Следствием этих равенств является изоморфизм

$$\mathcal{F}_{x''\to\xi''}\mathcal{K}'\left(\mathbb{R}^n_{(x',x'')}\right) = \bigcap_{l_2} H^{(-\infty,l_2)}_{(-\infty,-\infty)}\left(\mathbb{R}^n_{(x',\xi'')}\right). \tag{13}$$

т. е. элементы левого пространства являются распределениями из $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$, зависящими от ξ'' как от параметра. С учетом вложений (7), (8) из (10) следует

Лемма. *Распределение $b\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n_{(x',\xi'')}\right)$ является частичным преобразованием Фурье по x'' распределения из $\mathcal{K}'\left(\mathbb{R}^n_x\right)$ тогда и только тогда, когда $\forall k\in\mathbb{Z}_+$ найдутся такие s, λ_1, λ_2, что*

$$(1+|D_{x'}|^2)^{-s/2}\,b\in C^{(0,k)}_{(\lambda_1,\lambda_2)}\left(\mathbb{R}^n_{(x',\xi'')}\right). \tag{14}$$

6.4. Теорема о ядре. Каждому распределению $a\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ можно сопоставить оператор

$$A\colon\ \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m_{x'}\right)\to\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}\right), \tag{15}$$

определяемый из равенства

$$(A\varphi,\psi) = (a,\varphi\psi)\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m_{x'}\right). \tag{16}$$

Здесь в левой части стоит значение функционала $A\varphi\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^{n-m}\right)$ на элементе $\psi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^{n-m}\right)$, а в правой части стоит значение функционала $a\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ на элементе $\varphi\psi\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)\times\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^{n-m}\right)\subset\subset\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Аналогично каждому $a \in \mathscr{K}'$ можно сопоставить оператор

$$A\colon \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^m_{x'}\right) \to \mathscr{O}'\left(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}\right), \tag{17}$$

поскольку в этом случае в (16) можно брать функции $\psi \in \mathscr{O}\left(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}\right)$.

Теорема. (i) *Если $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то оператор* (15), *определенный посредством* (16), *является непрерывным и даже регулярным оператором* (*см. Дополнение к этой главе, п. 6*), *т. е. найдутся такие s_1, s_2, l_1, l_2, что*

$$\| A\varphi \|^{(s_2)}_{(l_2)} \leqslant c \| \varphi \|^{(s_1)}_{(l_1)}. \tag{18}$$

Если же $a \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}^n)$, то $\forall l_2$ найдутся такие s_1, s_2, l_1, что справедлива оценка (18), *т. е. оператор* (17) *регулярен в смысле Дополнения к главе* (*см. п.* 6).

(ii) *Для всякого непрерывного оператора* (15) *найдется такое распределение $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, что этот оператор представляется в виде* (16). *Если образ оператора* (15) *лежит в $\mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-m}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-m})$, то $a \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. (i) Если $a \in \mathscr{S}'$, то $\exists s_1$, s_2, l_1, l_2, так что $a \in H^{(-s_1, s_2)}_{(-l_1, l_2)}$. Согласно неравенству Шварца

$$|(A\varphi, \psi)| = |(a, \varphi\psi)| \leqslant \| a \|^{(-s_1, s_2)}_{(-l_1, l_2)} \| \varphi\psi \|^{(s_1, -s_2)}_{(l_1, -l_2)}.$$

Если φ зависит только от x', а ψ от x'', то из определения нормы (4) следует, что

$$\| \varphi\psi \|^{(s_1, -s_2)}_{(l_1, -l_2)} = \| \varphi \|^{(s_1)}_{(l_1)} \| \psi \|^{(-s_2)}_{(-l_2)},$$

откуда

$$|(A\varphi, \psi)| \leqslant \| a \|^{(-s_1, s_2)}_{(-l_1, l_2)} \| \varphi \|^{(s_1)}_{(l_1)} \| \psi \|^{(-s_2)}_{(-l_2)}.$$

Если воспользоваться тем, что норма в $H^{(s_2)}_{(l_2)}$ совпадает с нормой банахового сопряженного к пространству $H^{(-s_2)}_{(-l_2)}$ (вытекающую отсюда оценку принято называть обратным неравенством Шварца), то окончательно получим

$$\| A\varphi \|^{(s_2)}_{(l_2)} \leqslant \| a \|^{(-s_1, s_2)}_{(-l_1, l_2)} \| \varphi \|^{(s_1)}_{(l_2)}. \tag{18'}$$

Если же $a \in \mathscr{K}'$, то по произвольному l_2 мы сможем выбрать такие s_1, s_2, l_1, чтобы выполнялось неравенство (18′).

(ii) К оператору (15) применима общая теорема из п. 6 Дополнения к настоящей главе. Согласно этой теореме из непрерывности (15) следует регулярность, т. е. существование таких s_1, s_2, l_1, l_2, что справедлива оценка (18). Положим

$$A_2\varphi = (1 + |D_{x''}|^2)^{-\sigma_2/2} A\varphi.$$

Если σ_2 достаточно велико, то оператор A_2 является непрерывным оператором из $H^{(s_1)}_{(l_1)}(\mathbb{R}^m)$ в $C_{(l_2)}(\mathbb{R}^{n-m})$, т. е.

$$|A_2\varphi|_{(l_2)} \leqslant c_1 \|\varphi\|^{(s_1)}_{(l_1)}. \tag{19}$$

Но тогда $(A_2\varphi)(x'')$ при каждом x'' будет непрерывным линейным функционалом на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, и, следовательно, существует такое распределение $a_2(\cdot, x'') \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, зависящее от x'' как от параметра, что

$$(A_2\varphi)(x'') = (a_2(\cdot, x''), \varphi).$$

Положим

$$a_1(x', x'') = \left((1 + |D_{x'}|^2)^{-\sigma_1/2} a_2(\cdot, x'')\right)(x'),$$

где σ_1 достаточно велико. Тогда функция $a_1(x', x'')$ будет порознь непрерывной как по x', так и по x''. Далее, заменяя в (19) φ на $(1 + |D_{x'}|^2)^{-\sigma_1/2}\chi$, получим оценку

$$\max_{x''}(1 + |x''|^2)^{l_2/2} \left|\int a_1(x', x'')\chi(x'')\,dx''\right| \leqslant c_2 \|\chi\|_{(l_1)}.$$

В силу обратного неравенства Шварца $\forall x'' \in \mathbb{R}^{n-m}$ отсюда получим, что

$$(1 + |x''|^2)^{l_2} \int |a_1(x', x'')|^2 (1 + |x'|^2)^{-l_1}\,dx' \leqslant c_2^2.$$

Умножая эту оценку на $(1 + |x''|^2)^{-\varkappa}$, $\varkappa > (n-m)/2$, и интегрируя по x'', получим

$$a_1(x', x'') \in H_{(-l_1, l_2 - \varkappa)}, \quad \varkappa > (n-m)/2.$$

Итак, мы доказали представление (16), причем

$$a = (1 + |D_{x'}|^2)^{\sigma_1/2}(1 + |D_{x''}|^2)^{\sigma_2/2} a_1 \in H^{(-\sigma_1, -\sigma_2)}_{(-l_1, l_2 - \varkappa)}. \tag{20}$$

Если образ оператора (15) лежит в $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-m})$, то $\forall l_2 \in \mathbb{R}$ он лежит в $H^{(-\infty)}_{(l_2)}(\mathbb{R}^{n-m})$, а из замкнутости графика A в $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ следует его замкнутость в $\mathcal{S} \times H^{(-\infty)}_{(l_2)}$. Таким образом, для любого l_2 оператор

$$A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to H^{(-\infty)}_{(l_2)}(\mathbb{R}^{n-m}) \tag{17'}$$

будет замкнутым. Поскольку $\mathcal{S}$ — пространство Фреше, а $H^{(-\infty)}_{(l_2)}$ — индуктивный предел пространств Фреше, то по теореме о замкнутом графике из замкнутости (17′) следует непрерывность.

Из непрерывности этого оператора следует его регулярность (см. Дополнение, п. 6) и существование таких s_1, s_2, l_1, что справедлива оценка (18). Тогда из проведенных выше рассуждений следует, что оператор (17) представляется в форме (18), где распределение a для любого l_2 имеет вид (20) с некоторым фиксированным $\varkappa > (n-m)/2$. Но тогда согласно нашим определениям $a \in \mathscr{K}'$. Теорема доказана.

6.5. Другой вариант теоремы о ядре. Каждому распределению $a \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}^n)$ наряду с оператором (15), действующим из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m_{x'})$ в $\mathscr{O}(\mathbb{R}^{n-m}_{x''})$, можно сопоставить и другой оператор

$$A\colon\ \mathscr{O}(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m_{x'}), \tag{21}$$

определяемый из равенства (ср. (16))

$$(A\varphi, \psi) = (a, \varphi\psi), \quad \varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m_{x'}). \tag{22}$$

Для этого оператора теорема о ядре примет следующий вид.

Теорема. (i) *Если $a \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}^n)$, то оператор* (21), *определенный посредством* (22), *является непрерывным и даже регулярным оператором, т. е.* $\forall l_2\ \exists s_1,\ s_2,\ l_1$, *так что*

$$\|A\varphi\|^{(s_1)}_{(l_1)} \leqslant c\|\varphi\|^{(s_2)}_{(l_2)} \quad \forall \varphi \in H^{(\infty)}_{(l_2)}(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}). \tag{23}$$

(ii) *Для всякого непрерывного оператора* (21) *найдется такое распределение $a \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}^n)$, что этот оператор представляется в виде* (22).

Доказательство. (i) Если $a \in \mathscr{K}'(\mathbb{R}^n)$, то $\forall l_2\ \exists s_1,\ s_2,\ l_1$, так что $a \in H^{(s_1, -s_2)}_{(l_1, -l_2)}$. Из неравенства Шварца (ср. теорема 6.4 (i)) следует оценка (23) с $c = \|a\|^{(s_1, -s_2)}_{(l_1, -l_2)}$.

(ii) Поскольку $\mathscr{O}$ — индуктивный предел счетно-нормированных пространств, для которых выполнена первая аксиома счетности, а $\mathscr{S}'$ — регулярный индуктивный предел, то согласно теореме из п. 4 Дополнения к этой главе из непрерывности оператора (21) следует его регулярность, т. е. $\forall l_2\ \exists s_1,\ l_1$, так что непрерывен оператор

$$A\colon\ H^{(\infty)}_{(l_2)}(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}) \to H^{(s_1)}_{(l_1)}(\mathbb{R}^m_{x'}).$$

Но тогда найдется такое s_2, что этот оператор по непрерывности продолжается до непрерывного оператора

$$A\colon\ H^{(s_2)}_{(l_2)}(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}) \to H^{(s_1)}_{(l_1)}(\mathbb{R}^m_{x'}),$$

т. е. выполнена оценка (23). Теперь остается почти дословно воспроизвести доказательство теоремы 6.4 (ii).

Представляет интерес тот случай, когда образ оператора (21) лежит в $\mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, т. е. функционал на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, определенный посредством (22), по непрерывности продолжается на $\mathscr{O}'(\mathbb{R}^m)$. В этом случае утверждение теоремы останется в силе, если пространство $\mathscr{K}'$ заменить на более узкое пространство

$$\bigcap_{s_1, l_2} H^{(s_1, -\infty)}_{(-\infty, l_2)} = \bigcap_{s_1, l_2} \bigcup_{s_2, l_1} H^{(s_1, s_2)}_{(l_1, l_2)}.$$

Шкалы линейных топологических пространств и их индуктивные и проективные пределы

Для удобства ссылок в этом дополнении мы приводим ряд известных фактов теории линейных топологических пространств (л. т. п.), используемых в настоящей книге. Подробное изложение многих этих вопросов имеется в общеизвестных руководствах (Бурбаки [1], Эдвардс [1]), а также в удобной для нас форме у В. П. Паламодова [1] (см. гл. V), И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2] (см. гл. I), Л. В. Канторовича, Г. П. Акилова [1] (см. гл. XI).

Менее стандартный характер носит изложение теории линейных операторов в шкалах и в предельных пространствах этих шкал. Излагаемый в дополнении материал ориентирован на следующие шкалы и их пределы: $C^{(m)}_{(l)}$, $H^{(s)}_{(l)}$, $C^{(\infty)}_{(l)}$, $C^{(m)}_{(\pm\infty)}$, $H^{(\pm\infty)}_{(l)}$, $H^{(s)}_{(\pm\infty)}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$. Мы уже упоминали, что во многих случаях операторы на предельных пространствах продолжаются до операторов в шкалах и утверждения о предельных пространствах автоматически влекут соответствующие результаты для шкал. Однако в общей ситуации непрерывные операторы на предельных пространствах не обязательно продолжаются до операторов в шкалах. Мы выделяем подкласс операторов (*регулярных*), которые допускают такое продолжение. Одна из основных целей Дополнения — пояснить, что *в случае пределов шкал рефлексивных банаховых пространств все непрерывные операторы регулярны.* В силу теоремы Б. М. Макарова [1] для этих шкал имеются также естественные утверждения о двойственности. Мы обсуждаем, в какой мере эти утверждения переносятся на шкалы ненормируемых пространств, поскольку это необходимо для рассмотрения пространств $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$. К сожалению, топологические свойства этих пространств не удается достаточно полно исследовать.

1. Основные понятия теории линейных топологических пространств. Векторное пространство E (над полем комплексных или вещественных чисел) называется *линейным топологическим пространством* (*л. т. п.*), если E снабжено такой топологией, в которой непрерывны операции сложения и умножения на скаляр, т. е. непрерывны отображения

$$E \times E \to E \quad (\{x, y\} \mapsto x + y), \qquad E \times \mathbb{C} \to E\,(\{x, \alpha\} \mapsto \alpha x). \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что топология в л. т. п. полностью определяется заданием системы окрестностей нуля.

Одно и то же пространство можно, вообще говоря, наделять различными топологиями, согласованными с векторной структурой (т. е. в которых операции (1) непрерывны). Пусть имеются две топологии на E, определенные системами окрестностей τ_1 и τ_2. Если каждая окрестность нуля $U \in \tau_2$ одновременно принадлежит τ_1, то говорят, что топология, определяемая набором окрестностей τ_1, или, короче, топология τ_1, *сильнее* топологии τ_2 (топология τ_2 *слабее* топологии τ_1). Если топология τ_2 одновременно слабее и сильнее топологии τ_1, то эти топологии называются *эквивалентными*.

Задание в векторном пространстве системы окрестностей нуля определяет в нем сходимость (секвенциальную топологию). Именно, последовательность $e_n \to e$ в E, если для любой окрестности нуля U найдется такое

$N(U)$, что $e_n - e \in U$ при $n \geqslant N(U)$. Из этого определения сразу следует, что если топология τ_1 сильнее топологии τ_2, то из сходимости последовательности в топологии τ_1 следует ее сходимость в топологии τ_2.

Множество $B \subset E$ называется *ограниченным*, если для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое число $N(U)$, что $B \subset \lambda U$ при всех $|\lambda| > N(U)$ (т. е. B поглощается любой окрестностью нуля). Это определение можно переформулировать и в такой форме: для любой последовательности $\{e_n\} \subset B$ и любой последовательности λ_n положительных чисел, $\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$, последовательность $\lambda_n e_n$ стремится к нулю в E.

Л. т. п. называется *локально выпуклым*, если каждая окрестность нуля содержит выпуклое подмножество. *В настоящей книге рассматриваются только локально выпуклые л. т. п.*

Система окрестностей нуля τ называется *определяющей* системой окрестностей л. т. п. E, если для любой окрестности нуля $U \subset E$ можно указать такую окрестность $A \in \tau$, что $A \subset U$. Если топологическое пространство имеет счетную определяющую систему окрестностей, то говорят, что для него выполнена *первая аксиома счетности*.

Пусть E, F — два л. т. п. Линейный оператор $A: E \to F$ называется *непрерывным*, если для любой окрестности нуля $V \subset F$ найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $A\,U \subset V$. Совокупность линейных непрерывных операторов, действующих из E в F, будем обозначать через $\mathscr{L}(E, F)$.

Замечание. Задавая в векторном пространстве систему окрестностей нуля (топологию), мы тем самым задаем систему ограниченных множеств (борнологию). Топология векторного пространства, вообще говоря, однозначно не восстанавливается по его борнологии и может существовать несколько топологий, индуцирующих одну и ту же борнологию (см. Бурбаки [1], упр. 13 из III, 2.4). Соответствие между топологией и борнологией становится однозначным только для специальных классов л. т. п. (борнологические пространства).

Из приведенных определений следует, что если $A \in \mathscr{L}(E, F)$ и $e_n \to e$ в E, то $Ae_n \to Ae$ в F. Отсюда и из описания ограниченных множеств в терминах сходящихся последовательностей следует, что *каждый непрерывный оператор $A: E \to F$ является ограниченным*, т. е. переводит ограниченные множества в E в ограниченные множества в F.

Для пространств E, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, верно и обратное утверждение: *всякий ограниченный линейный оператор A: $E \to F$ является непрерывным.*

Частным случаем пространства $\mathscr{L}(E, F)$ (отвечающим $F = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) является сопряженное пространство E' линейных непрерывных функционалов на E. Все сказанное выше о непрерывных и ограниченных операторах, разумеется, относится и к этому частному случаю.

Если B — некоторое множество в E, то его *полярой* называется подмножество

$$B^0 = \{e' \in E',\ |(e',\ e)| < 1\ \forall e \in B\},$$

где через (e', e) обозначается значение функционала $e' \in E'$ на элементе $e \in E$. Топология в E' задается с помощью поляр некоторого семейства множеств в E.

Выбирая в качестве окрестностей нуля в E' поляры всех ограниченных множеств $B \subset E$, мы получим так называемую *сильную* топологию в E'.

Выбирая в качестве окрестностей нуля в E' поляры любых конечных подмножеств в E, получим *слабую* топологию в E'.

Отметим, что сильная сходимость $e'_j \to 0$ в E' означает равномерную сходимость последовательностей чисел $(e_j, e) \to 0$ на любом ограниченном множестве $B \subset E$ (т. е. $e \in B$). Слабая сходимость $e'_j \to 0$ означает сходимость $(e_j, e) \to 0$ для любого $e \in E$.

Сопряженное пространство E', если не оговорено противное, будем наделять сильной топологией.

2. Шкалы л. т. п. и согласованные семейства отображений шкал. Под шкалой $\mathbb{E} = \{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ будем понимать систему, состоящую из набора л. т. п. (как правило, банаховых или гильбертовых) E_α, параметризованных точками α из некоторого частично упорядочного множества K (для нас важен случай $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{R}^2$) и набора непрерывных отображений

$$i_\alpha^\beta \colon E_\alpha \to E_\beta, \quad \beta < \alpha,$$

определенных для любых $\beta < \alpha$, α, $\beta \in K$, и удовлетворяющих естественным условиям:

(a) $i_\beta^\gamma i_\alpha^\beta = i_\alpha^\gamma$, $\quad \gamma < \beta < \alpha$,

(b) i_α^α — тождественное отображение.

Пусть $\mathbb{E} = \{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in K$, и $\mathbb{F} = \{F_\gamma, j_\gamma^\delta\}$, $\gamma \in K'$, — две шкалы л. т. п. *Согласованным семейством* линейных операторов из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$ называется набор $\mathfrak{A} = \{A_\alpha^\gamma, \Sigma\}$, состоящий из некоторого множества $\Sigma \subset K \times K'$ пар индексов (α, γ) и отвечающих им линейных операторов

$$A_\alpha^\gamma \colon E_\alpha \to F_\gamma, \quad (\alpha, \gamma) \in \Sigma, \tag{2}$$

причем выполнены следующие естественные условия:

(I) множество Σ вместе с парой (β, γ) содержит все пары индексов (α, γ), $\alpha > \beta$ и (β, δ), $\delta < \gamma$;

(II) операторы (2) коммутируют с отображениями i_α^β, j_γ^δ, т. е. $\forall (\alpha, \gamma) \in \Sigma$, $\forall (\beta, \delta) \in \Sigma$, $\alpha \geqslant \beta$, $\gamma \geqslant \delta$, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "A_\alpha^\gamma"] \arrow[d, "i_\alpha^\beta"'] & F_\gamma \arrow[d, "j_\gamma^\delta"] \\ E_\beta \arrow[r, "A_\beta^\delta"] & F_\delta \end{tikzcd} \tag{3}$$

Замечание. Отметим частный случай согласованного семейства операторов, когда шкала $\mathbb{F}$ состоит из единственного л. т. п. F, т. е. мы имеем семейство операторов $A_\alpha \colon E_\alpha \to F$, причем с каждым оператором A_β это семейство содержит операторы A_α, $\alpha > \beta$, и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[d, "i_\alpha^\beta"'] \arrow[dr, "A_\alpha"] & \\ E_\beta \arrow[r, "A_\beta"'] & F \end{tikzcd}$$

Если же шкала $\mathbb{E}$ состоит из одного пространства E, то согласованное семейство задается набором операторов $A^\gamma\colon E \to F_\gamma$, причем вместе с A^γ это семейство содержит операторы A^δ, $\delta < \gamma$, и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & F_\delta \\ E \arrow[ur, "A^\delta"] \arrow[r, "A^\gamma"'] & F_\gamma \arrow[u, "j^\delta_\gamma"'] \end{tikzcd}$$

Если шкала $\mathbb{F}$ совпадает с $\mathbb{E}$, а $A^\gamma_\alpha = i^\gamma_\alpha$ для всех $(\alpha, \gamma) \in \Sigma$, то семейство (2) называется согласованным семейством единичных операторов. Эти семейства различаются множествами индексов Σ.

Пусть заданы три шкалы: $\mathbb{E} = \{E_\alpha, i^\beta_\alpha\}$, $\alpha \in K_1$, $\mathbb{F} = \{F_\gamma, j^\delta_\gamma\}$, $\gamma \in K_2$, $\mathbb{G} = \{G_\varkappa, k^\lambda_\varkappa\}$, $\varkappa \in K_3$, и согласованные семейства операторов $\mathfrak{A} = \{A^\gamma_\alpha, \Sigma_1\}$, $\mathfrak{B} = \{B^\varkappa_\gamma, \Sigma_2\}$, $A^\gamma_\alpha\colon E_\alpha \to F_\gamma$, $B^\varkappa_\gamma\colon F_\gamma \to G_\varkappa$. Семейство $\mathfrak{C} = \{C^\varkappa_\alpha, \Sigma_3\}$ называется *композицией* семейств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$, если выполнены следующие условия:

1) $\Sigma_3 \subset K_1 \times K_3$ состоит из тех и только тех пар $(\alpha, \varkappa)$, для которых найдется (вообще говоря, не единственное) $\beta \in K_2$, так что $(\alpha, \beta) \in \Sigma_1$, $(\beta, \varkappa) \in \Sigma_2$.

2) Если $(\alpha, \varkappa) \in \Sigma_3$, $(\alpha, \beta) \in \Sigma_1$ и $(\beta, \varkappa) \in \Sigma_2$, то

$$C^\varkappa_\alpha = B^\varkappa_\beta \circ A^\beta_\alpha\colon\ E_\alpha \to G_\varkappa.$$

Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{C}$ будет согласованным семейством операторов из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{G}$.

Если $\mathbb{G} = \mathbb{E}$ и $\mathfrak{C}$ — согласованное семейство единичных операторов, то семейство $\mathfrak{A}$ называется *правым обратным* к $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ — *левым обратным* к $\mathfrak{A}$.

3. Индуктивные пределы л. т. п. Шкала $\mathbb{E} = \{E_\alpha, i^\beta_\alpha\}$ называется *индуктивной*, если параметр α пробегает частично упорядоченное множество K, удовлетворяющее следующему условию: $\forall \alpha$, $\beta \in K$ найдется $\gamma \in K$, так что $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$. С каждой индуктивной шкалой можно связать ее *индуктивный предел*, который определяется следующим образом. Рассмотрим объединение всех пространств нашей шкалы $\bigcup\limits_{\alpha \in K} E_\alpha$. Элементы $e_\alpha \in E_\alpha$ и $e_\beta \in E_\beta$ этого объединения называются эквивалентными, $e_\alpha \sim e_\beta$, если найдется такое $\gamma \leqslant \alpha$, β, что $i^\gamma_\alpha e_\alpha = i^\gamma_\beta e_\beta$. Множество классов эквивалентности из $\bigcup E_\alpha$ обозначим через $E_{-\infty}$. Для классов эквивалентных элементов естественным образом определяются операции сложения и умножения на скаляр, т. е. на $E_{-\infty}$ вносится структура векторного пространства.

Линейную операцию, сопоставляющую элементу $e_\alpha \in E_\alpha$ содержащий его класс эквивалентности, обозначим через i_α (правильнее писать $i_\alpha^{-\infty}$). Морфизм

$$E_\alpha \to E_{-\infty} \quad (e \mapsto i_\alpha e) \tag{4}$$

будет каноническим отображением E_α в $E_{-\infty}$.

Из свойств морфизмов i_α^β (см. условие (в) из п. 2) следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha^\beta"] \arrow[dr, "i_\alpha"'] & & E_\beta \arrow[dl, "i_\beta"] \\ & E_{-\infty} & \end{tikzcd} \tag{4'}$$

Снабдим пространство $E_{-\infty}$ наиболее сильной локально выпуклой топологией, в которой все канонические морфизмы (4) непрерывны. В соответствии с этим определением окрестностью нуля в $E_{-\infty}$ назовем любое множество, содержащее некоторое выпуклое множество V, полные прообразы $i_\alpha^{-1}V$ которого при всех $\alpha \in K$ являются окрестностями нуля в E_α. Эту топологию будем называть индуктивной, а пространство $E_{-\infty}$ — индуктивным пределом индуктивной шкалы $\mathbb{E} = \{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$.

Назовем множество $B \subset E_{-\infty}$ *регулярно ограниченным*, если найдется такое α и такое ограниченное множество $B_\alpha \subset E_\alpha$, что $i_\alpha(B_\alpha) = B$. Существуют примеры индуктивных пределов, в которых имеются ограниченные множества, не являющиеся регулярно ограниченными (см. Б. М. Макаров [2]).

Определение (Б. М. Макаров [1]). Индуктивный предел $E_{-\infty}$ шкалы $\{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ называется *регулярным*, если всякое ограниченное множество в $E_{-\infty}$ является регулярно ограниченным.

Теорема. *Если $\{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ — индуктивная шкала рефлексивных банаховых пространств, то индуктивный предел $E_{-\infty}$ является регулярным. Пространство $E_{-\infty}$ является рефлексивным.*

Эта теорема принадлежит Б. М. Макарову, ее доказательство можно найти у Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1] (см. гл. XI).

В настоящей книге мы будем иметь дело только с такими шкалами, в которых морфизмы i_α^β: $E_\alpha \to E_\beta$ инъективны, т. е. являются вложениями. В этом случае E_α можно отождествить с его образом $i_\alpha^\beta E_\alpha \subset E_\beta$, $\beta < \alpha$, т. е. рассматривать E_α как подпространство (как правило, не замкнутое) в E_β, а пространство $E_{-\infty}$ отождествляется с теоретико-множественным объединением подпространств E_α, т. е.

$$E_{-\infty} = \bigcup_{\alpha \in K} E_\alpha.$$

Такие индуктивные пределы иногда называются *внутренними*. В этих индуктивных пределах подмножество $U \subset E_{-\infty}$ является окрестностью тогда и только тогда, когда пересечения $U_\alpha = U \cap E_\alpha$ являются окрестностями E_α $\forall \alpha \in K$. Подмножество $B \subset E_{-\infty}$ будет регулярно ограниченным, если $B \subset E_\alpha$ для некоторого α и ограничено в E_α.

Замечание. Индуктивный предел называется *строгим* (см. Бурбаки [1], II.2.5), если E_α является подпространством E_β, $\beta < \alpha$, причем топология на E_α, индуцированная топологией E_β, совпадает с исходной топологией. Строгие индуктивные пределы являются регулярными (см. Бурбаки [1], III.2.4).

4. Операторы в индуктивных шкалах л. т. п. и индуктивных пределах. Пусть $\mathbb{E}=\{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ и $\mathbb{F}=\{F_\gamma, j_\gamma^\delta\}$ — две индуктивные шкалы. Непрерывным оператором из индуктивной шкалы $\mathbb{E}$ в индуктивную шкалу $\mathbb{F}$

$$\mathbb{A}\colon \mathbb{E}\to\mathbb{F} \tag{5}$$

называется такое согласованное семейство операторов (2), что все операторы A_α^γ непрерывны и $\forall\alpha$ найдется такое $\gamma=\gamma(\alpha)$, что определен оператор A_α^γ; операторы (2) называются компонентами оператора (5).

Предложение 1. *Всякий непрерывный оператор* (5), *действующий из индуктивной шкалы* $\mathbb{E}$ *в индуктивную шкалу* $\mathbb{F}$, *индуцирует оператор на индуктивных пределах*

$$A\colon E_{-\infty}\to F_{-\infty}. \tag{6}$$

Оператор (6) *непрерывен и* $\forall\alpha\in K$ *найдется такое* $\gamma=\gamma(\alpha)\in K'$, *что*

$$j_\gamma A_\alpha^\gamma e = A i_\alpha e \quad \forall e\in E_\alpha. \tag{6'}$$

Здесь i_α — *морфизмы* (4) *и* $j_\gamma\colon F_\gamma\to F_{-\infty}$.

Доказательство. Пусть $e\in E_{-\infty}$. Согласно определению индуктивного предела e является классом элементов $\{e_\alpha, \alpha\in K\}$, связанных соотношениями эквивалентности: $i_\alpha^\beta e_\alpha = i_{\alpha'}^\beta e_{\alpha'}$, $\beta\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant\alpha'$. Выбирая для каждого α такое γ, чтобы существовал оператор A_α^γ, рассмотрим набор элементов $\{A_\alpha^\gamma e_\alpha\}\subset\bigcup\limits_{\gamma\in K'} F_\gamma$. Покажем теперь, что все элементы из этого набора принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. Пусть $A_\alpha^\gamma e_\alpha$ и $A_{\alpha'}^{\gamma'} e_{\alpha'}$ — два элемента из этого набора. Выбираем $\beta\leqslant\alpha,\ \alpha'$, и такое $\delta\leqslant\gamma,\ \gamma'$, чтобы существовал оператор A_β^δ. Тогда в силу (3) и условия эквивалентности e_α и $e_{\alpha'}$

$$j_\gamma^\delta A_\alpha^\gamma e_\alpha = A_\beta^\delta i_\alpha^\beta e_\alpha = A_\beta^\delta i_{\alpha'}^\beta e_{\alpha'} = j_{\gamma'}^\delta A_{\alpha'}^{\gamma'} e_{\alpha'}.$$

Итак, определено отображение $A\colon e=\{e_\alpha\}\mapsto\{A_\alpha^\gamma e_\gamma\}$ индуктивного предела $E_{-\infty}$ в индуктивный предел $F_{-\infty}$. Очевидно, что оператор A будет линейным и выполнены соотношения (6'). Для доказательства непрерывности A рассмотрим семейство операторов $A_\alpha = A i_\alpha\colon E_\alpha\to F_{-\infty}$. В силу (6') $A_\alpha = j_\gamma A_\alpha^\gamma$ будет непрерывным оператором. Теперь наше утверждение вытекает из следующего простого факта.

Предложение 2 (ср. Эдвардс [1], теорема 6.3.2). *Пусть* $E_{-\infty}$ — *индуктивный предел индуктивной шкалы* $\{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ *и* F — *некоторое л. т. п. Линейный оператор*

$$A\colon E_{-\infty}\to F \tag{7}$$

непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывны операторы

$$A_\alpha = A i_\alpha\colon E_\alpha\to F. \tag{7'}$$

Доказательство. Пусть V — выпуклая окрестность F и $U=A^{-1}(V)$ — ее полный прообраз; U является выпуклым множеством. В силу непрерывности операторов (7') прообразы $i_\alpha^{-1}(U)=A_\alpha^{-1}(V)$ будут окрестностями в E_α при любом $\alpha\in K$. Но это и означает, что U — окрестность $E_{-\infty}$ и $AU\subset V$, т. е. A — непрерывный оператор.

Предложение 1 подсказывает следующее

Определение. Оператор (6) называется *регулярным*, если он индуцируется непрерывным оператором из индуктивной шкалы $\mathbb{E}$ в индуктивную шкалу $\mathbb{F}$. Совокупность регулярных операторов обозначим через $\mathscr{L}_{\mathrm{reg}}(E_{-\infty}, F_{-\infty})$. Из предложения 1 следует, что

$$\mathscr{L}_{\mathrm{reg}}(E_{-\infty}, F_{-\infty}) \subset \mathscr{L}(E_{-\infty}, F_{-\infty}).$$

Укажем достаточные условия на шкалы, при которых понятия непрерывности и регулярности оператора совпадают.

Теорема. *Пусть* $E_{-\infty}$, $F_{-\infty}$ — *индуктивные пределы индуктивных шкал* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$, *и пусть выполнены следующие условия*:

(a) $F_{-\infty}$ — *регулярный индуктивный предел*;

(b) $\mathbb{E}$ — *шкала пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности*;

(c) *вложения* j_γ: $F_\gamma \to F_{-\infty}$ *инъективны*.

Тогда всякий непрерывный оператор (6) *является регулярным*.

Доказательство. Ввиду (c) можно отождествить F_γ с его образом $j_\gamma(F_\gamma) \subset F_{-\infty}$, т. е. считать F_γ подпространством $F_{-\infty}$.

Прежде всего проверим, что $\forall\alpha$ найдется такое γ, что образ оператора $A_\alpha = A \circ i_\alpha$: $E_\alpha \to F_{-\infty}$ на самом деле лежит в F_γ. Пусть это не так. Тогда найдется такая последовательность индексов $\{\gamma_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots$ и элементов $e_k \in E_\alpha$, что $Ae_k \notin F_{\gamma_k}$.

Поскольку пространство E_α удовлетворяет первой аксиоме счетности, то можно выбрать определяющую систему вложенных окрестностей нуля:

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_k \supset \ldots$$

Так как любая окрестность нуля в л. т. п. поглощает любой элемент пространства, то можно подобрать такие λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, что $\bar{e}_k = \lambda_k e_k \in U_k$. Таким образом, множество $\{\bar{e}_k, k = 1, 2, \ldots\}$ будет ограниченным подмножеством E_α. Так как оператор A_α непрерывен, то он ограничен, и, следовательно, множество $\{A\bar{e}_k, k = 1, 2, \ldots\}$ будет ограничено в $F_{-\infty}$. В силу условия (*a*) найдется такое γ, что $\{A\bar{e}_k, k = 1, 2, \ldots\} \subset F_\gamma$. С другой стороны, $A\bar{e}_k = \lambda_k A e_k \notin F_{\gamma_k}$, $k \to \infty$. Полученное противоречие и доказывает, что $A_\alpha(E_\alpha) \subset F_\gamma$. Но тогда можно корректно определить оператор A_α^γ: $E_\alpha \to F_\gamma\left(e \mapsto j_\gamma^{-1} A i_\alpha e\right)$, удовлетворяющий (6′). Нам остается проверить непрерывность этого оператора.

Пусть V_γ — произвольная выпуклая окрестность F_γ. Тогда (Бурбаки [1], гл. II, § 2.5, лемма 1) существует такая выпуклая окрестность $W \subset F_{-\infty}$, что $W \cap F_\gamma = V_\gamma$. В силу непрерывности A найдется такая окрестность $U \subset E_{-\infty}$, что $A(U) \subset W$. Согласно определению окрестностей в индуктивных пределах $i_\alpha(U) = U_\alpha$ — окрестность в E_α, а по доказанному образ U_α лежит в $W \cap F_\gamma = V_\gamma$. Итак, мы показали, что $A_\alpha^\gamma(U_\alpha) \subset V_\gamma$, что и означает непрерывность A_α^γ.

Остановимся на вопросе об обратных операторах в индуктивных шкалах. Если $\mathbb{E} = \mathbb{F}$, то непрерывный оператор в индуктивных шкалах называется единичным, если отвечающее ему согласованное семейство будет единичным, т. е. $\forall\alpha \in K$ определено $\beta := \beta(\alpha)$ и $A_\alpha^\beta = i_\alpha^\beta$. Очевидно, что всякий единичный оператор из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$ индуцирует тождественный оператор из $E_{-\infty}$ в $E_{-\infty}$.

Если $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ — три индуктивные шкалы, а $\mathbb{A}\colon \mathbb{E}\to\mathbb{F}$ и $\mathbb{B}\colon \mathbb{F}\to\mathbb{G}$ — непрерывные операторы, то определена композиция $\mathbb{B}\circ\mathbb{A}\colon \mathbb{E}\to\mathbb{G}$, являющаяся непрерывным оператором в индуктивных шкалах. Если $\mathbb{G}=\mathbb{E}$ и $\mathbb{B}\circ\mathbb{A}$ — единичный оператор, то оператор $\mathbb{A}$ называется *правым обратным* к $\mathbb{B}$ ($\mathbb{B}$ — *левый обратный* к $\mathbb{A}$). Если оператор $\mathbb{B}\circ\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}\circ\mathbb{B}$ будут единичными операторами в $\mathbb{E}$ и (соответственно) в $\mathbb{F}$, то оператор $\mathbb{E}\colon \mathbb{F}\to\mathbb{E}$ называется *обратным* к оператору $\mathbb{A}$.

Отображение (5) называется *квазиизоморфизмом* индуктивных шкал, если оператор $\mathbb{A}$ имеет непрерывный обратный оператор $\mathbb{B}\colon \mathbb{F}\to\mathbb{E}$. Отметим, что всякий квазиизоморфизм шкал (5) индуцирует изоморфизм (6) их индуктивных пределов.

Назовем подмножество $K_0\subset K$ *неограниченным снизу*, если $\forall\alpha\in K$ $\exists\alpha_0\in K_0$, так что $\alpha_0<\alpha$.

С каждым неограниченным снизу подмножеством K_0 можно связать шкалу $\mathbb{E}_0=\left\{E_{\alpha_0}, i_{\alpha_0}^{\beta_0}\right\}$, $\alpha_0\in K_0$, и оператор $\mathbf{I}_0\colon \mathbb{E}_0\to\mathbb{E}$, каждая компонента которого будет тождественным оператором $E_{\alpha_0}\to E_{\alpha_0}$. С другой стороны, сопоставляя $\forall\alpha\in K$ индекс $\alpha_0\in K_0$, $\alpha_0<\alpha$, мы получим согласованное семейство операторов $i_\alpha^{\alpha_0}\colon E_\alpha\to E_{\alpha_0}$, которому отвечает непрерывный оператор в индуктивных шкалах $\mathbf{I}_0'\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}_0$. Очевидно, что композиции $\mathbf{I}_0\circ\mathbf{I}_0'\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ и $\mathbf{I}_0'\circ\mathbf{I}_0\colon \mathbb{E}_0\to\mathbb{E}_0$ будут единичными операторами, т. е. $\mathbf{I}_0$ будет квазиизоморфизмом шкал, индуцирующим изоморфизм индуктивных пределов $E_{-\infty}$ и $(E_0)_{-\infty}$. Иными словами, замена множества K на любое неограниченное снизу подмножество индексов приводит к тому же самому индуктивному пределу.

Во всех индуктивных пределах, рассматриваемых в этой книге, у множества индексов можно выделить счетное неограниченное снизу подмножество. Поэтому далее мы всегда можем считать там, где это необходимо, что пространства в шкале параметризованы целыми точками, скажем $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$.

Замечание. Из того, что оператор (5) имеет непрерывный обратный, не следует, вообще говоря, обратимость его компонент (2).

Отображение (5) будем называть *изоморфизмом шкал*, если $\forall\alpha\ \exists\gamma$ так что оператор A_α^γ имеет непрерывный обратный, и обратно для $\forall\gamma$ найдется такое α, что определен оператор A_α^γ, имеющий непрерывный обратный.

5. Проективные пределы л. т. п. Операторы в проективных шкалах л. т. п. и проективных пределах. Шкала $\mathbb{E}=\left\{E_\alpha, i_\alpha^\beta\right\}$ называется *проективной*, если параметр α пробегает частично упорядоченное множество K, удовлетворяющее условию: $\forall\alpha, \beta\in K$ найдется такое $\gamma\in K$, что $\gamma>\alpha$, $\gamma>\beta$.

Замечание. Отметим, что простейшим (и основным для наших целей) примером проективной шкалы является шкала $C_{(l)}^{(m)}$, где K — прямое произведение $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_+$. Шкала $H_{(l)}^{(s)}$, где $K=\mathbb{R}^2$, одновременно является проективной и индуктивной.

Назовем *нитью* любую последовательность

$$e = \{e_\alpha \in E_\alpha, \quad \alpha \in K\},$$

элементы которой удовлетворяют соотношениям: если $\alpha > \beta$, то $e_\beta = i_\alpha^\beta e_\alpha$. Иными словами, для любых двух элементов e_α и e_β нити можно подобрать элемент e_γ, $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$, так что $e_\alpha = i_\gamma^\alpha e_\gamma$, $e_\beta = i_\gamma^\beta e_\gamma$.

Множество нитей обозначим через E_∞; в это множество естественным образом вносится структура векторного пространства. Линейную операцию, сопоставляющую нити e ее элемент e_α, обозначим через i^α (правильнее писать i_∞^α). Морфизм

$$i^\alpha \colon E_\infty \to E_\alpha \tag{8}$$

является каноническим отображением E_∞ в E_α. Очевидно, что

$$i_\alpha^\beta i_\alpha = i^\beta. \tag{8'}$$

Введем на E_∞ наиболее слабую локально выпуклую топологию, в которой все отображения (8) будут непрерывны. Эта топология называется проективной, а пространство E_∞ с топологией — проективным пределом проективной шкалы $\mathbb{E}$. Согласно данному выше определению окрестностью нуля в E_∞ называется любое множество, содержащее множество вида $(i^\alpha)^{-1}(U_\alpha)$, где U_α — окрестность нуля в E_α. Множество $B \subset E_\infty$ называется ограниченным, если $(i^\alpha)^{-1}B$ будет ограниченным подмножеством E_α для любого $\alpha \in K$.

Если отображения i_α^β являются вложениями, то мы отождествляем E_α и $i_\alpha^\beta E_\alpha$, тогда E_∞ можно отождествить с пересечением $\bigcap_{\alpha \in K} E_\alpha$. При этом окрестностями в E_∞ будут множества вида $U_\alpha \cap E_\infty$, где U_α — окрестность в E_α, а ограниченность $B \subset E_\infty$ означает ограниченность B в любом E_α.

Пусть $\mathbb{E} = \{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ и $\mathbb{F} = \{F_\gamma, j_\gamma^\delta\}$ — две проективные шкалы. Непрерывным оператором (5), действующим из проективной шкалы $\mathbb{E}$ в проективную шкалу $\mathbb{F}$, называется такое согласованное семейство операторов (2), что все операторы A_α^γ непрерывны и $\forall \gamma$ найдется такое $\alpha = \alpha(\gamma)$, что определена компонента A_α^γ.

Нашей целью является изучение связи между непрерывными операторами в проективных шкалах (5) и операторами в проективных пределах этих шкал

$$A \colon E_\infty \to F_\infty. \tag{9}$$

Предложение 1. *Всякий непрерывный оператор* (5), *действующий из проективной шкалы* $\mathbb{E}$ *в проективную шкалу* $\mathbb{F}$, *индуцирует оператор* (9). *Этот оператор непрерывен, и* $\forall \gamma \in K'$ *найдется такое* $\alpha = \alpha(\gamma) \in K$, *что*

$$A_\alpha^\gamma i^\alpha e = j^\gamma A e \quad \forall e \in E_\infty. \tag{9'}$$

Доказательство. Пусть $e = \{e_\alpha \in E_\alpha\}$ — некоторая нить. Подбирая по заданному γ индекс α и оператор A_α^γ, положим $f_\gamma = A_\alpha^\gamma e_\alpha$. Это обозначение корректно, поскольку правая часть не зависит α. В самом деле, возьмем другое α', для которого определен оператор $A_{\alpha'}^\gamma$, и пусть $\varkappa \geqslant \alpha, \alpha'$. Тогда $e_\alpha = i_\varkappa^\alpha e_\varkappa$, $e_{\alpha'} = i_\varkappa^{\alpha'} e_\varkappa$ и $A_\alpha^\gamma e_\alpha = A_{\alpha'}^\gamma e_{\alpha'} = A_\varkappa^\gamma e_\varkappa$. Проверим, что система $\{f_\gamma \in F_\gamma\}$ является нитью. Для этого возьмем $\delta < \gamma$, а α подберем таким образом, чтобы существовала компонента A^γ_α. Тогда $f_\delta = A^\delta_\alpha e_\alpha = j^\delta_\gamma A^\gamma_\alpha e_\alpha = j^\delta_\gamma f_\gamma$. Итак, определено отображение $e \mapsto Ae \in F_\infty$: это отображение линейно и удовлетворяет соотношениям (9′). Для доказательства непрерывности A рассмотрим семейство операторов

$$A^\gamma = j^\gamma A\colon E_\infty \to F_\gamma. \tag{10}$$

Ввиду (9′) $A^\gamma = A^\gamma_\alpha i_\alpha$ является непрерывным оператором. Теперь наше утверждение вытекает из следующего простого факта.

Предложение 2. *Пусть F_∞ — проективный предел проективной шкалы $\mathbb{F}$, а E — некоторое л. г. п. Линейный оператор*

$$A\colon E \to F_\infty \tag{11}$$

непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывны операторы

$$A^\gamma = j^\gamma A\colon E \to F_\gamma. \tag{11′}$$

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность $V \subset F_\infty$ и подберем такую окрестность $U \subset E$, чтобы $AU \subset V$. Из определения топологии в F_∞ достаточно взять полный прообраз $(j^\gamma)^{-1}(V_\gamma)$, где V_γ — окрестность в F_γ. Из непрерывности A^γ следует существование окрестности $U \subset E$, так что $A^\gamma U \subset V_\gamma$, откуда $AU \subset V$.

Предложение 1 подсказывает

Определение. Оператор (9) называется *регулярным*, если он индуцируется непрерывным оператором (5), действующим из проективной шкалы в проективную.

Совокупность регулярных операторов обозначим через $\mathscr{L}_{\mathrm{reg}}(E_\infty, F_\infty)$. Из предложения 1 следует, что

$$\mathscr{L}_{\mathrm{reg}}(E_\infty, F_\infty) \subset \mathscr{L}(E_\infty, F_\infty).$$

Укажем достаточные условия на шкалы, при которых последнее включение переходит в равенство.

Теорема. *Пусть E_∞, F_∞ — проективные пределы проективных шкал и выполнены следующие дополнительные условия:*

(*a*) *$\mathbb{F}$ — шкала банаховых пространств;*

(*b*) *$i^\alpha E_\infty$ плотно в E_α для любого $\alpha \in K$;*

(*c*) *$i^\alpha\colon E_\infty \to E_\alpha$ — инъективный оператор.*

Тогда всякий непрерывный оператор (9) *является регулярным.*

Доказательство. Непрерывность (9) означает, что для любой окрестности $V_\gamma \subset F_\gamma$ найдется такая окрестность $U_\alpha \subset E_\alpha$, что

$$j^\gamma A((i^\alpha)^{-1} U_\alpha) \subset V_\gamma. \tag{12}$$

Здесь индекс α зависит, вообще говоря, от выбора окрестности V_γ в одном и том же пространстве F_γ. В том случае, когда F_γ — банахово пространство, можно считать, что индекс α зависит только от пространства F_γ. В самом деле, возьмем в качестве V_γ единичный шар в F_γ и определим U_α так, чтобы выполнялось (12). Если V'_γ — произвольная окрестность F_γ, то можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что $V'_\gamma \supset \varepsilon V_\gamma \supset j^\gamma A\left((i^\alpha)^{-1} \varepsilon U_\alpha\right)$.

Итак, на плотном множестве $E^0_\alpha = i^\alpha E_\infty \subset E_\alpha$, можно определить линейный оператор

$$A^\gamma_\alpha = j^\gamma A\,(i^\alpha)^{-1}\colon\ E^0_\alpha \to F_\gamma, \tag{13}$$

причем согласно (12) для любой окрестности F_γ можно указать такую окрестность $U_\alpha \subset E_\alpha$, что

$$A^\gamma_\alpha \left(U_\alpha \cap E^0_\alpha\right) \subset F_\gamma. \tag{13$'$}$$

Покажем, что оператор A^γ_α продолжается до непрерывного оператора из E_α в F_γ. Для удобства дальнейших ссылок мы выделим процедуру продолжения в отдельное утверждение.

Лемма. *Пусть E — произвольное л. т. п., а E_0 — подпространство, плотное в E. Пусть определен линейный оператор A_0: $E_0 \to F$, где F — банахово пространство. Пусть выполнено условие: для любой окрестности $V \subset F$ можно указать такую окрестность $U \subset E$, что $A_0(U \cap E_0) \subset V$. Тогда существует такой непрерывный оператор A: $E \to F$, что его сужение на E_0 совпадает с A_0.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $e \in E$ и аппроксимирующую его последовательность $\{e_k\} \subset E_0$. Тогда $A_0 e_k$ будет последовательностью Коши в F. В самом деле, по заданному $\varepsilon > 0$ подберем такую окрестность $U_\varepsilon \subset E$, чтобы

$$A_0(U_\varepsilon \cap E_0) \subset S_\varepsilon, \qquad S_\varepsilon = \{f \in F, \|f\| < \varepsilon\},$$

(где $\|\ \ \|$ — банахова норма в F). Из сходимости $e_k \to e$ следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k = k(\varepsilon)$, так что $e_{k'} - e_{k''} \subset U_\varepsilon \cap E_0$ при $k', k'' > k$, откуда $\|A_0 e_{k'} - A_0 e_{k''}\| < \varepsilon$. Ввиду полноты F последовательность $\{A_0 e_k\}$ имеет предел, который обозначим через Ae. Очевидно, что $Ae = A_0 e$ при $e \in E_0$ и оператор $e \mapsto Ae$ будет линейным и непрерывным.

Нам осталось проверить, что (13) является согласованным семейством операторов. Если $e \in E_\infty$, то с учетом соотношений (8$'$) при $\delta < \gamma$ и $\beta < \alpha$ имеем

$$j^\delta_\gamma A^\gamma_\alpha i^\alpha e \overset{\text{def}}{=} j^\delta_\gamma j^\gamma A e = j^\delta A e \overset{\text{def}}{=} A^\delta_\beta i^\beta e = A^\delta_\beta i^\beta_\alpha i^\alpha e.$$

Итак, диаграмма (3) коммутативна на плотном множестве $i^\alpha E_\infty \subset E_\alpha$. Так как все фигурирующие в (4) операторы непрерывны, то соотношения (4) имеют место на всем E_α.

Непрерывный оператор (5) в проективных шкалах называется *единичным*, если $\mathbb{F} = \mathbb{E}$, а соответствующее согласованное семейство является единичным. Очевидно, что всякий единичный оператор из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$ индуцирует тождественный оператор на E_∞.

Для непрерывных операторов в проективных шкалах естественным образом определяется композиция, и проверяется, что она также является непрерывным оператором в соответствующих проективных шкалах. Как и в п. 4, даются определения обратного оператора и квазиизоморфизма проективных шкал, причем квазиизоморфизм шкал индуцирует изоморфизм их проективных пределов.

Подмножество $K_0 \subset K$ будем называть *неограниченным сверху*, если $\forall \alpha \in K$ $\exists \alpha_0 \in K_0$, так что $\alpha_0 > \alpha$. С каждым неограниченным сверху подмножеством K_0 можно связать проективную шкалу $\mathbb{E}_0 = \left\{E_{\alpha_0}, i_{\alpha_0}^{\beta_0}\right\}$, $\alpha_0 \in K_0$, и проективный предел $E_{0\,\infty}$. Легко проверяется, что согласованное семейство тождественных отображений $E_{\alpha_0} \to E_{\alpha_0}$ определяет квазиизоморфизм шкал $\mathbb{E}_0$ и $\mathbb{E}$ и, следовательно, изоморфизм их проективных пределов.

Во всех проективных пределах, рассматриваемых в этой книге, у множества индексов всегда можно выделить неограниченное сверху счетное подмножество. Поэтому далее мы всегда можем считать, там где это необходимо, что **мы имеем дело с проективными пределами семейств пространств**, параметризованных целыми точками, скажем, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$

6. Операторы, действующие из проективных пределов в индуктивные. Пусть $\mathbb{E} = \left\{E_\alpha, i_\alpha^\beta\right\}$ — проективная шкала, а $\mathbb{F} = \left\{F_\gamma, j_\gamma^\delta\right\}$ — индуктивная шкала: непрерывным оператором (5) из проективной шкалы в индуктивную называется любое непустое согласованное семейство (2) операторов $A_\alpha^\gamma \in \mathcal{L}(E_\alpha, F_\gamma)$. Из этого определения следует, что найдутся такие α и γ, для которых существует непрерывная компонента A_α^γ. Но тогда обязаны существовать непрерывные компоненты $A_{\alpha'}^{\gamma'}$, $\alpha' \geqslant \alpha$, $\gamma' \leqslant \gamma$.

Предложение. *Всякий непрерывный оператор* (5), *действующий из проективной шкалы* $\mathbb{E}$ *в индуктивную шкалу* $\mathbb{F}$, *индуцирует непрерывный оператор A из проективного предела в индуктивный*

$$A\colon E_\infty \to F_{-\infty}, \tag{14}$$

при этом для некоторых α, γ *выполнены соотношения*

$$A = ej_\gamma A_\alpha^\gamma i^\alpha e \quad \forall e \in E_\infty. \tag{14'}$$

Доказательство этого предложения получается непосредственно и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Оператор (14) будем называть регулярным, если он индуцируется непрерывным оператором из проективной шкалы $\mathbb{E}$ в индуктивную шкалу $\mathbb{F}$.

Теорема. *Пусть* $\mathbb{E}$ — *проективная шкала банаховых пространств, а* $\mathbb{F}$ — *индуктивная шкала банаховых пространств, причем ее индуктивный предел* $F_{-\infty}$ *регулярен. Пусть вложения* $i^\alpha\colon E_\infty \to E_\alpha$ *и* $j_\gamma\colon F_\gamma \to F_{-\infty}$ *инъективны и* $i^\alpha E_\infty$ *плотно в* E_α *при любом* α. *Тогда всякий непрерывный оператор* (14) *является регулярным.*

Доказательство. Из условий теоремы мы выведем условие

(R) *найдется* α *и такой шар* $U_\alpha \subset E_\alpha$,

что множество $A\left((i^\alpha)^{-1} U_\alpha\right)$ *ограничено в* $F_{-\infty}$.

Ввиду регулярности индуктивного предела $F_{-\infty}$ из (R) следует существование γ и такого шара $V_\gamma \subset F_\gamma$, что

(R') $$A\left((i^\alpha)^{-1} U_\alpha\right) \subset j_\gamma V_\gamma.$$

Так как шар V_γ поглощает любую окрестность в F_γ, то условие (R') означает, что по любой окрестности $V_\gamma \subset F_\gamma$ подбирается соответствующая окрестность $U_\alpha \subset E_\alpha$. Ввиду инъективности морфизмов i^γ, j_γ мы можем определить оператор $A_\alpha^\gamma = j_\gamma^{-1} A \left(i^\alpha\right)^{-1}\colon i^\alpha E_\infty \to F_\gamma$, который будет удовлетворять всем условиям леммы из предыдущего пункта, и, следовательно, он продолжается до непрерывного оператора из E_α в F_γ. Так как на плотном множестве $i^\alpha E_\infty$ выполняются соотношения (3), то по соображениям непрерывности они выполнены на всем E_α. Таким образом из (R') следует, что оператор (14) — регулярный.

Условие (R) будем доказывать от противного. Мы будем считать, что α и $-\gamma$ пробегают множество натуральных чисел, т. е. $-\gamma$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ Положим

$$[e]_{(\alpha)} = \left| i^\alpha e, E_\alpha \right| \quad \forall e \in E_\infty,$$

$$|[f]|_{(\gamma)} = \begin{cases} \left| j_\gamma^{-1} f, E_\gamma \right|, & f \in j_\gamma E_\gamma, \\ +\infty, & f \in E_{-\infty} \setminus j_\gamma E_\gamma. \end{cases}$$

Можно считать, не ограничивая общности, что нормы $[e]_{(\alpha)}$, $|[f]|_{(\gamma)}$ монотонно возрастают с ростом α, γ.

Если (R) не выполнено, то в любом шаре $U_\alpha \subset E_\alpha$ оператор A: $(i^\alpha)^{-1} U_\alpha \to F_\gamma$ неограничен при любом γ, т. е. найдется такая последовательность $h_k(\alpha, \gamma)$, что

$$[h_k(\alpha, \gamma)]_{(\alpha)} \leqslant 1/\alpha, \qquad |[Ah_k(\alpha, \gamma)]|_{(\gamma)} \geqslant k.$$

Положим $h_k = h_k(k, -k)$. Ввиду монотонности норм

$$[h_k]_{(\alpha)} \leqslant 1/k \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant k,$$

$$|[Ah_k]|_{(-\alpha)} \geqslant k \quad \text{при} \quad \alpha \leqslant k.$$

В силу первой группы неравенств последовательность $\{h_k\}$ сходится к нулю в топологии E_∞ и, следовательно, ограничена. В силу второй группы неравенств последовательность $\{Ah_k\}$ неограничена в любом пространстве $F_{-\alpha}$ и, следовательно, не может быть ограниченной в $F_{-\infty}$. Таким образом, мы пришли к противоречию с условием ограниченности оператора (14). Теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы приведем два следствия, используемые в § 6.

Следствие 1. *Если оператор A: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ непрерывен, то найдутся такие s, s', l, l', что A продолжается до оператора из $\mathscr{L}\left(H^{(s')}_{(l')}, H^{(s)}_{(l)}\right)$.*

Доказательство. Пространство $\mathscr{S} = \bigcap H^{(s)}_{(l)}$ является проективным пределом банаховых пространств, причем $\mathscr{S}$ плотно в $H^{(s)}_{(l)}$ при любых s и l. Так как пространства $H^{(s)}_{(l)}$ рефлексивны, то согласно теореме из п. 3 $\mathscr{S}' = \bigcup H^{(s)}_{(l)}$ является регулярным индуктивным пределом, так что мы находимся в условиях теоремы, откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2. *Если оператор A: $\mathscr{S} \to \mathscr{O}'$ непрерывен, то $\forall l \in \mathbb{R}$ найдутся такие s, s', l', что A продолжается до оператора из $\mathscr{L}\left(H^{(s')}_{(l')}, H^{(s)}_{(l)}\right)$.*

Доказательство. Для любого l непрерывен оператор

$$A_l: \mathscr{S} \to H^{(-\infty)}_{(l)},$$

являющийся композицией оператора A и оператора вложения $C' = \bigcap_\lambda H^{(-\infty)}_{(\lambda)} \to H^{(-\infty)}_{(l)}$. Так как $H^{(-\infty)}_{(l)}$ является регулярным индуктивным пределом банаховых пространств, то остается применить теорему.

Замечание. Можно также рассматривать непрерывные операторы (5), действующие из индуктивной шкалы в проективную. Таким оператором называется согласованное семейство (2), удовлетворяющее условию: для любых α и γ определена непрерывная компонента A_α^γ. Операторы такого типа встречаются в книге, например оператор свертки $H_{(l)}^{(-\infty)} \to H_{(l)}^{(\infty)}$ $(\varphi \mapsto f * \varphi,\ f \in \mathscr{S})$. Каждый непрерывный оператор (5) из индуктивной шкалы в проективную индуцирует оператор

$$A\colon E_{-\infty} \to F_\infty, \tag{15}$$

который естественно определить как регулярный; его непрерывность очевидна.

Как легко понять, в этом случае все непрерывные операторы являются регулярными. Действительно, из непрерывности (15) следует, что для любых α и γ непрерывен оператор

$$A_\alpha^\gamma = j^\gamma A i_\alpha\colon\ E_\alpha \to F_\gamma. \tag{15'}$$

Непосредственно проверяется, что (15′) является согласованным семейством, т. е. оператор (15) регулярен.

7. Обсудим вопрос о двойственности шкал и их индуктивных и проективных пределов. Пусть $\mathbb{E} = \{E_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ — шкала л. т. п. Совокупность сопряженных пространств E_β' и сопряженных отображений $j_\beta^\alpha = (i_\alpha^\beta)^*$: $E_\beta' \to E_\alpha'$ образует шкалу $\mathbb{E}' = \{E_\beta', j_\beta^\alpha\}$. При этом если шкала $\mathbb{E}$ является индуктивной (проективной), то шкала $\mathbb{E}'$ будет проективной (индуктивной). Если $\mathbb{E}$ — индуктивная шкала, то через $E_{-\infty}$ и E_∞' обозначим соответственно индуктивный и проективный пределы шкал $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}'$, а через $(E_{-\infty})^*$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $E_{-\infty}$, наделенное сильной топологией пространства, сопряженного к $E_{-\infty}$.

Предложение 1 (см. В. П. Паламодов [1], гл. V, § 1, предложение 3).

(i) *Имеет место изоморфизм векторных пространств*

$$(E_{-\infty})^* = E_\infty'. \tag{16}$$

(ii) *Если $E_{-\infty}$ — регулярный индуктивный предел, то изоморфизм* (16) *является топологическим (т. е. топология проективного предела шкалы сопряженных пространств E_∞' совпадает с топологией сильного сопряженного к $E_{-\infty}$).*

Доказательство. (i) Пусть $e' \in (E_{-\infty})^*$. Так как каноническое отображение (4) непрерывно, то можно рассмотреть непрерывный функционал $i_\alpha^* e' \in E_\alpha'$. Совокупность таких функционалов образует нить в шкале E_∞', т. е. является элементом E_∞'. Обратно, пусть $\{e_\alpha' \in E_\alpha'\}$ — некоторая убывающая нить, являющаяся элементом E_∞'. Рассмотрим функционал e' на $E_{-\infty}$, определенный равенством

$$(e', i_\alpha e_\alpha) = (e_\alpha', e_\alpha)$$

$$\left(e_\alpha \in E_\alpha \text{ — класс эквивалентных элементов } \bigcup E_\alpha\right).$$

Этот функционал, очевидно, линеен и непрерывен, т. е. является элементом $(E_{-\infty})^*$. Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между элементами обеих пространств (16). Очевидно, что это соответствие перестановочно со сложением и умножением на скаляры, т. е. имеет место изоморфизм векторных пространств в (16).

(ii) Прежде всего заметим, что топология $(E_{-\infty})^*$ всегда сильнее топологии E'_{∞}. В самом деле, множество $U \subset E'_{\infty}$ будет окрестностью тогда и только тогда, когда $j^{\alpha}U$ для любого α принадлежит поляре некоторого ограниченного множества $B_{\alpha} \subset E_{\alpha}$; через j^{α} мы обозначили каноническое отображение E'_{∞} в E'_{α}. Прообраз поляры к B_{α} при этом отображении совпадает с полярой к множеству $i_{\alpha}B_{\alpha}$. Таким образом, при изоморфизме (16) окрестности нуля в E'_{∞} переходят в поляры регулярно ограниченных множеств в $E_{-\infty}$. Окрестностями нуля в $(E_{-\infty})^*$ будут поляры всех ограниченных множеств $E_{-\infty}$, т. е. в случае произвольных индуктивных пределов класс окрестностей нуля в $(E_{-\infty})^*$ шире аналогичного класса в E'_{∞}. В случае регулярных индуктивных пределов классы ограниченных и регулярно ограниченных множеств в $E_{-\infty}$ совпадают, откуда и следует наше утверждение.

Предложение 2 (см. В. П. Паламодов [1], гл. V, § 1, предложение 4). *Пусть* $\mathbb{E}$ — *шкала рефлексивных банаховых пространств. Тогда*

(i) *индуктивный предел* $E_{-\infty}$ *рефлексивен и имеет место изоморфизм* (16);

(ii) *проективный предел* E_{∞} *рефлексивен и имеет место топологический изоморфизм*

$$(E_{\infty})^* = E'_{-\infty}, \tag{17}$$

где справа стоит индуктивный предел сопряженной шкалы $\mathbb{E}'$, *а слева — сопряженное пространство к* E_{∞}.

Доказательство. (i) Согласно теореме из п. 3 индуктивный предел рефлексивных банаховых пространств является рефлексивным пространством и регулярным индуктивным пределом. Применяя предложение 1, получим изоморфизм (16).

(ii) Рассмотрим шкалу $\mathbb{E}' = \{E'_{\alpha}, j^{\beta}_{\alpha}\}$ сопряженных пространств, и пусть $E'_{-\infty}$ — ее индуктивный предел. В силу рефлексивности пространств E_{α} шкала сопряженных пространств к пространствам шкалы $\mathbb{E}'$ совпадает с исходной шкалой $\mathbb{E}$. Если E_{∞} — проективный предел шкалы $\mathbb{E}$, то, применяя к $\mathbb{E}'$ уже доказанное утверждение (i), получим

$$E_{\infty} = \left(E'_{-\infty}\right)^*,$$

откуда

$$(E_{\infty})^* = \left(\left(E'_{-\infty}\right)^*\right)^*.$$

Из рефлексивности пространства $E'_{-\infty}$ (вытекающей из (i)) и следует (16).

В заключение сделаем замечание о пространствах $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$, где (в обозначениях § 2) $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{l} H^{(\infty)}_{(l)}$, $\mathcal{O}' = \bigcap\limits_{l} H^{(-\infty)}_{(l)}$. Из предложения 1 следует, что пространства $\mathcal{O}'$ и $\mathcal{O}^*$ (сильное сопряженное к $\mathcal{O}$) совпадают как векторные пространства, причем тождественное вложение $\mathcal{O}^* \to \mathcal{O}'$ непрерывно (т. е. топология в $\mathcal{O}^*$, вообще говоря, сильнее топологии в $\mathcal{O}'$). Вопрос о совпадении этих топологий (эквивалентный вопросу о регулярности $\mathcal{O}$, как это видно из доказательства предложения 1) является открытым.

Замечание. Несложно показать, что $(\mathcal{O}')^*$ и $\mathcal{O}$ совпадают как векторные пространства, а вложение $\mathcal{O} \to (\mathcal{O}')^*$ непрерывно. Б. М. Макаров указал авторам, что это отображение является топологическим изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, следует заметить, что пространство $\mathcal{O}'$, будучи подпространством декартова произведения $\prod\limits_{l} H_{(l)}^{(-\infty)}$, где $H_{(l)}^{(-\infty)}$ — рефлексивные пространства, будет полурефлексивным пространством (см. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], XI, теорема 4). Из полурефлексивности $\mathcal{O}'$ следует, что $(\mathcal{O}')^*$ — бочечное пространство (Бурбаки [1], IV, 3.3, предложение 4). Пространство $\mathcal{O}$ является бочечным как индуктивный предел пространств Фреше (Бурбаки [1], III.1.1). Таким образом, пространства $\mathcal{O}$ и $(\mathcal{O}')^*$ оба бочечны, а их сопряженные совпадают, следовательно, и топологии этих пространств совпадают (Бурбаки [1], IV, 2.3, предложение 5).

ГЛАВА II

ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СВЕРТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТЕПЕННОГО УБЫВАНИЯ И РОСТА

Введение

Пусть $P(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка m относительно дифференцирования по x_1:

$$P(D) = \sum_{j=0}^{m} p_j(D_2, \ldots, D_n) D_1^{m-j}.$$

Задачей Коши для P называется задача определения (гладкой) функции $u(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$P(D)u(x) = f(x), \ x_1 > 0,$$

и начальным условиям

$$D_1^j u(x)|_{x_1=0} = \varphi_j(x_2, \ldots, x_n), \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Если $\varphi_0 \equiv \ldots \equiv \varphi_{m-1} \equiv 0$, то получившаяся задача называется однородной задачей Коши.

Продолжим функции $u(x)$ и $f(x)$ нулем для $x_1 < 0$ и обозначим эти продолжения через u_+, f_+. Тогда исходное уравнение можно заменить уравнением во всем пространстве

$$P(D)u_+(x) = f_+(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

а начальные условия заменяются условием:

$$u_+(x) = f_+(x) = 0, \ x_1 < 0.$$

Получившаяся задача исследуется по схеме предыдущей главы, только все рассмотренные там пространства надо заменить на их подпространства, состоящие из функций (распределений), равных нулю при $x_1 < 0$ [1]). Мы подробно изучим шкалы таких распреде-

[1]) При этом в случае $\mathcal{S}$ или $\mathcal{O}$ автоматически рассматриваются лишь функции, имеющие нуль бесконечного порядка при $x_1 = 0$. Возможна иная постановка однородной задачи Коши для гладких функций, при которой это требование не возникает (см. Введение к гл. IV).

лений и опишем их фурье-образы (теоремы Пэли — Винера). Мы определим свертку и свертыватели на таких пространствах и найдем необходимые и достаточные условия разрешимости сверточных уравнений в пространствах функций (распределений) степенного убывания и роста.

Не следует думать, что разрешимость в убывающих функциях является более слабым свойством оператора по сравнению с разрешимостью в растущих функциях: хотя данные берутся из более узкого пространства, но и решение ищется в более узком классе. Аналогично, разрешимость в распределениях не является более сильным свойством оператора по сравнению с разрешимостью в гладких функциях. В случае $\mathbb{R}^n$ мы рассмотрели пространства $\mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}'$; условия обратимости в них операторов свертки совпали.

В этой главе мы получим аналогичные результаты для подпространств $\mathscr{S}_+$, $\mathscr{O}_+$, $(\mathscr{S}')_+$, $(\mathscr{O}')_+$, состоящих из элементов, сосредоточенных в полупространстве $x_1 \geqslant 0$. В этом случае условия разрешимости в растущих и убывающих функциях (распределениях) будут различными.

Сопряженными пространствами к пространствам Φ_+ функций (распределений) на $\mathbb{R}^n$ с носителем в полупространстве $x_1 \geqslant 0$ будут фактор-пространства $(\Phi')_\oplus$ пространств Φ' распределений (функций) по подпространствам распределений (функций), сосредоточенных в полупространстве $x_1 \leqslant 0$. Параллельно с теорией функциональных пространств, операторов свертки и сверточных уравнений в Φ_+ строится сопряженная теория фактор-пространств $\Phi_\oplus$, причем некоторые результаты для пространств типа Φ_+ получаются из соответствующих результатов для фактор-пространств по соображениям сопряженности.

Отдельно изучаются функциональные пространства и сверточные уравнения в конечной полосе.

Обозначения и некоторые определения. Выделим в $\mathbb{R}^n$ одну координату $t = x_1$, а остальные обозначим через y, т. е. $x = (t, y)$, $y = (x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\sigma, \eta)$, $\eta = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$ — двойственные переменные относительно формы $\langle x, \xi\rangle = t\sigma + \langle y, \eta\rangle$; $\tau = \sigma + i\rho$ — комплексная переменная, двойственная t.

Если Φ — некоторое пространство функций или распределений, в котором есть понятие носителя, то положим

$$\Phi_\pm = \{\varphi \in \Phi, \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n_\pm\}, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}^n_\pm = \{(t, y) \in \mathbb{R}^n, \pm t \geqslant 0, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. $\Phi_\pm$ будет линейным подпространством в Φ; мы будем наделять его топологией, индуцированной топологией Φ.

Через $\Phi_\oplus$, $\Phi_\ominus$ обозначим фактор-пространства

$$\Phi_\oplus = \Phi/\Phi_-, \quad \Phi_\ominus = \Phi/\Phi_+, \tag{1'}$$

наделенные естественной топологией.

Оператор сдвига T_h при $h=(a, 0, \ldots, 0)$ для краткости будем обозначать через T_a. Отметим, что $T_{-a}\Phi_{\pm}$ будет подпространством тех элементов Φ, которые равны 0 при $\pm t \leqslant a$.

Для $a < b$ положим

$$\Phi[a, b) = T_{-a}\Phi_+/T_{-b}\Phi_+, \quad \Phi(a, b] = T_{-b}\Phi_-/T_{-a}\Phi_-. \tag{2}$$

Будем допускать, что в определении (2) одно из чисел может принимать значения $-\infty$ или $+\infty$; при этом $\Phi_+ = \Phi[0, \infty)$, $\Phi_- = \Phi(-\infty, 0]$, $\Phi_\oplus = \Phi(0, +\infty]$, $\Phi_\ominus = \Phi[-\infty, 0)$.

Пространства типа Φ_+ и $\Phi[a, b)$ отвечают однородной задаче Коши с нулевыми данными при $t=0$ или $t=a$ в полупространстве $t \geqslant 0$ или в конечной полосе $a \leqslant t < b$. Пространства $\Phi_\oplus$ и $\Phi(a, b]$ отвечают сопряженной задаче.

В этой главе мы будем иметь дело с пространствами $\Phi_{[\omega]}$, где $\omega = (\rho, 0, \ldots, 0)$; для краткости будем писать $\Phi_{[\rho]}$, а соответствующие нормы из § 1.5 будем обозначать $|\quad|^{(s)}_{(l)[\rho]}$, $\|\quad\|^{(s)}_{(l)[\rho]}$ и т. д.

§ 1. Пространства функций и распределений с носителями в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$

1.1. Пространства $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{O}_+$. Так как в $\mathscr{D}'$ определено понятие носителя, то общее определение подпространства Φ_+, приведенное во Введении, имеет смысл для $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, C^{(m)}_{(l)}, H^{(s)}_{(l)}, \mathscr{O}', \mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$, причем Φ_+ будет замкнутым подпространством, т. е.

$$\begin{gathered}\{\varphi_j \in \Phi_+,\ \varphi_j \to \varphi \in \Phi\ (\text{в топологии } \Phi)\} \Rightarrow \{\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n_+\},\\ \Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, C^{(m)}_{(l)}, H^{(s)}_{(l)}, \mathscr{O}', \mathscr{S}'.\end{gathered} \tag{1}$$

Это утверждение достаточно проверить для наиболее широкого из указанных пространств, т. е. для $\Phi = \mathscr{S}'$. Расшифровывая определение носителя (см. п. I.1.2), получим, что (1) эквивалентно тривиальному утверждению

$$\{\varphi_j \in \mathscr{S}', (\varphi_j, \psi_-) = 0 \quad \forall \psi_- \in \mathscr{S}_-,\ \varphi_j \to \varphi \text{ в } \mathscr{S}'\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(\varphi, \psi_-) = 0 \quad \forall \psi_- \in \mathscr{S}_-\} \Leftrightarrow \{\operatorname{supp}\varphi \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Вложения $\Phi^{(m)}_{(l)} \subset \Phi^{(m')}_{(l')}$, $m \geqslant m'$, $l \geqslant l'$, $\Phi = C, H$ индуцируют аналогичные вложения подпространств $\Phi^{(m)}_{(l)+}$, перестановочные с инъективными вложениями $\Phi^{(m)}_{(l)+} \to \Phi^{(m)}_{(l)}$. В связи с этим можно определить шкалы подпространств, $\{\Phi^{(m)}_{(l)+}\}$, $\Phi = C, H$, и их проективные пределы, которые естественным образом отождествляются с подпространством $\mathscr{S}_+ \subset \mathscr{S}$:

$$\mathscr{S}_+ = C^{(\infty)}_{(\infty)+} = \bigcap C^{(m)}_{(l)+} = H^{(\infty)}_{(\infty)+} = \bigcap H^{(m)}_{(l)+} \tag{2}$$

(совпадение пространств $C^{(\infty)}_{(\infty)+}$ и $H^{(\infty)}_{(\infty)+}$ следует из того, что вложения (I.2.26), (I.2.27) естественным образом продолжаются на подпространства функций, равных 0 при $t < 0$).

6*

Аналогичным образом дело обстоит и с пространством $\mathcal{O}_+$:

$$\mathcal{O}_+ = \bigcup_l \bigcap_m C^{(m)}_{(l)+} = \bigcup_l \bigcap_m H^{(m)}_{(l)+}. \qquad (3)$$

Для изучения преобразования Фурье в $\mathcal{S}_+$ полезна следующая

Лемма 1. *$\varphi \in C^{(m)}_{(l)+}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C^{(m)}_{(l)[\rho]}$ для всех $\rho < 0$ и конечна норма*

$$|\varphi|^{(m)}_{(l)+} = \sup_{\rho<0} |\varphi|^{(m)}_{(l)[\rho]}. \qquad (4)$$

Более того,

$$|\varphi|^{(m)}_{(l)+} = |\varphi|^{(m)}_{(l)} \quad \forall \varphi \in C^{(m)}_{(l)+}. \qquad (4')$$

Доказательство. Если $\varphi \in C^{(m)}_{(l)+}$, то норма $|\varphi|^{(m)}_{(l)[\rho]}$ конечна при $\rho \leqslant 0$, монотонно возрастает и достигает максимума при $\rho = 0$, т. е. имеет место (4′).

С другой стороны, если у функции φ конечна норма (4), то она обращается в нуль при $t < 0$: (поскольку $\exp(\rho t_0)|\varphi(t_0, y_0)| \to \to +\infty$ при $\varphi(t_0, y_0) \neq 0$ и $t_0 < 0$, $\rho \to -\infty$). Далее, из конечности нормы (4) вытекает, что

$$e^{\rho t}(1 + |x|^2)^{l/2} |D^\alpha \varphi(x)| \leqslant |\varphi|^{(m)}_{(l)+}, \quad |\alpha| \leqslant m, \quad \rho < 0.$$

По непрерывности это неравенство продолжается для $\rho = 0$, т. е. $\varphi \in C^{(m)}_{(l)}$.

Замечание. Отметим, что при доказательстве леммы мы показали, что если $\varphi \in \bigcap_{\rho<0} C^{(m)}_{(l)[\rho]}$ и конечна норма (4), то $\varphi \in C^{(m)}_{(l)}$.

Как показано в лемме 1, если $\varphi \in C^{(m)}_{(l)+}$, то $e^{\rho t}\varphi$ лежит в этом же пространстве, но последовательность $e^{\rho t}\varphi$ при $\rho \to -0$, вообще говоря, не сходится к φ по норме $|\ |^{(m)}_{(l)}$. Сейчас мы покажем, что имеет место сходимость по более слабой норме.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка*

$$|\varphi - e^{\rho t}\varphi|^{(m)}_{(l-\varepsilon)} \leqslant \omega_\varepsilon(\rho)|\varphi|^{(m)}_{(l)}, \quad \varphi \in C^{(m)}_{(l)+}, \quad \rho < 0, \qquad (5)$$

причем $\omega_\varepsilon(\rho) \to 0$ при $\rho \to -0$.

Доказательство. Согласно формуле Лейбница при $|\alpha| \leqslant m$

$$D^\alpha(\varphi - e^{\rho t}\varphi) = (1 - e^{\rho t}) D^\alpha\varphi - \sum_{j>0} e^{\rho t}\binom{\alpha_1}{j}\rho^j D_1^{\alpha_1 - j} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}\varphi.$$

Так как $\exp(\rho t) < 1$ при $t > 0$ (и $\varphi = 0$ при $t < 0$), то

$$(1 + |x|^2)^{(l-\varepsilon)/2} |D^\alpha(\varphi - e^{\rho t}\varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant (1 + t^2)^{-\varepsilon}(1 - e^{\rho t})|\varphi|^{(m)}_{(l)} + K(|\rho| + |\rho|^{\alpha_1})|\varphi|^{(m-1)}_{(l-\varepsilon)}.$$

Полагая $\omega_\varepsilon(\rho) = \sup_{t\geqslant 0}(1 + t^2)^{-\varepsilon}(1 - e^{\rho t}) + 2K|\rho|$, получим (5).

1.2. Преобразование Фурье в $\mathscr{S}_+$. Обозначим через $C_{(l)}^{(m)+}$ пространство функций от переменных τ, η, $\tau=\sigma+i\rho$, $\xi=(\sigma, \eta)$, обладающих следующими свойствами: 1) функция $\varphi(\tau, \eta)\in C_{(l)}^{(m)+}$ голоморфна по τ при $\operatorname{Im}\tau<0, \eta\in\mathbb{R}^{n-1}$; 2) $\varphi_\rho(\xi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(\sigma+i\rho, \eta)\in C_{(l)}^{(m)}$ при $\rho\leqslant 0$ (т. е. $C_{(l)}^{(m)+}\subset C_{(l)}^{(m)[\rho]}$ $\forall\rho<0$); 3) конечна норма (см. (I.5.17))

$$|\varphi|_{(l)}^{(m)+}=\sup_{\rho<0}|\varphi|_{(l)}^{(m)[\rho]}. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathscr{S}^+$ проективный предел пространств $C_{(l)}^{(m)+}$. Имеет место

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа*

$$\mathscr{F}\colon \varphi(t, y)\mapsto\widehat{\varphi}(\tau, \eta)=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp(-it\tau-i\langle y, \eta\rangle)\varphi(t, y)\,dt\,dy \tag{7}$$

определено для всех $\varphi\in\mathscr{S}_+$ и порождает взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение

$$\mathscr{F}\mathscr{S}_+=\mathscr{S}^+. \tag{8}$$

Утверждение теоремы является прямым следствием приведенных ниже лемм.

Лемма 1. (i) *Пусть m, $l\geqslant 0$ и целые. Для всякого $n'>n$ преобразованию* (7) *отвечает непрерывный оператор*

$$\mathscr{F}\colon C_{(l+n')+}^{(m)}\to C_{(m)}^{(l)+}. \tag{9}$$

(ii) *Если $\varphi\in C_{(l+n')+}^{(m)}$, $n'>n$, то функция $\widehat{\varphi}(\tau, \eta)$ при $\operatorname{Im}\tau\to -0$ принимает граничное значение $\widehat{\varphi}(\xi)$ в смысле $C_{(m)}^{(l)}$, т. е.*

$$|\widehat{\varphi}(\sigma+i\rho, \eta)-\widehat{\varphi}(\xi)|_{(m)}^{(l)}\to 0, \quad \rho\to -0. \tag{10}$$

Доказательство (i) сводится к проверке условий 1) — 3) исходного определения. Так как $l+n'>n$, то $\exp(\operatorname{Im}\tau t)\varphi\in L_1$ при $\operatorname{Im}\tau\leqslant 0$, $t^k\exp(\operatorname{Im}\tau t)\varphi\in L_1$, $\operatorname{Im}\tau<0$, $k>0$, откуда вытекает, что интеграл (7) абсолютно сходится при $\operatorname{Im}\tau\leqslant 0$, а его производные по τ существуют при $\operatorname{Im}\tau<0$, т. е. голоморфность $\widehat{\varphi}(\tau, \eta)$ доказана.

Согласно лемме 1 из п. 1.1 $C_{(l+n')+}^{(m)}\subset C_{(l+n')[\rho]}^{(m)}, \rho<0$, а в силу неравенства Парсеваля (I.5.20) $\widehat{\varphi}\in C_{(m)}^{(l)}[\rho]$ для любого $\rho<0$, и справедливо неравенство

$$|\widehat{\varphi}|_{(m)}^{(l)[\rho]}\leqslant c_{m,l,n'}|\varphi|_{(l+n')[\rho]}^{(m)}$$

с константой, не зависящей от ρ. Беря верхнюю грань обеих частей по $\rho<0$ и пользуясь (4′), получим

$$|\widehat{\varphi}|_{(m)}^{(l)+}\leqslant c_{mln'}|\varphi|_{(l+n')+}^{(m)}=c_{mln'}|\varphi|_{(l+n')}^{(m)}\quad \forall\varphi\in C_{(l+n')+}^{(m)},$$

так что свойства 2), 3) доказаны.

(ii) Под знаком нормы в (10) стоит преобразование Фурье функции $(1 - \exp(\rho t))\varphi$, поэтому согласно неравенству Парсеваля (лемма I.1.6)

$$|\widehat{\varphi}(\sigma + i\rho, \eta) - \widehat{\varphi}(\sigma, \eta)|^{(l)}_{(m)} < c_{lmm'}\,|\varphi - e^{\rho t}\varphi|^{(m)}_{(l+n'')},$$

где n'' выбрано так, что $n < n'' < n'$. Ввиду леммы 2 из п. 1.1, правая часть оценивается через

$$c_{lmm'}\omega_\varepsilon(\rho)\,|\varphi|^{(m)}_{(l+n')}, \quad \varepsilon = n' - n'',$$

откуда и следует (10).

Лемма 2. *Обратное преобразование Фурье — Лапласа*

$$\widehat{\varphi}(\tau, \eta) \mapsto \varphi(t, y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\operatorname{Im}\tau=\rho} \exp(it\tau + i\langle y, \eta\rangle)\,\widehat{\varphi}(\tau, \eta)\,d\operatorname{Re}\tau\, d\eta \tag{11}$$

корректно определено в пространстве $C^{(l)+}_{(m+m')}$ при $m' > n$ и переводит его в $C^{(m)}_{(l)+}$; здесь m, $l \geqslant 0$ и целые, $m' > n$.

Доказательство. Так как $\widehat{\varphi}(\tau, \eta)$ голоморфна по τ и достаточно быстро убывает при $\operatorname{Im}\tau = \mathrm{const}$, $|\operatorname{Re}\tau| \to \infty$, то согласно теореме Коши правая часть (11) не изменится, если контур интегрирования по τ сдвинуть с прямой $\operatorname{Im}\tau = \rho$ на прямую $\operatorname{Im}\tau = \rho' < 0$. Таким образом, правая часть (11) не зависит от выбора $\rho < 0$, т. е. оператор (11) корректно определен. Применяя неравенство Парсеваля (I.5.21), получим

$$|\varphi|^{(m)}_{(l)[\rho]} \leqslant c'_{mlm'}\,|\widehat{\varphi}|^{(l)}_{(m+m')} < c'_{mlm'}\,|\widehat{\varphi}|^{(l)+}_{(m+m')}.$$

Беря верхнюю грань по $\rho < 0$ и пользуясь леммой 1 из п. 1.1, найдем

$$|\varphi|^{(m)}_{(l)+} < c'_{mlm'}\,|\widehat{\varphi}|^{(l)+}_{(m+m')}.$$

Сделаем несколько замечаний о пространствах $C^{(l)+}_{(m)}$, $\mathscr{S}^+$. Положим

$$\delta^+_s(\tau, \eta) = \left(i\tau + \sqrt{1 + |\eta|^2}\right)^s. \tag{12}$$

Упражнение. Проверьте, что $\forall m \in \mathbb{R}$ отображение

$$C^{(l)+}_{(m)} \to C^{(l)+}_{(m-s)}\left(\varphi \mapsto \delta^+_s(\tau, \eta)\,\varphi\right)$$

является изоморфизмом пространств.

Предложение 1. *Для любого $l > n$ и $m \in \mathbb{R}$ можно указать такие l', m', что функция $\psi(\sigma + i\rho, \eta) \in C^{(l)+}_{(m)}$ при $\rho \to -0$ принимает граничное значение $\psi(\sigma, \eta)$ в смысле пространства $C^{(l-l')}_{(m-m')}$.*

Доказательство. Это утверждение является прямым следствием лемм 1, 2. В самом деле, согласно лемме 2 и формуле обращения $\psi \in C^{(l)+}_{(m)}$ при целом $m > n$ является преобразованием Фурье — Лапласа некоторой функции $\varphi \in C^{(m-m')}_{(l)+}$, $m \geqslant m' > n$. Применяя лемму 1 (ii) мы получим, что $\psi(\sigma + i\rho, \eta) \to \psi(\sigma, \eta)$ по норме пространства $C^{(l-l')}_{(m-m')}$, $l'>n$. Упражнение позволяет случай произвольного $m\in\mathbb{R}$ свести к случаю целых $m>n$.

Следствие. *Пространство* $\mathscr{S}^+$ *состоит из функций* $\psi(\tau,\eta)$, *которые при каждом* $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$ *голоморфны по* τ *в открытой полуплоскости* $\operatorname{Im}\tau<0$, *бесконечно дифференцируемы по всем переменным при* $\operatorname{Im}\tau\leqslant 0$, $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$ *и имеют конечные нормы* (6). *При этом оказывается, что* $\psi(\sigma+i\rho,\ \eta)\to\psi(\sigma,\ \eta)$, $\rho\to -0$ *в топологии* $\mathscr{S}$.

Введем пространство

$$\mathscr{M}^+=\bigcap_m\bigcup_l C^{(m)+}_{(l)};$$

оно состоит из функций $a(\tau,\ \eta)$, голоморфных по τ при $\operatorname{Im}\tau<0$, $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$, бесконечно дифференцируемых по всем переменным при $\operatorname{Im}\tau\leqslant 0,\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$ и таких, что $\forall\alpha\,\exists\mu_\alpha, c_\alpha$, так что

$$|\partial^\alpha a(\tau,\eta)|<c_\alpha(1+|\tau|+|\eta|)^{\mu_\alpha}.$$

Непосредственно устанавливается

Предложение 2. (i) $\mathscr{M}^+$ — *коммутативное кольцо относительно умножения*;

(ii) $\mathscr{S}^+$ — *идеал кольца* $\mathscr{M}^+$, *т. е. определен и непрерывен оператор*

$$\mathscr{M}^+\times\mathscr{S}^+\to\mathscr{S}^+\quad(\{a(\tau,\eta),\ \varphi(\tau,\eta)\}\mapsto a(\tau,\eta)\,\varphi(\tau,\eta));$$

(iii) $$\delta^+_s(\tau,\eta)\in\mathscr{M}^+\quad\forall s\in\mathbb{R}.$$

Поскольку функции $a(\tau,\ \eta)\in\mathscr{M}^+$ являются мультипликаторами на $\mathscr{S}^+$, то с помощью преобразования Фурье — Лапласа (7) можно на $\mathscr{S}_+$ корректно определить п. д. о.

$$a(D)\varphi=\mathscr{F}^{-1}_{(\tau,\eta)\to x}a(\tau,\eta)\mathscr{F}_{x\to(\tau,\eta)}\varphi=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\operatorname{Im}\tau=\rho}a(\tau,\eta)\exp(it\tau+i\langle y,\eta\rangle)\widehat{\varphi}(\tau,\eta)\,d\xi,\ \ a\in\mathscr{M}^+,\ \varphi\in\mathscr{S}_+, \tag{13}$$

причем правая часть не зависит от выбора $\rho<0$ (лемма 2). Итак,

$$a(D)\,\mathscr{S}_+\subset\mathscr{S}_+\quad\forall a(\tau,\eta)\in\mathscr{M}^+. \tag{14}$$

Естественным образом определяются пространства $C^{(l)-}_{(m)}$ (надо всюду нижнюю полуплоскость заменить на верхнюю), $\mathscr{S}^-$, $\mathscr{M}^-$. Имеем $\mathscr{F}\mathscr{S}_-=\mathscr{S}^-$; функции из $\mathscr{M}^-$ будут мультипликаторами на $\mathscr{S}^-$ и

$$a(D)\,\mathscr{S}_-\subset\mathscr{S}_-\quad\forall a(\tau,\eta)\in\mathscr{M}^-. \tag{14'}$$

1.3. Пространство H_+. Преобразование Фурье в H_+. Через $H_\pm$ мы обозначаем подпространства H, состоящие из функций, равных 0 (почти всюду) при $\pm t\geqslant 0$. Очевидно, что эти подпространства ортогональны относительно скалярного произведения в H и H разлагается в прямую сумму: $H = H_+ \oplus H_-$.

Как и в лемме 1 из п. 1.1, доказывается, что $\varphi \in H_+$ тогда и только тогда, когда $\exp(\rho t)\varphi \in H$ при $\rho < 0$ и конечна норма

$$\|\varphi\|_+ = \sup_{\rho<0} \|\varphi\|_{[\rho]} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\rho<0} \|\exp(\rho t)\varphi\|. \tag{15}$$

Более того,

$$\|\varphi\|_+ = \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in H_+. \tag{16}$$

Если $\varphi \in H_+$, то $\exp(\rho t)\varphi \in H_+$ при $\rho \leqslant 0$ и, в отличие от случая пространств $C^{(m)}_{(l)+}$ (лемма 2 из п. 1.1), эти функции непрерывно зависят от ρ по норме $\| \ \|$. В самом деле, интеграл

$$\int |e^{\rho t}\varphi - e^{\rho' t}\varphi|^2\, dx, \quad \rho, \rho' < 0,$$

не превосходит $2\left(\|\varphi\|^2_{[\rho]} + \|\varphi\|^2_{[\rho']}\right) \leqslant 4\|\varphi\|^2$. Так как подынтегральное выражение является непрерывной функцией от ρ и ρ', то из равномерной сходимости интеграла следует, что он будет непрерывной функцией ρ, ρ' и, в частности, (ср. (5))

$$\|\varphi - \exp(\rho t)\varphi\| \to 0, \quad \rho \to -0. \tag{17}$$

Обозначим через H^+ пространство функций $\psi(\tau, \eta)$, которые: 1) голоморфны по τ при $\operatorname{Im}\tau < 0$ и почти всех $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$; 2) $\psi_\rho(\xi) = \psi(\sigma + i\rho, \eta) \in H$ для всех $\rho < 0$; 3) конечна норма

$$\|\psi\|^+ = \sup_{\rho<0} \|\psi\|^{[\rho]}.$$

Теорема (Пэли — Винер). *Преобразование Фурье — Лапласа устанавливает изометрический изоморфизм*

$$\mathcal{F} H_+ = H^+, \quad \|\varphi\|_+ = \|\widehat{\varphi}\|^+ \quad \forall \varphi \in H_+. \tag{18}$$

Следствие. *Функция* $\psi(\sigma + i\rho, \eta) \in H^+$ *при* $\rho \to -0$ *имеет (в смысле* H*) предел* $\psi(\xi) \in H$.

Доказательство. Согласно теореме для $\psi \in H^+$ можно указать такую функцию $\varphi \in H_+$, что $\psi(\sigma + i\rho, \eta) = \widehat{\exp(\rho t)\varphi}(\sigma, \eta)$. Положим $\psi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$. В силу равенства Парсеваля и (17)

$$\int |\psi(\sigma + i\rho, \eta) - \psi(\xi)|^2\, d\xi = \int |e^{\rho t}\varphi - \varphi|^2\, dx \to 0, \quad \rho \to -0.$$

При доказательстве теоремы нам понадобится

Лемма. *При* $\operatorname{Im}\tau < 0$ *справедлива оценка*

$$\left(\int |\psi(\tau, \eta)|^2\, d\eta\right)^{1/2} \leqslant (2\pi |\operatorname{Im}\tau|)^{-1/2} \|\psi\|^+ \quad \forall \psi \in H^+. \tag{19}$$

Доказательство. Функция $\psi(\tau, \eta) \in H^+$ для почти всех η и $\operatorname{Im}\tau < \gamma < 0$ представляется в виде интеграла Коши (см.

Винер, Пэли [1])

$$\psi(\tau, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\sigma + i\gamma, \eta)}{\sigma - \operatorname{Re}\tau + i(\gamma - \operatorname{Im}\tau)} d\sigma.$$

Согласно неравенству Шварца

$$|\psi(\tau, \eta)|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{(\sigma - \operatorname{Re}\tau)^2 + (\gamma - \operatorname{Im}\tau)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma + i\gamma, \eta)|^2 d\sigma.$$

Первый интеграл в правой части равен $\pi/|\operatorname{Im}\tau - \gamma|$, поэтому

$$\int |\psi(\tau, \eta)|^2 d\eta \leqslant (4\pi |\operatorname{Im}\tau - \gamma|^{-1}) \int \int |\psi(\sigma + i\gamma, \eta)|^2 d\sigma\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant (4\pi |\operatorname{Im}\tau - \gamma|)^{-1} (\|\psi\|^{+})^2.$$

Полагая $\gamma = \operatorname{Im}\tau/2$, получим требуемую оценку.

Доказательство теоремы. Сначала проверим, что

$$\mathscr{F} H_{+} \subset H^{+}, \quad \|\widehat{\varphi}\|^{+} = \|\varphi\|_{+} = \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in H_{+}. \tag{20}$$

Пусть $\varphi(t, y) \in H_{+}$. Тогда $\exp(\rho t)\varphi \in H$ при $\rho \leqslant 0$, а поэтому определено преобразование Фурье $\widehat{\varphi}(\sigma + i\rho, \eta) = \mathscr{F}(\exp(\rho t)\varphi)$. Согласно равенству Парсеваля

$$\int |\widehat{\varphi}(\sigma + i\rho, \eta)|^2 d\xi = \int e^{\rho t} |\varphi(t, y)|^2 dt\, dy, \quad \rho < 0.$$

Взяв верхнюю грань обеих частей равенства по $\rho < 0$ и воспользовавшись (16), получим равенство норм в (20).

Для доказательства (20) нам осталось проверить, что преобразование Фурье $\widehat{\varphi}(\tau, \eta)$ $(\varphi \in H_{+})$ голоморфно по τ при $\operatorname{Im}\tau < 0$ Если $\varphi \in \mathscr{S}_{+}$, то наше утверждение вытекает из теоремы 1.2. В общем случае аппроксимируем $\varphi \in H_{+}$ последовательностью $\varphi_j \in \mathscr{S}_{+}$, $\|\varphi_j - \varphi\| \to 0$ при $j \to \infty$. Так как $\widehat{\varphi}_j \in \mathscr{S}^{+} \subset H^{+}$ (последнее включение очевидно), то к $\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}_k$ можно применить оценку (19). Воспользовавшись уже доказанным равенством норм в (20), получим при $\operatorname{Im}\tau < -\delta < 0$

$$\left(\int |\widehat{\varphi}_j(\tau, \eta) - \widehat{\varphi}_k(\tau, \eta)|^2 d\eta\right)^{1/2} \leqslant (2\pi\delta)^{-1/2} \|\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}_k\|^{+} =$$
$$= (2\pi\delta)^{-1/2} \|\varphi_j - \varphi_k\| < \varepsilon$$

при $j, k > j(\varepsilon)$. Отсюда следует, что для почти всех $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ последовательность $\{\widehat{\varphi}_j(\tau, \eta)\}$ равномерно сходится в любой полуплоскости $\operatorname{Im}\tau < -\delta < 0$. Так как функция $\widehat{\varphi}_j(\tau, \eta)$ голоморфна по τ, то и предельная функция для почти всех $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ будет голоморфной по τ, $\operatorname{Im}\tau < 0$.

Теперь мы покажем, что для каждой функции $\psi(\tau, \eta) \in H^{+}$ можно указать такую функцию $\varphi \in H_{+}$, что $\widehat{\varphi} = \psi$.

Зафиксируем $\rho < 0$. Так как $\psi_\rho(\xi) = \psi(\sigma + i\rho, \eta) \in H$, то найдется $\Phi_\rho \in H$, так что $\psi_\rho = \widehat{\Phi}_\rho$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|\Phi_\rho\| = \|\widehat{\Phi}_\rho\| = \|\psi\|^{[\rho]} \leqslant \|\psi\|^{+}.$$

Положим $\Phi_\rho = \exp(\rho t)\varphi_\rho$. Если мы докажем, что φ_ρ не зависит от ρ, т. е. $\varphi_\rho = \varphi \quad \forall\rho<0$, то отсюда ввиду (17) будет следовать, что $\varphi \in H_+$.

Возьмем $\chi \in \mathscr{D}$. Из определения преобразования Фурье в $\mathscr{S}'$ следует, что

$$(\varphi_\rho, I\chi) = \left(e^{-\rho t}\Phi_\rho, I\chi\right) = \left(\Phi_\rho, I\left(e^{\rho t}\chi\right)\right) =$$

$$= \left(\widehat{\Phi}_\rho, \chi\,\widehat{\exp(\rho t)}\right) = \int\limits_{\operatorname{Im}\tau=\rho} \psi(\tau, \eta)\,\widehat{\chi}(\tau, \eta)\,d\sigma\,d\eta, \quad \sigma = \operatorname{Re}\tau.$$

Если мы покажем, что правый интеграл не изменится при замене ρ на $\rho' < 0$, то тогда $\varphi_\rho - \varphi_{\rho'} = 0$ (в смысле $\mathscr{D}'$), откуда и следует, что φ_ρ не зависит от ρ.

Согласно (19) функция $\psi(\tau, \eta)$ для почти всех η ограничена на прямой $\operatorname{Im}\tau = -\delta < 0$. Так как $\chi \in \mathscr{D}$, то преобразование Фурье $\widehat{\chi}(\tau, \eta)$ — целая функция (по τ), убывающая по $\operatorname{Re}\tau$ быстрее любой степени. Таким образом, согласно теореме Коши, для почти всех η

$$\int\limits_{\operatorname{Im}\tau=\rho} \psi(\tau, \eta)\,\widehat{\chi}(\tau, \eta)\,d\sigma = \int\limits_{\operatorname{Im}\tau=\rho'} \psi(\tau, \eta)\,\widehat{\chi}(\tau, \eta)\,d\sigma.$$

Интегрируя это равенство по η, получим нужное нам утверждение. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы мы отметили, что $\mathscr{S}_+$ плотно в H_+. Но тогда ввиду теоремы $\mathscr{F}\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}^+$ плотно в H^+.

1.4. Пространства $H_+^{(s)}$. В основе теории пространства $H^{(s)}$, изложенной в § 1.2, лежало представление этого пространства в виде образа «нулевого» пространства $H^{(0)} = H$ при действии градуирующего п. д. о. $\delta_{-s}(D)$, т. е.

$$H^{(s)} = \delta_{-s}(D)H. \tag{21}$$

Мы начнем с того, что докажем аналогичное представление для подпространств $H_+^{(s)} = \left\{f \in H^{(s)}, \operatorname{supp} f \subset \overline{\mathbb{R}_+^n}\right\}$.

Прежде всего заметим, что изоморфизм (21) останется в силе, если заменить п. д. о. $\delta_{-s}(D)$ на любой другой п. д. о. $\lambda_{-s}(D)$, символ которого удовлетворяет условию

$$c^{-1}|\delta_{-s}(\xi)| < |\lambda_{-s}(\xi)| < c|\delta_{-s}(\xi)|.$$

Если же $|\delta_{-s}(\xi)| = |\lambda_{-s}(\xi)|$, то норма, определяемая оператором $\lambda_{-s}(D)$, будет совпадать с исходной. Мы заменим оператор $\delta_{-s}(D)$ на такой п. д. о., который переводит распределения, сосредоточенные в $\overline{\mathbb{R}_+^n}$, в распределения, обладающие этим же свойством.

В силу сказанного, в качестве градуирующего оператора в $H_+^{(s)}$ можно взять п. д. о. $\delta_s^+(D)$ (см. (12)). Так как $|\delta_s^+(\xi)| = |\delta_s(\xi)|$, то $\|f\|^{(s)} = \|\delta_s^+(D)f\|$, а (21) остается в силе при замене δ_{-s} на δ_{-s}^+. Следующее утверждение содержит описание подпространств $H_+^{(s)}$.

Предложение 1 (ср. предложение 1 из п. I.2.2). (i) *При любых* s, r *отображение*

$$H_+^{(s)} \to H_+^{(s-r)} \left(f \to \delta_r^+ (D) f\right) \tag{22}$$

является изометрическим изоморфизмом.

(ii) $f \in H_+^{(s)}$ *тогда и только тогда, когда* $f = \delta_{-s}^{+}(D) g$, $g \in H_+$ *и* $\|f\|^{(s)} = \|g\|$.

(iii) $f \in H_+^{(s)}$ *тогда и только тогда, когда* $f \in H_{[\rho]}^{(s)}$ *для любого* $\rho < 0$ *и конечна норма*

$$\|f\|_+^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\rho<0} \|\delta_s^+ (D) f\|_{[\rho]} = \sup_{\rho<0} \|\delta_s^+ (D_t + i\rho, D_y) \exp(\rho t) f\|. \tag{23}$$

При этом

$$\|f\|_+^{(s)} = \|f\|^{(s)}. \tag{23'}$$

Доказательство. (i) Ввиду предложения 1 (i) из п. I.2.2 нам надо только проверить, что п. д. о. $\delta_{-r}^{+}(D)$ сохраняет носитель:

$$\operatorname{supp} \delta_r^+ (D) f \subset \overline{\mathbb{R}_+^n} \quad f \in H_+^{(s)}.$$

Возьмем $\varphi \in \mathcal{S}_-$ и рассмотрим

$$\left(\delta_r^+ (D) f, \varphi\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f, \delta_r^+ (-D) \varphi\right).$$

Так как символ $\delta_r^+ (-\tau, -\eta)$ принадлежит $\mathcal{M}^-$, то п. д. о. $\delta_r^+ (-D)$ переводит $\mathcal{S}_-$ в себя; тогда правая часть равна 0, поскольку носитель f принадлежит $\overline{\mathbb{R}_+^n}$.

(ii) тривиально следует из (i).

(iii) Если $f \in H_+^{(s)}$, то согласно (ii) $f = \delta_{-s}^{+}(D) g$, где $g \in H_+ \subset H_{[\rho]}$ при $\rho < 0$. Так как символ $\delta_{-s}^{+}(\tau, \eta)$ удовлетворяет условиям леммы I.5.4, то распределения ${}_{[\rho]}\delta_{-s}^{+}(D) g \in H_{[\rho]}^{(s)}$ не зависят от ρ и совпадают с f, так что

$$\|f\|_+^{(s)} = \|g\|_+ = \|g\| = \|f\|^{(s)} < \infty.$$

Обратно, если $f \in \bigcap\limits_{\rho<0} H_{[\rho]}^{(s)}$, то $g = \delta_s^+ (D) f \in \bigcap\limits_{\rho<0} H_{[\rho]}$, причем $\|g\|_+ = \|f\|_+^{(s)} < \infty$. Но тогда $g \in H_+$, и остается воспользоваться (ii).

Обозначим через $H_{(s)}^+$ пространство функций вида

$$H_{(s)}^+ = \{\psi(\tau, \eta) = \delta_{-s}^{+}(\tau, \eta) \varphi(\tau, \eta), \varphi(\tau, \eta) \in H^+\}$$

и введем в нем естественную норму

$$\|\psi\|_{(s)}^+ = \|\delta_s^+ \psi\|^+ = \sup_{\rho<0} |\delta_s^+ (\tau, \eta) \psi(\tau, \eta)|, \quad \tau = \sigma + i\rho. \tag{24}$$

Так как функции из H^+ при $\operatorname{Im} \tau \to -0$ принимают граничные значения в смысле H (см. следствие из теоремы Пэли — Винера), то функции из $H_{(s)}^+$ принимают граничные значения в смысле $H_{(s)}$.

Согласно предложению 1 (iii) для $f \in H_{+}^{(s)}$ при $\rho \leqslant 0$ определено преобразование Фурье — Лапласа $\hat{f}(\sigma + i\rho, \eta) = \widehat{(\exp(\rho t) f)}(\xi)$, являющееся обычной функцией. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H_{+}^{(s)} \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "\delta_s^{+}(D)"'] & H_{(s)}^{+} \arrow[d, "\delta_{-s}^{\pm}(\tau, \eta)"] \\ H_{+} \arrow[r, "\mathscr{F}"] & H^{+} \end{tikzcd}$$

Согласно предложению 1 и определению $H_{(s)}^{+}$ вертикальные отображения будут изометрическими изоморфизмами. Нижнее горизонтальное отображение является изометрическим изоморфизмом согласно теореме Пэли — Винера. Таким образом, доказано

Предложение 2. *Преобразование Фурье — Лапласа осуществляет изометрический изоморфизм*

$$\mathscr{F} H_{+}^{(s)} = H_{(s)}^{+}, \quad \|\hat{f}\|_{(s)}^{+} = \|f\|_{+}^{(s)} = \|f\|^{(s)}. \tag{25}$$

1.5. Гильбертова шкала в $\mathscr{S}_{+}$. Согласно определению (I.2.15) пространств $H_{(l)}^{(s)}$ имеем

$$H_{(l)+}^{(s)} = (1 + |x|^2)^{-l/2} H_{+}^{(s)}.$$

Из предложения 1 (i) п. 1.4 следует, что отображение

$$H_{(l)+}^{(s)} \to H_{(l)+}^{(s-r)} \quad \left(\varphi \to \delta_r^{+}(D)\varphi\right)$$

будет изометрическим изоморфизмом, откуда

$$\{f \in H_{(l)+}^{(s)}\} \Leftrightarrow \{f = (1 + |x|^2)^{-l/2} \delta_{-s}^{\pm}(D) g, g \in H_{+}, \|g\| = \|f\|_{(l)}^{(s)}\}. \tag{26}$$

Из предложения 1 (iii) из п. 1.4 вытекает, что $f \in H_{(l)+}^{(s)}$ тогда и только тогда, когда $f \in H_{(l)[\rho]}^{(s)}$ для любого $\rho < 0$ и конечна норма

$$\|f\|_{(l)+}^{(s)} = \|(1 + |x|^2)^{l/2} f\|_{+}^{(s)} = \sup_{\rho<0} \|\delta_s^{+}(D)(1 + |x|^2)^{l/2} f\|_{[\rho]}. \tag{27}$$

В силу общего соглашения об обозначениях, $(\mathscr{S}')_{+}$ состоит из распределений $f \in \mathscr{S}'$, носители которых принадлежат $\overline{\mathbb{R}_{+}^{n}}$. С другой стороны, можно рассмотреть индуктивный предел шкалы $\{H_{(l)+}^{(s)}\}$. Непосредственно проверяется совпадение этих пространств:

$$(\mathscr{S}')_{+} = \bigcup_{s,l} H_{(l)+}^{(s)}, \tag{28}$$

т. е. в этом конкретном случае операции перехода к индуктивному пределу и перехода к подпространствам элементов, сосредоточенных в $\mathbb{R}^n_+$, перестановочны.

Аналогично обстоит дело с определением $(\mathcal{O}')_+$:

$$(\mathcal{O}')_+ = \bigcap_l \bigcup_s H^{(s)}_{(l)+}. \tag{29}$$

Из (28), (29) вытекает

Лемма. (i) *$f \in (\mathcal{S}')_+$ тогда и только тогда, когда найдется такой дифференциальный оператор $P(D)$, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем: $f = P(D)g$, $g \in C_{(\lambda)+}$.*

(ii) *$f \in (\mathcal{O}')_+$ тогда и только тогда, когда $\forall l \in \mathbb{R}$ найдется такой дифференциальный оператор $P_l(D)$, что $f = P_l(D)g_l$, где $g \in C_{(l)+}$.*

1.6. Преобразование Фурье в $(\mathcal{O}')_+$. Обозначим через $H^{(l)+}_{(s)}$, $l \geqslant 0$ и целое, совокупность функций $\psi(\sigma + i\rho, \eta)$, принадлежащих $H^+_{(s)}$ вместе со всеми производными $\partial^\alpha\psi$, $|\alpha| \leqslant l$; определим в этом пространстве норму

$$\|\psi\|^{(l)+}_{(s)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant l} (\|\partial^\alpha\psi\|^+_{(s)})^2\Big)^{1/2}. \tag{30}$$

Предложение 1. *Для любых целых $l \geqslant 0$ имеет место изоморфизм*

$$\mathcal{F} H^{(s)}_{(l)+} = H^{(l)+}_{(s)}. \tag{31}$$

Доказательство. С учетом следствия из предложения 3 п. 1.2.3, $f \in H^{(s)}_{(l)}$ тогда и только тогда, когда $x^\alpha f \in H^{(s)}_+, |\alpha| \leqslant l$. Так как $\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \widehat{f}$, то отображение (31) непрерывно в силу предложения 2 из п. 1.4. С другой стороны, если $\psi \in H^{(l)+}_{(s)}$, то согласно предложению 2 из п. 1.4 ψ будет преобразованием Фурье — Лапласа распределения $f \in H^{(s)}_+$. Так как $\partial^\alpha\psi = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}$, то $x^\alpha f \in H^{(s)}_+$. Предложение доказано.

Из изоморфизмов (31) и (29) следует, что

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}')_+ = \bigcup_l \bigcap_s H^{(l)+}_{(s)}.$$

Если мы установим эквивалентность шкал $\{C^{(l)+}_{(s)}\}$ и $\{H^{(l)+}_{(s)}\}$, то правое пространство будет совпадать с $\mathcal{M}^+ = \bigcap_l \bigcup_s C^{(l)+}_{(s)}$, и тем самым будет доказана важная

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа осуществляет изоморфизм*

$$\mathcal{F}((\mathcal{O}')_+) = \mathcal{M}^+. \tag{32}$$

Итак, для доказательства (32) нам надо установить

Предложение 2. *Имеют место вложения*

$$C^{(l)+}_{(s+\varkappa)} \subset H^{(l)+}_{(s)} \subset C^{(l-\varkappa)+}_{(s)}, \quad \varkappa > n. \tag{33}$$

Доказательство. Поскольку оператор умножения на $\delta^+_r(\tau, \eta)$ осуществляет изоморфизм между $C^{(l)+}_{(s)}$ и $C^{(l)+}_{(s-r)}$ (соответственно $H_{(s)}^{(l)+}$ и $H_{(s-r)}^{(l)+}$, то можно считать, не ограничивая общности, что $s\geqslant 0$. Все числа s, $\varkappa$, l будем предполагать целыми. Согласно (31), вложению (I.2.27) и лемме I.2.1,

$$H_{(s)}^{(l)+}=\mathscr{F}\left(H_{(l)+}^{(s)}\right)\subset\mathscr{F}\left(C_{(l)+}^{(s)}\right)\subset C_{(s)}^{(l-\varkappa)+},$$

т. е. правое включение (33) доказано. Аналогично, из (31), леммы 2 из п. 1.2 и (I.2.26) следуют вложения

$$C_{(s+\varkappa)}^{(l)+}\subset\mathscr{F}\left(C_{(l)+}^{(s)}\right)\subset\mathscr{F}\left(H_{(l)+}^{(s)}\right)=H_{(s)}^{(l)+}.$$

1.7. Преобразование Фурье в $\mathcal{O}_+$ и $(\mathscr{S}')_+$ на прямой. В этом пункте мы будем иметь дело только с функциями от одного переменного $t\in\mathbb{R}$. Заметим, что функция $\varphi(t)\in C_{(l)}^{(m)}$ при $l\leqslant 1$, вообще говоря, не имеет классического преобразования Фурье. Если же $\varphi(t)=0$ при $t\leqslant 0$, то у этой функции существует классическое преобразование Фурье — Лапласа $\widehat{\varphi}(\tau)$, голоморфное при $\operatorname{Im}\tau<0$, но, вообще говоря, имеющее степенные особенности при $\operatorname{Im}\tau\to-0$. Для характеризации этих особенностей мы докажем *«неравенства Парсеваля»* (типа (I.5.13), (I.5.14)) в специальных нормах. Пусть

$$d(\rho)=\begin{cases}|\rho| & \text{при } |\rho|\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } |\rho|\geqslant 1.\end{cases}\tag{34}$$

Можно указать следующий аналог леммы 1 из п. 1.1.

Лемма 1. $\varphi(t)\in C_{(-l+\varkappa)+}^{(m)}$, $l\geqslant 0$, $\varkappa\geqslant 0$, *тогда и только тогда, когда* $\varphi(t)\in\bigcap\limits_{\rho<0}C_{(\varkappa)[\rho]}^{(m)}$ *и конечна норма*

$$\sup_{\rho<0}d^l(\rho)\,|\varphi|_{(\varkappa)[\rho]}^{(m)},\tag{35}$$

причем на $C_{(-l+\varkappa)+}^{(m)}$ *норма* (35) *эквивалентна норме* $|\ \ |_{(-l+\varkappa)}^{(m)}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если норма (35) конечна, то

$$\sup_{\rho\leqslant -1}\exp(\rho t)(1+|t|^2)^{\varkappa/2}\,|\varphi(t)|<\infty,$$

откуда следует, что $\varphi(t)=0$ при $t<0$.

Таким образом, лемма сводится к проверке эквивалентности норм (35) и $|\ \ |_{(-l+\varkappa)}^{(m)}$ на функциях, равных 0 при $t<0$. При этом достаточно рассмотреть случай $m=0$, $\varkappa=0$, т. е. доказать неравенства

$$c_l^{-1}\,|\varphi|_{(-l)}\leqslant\sup_{\rho<0}d^l(\rho)\,|\varphi|_{[\rho]}\leqslant c_l\,|\varphi|_{(-l)}.\tag{36}$$

Заменяя в (36) φ на $(1+t^2)^{\varkappa/2}D_t^k\varphi$ и беря максимум по $k=0,1,\ldots,m$, получим

$$c_l^{-1}\,|\varphi|_{(\varkappa-l)}^{(m)}\leqslant\sup_{\rho<0}d^l(\rho)\,|\varphi|_{(\varkappa)[\rho]}^{(m)}\leqslant c_l\,\|\varphi\|_{(\varkappa-l)}^{(m)},$$

что и доказывает лемму.

Неравенство (36) основано на элементарных оценках снизу и сверху верхних граней по ρ функции $\lambda_l(\rho, t) = d^l(\rho)\exp(\rho t)$.

Оценки снизу. При $t \geqslant 1$ имеем

$$\sup_{\rho<0} \lambda_l(\rho, t) \geqslant \lambda_l(-1/t, t) = e^{-1}t^{-l} > (1+t^2)^{-l/2}e^{-1}.$$

При $t \leqslant 1$ имеем

$$\sup_{\rho<0} \lambda_l(\rho, t) \geqslant \lambda_l(-1, t) = e^{-t} > e^{-1} > e^{-1}(1+t^2)^{-l/2}.$$

Оценки сверху. При $t \geqslant 1$ имеем

$$\sup_{-1\leqslant\rho<0} \lambda_l(\rho, t) = \sup_{-1\leqslant\rho<0} t^{-l}|\rho t|^l \exp(-|\rho t|) \leqslant t^{-l}\max_{\theta\geqslant 0}\theta^l e^{-\theta} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{l/2}l^l e^{-l}(1+t^2)^{-l/2} = K_l(1+t^2)^{-l/2}, \quad K_l = 2^{l/2}l^l e^{-l},$$

и

$$\sup_{\rho\leqslant -1} \lambda_l(\rho, t) = \sup_{\rho\leqslant -1} e^{\rho t} = e^{-t} \leqslant t^{-l}\max_{\theta\geqslant 0}\theta^l e^{-\theta} \leqslant K_l(1+t^2)^{-l/2},$$

наконец, при $t \leqslant 1$ имеем

$$\sup_{\rho<0} \lambda_l(\rho, t) \leqslant 1 \leqslant 2^{l/2}(1+t^2)^{-l/2}.$$

Из этих оценок непосредственно следуют неравенства (36).

Лемма 2. *При $l \geqslant 0$, $\varkappa > 1$ и любом целом $m \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{\rho<0} d^l(\rho)\,|\widehat{\varphi}|_{(m)}^{|\rho|} \leqslant c_m |\varphi|_{(-l+\varkappa)}^{(m)} \quad \forall\varphi \in C_{(-l+\varkappa)+}^{(m)}. \tag{37}$$

Доказательство. Если $\varphi \in C_{(-l+\varkappa)+}^{(m)}$, то по лемме 1 $\varphi \in C_{(\varkappa)[\rho]}^{(m)}$ при $\rho < 0$ и согласно неравенству Парсеваля (I.5.20)

$$|\widehat{\varphi}|_{(m)}^{|\rho|} \leqslant c_m |\varphi|_{(\varkappa)[\rho]}^{(m)}, \quad \varkappa > 1.$$

Умножив обе части на $d^l(\rho)$, взяв верхнюю грань по $\rho < 0$ и воспользовавшись леммой 1, получим (37).

Предложение 1. *Для функции $\psi(\tau)$, определённой в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau < 0$, следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\psi(\tau)$ является преобразованием Фурье — Лапласа функции $\varphi \in \mathcal{O}_+$, т. е. задается абсолютно сходящимся интегралом*

$$\psi(\tau) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\tau)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{O}_+(\mathbb{R}), \operatorname{Im}\tau < 0. \tag{38}$$

(ii) *$\psi(\tau)$ голоморфна при $\operatorname{Im}\tau < 0$ и $\exists l \geqslant 0$, так что $\forall m \in \mathbb{Z}_+$*

$$|\psi(\tau)| < c_m d^{-l}(\operatorname{Im}\tau)(1+|\tau|)^{-m}. \tag{39}$$

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Если $\varphi \in \mathcal{O}_+$, то интеграл (38) и все его производные абсолютно сходятся при $\operatorname{Im}\tau < 0$, откуда следует голоморфность $\psi(\tau)$. Далее, можно указать такие $l \geqslant 0$ и $\varkappa > 1$, что $\varphi \in C^{(\infty)}_{(-l+\varkappa)+}$. Согласно лемме 2 для $m = 0, 1, \ldots$ имеет место оценка (37), откуда и следуют неравенства (39).

(ii)$\Rightarrow$(i) Если функция $\psi(\tau)$ голоморфна и удовлетворяет оценкам (39), то интеграл

$$\varphi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\operatorname{Im}\tau=\rho<0} \exp(it\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \tag{40}$$

абсолютно сходится при любом $\rho < 0$ и по теореме Коши не зависит от выбора ρ. Согласно неравенству Парсеваля (I.5.21) для любого $m = 0, 1, \ldots$ и любого $\varkappa > 1$, $|\varphi|^{(m)}_{[\rho]} \leqslant c_m |\psi|^{[\rho]}_{(m+\varkappa)}$. Из (39) следует, что найдется такое $l \geqslant 0$, что

$$\sup_{\rho<0} d^l(\rho)\,|\varphi|^{(m)}_{[\rho]} < \infty.$$

В силу леммы 1 $\varphi \in C^{(m)}_{(-l)+}$ для любого $m = 0, 1, \ldots$, т. е. $\varphi \in \mathscr{O}_+$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Для функции $\psi(\tau)$, определенной в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau < 0$, следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\psi(\tau)$ является преобразованием Фурье — Лапласа распределения $\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, т. е. $\forall \rho < 0$ функция $\psi(\sigma + i\rho)$ является преобразованием Фурье (в смысле $\mathscr{S}'$) распределения* $\exp(\rho t)\varphi \in (\mathscr{O}'(\mathbb{R}))_+$;

(ii) *функция $\psi(\tau)$ голоморфна при* $\operatorname{Im}\tau < 0$, *и найдутся такие $l \geqslant 0$, $c > 0$, s, что*

$$|\psi(\tau)| < cd^{-l}(\operatorname{Im}\tau)(1 + |\tau|)^s. \tag{41}$$

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Если $\varphi \in (\mathscr{S}')_+$, то согласно лемме 1.5 (i) $\varphi = P(D)\varphi_0$, где $\varphi_0 \in C_{(-l+\varkappa)+}$, $l \geqslant 0$, $\varkappa > 1$, $P(\xi)$ — полином. В предложении 1 мы фактически доказали, что функция $\widehat{\varphi}_0(\tau)$ голоморфна и удовлетворяет оценке (41) с $s = 0$. Поскольку $\psi(\tau) = P(\tau)\widehat{\varphi}_0(\tau)$, то $\psi(\tau)$ голоморфна при $\operatorname{Im}\tau < 0$ и для нее выполнена оценка (41) с $s = \deg P$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Подберем натуральное k таким образом, чтобы для функции $\psi_0(\tau) = (1 + i\tau)^{-k}\psi(\tau)$ (голоморфной при $\operatorname{Im}\tau < 0$) выполнялась оценка (41) для $s < -1$. Из рассуждений предложения 1 следует, что $\psi_0(\tau)$ является преобразованием Фурье — Лапласа функции $\varphi_0 \in C_{(-l)+}$. Но тогда $\psi(\tau)$ является преобразованием Фурье — Лапласа распределения $\left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right)^k \varphi_0 \in (\mathscr{S}')_+$.

Упражнение. Пусть $\varphi \in (\mathscr{S}')_+$. Тогда (как уже отмечалось выше) $\exp(\rho t)\varphi \in (\mathscr{O}')_+$ $\forall \rho < 0$. Докажите, что $\exp(\rho t)\varphi - \varphi \to 0$ при $\rho \to -0$ в топологии $\mathscr{S}'$.

Замечания. 1) Функция $\psi(\tau)$, удовлетворяющая условию (ii) предложения 2, при $\operatorname{Im}\tau \to -0$ может иметь степенные особенности, т. е. в классическом смысле она не принимает граничных значений при $\operatorname{Im}\tau \to -0$. Однако она принимает граничные значения в смысле $\mathscr{S}'$. В самом деле, согласно предложению 2 $\psi(\tau)$ является преобразованием Фурье — Лапласа распределения $\varphi \in (\mathscr{S}')_+$, т. е. если $\psi_\rho(\sigma) = \psi(\sigma + i\rho)$, то

$$(\psi_\rho, \widehat{\chi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\rho)\,\widehat{\chi}(\sigma)\,d\sigma = (\exp(\rho t)\,\varphi, I\chi).$$

Согласно упражнению правая часть стремится к $(\varphi, I\chi)$ при $\rho \to -0$. Но тогда $\psi_\rho \to \widehat{\varphi}$ при $\rho \to -0$ в смысле $\mathscr{S}'$.

2) Как легко видеть, функции $\psi(\tau)$, удовлетворяющие условию (ii) предложений 1 или 2, образуют кольцо относительно умножения.

1.8. Преобразование Фурье — Лапласа в $(\mathscr{K}')_+$.[1]) Обозначим через $\mathscr{L}^+$ пространство функций $\psi(\tau, \eta)$, определенных при $\operatorname{Im}\tau < 0$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, голоморфных по τ, бесконечно дифференцируемых по η и таких, что $\exists l \geqslant 0$, так что $\forall \beta$ найдутся такие K_β, s_β, что

$$|\partial_\eta^\beta \psi(\tau, \eta)| < K_\beta d^{-l}(\operatorname{Im}\tau)(1 + |\tau| + |\eta|)^{s_\beta}. \tag{42}$$

Теорема. *Функция* $\psi(\tau, \eta)$ *является преобразованием Фурье — Лапласа распределения* $\varphi \in (\mathscr{K}')_+$ *тогда и только тогда, когда* $\psi \in \mathscr{L}^+$, *т. е. имеет место изоморфизм*

$$\mathscr{F}(\mathscr{K}')_+ = \mathscr{L}^+. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in (\mathscr{K}')_+$ и $\widehat{\varphi}_\eta \in \in (\mathscr{F}_{y\to\eta}\mathscr{K}'(\mathbb{R}^n_{(t,y)})_+)$ — преобразование Фурье φ по переменным y. Тогда теорему можно переформулировать в таком виде: $\psi(\tau, \eta)$ является преобразованием Фурье — Лапласа распределения $\widehat{\varphi}_\eta \in \in \mathscr{F}_{y\to\eta}(\mathscr{K}')_+$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathscr{L}^+$. Таким образом, мы фактически получили вариант предложения 2 из п. 1.7, в котором имеется зависимость от параметра $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$. В связи с этим мы ограничимся тем, что укажем необходимые модификации в доказательстве предложения 2 из п. 1.7.

1) Прежде всего заметим $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ найдется такой дифференциальный оператор $P_m(D_t)$, что

$$\widehat{\varphi}_\eta = P_m(D_t)\,\varphi^0(t, \eta), \quad \varphi^0(t, \eta) \in (C^{(0,m)}_{(\lambda_1,\lambda_2)})_+.$$

Обозначим через $\widehat{\varphi}^0(\tau, \eta)$ преобразование Лапласа от φ^0 по переменной t; оно задается интегралом (38) (в котором φ надо заменить на φ^0). При $\operatorname{Im}\tau < 0$ этот интеграл можно дифференцировать по τ (откуда следует голоморфность по τ) и существуют производные $\partial^\alpha\varphi^0$, $|\alpha| \leqslant m$.

[1]) В п. I.6.2 каждому разбиению переменных $x = (x', x'')$ мы сопоставили пространство распределений $\mathscr{K}'$ (см. (I.6.9)), имеющих степенной рост по x' и убывающих быстрее любой степени x''. Здесь и далее мы будем рассматривать пространства $\mathscr{K}'$, отвечающие $x' = t$ и $x'' = y$.

Повторяя рассуждения леммы 2 из п. 1.7, мы покажем, что

$$(1+|\eta|)^{\lambda_2}\sup_{\rho>0} d^l(\rho)\,|\partial_\eta^\alpha\widehat{\varphi}^0(\tau,\eta)|^{[\rho]}\leqslant \mathrm{const}\cdot|\varphi^0|^{(0,m)}_{(\lambda_1,\lambda_2)},$$

где $l\in\mathbb{Z}_+$, $l-\lambda_1>1$, $|\alpha|\leqslant m$. Замечая, что $\widehat{\varphi}(\tau,\eta)=$ $=P_m(\tau)\widehat{\varphi}^0(\tau,\eta)$, получим оценку (59).

2) Положим $\psi^0(\tau,\eta)=(1+i\tau)^{-k}\psi(\tau,\eta)$, где $k\in\mathbb{Z}_+$ выбрано таким образом, чтобы для ψ^0 выполнялась оценка

$$|\psi^0(\tau,\eta)|<Kd^{-l_0}(\operatorname{Im}\tau)(1+|\eta|)^{s_0}(1+|\tau|)^{-2}.$$

Тогда $\psi^0(\tau,\eta)$ имеет обратное преобразование Лапласа (по τ) $\varphi^0(t,\eta)\in C^{(0,0)}_{(-l_0,s_0)+}$, откуда $\psi(\tau,\eta)$ будет преобразованием Лапласа распределения $\left(1+\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0}\varphi^0$. Повторяя это рассуждение для $\partial_\eta^\beta\psi(\tau,\eta)$, мы получим, что обратное преобразование Лапласа функции ψ удовлетворяет условиям леммы I.6.3. Теорема доказана.

§ 2. Шкалы фактор-пространств

В § 1 мы изучили гёльдеровские и гильбертовы шкалы функций и распределений, носители которых принадлежали $\mathbb{R}^n_\pm$ (или сдвигу этого полупространства). Теперь мы рассмотрим шкалы фактор-пространств, где факторизация производится по подпространствам распределений с носителями в $\mathbb{R}^n_-$, т. е. изучаются пространства типа $\Phi_\oplus$ (в обозначениях введения к главе). Между пространствами Φ_+ из § 1 и пространствами $\Phi_\oplus$ имеют место двойственности

$$(\Phi_\oplus)'=(\Phi')_+,\qquad (\Phi_+)'=(\Phi')_\oplus,\qquad \Phi=\mathscr{S},\ \mathscr{O},\tag{1}$$

которые отвечают отношению двойственности между шкалами $\{H^{(s)}_{(l)+}\}$ и $\{H^{(s)}_{(l)\oplus}\}$.

Далее мы рассмотрим пространства $\Phi[a,b)$, $\Phi(a,b]$, связанные с конечной полосой (см. введение к главе), и установим для них двойственности

$$(\Phi[a,b))'=(\Phi')(a,b],\ (\Phi(a,b])'=(\Phi')[a,b),\ \Phi=\mathscr{S},\mathscr{O}.\tag{2}$$

Отметим, что все утверждения этого параграфа выводятся из результатов § 1 с помощью общих соображений функционального анализа. По существу, цель § 2 — лишь зафиксировать некоторые обозначения и формальные соотношения. Напомним, что пространства $\Phi[a,b)$ естественно возникают в связи с однородной задачей Коши на конечном интервале времени.

2.1. Фактор-пространство $\mathscr{S}_\oplus$ и связанные с ним шкалы. Согласно введению к главе обозначим через $C^{(m)}_{(l)\oplus}$ пространство классов смежности $C^{(m)}_{(l)} \bmod C^{(m)}_{(l)-}$:

$$C^{(m)}_{(l)\oplus}\overset{\mathrm{def}}{=}C^{(m)}_{(l)}/C^{(m)}_{(l)-}.\tag{3}$$

Фактор-норма

$$|\varphi|_{(l)\oplus}^{(m)} = \inf_{\varphi_- \in C_{(l)-}^{(m)}} |\varphi_0 + \varphi_-|_{(l)}^{(m)}, \tag{4}$$

где φ_0 — произвольный представитель класса смежности φ, превращает (3) в банахово пространство. Поскольку при вложениях

$$C_{(l)}^{(m)} \to C_{(l')}^{(m')}, \quad m \geqslant m', \quad l \geqslant l', \tag{5}$$

подпространство $C_{(l)-}^{(m)}$ переходит в подпространство $C_{(l')-}^{(m')}$, то (5) индуцируют вложения фактор-пространств

$$C_{(l)\oplus}^{(m)} \to C_{(l')\oplus}^{(m')}, \quad m \geqslant m', \quad l \geqslant l'. \tag{$5_\oplus$}$$

Тем самым определена шкала фактор-пространств, и по общей схеме Дополнения к гл. I можно определить ее проективный предел. Справедливо равенство

$$\mathcal{S}_\oplus = \bigcap_{m,l} C_{(l)\oplus}^{(m)}, \tag{6}$$

где в соответствии с принятыми соглашениями об обозначениях левое пространство понимается как фактор-пространство $\mathcal{S}$ по замкнутому подпространству $\mathcal{S}_-$, снабженное естественной фактор-топологией. Равенство (6) можно вывести из общего результата о проективных пределах пространств Фреше (см. Паламодов [1], предложение 11, § 1 гл. V). По существу, содержательным соотношением (6) мы в дальнейшем пользоваться не будем, и можно воспринимать $\mathcal{S}_\oplus$ как обозначение правой части (6). Аналогично, мы не будем доказывать содержательное соотношение

$$\mathcal{O}_\oplus = \bigcup_l \bigcap_m C_{(l)\oplus}^{(m)} \tag{7}$$

и будем воспринимать $\mathcal{O}_\oplus$ как обозначение правой части (7). Впрочем, опираясь на результаты § 3, можно показать, что правая часть совпадает с фактор-пространством $\mathcal{O}/\mathcal{O}_-$.

Положим

$$H_{(l)\oplus}^{(s)} = H_{(l)}^{(s)}/H_{(l)-}^{(s)} \tag{8}$$

и введем в этом пространстве фактор-норму

$$\|f\|_{(l)\oplus}^{(s)} = \inf_{f_- \in H_{(l)}^{(s)}} \|f_0 + f_-\|, \tag{9}$$

где f_0 — произвольный представитель класса смежности f. При определении норм в $H_{(l)}^{(s)}$ в качестве градуирующего оператора мы возьмем п. д. о. $\delta_s^-(D)$ с символом (см. общие замечания из п. 1.4)

$$\delta_s^-(\tau, \eta) = \left(-i\tau + \sqrt{1+|\eta|^2}\right)^s = \delta_s^+(-\tau, -\eta). \tag{10}$$

Как видно из предложения 1 п. 1.4, оператор $\delta_s^-(D)$ порождает изометрические изоморфизмы

$$\delta_r^-(D)\,H_{(l)}^{(s)} = H_{(l)}^{(s-r)}, \quad \delta_r^-(D)\,H_{(l)-}^{(s)} = H_{(l)-}^{(s-r)}.$$

Отсюда вытекает

Предложение. *При любых s, r, l имеет место изометрический изоморфизм*

$$\delta_r^-(D)\,H_{(l)\oplus}^{(s)} = H_{(l)\oplus}^{(s-r)}. \tag{11}$$

Следствие. $f \in H_{(l)\oplus}^{(s)}$ *тогда и только тогда, когда*

$$f = \delta_{-s}^-(D)(1+|x|^2)^{l/2}g, \quad g \in H_\oplus, \quad \|g\|_\oplus = \|f\|_{(l)\oplus}^{(s)}.$$

Вложения (I.2.26), (I.2.27) индуцируют соответствующие вложения для подпространств функций, сосредоточенных в $\mathbb{R}_-^n$, и, следовательно, индуцируют вложения фактор-пространств

$$C_{(l+\varkappa)\oplus}^{(m)} \subset H_{(l)\oplus}^{(m)} \subset C_{(l)\oplus}^{(m-\varkappa)}, \quad \varkappa > n/2. \tag{12}$$

В силу этих вложений в (6), (7) пространства $C_{(l)\oplus}^{(m)}$ можно заменить на $H_{(l)\oplus}^{(m)}$:

$$(\mathscr{S}')_\oplus = \bigcup_{s,l} H_{(l)\oplus}^{(s)}, \quad (\mathscr{O}')_\oplus = \bigcap_{l}\bigcup_{s} H_{(l)\oplus}^{(s)}. \tag{13}$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве того, что левые пространства в равенствах (13) совпадают (соответственно) с $\mathscr{S}'/(\mathscr{S}')_-$, $\mathscr{O}'/(\mathscr{O}')_-$, и будем воспринимать $(\mathscr{S}')_\oplus$ и $(\mathscr{O}')_\oplus$ как обозначения правых частей (13).

2.2. Сопряженные пространства к $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_\oplus$. Прежде чем приступить к описанию сопряженных пространств к фактор-пространствам и подпространствам, отметим факты общего характера, которые можно найти, скажем, у Бурбаки [1].

Пусть F — замкнутое подпространство банахова пространства E, E' — банахово сопряженное к E. Положим

$$F^\perp = \{h \in E',\ (h, f) = 0 \quad \forall f \in F\}.$$

Ясно, что $F^\perp$ будет замкнутым подпространством E'. Имеют место изометрические изоморфизмы

$$(E/F)' = F^\perp, \qquad F' = E'/F^\perp. \tag{14}$$

Если E — рефлексивное банахово пространство, то и пространства F и E/F также рефлексивны и $(F^\perp)^\perp = F$.

Пусть $E = H_{(l)}^{(s)}$; тогда $E' = H_{(-l)}^{(-s)}$, а двойственность этих пространств задается формой, которая получается из формы (I.1.2), рассматриваемой на $\mathscr{S}\times\mathscr{S}$, с помощью продолжения по непрерывности.

Пусть $F = H_{(l)-}^{(s)}$. Тогда $F^\perp$ будет замкнутым подпространством $H_{(-l)}^{(-s)}$, состоящим из таких $f \in H_{(-l)}^{(-s)}$, для которых $(f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_{(l)-}^{(s)}$, т. е. $f \in H_{(-l)+}^{(-s)}$. Из формул (14) вытекает

Предложение. *Форма* (I.1.2) *корректно продолжается на* $H^{(-s)}_{(-l)+} \times H^{(s)}_{(l)\oplus}$ *или на* $H^{(-s)}_{(-l)\oplus} \times H'^{(s)}_{(l)+}$ *и индуцирует двойственности*

$$\left(H^{(s)}_{(l)\oplus}\right)' = H^{(-s)}_{(-l)+}, \quad \left(H^{(s)}_{(l)+}\right)' = H^{(-s)}_{(-l)\oplus}. \tag{15}$$

Все пространства в (15) *являются рефлексивными банаховыми пространствами.*

Ввиду предложения проективные пределы $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_\oplus$ будут удовлетворять условиям предложений 1, 2 из п. 5 Дополнения к гл. I. Отсюда вытекает, что эти пространства рефлексивны, а сопряженные к ним являются индуктивными пределами соответственно фактор-пространств или подпространств, т. е. имеют место топологические изоморфизмы (1) для $\Phi = \mathscr{S}$. Из цитированных выше результатов дополнения к гл. I следуют изоморфизмы (1) векторных пространств $\Phi = \mathscr{O}$. Отметим также, что двойственности (15) остаются в силе, если индекс s (или l) принимает значение $\pm\infty$.

2.3. Пространства $\mathscr{S}[a, b)$ и $\mathscr{S}(a, b]$. В соответствии с обозначениями из введения через $\Phi[a, \infty)$ и $\Phi(-\infty, b]$ будем обозначать подпространства Φ, состоящие из таких элементов Φ, носитель которых лежит в полупространстве $t \geqslant a$ (соответственно $t \leqslant b$). Как уже отмечалось выше, $\Phi[a, \infty) = T_{-a}\Phi_+$, $\Phi(-\infty, b] = T_{-b}\Phi_-$.

Положим для $a < b$

$$C^{(m)}_{(l)}[a, b) = C^{(m)}_{(l)}[a, \infty)/C^{(m)}_{(l)}[b, \infty), \tag{16}$$

$$C^{(m)}_{(l)}(a, b] = C^{(m)}_{(l)}(-\infty, b]/C^{(m)}_{(l)}(-\infty, a] \tag{16'}$$

и снабдим эти пространства естественной фактор-нормой. Следует отметить, что

$$C^{(m)}_{(l)}(a, b] = IC^{(m)}_{(l)}[-b, -a), \tag{17}$$

поэтому любое утверждение, доказанное для пространств (16), тривиально переносится на пространства (16′), и наоборот. Далее будем говорить только о пространствах (16).

Вложения подпространств $C^{(m)}_{(l)}[a, \infty)$ индуцируют вложения фактор-пространств (16), т. е. последние образуют (проективную) шкалу, и можно рассмотреть проективный предел $C^{(\infty)}_{(\infty)}[a, b)$ этой шкалы. Справедливо равенство

$$\mathscr{S}[a, b) = C^{(\infty)}_{(\infty)}[a, b) \overset{\text{def}}{=} \bigcap C^{(m)}_{(l)}[a, b), \tag{18}$$

где левое пространство надо понимать как фактор-пространство $\mathscr{S}[a, \infty)$ по подпространству $\mathscr{S}[b, \infty)$. Как и в случае (6), это равенство можно вывести как из общих результатов о проективных пределах пространств Фреше, так и из результатов § 3. Мы этими равенствами далее пользоваться не будем, так что на правую часть (18) можно смотреть как на определения

$\mathscr{S}[a, b)$. Аналогично дело обстоит с пространством $\mathscr{O}$:

$$\mathscr{O}\,[a, b) = \bigcup_{l} C^{(\infty)}_{(l)}\,[a, b) = \bigcup_{l} \bigcap_{m} C^{(m)}_{(l)}\,[a, b). \tag{19}$$

Отправляясь от гильбертовых пространства $H^{(s)}_{(l)}$, положим

$$H^{(s)}_{(l)}\,[a, b) = H^{(s)}_{(l)}\,[a, \infty)/H^{(s)}_{(l)}\,[b, \infty) \tag{20}$$

и снабдим это пространство естественной фактор-нормой.

Так как оператор $\delta_r^+(D)$ коммутирует со сдвигами T_{-a}, T_{-b}, то согласно предложению 1 из п. 1.4 он индуцирует изоморфизмы:

$$\delta_r^+(D)\,H^{(s)}_{(l)}\,[c, \infty) = H^{(s-r)}_{(l)}\,[c, \infty), \quad c = a, b.$$

откуда следует изометрический изоморфизм фактор-пространств

$$\delta_r^+(D)\,H^{(s)}_{(l)}\,[a, b) = H^{(s-r)}_{(l)}\,[a, b). \tag{21}$$

Оператор $\delta_r^-(D)$ индуцирует аналогичные изометрические изоморфизмы пространств $H^{(s)}_{(l)}(a, b]$.

Из вложений типа (I.2.26), (I.2.27) для подпространств $C^{(m)}_{(l)}\,[c, \infty)$ следуют аналогичные вложения фактор-пространств

$$C^{(m)}_{(l+\varkappa)}\,[a, b) \subset H^{(m)}_{(l)}\,[a, b) \subset C^{(m-\varkappa)}_{(l)}\,[a, b), \quad \varkappa > n/2, \tag{22}$$

и в определениях (18), (19) $C^{(m)}_{(l)}\,[a, b)$ можно заменить на $H^{(m)}_{(l)}\,[a, b)$.

Положим

$$(\mathscr{S}')\,[a, b) = \bigcup_{s,l} H^{(s)}_{(l)}\,[a, b), \quad (\mathscr{O}')\,[a, b) = \bigcap_{l} \bigcup_{s} H^{(s)}_{(l)}\,[a, b). \tag{23}$$

Мы не будем останавливаться на проверке корректности этих определений, т. е. на доказательствах равенств

$$(\Phi')\,[a, b) = (\Phi')\,[a, \infty)/(\Phi')\,[b, \infty), \quad \Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O},$$

так что равенства (23) можно воспринимать как определения левых пространств (23).

Предложение. *Форму* $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$ *можно корректно определить на* $\mathscr{S}(a, b] \times \mathscr{S}[a, b)$ *или на* $\mathscr{S}[a, b) \times \mathscr{S}(a, b)$. *По непрерывности она продолжается на* $H^{(-s)}_{(-l)}(a, b] \times H^{(s)}_{(l)}\,[a, b)$ или на $H^{(-s)}_{(-l)}\,[a, b) \times H^{(s)}_{(l)}(a, b]$ *и индуцирует двойственности*

$$\left(H^{(s)}_{(l)}\,[a, b)\right)' = H^{(-s)}_{(-l)}(a, b], \; \left(H^{(s)}_{(l)}(a, b]\right)' = H^{(-s)}_{(-l)}\,[a, b). \tag{24}$$

Пространства (20) *рефлексивны.*

Доказательство. Для случая $a = 0$, $b = \pm\infty$ это утверждение переходит в доказанное выше предложение 2.2. В рассуждениях этого предложения $a = 0$ тривиально заменяется на любое $a \in \mathbb{R}$, т. е. $H^{(s)}_{(l)}\,[a, \infty)$ — рефлексивное банахово пространство и равенства (24) имеют место для $b = +\infty$. Ввиду (14) банахово сопряженное к $H_{(l)}^{(s)}[a, b)$ будет подпространством $H_{(-l)}^{(-s)}(a, \infty)$, состоящим из функционалов f, которые аннулируют $H_{(l)}^{(s)}[b, \infty)$, т. е. носители этих функционалов сосредоточены при $t \leqslant b$, откуда $f \in H_{(l)}^{(s)}(a, b]$. Аналогично доказывается второе равенство (24).

Ввиду предложения $(\mathscr{S}')[a, b)$ будет индуктивным пределом рефлексивных банаховых пространств, и, следовательно, для $\Phi = \mathscr{S}$ имеет место (2). Аналогично из результатов дополнения к гл. I следует, что для (2) $\Phi = \mathscr{O}$ является изоморфизмом векторных пространств.

Замечание. Пространства $\Phi[a, b)$ мы определили как фактор-пространство подпространства $\Phi[a, \infty) \subset \Phi$ по подпространству $\Phi[b, \infty) \subset \Phi[a, \infty)$. Это пространство эквивалентным образом можно определить как подпространство тех элементов $\Phi(-\infty, b)$, которые равны нулю при $t \leqslant a$.

В случае конечной полосы можно естественным образом определить пространства

$$\Phi_{(l_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}[a, b), \quad \Phi_{(l_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}(a, b], \quad \Phi = C, H. \tag{25}$$

Отметим, что элементы пространств $\Phi_{(l_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}$ и $\Phi_{(\lambda_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}$, $\Phi = C$, H имеют одинаковую гладкость и отличаются только характером роста (убывания) по t при $t \to \pm\infty$. Естественно ожидать, что при переходе к конечной полосе это различие исчезнет. Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b < \infty$. *Тогда для любых вещественных* s_1, s_2, l_1, l_2, λ_1 *имеет место изоморфизм*

$$\Phi_{(l_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}[a, b) = \Phi_{(\lambda_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}[a, b), \quad \Phi = C, H. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $\lambda_1 < l_1$. Тогда из вложений

$$\Phi_{(l_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}[c, \infty) \subset \Phi_{(\lambda_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}[c, \infty), \quad c = a, b,$$

вытекает существование непрерывного отображения левого пространства (26) в правое. Очевидно, что это отображение инъективно. Докажем его сюръективность. Для этого возьмем функцию $\chi(t) \in \mathscr{D}$, $\chi(t) = 1$ при $a \leqslant t \leqslant b$. Пусть $f \in \Phi_{(\lambda_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}[a, b)$, а $f_0 \in \Phi_{(\lambda_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}$ — произвольный представитель класса смежности f. Тогда $\chi f_0 \in \Phi_{(\infty, l_2)}^{(s_1, s_2)}$ и $f_0 - \chi f_0 \in \Phi_{(\lambda_1, l_2)}^{(s_1, s_2)}[b, \infty)$, т. е. χf_0 принадлежит классу смежности f.

С учетом описания пространств $\mathscr{K}'$ и $\mathscr{O}'$ (см. п. I.6.2 и, в частности, (I.6.10)) мы получим важное

Следствие. При $-\infty < a < b < +\infty$ *имеет место изоморфизм*

$$(\mathscr{K}')[a, b) = (\mathscr{O}')[a, b). \tag{27}$$

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. *Пусть* $\Phi = C_{(l)}^{(m)}$. $H_{(l)}^{(s)}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$ *и т. д. Для любого* $\rho \in \mathbb{R}$ *и* $-\infty < a < b < +\infty$ *имеет место изоморфизм*

$$\Phi[a, b) = (\Phi_{[\rho]})[a, \infty)/(\Phi_{[\rho]}[b, \infty)).$$

§ 3. Шкалы пространств функций, заданных в $\mathbb{R}_+^n$

В § 2 мы рассматривали шкалы фактор-пространств, элементами которых были классы функций или распределений, отличающихся на распределения с носителем в $\overline{\mathbb{R}_-^n}$. Классы эквивалентности — малоэффективный объект, и в анализе стараются избегать работы с ними, пытаясь там, где это возможно, искать альтернативное описание. В ситуации § 2 это можно сделать в случае пространств регулярных функций. Дело в том, что, поскольку факторизация производится по функциям, сосредоточенным в замыкании $\overline{\mathbb{R}_-^n}$, элементы класса эквивалентности имеют общее ограничение на $\mathbb{R}_+^n$.

По этой причине естественно непосредственно определить пространства $\Phi(\mathbb{R}_+^n)\left(\Phi = C_{(l)}^{(m)}, H_{(l)}^{(s)}, s \geqslant 0\right)$ регулярных функций в $\mathbb{R}_+^n$ и сопоставить их с $\Phi_\oplus$. Рассмотрению таких пространств и посвящен этот параграф. Непосредственно устанавливается существование непрерывного инъективного отображения $\Phi_\oplus \to \Phi(\mathbb{R}_+^n)$. Однако сюръективность этого отображения является содержательным аналитическим фактом, использующим явную конструкцию оператора продолжения функций с $\mathbb{R}_+^n$ на $\mathbb{R}^n$, сохраняющую гладкость и оценки в весовых нормах. Далее, имеется каноническое вложение $\Phi_+ \to \Phi(\mathbb{R}_+^n)$ и естественно эффективно описать его образ на языке граничных значений при $t = 0$ (а не в терминах возможности продолжения нулем на $\mathbb{R}^n$ с сохранением гладкости). Рассматривается также общий вопрос о граничных значениях при $t = 0$ функций из $H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$.

Заметим, что именно в пространствах $\Phi(\mathbb{R}_+^n)$ из этого параграфа ищется решение неоднородной задачи Коши в случае регулярных функций — но это уже тема гл. IV.

То обстоятельство, что изоморфизм между $\Phi_\oplus$ и $\Phi(\mathbb{R}_+^n)$ не продолжается с пространств регулярных функций на пространства распределений, носит принципиальный характер. Технически это связано с отсутствием канонического понятия ограничения распределения на область и отсутствием единого толкования понятия распределения в области.

Во-первых, можно рассматривать распределения на $\mathbb{R}^n$ с носителями на $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ — т. е. пространства типа Φ_+. Во-вторых, можно рассматривать распределение в $\mathbb{R}^n$ с точностью до распределений, сосредоточенных в замыкании $\overline{\mathbb{R}_-^n}$, т. е. пространства типа $\Phi_\oplus$. В обеих этих конструкциях рассматриваются распределения в $\mathbb{R}^n$ (а не в $\mathbb{R}^n_+$). Каждая из указанных конструкций имеет свои слабые стороны. В первой конструкции мы требуем, чтобы распределение продолжалось с $\mathbb{R}^n_+$ на $\mathbb{R}^n$ с сохранением гладкости, во второй — мы пренебрегаем распределениями, сосредоточенными при $t=0$ (в случае регулярных функций таких элементов нет). Некоторый вариант теории распределений в $\mathbb{R}^n_+$ будет построен в гл. IV в связи с неоднородной задачей Коши.

Настоящий параграф по стилю отличается от остальной части главы: в нем много конкретного материала в духе классического анализа. Формально материал этого параграфа в дальнейшем изложении не используется; при желании читатель может ограничиться лишь основными определениями и формулировками результатов.

3.1. Пространство $C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^{(n)}_+)$ состоит из функций $\varphi(x)$ определенных и непрерывных в замыкании $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, имеющих в $\mathbb{R}^n_+$ непрерывные производные $D^\alpha\varphi$ до порядка m, продолжающиеся до непрерывных функций в $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, причем конечна норма

$$\left|\varphi, \mathbb{R}^n_+\right|^{(m)}_{(l)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+, |\alpha|\leqslant m} (1+|x|^2)^{l/2}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|. \qquad (1)$$

Для этих пространств определены естественные вложения

$$C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)\to C^{(m')}_{(l')}(\mathbb{R}^n_+), \quad m\geqslant m', \quad l\geqslant l', \qquad (2)$$

т. е. пространства $C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)$ образуют шкалу и можно определить проективный предел

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_+) = C^{(\infty)}_{(\infty)}(\mathbb{R}^n_+) \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{m,l} C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+). \qquad (3)$$

Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_+)$ состоит из функций $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, имеющих все производные $D^\alpha\varphi$, непрерывные в замыкании $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, причем для всех m, α конечны нормы (1).

Аналогично можно определить пространства $C^{(\infty)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)$ и индуктивный предел этих пространств

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n_+) = \bigcup_l C^{(\infty)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+) = \bigcup_l \bigcap_m C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+). \qquad (4)$$

3.2. Изоморфизм пространств $C^{(m)}_{(l)\oplus}$ **и** $C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)$. Построим канонический оператор

$$\Sigma_\oplus\colon\ C^{(m)}_{(l)\oplus}\to C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+). \qquad (5)$$

Для этого мы рассмотрим оператор Σ_+, сопоставляющий каждой функции $\varphi(x)$, заданной в $\mathbb{R}^n$, ее сужение на $\mathbb{R}^n_+$. Очевидно, что оператор

$$\Sigma_+\colon\ C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n)\to C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+) \qquad (6)$$

непрерывен (его норма не превосходит 1) и переводит в нуль подпространство $C^{(m)}_{(l)-}$. Но тогда оператор (6) опускается до канонического оператора (5).

Очевидно, что операторы (6) перестановочны с вложениями (2), т. е. (6) является непрерывным оператором в проективной шкале, индуцирующим непрерывный оператор на проективных пределах:

$$\Sigma_+ \colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+). \tag{6'}$$

Но тогда оператор (5) является непрерывным оператором в проективной шкале, индуцирующим непрерывный оператор на проективных пределах:

$$\Sigma_\oplus \colon \mathscr{S}_\oplus \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+). \tag{5'}$$

Теорема. *Отображения* (5), (5′) *являются изоморфизмами.*

Доказательство теоремы сводится к проверке того, что образом оператора (6) является все пространство $C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)$. Если последнее имеет место, то оператор (5) будет одновременно сюръективным и инъективным. По теореме Банаха он имеет непрерывный обратный

$$\Pi_\oplus \colon C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+) \to C^{(m)}_{(l)\oplus}, \tag{7}$$

т. е. (5) является изоморфизмом. Оператор (7), как обратный к каноническому оператору (5), будет каноническим оператором, перестановочным с вложениями в шкалах $\{C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)\}$ и $\{C^{(m)}_{(l)\oplus}\}$. Таким образом, (7) является непрерывным оператором в проективной шкале, индуцирующим непрерывный оператор на проективных пределах:

$$\Pi_\oplus \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+) \to \mathscr{S}_\oplus = \bigcap C^{(m)}_{(l)\oplus}. \tag{7'}$$

Так как композиция (7′) и (5′) является тождественным оператором, то (5′) — изоморфизм пространств.

Сюръективность оператора (6) мы получим в качестве следствия из более сильного утверждения. Имеет место

Предложение. *Существует непрерывный оператор* Π_+, *действующий из проективной шкалы* $\{C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)\}$ *в проективную шкалу* $\{C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n)\}$

$$\Pi_+ \colon C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+) \to C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n), \tag{8}$$

причем для любого натурального m *и* $l \in \mathbb{R}$ *оператор* (8) *является правым обратным к* (6):

$$\Sigma_+\Pi_+\varphi = \varphi \quad \forall \varphi \in C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+). \tag{9}$$

Следствие. *Существует непрерывный оператор*

$$\Pi_+ \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

и, следовательно, существует непрерывный оператор

$$\Pi_{\oplus}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_+)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-),$$

являющийся обратным к каноническому оператору

$$\Sigma_{\oplus}\colon \mathcal{S}/\mathcal{S}_-\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_+). \tag{10}$$

Сопоставляя изоморфизм (10) с теоремой, мы получим изоморфизм $\mathcal{S}_{\oplus}=\mathcal{S}/\mathcal{S}_-$ и проективного предела $\bigcap C^{(m)}_{(l)\oplus}$.

Доказательство предложения основано на явной конструкции оператора Π_+, предложенной Сили и являющейся развитием конструкции Хестенса.

Возьмем функцию $h(t)\in C^{(\infty)}_{(0)}$, $0<h(t)\leqslant 1$, причем $h(t)=1$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $h(t)=0$ при $t\geqslant 2$. Если $\varphi(t,\ y)$ определена при $t\geqslant 0$, то положим

$$(\Pi_+\varphi)(t,\ y)=\varphi(t,\ y),\qquad t\geqslant 0,$$

а при $t<0$ будем искать $\Pi_+\varphi$ в виде линейной комбинации отражений

$$(\Pi_+\varphi)(t,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k h(b_k t)\,\varphi(b_k t,\ y), \tag{11}$$

где числа a_k, b_k удовлетворяют следующим условиям:

(i) $b_k<0$, $b_k\to-\infty$, $k\to\infty$;

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|\,|b_k|^m<\infty,\quad m=0,1,2,\ldots;$

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k b_k^m=1,\quad m=0,1,2,\ldots$

Лемма (Сили [1]). *Существуют числа a_k, b_k, удовлетворяющие условиям* (i), (ii), (iii).

Если выполнено (i), *то для фиксированного t сумма* (11) *будет конечной, т. е. формула* (11) *имеет смысл.*

Доказательство. Положим $b_k=-2^k$ и обозначим через $a_k^{(N)}$ решение «усеченной» системы

$$\sum_{k=0}^{N}b_k^m a_k^{(N)}=1,\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ N.$$

Пользуясь правилом Крамера и известными формулами для определителей Вандермонда, найдем

$$a_k^{(N)}=\frac{(1+2^0)\ldots(1+2^{k-1})(1+2^{k+1})\ldots(1+2^N)}{(2^0-2^k)\ldots(2^{k-1}-2^k)(2^{k+1}-2^k)\ldots(2^N-2^k)}=A_kB_k^{(N)},$$

где

$$A_k=\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1+2^j}{2^j-2^k},\qquad B_k^{(N)}=\prod_{j=k+1}^{N}\frac{1+2^j}{2^j-2^k}.$$

Доопределяя $a_k^{(N)}=0$ при $k>N$, мы получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(N)} b_k^m = 1, \quad m \leqslant N. \tag{12}$$

Изучим поведение $a_k^{(N)}$ при $N\to\infty$. Имеем

$$|A_k| \leqslant \prod_{j=0}^{k-1} (4\cdot 2^{j-k}) = 2^{-k^2/2+3k/2}.$$

Далее,

$$\log B_k^{(N)} = \sum_{j=k+1}^{N} \log\left(1+\frac{2^{k+1}+1}{2^j-2^k}\right) \leqslant \sum_{j=k+1}^{N} \frac{2^{k+1}+1}{2^j-2^k} \leqslant 4,$$

т. е. $B_k^{(N)} \leqslant e^4$. Так как последовательность $B_k^{(N)}$ монотонно возрастает с ростом N, то она имеет предел $B_k \leqslant e^4$. Положим $a_k = A_k B_k$. Тогда для любого m

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,|b_k|^m \leqslant e^4 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{3k}{2}+km} < \infty.$$

Так как $|a_k^{(N)}| < |a_k|$, то для любого m ряд (12) сходится абсолютно, и мы можем перейти к пределу при $N\to\infty$. Лемма доказана.

Теперь мы проверим, что оператор (11) удовлетворяет всем условиям предложения. Очевидно, что вне плоскости $t=0$ функция (11) имеет ту же самую гладкость, что $\varphi(t, y)$. Условие (iii) обеспечивает сохранение гладкости на этой плоскости. Действительно, согласно (11) и формуле Лейбница

$$\left(D_t^j D_y^\beta \Pi_+\varphi\right)(t, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D_t^j\left(h(b_k t)\, D_y^\beta \varphi(b_k t, y)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^j \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(D_t^i h\right)(b_k t)\left(D_t^{j-i} D_y^\beta \varphi\right)(b_k t, y)\big). \tag{13}$$

Из определения функции $h(t)$ следует, что

$$h(b_k t)\to 1, \quad \left(D_t^i h\right)(b_k t)\to 0\ (i>0), \quad t\to -0.$$

Таким образом, сумма по i стремится к $\left(D_t^j D_y^\beta \varphi\right)(+0, y)$, а с учетом (iii) мы приходим к равенству

$$\left(D_t^j D_y^\beta \Pi_+\varphi\right)(-0, y) = \left(D_t^j D_y^\beta \Pi_+\varphi\right)(+0, y).$$

Теперь оценим норму $|\ \ |_{(l)}^{(m)}$ от оператора Π_+. Имеем

$$|\Pi_+\varphi|_{(l)}^{(m)} \leqslant |\Pi_+\varphi, \mathbb{R}_+^n|_{(l)}^{(m)} + |\Pi_+\varphi, \mathbb{R}_-^n|_{(l)}^{(m)} \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi, \mathbb{R}_+^n|_{(l)}^{(m)} + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,|\Phi_k, \mathbb{R}_-^n|_{(l)}^{(m)}, \tag{14}$$

где мы положили $\Phi_k(t, y) = h(b_k t)\varphi(b_k t, y)$. Покажем, что

$$|D_t^j D_y^\beta \Phi_k|_{(l)} \leqslant c(1 + |b_k|)^{j+|l|}, \quad j \leqslant m - |\beta|. \tag{15}$$

Тогда, подставляя из (15) в (14), мы получим требуемую оценку

$$|\Pi_+ \varphi|_{(l)}^{(m)} \leqslant \text{const} \cdot |\varphi, \mathbb{R}_+^n|_{(l)}^{(m)}.$$

Докажем (15), причем для простоты обозначений будем считать, что $\beta = 0$. Так как $h(b_k t) = 0$ при $b_k t \geqslant 2$, то имеем

$$|D_t^j \Phi_k|_{(l)} \leqslant \sup_{0 \leqslant tb_k \leqslant 2, y \in \mathbb{R}^{n-1}} (1 + t^2 + |y|^2)^{l/2} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} |b_k|^j |D_t^i h| |D_t^{j-i} \varphi(b_k t, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} |b_k|^j |\varphi, \mathbb{R}_+^n|_{(l)}^{(m)} \sup (1 + |t| + |y|)^l (1 + |tb_k| + |y|)^{-l} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot (1 + |b_k|)^{j+|l|} |\varphi, \mathbb{R}_+^n|_{(l)}^{(m)}.$$

Замечание. Если не стремиться к тому, чтобы оператор продолжения (8) обслуживал одновременно все m, то можно пользоваться более простой конструкцией Хестенса

$$(\Pi_+^{(N)} \varphi)(t, y) = \begin{cases} \varphi(t, y), & t > 0, \\ \sum_{k=0}^{N} a_k(b_k t, y), & b_k < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где числа a_k, b_k связаны условиями

$$\text{(iii}')\qquad \sum_{k=0}^{N} a_k b_k^j = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Поскольку в теореме используется лишь сюръективность оператора (6), то для ее доказательства достаточно пользоваться конструкцией Хестенса.

3.3. $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^n)$ **как счетно гильбертово пространство.** Обозначим через $H_{(l)}(\mathbb{R}_+^n)$ пространство функций (измеримых) в $\mathbb{R}_+^n$, интегрируемых в квадрате с весом $(1 + |x|^2)^l$, и снабдим его естественной нормой $\|f, \mathbb{R}_+^n\|_{(l)} = \|(1 + |x|^2)^{l/2} f, \mathbb{R}_+^n\|$. Для натурального m обозначим через $H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^r)$ пространство функций f, принадлежащих $H_{(l)}(\mathbb{R}_+^n)$ вместе с производными $D^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant m$, и снабдим это пространство нормой

$$\|f, \mathbb{R}_+^n\|_{(l)}^{(m)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f, \mathbb{R}_+^n\|_{(l)}^2\Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Это пространство можно превратить в гильбертово, определив в нем естественное скалярное произведение.

Из приведенных определений следует (ср. § 1.2), что отображение

$$H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n) \to H_{(l-r)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n) \quad (f \mapsto (1 + |x|^2)^{r/2} f) \tag{18}$$

будет изоморфизмом пространств, так что при изучении пространств $H_0^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$ как правило, можно ограничиваться случаем $l=0$.

Предложение. (i) $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^n)$ *плотно в* $H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$, $m\in\mathbb{Z}_+$.

(ii) *Оператор сужения*

$$\Sigma_+:\ H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}^n)\to H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n) \tag{19}$$

непрерывен и имеет непрерывный правый обратный.

Следствие. *Отображение* (19) *индуцирует изоморфизм*

$$\Sigma_\oplus:\ H_{(l)\oplus}^{(m)}\to H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n).$$

Доказательство предложения. Прежде всего мы выведем (ii) из (i).

Из определения производных в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^n)$ следует, что

$$\Sigma_+D^\alpha f=D^\alpha\Sigma_+f,\quad f\in H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}^n); \tag{20}$$

но тогда оператор (19) непрерывен, а его норма не превосходит 1. Ввиду плотности гладких функций в $H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$ достаточно задать правый обратный к (19) на гладких функциях, скажем на $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^n)$. Возьмем оператор продолжения по Хестенсу (16). Нам надо проверить, что

$$\|\Pi_N\varphi\|_{(l)}^{(m)}\leqslant\mathrm{const}\cdot\|\varphi,\ \mathbb{R}_+^n\|_{(l)}^{(m)}.$$

Из определения (16) следует, что

$$D^\alpha\Pi_N\varphi=\Pi_{N,\alpha}D^\alpha\varphi,$$

где

$$(\Pi_{N,\alpha}\varphi)(t,y)=\begin{cases}\varphi(t,y) \text{ при } t>0,\\ \sum\limits_{k=0}^{N}a_kb_k^{\alpha_1}\varphi(b_kt,y) \text{ при } t<0.\end{cases} \tag{16'}$$

Проверку неравенства

$$\|\Pi_{N,\alpha}\psi\|_{(l)}\leqslant\mathrm{const}\cdot\|\psi,\ \mathbb{R}_+^n\|_{(l)}$$

мы оставляем читателю.

В основе доказательства (i) лежит ослабленный вариант (ii). Имеет место

Лемма. *Оператор* (19) *имеет плотный образ.*

В силу леммы произвольный элемент $f\in H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$ можно сколь угодно хорошо приблизить функциями Σ_+f^*, $f^*\in H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$. Так как $\mathscr{S}$ плотно в $H_{(l)}^{(m)}$, то можно взять $f^*\in\mathscr{S}$, а тогда $\Sigma_+f^*\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^n)$.

Доказательство леммы. Возьмем $f\in H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$ и для произвольного $h>0$ положим

$$f_h^*(t,y)=\chi\left(\frac{t+h}{h}\right)f^*(t+h,y), \tag{21}$$

где $\chi(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(\theta) = 0$ при $\theta < 1/3$, $\chi(\theta) = 1$ при $\theta > 2/3$. Здесь и далее через f^* мы будем обозначать продолжение нулем для $t < 0$ функции $f(t, y)$, заданной при $t \geqslant 0$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$f_h^*(t, y) \in H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}^n) \quad \forall f \in H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n), \quad \forall h > 0; \tag{22}$$

$$\| \Sigma_+ f_h^* - f; \mathbb{R}_+^n \|_{(l)}^{(m)} \to 0, \quad h \to 0. \tag{23}$$

Докажем (22). Если бы функция f была гладкой, то функция $f^*(t+h, y)$ имела бы производные до порядка m при $t > -h$; так как функция $\chi\left(\frac{t+h}{h}\right)$ равна 0 при $t < -\frac{2}{3}h$, то произведение (21) имеет производную всюду. Если же функция f дифференцируема в смысле распределений, то надо рассуждать немного аккуратней. Возьмем $\varphi \in \mathcal{D}$ и рассмотрим

$$(f_h^*, (-D)^\alpha \varphi) = \int_{-h}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t+h, y)\, \chi\left(\frac{t+h}{h}\right) (-D)^\alpha \varphi(t, y)\, dy\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t, y)\, \chi(t/h) (-D)^\alpha \varphi(t-h, y)\, dy\, dt.$$

Заметим, что $\chi(t/h)(-D)^\alpha \varphi(t-h, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$. Записывая эту функцию в виде

$$\sum_{k=0}^{\alpha_1} (-D_t)^{\alpha_1 - k} (-D_y)^{\alpha'} (\chi_k(t, y)\, \varphi(t-h, y)), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha'),$$

и пользуясь определением производных в $H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$, получим

$$(f_h^*, (-D)^\alpha \varphi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\sum_{k=0}^{\alpha_1} \chi_k D_t^{\alpha_1 - k} D_y^{\alpha'} f \right) \varphi(t-h, y)\, dy\, dt.$$

Продолжая сумму в правой части нулем при $t < 0$, мы получим функцию из $H_{(l)}(\mathbb{R}^n)$, откуда $D^\alpha f_h^* \in H_{(l)}(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant m$.

Докажем (23). Так как оператор (19) коммутирует с операторами умножения на функции, то ввиду изоморфизмов (18) будем считать, что $l = 0$. Согласно определению (21), $(\Sigma_+ f_h^*)(t, y) = f(t+h, y) = (T_h f)(t, y)$ и $(D^\alpha \Sigma_+ f_h^*)(t, y) = (T_h D^\alpha f)(t, y)$, а поэтому левая часть (23) при $l = 0$ не превосходит

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha f - T_h D^\alpha f; \mathbb{R}_+^n \|.$$

Теперь остается заметить, что в силу равенства Парсеваля

$$\| \psi - T_h \psi; \mathbb{R}_+^n \|^2 \leqslant \| \psi^* - T_h \psi^* \|^2 = \int |1 - \exp(ih\xi)|^2 \, |\widehat{\psi}^*(\xi)|^2 \, d\xi \to 0$$

при $h \to 0$. Лемма, а вместе с ней и предложение доказаны.

Так как согласно предложению 3.1 и настоящему предложению функции из $C_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$ и $H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$ являются сужениями на $\mathbb{R}_+^n$ функций из $C_{(l)}^{(m)}$ и $H_{(l)}^{(m)}$, то для рассматриваемых нами пространств сохраняется теорема вложения типа I.2.4. Отсюда вытекает, что в определениях (3) и (4) пространства $C_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$ можно заменить на $H_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$, так что $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^n)$ является проективным пределом гильбертовых пространств.

3.4. Пространства $H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$, $s \geqslant 0$. В этом пункте мы рассмотрим семейство пространств в $\mathbb{R}_+^n$, отвечающих произвольному вещественному $s \geqslant 0$. При этом мы ограничимся случаем $l=0$; при $l \neq 0$ определим

$$H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n) = \{f \in H_l(\mathbb{R}_+^n), (1+|x|^2)^{l/2} f \in H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)\}.$$

Это определение позволяет автоматически переносить на $H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$ свойства пространств $H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$.

Если $0<s<1$, то через $H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$ обозначим совокупность таких $f \in H(\mathbb{R}_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|f; \mathbb{R}_+^n\|^{(s)} = \left(\|f, \mathbb{R}_+^n\|^2 + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n} |f(x)-f(x')|^2 |x-x'|^{-n-2s}\, dx\, dx'\right)^{1/2}, \quad 0<s<1. \tag{24}$$

Если $s \geqslant 1$ и s не является целым, т. е. $s>[s]$, где $[s]$ — целая часть s, то через $H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$ обозначим совокупность таких $f \in H^{([s])}(\mathbb{R}_+^n)$, производные $D^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant [s]$, которых принадлежат $H^{(s-[s])}(\mathbb{R}_+^n)$. Определим в этом пространстве норму

$$\|f, \mathbb{R}_+^n\|^{(s)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant [s]} \left(\|D^\alpha f, \mathbb{R}_+^n\|^{(s-[s])}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Предложение (ср. предложение 3.3).

(i) *$\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^n)$ плотно в $H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$.*

(ii) *Оператор сужения*

$$\Sigma_+ \colon H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \to H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n) \tag{25}$$

непрерывен и имеет правый обратный.

Следствие. *Отображение* (25) *индуцирует изоморфизм*

$$\Sigma_\oplus \colon H_{(l)\oplus}^{(s)} \to H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n).$$

Доказательство. Используя уже доказанное предложение 3.3, мы сразу установим (ii). Тогда (i) будет автоматическим следствием плотности $\mathscr{S}$ в $H_{(l)}^{(s)}$. Ввиду сделанного выше замечания ограничимся случаем $l=0$.

Пусть $s = m + \lambda$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \lambda < 1$. Если $f \in H^{(s)}(\mathbb{R}^n_+)$, то по определению $f \in H^{(m)}(\mathbb{R}^n_+)$, а согласно предложению 3.3 $\Pi_m f \in H^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ (см. обозначение (16)). Теперь мы должны проверить, что (см. (16′))

$$D^\alpha \Pi_m f = \Pi_{m,\alpha} D^\alpha f \in H^{(\lambda)}(\mathbb{R}^n). \tag{26}$$

Для простоты обозначений будем считать, что $n = 1$ и $\alpha = (m, 0, \ldots, 0)$. Тогда включения (26) будут следствием леммы.

Лемма. *Пусть* $g_+(t) \in H^{(\lambda)}(\mathbb{R}^n_+)$, *где* $0 < \lambda < 1$, *и пусть*

$$g_-(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k^m g_+(b_k t), \quad t < 0,$$

где числа b_k *отрицательны и*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k^m = 1. \tag{27}$$

Положим $g(t) = g_+(t)$ *при* $t > 0$ *и* $g(t) = g_-(t)$ *при* $t < 0$. *Тогда*

$$\| g \|^{(\lambda)} \leqslant \text{const} \cdot \| g_+, \mathbb{R}^n \|^{(\lambda)}. \tag{28}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(t) - g(t')|^2}{|t - t'|^{1+2\lambda}}\, dt\, dt' = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g_+(t) - g_+(t')|^2}{|t - t'|^{1+2\lambda}}\, dt\, dt' +$$
$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g_-(-t) - g_-(-t')|^2}{|t - t'|^{1+2\lambda}}\, dt\, dt' +$$
$$+ 2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g_+(t) - g_-(-t')|^2}{|t + t'|^{1+2\lambda}}\, dt\, dt' = I_1 + I_2 + 2I_3.$$

Итак, доказательство свелось к оценке I_2 и I_3 через правую часть (28).

Начнем с оценки I_2. Ввиду неравенства Коши

$$|g_-(-t) - g_-(-t')|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^2 b_k^{2m} \sum_{k=1}^{m} |g_+(|b_k| t) - g_+(|b_k| t')|^2.$$

Подставляя эту оценку в интеграл I_2 и делая замены $t \to |b_k|^{-1} t$, $t' \to |b_k|^{-1} t'$, получим

$$I_2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^2 b_k^{2m} \sum_{k=1}^{m} |b_k|^{-1+2\lambda} \int_0^\infty\int_0^\infty |g_+(t) - g_+(t')|^2 (t - t')^{-1-2\lambda}\, dt\, dt' \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \cdot (\| g_+ \|^{(\lambda)})^2.$$

При оценке I_3, воспользовавшись (27), получим

$$|g_+(t)-g_-(-t')|^2=\left|\sum a_k b_k^m (g_+(t)-g_+(|b_k|t'))\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^m a_k^2 b_k^{2m}\sum_{k=1}^m |g_+(t)-g_+(|b_k|t')|^2.$$

Подставляя в интеграл I_3 и делая замены $t'\to|b_k|^{-1}t'$, получим

$$I_3\leqslant\sum_{k=1}^m a_k^2 b_k^{2m}\sum_{k=1}^m\int_0^\infty\int_0^\infty |b_k|^{-1}|g_+(t)-g_+(t')|^2(t+t'/|b_k|)^{-1-2\lambda}\,dt\,dt'.$$

Замечая, что $t+\dfrac{t'}{|b_k|}>\min\left(1,|b_k|^{-1}\right)|t-t'|$, мы оценим I_3 через правую часть (28).

3.5. Сужение элементов $H^{(s)}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ на гиперплоскости. Если $f(t,y)$ — непрерывная функция, то через $(\mathcal{T}_t f)(y)=f(t,y)$ обозначим ее сужение на гиперплоскость $t=\mathrm{const}$. Приведем хорошо известные утверждения о свойствах оператора следа $\mathcal{T}_t$ в пространствах $H^{(s)}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Предложение. (i) *При $s>1/2$ оператор*

$$\mathcal{T}_t\colon H^{(s)}\left(\mathbb{R}_x^n\right)\to H^{(s-1/2)}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right),\tag{29}$$

первоначально определенный на $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ продолжается до непрерывного оператора. Более того, $t\mapsto(\mathcal{T}_t f)(y)$ является непрерывной функцией $t\in\mathbb{R}$ со значениями в $H^{(s-1/2)}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right)$.

(ii) *Оператор* (29) *имеет непрерывный правый обратный.*

(iii). *Если $s>|\alpha|+1/2$, то $t\mapsto\left(\mathcal{T}_t D^\alpha f\right)(y)$ является непрерывной функцией $t\in\mathbb{R}$ со значениями в $H^{(s-1/2-|\alpha|)}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right)$.*

Доказательство. (i) Обозначим через $\{\ \}^{(\lambda)}$ норму в пространстве $H^{(\lambda)}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right)$. Мы докажем оценку

$$\{\mathcal{T}_t f\}^{(s-1/2)}\leqslant K_s\|f\|^{(s)}\quad\forall f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}_x^n\right)\tag{30}$$

с константой K_s, не зависящей от t; ввиду плотности $\mathcal{S}$ в $H^{(s)}$ отсюда будет следовать непрерывность оператора (29).

Для доказательства (30) заметим, что

$$\widehat{(\mathcal{T}_t f)}(\eta)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\sigma,\eta)\exp(i\sigma t)\,d\sigma.$$

Согласно неравенству Шварца

$$|\widehat{(\mathcal{T}_t f)}(\eta)|^2\leqslant(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\sigma,\eta)|^2(1+\sigma^2+|\eta|^2)^s\,d\sigma\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}(1+\sigma^2+|\eta|^2)^{-s}\,d\sigma.\tag{31}$$

Если $s > 1/2$, то правый интеграл сходится и равен

$$(1+|\eta|^2)^{-s+1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\sigma^2)^{-s}\,d\sigma=\mathrm{const}\cdot(1+|\eta|^2)^{-s+1/2}. \quad (32)$$

Подставляя из (32) в (31), умножая (31) на $(1+|\eta|^2)^{-s+1/2}$ и интегрируя по η, получим (30).

Если проведенную выкладку повторить для $\mathcal{T}_t f - \mathcal{T}_{t'} f$, то получим неравенство

$$\{\mathcal{T}_t f - \mathcal{T}_{t'} f\}^{(s-1/2)} \leqslant$$

$$\leqslant K_s \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\sigma,\eta)|^2 (1+\sigma^2+|\eta|^2)^s\,|e^{-i\sigma t}-e^{-i\sigma t'}|^2\,d\sigma\,d\eta.$$

Так как интеграл в правой части равномерно сходится, а подынтегральное выражение непрерывно зависит от t, t', то левая часть стремится к нулю при $t \to t'$.

(iii). Следует из (i) и непрерывности оператора $H^{(s)} \to H^{(s-|\alpha|)}\,(f \mapsto D^\alpha f)$.

(ii). Если $\varphi \in H^{(s-1/2)}(\mathbb{R}^{n-1}_y)$, то положим

$$f(t,y) = (2\pi)^{-(n-1)/2} K_s \int \exp(i\langle x,\xi\rangle)\times$$

$$\times(1+|\eta|^2)^{s-1/2}(1+\sigma^2+|\eta|^2)^{-s}\,\widehat{\varphi}(\eta)\,d\eta\,d\sigma,$$

где

$$K_s^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty}(1+\sigma^2)^{-s}\,d\sigma.$$

При $t=0$ в силу формулы обращения преобразования Фурье

$$f(0,y) = (2\pi)^{-(n-1)/2}\int \exp(i\langle y,\eta\rangle)\,\widehat{\varphi}(\eta)\times$$

$$\times\left[K_s(1+|\eta|^2)^{s-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\sigma^2+|\eta|^2)^{-s}\,d\sigma\right]d\eta = \varphi(y).$$

Далее имеем

$$(\|f\|^{(s)})^2 = 2\pi K_s^2 \int (1+|\eta|^2)^{2s-1}(1+\sigma^2+|\eta|^2)^{-s}\,|\widehat{\varphi}(\eta)|^2\,d\sigma\,d\eta =$$

$$= 2\pi K_s\left(\{\varphi\}^{s-1/2}\right)^2.$$

Ввиду результатов пп. 3.3, 3.4 утверждения предложения останутся в силе, если пространство $H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ заменить на $H^{(s)}(\mathbb{R}^n_+)$ или $H^{(s)}_\oplus$.

3.6. Пространство $\Sigma_+ H^{(s)}_+$. Операция сужения (5) индуцирует отображение подпространства $C^{(m)}_{(l)+}$ в $C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+)$, при этом очевидно, что

$$\Sigma_+ C^{(m)}_{(l)+} = \{\varphi \in C^{(m)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_+),\ D^\alpha\varphi|_{t=0}=0,\ |\alpha|\leqslant m\}.$$

Отсюда вытекает, что $\Sigma_+\mathscr{S}_+$, $\Sigma_+\mathscr{O}_+$ состоят из тех и только тех элементов $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ (соответственно $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n_+)$), которые на плоскости $t=0$ имеют нуль бесконечного порядка.

Гораздо более сложной является задача описания образа $H^{(s)}_{(l)+}$ при вложении (25). Можно ограничиться случаем $l=0$, поскольку общий случай тривиально сводится к этому. Сейчас мы опишем $\Sigma_+H^{(s)}_+$ и покажем, что элементы этого пространства характеризуются условиями обращения в нуль при $t=0$.

Прежде всего более детально рассмотрим поведение функций из $H^{(s)}_+$, $s\geqslant 0$, в окрестности гиперплоскости $t=0$.

Если $s\geqslant 0$, то через $[s]$ и $\underline{s}$ мы будем обозначать наибольшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$[s]\leqslant s, \quad \underline{s}<s-1/2.$$

В частности, если $s=m+\lambda$, $0<\lambda<1$, то $[s]=m$, а $\underline{s}=m$ при $\lambda>1/2$ и $\underline{s}=m-1$ при $\lambda\leqslant 1/2$.

Лемма. *Пусть* $\varphi\in H^{(s)}_+$, $s\geqslant 0$. *Тогда*

(i) $(D^k_t\varphi)(0, y)=0$, $k=0, \ldots, \underline{s}$.

(ii) *Если* $s\notin\mathbb{Z}$, *то сходятся интегралы*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|D^\alpha\varphi(t, y)|^2\, t^{-2(s-[s])}\,dt\,dy<\infty, \quad |\alpha|\leqslant[s].$$

Доказательство. (i) Если $\varphi\in H^{(s)}_+$, то очевидно, что $D^k_t\varphi(-\varepsilon, y)=0$ для всех $k\leqslant s$ и $\varepsilon>0$. Так как при $0\leqslant k\leqslant\underline{s}$ функции $D^k_t(-\varepsilon, y)$ являются непрерывными функциями ε со значениями $H^{(s-k-1/2)}(\mathbb{R}^{n-1})$ (предложение 3.5 (iii)), то имеет место (i).

(ii) Пусть сначала $s=\lambda$, $0<\lambda<1$. Принадлежность $\varphi\in H^{(s)}$ эквивалентна сходимости интеграла

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|\varphi(t, y)-\varphi(t', y')|^2\,[(t-t')^2+|y-y'|^2]^{-(n+2\lambda)/2}\,dt\,dt'\,dy\,dy'.$$

Разобьем интеграл на четыре интеграла:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}=\iint\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+}+\iint\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_-}+\iint\limits_{\mathbb{R}^n_-\times\mathbb{R}^n_+}+\iint\limits_{\mathbb{R}^n_-\times\mathbb{R}^n_-}.$$

Если $\varphi(t, y)\in H^{(s)}_+$, то последний интеграл равен 0, а второй и третий интегралы равны

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n_+}|u(t, y)|^2\left(\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{dt'\,dy'}{((t+t')^2+|y-y'|^2)^{\lambda+n/2}}\right)dt\,dy.$$

Делая во внутреннем интеграле замену $y'=y+h(t+t')$, мы получим, что этот интеграл равен

$$\int_0^\infty \frac{dt'}{(t+t')^{2\lambda+1}} \int \frac{dh}{(1+|h|^2)^{\lambda+n/2}} = \frac{1}{2}\, c(n,\lambda)\, t^{-2\lambda}.$$

Таким образом, для $\varphi \in H_+^{(\lambda)}$, $0<\lambda<1$, имеет место тождество

$$(\|\varphi\|^{(\lambda)})^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(t,y)-\varphi(t',y')|^2 \times$$

$$\times ((t-t')^2+|y-y'|^2)^{-\lambda-n/2}\, dt\, dt'\, dy\, dy' +$$

$$+ c(n,\lambda)\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(t,y)|^2 t^{-2\lambda}\, dt\, d\lambda,$$

где константу $c(n, \lambda)$ можно явно вычислить. Из этого тождества тривиально следует (ii) в случае $[s]=0$. В общем случае надо заметить, что $D^\alpha\varphi \in H_+^{(s-[s])}$ для $|\alpha| \leqslant [s]$.

Доказанная лемма подсказывает следующее

Определение. Обозначим через $\mathring{H}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$ совокупность функций $\varphi \in H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$D_t^k\varphi\,|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \ldots, \underline{s}, \tag{33}$$

и, кроме того, при полуцелых s сходятся интегралы

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |D^\alpha\varphi(t,y)|^2\, t^{-1}\, dt\, dy < \infty, \quad |\alpha| \leqslant s-3/2. \tag{34}$$

Теорема. $\Sigma_+ H_+^{(s)} = \mathring{H}^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$. *Иными словами, функция $\varphi \in H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$, будучи продолженной нулем, попадает в $H_+^{(s)}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям* (33), (34).

Доказательство. Необходимость условий следует из леммы. Для доказательства достаточности надо показать, что в случае s, не являющихся полуцелыми, интегралы из условия (ii) леммы можно оценить через $\|\varphi, \mathbb{R}_+^n\|^{(s)}$. Таким образом, доказательство теоремы редуцировано к доказательству следующего утверждения.

Предложение. (i) *При $0<\lambda<1/2$ для $\forall\varphi \in H^{(\lambda)}$ имеет место неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,y)|^2 |t|^{-2\lambda}\, dt\, dy \leqslant K(n,\lambda)(\|u\|^{(\lambda)})^2; \tag{35}$$

(ii) *Неравенство* (35) *остается в силе при $1/2<\lambda<1$ на подпространстве $\{u \in H^{(\lambda)},\ u|_{t=0}=0\}$.*

Прежде чем доказывать предложение, сделаем несколько замечаний.

Замечания. 1) Рассмотрим неограниченный оператор

$$H^{(s)} \to H_+^{(s)} \quad (\varphi \mapsto \theta_+(t)\varphi), \tag{36}$$

где $\theta_+(t)$ — характеристическая функция полупрямой $t>0$, т. е. $\theta_+(t)=1$ при $t>0$ и $\theta_+(t)=0$ при $t<0$. В терминах этого оператора утверждения теоремы можно переформулировать следующим образом:

Функция $\varphi \in H^{(s)}$, $s-1/2 \notin \mathbb{Z}$, *принадлежит области определения оператора* (36) *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям* (33). *При* $s-1/2 \in \mathbb{Z}$ *к этим условиям надо добавить условие* (34).

2) Из замечания 1) следует, что при $0 \leqslant s < 1/2$ область определения оператора (36) совпадает с $H^{(s)}$, т. е. этот оператор непрерывен. По сопряженности этот оператор непрерывен при $0 \geqslant s > -1/2$. Таким образом, частным случаем теоремы является изоморфизм

$$H_+^{(s)} = \theta_+(t) H^{(s)}, \quad |s| < 1/2. \tag{37}$$

3) Обозначим через Π_+ интегральный оператор типа Коши

$$(\Pi_+\psi)(\sigma, \eta) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\sigma', \eta)}{\sigma + i0 - \sigma'} d\sigma'. \tag{38}$$

Несложно показать (см., например, Г. И. Эскин [1]), что преобразование Фурье переводит оператор умножения на $\theta_+(t)$ в оператор (38), т. е.

$$\mathcal{F}(\theta_+\varphi) = \Pi_+\widehat{\varphi}. \tag{39}$$

Таким образом, (37) можно переформулировать в виде

$$H_{(s)}^+ = \Pi_+ H_{(s)}, \quad |s| < 1/2.$$

Непосредственное доказательство имеется у Г. И. Эскина [1]. Там же доказано, что при $|s| = 1/2$ оператор Π_+ неограниченный, а его область определения является всюду плотным подмножеством в $H_{(s)}$ (и не совпадает с $H_{(s)}$).

4) Если $s-1/2 \notin \mathbb{Z}$, то согласно теореме $\Sigma_+ H_+^{(s)}$ будет замкнутым подпространством в $H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$, выделяемым условиями (33) (при $n=1$ $\Sigma_+ H_+^{(s)}$ будет подпространством $H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n)$ конечной коразмерности $\underline{s}$). В частности,

$$\Sigma_+ H_+^{(s)} = H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n), \quad 0 \leqslant s < 1/2.$$

Из результатов, приведенных в замечании 3), следует, что при $s = 1/2$ имеет место строгое включение

$$\Sigma_+ H_+^{(1/2)} \subset H^{(1/2)}(\mathbb{R}_+^n),$$

причем левое пространство всюду плотно в правом.

Отсюда можем вывести, что и в общем случае если $s-1/2 \in \mathbb{Z}$, то имеет место строгое включение

$$\Sigma_+ H_+^{(s)} \subset \{\varphi \in H^{(s)}(\mathbb{R}_+^n),\ D_t^k \varphi|_{t=0} = 0,\ k = 0, \ldots, \underline{s} = s - 3/2\},$$

причем левое пространство плотно в правом.

5) Теорема позволяет решить задачу о «склейке». Пусть

$$f_\pm \in H^{(s)}(\mathbb{R}_\pm^n) \text{ и } f(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{при } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ f_-(x) & \text{при } x \in \mathbb{R}_-^n. \end{cases}$$

Спрашивается при каких условиях на $f_\pm$ функция $f(x)$ принадлежит $H^{(s)}$?

Согласно теореме, если $s-1/2 \notin \mathbb{Z}$, то $f(x) \in H^{(s)}$ тогда и только тогда, когда

$$D_t^k f_+|_{t=0} = D_t^k f_-|_{t=0}, \quad k = 0, \ldots, s.$$

При $s-1/2 \in \mathbb{Z}$ к этим условиям надо добавить условия сходимости интеграла (9) для $\varphi(t, y) = f_+(t, y) - f_-(t, y)$.

3.7. Доказательство предложения 3.6 (случай $n=1$). Имеется целый ряд доказательств интересующего нас предложения (см. Трибель [1] и имеющиеся там ссылки, М. С. Агранович, М. И. Вишик [1]). Мы начнем с одномерного случая и приведем простое доказательство, принадлежащее Г. Н. Яковлеву [1].

(i). Пусть $0 < \lambda < 1/2$. Рассмотрим тождество

$$t^{-\lambda} u(t) = t^{-1-\lambda} \int_t^{2t} (u(t) - u(\theta))\, d\theta + t^{-1-\lambda} \int_t^{2t} u(\theta)\, d\theta.$$

Будем обозначать через $I_\varkappa$ отрезок $0 \leqslant t \leqslant \varkappa$, а через $\|,\ I_\varkappa\|$ обычную L_2-норму по этому отрезку. Имеем

$$\| t^{-\lambda} u(t);\ I_{1/2} \| \leqslant \left\| t^{-1-\lambda} \int_t^{2t} (u(t) - u(\theta))\, d\theta;\ I_{1/2} \right\| + \left\| t^{-1-\lambda} \int_t^{2t} u(\theta) d\theta,\ I_{1/2} \right\|.$$

В первом слагаемом справа к внутреннему интегралу применим неравенство Шварца:

$$\left(\int_t^{2t} (u(t) - u(\theta))\, d\theta \right)^2 \leqslant t \int_t^{2t} |u(t) - u(\theta)|^2\, d\theta.$$

Замечая, что $0 \leqslant \theta - t < t$ при $t \leqslant \theta \leqslant 2t$, мы оценим первое слагаемое справа через

$$\left(\int_0^\infty \int_0^\infty |u(t) - u(\theta)|^2 |t - \theta|^{-1-2\lambda}\, dt\, d\theta \right)^{1/2}.$$

Что касается второго слагаемого, то, делая замену $\theta = ts$ и применяя неравенство Минковского, мы оценим его через

$$\int_1^2 \| t^{-\lambda} u(ts);\ I_{1/2} \| ds = \int_1^2 s^{\lambda-1/2} \| t^{-\lambda} u;\ I_{s/2} \| ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\lambda) \| t^{-\lambda} u;\ I_1 \| \leqslant \varepsilon(\lambda) \| t^{-\lambda} u;\ I_{1/2} \| + \varepsilon(\lambda) 2^{\lambda} \| u \|,$$

где $\varepsilon(\lambda) = \int_1^2 s^{\lambda-1/2} ds < 1$ при $\lambda < 1/2$. Собирая неравенства, получим

$$\| t^{-\lambda} u(t);\ I_{1/2} \| \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \varepsilon(\lambda))^{-1} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty | u(t) - u(\theta) |^2 | t - \theta |^{-1-2\lambda} dt\, d\theta \right)^{1/2} + c(\lambda) \| u \|.$$

Теперь остается заметить, что

$$\| t^{-\lambda} u \| \leqslant \| t^{-\lambda} u;\ I_{1/2} \| + 2^{\lambda} \| u \|.$$

(ii) В этом случае мы воспользуемся тождеством

$$u(t) - u(0) = t^{-1} \int_0^t (u(t) - u(\theta))\, d\theta + t^{-1} \int_0^t (u(\theta) - u(0))\, d\theta.$$

Повторяя проведенные выше оценки, мы придем к неравенству

$$\left\| \frac{u(t) - u(0)}{t^{\lambda}};\ I_1 \right\| \leqslant \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{| u(t) - u(\theta) |^2}{| t - \theta |^{1+2\lambda}} dt\, d\theta \right)^{1/2} +$$

$$+ \varepsilon_1(\lambda) \left\| \frac{u(t) - u(0)}{t^{\lambda}};\ I_1 \right\|, \quad \varepsilon_1(\lambda) = \int_0^1 s^{\lambda-1/2} ds < 1.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\left\| \frac{u(t) - u(0)}{t^{\lambda}};\ I_1 \right\|^2 \leqslant (1 - \varepsilon_1(\lambda))^{-2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{| u(t) - u(\theta) |^2}{| t - \theta |^{1+2\lambda}} dt\, d\theta.$$

В случае $u(0) = 0$ приходим к утверждению (ii) предложения.

3.8. Доказательство предложения 3.6 (случай $n > 1$) основано на модификации нормы $\| \ \|^{(\lambda)}$, $0 < \lambda < 1$, позволяющей случай $n > 1$ тривиально свести к одномерному случаю.

Лемма. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Тогда норма* $\| \ \|^{(\lambda)}$ *эквивалентна норме*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{\infty} | u(x_1, \ldots, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \right.$$

$$\left. - u(x) |^2 | h |^{-1-2\lambda} dx\, dh \right)^{1/2} + \| u \|.$$

Доказательство. В силу элементарного неравенства

$$c^{-1}(\lambda)\sum|\xi_i|^{2\lambda}\leqslant\left(\sum\xi_i^2\right)^{\lambda}\leqslant c(\lambda)\sum|\xi_i|^{2\lambda}$$

норма $\|u\|^{(\lambda)}=\left(\int(1+|\xi|^2)^{\lambda}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}$ эквивалентна норме

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\int|\xi_i|^{2\lambda}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi+\|u\|^2\right)^{1/2}.$$

Воспользовавшись равенством (см. предложение 3 из п. I.2.2)

$$\int|\xi_i|^{2\lambda}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda\Gamma(2\lambda)\sin\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(\ldots,x_i+h,\ldots)|^2}{|h|^{1+2\lambda}}\,dx\,dh,$$

мы докажем лемму.

Закончим доказательство предложения 3.6. При каждом y к функции $u(t,y)$ мы можем применить одномерный результат предыдущего пункта

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(t,y)|^2}{|t|^{2\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant c(\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(t,y)-u(\theta,y)|^2}{|t-\theta|^{1+2\lambda}}\,dt\,d\theta+\int|u(t,y)|^2\,dy\right).$$

Интегрируя это равенство по y, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(t,y)|^2}{|t|^{2\lambda}}\,dt\,dy\leqslant c\left(\|u\|^2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(t,y)-u(\theta,y)|^2}{|t-\theta|^{1+2\lambda}}\,dt\,d\theta\,dy\right),$$

и теперь остается заметить, что в силу леммы правую часть можно сверху оценить через $\mathrm{const}\cdot\|u\|^{(\lambda)}$.

3.9. Замечания о шкалах пространств функций в полосе. В определении пространств $C_{(l)}^{(m)}(\mathbb{R}_+^n)$ полупространство $\mathbb{R}_+^n$ тривиально заменяется на произвольную область Ω, соответствующие пространства естественно обозначить через $C_{(l)}^{(m)}(\Omega)$. Если Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$, то для пространств $C_{(l)}^{(m)}(\Omega)$ имеет место аналог предложения 3.1 (он доказывается с помощью локализации). В том случае, когда Ω является полосой $\mathbb{R}_{(a,b)}^n=\{(t,y)\in\mathbb{R}^n,\ a\leqslant t\leqslant b,\ y\in\mathbb{R}^{n-1}\}$, сюръективность оператора сужения просто выводится из предложения 3.1.

Аналогично дело обстоит с пространствами $H_{(l)}^{(s)}(\Omega)$, при определении этих пространств надо заменить $\mathbb{R}_+^n$ на Ω.

Обозначим через $\Sigma_{(a,b)}$ операцию сужения функций, заданных в $\mathbb{R}^n$, на полосу $\mathbb{R}_{(a,b)}^n$. Заменяя в теореме 3.1 $H_{\oplus}^{(s)}$ на $H_{\ominus}^{(s)}$

и делая сдвиг, получим изоморфизм

$$\Sigma_{(-\infty,b)}\colon H^{(s)}[-\infty, b) \to H^{(s)}\left(\mathbb{R}^n_{(-\infty,b)}\right).$$

Пространство $H^{(s)}[a, b)$, которое согласно замечанию 2.3 является подпространством $H^{(s)}[-\infty, b)$, состоящим из функций, равных 0 при $t \leqslant a$, переходит в пространство тех $\varphi \in H^{(s)}\left(\mathbb{R}^n_{(-\infty,b)}\right)$, которые равны 0 при $t \leqslant a$.

Модификацией теоремы 3.6 является

Теорема. *Функция* $\varphi \in H^{(s)}\left(\mathbb{R}^n_{(a,b)}\right)$ *принадлежит образу* $H^{(s)}[a, b)$ *в отображении* (53) *тогда и только тогда, когда*

$$D_t^k\varphi|_{t=a} = 0, \ldots, \quad k = 0, \ldots, s,$$

и, кроме того, при полуцелых s сходятся интегралы

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^\alpha\varphi(t, y)|^2 |t - a|^{-1}\,dt\,dy, \quad |\alpha| \leqslant s - 3/2.$$

§ 4. Операторы свертки и сверточные уравнения в пространствах функций и распределений, сосредоточенных в $\mathbb{R}^n_+$ и в конечной полосе

В настоящем параграфе строятся две параллельные теории операторов свертки и свертывателей в пространствах типа Φ_+ и $\Phi_\oplus$, где $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, \mathscr{S}', \mathscr{O}'$ и устанавливается их двойственность, дается описание пространств свертывателей $\mathfrak{C}(\Phi_+)$ и $\mathfrak{C}(\Phi_\oplus)$, исследуются сверточные уравнения. В существенном рассмотрения ведутся по схеме, разработанной в § I.4. Однако при ее проведении требуются некоторые дополнительные рассмотрения, связанные с тем, в частности, что Φ_+, $\Phi_\oplus$ инвариантны лишь относительно полугруппы сдвигов. Имеет место двойственность: $\mathfrak{C}(\Phi_+) = \mathfrak{C}((\Phi')_\oplus)$. Сравнительно просто выясняется, что $\mathfrak{C}(\Phi_+) \supset (\mathfrak{C}(\Phi))_+$, однако совпадение имеется лишь для $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}'$. В то же время для $\Phi_+ = \mathscr{O}_+$, $(\mathscr{S}')_+$ имеются операторы свертки, которые не продолжаются на Φ. Конец параграфа посвящен свертке в полосе. Здесь возникает вариант условия корректности по Петровскому.

4.1. Свертка умеренных распределений, носители которых принадлежат полупространству. Пусть функции $f(t, y)$ и $g(t, y)$ принадлежат паре пространств, для которых определена классическая операция свертки (I.3.1), и пусть $f(t, y) = g(t, y) = 0$ при $t < 0$. Тогда формула (I.3.1) примет вид

$$(f * g)(t, y) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t - t', y - y')\,g(t', y')\,dy'\,dt' =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t', y')\,g(t - t', y - y')\,dy'\,dt', \quad (1)$$

откуда следует, что $(f*g)(t, y)=0$ при $t\leqslant 0$. Таким образом, если Φ_i, $i=1, 2, 3$,— тройка пространств, для которых определена классическая операция свертки

$$\Phi_1*\Phi_2\subset\Phi_3, \tag{2}$$

то имеют место включения для подпространств

$$\Phi_{1\pm}*\Phi_{2\pm}\subset\Phi_{3\pm}. \tag{$2_\pm$}$$

Если к $(2_\pm)$ применить оператор сдвига $T_{(-a-c)}$ и воспользоваться перестановочностью свертки со сдвигами, то получим полезные для дальнейшего включения

$$\Phi_1[a, \infty)*\Phi_2[c, \infty)\subset\Phi_3[a+c, \infty), \tag{3_+}$$

$$\Phi_1(-\infty, a]*\Phi_2(-\infty, c]\subset\Phi_3(-\infty, a+c]. \tag{3_-}$$

Приведенные утверждения сохраняются для случая $\Phi_1=\mathcal{S}'$, $\Phi_2=\mathcal{O}'$, $\Phi_3=\mathcal{S}'$ и подпространств этих пространств. Для этого следует заметить, что в силу результатов § 1 (см. лемму 1.5) свертку между $(\mathcal{S}')_+$ и $(\mathcal{O}')_+$ можно определить с помощью п. д. о. $\delta_s^+(D)$, которые распределения с носителем в $\mathbb{R}_+^n$ переводят в распределения такого же типа. Положим

$$f*g=\delta_{k+m}^+(D)\left(\delta_{-k}^+(D)f*\delta_{-m}^+(D)g\right). \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$(\mathcal{S}')_+*(\mathcal{O}')_+\subset(\mathcal{S}')_+, \qquad (\mathcal{O}')_+*(\mathcal{S}')_+\subset(\mathcal{S}')_+, \tag{5}$$

$$(\mathcal{O}')_+*(\mathcal{O}')_+\subset(\mathcal{O}')_+, \qquad (\mathcal{O}')_+*\mathcal{S}_+\subset\mathcal{S}_+. \tag{6}$$

Заменяя в (4_+) оператор δ_s^+ на δ_s^-, мы получми аналоги включений (5), (6) для $(\mathcal{S}')_-$, $(\mathcal{O}')_-$ и т. д.

В формуле (1) интегрирование по t проводится по конечному отрезку, поэтому рост по t функций f и g не существен для сходимости интеграла. Однако требуются некоторые оценки на рост по t для того, чтобы результат попадал в нужное пространство. Что касается поведения f и g по y, то оно должно быть таким же, как в предложении 1 из п. 1.3.1. Имеет место

Лемма. *Пусть* $f\in C_{(l_1,l_2)+}$, $g\in C_{(\lambda_1,\lambda_2)+}$, *причем* $l_2>|\lambda_2|+n-1$. *Тогда* $f*g\in C_{(\mu,\lambda_2)+}$, *где* $\mu\leqslant-|l_1|-|\lambda_1|-1$.

Доказательство. Имеем при $t\geqslant 0$

$$|f(t, y)|<c_1(1+t)^{-l_1}(1+|y|^2)^{-l_2/2},$$

$$|g(t, y)|<c_2(1+t)^{-\lambda_1}(1+|y|^2)^{-\lambda_2/2},$$

откуда

$$|(f*g)(t, y)|\leqslant\text{const}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(1+|y-y'|^2)^{-l_2/2}(1+|y'|^2)^{-\lambda_2/2}dy'\times$$

$$\times\int\limits_0^t(1+t-t')^{-l_1}(1+t')^{-\lambda_1}dt'.$$

Рассуждая таким же образом, как при доказательстве предложения 1 из п. I.3.1, мы получим, что первый интеграл справа не превосходит $\mathrm{const}\cdot(1+|y|^2)^{-\lambda_2/2}$. Второй интеграл заведомо меньше $\mathrm{const}\cdot(1+y)^{|l_1|+|\lambda_1|+1}$, откуда и следует утверждение леммы.

В п. 1.8 мы рассматривали пространство $\mathscr{K}'$, отвечающее разбиению $x=(t, y)$.

Предложение. *Справедливы включения*

$$(\mathscr{K}')_+ * \Phi_+ \subset \Phi_+, \qquad \Phi = \mathscr{S}', \ \mathscr{K}', \ \mathscr{O}. \tag{7}$$

Замечания. 1) В (5), (6) мы рассматриваем свертки распределений, из которых одно растет не быстрее степени, а другое убывает быстрее любой степени. В (7) уточняется, что если распределение сосредоточено при $t \geqslant 0$, то от условия быстрого убывания по t можно отказаться.

2) При $n=1$ пространство $(\mathscr{K}')_+$ в (7) следует заменить на $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))_+$.

Согласно (6) и (7) $(\mathscr{O}')_+$ и $(\mathscr{K}')_+$ являются алгебрами относительно свертки, а изоморфизмы (см. § 1)

$$\mathscr{F}(\mathscr{O}')_+ = \mathscr{M}^+, \ \mathscr{F}(\mathscr{K}')_+ = \mathscr{L}^+$$

являются изоморфизмами алгебр.

Доказательство предложения. Из определения $(\mathscr{K}'_+)$ следует, что для любого распределения $f \in (\mathscr{K}')_+$ и любого l_2 можно указать такие s_1, s_2, l_1, что $f \in H^{(s_1,s_2)}_{(l_1,l_2)+}$. Но тогда существуют такие натуральные k_1, k_2, что

$$f = (1+|D_t|^2)^{k_1}(1+|D_y|^2)^{k_2} f_0, \quad f_0 \in C_{(l_1,l_2)+}.$$

Аналогично, для $g \in (\mathscr{S}')_+$ можно указать такие λ_1, λ_2 и натуральные m_1, m_2, что

$$g = (1+|D_t|^2)^{m_1}(1+|D_y|^2)^{m_2} g_0, \quad g_0 \in C_{(\lambda_1,\lambda_2)+}.$$

С учетом леммы мы получим, что

$$f * g = (1+|D_t|^2)^{k_1+m_1}(1+|D_y|^2)^{k_2+m_2}(f_0 * g_0) \in (\mathscr{S}')_+.$$

Если $g \in (\mathscr{K}')_+$, то в качестве λ_2 можно взять любое вещественное число, откуда следует (8). Если $g \in \mathscr{O}_+$, то $m_1 = m_2 = 0$ и $g_0 \in C^{(\infty,\infty)}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$, откуда и следует (9).

4.2. Операторы свертки в пространствах функций и распределений, сосредоточенных в $\mathbb{R}^n_+$. Если $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}'$, то при $h=(h_1, \ldots, h_n)$

$$T_h\Phi_+ = \Phi[-h_1, \infty) \subset \Phi_+ \quad \forall h \in \overline{\mathbb{R}^n_-}, \tag{8}$$

т. е. на Φ_+ определена только полугруппа сдвигов T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$. Тем не менее этой полугруппы хватает для того, чтобы построить содержательную теорию операторов свертки в духе теоремы I.4.1.

Оператором свертки A: $\Phi_+ \to \Phi_+$, $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, называется непрерывный оператор, перестановочный со сдвигами T_h, $h \in \mathbb{R}^n_-$. Это определение сохраняется и в случае $\Phi = \mathscr{O}$, $\mathscr{O}'$; надо только условие непрерывности оператора заменить на условие регулярности. Ввиду дополнения к гл. I всякий непрерывный оператор на индуктивном или проективном пределе рефлексивных банаховых пространств будет регулярным, так что на $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$ классы непрерывных и регулярных операторов совпадают. Таким образом, операторы свертки на $\mathscr{S}_+$, $(\mathscr{S}')_+$, $\mathscr{O}_+$, $(\mathscr{O}')_+$ можно единым образом определять как регулярные операторы, перестановочные со сдвигами (8).

Одним из основных результатов этого параграфа и всей главы является

Теорема. (i) *Пусть $\Phi = \mathscr{S}$, $(\mathscr{O}')$. Тогда для каждого оператора свертки A: $\Phi_+ \to \Phi_+$ найдется такое распределение $f \in (\mathscr{O}')_+$, что*

$$A\varphi = \mathrm{con}_f\,\varphi = f * \varphi \quad \forall \varphi \in \Phi_+. \tag{9}$$

(ii) *Пусть $\Phi = \mathscr{O}$, $\mathscr{S}'$. Тогда для каждого оператора свертки A: $\Phi_+ \to \Phi_+$ найдется такое распределение $f \in (\mathscr{K}')_+$, что имеет место* (9).

Утверждение (i), а также (ii) в частном случае $n = 1$ доказываются по плану § 4. При доказательстве (ii) при $n > 1$ используется теорема о ядре из § I.6.

Мы начнем с того, что для операторов свертки на $\mathscr{S}_+$, $\mathscr{O}_+$ установим аналог предложения 1 из п. I.4.1. Для этого нам надо подобрать пространство распределений, в котором a priori могут лежать те f, для которых свертка (I.3.26) имеет смысл при $\varphi_+ \in \mathscr{S}_+$, $\mathscr{O}_+$ и $x \in \mathbb{R}^n$.

Мы имеем естественные вложения

$$\Phi(-\infty, c] \subset \Phi(-\infty, c'], \qquad c < c',$$

причем правое пространство индуцирует в левом топологию, эквивалентную исходной. Рассмотрим индуктивный предел

$$\Phi_\infty = \bigcup_{c=0}^{\infty} \Phi(-\infty, c];$$

Φ_∞ будет строгим индуктивным пределом (см. Дополнение к гл. I, п. 3): и согласно цитированному в Дополнении результату Бурбаки, Φ_∞ — регулярный индуктивный предел, и, следовательно, сопряженное пространство $(\Phi_\infty)'$ отождествляется с проективным пределом:

$$(\Phi_\infty)' = \bigcap_{c=0}^{\infty} (\Phi(-\infty, c])'.$$

Однако этой реализацией мы не будем пользоваться. Так как $\mathscr{D}$ плотно в Φ_∞, то пространство $(\Phi_\infty)'$ мы будем понимать как совокупность таких $f \in \mathscr{D}'$, которые по непрерывности продолжаются на любое пространство $\Phi(-\infty, c]$, $c \geqslant 0$.

Отметим, что если $\varphi \in \Phi_+$, то $(IT_{(t,y)}\varphi)(t', y') = \varphi(t-t', y-y') \in \Phi(-\infty, t]$, так что выражение

$$(f*\varphi)(t, y) = (f, IT_{(t,y)}\varphi) \tag{10}$$

при $t \geqslant 0$ определено для $\varphi \in \Phi_+$ и $f \in (\Phi_\infty)'$.

Предложение 1. *Пусть $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$. Для каждого оператора свертки A: $\Phi_+ \to \Phi_+$ найдется такое распределение $f \in ((\Phi_\infty)')_+$, что оператор A представляется в виде* (9).

Доказательство. Так как топология в $\mathscr{S}_+$, $\mathscr{O}_+$ сильнее топологии поточечной сходимости, то функционалы a_x

$$(a_x, \varphi) = (A\varphi)(x) \quad \forall \varphi \in \Phi_+,$$

непрерывны, т. е. $a_x \in (\Phi_+)'$ и $a_{(t,y)} = 0$ при $t \leqslant 0$. Положим $f_x = IT_x a_x$. Тогда $f_{(t,y)} \in (\Phi(-\infty, t])'$ и

$$(f_x, IT_x\varphi) = (a_x, \varphi) = (A\varphi)(x).$$

Предложение будет доказано, если мы проверим, что функционалы f_x, $x = (t, y)$, являются сужением на $(\Phi(-\infty, t])'$ единого функционала $f \in (\Phi_\infty)'$, причем $\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Из инвариантности Φ_+ относительно сдвигов $T_{(0,y)}$ и перестановочности A с такими сдвигами сразу следует (ср. предложение 1 п. I.4.1), что функционалы $f_{(t,y)}$ не зависят от y, т. е. $f_{(t,y)} = f_{(t,0)} \overset{\text{def}}{=} f_t$.

Пусть $\psi \in \Phi(-\infty, t]$, т. е. $\psi = IT_t\varphi$, $\varphi \in \Phi_+$. Тогда, как уже отмечалось выше, $(f_t, \psi) = (A\varphi)(t, 0)$. Если $t' > t$, то функционал $f_{t'}$ определен на более широком пространстве $\Phi(-\infty, t'] \supset \Phi(-\infty, t]$ и

$$\begin{aligned}(f_{t'}, \psi) &= (a_{t'}, T_{-t'}I\psi) = (a_{t'}, T_{-t'+t}\varphi) = \\ &= (AT_{-t'+t}\varphi)(t', 0) = T_{-t'+t}(A\varphi)(t', 0) = (A\varphi)(t, 0) = (f_t, \psi)\end{aligned}$$

(мы воспользовались перестановочностью A с оператором сдвига $T_{(-t'+t,0)}$, $(t-t', 0) \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$). Итак, мы показали, что $f_t = f$, причем $(f, \varphi) = 0$ при $\varphi \in \Phi(-\infty, t]$, $t < 0$. Предположение доказано.

Доказанное выше утверждение позволяет определить пространства свертывателей на $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{O}_+$:

$$\mathfrak{C}(\Phi_+) = \{f \in (\Phi_\infty)'_+,\ f*\varphi \in \Phi_+ \ \forall \varphi \in \Phi_+\}, \quad \Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}.$$

Предложение 2. (i) *Каждый оператор свертки A_0: $\Phi_+ \to \Phi_+$, $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, по непрерывности продолжается до оператора свертки A: $\Psi_+ \to \Psi_+$, где $\Psi = \mathscr{O}'$, $\mathscr{S}'$ соответственно.*

(ii) *Пусть A: $\Psi_+ \to \Psi_+$, $\Psi = \mathscr{O}'$, $\mathscr{S}'$ — оператор свертки. Тогда его сужение A_0 на подпространство $\Phi_+ = \mathscr{S}_+$, $\mathscr{O}_+$ является оператором свертки на Φ_+.*

Доказательство этого предложения (ср. предложение 2 из п. I.4.1) основано на том, что из перестановочности оператора A со сдвигами T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$, следует перестановочность этого оператора с дифференциальными операторами (см. предложение из приложения к § I.3), и в частности с операторами $(iD_t+1)^{k_1}(1+|D_y|^2)^{k_2}$, k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}_+$. Но тогда A коммутирует с обратными операторами $(iD_t+1)^{-k_1}(1+|D_y|^2)^{-k_2}$. Градуируя $\mathscr{S}_+$ и $(\mathscr{O}')_+$ с помощью указанных операторов и повторяя доказательство предложения 2 из п. I.4.1, мы докажем наше утверждение.

4.3. Доказательство теоремы 4.2. Предложения 1, 2 предыдущего пункта позволяют переформулировать утверждение теоремы 4.2 в виде двух равенств:

$$\mathfrak{C}(\mathscr{S}_+)=\mathfrak{C}((\mathscr{O}')_+)=(\mathscr{O}')_+, \tag{11}$$

$$\mathfrak{C}(\mathscr{O}_+)=\mathfrak{C}((\mathscr{S}')_+)=(\mathscr{K}')_+. \tag{12}$$

Ввиду (6), (7) левые пространства этих равенств содержатся в правых, и доказательство теоремы сводится к проверке включений

$$\mathfrak{C}(\mathscr{S}_+)\subset(\mathscr{O}')_+, \tag{11'}$$

$$\mathfrak{C}(\mathscr{O}_+)\subset(\mathscr{K}')_+. \tag{12'}$$

Технически приводимое ниже доказательство (11) отличается от аналогичного доказательства из гл. I.

В § I.4 свертыватель a priori лежал в $\mathscr{S}'$, и была заранее известна ассоциативность свертки (см. § I.3). Теперь мы только знаем, что свертыватели являются распределениями из $(\mathscr{S}_\infty)'$, и ассоциативность свертки приходится доказывать непосредственно. При этом дополнительные трудности возникают в связи с тем, что $(\mathscr{S}_\infty)'$ может содержать элементы бесконечного порядка. Нужное нам утверждение об ассоциативности содержится в следующей лемме.

Лемма об ассоциативности. *Пусть A: $\mathscr{S}_+ \to \mathscr{S}_+$ — оператор свертки. Тогда*

$$A(g*\varphi)=(Ag)*\varphi \quad \forall g,\ \varphi\in\mathscr{S}_+. \tag{13}$$

Доказательство. С учетом предложения 1 нам надо проверить, что

$$(f*(g*\varphi))(t,y)=((f*g)*\varphi)(t,y) \quad \forall f\in\mathfrak{C}(\mathscr{S}_+), \qquad \forall g,\ \varphi\in\mathscr{S}_+. \tag{14}$$

Выберем произвольное $T>0$ и будем доказывать равенство (14) для $t\leqslant T$. Тогда f можно заменить на некоторое распределение конечного порядка. А именно, $\forall T>0$ можно указать такое $f_T\in(\mathscr{S}')_+$, что

$$(f*\psi)(t,y)=(f_T*\psi)(t,y) \quad \forall\psi\in\mathscr{S}_+, \quad \forall t\leqslant T. \tag{15}$$

Для доказательства заметим, что если $\psi\in\mathscr{S}_+$, то $(IT_{(t,y)}\psi)(t',y')=\psi(t-t',y-y')=0$ при $t'>t$, поэтому левая часть (15) (см. определение свертки (10)) не изменится, если заменить f на $\chi_T f$, где $\chi_T \in C^\infty$, $\chi_T(t)=1$ при $t \leqslant T$ и $\chi_T(t)=0$ при $t > T+1$. Функционал $f \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}_+) \subset (\Phi_\infty)'$ определен на тех функциях из $\mathcal{S}$, носители которых ограничены справа. Но тогда функционал $\chi_T f$ определен и непрерывен на всем пространстве $\mathcal{S}$, т. е. $f_T = \chi_T f \in \mathcal{S}'$, что и доказывает (15).

Заменяя в (15) ψ на $g * \varphi$ и пользуясь леммой I.3.2, получим при $t \leqslant T$:

$$(f * (g * \varphi))(t, y) = (f_T * (g * \varphi))(t, y) = ((f_T * g) * \varphi)(t, y) =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_T * g)(t-t', y-y')\,\varphi(t', y')\,dt'\,dy' =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f * g)(t-t', y-y')\,\varphi(t', y')\,dt'\,dy' = ((f * g) * \varphi)(t, y).$$

Доказательство равенств (11). Выберем последовательность $\delta_j(x) \in \mathcal{S}_+$, сходящуюся к $\delta(x)$ в топологии $\mathcal{O}'$. Согласно лемме

$$A(\delta_j * \varphi) = (A\delta_j) * \varphi. \tag{16}$$

Так как оператор A по непрерывности продолжается до регулярного оператора на $\mathcal{O}'$ (см. предложение 2 (i)), то последовательность $\{A\delta_j\}$ в топологии $\mathcal{O}'$ сходится к распределению $A\delta \overset{\text{def}}{=} f \in (\mathcal{O}')_+$. Поскольку топология в $\mathcal{O}'$ не слабее топологии в $\mathcal{S}'$, то при $j \to \infty$ выражение $(A\delta_j * \varphi)(t, y) = (A\delta_j, IT_{(t,y)}\varphi)$ при фиксированной функции $\varphi \in \mathcal{S}_+$ в каждой точке (t, y) сходится к $f * \varphi$. С другой стороны, последовательность $\delta_j * \varphi$ сходится к $\delta * \varphi = \varphi$ в $\mathcal{S}$, но тогда $A(\delta_j * \varphi) \to A\varphi$ в $\mathcal{S}$ и тем более эта сходимость имеет место в каждой точке (t, y). Итак, предельный переход в (16) приводит к утверждению (i) теоремы 4.2, т. е. имеет место (11′).

Замечание. Если повторить аналогичное утверждение применительно к $\mathcal{O}_+$, то получим включение $\mathfrak{C}(\mathcal{O}_+) \subset (\mathcal{S}')_+ \cap \cap (\mathcal{O}_\infty)'$. При $n=1$ (замечание 2 из п. 4.1) приходим к (12′). При $n>1$ мы воспользуемся теоремой о ядре I.6.5.

Доказательство равенств (12). Пусть $A\colon \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)_+ \to \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)^+$ — оператор свертки. Тогда оператор

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}_t)_+ \to \mathcal{O}(\mathbb{R}_t)_+ \quad (\varphi(t) \mapsto (A(\varphi\psi))(t, 0))$$

при фиксированной функции $\psi \in \mathcal{O}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right)$ будет оператором свертки, и согласно замечанию для этого оператора теорема 4.2 (ii) уже доказана, т. е. найдется такое распределение $F_\psi \in \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t))_+$, что

$$(A(\varphi\psi))(t, 0) = (F_\psi * \varphi)(t). \tag{17}$$

Теперь рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{O}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right) \to (\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t))_+ \quad (\psi \mapsto F_\psi). \tag{18}$$

Прежде всего установим непрерывность этого оператора. Ввиду теоремы о замкнутом графике (справедливой в индуктивных пределах пространств Фреше, и в частности в $\mathcal{O}$) достаточно проверить замкнутость этого оператора, т. е. что

$$\{\psi_j \to 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad F_{\psi_j} \to F \quad \text{в} \quad (\mathcal{S}'(\mathbb{R}))_+\} \Rightarrow \{F = 0\}.$$

Действительно, если $\varphi(t) \in \mathcal{O}(\mathbb{R})_+$ и $\psi_j(y) \to 0$ в $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j \to \infty$, то $\varphi(t)\psi_j(y) \to 0$ в $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а в силу непрерывности оператора свертки A имеем: $(A(\varphi\psi_j))(t, y) \to 0$ в $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и заведомо (см. (17)) $(A(\varphi\psi_j))(t, 0) = (F_{\psi_j} * \varphi)(t) \to 0$ при $j \to \infty$. Таким образом, если F — предел последовательности F_{ψ_j}, то $F * \varphi \equiv 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{O}_+$. Переходя к преобразованию Фурье — Лапласа, получим, что $\widehat{F}(\tau)\widehat{\varphi}(\tau) \equiv 0$ при $\operatorname{Im}\tau < 0$, откуда $\widehat{F}(\tau) \equiv 0$.

К непрерывному оператору (18) применим теорему 1 из п. I.6.5. Согласно этой теореме найдется такое распределение $a \in \mathcal{K}'$, что

$$(a, \chi\psi) = (F_\psi, \chi) \quad \forall \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t).$$

Подставим в это равенство функцию $\chi(s) = IT_t\varphi_+(s)$, где $\varphi_+ \in \mathcal{S}(\mathbb{R})_+$. С учетом равенства (17) получим

$$(a, (IT_t\varphi_+)\psi) = (F_\psi, IT_t\varphi_+) = (F_\psi * \varphi_+)(t) = (A(\varphi_+\psi))(t, 0). \quad (19)$$

С другой стороны, согласно предложению 1 из п. 4.2 найдется такое распределение $f \in ((\mathcal{O}_\infty)')_+$, что A является оператором свертки с этим распределением. Тогда

$$(A(\varphi_+\psi))(t, 0) = (f, (IT_t\varphi_+)\psi). \quad (20)$$

Сравнивая (19) и (20), мы получим, что

$$(a, (IT_t\varphi_+)\psi) = (f, (IT_t\varphi_+)\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \forall \varphi_+ \in \mathcal{S}(\mathbb{R})_+.$$

Функции вида

$$(IT_t\varphi_+)\psi, \quad t \geqslant 0, \quad \varphi_+ \in \mathcal{S}(\mathbb{R})_+, \quad \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

и их линейные комбинации плотны в пространстве $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ (см. (I.6.2)), поэтому функционалы $a \in \mathcal{K}'$ однозначно определяются своими значениями на этих функциях. Итак, доказано, что

$$f = a \in \mathcal{K}' \cap ((\mathcal{O}_\infty)')_+ = (\mathcal{K}')_+.$$

4.4. Операторы свертки в фактор-пространствах. Пусть Φ_j — пространства из (2). Тогда оператор $\Phi_2 \to \Phi_3$ ($\varphi \mapsto f * \varphi$, $f \in \Phi_{1-}$) непрерывен и (согласно (2_)) переводит подпространство Φ_{2-} в Φ_{3-}. Но тогда этот оператор естественным образом продолжается на фактор-пространства, т. е. (2) индуцирует включение $\Phi_{1-} * \Phi_{2\oplus} \subset \Phi_{3\oplus}$. В частности, имеем

$$(\mathcal{O}')_- * \Phi_\oplus \subset \Phi_\oplus, \qquad \Phi = \mathcal{S}', \mathcal{O}, \mathcal{S}, \mathcal{O}'. \quad (21)$$

Рассматривая пространства функций, которые имеют различное поведение на бесконечности по t и по y, можно получить, что

$$(\mathscr{K}')_- * \Phi_\oplus \subset \Phi_\oplus, \qquad \Phi = \mathscr{O}', \ \mathscr{S}. \tag{22}$$

Доказательство (22) основано на представлении элементов $(\mathscr{K}')_-$ в виде дифференциальных операторов от функций из $C_{(l_1, l_2)-}$ (с произвольным l_2) и на следующем утверждении.

Лемма. *Если* $f \in C_{(l_1, l_2)-}$, $g \in C_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ *и* $\lambda_1 > |l_1| + 1$, $l_2 > |\lambda_2| + n - 1$, *то*

$$\Sigma_+(f * g) \in C_{(\lambda_1 + l_1 - 1, \lambda_2)}(\mathbb{R}^n_+),$$

где Σ_+ — *оператор сужения функций, заданных в* $\mathbb{R}^n$, *на полупространство* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Если $f(t, y) = 0$ при $t > 0$, то при $t > 0$ имеем

$$(f * g)(t, y) = \int_{-\infty}^{0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t', y') g(t - t', y - y')\, dt'\, dy' \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot \int (1 + |y'|^2)^{-l_2/2} (1 + |y - y'|)^{-\lambda_2/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty (1 + t')^{-l_1} (1 + |t + t'|)^{-\lambda_1/2}\, dt'.$$

Первый интеграл не превосходит $\text{const} \cdot (1 + |y|^2)^{-\lambda_2/2}$. Элементарный подсчет показывает, что второй интеграл не превосходит $\text{const} \cdot (1 + t)^{-l_1 - \lambda_1 + 1}$.

Как уже фактически отмечалось выше, операторы сдвига T_h: $\Phi \to \Phi$, $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, \mathscr{S}', \mathscr{O}'$, при $h \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ переводят в себя подпространства Φ_- и, следовательно, продолжаются до операторов T_h: $\Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$; эти операторы непрерывны (регулярны), и $p_\oplus T_h \varphi = T_h p_\oplus \varphi$, $\varphi \in \Phi$, где $p_\oplus$: $\Phi \to \Phi_\oplus$ — канонический проектор.

Оператором свертки A: $\Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$, $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{S}'$, называется непрерывный оператор A: $\Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$, перестановочный со сдвигами T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$.

На фактор-пространства $\mathscr{O}_\oplus$, $(\mathscr{O}')_\oplus$ естественным образом переносится понятие регулярного оператора из § I.2 (ср. общее определение регулярных операторов в проективных и индуктивных пределах в Дополнении к гл. I). *Оператором свертки* A: $\Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$, $\Phi = \mathscr{O}, \mathscr{O}'$, называется регулярный оператор A: $\Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$, перестановочный со сдвигами T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Для операторов свертки на фактор-пространствах справедлив аналог теоремы 4.2.

Теорема. (i) *Пусть* $\Phi = \mathscr{O}, \mathscr{S}'$. *Тогда каждому оператору свертки* A: $\Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$ *отвечает такое распределение* $f \in (\mathscr{O}')_-$, *что*

$$A\varphi = \text{con}_f \varphi = p_\oplus(f * \varphi_0), \quad \varphi_0 \in \Phi, \ p_\oplus \varphi_0 = \varphi, \qquad \varphi \in \Phi_\oplus. \tag{23}$$

(ii) *Пусть* $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}'$. *Тогда для каждого оператора свертки* $A\colon \Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$ *найдется такое распределение* $f \in (\mathscr{K}')_-$, *что имеет место* (23).

Утверждения теоремы можно получить из теоремы 4.2 по соображениям сопряженности. Утверждение (i) легко получается непосредственно, доказательство (ii) использует теорему о ядре I.6.4.

Предложение 1. *Для всякого оператора свертки* $A\colon \Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$, $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, *найдется такое распределение* $f \in (\Phi')_-$, *что имеет место* (22).

Доказательство (ср. предложение 1 из п. I.4.1 и предложение 1 из п. 4.1). В силу непрерывности (регулярности) A линейный функционал $(a, \varphi) = (A\varphi)(0)$ непрерывен и, следовательно, $a \in (\Phi')_+$. Из перестановочности A с оператором сдвига T_x, $x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, следует, что

$$(A\varphi)(x) = T_x(A\varphi)(0) = (AT_x\varphi)(0) = (a, T_x\varphi) = (f, IT_x\varphi),$$

где $f = Ia \in (\Phi')_-$. Предложение доказано.

Замечание (ср. замечание I.4.1). В предложении 1 мы фактически установили, что всякий непрерывный оператор $A\colon \mathscr{O}_\oplus \to \mathscr{O}_\oplus$, перестановочный со сдвигами T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, является оператором con_f, $f \in (\mathscr{O}')_-$. Рассуждая таким же образом, как в предложении 1 (ii) из п. I.3.3, мы покажем, что оператор

$$\mathrm{con}_f\colon \mathscr{O}_\oplus \to \mathscr{O}_\oplus, \quad f \in (\mathscr{O}')_-,$$

является регулярным, т. е. оператором свертки.

Таким образом, на $\mathscr{O}_\oplus$ совпадают классы непрерывных и регулярных операторов, перестановочных относительно сдвигов T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Отметим, что в случае пространства $\mathscr{O}_+$ вопрос о совпадении классов непрерывных и регулярных операторов, перестановочных относительно сдвигов T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$, является открытым.

Из доказанного предложения следует первое утверждение теоремы для пространства $\Phi = \mathscr{O}$.

Из перестановочности операторов свертки $A\colon \Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$ со сдвигами T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, следует их перестановочность с п. д. о. $(iD_t - 1)^{k_1}(1 + |D_y|^2)^{k_2}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, градуирующим шкалы фактор-пространств по гладкости. Отсюда вытекает

Предложение 2. *Пусть* $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$ *и* $\Psi = \mathscr{O}'$, $\mathscr{S}'$.

(i) *Каждый оператор свертки* $A_0\colon \Phi_\oplus \to \Phi_\oplus$ *по непрерывности продолжается до оператора свертки* $A\colon \Psi_\oplus \to \Psi_\oplus$.

(ii) *Сужение оператора свертки* $A\colon \Psi_\oplus \to \Psi_\oplus$ *на* $\Phi_\oplus$ *будет оператором свертки на этом пространстве.*

Ввиду предложения 1 естественно положить для $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$

$$\mathfrak{C}(\Phi_\oplus) = \{f \in (\Phi')_-, f * \varphi \in \Phi_\oplus \quad \forall \varphi \in \Phi_\oplus\}.$$

Тогда в силу предложения 2 естественно положить

$$\mathfrak{C}(\mathscr{S}_\oplus) = \mathfrak{C}((\mathscr{O}')_\oplus), \quad \mathfrak{C}(\mathscr{O}_\oplus) = \mathfrak{C}((\mathscr{S}')_\oplus), \tag{24}$$

и утверждение теоремы сводится к равенствам

$$\mathfrak{C}(\mathcal{O}_{\oplus}) = \mathfrak{C}(((\mathcal{S}')_{\oplus}) = (\mathcal{O}')_{-}, \tag{25}$$

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}_{\oplus}) = \mathfrak{C}((\mathcal{O}')_{\oplus}) = (\mathcal{K}')_{-}. \tag{26}$$

Согласно определению левое пространство (25) лежит в правом, согласно (21) имеет место противоположное включение. Таким образом, равенство (25), а вместе с ним утверждение (i) теоремы доказаны.

Ввиду (22) доказательство равенств (26) (т. е. теоремы (ii)) свелось к доказательству включения

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}_{\oplus}) \subset (\mathcal{K}')_{-}. \tag{26'}$$

Пусть A: $\mathcal{S}_{\oplus} \to \mathcal{S}_{\oplus}$ — оператор свертки. Тогда согласно предложению 1 $Au = f * u$, $f \in (\mathcal{S}')_{-}$, так что

$$(Au)(0) = (F, u), \qquad F = If \in (\mathcal{S}')_{+}. \tag{27}$$

С другой стороны, для любого $\varphi \in \mathcal{S}_{\oplus}(\mathbb{R}_t^1)$ оператор

$$(B_\varphi \psi)(y) = (A(\varphi\psi))(0, y) \colon \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right) \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right)$$

будет оператором свертки и согласно теореме I.4.2 найдется такое распределение $G_\varphi \in \mathcal{O}'\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right)$, что

$$(A(\varphi\psi))(0) = (B_\varphi \psi)(0) = (G_\varphi, \psi). \tag{28}$$

Подставляя в (27) $u = \varphi\psi$ и сравнивая с (28), получим

$$(F, \varphi\psi) = (G_\varphi, \psi), \quad F \in (\mathcal{S}')_+, \quad G_\varphi \in \mathcal{O}'\left(\mathbb{R}^{n-1}\right). \tag{29}$$

Заметим, что поскольку носитель F принадлежит $\mathbb{R}_+^n$, мы можем считать, что $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$.

Итак, согласно теореме I.6.4 распределение F определяет непрерывный оператор

$$B \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}_+) \to \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right) \quad (\varphi \mapsto B_\varphi),$$

причем образ этого оператора лежит в $\mathcal{O}'\left(\mathbb{R}_y^{n-1}\right)$. Но тогда согласно теореме I.6.4 (ii) $F \in \mathcal{K}' \cap (\mathcal{S}')_+ = (\mathcal{K}')_+$. Теорема доказана.

4.5. Двойственность операторов свертки на подпространствах типа Φ_+ и на фактор-пространствах типа $\Phi_{\oplus}$. Как уже отмечалось в § 2,

$$(\Phi_{\oplus})' = (\Phi')_+, \quad (\Phi_+)' = (\Phi')_{\oplus}, \quad \Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O},$$

причем при $\Phi = \mathcal{S}$ эти изоморфизмы являются топологическими. Как для двойственности между $(\Phi')_+$ и $\Phi_{\oplus}$, так и для двойственности между $(\Phi')_{\oplus}$ и $\Phi_{\oplus}$ мы сохраним обозначение $(\varphi.\ \psi)$.

Предложение. *Пусть $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}$. Тогда для всякого оператора свертки*

$$A \colon \Phi_{\oplus} \to \Phi_{\oplus}, \quad A \colon \Phi_+ \to \Phi_+, \tag{30}$$

существует такой оператор свертки

$$B\colon (\Phi')_{+} \to (\Phi')_{+}, \quad B\colon (\Phi')_{\oplus} \to (\Phi')_{\oplus}, \tag{30'}$$

что

$$(Bf, \varphi) = (f, A\varphi), \tag{31}$$

где либо $f \in (\Phi')_{+}$, $\varphi \in \Phi_{\oplus}$, *либо* $f \in (\Phi')_{\oplus}$, $\varphi \in \Phi_{+}$.

Доказательство. Повторяя рассуждение предложения 3 из п. I.2.6, несложно показать, что каждому регулярному оператору (30) отвечает регулярный оператор (30′), связанный с ним равенством (31), и обратно, регулярному оператору (30′) отвечает регулярный оператор (30).

Без труда проверяется, что если один из операторов (30), (30′) коммутирует со сдвигами, то и другой обладает этим же свойством, т. е. если один оператор является оператором свертки, то и другой обладает этим свойством.

В силу предложения утверждения теоремы 4.4 следуют из утверждений теоремы 4.2, и наоборот.

4.6. Сверточные уравнения в пространствах функций и распределений, сосредоточенных в $\mathbb{R}^n_+$.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{O}'$ *и* $A \in \mathfrak{C}(\Phi_+)$. *Следующие условия эквивалентны:*

(I) *Для любого* $f \in \Phi_+$ *сверточное уравнение*

$$A * u = f \tag{32}$$

имеет единственное решение $u \in \Phi_+$.

(II) *Уравнение* (32) *имеет фундаментальное решение* $G \in \mathfrak{C}(\Phi_+)$:

$$A * G = G * A = \delta(x).$$

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы, поскольку оно является дословным повторением доказательства теоремы I.4.2.

Замечание. Следует обратить внимание, что в приведенной выше теореме (в отличие от теоремы I.4.2) отсутствует пространство $\mathcal{O}_+$. Это связано с тем, что из однозначной разрешимости уравнения (32) в $\mathcal{O}_+$ вытекает (по теореме о замкнутом графике), что оператор $\mathrm{con}_A\colon \mathcal{O}_+ \to \mathcal{O}_+$ имеет непрерывный обратный, перестановочный со сдвигами T_h, $h \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$. Однако (ср. замечание 4.4) мы не знаем, является ли этот оператор регулярным, а значит, и оператором свертки, а поэтому не можем утверждать (как в случае $\mathcal{S}_+$, $(\mathcal{S})_+$), что $(\mathrm{con}_A)^{-1} = \mathrm{con}_G$, $G \in \mathfrak{C}(\mathcal{O}_+)$.

Отметим, что в случае $\Phi = \mathcal{O}$ условие (II) заведомо является достаточным условием разрешимости (32) в $\mathcal{O}_+$.

Так как в пространствах $(\mathcal{O}')_+ = \mathfrak{C}(\mathcal{S}_+) = \mathfrak{C}((\mathcal{O}')_+)$ и $(\mathcal{K}')_+ = \mathfrak{C}((\mathcal{S}')_+) = \mathfrak{C}(\mathcal{O}_+)$ определено преобразование Фурье, то условие (II) эквивалентно обратимости символа $\widehat{A}(\tau, \eta)$ в $F\mathfrak{C}(\Phi_+)$, т. е.

$$A^{-1}(\tau,\ \eta)\in\mathscr{M}^{+}\quad \text{в случае}\quad \mathscr{S}_{+},\ (\mathscr{O}')_{+};\tag{33}$$

$$A^{-1}(\tau,\ \eta)\in\mathscr{L}^{+}\quad \text{в случае}\quad (\mathscr{S}')_{+},\ \mathscr{O}_{+}.\tag{34}$$

Условие (33) эквивалентно (ср. лемму I.4.3) условию

($\widehat{\text{II}}$). *Существуют такие константы* $c>0$ *и* μ, *что*

$$|A(\tau,\eta)|>c(1+|\tau|+|\eta|)^{\mu},\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{35}$$

Аналогично, условие (34) эквивалентно условию

($\widehat{\text{II}}$)$'$. *Существуют такие константы* $c>0$ *и* μ, ν, *что*

$$|A(\tau,\eta)|>c(1+|\tau|+|\eta|)^{\mu}|\operatorname{Im}\tau|^{\nu},\quad \operatorname{Im}\tau<0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{36}$$

Из условия (35) вытекает необходимое условие разрешимости уравнения (32) в $\mathscr{S}_{+}$, $(\mathscr{O}')_{+}$:

$$A(\tau,\eta)\neq 0,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{37}$$

Из условия (36) вытекает необходимое условие разрешимости уравнения (32) в $(\mathscr{S}')_{+}$:

$$A(\tau,\eta)\neq 0,\quad \operatorname{Im}\tau<0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{38}$$

В том случае, когда символ $\widehat{A}(\tau,\ \eta)$ является полиномиальным, из (35), (36) следуют условия (37), (38) (теорема Тарского — Зайденберга). Итак, доказана

Теорема 2. (i) *Условие*

$$P(\tau,\eta)\neq 0,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1},\tag{39}$$

является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости в $\mathscr{S}_{+}$, $(\mathscr{O}')_{+}$ *дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами*

$$P(D_t,\ D_y)u=f.\tag{40}$$

(ii) *Условие*

$$P(\tau,\eta)\neq 0,\quad \operatorname{Im}\tau<0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1},\tag{41}$$

является необходимым и достаточным условием разрешимости (40) *в* $(\mathscr{S}')_{+}$ *и достаточным условием разрешимости этого уравнения в* $\mathscr{O}_{+}$.

Теоремы 1, 2 можно дополнить замечаниями, аналогичными замечаниям из п. I.4.5. Мы не будем полностью переписывать этот пункт (применительно к пространствам типа Φ_{+}), а приведем два наиболее важных из условий, эквивалентных (1).

Для случая $\Phi_{+}=\mathscr{S}_{+}$, $(\mathscr{O}')_{+}$ условие (I) можно заменить на эквивалентное ему условие

(I_{a}) $\forall l\in\mathbb{R}\ \exists\sigma(l)$, *так что уравнение* (32) $\forall f\in H^{(s+\sigma(l))}_{(l)+}$ *имеет единственное решение* $u\in H^{(s)}_{(l)+}$.

Для случая $\Phi_{+}=(\mathscr{S}')_{+}$ условие (I) можно заменить условием

(I_{b}) $\forall l\in\mathbb{R}\ \exists\sigma(l),\ \lambda(l)$, *так что* $\forall f\in H^{(s)}_{(l)+}$ *уравнение* (32) *имеет единственное решение* $u\in H^{(s+\sigma(l))}_{(\lambda(l))}$.

Для каждого $l \in \mathbb{R}$ можно построить шкалу $\mathbb{H}_{(l)+} = \{H^{(s)}_{(l)+}, i^{s'}_s\}$, где $i^{s'}_s\colon H^{(s)}_{(l)+} \to H^{(s')}_{(l)+}$, $s > s'$. Для таких шкал имеет место аналог теоремы I.4.4

Теорема 3. *Пусть* $A \in (\mathcal{O}')_+$. *Оператор в шкале*

$$\mathrm{con}_A\colon \mathbb{H}_{(l)+} \to \mathbb{H}_{(l)+}$$

$\forall l$ *имеет непрерывный обратный конечного порядка тогда и только тогда, когда распределение* A *является обратимым элементом* $(\mathcal{O}')_+$ (*т. е. выполнено условие* (35)).

4.7. Сверточные уравнения в фактор-пространствах. Поскольку операторы свертки на $\mathcal{O}_\oplus$ можно определять как непрерывные операторы, перестановочные со сдвигами (замечание 4.4), то дословным повторением рассуждений теоремы I.4.2 доказывается

Теорема. *Пусть* $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$ *и* $A \in \mathfrak{C}(\Phi_\oplus)$. *Следующие условия эквивалентны*:

(I) *Для любого* $f \in \Phi_\oplus$ *сверточное уравнение* (32) *имеет единственное решение* $u \in \Phi_\oplus$.

(II) *Распределение* A *является обратимым элементом алгебры* $\mathfrak{C}(\Phi_\oplus)$.

В случае $\Phi_\oplus = (\mathcal{O}')_\oplus$ условие (II) является достаточным условием однозначной разрешимости уравнения (32); вопрос о необходимости этого условия остается открытым.

Условие (II) эквивалентно оценкам снизу символа $\widehat{A}$. Если $\Phi_\oplus = \mathcal{O}_\oplus$, $(\mathcal{S}')_\oplus$, то имеют место оценки (35), в которых полуплоскость $\mathrm{Im}\,\tau \leqslant 0$ надо заменить на $\mathrm{Im}\,\tau \geqslant 0$. Соответственно для $\Phi_\oplus = \mathcal{S}_\oplus$, $(\mathcal{O}')_\oplus$ в оценках (36) надо $\mathrm{Im}\,\tau < 0$ заменить на $\mathrm{Im}\,\tau > 0$. Аналогично, для дифференциального уравнения (40) в неравенствах (38), (39) следует заменить $\mathrm{Im}\,\tau \leqslant 0$ ($\mathrm{Im}\,\tau < 0$) соответственно на $\mathrm{Im}\,\tau \geqslant 0$ ($\mathrm{Im}\,\tau > 0$).

Условие (I) для $\Phi = \mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$ эквивалентно условию

(I_a) $\forall l \in \mathbb{R}\ \exists \sigma(l)$, *так что уравнение* (32) $\forall f \in H^{(s+\sigma(l))}_{(l)\oplus}$ *имеет единственное решение* $u \in H^{(s)}_{(l)\oplus}$.

Оно также является необходимым и достаточным условием обратимости при всех $l \in \mathbb{R}$ оператора в шкалах

$$\mathrm{con}_A\colon \mathbb{H}_{(l)\oplus} \to \mathbb{H}_{(l)\oplus}, \quad \mathbb{H}_{(l)} = \{H^{(s)}_{(l)\oplus}, \ i^{s'}_s\}.$$

Условие (I) для $\Phi = \mathcal{S}$ эквивалентно условию

(I_b) $\forall l \in \mathbb{R}\ \exists \sigma(l), \lambda(l)$, *так что уравнение* (32) $\forall f \in H^{(s)}_{(l)\oplus}$ *имеет единственное решение* $u \in H^{(s+\sigma(l))}_{(\lambda(l))\oplus}$.

4.8. Операторы свертки в конечной полосе. Как мы уже отмечали выше, если для пространств Φ_+ имеет место (2), то справедливы включения ($3_\pm$), откуда следует, что оператор con_f, $f \in \Phi_1[0, \infty)$, естественным образом продолжается на фактор-пространство, т. е. $\Phi_1[0, \infty) * \Phi_2[a, b) \subset \Phi_3[a, b)$. Далее, поскольку $\Phi_1[b-a, \infty) * \Phi_2[a, \infty) \subset \Phi_3[b, \infty)$, то оператор con_g, $g \in \Phi_1[b-a, \infty)$, переводит $\Phi_2[a, b)$ в нуль, так что

$$\Phi_1[0, b-a) * \Phi_2[a, b) \subset \Phi_3[a, b).$$

В частном случае $\Phi = \mathcal{O}'$ мы получим важные для дальнейшего соотношения

$$\mathcal{O}'[0,\ b-a) * \Phi[a,\ b) \subset \Phi[a,\ b),\quad \Phi = \mathcal{S},\ \mathcal{O},\ \mathcal{S}',\ \mathcal{O}'. \qquad (42)$$

Отметим, что в случае $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ свертку $\varphi \in \Phi[a,\ b)$ и $f \in \mathcal{O}'[0,\ b-a)$ можно определять с помощью равенства (I.3.26), где $x = (t,\ y)$ и $a \leqslant t \leqslant b$.

Подчеркнем, что в этом случае $IT_{(t,y)}\varphi \in \Phi(t-b,\ t-a]$, и всякий функционал $f \in \mathcal{O}'[0,\ b-a)$ определен на этом пространстве при $a \leqslant t \leqslant b$.

Если $h \in \mathbb{R}^n$, то оператор сдвига T_h: $\Phi \to \Phi$, где Φ — одно из рассматриваемых нами функциональных пространств, индуцирует изоморфизм

$$T_h\colon\ \Phi[a,\ b) \to \Phi[a-h_1,\ b-h_1). \qquad (43)$$

Если $h_1 \leqslant 0$, то существует естественное отображение правого пространства (43) в левое. Для композиции T_h и этого отображения мы сохраним обозначение T_h, т. е.

$$T_h\Phi[a,\ b) \subset \Phi[a,\ b) \quad \forall h \in \overline{\mathbb{R}^n_-}. \qquad (44)$$

Оператором свертки на $\Phi[a,\ b)$, $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, называется регулярный оператор, перестановочный со сдвигами (44). Как и в пп. 4.2, 4.4, доказываются следующие утверждения.

Предложение 1. *Для всякого оператора свертки A: $\Phi[a,\ b) \to \Phi[a,\ b)$, $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, найдется такое распределение $f \in \Phi'(0,\ b-a]$, что*

$$(A\varphi)(t,\ y) = (f,\ IT_{(t,y)}\varphi) = (f * \varphi)(t,\ y),\quad a \leqslant t \leqslant b,\quad \varphi \in \Phi[a,\ b). \qquad (45)$$

Доказательство. Рассмотрим линейный функционал

$$(f,\ IT_{(b,y)}\varphi) = (A\varphi)(b,\ y).$$

Ввиду изоморфизма (43), если φ пробегает все $\Phi[a,\ b)$, то $IT_{(b,y)}\varphi$ пробегает все $\Phi(0,\ b-a]$. Так как топология в $\Phi[a,\ b)$ сильнее топологии поточечной сходимости в точках полосы $a \leqslant t \leqslant b$, то функционал f непрерывный, т. е. $f \in \Phi'[0,\ b-a)$. Из перестановочности A со сдвигами (44) следует, что

$$(A\varphi)(t,\ y) = T_{(t-b,0)}(A\varphi)(b,\ y) = (A(T_{(t-b,0)}\varphi))(b,\ y) =$$
$$= (f,\ IT_{(b,y)}T_{(t-b,0)}\varphi) = (f,\ IT_{(t,y)}\varphi).$$

Замечание. Предложение 1 остается в силе при $a = -\infty$ и переходит в предложение 1 из п. 4.4 (точнее, в его аналог для фактор-пространств Φ_Θ).

В утверждении доказанного предложения нельзя формально положить $b = +\infty$, так как в случае пространства Φ_+ (и его сдвигов) априорным пространством свертывателей будет более широкое пространство $((\Phi_\infty)')_+$ (см. предложение 1 из п. 4.1). Заметим, что пространство $\Phi'[0,\ b-a)$ не содержит элементов бесконечного порядка (в отличие от $((\Phi_\infty)')_+$, что делает задачу описания операторов свертки на $\Phi[a, b)$ при $b<+\infty$ более простой, чем аналогичная задача при $b=+\infty$.

Из перестановочности A с операторами (44) следует перестановочность A с п. д. о. $(iD_t+1)^{k_1}(1+|D_y|^2)^{k_2}$, $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$, являющимися градуирующими операторами в шкале пространств $H^{(s_1,s_2)}_{(l_1,l_2)}[a, b)$. Так как $\Phi[a, b)$, $\Phi=\mathscr{S}, \mathscr{O}, \mathscr{S}', \mathscr{O}'$, являются «предельными» пространствами этой шкалы, то (ср. предложения из пп. I.4.2, 4.2, 4.4) имеет место

Предложение 2. *Пусть $\Phi=\mathscr{S}$, $\mathscr{O}$ и $\Psi=\mathscr{O}'$, $\mathscr{S}'$. Для любых $a<b$ каждый оператор свертки A_0: $\Phi[a, b)\to\Phi[a, b)$ по непрерывности продолжается до оператора свертки A: $\Psi[a, b)\to\Psi[a, b)$. Обратно, сужение оператора свертки A: $\Psi[a, b)\to\Psi[a, b)$ на $\Phi[a, b)$ является оператором свертки на этом пространстве.*

Ввиду предложения 1 можно определить свертыватели в полосе

$$\mathfrak{C}(\Phi[a, b))=\{f\in\Phi'[0, b-a),\ f*\varphi\in\Phi[a, b)\quad\forall\varphi\in\Phi[a, b)\},$$
$$\Phi=\mathscr{S}, \mathscr{O}. \tag{46}$$

Ввиду предложения 2

$$\mathfrak{C}(\mathscr{O}'[a, b))=\mathfrak{C}(\mathscr{S}[a, b)),\quad \mathfrak{C}(\mathscr{S}'[a, b))=\mathfrak{C}(\mathscr{O}[a, b)). \tag{47}$$

Теорема. *$\forall a, b\in\mathbb{R}, a<b$ имеют место равенства*

$$\mathfrak{C}(\mathscr{S}[a, b))=\mathfrak{C}(\mathscr{O}'[a, b))=\mathfrak{C}(\mathscr{O}[a, b))=$$
$$=\mathfrak{C}(\mathscr{S}'[a, b))=\mathscr{O}'[0, b-a). \tag{48}$$

Доказательство. Согласно (42) правое пространство (48) содержится в левых. Согласно определению (46) для $\Phi=\mathscr{O}$ имеем $\mathfrak{C}(\mathscr{O}[a, b))\subset\mathscr{O}'[0, b-a)$, т. е. последние два равенства (48) доказаны и нам остается проверить, что

$$\mathfrak{C}(\mathscr{O}'[a, b))\subset\mathscr{O}'[a, b). \tag{49}$$

Ввиду изоморфизмов (43) $\mathfrak{C}(\Phi[a, b))=\mathfrak{C}(\Phi[a+c, b+c))$, поэтому (49) достаточно проверить для случая $a=0$; теперь остается заметить, что $\delta(x)\in\mathscr{O}'[0, b)$.

Используя очевидное равенство $I\Phi[a, b)=\Phi(-b, -a]$, мы изучим операторы свертки в пространствах $\Phi(a, b]$, и в частности установим равенства

$$\mathfrak{C}(\Phi(a, b])=\mathscr{O}'(a-b, 0),\quad \Phi=\mathscr{S}, \mathscr{O}, \mathscr{S}', \mathscr{O}'.$$

Замечание. Следует обратить внимание, что в случае конечной полосы (см. (48)) все четыре пространства свертывателей $\mathfrak{C}(\Phi[a, b))$, $\Phi=\mathscr{S}, \mathscr{O}, \mathscr{S}', \mathscr{O}'$, совпадают друг с другом и равны $\mathscr{O}'[0, b-a)$. В случае $a=-\infty$ или $b=+\infty$ эти пространства попарно совпадают и имеют место строгие включения

$$(\mathscr{O}')_+=\mathfrak{C}(\mathscr{S}_+)\subset\mathfrak{C}(\mathscr{O}_+)=(\mathscr{K}')_+,$$
$$(\mathscr{O}')_+=I\mathfrak{C}(\mathscr{O}_\oplus)\subset I\mathfrak{C}(\mathscr{S}_\oplus)=(\mathscr{K}')_+.$$

Различие случаев конечной полосы и полупространства связано с тем, что для любого $c \neq \pm\infty$ имеет место изоморфизм (см. следствие 2.3) $\mathscr{K}'[0, c) = \mathcal{O}'[0, c)$.

4.9. Сверточные и дифференциальные уравнения в конечной полосе. Условие И. Г. Петровского.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{O}'[0, b)$ и $\Phi = \mathscr{S}, \mathcal{O}, \mathscr{S}', \mathcal{O}'$. Следующие условия эквивалентны:*

(I) *Сверточное уравнение* (32) *однозначно разрешимо в $\Phi[a, a+b)$ для любого $a \in \mathbb{R}$ (для некоторого $a \in \mathbb{R}$), 0. $b >$*

(II) *Распределение A является обратимым элементом $\mathcal{O}'[0, b)$, т. е. найдется такое распределение $G \in \mathcal{O}'[0, b)$, что*

$$A * G - \delta(x) = G * A - \delta(x) = 0 \text{ (в смысле } \mathcal{O}'[0, b)). \quad (50)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы I.4.2, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Мы не будем останавливаться на различных вариантах условия (I) применительно к шкалам (здесь все рассуждения будут дословно повторять рассуждения п. I.4.5), а остановимся на более детальном анализе условия (II).

Пусть $A \in \mathcal{O}'[0, b)$, $b > 0$. Обозначим через $\widehat{A}(\tau, \eta) \in \mathscr{M}^+$ преобразование Фурье — Лапласа некоторого распределения из $\mathcal{O}'[0, \infty)$, являющегося одним из представителей класса смежности A. Каждому $A \in \mathcal{O}'[0, b)$ отвечает класс символов $\widehat{A} \in \mathscr{M}^+$, отличающихся на символы из $\mathscr{F}(T_{(-b,0)}(\mathcal{O}')_+) = \exp(-ib\tau)\mathscr{M}^+$.

Условие (II) (в отличие от аналогичных условий теорем из п. 4.6) не позволяет получить эффективные необходимые и достаточные условия на символ, гарантирующие (I). Однако из (50) можно извлечь отдельно необходимое и отдельно достаточное условия однозначной разрешимости (32). Эти условия близки и совпадают в случае полиномиальных символов.

Согласно (50) можно указать такой символ $\widehat{G} \in \mathscr{M}^+$, что $\widehat{A}(\tau, \eta)\widehat{G}(\tau, \eta) - 1 \in \exp(-ib\tau)\mathscr{M}^+$. Но тогда можно указать такие $c > 0$, μ, что

$$|\widehat{A}(\tau, \eta)\widehat{G}(\tau, \eta) - 1| < c(1 + |\tau| + |\eta|)^{\mu} \exp(b \operatorname{Im} \tau), \quad b \geqslant 0.$$

Следствием этой оценки является

Необходимое условие разрешимости (32) в конечной полосе.

Существуют такие константы c_1, c_2, что

$$\{\widehat{A}(\tau, \eta) = 0, \operatorname{Im} \tau \leqslant 0\} \Rightarrow \{\operatorname{Im} \tau > c_1 \ln(1 + |\tau| + |\eta|) + c_2\}. \quad (51)$$

Теперь приведем

Достаточное условие разрешимости (32) в конечной полосе.

Существуют такие $c > 0$, μ, $\rho \leqslant 0$, что

$$|\widehat{A}(\tau, \eta)| > c(1 + |\tau| + |\eta|)^{\mu}, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant \rho. \quad (52)$$

Условие (52) является необходимым и достаточным условием обратимости распределения $\mathcal{F}^{-1}\widehat{A} \in (\mathcal{O}')_+ \subset ((\mathcal{O}')_{[\rho]})_+$ в пространстве $((\mathcal{O}')_{[\rho]})_+$ (ср. § I.5 и § 1). Таким образом, согласно (52) найдется такое $G \in ((\mathcal{O}')_{[\rho]})_+$, что $A * G = G * A = \delta$. Теперь остается воспользоваться леммой 2 из п. 2.3, согласно которой

$$\Phi[a,\ b) = \Phi_{[\rho]}[a,\infty)/\Phi_{[\rho]}[b,\ \infty). \tag{53}$$

Обсудим связь между условиями (51) и (52). Условие (52) означает, что символ $\widehat{A}(\tau,\ \eta)$ для некоторого $\rho \leqslant 0$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau \leqslant \rho$, причем в этой полуплоскости он допускает степенную оценку снизу[1]). Условие (51) позволяет символу $\widehat{A}(\tau,\ \eta)$ иметь нули в нижней полуплоскости, но многообразие этих нулей очень медленно (с ростом $|\eta|$) отходит от многообразия $\operatorname{Im}\tau = \mathrm{const}$.

В случае дифференциальных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами (т. е. $A = P(D_t,\ D_y)\delta$, $\widehat{A} = P(\tau,\ \eta)$) условие (52) эквивалентно отличию от нуля полинома $P(\tau,\ \eta)$ в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\tau \leqslant \rho$:

$$P(\tau,\eta) \neq 0, \quad \operatorname{Im}\tau \leqslant \rho, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{54}$$

С другой стороны, мнимая часть алгебраической функции $\tau(\eta)$ — решения алгебраического уравнения $P(\tau,\ \eta) = 0$ — согласно теореме Тарского — Зайденберга (см. Хёрмандер [1], Приложение) не может стремиться к $-\infty$ медленнее некоторой степени $|\eta|$, поэтому из (51) следует, что должно найтись такое $\rho < 0$, чтобы выполнялось условие (54). Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$. *Дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами* (40) *однозначно разрешимо в пространстве* $\Phi[a,\ b)$ *для любых* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (*или для некоторых* $a < b$) *тогда и только тогда, когда найдется такое* ρ, *для которого выполнено* (54).

Ввиду теоремы 2 дадим следующее

Определение. Будем говорить, что полином $P(\tau,\ \eta)$, $\tau \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяет *однородному условию Петровского*, если для некоторого ρ выполнено (54).

Однородное условие Петровского отличается от классического условия И. Г. Петровского [1] отсутствием предположения о том, что полином $P(\tau,\ \eta)$ разрешен относительно старшей степени τ. Общее условие Петровского возникнет у нас в гл. IV при изучении неоднородной задачи Коши.

4.10. Специальные классы корректных по Петровскому дифференциальных операторов и их алгебраические свойства. Условию корректности (54) удовлетворяют символы ряда классических дифференциальных операторов:

---

[1]) Отметим, что справедливость оценки (52) не зависит от выбора представителя $\widehat{A}(\operatorname{mod}\exp(-ib\tau)\mathcal{M}^+)$.

теплопроводности

$$P(\tau, \eta) = \tau - i\left(\eta_1^2 + \cdots + \eta_{n-1}^2\right),$$

волнового

$$P(\tau, \eta) = \tau^2 - \eta_1^2 - \cdots - \eta_{n-1}^2,$$

Шредингера

$$P(\tau, \eta) = \tau - \eta_1^2 - \cdots - \eta_{n-1}^2.$$

Нетрудно привести и другие примеры символов, удовлетворяющих (54). Например, всегда годится $P(\tau, \eta) = \tau - Q(\eta)$, где Q — оператор с вещественными коэффициентами. Исходя из тех или иных дополнительных свойств выделяются специальные классы корректных символов. Важнейшими из этих свойств являются различные варианты условия сохранения (54) при любых возмущениях младших членов. Мы приведем ниже некоторые результаты в этом направлении.

Мы будем рассматривать в этом пункте лишь символы, разрешенные относительно старшей степени τ (т. е. речь идет о полном условии корректности Петровского, а не только об однородном условии). Разложим тогда полином $P(\tau, \eta)$ на множители по τ:

$$P(\tau, \eta) = \prod_{j=1}^{k} (\tau - \lambda_j(\eta)), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{55}$$

Нумерация корней в (55) достаточно условна, так как речь идет о многозначной алгебраической функции $\lambda(\eta)$, и лишь в окрестности точки $\overset{\circ}{\eta}$, в которой все корни различны, можно канонически выделить однозначные ветви, а значит, согласовано занумеровать корни λ_j.

На языке $\lambda_j(\eta)$ условие корректности (54) можно перефразировать: для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im} \lambda_j(\eta) > \gamma \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{54'}$$

а) Прежде всего выделим корректные по Петровскому полиномы среди однородных полиномов $P(\tau, \eta)$. Такой полином удовлетворяет условию (54) тогда и только тогда, когда все его корни $\lambda_j(\eta)$ вещественны:

$$\operatorname{Im} \lambda_j(\eta) = 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \forall j. \tag{56}$$

Разумеется, (56) влечет (54'). Однородность $P(\tau, \eta)$ означает, что многозначная фукция $\lambda(\eta)$ является однородной функцией степени 1. Этим же свойством должна обладать функция $\operatorname{Im} \lambda(\eta)$, но тогда из соображений однородности условие (54') влечет (56).

Однородные корректные по Петровскому полиномы (т. е. удовлетворяющие условию (56)) называются (однородными) *гиперболическими*. Если к тому же при $\eta \neq 0$ корни не кратные:

$$\lambda_i(\eta) \neq \lambda_j(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \quad i \neq j, \tag{57}$$

то символ называется *строго гиперболическим*. Символ $P(\tau, \eta)$ называется *гиперболическим*, если корректны по Петровскому он сам и его старшая однородная часть. Из приведенных выше примеров классических операторов гиперболическим (строго) является волновой.

b) Перенесем эти рассмотрения на квазиоднородный случай. Будем приписывать степеням τ вес q, а степени η брать с весом 1. Соответствующие взвешенные степени мономов будем обозначать через $\deg_{(q,1)}$. Полином P будем называть $(q, 1)$-*квазиоднородным*, если все входящие в него мономы имеют одинаковую взвешенную степень $\deg_{(q,1)}$ (эту величину будем обозначать через $\deg_{(q,1)}P$). Если исключить вырожденный случай, когда для всех входящих в P мономов $\tau^r\eta^\beta$ величины $(r, |\beta|)$ совпадают, то данный полином P может быть квазиоднородным в указанном смысле лишь для одного $q > 0$, которое обязательно рационально. Из соображений однородности множество значений $\lambda(\eta)$ инвариантно относительно умножений на все комплексные значения ρ^q при $\rho \in \mathbb{R}$, поэтому условие (54′) превращается в

$$\operatorname{Im} \lambda_j(\eta) \geqslant 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \forall j, \tag{58}$$

причем это условие может иметь место лишь для целых q.

Если q нечетно, то, в свою очередь, условие (58) преобразуется в (56), т. е. все корни должны быть вещественными. Соответствующие рассуждения те же, что и при $q = 1$.

Если $q = 2b$ четно и неравенство (58) является строгим при $\eta \neq 0$:

$$\operatorname{Im} \lambda_j(\eta) > 0, \quad \eta \neq 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \forall j, \tag{59}$$

то квазиоднородный символ P называется $2b$-*параболическим*. Символ оператора теплопроводности попадает в этот класс при $b = 1$. Символ $P(\tau, \eta)$ называется $2b$-параболическим, если этим свойством обладает его старшая $(2b, 1)$-квазиоднородная часть.

Из приводимого ниже результата следует, что $2b$-параболические символы являются корректными по Петровскому. Более точно, мы покажем, что строго гиперболические и $2b$-параболические символы выделяются среди соответствующих квазиоднородных тем, что они остаются корректными при любом добавлении младших членов, т. е. мономов, имеющих меньшие $(q, 1)$-степени ($q = 1$, $2b$ соответственно).

Предложение. *Пусть полином $P(\tau, \eta)$ разрешен относительно старшей степени τ^k и $(q, 1)$-квазиоднороден. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *$q = 1$ и P строго гиперболичен или $q = 2b$ и P $2b$-параболичен.*

(ii) *Для всякого с существует такое* γ, *что*

$$|P(\tau,\eta)|>c(1+|\eta|^{q-1})(|\tau|+|\eta|^{q})^{k-1},\quad \operatorname{Im}\tau<\gamma,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{60}$$

(iii) *P остается корректным по Петровскому при добавлении любого полинома* $Q(\tau,\eta)$, $\deg_{(q,1)}Q<\deg_{(q,1)}P$.

Доказательство. Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидна. Докажем сначала эквивалентность (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Начнем с (ii)$\Rightarrow$(i). Из (ii) следует, что P корректен по Петровскому (выполняется (54)). Значит, $q>0$ целое. Пусть $q=1$. Тогда P гиперболичен, по определению, и нам надо доказать его строгую гиперболичность (57).

Пусть $\lambda_i(\eta^\circ)=\lambda_j(\eta^\circ)$, $\eta^\circ\neq 0$, $i\neq j$. Исследуем оценку (60) на прямой $\eta=\rho\eta^\circ$, $\operatorname{Re}\tau=\lambda_i(\eta)=\lambda_j(\eta)$, $\operatorname{Im}\tau=\mathrm{const}<\gamma$. Тогда правая часть (60) будет больше $c_1(1+|\rho|)^{k-1}$, а левая часть, как следует из непосредственного рассмотрения разложения (55), оценивается сверху через $c_2(1+|\rho|)^{k-2}$ (два множителя в (55) ограничены константой). Значит, из (60) следует (57).

Аналогичное рассуждение проходит в предположении (ii), если $q>1$ и $\operatorname{Im}\lambda_j(\eta^\circ)=0$ для некоторых j и $\eta^\circ\neq 0$. Надо сравнить левую и правую части (60) на прямой $\{\eta=\rho\eta^\circ,\ \operatorname{Re}\tau=\lambda_j(\eta),\ \operatorname{Im}\tau=\mathrm{const}<\gamma\}$. Правая часть оценивается снизу через $c_1(1+|\rho|)^{kq-1}$, а левая — сверху через $c_2(1+|\rho|)^{kq-q}$, поскольку множитель в (55) с индексом j ограничен константой. При $q>1$ эти оценки несовместимы. Значит, в условиях (ii) при $q>1$ может встретиться лишь $2b$-параболический полином (вспомним условие (56) для нечетных q).

Перейдем к импликации (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть $q=2b$ и полином $P(\tau,\eta)$ является квазиоднородным $2b$-параболическим. Тогда $|\tau-\lambda_j(\eta)|>c(|\tau|+|\eta|^{2b})$, $c>0$, при $\operatorname{Im}\tau<0,\ \eta\in\mathbb{R}^{n-1}$. Для доказательства этого неравенства достаточно проверить (в силу квазиоднородности): $\tau-\lambda_j(\eta)\neq 0$ при $\operatorname{Im}\tau\leqslant 0$, $|\tau|+|\eta|^{2b}=1$. Это так, поскольку если $\eta\neq 0$, то $\operatorname{Im}(\tau-\lambda_j(\eta))\leqslant-\operatorname{Im}\lambda_j(\eta)<0$. Если же $\eta=0$, то $|\tau-\lambda_j(\eta)|=|\tau|=1$. В результате для некоторого $c>0$

$$|P(\tau,\eta)|\geqslant c(|\tau|+|\eta|^{2b})^{k},\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{61}$$

Эта оценка *адекватна*: через правую часть $|P|$ оценивается не только снизу, но и сверху. Она и является основной в теории $2b$-параболических полиномов. Для того чтобы перейти к (70) достаточно воспользоваться очевидным неравенством: для всякого $c_1>0$ существует такое γ, что

$$|\tau|+|\eta|^{2b}>c_1(1+|\eta|^{2b-1}),\quad \operatorname{Im}\tau<\gamma,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Докажем оценку (60) в строго гиперболическом случае, т. е. при $q=1$. Рассмотрим единичную сферу $|\sigma|^2+|\eta|^2=1$ в $\mathbb{R}^n_{(\sigma,\eta)}$, $\sigma\in\mathbb{R}^1$, $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда существуют $\varepsilon>0$ и такое покрытие

$\{\Omega_l\}$ сферы, что в каждой Ω_l может быть $|\sigma-\lambda_j(\eta)|<\varepsilon$ не более чем для одного j. Это непосредственное следствие некратности корней (57). Оценим теперь $|\tau-\lambda_l(\eta)|$ снизу для различных l в конусе $V_i=\{(|\operatorname{Re}\tau|+|\eta|)^{-1}(\operatorname{Re}\tau,\eta)\in\Omega_i\}$. В силу сказанного, для данного i может быть лишь одно j, для которого $|\operatorname{Re}\tau-\lambda_j(\eta)|<\varepsilon(|\tau|+|\eta|)$. Если такое j существует, то имеем $|\tau-\lambda_j(\eta)|\geqslant|\operatorname{Im}\tau|$. Для $m\neq j$ имеем $|\tau-\lambda_m(\eta)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}(|\operatorname{Re}\tau|+$ $+|\eta|+\frac{1}{2}|\operatorname{Im}\tau|)\geqslant\varepsilon_1(|\tau|+|\eta|)$. В результате для V_i, а значит, и всюду для некоторого $c>0$

$$|P(\tau,\ \eta)|>c|\operatorname{Im}\tau|(|\tau|+|\eta|)^{k-1}. \tag{62}$$

Это неравенство полностью характеризует однородные строго гиперболические символы; из него непосредственно следует (60).

Осталось доказать импликацию (iii)$\Rightarrow$(i). Если выполнено (iii), то, в частности, $q>0$, q целое. Рассмотрим сначала случай $n=1$, когда имеется лишь одно пространственное переменное η. Нам удобно поменять обозначение и обозначить его через ρ. Итак, полином $P(\tau,\rho),\rho\in\mathbb{R}^1$, удовлетворяет (iii). Его корни имеют вид $\lambda_j(\rho)=a_j\rho^q$. Пусть $q>1$. Если (i) не выполнено, то $\operatorname{Im}a_j=0$ для некоторого j. Пусть для определенности $\operatorname{Im}a_1=0$. Заменим корень $\lambda_1(\rho)$ на $\tilde{\lambda}_1(\rho)=a_j\rho^q-i\varepsilon\rho^{q-1}$, $\varepsilon>0$, не меняя остальных корней. Полученный полином $\tilde{P}(\tau,\ \rho)=P(\tau,\ \rho)+$ $+q(\tau,\ \rho)$ не будет корректным ((54′) не выполняется), а $q(\tau,\ \rho)=\tilde{P}(\tau,\ \rho)-P(\tau,\ \rho)$ содержит лишь мономы младших $(q,\ 1)$-степеней.

Если при $q=1$ не выполнено (i), то среди корней $\lambda_j(\rho)=$ $=a_j\rho$, $\operatorname{Im}a_j=0$, имеются, по крайней мере два равных. Пусть $\lambda_1(\rho)=\lambda_2(\rho)=a\rho$, $\operatorname{Im}a=0$. Заменим их на $\tilde{\lambda}_{1,2}(\rho)=a\rho\pm i\sqrt{\rho}$, где $\pm\sqrt{\rho}$ — два значения функции $\sqrt{\rho}$. Остальные корни не будем менять. Учитывая, что $(\tau-a\rho+i\sqrt{\rho})(\tau-a\rho-i\sqrt{\rho})=(\tau-a\rho)^2+$ $+\rho$, мы в результате получим полином $\tilde{P}(\tau,\rho)=P(\tau,\ \rho)+q(\tau,\rho)$, который не будет корректен ((54′) не выполняется), но будет отличаться от $P(\tau,\ \rho)$ лишь на младшие члены.

Перейдем к многомерному случаю. Пусть (i) не выполняется. Тогда или $q>1$ и $\operatorname{Im}\lambda_j(\eta^\circ)=0$, $\eta^\circ\neq0$, или $q=1$ и $\lambda_j(\eta^\circ)=$ $=\lambda_i(\eta^\circ)$, $\eta^\circ\neq0$, $j\neq i$. В обоих случаях рассмотрим полином $P(\tau,\ \rho)=P(\tau,\ \rho\eta^\circ)$. По доказанному существует полином $q(\tau,\ \rho)$ из младших членов, для которого символ $P(\tau,\ \rho)+q(\tau,\ \rho)$ не является корректным.

Доказываемое утверждение следует теперь из тривиального замечания о продолжении. Пусть для определенности $\eta^0=(\eta_1^0,\ \ldots$ $\ldots,\ \eta_{n-1}^0)$ и $\eta_1^0\neq0$. Тогда существует такой полином $Q(\tau,\ \eta_1)$, для которого $\deg_{(q,1)}Q=\deg_{(q,1)}$ и $Q(\tau,\ \rho\eta_1^0)=q(\tau,\ \rho)$. Полином $P(\tau,\ \eta)+Q(\tau,\ \eta_1)$, который отличается от P лишь на $(q,\ 1)$-младшие мономы, не будет корректен (не корректно его ограничение при $\eta=\rho\eta^\circ$).

ГЛАВА III

СВЕРТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО УБЫВАНИЯ И РОСТА

Введение

Первые две главы были посвящены изучению сверточных (дифференциальных) уравнений в шкалах распределений степенного убывания или роста. Настоящая глава посвящена построению аналогичной теории для шкал с экспоненциальным ростом или убыванием. Схема изложения точно соответствует схемам глав I, II. Однако, поскольку при этом возникает существенно иной запас свертывателей, получается иная теория сверточных уравнений, приводящая к иным постановкам задач для дифференциальных операторов. Основным ориентиром в этой главе является понятие *экспоненциально корректного* дифференциального оператора. Подобно тому как корректность по Петровскому эквивалентна разрешимости задачи Коши в шкалах распределений степенного роста, экспоненциальная корректность является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Коши в шкалах распределений экспоненциального роста.

Условие экспоненциальной корректности полиномиального символа $P(\tau, \eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, состоит в том, что все сдвиги $P_\omega(\tau, \eta) = P(\tau, \eta + i\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, этого символа в комплексную область по переменным η (двойственным пространственным переменным) являются корректными по Петровскому полиномами. Экспоненциально корректными являются $2b$-параболические и строго гиперболические полиномы. В § 4 мы приведем различные эквивалентные определения экспоненциально корректных полиномов и рассмотрим специальные классы таких полиномов.

В этой главе мы, как правило, будем ограничиваться введением понятий и формулировками результатов, поскольку большинство доказательств не требует новых идей по сравнению с главами I, II, мы будем фиксировать внимание читателя лишь на небольшом количестве новых технических моментов.

§ 1. Шкалы пространств экспоненциально убывающих функций. Распределения экспоненциального роста (убывания). Сверточные уравнения

В этом параграфе мы рассмотрим пространства $C_{(m)}^{(\nu)}$, $H_{(\nu)}^{(s)}$ функций и распределений в $\mathbb{R}^n$ экспоненциального убывания или роста и связанные с ними предельные пространства. Рассмотрения этого параграфа параллельны изучению шкал $C_{(l)}^{(m)}$, $H_{(l)}^{(s)}$ и их предельных пространств $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}'$, проведенному в гл. I. С тем чтобы было удобнее следить за аналогиями между результатами гл. I и этого параграфа, мы будем пользоваться при обозначении предельных пространств буквами готического алфавита $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$, соответствующих латинским рукописным буквам $\mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{K}$. Сразу укажем, что через $\mathfrak{S}$ мы обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, убывающих вместе со всеми производными быстрее любой экспоненты $\exp(-\nu|x|)$, $\mathfrak{D}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, которые растут со всеми производными $D^\alpha\varphi(x)$ не быстрее экспоненты $\exp(\nu|x|)$, где $\nu=\nu(\varphi)$. Пространство $\mathfrak{S}'$, сопряженное $\mathfrak{S}$, состоит из распределений конечного порядка, растущих не быстрее $\exp(\nu|x|)$ для некоторого $\nu\in\mathbb{R}$, а пространство $\mathfrak{D}'$ — сопряженное $\mathfrak{D}$ — является пространством распределений конечного порядка, убывающих быстрее любой экспоненты $\exp(-\nu|x|)$, $\nu\in\mathbb{R}$. Мы покажем (ср. с гл. I), что $\mathfrak{D}'$ будет пространством свертывателей на введенных нами пространствах $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$. Преобразования Фурье — Лапласа обратимых элементов $\mathfrak{D}'$ будут целыми функциями, отличными от нуля на всем $\mathbb{C}^n$.

Применительно к дифференциальным уравнениям основное отличие изучаемых экспоненциальных шкал от степенных (изложенных в главах I, II) состоит в том, что не существуют дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами $P(D)$, для которых уравнение $P(D)u=f$ было однозначно разрешимым в $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$.

1.1. Пространство $\mathfrak{S}$ и связанные с ним гёльдеровские шкалы. *Обозначим через $C_{(\nu)}^{(m)}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых конечна норма*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant m}\exp(\nu|x|)\,|D^\alpha\varphi(x)|=|\varphi|_{(\nu)}^{(m)}. \qquad (1)$$

В этой главе в качестве нормы в $\mathbb{R}^n$ мы будем рассматривать $|x|=\sum_{i=1}^n|x_i|$; напомним, что в предыдущих главах $|x|$ использовалось для обозначения евклидовой нормы $\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}$.

Обозначим через $\{x_i\}$ произвольную гладкую функцию, совпадающую с $|x_i|$ при $|x_i|>1$, и пусть $\{x\}=\sum\{x_i\}$. Если в (1) заменить вес $\exp(\nu|x|)$ на $\exp(\nu\{x\})$, то мы получим эквивалентную норму. Как легко видеть (ср. предложение I.1.3), для любых $\nu, \lambda\in\mathbb{R}$ отображение

$$C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}\to C^{(m)}_{\langle\nu-\lambda\rangle},\quad \varphi\mapsto\exp(\lambda\{x\}\varphi)$$

является изоморфизмом пространств. При $\lambda=\nu$ получаем, что $\psi\in C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\psi=\varphi\exp(-\nu\{x\})$, $\varphi\in C^{(m)}$, причем норма (1) эквивалентна норме $|\varphi|^{(m)}$.

Для пространства $C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$ определены вложения (непрерывные)

$$C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}\subset C^{(m')}_{\langle\nu'\rangle},\quad m\geqslant m',\quad \nu\geqslant\nu'. \tag{2}$$

Отметим, что $C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$ не плотно в $C^{(m)}_{\langle\nu'\rangle}$ при $\nu>\nu'$. Однако (ср. лемму 2 из п. I.1.3) $C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$ плотно в $C^{(m)}_{\langle\nu'\rangle}$ в топологии $C^{(m)}_{\langle\nu''\rangle}$, коль скоро $\nu>\nu'>\nu''$.

Укажем те свойства пространств $C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$, которые не имеют аналогов для пространств $C^{(m)}_{(l)}$. Для этого нам понадобятся некоторые понятия.

Пусть заданы л. т. п. E_1, E_2, вложенные в л. т. п. E. Через $E_1\cap E_2$ обозначим подпространство элементов E_1, лежащих в E_2. Через E_1+E_2 мы обозначим пространство сумм $\varphi_1+\varphi_2$, $\varphi_1\in E_1$, $\varphi_2\in E_2$. Топологии на E_1 и E_2 индуцируют топологии на $E_1\cap E_2$, E_1+E_2, на описании которых мы не будем останавливаться. Если E_1 и E_2 — банаховы пространства, то на $E_1\cap E_2$ определена банахова норма

$$|\varphi, E_1\cap E_2|=|\varphi, E_1|+|\varphi, E_2|, \tag{3}$$

а на E_1+E_2 — норма

$$|\varphi, E_1+E_2|=\inf_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1+\varphi_2=\varphi}(|\varphi_1, E_1|+|\varphi_2, E_2|). \tag{4}$$

Обозначим через I открытый единичный куб в $\mathbb{R}^n$:

$$I=\{\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\mathbb{R}^n,\quad |\omega_j|<1,\quad j=1,\ldots,n\},$$

и пусть $I^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1, 2, \ldots, 2^n$ — вершины этого куба, т. е. всевозможные векторы, координаты которых принимают значения ±1.

Предложение. (i) *При* $\nu>0$ *имеем*

$$C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}=\bigcap_{\varkappa=1}^{2^n}C^{(m)}_{[\nu I^{(\varkappa)}]} \tag{5}$$

а норма (1) *эквивалентна естественной норме правого пространства в* (5):

$$\sum_{\varkappa=1}^{2^n}|\varphi|^{(m)}_{[\nu I^{(\varkappa)}]}. \tag{1'}$$

(i′) *При* $\nu > 0$ *пространство* $C_{(\nu)}^{(m)}$ *состоит из тех и только тех элементов пересечения* $\bigcap\limits_{\Gamma} C_{[\Gamma]}^{(m)}$, $\Gamma \in \nu I$, *для которых конечна норма*

$$'|\varphi|_{(\nu)}^{(m)} = \sup_{\Gamma \in \nu I} |\varphi|_{[\Gamma]}^{(m)}. \qquad (1'')$$

(ii) *При* $\nu < 0$ *имеем*

$$C_{(\nu)}^{(m)} = \sum_{\varkappa=1}^{2^n} C_{[\nu I^{(\varkappa)}]}^{(m)}, \qquad (6)$$

а норма (1) *эквивалентна естественной норме правого пространства* (6).

Доказательство. (i) Очевидно, что

$$\exp(\nu|x_i|) \leqslant \exp(\nu x_i) + \exp(-\nu x_i) \leqslant 2\exp(\nu|x_i|).$$

Перемножая эти неравенства для $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\exp(\nu|x|) \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{2^n} \exp\left\langle \nu I^{(\varkappa)}, x\right\rangle \leqslant 2^n \exp(\nu|x|), \qquad (7)$$

откуда и следует эквивалентность норм (1) и (1′) при $\nu > 0$.

(i′) Пусть $\Gamma = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ и $|\omega_j| < \nu$, $j = 1, \ldots, n$. Перемножая неравенства

$$\exp(\omega_i x_i) \leqslant \exp(\nu x_i) + \exp(-\nu x_i)$$

для $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\exp\langle\Gamma, x\rangle \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{2^n} \exp\left\langle \nu I^{(\varkappa)}, x\right\rangle, \qquad (8)$$

откуда

$$'|\varphi|_{(\nu)}^{(m)} \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{2^n} |\varphi|_{[\nu I^{(\varkappa)}]}^{(m)} \leqslant 2^n |\varphi|_{(\nu)}^{(m)}.$$

Обратно, пусть $'|\varphi|_{(\nu)}^{(m)} < \infty$. Для заданного $x \in \mathbb{R}^n$ возьмем в неравенстве (8) $\Gamma = (\varepsilon_1\rho, \ldots, \varepsilon_n\rho)$, $\rho < \nu$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ и знак ε_i совпадает со знаком x_i. Тогда получим

$$\exp(\rho|x|)\,|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant {}'|\varphi|_{(\nu)}^{(m)}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\rho < \nu$. По соображениям непрерывности это неравенство сохраняется и для $\rho = \nu$. Взяв верхнюю грань по $x \in \mathbb{R}^n$ и $|\alpha| \leqslant m$, получим (i′).

(ii) Ввиду очевидного неравенства

$$\exp(\nu|x|) \leqslant \exp\langle\Gamma, x\rangle, \quad \forall\nu < 0, \quad |\Gamma| \leqslant |\nu|,$$

пространства $C_{[\nu I^{(\varkappa)}]}^{(m)}$, $\varkappa = 1, \ldots, 2^n$, а следовательно, и их линейная оболочка вкладываются в $C_{(\nu)}^{(m)}$. При этом если $\psi = \sum \psi^{(\varkappa)}$,

$\psi^{(\varkappa)} \in C^{(m)}_{[\nu I^{(\varkappa)}]}$, то в силу неравенства треугольника

$$|\psi|^{(m)}_{\langle\nu\rangle} \leqslant \sum \|\psi^{(\varkappa)}\|^{(m)}_{[\nu I^{(\varkappa)}]}.$$

Беря нижнюю грань правой части по всем представлениям $\psi = \sum \psi^{(\varkappa)}$, мы докажем вложение правого пространства (6) в левое.

Для доказательства противоположного вложения мы построим систему функций $\chi^{(\varkappa)}(x)$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, 2^n$, $\chi^{(\varkappa)} \in C^{(\infty)}$, $\chi^{(\varkappa)} \geqslant 0$, обладающих следующими свойствами:

(a) $\displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{2^n} \chi^{(\varkappa)}(x) \equiv 1.$

(b) Если $\psi \in C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$, то $\chi^{(\varkappa)}\psi \in C^{(m)}_{[\nu I^{(\varkappa)}]}$, причем

$$|\chi^{(\varkappa)}\psi|^{(m)}_{[\nu I^{(\varkappa)}]} \leqslant \mathrm{const} \cdot |\psi|^{(m)}_{\langle\nu\rangle}.$$

Из (a), (b) тривиально следует вложение левого пространства (6) в правое.

Выберем произвольную функцию $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \chi(t) \leqslant 1$, причем $\chi(t) \equiv 1$ при $t \geqslant 1$ и $\chi(t) \equiv 0$ при $t < -1$. Пусть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — координаты вершины $I^{(\varkappa)}$, причем

$$\varepsilon_{i_1} = \ldots = \varepsilon_{i_k} = 1, \quad \varepsilon_{i_{k+1}} = \ldots = \varepsilon_{i_n} = -1.$$

Тогда положим

$$\chi^{(\varkappa)}(x) = \prod_{l=1}^{k} \chi(x_{i_l}) \prod_{l=k+1}^{n} (1 - \chi(x_{i_l})).$$

Очевидно, что выполнено (a). Из построения $\chi^{(\varkappa)}$ следует, что если $(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{supp} \chi^{(\varkappa)}$, то вне единичного куба в $\mathbb{R}^n$ $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \geqslant 1$ и $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n} \leqslant -1$. Таким образом,

$$\langle I^{(\varkappa)}, x\rangle = \sum_{l=1}^{k} x_{i_l} - \sum_{l=k+1}^{n} x_{i_l} = |x|, \quad |x_j| \geqslant 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что на подпространстве $\chi^{(\varkappa)} C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$ норма (1) эквивалентна норме $|\ \ |^{(m)}_{[\nu I^{(\varkappa)}]}$, т. е. выполнено (b). Предложение доказано.

В силу вложений (2) мы можем с помощью операций проективного и индуктивного предела определить *аналоги пространств* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{O}$:

$$\mathfrak{S} = C^{(\infty)}_{\langle\infty\rangle} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{m,\nu} C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{\nu} C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle} = \bigcup_{\nu} \bigcap_{m} C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}; \tag{10}$$

$\mathfrak{S}$ *является пространством бесконечно дифференцируемых функций, убывающих быстрее любой экспоненты* $\exp(\nu|x|)$, *а* $\mathfrak{D}$ —

пространство бесконечно дифференцируемых функций φ, растущих вместе с производными не быстрее некоторой экспоненты $\exp(\nu|x|)$, $\nu=\nu(\varphi)$.

Определим $\mathfrak{S}'$ как пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathfrak{S}$, снабженное сильной топологией сопряженного пространства. Как векторное пространство $\mathfrak{S}'$ можно отождествить с индуктивным пределом банаховых сопряженных к $C_{\langle\nu\rangle}^{(m)}$ (см. Дополнение к гл. I)

$$\mathfrak{S}'=\bigcup_{m,\nu}\left(C_{\langle\nu\rangle}^{(m)}\right)'.$$

Ниже мы покажем, что этот изоморфизм топологический.

Если $f\in C_{\langle\nu\rangle}$, $g\in C_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle}$, $\varepsilon>0$, то билинейная форма $(f, g)=\int f(x)\,g(x)\,dx$ определена и непрерывно зависит от f и g (в соответствующих топологиях). Таким образом, $C_{\langle\nu\rangle}\subset(C_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle})'$, и имеют место вложения

$$\mathfrak{S}\subset\mathfrak{D}\subset\mathfrak{S}'.$$

Аналогичным образом через $\mathfrak{D}'$ обозначим сопряженное пространство к $\mathfrak{D}$; имеет место равенство векторных пространств

$$\mathfrak{D}'=\bigcap_{\nu}\bigcup_{m}\left(C_{\langle\nu\rangle}^{(m)}\right)'$$

и справедливы вложения

$$\mathfrak{S}\subset\mathfrak{D}'\subset\mathfrak{S}'.$$

$\mathfrak{S}'$ является пространством распределений f конечного порядка, растущих не быстрее некоторой экспоненты $\exp(\nu|x|)$, $\nu=\nu(f)$, а $\mathfrak{D}'$, пространство умеренных распределений, убывающих быстрее любой экспоненты $\exp(\nu|x|)$, $\nu\in\mathbb{R}$.

1.2. Преобразование Фурье — Лапласа в $\mathfrak{S}$ и в связанных с ним шкалах. В этом пункте мы всюду будем считать, специально не оговаривая, что $\nu\geqslant 0$. Обозначим через $C_{(s)}^{(\nu)}$ банахово пространство функций $\psi(\zeta)$, голоморфных в трубчатой области

$$T_\nu=\{\zeta=(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n)\in\mathbb{C}^n\colon\ |\operatorname{Im}\zeta_j|<\nu,\ j=1,\ \ldots,\ n\}\tag{11}$$

и имеющих конечную норму

$$|\psi|_{(s)}^{(\nu)}=\sup_{\zeta\in T_\nu}(1+|\zeta|)^s\,|\psi(\zeta)|.\tag{12}$$

Если $\varphi\in C_{\langle\nu\rangle}^{(m)}$, $\nu>0$, то для любого $\zeta\in T_\nu$ определен абсолютно сходящийся интеграл Фурье — Лапласа

$$\mathcal{F}\colon\ \varphi(x)\mapsto\widehat{\varphi}(\zeta)=(2\pi)^{-n/2}\int\exp(-i\langle x,\zeta\rangle)\,\varphi(x)\,dx\tag{13}$$

и выполнено «неравенство Парсеваля»

$$|\widehat{\varphi}|_{(m)}^{(\nu-\varepsilon)}\leqslant K_{mn}\varepsilon^{-n}\,|\varphi|_{\langle\nu\rangle}^{(m)}.\tag{14}$$

В самом деле, если $|\alpha| \leqslant m$, $|\operatorname{Im} \zeta_j| < \nu - \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$, то

$$|\zeta^\alpha \widehat{\varphi}(\zeta)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \int \exp \langle \operatorname{Im} \zeta, x \rangle \, | D^\alpha \varphi(x) | \, dx \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} |\varphi|_{\langle\nu\rangle}^{(m)} \int \exp(-\varepsilon |x|) \, dx = 2^n (2\pi)^{-n/2} \varepsilon^{-n} |\varphi|_{\langle\nu\rangle}^{(m)}.$$

Взяв верхнюю грань левой части по $\zeta \in T_{\nu-\varepsilon}$, $|\alpha| \leqslant m$, получим неравенство (14).

С другой стороны, если $\widehat{\varphi}(\zeta) \in C_{(m)}^{\langle\nu\rangle}$, $m > n$, то для этой функции определено классическое обратное преобразование Фурье — Лапласа

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\{\operatorname{Im} \zeta_j = \omega_j, j=1,\ldots,n\}} \exp(i \langle x, \zeta \rangle) \widehat{\varphi}(\zeta) \, d \operatorname{Re} \zeta, \qquad (13')$$

причем правая часть не зависит от выбора вектора $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $|\omega_j| < \nu$, $j = 1, \ldots, n$, и выполнено «неравенство Парсеваля»

$$|\varphi|_{\langle\nu\rangle}^{(m-m')} \leqslant K_{mnm'} |\widehat{\varphi}|_{(m)}^{\langle\nu\rangle}, \quad m' > n. \qquad (14')$$

Следствием сказанного является

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа осуществляет изоморфизм*

$$\mathscr{F}\mathfrak{S} = \bigcap_{\nu,m} C_{(m)}^{\langle\nu\rangle} \overset{\text{def}}{=} C_{(\infty)}^{\langle\infty\rangle}. \qquad (15)$$

Правое пространство в (15) *состоит из целых функций* $\psi(\zeta)$, *для которых* $\forall \nu, N, \nu > 0$ $\exists K_{\nu N}$, *так что*

$$|\psi(\zeta)| < K_{\nu N} (1 + |\zeta|)^{-N} \quad \forall \zeta \in \overline{T}_\nu. \qquad (16)$$

Теперь мы введем *аналог пространства* $\mathscr{M}$, полагая

$$\mathfrak{M} = \bigcap_\nu \bigcup_s C_{(s)}^{\langle\nu\rangle} = \bigcap_\nu C_{(-\infty)}^{\langle\nu\rangle}.$$

Элементами этого пространства будут такие целые функции $\psi(\zeta)$, *что* $\forall \nu \in \mathbb{R}_+$ $\exists s_\nu, K_\nu$, *так что*

$$|\psi(\zeta)| \leqslant K_\nu (1 + |\zeta|)^{s_\nu}, \quad \zeta \in \overline{T}_\nu. \qquad (17)$$

Без труда доказывается

Предложение. (i) (Ср. предложение 2 из п. I.1.6.) $\mathfrak{M}$ — *коммутативное кольцо относительно умножения;*

(ii) $\mathscr{F}\mathfrak{S}$ *является идеалом в* $\mathfrak{M}$, *т. е. определено умножение*

$$\mathfrak{M} \times \mathscr{F}\mathfrak{S} \to \mathscr{F}\mathfrak{S} \, (\{a(\zeta), \psi(\zeta)\} \mapsto a(\zeta) \psi(\zeta));$$

(iii) *функция* $\psi(\zeta) \in \mathfrak{M}$ *является обратимым элементом этого кольца тогда и только тогда, когда* $\forall \nu \in \mathbb{R}_+$ $\exists s_\nu, K_\nu$, *так что выполнена оценка снизу*

$$|\psi(\zeta)| \geqslant K_\nu (1 + |\zeta|)^{s_\nu} \quad \forall \zeta \in \overline{T}_\nu. \qquad (18)$$

Следствие. *Если полином* $P(\zeta)$ *является обратимым элементом* $\mathfrak{M}$, *то* $P(\zeta) = \text{const}$.

Доказательство. Из утверждения (iii) предложения следует, что если $P^{-1}(\zeta)\in\mathfrak{M}$, то $P(\zeta)\neq 0$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$, откуда $P(\zeta)\equiv$ $\equiv \mathrm{const}$.

Определим теперь п. д. о. на пространствах $C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$. При работе с пространствами функций степенного убывания $C^{(\infty)}_{(l)}$ и т. д. мы ограничивались п. д. о. с символами из $\mathscr{M}$ — пространства мультипликаторов на $\mathscr{S}$. В рамках непосредственной аналогии при работе с пространствами $C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}$ экспоненциально убывающих функций мы бы должны были ограничиться символами из $\mathfrak{M}$ — пространства мультипликаторов на $\mathscr{F}\mathfrak{S}$. Однако при этом возникает слишком ограниченный запас символов, и мы поступим иначе.

Зафиксируем $\nu>0$. Каждая функция $a(\zeta)\in C^{(\nu)}_{(-\infty)}$ будет мультипликатором на пространстве $C^{(\nu')}_{(\infty)}$, $\nu'<\nu$, и для $\varphi\in C^{(\infty)}_{\langle\nu'\rangle}$ можно определить п. д. о.

$$a(D)\varphi={}_{[\Gamma]}a(D)\varphi\overset{\mathrm{def}}{=}(2\pi)^{-n/2}\int\exp\left(i\langle\xi+i\Gamma,x\rangle\right)a(\xi+i\Gamma)\times$$
$$\times\widehat{\varphi}(\xi+i\Gamma)\,d\xi,\quad \Gamma\in\nu' I. \tag{19}$$

Правая часть не зависит от выбора Γ. В самом деле, в п. I.5.4 мы проверили, что правая часть (19) не изменится, если вектор Γ заменить на Γ', отличающийся от Γ одной координатой. Поскольку любые две точки куба $\nu' I$ можно соединить ломаной, стороны которой параллельны координатным осям, то определение (19) корректно.

Из неравенств Парсеваля (14), (14′) следует непрерывность оператора

$$a(D)\colon\ C^{(\infty)}_{\langle\nu'\rangle}\to C^{(\infty)}_{\langle\nu''\rangle},\quad \nu''<\nu'<\nu,\quad a(\zeta)\in C^{(\nu)}_{(-\infty)}. \tag{20}$$

Замечание. Поскольку п. д. о. не сохраняют пространства $C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}$, то естественно (как мы уже не раз поступали) с помощью операций проективного и индуктивного пределов сконструировать более широкие или узкие пространства, обладающие указанным свойством. Положим

$$\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}=\bigcap_{\mu<\nu}C^{(\infty)}_{\langle\mu\rangle},\quad \mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}=\bigcup_{\mu>\nu}C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}. \tag{21}$$

При этом естественно считать, что $\mathfrak{S}_{\langle+\infty\rangle}=\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{D}_{\langle-\infty\rangle}=\mathfrak{D}$. Пространство $\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}$ состоит из таких $\varphi(x)$, которые вместе с производными всех порядков оцениваются через $\exp(-\nu'|x|)$ для любого $\nu'<\nu$. Включение $\varphi\in\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}$ означает, что найдется такое $\mu=\mu(\varphi)>\nu$, что φ вместе с производными всех порядков оценивается через $\exp(-\mu|x|)$. Отметим очевидные вложения

$$C^{(\infty)}_{\langle\nu+\varepsilon\rangle}\subset\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}\subset C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}\subset\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}\subset C^{(\infty)}_{\langle\nu-\varepsilon\rangle}\quad\forall\varepsilon>0.$$

По аналогии с $\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}$, $\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}$ при $\nu>0$ естественно ввести пространства голоморфных функций

$$\mathfrak{S}^{\langle\nu\rangle}=\bigcap_{0<\mu<\nu} C^{(\mu)}_{(\infty)},\quad \mathfrak{D}^{\langle\nu\rangle}=\bigcup_{\mu>\nu} C^{(\mu)}_{(\infty)};$$

функции из $\mathfrak{S}^{\langle\nu\rangle}$ голоморфны в любой трубчатой области $T_{\nu'}$, $\nu'<\nu$, а на границе T_ν могут расти неконтролируемым образом.

Каждая функция $\psi\in\mathfrak{D}^{\langle\nu\rangle}$ голоморфна в трубчатой области T_μ, $\mu=\mu(\psi)>\nu$. Таким образом, функции из $\mathfrak{D}^{\langle\nu\rangle}$ голоморфны в замыкании T_ν.

Из неравенств Парсеваля (14), (14′) вытекают изоморфизмы

$$\mathscr{F}\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}=\mathfrak{S}^{\langle\nu\rangle},\quad \mathscr{F}\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}=\mathfrak{D}^{\langle\nu\rangle},\quad \nu>0. \tag{15′}$$

При $\nu=+\infty$ первый изоморфизм переходит в (15).

Отметим, что функции из $C^{(\nu)}_{(-\infty)}$ являются мультипликаторами на $\mathfrak{S}^{\langle\nu\rangle}$, откуда следует непрерывность оператора

$$a(D)\colon\ \mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}\to\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle},\quad a(\zeta)\in C^{(\nu)}_{(-\infty)},\quad \nu>0. \tag{20′}$$

Аналогично непрерывен оператор

$$a(D)\colon\ \mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}\to\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle},\quad a(\zeta)\in C^{(N)}_{(-\infty)},\quad N>\nu\geqslant 0. \tag{20″}$$

1.3. Пространства $H_{\langle\nu\rangle}$. Обозначим через $H_{\langle\nu\rangle}$ пространство измеримых функций, интегрируемых в квадрате с весом $\exp(2\nu|x|)$; соответствующая норма имеет вид

$$\|f\|_{\langle\nu\rangle}=((f,\ f)_{\langle\nu\rangle})^{1/2}=\|\exp(\nu|x|)f\|. \tag{22}$$

Отображение $f\mapsto f\exp(\nu|x|)$ устанавливает изометрический изоморфизм между $H_{\langle\nu\rangle}$ и H. Отсюда выводится, что $H_{\langle-\nu\rangle}$ изометрически изоморфно банахову сопряженному к $H_{\langle\nu\rangle}$, т. е.

$$(H_{\langle\nu\rangle})'=H_{\langle-\nu\rangle},\quad \nu\in\mathbb{R}, \tag{23}$$

следовательно, $H_{\langle\nu\rangle}$ — рефлексивное банахово пространство.

В пространстве $H_{\langle\nu\rangle}$ можно определить скалярное произведение

$$(f,\ g)_{\langle\nu\rangle}=\int\exp(2\nu|x|)f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

которому отвечает норма (22). Иными словами, $H_{\langle\nu\rangle}$ — рефлексивное гильбертово пространство.

Замечание 1. Если $\exp(\nu\{x\})$ — гладкая функция, совпадающая с $\exp(\nu|x|)$ при $|x_j|\geqslant 1$, $j=1,\ \ldots,\ n$ (ср. п. 1.1), то оператор умножения на $\exp(-\nu\{x\})$ порождает изоморфизм H и $H_{\langle\nu\rangle}$, сохраняющий подпространства $\mathscr{D}$ и $\mathfrak{S}$. Так как $\mathscr{D}$ и $\mathfrak{S}$ плотны в H, то они плотны в $H_{\langle\nu\rangle}$, и $H_{\langle\nu\rangle}$ можно рассматривать как пополнения $\mathscr{D}$ или $\mathfrak{S}$ по норме (22). Более того, $\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}\subset H_{\langle\nu\rangle}$ и $H_{\langle\nu\rangle}$ можно рассматривать как пополнение $\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}$.

Имеет место аналог предложения 1.1.

Предложение. (i) *При* $\nu > 0$ *имеем*

$$H_{\langle\nu\rangle} = \bigcap_{\varkappa=1}^{2^n} H_{[\nu I(\varkappa)]}, \tag{24}$$

а норма (22) *эквивалентна естественной норме правого пространства*

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{2^n} (\| f \|_{[\nu I(\varkappa)]})^2\right)^{1/2}.$$

(i′) *При* $\nu > 0$ *пространство* $H_{\langle\nu\rangle}$ *состоит из тех и только тех элементов пересечения* $\bigcap_{\Gamma} H_{[\Gamma]}$, *для которых конечна норма*

$$'\| f \|_{\langle\nu\rangle} = \sup_{\Gamma \in \nu I} \| f \|_{[\Gamma]}. \tag{22′}$$

(ii) *При* $\nu < 0$ *имеем*

$$H_{\langle\nu\rangle} = \sum_{\varkappa=1}^{2^n} H_{[\nu I(\varkappa)]}, \tag{25}$$

а норма (22) *при* $\nu < 0$ *эквивалентна норме*

$$\inf_{f=f_1+\ldots+f_{2^n}} \left(\sum_{\varkappa} \| f_\varkappa \|^2_{[\nu I(\varkappa)]}\right)^{1/2}.$$

Замечание 2 (ср. п. II.1.3). Пусть $\nu > 0$. Если $\Gamma \in \overline{\nu I}$ и $f \in H_{\langle\nu\rangle}$, то $\exp\langle\Gamma, x\rangle f \in H$ и является непрерывной функцией Γ в норме $\| \ \|$. В частности, если M принадлежит границе куба νI, то при $\Gamma \in \nu I$

$$\| f \exp\langle\Gamma, x\rangle - f \exp\langle M, x\rangle \| \to 0, \quad \Gamma \to M.$$

Заметим, что билинейная форма $(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx$ определена и непрерывно зависит от $f \in H_{\langle\nu\rangle}$ и $\varphi \in C_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle}$ для любого $\varepsilon > 0$. Таким образом:

$$H_{\langle\nu\rangle} \subset (C_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle})' \subset \mathfrak{S}', \quad \varepsilon > 0.$$

В пространствах $H_{\langle\nu\rangle}$ при $\nu > 0$ определено преобразование Фурье — Лапласа, и с помощью несложной модификации рассуждений п. II.1.3 для них доказывается теорема Пэли — Винера. Чтобы сформулировать эту теорему, введем необходимые пространства.

Обозначим через $H^{\langle\nu\rangle}_{(s)}$ *пространство функций* $\psi(\zeta)$, *голоморфных в трубчатой области* T_ν *и имеющих конечную норму*

$$\| \psi \|^{\langle\nu\rangle}_{(s)} = \sup_{|\omega_j|<\nu, j=1,\ldots,n} \int (1 + |\xi + i\omega|^2)^{2s} |\psi(\xi + i\omega)|^2\, d\xi, \tag{26}$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа устанавливает изометрический изоморфизм*

$$\mathcal{F} H_{\langle\nu\rangle} = H^{\langle\nu\rangle},$$

причем при этом изоморфизме норма $(22')$ *переходит в норму* (26) (*при* $s=0$).

Следствие (ср. п. II.1.3). *Функция* $\psi(\zeta)\in H^{\langle\nu\rangle}$ *при* $\operatorname{Im}\zeta\to\omega$, *где* ω — *точка границы* νI, *принимает граничные значения в смысле* H.

1.4. Структура счетно-гильбертова пространства в $\mathfrak{S}$. Теперь включим «нулевые» пространства $H_{\langle\nu\rangle}$, $\nu>0$, в шкалу $\{H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}\}$, градуированную по гладкости. Для этого определим символы

$$\delta_{s,N}(\zeta)=\left(nN^2+\sum_{j=1}^{n}\zeta_j^2\right)^{s/2}. \tag{27}$$

Очевидно, что $\delta_{s,N}(\zeta)\in C^{\langle\nu\rangle}_{(s)}$ при $N>\nu$. Ниже индекс N мы часто будем опускать (если его значение ясно из контекста). П. д. о. с символами (27) задают градуировку по гладкости в $H^{(-\infty)}$ и сохраняют подпространства $\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}\subset\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}$, $\nu<N$. Положим

$$H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}=\{f\in H^{(-\infty)},\ \delta_{s,N}(D)f\in H_{\langle\nu\rangle},\ 0\leqslant\nu<N\} \tag{28}$$

и снабдим это пространство нормой

$$\|f\|^{(s)}_{\langle\nu\rangle}=\|\delta_{s,N}(D)f\|_{\langle\nu\rangle},\quad 0\leqslant\nu<N. \tag{29}$$

Пространство (28) можно также определять как пополнение $\mathfrak{S}$ (или $\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}$) по норме (29). В этом пространстве можно ввести гильбертово скалярное произведение (которому отвечает норма (29))

$$(f,g)^{(s)}_{\langle\nu\rangle}=(\delta_{s,N}f,\delta_{s,N}g)_{\langle\nu\rangle},\quad 0\leqslant\nu<N.$$

Из (28) и свойств п. д. о. легко выводятся другие эквивалентные определения пространств $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$. Имеет место

Предложение. *Пусть* $\nu>0$ *и* $N>\nu$. *Для распределения* $f\in H^{(-\infty)}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) $\delta_{s,N}(D)f\in H_{\langle\nu\rangle}$.

(i′) $f=\delta_{-s,N}(D)g$, $g\in H_{\langle\nu\rangle}$.

(ii) $f\in\bigcap\limits_{\varkappa=1}^{2^n}H^{(s)}_{[\nu I(\varkappa)]}$.

(ii′) $f\in\bigcap\limits_{\Gamma\in\nu I}H^{(s)}_{[\Gamma]}$ *и конечна норма* $'\|f|^{(s)}_{\langle\nu\rangle}=\sup\limits_{\Gamma\in\nu I}\|f\|^{(s)}_{[\Gamma]}$.

(iii) *Преобразование Фурье* $\widehat{f}\in H_{(-\infty)}$ *голоморфно продолжается в трубчатую область* (11) *и принадлежит* $H^{\langle\nu\rangle}_{(s)}$.

Условие (iii) означает, что

$$\mathcal{F}H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}=H^{\langle\nu\rangle}_{(s)}. \tag{30}$$

Этот изоморфизм станет изометрическим, если в норме (26) заменить $(1+|\zeta|^2)^{2s}$ на $|\delta_{s,N}(\zeta)|^2$. Отметим также, что норма (26) эквивалентна естественной норме правого пространства в (ii).

Из определения (i′) легко выводится, что при натуральных m включение $f\in H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$D^\alpha f \in H_{\langle\nu\rangle}$ при $|\alpha| \leqslant m$. В этом случае норма (26) эквивалентна норме

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha f\|^2_{\langle\nu\rangle}\Big)^{1/2}.$$

Из определения (i′) следуют вложения $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle} \subset H^{(s')}_{\langle\nu'\rangle}$, $s \geqslant s'$, $\nu \geqslant \nu'$. т. е. $\{H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}\}$ является шкалой банаховых (гильбертовых) пространств. Покажем, что эта шкала эквивалентна гёльдеровской шкале из п. 1.1.

Теорема. *Для* $\forall\nu > 0$ *имеют место вложения*

$$C^{(m)}_{\langle\nu+\varepsilon\rangle} \subset H^{(m)}_{\langle\nu\rangle} \subset C^{(m-m')}_{\langle\nu\rangle}, \quad m' > n/2, \quad \varepsilon > 0. \tag{31}$$

Доказательство. Левое вложение (31) очевидно. Правое вложение следует из предложения 1.1 (i), предложения (ii) и теоремы вложения С. Л. Соболева в форме

$$H^{(m)}_{[\nu I(\varkappa)]} \subset C^{(m-m')}_{[\nu I(\varkappa)]}, \quad m' > n/2.$$

Вложения (31) продолжаются на проективные пределы шкал, т. е. в (31) можно положить $m = \infty$. Из этих вложений также следует, что в определениях (9), (10), (21) можно $C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$, $C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}$ заменить (соответственно) на $H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$, $H^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}$.

1.5. $\mathfrak{S}'$ как индуктивный предел гильбертовых пространств. При $\nu > 0$ определим $H^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle}$, $s \in \mathbb{R}$, как банахово сопряжение к $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$ и снабдим это пространство нормой сопряженного пространства:

$$\|f\|^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle} = \sup_{g \in H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}} (f, g)/\|g\|^{(s)}_{\langle\nu\rangle}. \tag{32}$$

Ввиду того, что изоморфизм (23) является изометрическим, определение (32) согласуется с (22) при $s = 0$. Поскольку $\mathfrak{S}$ плотно в $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$, можно рассматривать функционалы из $H^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle}$ как такие элементы из $\mathfrak{S}'$, для которых конечна норма (32).

Заметим, что каждая функция $f \in C^{(\infty)}_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle}$, $\varepsilon > 0$, принадлежит $H^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle}$. При $s > 0$ это очевидно, поскольку $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle} \subset H_{\langle\nu\rangle}$. При $s < 0$ всегда можно указать такое четное $m > 0$, что всякий элемент $g \in H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$ представляется в виде $g = \delta_{m,N}(D)\varphi$ ($\delta_{m,N}$ — дифференциальный оператор). Полагая $(f, g) = (\delta_{m,N}(D)f, \varphi)$, получим линейный непрерывный функционал. Итак,

$$\mathfrak{S} \subset C^{(\infty)}_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle} \subset H^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle} \subset \mathfrak{S}' \quad \forall\nu > 0, \tag{33}$$

причем все вложения плотные.

Так как пространства $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$, $\nu \geqslant 0$, образуют шкалу, то и пространства $H^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle}$ образуют двойственную шкалу, и можно рассмотреть индуктивные пределы $H^{(-\infty)}_{\langle\nu\rangle}$, $\bigcup_{s,\nu\leqslant 0} H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$, снабдив их естественной топологией. Ввиду рефлексивности $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$ эти пределы будут регулярными, и согласно общим свойствам регулярных индуктивных пределов (см. Дополнение к гл. I, п. 7) имеют место топологические изоморфизмы

$$\left(H^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}\right)' = H^{(-\infty)}_{\langle-\nu\rangle}, \quad \mathfrak{S}' = \bigcup_{s,\nu} H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}, \tag{34}$$

где левые пространства снабжены топологией сильного сопряженного, а правые — топологией индуктивного предела. Ввиду двойственности (34) мы можем определить п. д. о. на $H^{(-\infty)}_{\langle-\nu\rangle}$. Пусть $a(\zeta) \in C^{(N)}_{(-\infty)}$, тогда $a(-\zeta) \in C^{(N)}_{(-\infty)}$, и при $N > \nu$ положим

$$(a(D)f, g) = (f, a(-D)g) \quad \forall g \in H^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}. \tag{35}$$

На плотном подмножестве $\mathfrak{S} \subset H^{(-\infty)}_{\langle-\nu\rangle}$ это определение согласуется с приведенным выше в п. 1.2. Из предложения 1.4 (i′) и двойственности (23) следует изоморфизм с равенством норм

$$\delta_{-s,N}(D)\, H^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle} = H_{\langle-\nu\rangle}, \quad \|f\|^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle} = \|\delta_{-s,N}(D) f\|_{\langle-\nu\rangle}. \tag{36}$$

Из предложения 1.3 (ii) и изоморфизма (36) вытекает, что при $\nu > 0$ и $\forall s \in \mathbb{R}$ имеем

$$H^{(-s)}_{\langle-\nu\rangle} = \sum_{\varkappa=1}^{2^n} H^{(-s)}_{[-\nu I^{\varkappa}]}, \tag{37}$$

а норма (32) эквивалентна естественной норме правого пространства (37).

Отсюда, в свою очередь, следует, что если $f \in H^{(-\infty)}_{\langle-\nu\rangle}$ и $a(\zeta) \in C^{(N)}_{(-\infty)}$, $N > \nu$, то

$$a(D)f = \sum_{\varkappa=1}^{2^n} {}_{[-\nu I^{(\varkappa)}]}a(D) f_\varkappa, \quad f_\varkappa \in H^{(-\infty)}_{[-\nu I^{(\varkappa)}]}, \tag{38}$$

причем левая часть не зависит от способа представления f в виде $\sum f_\varkappa$.

Из изоморфизма (36) следует, что при натуральных m включение $f \in H^{(m)}_{\langle-\nu\rangle}$ имеет место тогда и только тогда, когда $D^\alpha f \in H_{\langle-\nu\rangle}$, $|\alpha| \leqslant m$, а норма (32) эквивалентна норме

$$\left(\sum \|D^\alpha f\|^2_{\langle-\nu\rangle}\right)^{1/2}.$$

1.6. Пространства $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$. Из предложений 1.1 (iii), (37) и теоремы вложения С. Л. Соболева следуют вложения

$$C^{(m)}_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle} \subset H^{(m)}_{\langle-\nu\rangle} \subset C^{(m-m')}_{\langle-\nu\rangle}, \quad m' > n/2, \quad \varepsilon > 0. \tag{39}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекают вложения, отвечающие $m = \infty$:

$$C^{(\infty)}_{\langle-\nu+\varepsilon\rangle} \subset H^{(\infty)}_{\langle-\nu\rangle} \subset C^{(\infty)}_{\langle-\nu\rangle}, \quad \varepsilon > 0, \tag{39′}$$

откуда следует, что

$$\mathfrak{D} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_\nu C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle} = \bigcup_\nu H^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}. \tag{40}$$

Но тогда $\mathfrak{D}'$ как векторное пространство совпадает с проективным пределом пространств $H^{(-\infty)}_{\langle\nu\rangle}$:

$$\mathfrak{D}' = \bigcap_{\nu} H^{(-\infty)}_{\langle\nu\rangle}. \tag{41}$$

Как и в случае $\mathcal{O}'$, мы будем принимать правую часть (41) в качестве определения левой части и будем наделять $\mathfrak{D}'$ топологией проективного предела пространств $H^{(-\infty)}_{\langle\nu\rangle}$.

Замечание. В пространствах $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ таким же образом, как в $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, определяются ограниченные и регулярно ограниченные множества. Далее, на пространства $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $C^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}, H^{(\pm\infty)}_{\langle\nu\rangle}$ и т. д. переносится теория непрерывных и регулярных операторов, развитая в гл. I и в Дополнении к этой главе для пространств $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, $C^{(\infty)}_{(l)}, H^{(\pm\infty)}_{(l)}$. Ниже мы будем свободно пользоваться понятиями непрерывных и регулярных операторов для $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ и т. д. без специальных пояснений.

Опишем теперь фурье-образ пространства $\mathfrak{D}'$.

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа осуществляет изоморфизм*

$$\mathcal{F}\mathfrak{D}' = \mathfrak{M}. \tag{42}$$

Доказательство. Согласно определению из п. 1.2 $\mathfrak{M} = \bigcap_{\nu} C^{\langle\nu\rangle}_{(-\infty)}$. С другой стороны, согласно изоморфизму (30) и определению (41)

$$\mathcal{F}\mathfrak{D}' = \bigcap_{\nu} \bigcup_{s} \mathcal{F}H^{(s)}_{\langle\nu\rangle} = \bigcap_{\nu} \bigcup_{s} H^{\langle\nu\rangle}_{(s)} = \bigcap_{\nu} H^{\langle\nu\rangle}_{(-\infty)}.$$

Таким образом, доказательство (42) свелось к доказательству эквивалентности шкал $\{C^{\langle\nu\rangle}_{(s)}\}$ и $\{H^{\langle\nu\rangle}_{(s)}\}$, где $\nu > 0$. Справедливо

Предложение. *Для* $\forall\nu > 0$ *имеют место вложения*

$$C^{\langle\nu\rangle}_{(s+\varkappa')} \subset H^{\langle\nu\rangle}_{(s)} \subset C^{\langle\nu-\varepsilon\rangle}_{(s-\varkappa'')},\quad \varkappa', \varkappa'' > n/2,\quad \varepsilon > 0. \tag{43}$$

Доказательство. 1) Если $N > \nu$, то оператор умножения на функцию $\delta_{r,N}(\zeta)$ порождает изоморфизмы

$$C^{\langle\nu\rangle}_{(s)} \to C^{\langle\nu\rangle}_{(s-r)}, H^{\langle\nu\rangle}_{(s)} \to H^{\langle\nu\rangle}_{(s-r)} \quad (\psi \mapsto \delta_{r,N}\psi).$$

Таким образом, при доказательстве (43) мы можем ограничиться случаем натуральных $s = m$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, причем $m > \varkappa''$.

2) Левое включение (43) очевидно, так что нам надо доказать включение

$$H^{\langle\nu\rangle}_{(m)} \subset C^{\langle\nu-\varepsilon\rangle}_{(m-m')},\quad m' > n/2.$$

3) Согласно (30), (14) и теореме вложения 1.4 имеем

$$H^{\langle\nu\rangle}_{(m)} = \mathcal{F}H^{(m)}_{\langle\nu\rangle} \subset \mathcal{F}C^{(m-m')}_{\langle\nu\rangle} \subset C^{\langle\nu-\varepsilon\rangle}_{(m-m')}.$$

Для дальнейшего отметим следствие из равенств (34) и (41).

Лемма. (i) *Для любого* $f \in \mathfrak{S}'$ *найдется такой полином* $P(\zeta)$ *и такое* $\nu \in \mathbb{R}$, *что* $f = P(D)g$, $g \in C_{\langle\nu\rangle}$.

(ii) *Если* $f \in \mathfrak{D}'$, *то* $\forall \nu \in \mathbb{R}$ *найдется такой полином* $P_\nu(\zeta)$, *что* $f = P_\nu(D) g_\nu$, $g_\nu \in C_{\langle \nu \rangle}$.

1.6′. Пространства $(\mathfrak{S}')_{\langle \nu \rangle}$ **и** $(\mathfrak{D}')_{\langle \nu \rangle}$. Изоморфизм (34) является частным случаем (отвечающим $\nu = \pm\infty$) топологического изоморфизма

$$(\mathfrak{S}_{\langle \nu \rangle})' = (\mathfrak{S}')_{\langle -\nu \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\mu > -\nu} H^{(-\infty)}_{\langle \mu \rangle}.$$

Аналогично, (41) является частным случаем (отвечающим $\nu = -\infty$) равенства

$$(\mathfrak{D}_{\langle \nu \rangle})' = (\mathfrak{D}')_{\langle -\nu \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\mu < -\nu} H^{(-\infty)}_{\langle \mu \rangle}.$$

Для лучшего понимания введенных пространств отметим вложение пространств гладких функций

$$\mathfrak{S} \subset H^{(\infty)}_{\langle \nu + \varepsilon \rangle} \subset \mathfrak{D}_{\langle \nu \rangle} \subset H^{(\infty)}_{\langle \nu \rangle} \subset \mathfrak{S}_{\langle \nu \rangle} \subset H^{(\infty)}_{\langle \nu - \varepsilon \rangle} \subset \mathfrak{D}$$

и двойственные вложения пространств распределений $(\mu = -\nu)$:

$$\mathfrak{D}' \subset H^{(-\infty)}_{\langle \mu + \varepsilon \rangle} \subset (\mathfrak{S}')_{\langle \mu \rangle} \subset H^{(-\infty)}_{\langle \mu \rangle} \subset (\mathfrak{D}')_{\langle \mu \rangle} \subset H^{(-\infty)}_{\langle \mu - \varepsilon \rangle} \subset \mathfrak{S}'.$$

Рассмотрим преобразование Фурье в $(\mathfrak{S}')_{\langle \nu \rangle}$, $(\mathfrak{D}')_{\langle \nu \rangle}$ при $\nu > 0$. Из изоморфизмов (30) и вложений (43) следуют равенства

$$\mathcal{F}(\mathfrak{D}')_{\langle \nu \rangle} = \bigcap_{\mu < \nu} H^{\langle \mu \rangle}_{(-\infty)} = \bigcap_{\mu < \nu} C^{\langle \mu \rangle}_{(-\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{M}^{\langle \nu \rangle},$$

$$\mathcal{F}(\mathfrak{S}')_{\langle \nu \rangle} = \bigcup_{\mu < \nu} H^{\langle \mu \rangle}_{(-\infty)} = \bigcup_{\mu < \nu} C^{\langle \mu \rangle}_{(-\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{L}^{\langle \nu \rangle}.$$

Пространства $\mathfrak{M}^{\langle \nu \rangle}$ и $\mathfrak{L}^{\langle \nu \rangle}$ являются кольцами относительно умножения. Первое состоит из функций, голоморфных в открытой трубчатой области T_ν, на границе T_ν они могут иметь особенности. $\mathfrak{L}^{\langle \nu \rangle}$ состоит из функций, каждая из которых голоморфна в некоторой окрестности T_ν. В случае полиномов имеет место

Предложение. (i) *Полином* $P(\zeta)$ *является обратимым элементом* $\mathfrak{M}^{\langle \nu \rangle}$ *тогда и только тогда, когда*

$$P(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad |\operatorname{Im} \zeta_j| < \nu, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(ii) *Полином* $P(\zeta)$ *является обратимым элементом* $\mathfrak{L}^{\langle \nu \rangle}$ *тогда и только тогда, когда*

$$P(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad |\operatorname{Im} \zeta_j| \leqslant \nu, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.7. Свертка в пространствах распределений роста не выше экспоненциального. В этом пункте мы воспроизведем всю схему § I.3 применительно к пространствам, рассматриваемым в настоящей главе. Мы начнем со свертки гладких функций, определяемой с помощью (I.3.1).

Предложение 1. *Пусть* $f \in C^{(k)}_{\langle \nu \rangle}$, $g \in C^{(m)}_{\langle \mu \rangle}$ *и* $\nu > |\mu|$. *Тогда* $f * g = g * f \in C^{(m+k)}_{\langle \mu \rangle}$ *и*

$$|f * g|^{(k+m)}_{\langle \mu \rangle} \leqslant c(k, m, n, \mu, \nu) \, |f|^{(k)}_{\langle \nu \rangle} \, |g|^{(m)}_{\langle \mu \rangle}. \qquad (44)$$

Доказательство. Мы ограничимся проверкой (44) для $k=m=0$, поскольку переход к случаю k, $m\neq 0$ требует лишь почти дословного повторения рассуждения предложения 1 из п. I.3.1. Имеем

$$|f*g|_{\langle\mu\rangle}\leqslant |f|_{\langle\nu\rangle}|g|_{\langle\mu\rangle}\sup_x \int H(x,y)\,dy, \qquad (44')$$

где

$$H(x,y)=\exp(\mu|x|-\mu|y|-\nu|x-y|)=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\exp(\mu|x_j|-\mu|y_j|-\nu|x_j-y_j|)\overset{\text{def}}{=}\prod_{j=1}^{n}h(x_j,y_j).$$

Оценим ядро $h(t,\theta)$; поскольку $h(-t,-\theta)=h(t,\theta)$, то можно ограничиться случаем $t>0$. Имеем:

$$h(t,\theta)=-(\nu-\mu)t+(\nu+\mu)\theta<-\varepsilon|\theta|,\quad \theta<0,\quad \varepsilon>0,$$

$$h(t,\theta)=-(\nu-\mu)(t-\theta)<-\varepsilon|t-\theta|,\quad 0\leqslant\theta\leqslant t,\quad \varepsilon>0,$$

$$h(t,\theta)=-(\nu+\mu)(\theta-t)<-\varepsilon|t-\theta|,\quad \theta\geqslant t,\quad \varepsilon>0.$$

Из этих оценок следует сходимость интеграла в (44′) и его равномерная ограниченность по x.

Предложение 1′. *Пусть* $f\in C_{\langle\nu\rangle}^{(k)}$, $g\in H_{\langle\mu\rangle}^{(m)}$ *и* $\nu>|\mu|$. *Тогда определена свертка* $f*g\in H_{\langle\mu\rangle}^{(m+k)}$ *и*

$$\|f*g\|_{\langle\mu\rangle}^{(k+m)}\leqslant c'(k,m,n,\mu,\nu)\,|f|_{\langle\nu\rangle}^{(k)}\,\|g\|_{\langle\mu\rangle}^{(m)}. \qquad (45)$$

Доказательство. Опять ограничимся случаем $k=m=0$. Если положить $g_0(x)=\exp(\mu|x|)g(x)$, то при $k=m=0$ (45) сведется к неравенству

$$\left\|\int\exp(\mu|x|-\mu|y|)f(x-y)\,g_0(y)\,dy\right\|\leqslant \text{const}\cdot|f|_{\langle\nu\rangle}\|g_0\|. \qquad (45')$$

Выберем $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы $\nu-\varepsilon>|\mu|$. Тогда (ср. доказательство предложения 1)

$$\exp(\mu|x|-\mu|y|)\,|f(x-y)|<|f|_{\langle\nu\rangle}\exp(\mu|x|-\mu|y|-$$

$$-(\nu-\varepsilon)|x-y|)\exp(-\varepsilon|x-y|)\leqslant \text{const}\cdot|f|_{\langle\nu\rangle}\exp(-\varepsilon|x-y|).$$

Согласно неравенству Юнга (ср. предложение 1′, п. I.3.1) левая часть (45′) не превосходит

$$\text{const}\cdot|f|_{\langle\nu\rangle}\|\exp(-\varepsilon|x|)\|_{L_1}\|g_0\|_{L_2}=\text{const}\cdot|f|_{\langle\nu\rangle}\|g\|_{\langle\mu\rangle}.$$

Следствие. *Справедливы включения*

$$\mathfrak{S}*\Phi\subset\Phi,\quad \Phi=\mathfrak{S},\mathfrak{D},C_{\langle\mu\rangle}^{(\infty)},H_{\langle\mu\rangle}^{(\infty)}. \qquad (46)$$

Повторением рассуждений доказательства предложения 2 из п. I.3.1 доказывается ассоциативность свертки.

Предложение 2. *Пусть* $f_i\in C_{\langle\nu_i\rangle}$, $i=1,2,3$, *причем* $\nu_1>\nu_2>|\nu_3|$. *Тогда*

$$f_1*(f_2*f_3)=(f_1*f_2)*f_3.$$

С помощью п. д. о. $\delta_s(D)$ определяется свертка распределений $g\in\mathfrak{D}'$ и $f\in\mathfrak{S}'$. В самом деле (лемма 1.6), можно указать такие k и μ, что $f=\delta_{k,N}(D)f_0$, $f_0\in C_{\langle\mu\rangle}$. Но тогда по $\nu>|\mu|$ мы подберем такое m, чтобы $g=\delta_{m,N}(D)g_0$, $g_0\in C_{\langle\nu\rangle}$. Тогда определено распределение

$$f*g=\delta_{k+m}(D)\,(f_0*g_0). \tag{47}$$

Как и в предложении 1 из п. I.3.2, проверяется, что (47) зависит от f, g, но не зависит от чисел k, m (т. е. от способа представления f, g) и совпадает с классической сверткой, скажем, при $f\in C_{\langle\nu\rangle}$, $g\in C_{\langle\mu\rangle}$, $\nu>|\mu|$. Таким образом, имеет место

Предложение 3. *Операция свертки, первоначально определенная на плотном подмножестве $\mathfrak{S}\times\mathfrak{D}\subset\mathfrak{D}'\times\mathfrak{S}'$, по непрерывности продолжается до отображения $\mathfrak{D}'\times\mathfrak{S}'$ в $\mathfrak{S}'$. Получившаяся операция коммутирует с дифференцированием.*

Из проведенных выше рассуждений вытекает

Предложение 4. *Имеют место включения*

$$\mathfrak{D}'*\Phi\subset\Phi,\quad \Phi=\mathfrak{D}',\mathfrak{D},\mathfrak{S},\mathfrak{S}',C^{(\infty)}_{\langle\mu\rangle},\ H^{(\pm\infty)}_{\langle\mu\rangle}.$$

Отметим также, что построенная операция свертки обладает свойствами ассоциативности и коммутативности:

$$(f*g)*\varphi=g*(f*\varphi)=f*(g*\varphi), \tag{48}$$

где либо $f\in\mathfrak{S}'$, $g\in\mathfrak{D}'$, $\varphi\in\mathfrak{D}'$, либо $f\in\mathfrak{D}'$, $g\in\mathfrak{D}'$, $\varphi\in\mathfrak{S}'$.

На операторы свертки с распределениями из $\mathfrak{D}'$ переносятся все результаты п. I.3.3. Мы ограничимся только формулировками.

Предложение 5. (i) *Оператор*

$$\mathrm{con}_f\colon\ \Phi\to\Phi\quad(\varphi\mapsto f*\varphi),\quad f\in\mathfrak{D}', \tag{49}$$

является непрерывным при $\Phi=\mathfrak{S},\mathfrak{S}',H^{(\pm\infty)}_{\langle\mu\rangle},C^{(\infty)}_{\langle\mu\rangle}$ *и регулярным*[1]) *при* $\Phi=\mathfrak{D},\ \mathfrak{D}'$.

(ii) *Операторы*

$$\mathrm{con}_f\colon\ \mathfrak{S}'\to\mathfrak{D}\quad(f\in\mathfrak{S}),\qquad \mathrm{con}_f\colon\ \mathfrak{D}'\to\mathfrak{D}\quad(f\in\mathfrak{D})$$

переводят ограниченные множества в $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}'$ в регулярно ограниченные множества в $\mathfrak{D}$.

Предложение 6. (i) *$\mathfrak{D}'$ является коммутативной алгеброй относительно свертки.*

(ii) *$\mathfrak{S}$ — идеал алгебры $\mathfrak{D}'$.*

(iii) *Отображение $f\mapsto\mathrm{con}_f, f\in\mathfrak{D}'$, является отображением алгебры $\mathfrak{D}'$ в алгебру $\mathscr{L}(\Phi,\Phi)$ для $\Phi=\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ и в алгебру регулярных отображений Φ в Φ для $\Phi=\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$.*

(iv) *Равенство $\mathscr{F}\mathfrak{D}'=\mathfrak{M}$ является изоморфизмом алгебр, а оператор $\mathrm{con}_f\colon\ \Phi\to\Phi$, $f\in\mathfrak{D}'$, $\Phi=\mathfrak{S}$ является п. д. о. с символом $(2\pi)^{-n/2}\widehat{f}(\zeta)$.*

1.8. Операторы свертки в пространствах $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$. В этом пункте мы перенесем теорию свертывателей, развитую в § I.4,

---

[1]) См. замечание из п. 1.6.

на рассматриваемые нами пространства. Поскольку эти пространства инвариантны относительно сдвигов, то все доказательства практически не отличаются от доказательств из гл. I, мы ограничимся только формулировками.

Непрерывный (регулярный) оператор A: $\Phi \to \Phi$, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ (соответственно $\Phi = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$), перестановочный со сдвигами, называется *оператором свертки.*

Теорема. *Пусть $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$. Для каждого оператора свертки A: $\Phi \to \Phi$ найдется такое распределение $f \in \mathfrak{D}'$, что*

$$A\varphi = \mathrm{con}_f\,\varphi = f * \varphi \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{50}$$

Доказательство теоремы проводится по схеме теоремы I.4.1.

1) Сначала доказывается (ср. предложение 1 из п. I.4.1), что для каждого оператора свертки A: $\Phi \to \Phi$, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ найдется такое распределение $f \in \Phi'$, что A представляется в форме (I.3.33).

2) Далее по схеме предложения 2 из п. I.4.1 доказывается, что каждый оператор свертки A_0: $\Phi \to \Phi$, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, по непрерывности продолжается до оператора свертки A: $\Psi \to \Psi$, $\Psi = \mathfrak{D}'$, $\mathfrak{S}'$. Обратно, сужение каждого такого оператора A на Φ является оператором свертки на Φ.

3) Ввиду 1) мы определим для $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{C}(\Phi) = \{f \in \Phi, f * \varphi \in \Phi\ \forall \varphi \in \Phi\}, \tag{51}$$

и ввиду 2) естественно положить

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{D}') = \mathfrak{C}(\mathfrak{S}), \quad \mathfrak{C}(\mathfrak{S}') = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}).$$

Тогда утверждение теоремы можно сформулировать в виде

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{S}') = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}') = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}'. \tag{52}$$

4) Согласно предложению 4 из п. 1.7 правое пространство (52) содержится в левых. Согласно определению (51) $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}'$, а так как $\delta(x) \in \mathfrak{D}'$, то $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}') \subset \mathfrak{D}'$, что и доказывает (52).

1.9. Сверточные уравнения в пространствах функций и распределений экспоненциального убывания и роста. Дословным повторением рассуждений теоремы I.4.2 доказывается

Теорема. *Пусть $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ и $A \in \mathfrak{C}(\Phi) = \mathfrak{D}'$. Следующие условия эквивалентны:*

(I) *Для любого $f \in \Phi$ сверточное уравнение*

$$A * u = f \tag{53}$$

имеет единственное решение $u \in \Phi$.

(II) *A — обратимый элемент алгебры $\mathfrak{D}'$, т. е. найдется такой элемент $G \in \mathfrak{D}'$, что $A * G = G * A = \delta(x)$.*

Условие (II) эквивалентно условию

$(\widehat{\text{II}})$ $$\widehat{A}^{-1}(\zeta) \in \mathfrak{M}.$$

Как было показано в предложении 1.2 (iii), это условие эквивалентно тому, что $\forall \nu \quad \exists s_\nu, k_\nu$, так что в замыкании трубчатой области $\overline{T_\nu}$ выполнена оценка (18). Согласно следствию 1.2 не существует дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, удовлетворяющих условиям теоремы.

Заменяя в условиях (I_a), (I_b), (I_c), (I_d), (I_{ad}), (I_{bc}) из п. I.4.4 пространства $C_{(l)}^{(s)}, H_{(l)}^{(s)}$ на $C_{\langle\nu\rangle}^{(s)}, H_{\langle\nu\rangle}^{(s)}$, мы получим целый ряд условий, эквивалентных условиям теоремы. В частности, им эквивалентно условие (ср. (I_e) из п. I.4.4)

(I_e) $\forall \nu \in \mathbb{R} \quad \exists \sigma(\nu)$, так что уравнение (53) $\forall f \in H_{\langle\nu\rangle}^{(s+\sigma(\nu))}$ (или из $C_{\langle\nu\rangle}^{(s+\sigma(\nu))}$) имеет единственное решение $u \in H_{\langle\nu\rangle}^{(s)}$ (соответственно $u \in C_{\langle\nu\rangle}^{(s)}$).

Введем шкалу $\mathbb{H}_{\langle\nu\rangle} = \{H_{\langle\nu\rangle}^{(s)}, i_s^{s'}\}$, $i_s^{s'}\colon H_{\langle\nu\rangle}^{(s)} \to H_{\langle\nu\rangle}^{(s')}, s > s'$. Условия теоремы эквивалентны тому, что оператор

$$\mathrm{con}_A\colon \mathbb{H}_{\langle\nu\rangle} \to \mathbb{H}_{\langle\nu\rangle}$$

для любого $\nu \in \mathbb{R}$ имеет обратный конечного порядка.

В заключение отметим, что все замечания общего характера из п. 4.6 в полной мере применимы к изложенным выше шкалам пространств функций (распределений) экспоненциального убывания (роста).

1.10. Теорема о ядре для пространства $\mathfrak{S}$. Для наших дальнейших целей полезно расширить класс рассматриваемых пространств, включив аналоги пространств $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ из § I.6.

Разбивая переменные x на две группы: $x = (x', x'')$, мы по аналогии с § I.6 определим пространства $C_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}^{(m_1,m_2)}$ и $H_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}^{(m_1,m_2)}$, шкалы этих пространств эквивалентны, а проективные пределы этих шкал совпадают с $\mathfrak{S}$. Далее в определении (10) пространство $C_{\langle\nu\rangle}^{(m)}$ можно заменить на $\Phi_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}^{(m_1,m_2)}$, где $\Phi = C, H$. По аналогии с пространством $\mathcal{K}$ (см. (I.6.2)) положим

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{\nu_2} \bigcap_{m_1,m_2,\nu_1} C_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}^{(m_1,m_2)} = \bigcup_{\nu_2} \bigcap_{m_1,m_2,\nu_1} H_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}^{(m_1,m_2)}. \tag{54}$$

С помощью п. д. о.

$$\delta_{s_1,s_2}(D) = \left(mN_1^2 + \sum_{j=1}^{m} D_j^2\right)^{s_1/2} \left((n-m)N_2^2 + \sum_{j=m+1}^{n} D_j^2\right)^{s_2/2},$$

$N_i > |\nu_i|$, $i = 1, 2$, строятся пространства

$$H_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}^{(s_1,s_2)} = \delta_{-s_1,-s_2} H_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}. \tag{55}$$

Для этих пространств имеет место двойственность

$$\left(H_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}^{(s_1,s_2)}\right)' = H_{\langle-\nu_1,-\nu_2\rangle}^{(-s_1,-s_2)}. \tag{56}$$

Ввиду (56) в определениях $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}'$ и т. д. (см. (34), (41)) можно пользоваться пространствами (55). Сопряженным к (54) будет пространство

$$\mathfrak{K}' = \bigcap_{\nu_2} H^{(-\infty,-\infty)}_{(-\infty,\nu_2)} = \bigcap_{\nu_2} \bigcup_{s_1,s_2,\nu_1} H^{(s_1,s_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}. \tag{57}$$

Рассуждения п. I.6.4 дословно переносятся на пространства $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ и т. д. Имеет место

Теорема о ядре. *Для всякого непрерывного оператора*

$$A\colon\ \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m_{x'}) \to \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}) \tag{58}$$

найдется такое распределение $a \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, *что оператор* (58) *представляется в виде*

$$(A\varphi, \psi) = (a, \varphi\psi) \quad \forall\varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m_{x'}), \quad \psi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^{n-m}_{x''}). \tag{59}$$

Если либо образ A *лежит в* $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{n-m}_{x''})$, *либо область определения* A *можно расширить до* $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^m_{x'})$, *то* $a \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$.

1.11. Сверточные уравнения в пространствах функций (распределений) фиксированного экспоненциального роста (убывания). Теория операторов свертки в пространствах $\Phi_{\langle\nu\rangle}$, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ строится таким же образом, как в предельных случаях $\nu = \pm\infty$, построение этой теории мы оставляем читателю в качестве упражнения. Мы же отметим только окончательные формулы. Считая $\nu > 0$, имеем

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_{\langle\nu\rangle}) = \mathfrak{C}((\mathfrak{D}')_{\langle\nu\rangle}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}_{\langle-\nu\rangle}) = \mathfrak{C}((\mathfrak{S}')_{\langle\nu\rangle}) = (\mathfrak{D}')_{\langle\nu\rangle};$$

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_{\langle-\nu\rangle}) = \mathfrak{C}((\mathfrak{D}')_{\langle-\nu\rangle}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}_{\langle\nu\rangle}) = \mathfrak{C}((\mathfrak{S}')_{\langle\nu\rangle}) = (\mathfrak{S}')_{\langle\nu\rangle}.$$

Если $A \in \mathfrak{C}(\Phi_{\langle\pm\nu\rangle})$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, то сверточное уравнение однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда A является обратимым элементом алгебры $\mathfrak{S}(\Phi_{\langle\pm\nu\rangle})$. Это условие, в свою очередь, эквивалентно обратимости символа в кольце $\mathfrak{M}^{\langle\nu\rangle}$ или соответственно $\mathfrak{L}^{\langle\nu\rangle}$ (см. п. 1.6′).

§ 2. Однородная задача Коши в пространствах функций и распределений в $\mathbb{R}^n_+$ экспоненциального убывания и роста

В настоящем параграфе мы, следуя схеме § II.1, II.2, рассмотрим шкалы подпространств Φ_+, отвечающих пространствам Φ, изученным в § 1, и опишем пространства свертывателей $\mathfrak{C}(\Phi_+)$ для $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}'$ [1]). Уже в § II.4 мы столкнулись с тем, что совокупность свертывателей $\mathfrak{C}(\Phi_+)$ для пространств функций степенного роста (т. е. $\Phi = \mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$) шире совокупности

[1]) Параллельно с теорией шкал подпространств Φ_+ можно построить теорию шкал фактор-пространств $\Phi_\oplus$ и списать пространства свертывателей $\mathfrak{C}(\Phi_\oplus)$. На естественных модификациях теорем § II.2, II.4 (применительно к ситуации этой главы) мы останавливаться не будем.

свертывателей на пространствах функций степенного убывания (т. е. $\Phi=\mathscr{S}$, $\mathscr{O}'$): в первом случае это пространство $(\mathscr{O}')_+$, во втором — $(\mathscr{K}')_+$. Это различие приводило к непринципиальному различию в условиях разрешимости дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в этих пространствах. В случае пространств функций экспоненциального роста пространство свертывателей на $\mathfrak{D}_+$ или $(\mathfrak{S}')_+$ также шире пространства свертывателей на экспоненциально убывающих функциях (т. е. на $\mathfrak{S}_+$ или $(\mathfrak{D}')_+$): в первом случае это $(\mathfrak{D}')_+$, во втором — $(\mathfrak{K}')_+$. В случае дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами различия в запасе свертывателей приводят к принципиальным различиям в условиях разрешимости этих операторов в соответствующих пространствах: в первом случае (как и в § 1) вообще не существует дифференциальных операторов, обладающих свойством однозначной разрешимости. Во втором случае мы приходим к новому классу дифференциальных операторов, которые мы называем экспоненциально корректными. Более детально этот класс операторов изучается в § 4.

2.1. $\mathfrak{S}_+$ и связанные с ним шкалы. Согласно общему определению из гл. II, подпространства $C^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}, H^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}$ состоят из таких элементов $f\in C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}, H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$, которые равны 0 при $t<0$. Вложения (23) индуцируют вложения соответствующих подпространств, откуда следует эквивалентность шкал $\{C^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}\}$ и $\{H^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_+ &= \bigcap C^{(m)}_{\langle\nu\rangle+} = \bigcap H^{(m)}_{\langle\nu\rangle+},\\ \mathfrak{D}_+ &= \bigcup_\nu \bigcap_m C^{(m)}_{\langle\nu\rangle+} = \bigcup_\nu \bigcap_m H^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}.\end{aligned} \tag{1}$$

Из предложения 1.1 автоматически следует, что

$$\Phi^{(m)}_{\langle\nu\rangle+} = \bigcap_{\varkappa=1}^{2^n} \Phi^{(m)}_{[\nu I(\varkappa)]+}, \quad \nu\geqslant 0, \quad \Phi=C,H; \tag{2}$$

$$\Phi^{(m)}_{\langle\nu\rangle+} = \sum_{\varkappa=2}^{2^n} \Phi^{(m)}_{[\nu I(\varkappa)]+}, \quad \nu<0, \quad \Phi=C,H. \tag{2'}$$

С учетом леммы 1 из п. II.1.1 равенство (2) приводит к следующему утверждению.

Предложение. *Пусть* $\nu>0$, $\Phi=C$, H *и*

$$I^+_\nu = \{\Gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n,\ \gamma_1<\nu,\quad |\gamma_j|<\nu,\quad j=2,\ldots,n\}.$$

Тогда пространство $\Phi^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}$ *состоит из тех и только тех элементов пересечения* $\bigcap\Phi_{[\Gamma]}$, $\Gamma\in I^+_\nu$, *для которых конечна норма*

$$|f|^{(m)}_{\langle\nu\rangle+} = \sup_{\Gamma\in I^+_\nu} |f|^{(m)}_{[\Gamma]}, \quad \|f\|^{(m)}_{\langle\nu\rangle+} = \sup_{\Gamma\in I^+_\nu} \|f\|^{(m)}_{[\Gamma]}. \tag{3}$$

2.2. Преобразование Фурье в $\mathfrak{S}_+$. В этом пункте всюду $\nu > 0$. Обозначим через T_ν^+ трубчатую область

$$T_\nu^+ = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im} \zeta \in I_\nu^+\}, \tag{4}$$

а через $C_{(s)}^{(\nu)+}, H_{(s)}^{(\nu)+}$ пространства функций, голоморфных в T_ν^+ и имеющих (соответственно) конечную норму

$$|\psi|_{(s)}^{(\nu)+} = \sup_{\zeta \in T_\nu^+} (1 + |\zeta|)^s |\psi(\zeta)|, \tag{5}$$

$$\|\psi\|_{(s)}^{(\nu)+} = \sup_{\Gamma \in I_\nu^+} \|\psi\|_{(s)}^{[\Gamma]}. \tag{6}$$

Если $\varphi \in C_{(\nu)+}^{(m)}, \nu > 0$, то для любого $\zeta \in T_\nu^+$ определен абсолютно сходящийся интеграл Фурье — Лапласа (1.13) и выполнено «неравенство Парсеваля»

$$|\widehat{\varphi}|_{(m)}^{(\nu-\varepsilon)+} \leqslant K_{mn} \varepsilon^{-n} |\varphi|_{(\nu)+}^{(m)}. \tag{7}$$

С другой стороны, если $\widehat{\varphi}(\zeta) \in C_{(m)}^{(\nu)+}, m > n$, то для этой функции определено классическое обратное преобразование Фурье — Лапласа (1.13′), причем правая часть этой формулы не зависит от выбора вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in I_\nu^+$. Выполнено неравенство Парсеваля

$$|\varphi|_{(\nu)+}^{(m-m')} \leqslant K_{mnm'} |\widehat{\varphi}|_{(m)}^{(\nu)+}. \tag{7′}$$

Из сказанного вытекает

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа осуществляет изоморфизм*

$$\mathcal{F}\mathfrak{S}_+ = \bigcap_{\nu, m} C_{(m)}^{(\nu)+} \stackrel{\text{def}}{=} C_{(\infty)}^{(\infty)+}. \tag{8}$$

Правое пространство (8) *состоит из целых функций* $\psi(\zeta)$, *обладающих следующим свойством:* $\forall N, \nu > 0, \exists K_{\nu N}$, *так что*

$$|\psi(\zeta)| < K_{\nu N}(1 + |\zeta|)^{-N} \quad \forall \zeta \in T_\nu^+. \tag{9}$$

Теперь введем аналог пространства $\mathcal{M}^+$, полагая

$$\mathfrak{M}^+ = \bigcap_\nu \bigcup_s C_{(s)}^{(\nu)+} = \bigcap_\nu C_{(-\infty)}^{(\nu)+}. \tag{10}$$

Элементами $\mathfrak{M}^+$ будут такие целые функции $\psi(\zeta)$, что $\forall \nu > 0$ $\exists s_\nu, K_\nu > 0$, для которых

$$|\psi(\zeta)| \leqslant K_\nu (1 + |\zeta|)^{s_\nu}, \quad \zeta \in \overline{T_\nu^+}. \tag{11}$$

Аналогично предложению 1.2 доказывается

Предложение. (i) $\mathfrak{M}^+$ — *коммутативное кольцо относительно умножения,*

(ii) $\mathcal{F}\mathfrak{S}_+$ — *идеал кольца* $\mathfrak{M}^+$,

(iii) *целая функция* $\psi(\zeta)\in\mathfrak{M}^+$ *является обратимым элементом тогда и только тогда, когда* $\forall\nu\ \ \exists s_\nu, K_\nu>0$, *так что выполнена оценка снизу*

$$|\psi(\zeta)|>K_\nu(1+|\zeta|)^{s_\nu},\quad \zeta\in\overline{T_\nu}. \tag{12}$$

Следствие. *Если полином* $P(\zeta)$ *является обратимым элементом* $\mathfrak{M}^+$, *то* $P(\zeta)\equiv\mathrm{const}$,

С помощью модификации рассуждений обычной теоремы Пэли — Винера (см. п. II.1.3) доказывается изоморфизм

$$\mathcal{F}H_{\langle\nu\rangle+}=H^{\langle\nu\rangle+}, \tag{13}$$

причем при этом изоморфизме норма (3) переходит в норму (6). Непосредственным следствием (13) является изоморфизм

$$\mathcal{F}H^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}=H^{\langle\nu\rangle+}_{(m)}. \tag{13'}$$

Для натуральных $m,\ m',\ m''$ $(m',\ m''>n/2)$ имеет место вложение (ср. предложение 1.6)

$$C^{\langle\nu\rangle+}_{(m+)m'}\subset H^{\langle\nu\rangle+}_{(m)}\subset C^{\langle\nu-\varepsilon\rangle+}_{(m-m'')}\quad \forall\varepsilon>0,\quad m\geqslant m''. \tag{14}$$

В самом деле, правое вложение очевидно (при любом m). Согласно (13') имеем

$$H^{\langle\nu\rangle+}_{(m)}=\mathcal{F}\left(H^{(m)}_{\langle\nu\rangle+}\right)\subset\mathcal{F}\left(C^{(m-m'')}_{\langle\nu\rangle+}\right)\subset C^{\langle\nu-\varepsilon\rangle+}_{(m-m'')}.$$

Из (14) следует, что

$$C^{\langle\nu\rangle+}_{(\infty)}\subset H^{\langle\nu\rangle+}_{(\infty)}\subset C^{\langle\nu-\varepsilon\rangle+}_{(\infty)},$$

откуда

$$\mathcal{F}\mathfrak{S}_+=H^{(\infty)+}_{(\infty)}\overset{\text{def}}{=}\bigcap_{m,\nu}H^{\langle\nu\rangle+}_{(m)}.$$

2.3. П. д. о. в $H^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle+}$ и связанные с ними шкалы. Пусть $\nu>0$ и $a(\zeta)\in C^{\langle\nu\rangle+}_{(-\infty)}$. Символу $a(\zeta)$ отвечает п. д. о. $a(D)$, переводящий в себя пространства $\Phi=H^{(\pm\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}$. В силу голоморфности $a(\zeta)$ при $\operatorname{Im}\zeta_1\leqslant\nu$ этот оператор переводит распределения, сосредоточенные при $t\geqslant0$, в распределения такого же типа. Иными словами, операторы $a(D)$, $a(\zeta)\in C^{\langle|\nu|\rangle+}_{(-\infty)}$ переводят в себя пространства $H^{(\pm\infty)}_{\langle\nu\rangle+}$.

Построим теперь гильбертову шкалу в $H^{(-\infty)}_{\langle\nu\rangle+}$. Операторы $\delta_{s,N}(D)$, использовавшиеся в § 1 для построения шкал $H^{(s)}_{\langle\nu\rangle}$, не годятся для наших целей, поскольку они не сохраняют $H^{(-\infty)}_{\langle\nu\rangle+}$, и нам придется работать с другими операторами.

Прежде всего заметим, что и в § 1 при построении шкал мы могли брать п. д. о., символы которых являлись степенями символа $a(\zeta)\in C^{\langle\nu\rangle}_{(-\infty)}$, удовлетворявшего условию типа

$$|a(\zeta)|>\mathrm{const}\cdot(1+|\zeta|)^{\varepsilon},\quad \varepsilon>0,\quad \zeta\in\overline{T_{|\nu|}}. \tag{15}$$

Это неравенство гарантирует, что проективный и индуктивный пределы шкалы $\{a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle}\}$, $s\in\mathbb{R}$, совпадают соответственно с $H_{\langle\nu\rangle}^{(\pm\infty)}$.

Если же взять символ $a(\zeta)\in C_{(-\infty)}^{(|\nu|)+}$, который удовлетворяет (15) в своей трубчатой области $T_{|\nu|}^{+}$:

$$|a(\zeta)|>\mathrm{const}\cdot(1+|\zeta|)^{\varepsilon},\quad \zeta\in\overline{T_{|\nu|}^{+}},\quad \varepsilon>0, \tag{15_+}$$

то проективный и индуктивный пределы шкалы $\{a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle+}\}$ будут соответственно совпадать с $H_{\langle\nu\rangle+}^{(\pm\infty)}$. Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{S}_{+}=\bigcap_{\nu,s}a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle+},\quad \mathfrak{D}_{+}=\bigcup_{\nu}\bigcap_{s}a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle+}, \tag{16}$$

$$(\mathfrak{S}')_{+}=\bigcup_{\nu}H_{\langle\nu\rangle+}^{(-\infty)}=\bigcup_{\nu,s}a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle+}, \tag{16$'$}$$

$$(\mathfrak{D}')_{+}=\bigcap_{\nu}H_{\langle\nu\rangle+}^{(-\infty)}=\bigcap_{\nu}\bigcup_{s}a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle+}. \tag{16$''$}$$

Отметим простейшие примеры символов, для которых выполнены требуемые условия:

символ *оператора теплопроводности*

$$a(\zeta)=\zeta_1-i\left(\zeta_2^2+\dots+\zeta_n^2\right)-ih^2,\quad h>\sqrt{n}\,|\nu|; \tag{17}$$

произведение *одномерных* символов

$$a(\zeta)=(\zeta_1-ih)^{a_1}\dots(\zeta_n-ih)^{a_n},\quad h>|\nu|; \tag{18}$$

символы

$$\delta_{s_1,s_2}^{+}(\zeta)=(\zeta_1-ih_1)^{s_1}\left((n-1)h_2^2+\sum_{j=2}^{n}\zeta_j^2\right)^{s_2},\qquad h_1,\ h_2>|\nu|. \tag{19}$$

Пространства, отвечающие символам (19), будем обозначать через $H_{\langle\nu\rangle}^{(s_1,s_2)}$.

Приведенные примеры показывают, что при конструировании шкал над $H_{\langle\nu\rangle+}^{(\infty)}$ можно брать полиномиальные символы $a(\zeta)$. Из (16$'$), (16$''$) тогда следует

Лемма. (i) *Распределение $f\in(\mathfrak{S}')_{+}$ тогда и только тогда, когда существует $\nu\in\mathbb{R}$ и такой полином $P(\zeta)$, что $f=P(D)g$, $g\in C_{\langle\nu\rangle+}$.*

(ii) *Распределение f принадлежит $(\mathfrak{D}')_{+}$ тогда и только тогда, когда $\forall\nu$ найдется такой полином $P_\nu(\zeta)$, что $f=P_\nu(D)g_\nu$, $g_\nu\in C_{\langle\nu\rangle+}$.*

Если $P(\zeta)$ — полином, то в силу теоремы Пэли — Винера

$$\mathcal{F}P(D)H_{\langle\nu\rangle+}=P(\zeta)H^{\langle\nu\rangle+}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что если $f\in(\mathfrak{D}')_{+}$, то $\forall\nu>0$ $\widehat{f}=P_\nu(\zeta)\varphi_\nu\in C^{\langle\nu\rangle+}$, т. е. $\widehat{f}\in\mathfrak{M}^{+}$. Итак, доказана

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа осуществляет изоморфизм*

$$\mathcal{F}(\mathfrak{D}')_+ = \mathfrak{M}^+. \tag{20}$$

2.4. Преобразование Фурье — Лапласа в $(\mathfrak{K}')_+$. Экспоненциально корректные полиномы. Полагая $x' = t \in \mathbb{R}^1$ и $x'' = y \in \mathbb{R}^{n-1}$, мы с помощью (1.56), (1.56′) определим пространства $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}'$. Шкалу $H^{(s_1,s_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}$ можно определять с помощью п. д. о. с символами (19), где $h_1 > |\nu_1|$, $h_2 > |\nu_2|$. Эти же операторы задают градуировку по гладкости в шкале подпространств, т. е.

$$\left(H^{(s_1,s_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}\right)_+ = \delta^{+}_{-s_1,-s_2}(D)\, H_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}. \tag{21}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает

Лемма. *Включение $f \in (\mathfrak{K}')_+$ имеет место тогда и только тогда, когда $\forall \nu_2 > 0$ можно указать $\nu_1 \in \mathbb{R}$ и такой полином $P(\zeta)$, что $f = P(D)g$, $g \in C_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}$.*

Чтобы изучить преобразование Фурье в $(\mathfrak{K}')_+$, нам предварительно надо описать фурье-образы функций из пространств $C_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}$, где $\nu_2 > 0$, а ν_1 может принимать любое вещественное значение.

Обозначим через $C^{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}_{(s_1,s_2)}$, $\nu_2 > 0$, пространство функций $\psi(\zeta)$, голоморфных в трубчатой области

$$T^{+}_{\nu_1,\nu_2} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n,\ \operatorname{Im}\zeta_1 < \nu_1,\ |\operatorname{Im}\zeta_j| < \nu_2,\ j = 2, \ldots, n\} \tag{22}$$

и имеющих конечную норму

$$|\psi|^{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}_{(s_1,s_2)} = \sup_{\zeta \in T^{+}_{\nu_1,\nu_2}} \left|\delta^{+}_{s_1,s_2}\psi(\zeta)\right|.$$

Повторяя рассуждения п. 1.2, мы покажем, что преобразование Фурье — Лапласа (классическое) определено на $C^{(m_1,m_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}$, $\nu_2 > 0$, и

$$\mathcal{F} C^{(m_1,m_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle} \subset C^{\langle\nu_1-\varepsilon_1,\nu_2-\varepsilon_2\rangle+}_{(m_1,m_2)} \quad \forall \varepsilon_1,\quad \varepsilon_2 > 0,\quad \nu_2 > 0. \tag{23}$$

Аналогично, если $m_1' > 1$ и $m_2' > n-1$, то на функциях из $C^{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}_{(m_1+m_1',\,m_2+m_2')}$ корректно определено классическое обратное преобразование Фурье — Лапласа и

$$\mathcal{F}^{-1} C^{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}_{(m_1+m_1',\,m_2+m_2')} \subset C^{(m_1,m_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}, \qquad m_1' > 1,\quad m_2' > n-1.$$

Положим

$$\mathfrak{C}^+ = \bigcap_{\nu_2} \bigcup_{\nu_1,s_1,s_2} C^{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}_{(s_1,s_2)}. \tag{24}$$

Согласно лемме и (23), если $f \in (\mathfrak{K}')_+$, то $\forall \nu_2 > 0$ найдется ν_1 и такой полином $P(\zeta)$, что $\widehat{f}(\zeta) = P(\zeta)\psi(\zeta)$, где $\psi(\zeta) \in C^{\langle \nu_1, \nu_2 \rangle +}$. Таким образом, доказана

Теорема. *Преобразование Фурье — Лапласа устанавливает изоморфизм*

$$\mathscr{F}(\mathfrak{K}')_+ = \mathfrak{C}^+. \tag{25}$$

Остановимся теперь на свойствах пространства (24). Согласно определению включение $\psi(\zeta) \in \mathfrak{C}^+$ означает, что $\forall \nu > 0$ $\exists \rho$, s_1, s_2, $K > 0$, так что функция $\psi(\zeta)$ голоморфна в $T^+_{\rho,\nu}$ и справедлива оценка

$$|\psi(\zeta)| < K(1 + |\zeta_1|)^{s_1}(1 + |\zeta_2| + \cdots + |\zeta_n|)^{s_2}, \quad \zeta \in \overline{T^+_{\rho,\nu}}. \tag{26}$$

Предложение 1. (i) $\mathfrak{C}^+$ *является кольцом относительно умножения*

(ii) *функция* $\psi \in \mathfrak{C}^+$ *является обратимым элеметном этого кольца тогда и только тогда, когда* $\forall \nu > 0$ $\exists \rho$, s_1, s_2, K, *так что справедлива оценка снизу*

$$|\psi(\zeta)| > K(1 + |\zeta_1|)^{s_1}(1 + |\zeta_2| + \cdots + |\zeta_n|)^{s_2}, \quad \zeta \in \overline{T^+_{\rho,\nu}}. \tag{27}$$

Из (27) следует, что если ψ, $\psi^{-1} \in \mathfrak{C}^+$, то $\forall \nu > 0$ $\exists \rho = \rho(\nu)$, так что

$$\psi(\zeta) \neq 0, \quad \zeta \in \overline{T^+_{\rho,\nu}}. \tag{27'}$$

В том случае, когда $\psi(\zeta)$ — полином, из (27') в силу теоремы Тарского — Зайденберга следует неравенство типа (27). Таким образом, доказано

Предложение 2. *Полином* $P(\zeta)$ *является обратимым элементом* $\mathfrak{C}^+$ *тогда и только тогда, когда выполнено*

Условие экспоненциальной корректности:

$$\forall \nu > 0 \ \exists \rho = \rho(\nu), \text{ так что } P(\zeta) \neq 0, \ \operatorname{Im} \zeta_1 \leqslant \rho(\nu),$$
$$|\operatorname{Im} \zeta_j| \leqslant \nu, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{28}$$

Другие эквивалентные определения экспоненциальной корректности мы приведем в § 4.

2.5. Свертка распределений, сосредоточенных в $\mathbb{R}^n_+$ и имеющих рост не выше экспоненциального. Как уже было замечено в пп. II.4.1 и II.4.3, если для пространств Φ_i, $i = 1, 2, 3$, определена классическая операция свертки и $\Phi_1 * \Phi_2 \subset \Phi_3$, то тогда $\Phi_{1+} * \Phi_{2+} \subset \Phi_{3+}$. Воспользовавшись предложениями 1.1' из п. 1.7, мы получим включения

$$C^{(k)}_{(\nu)+} * \Phi^{(m)}_{(\mu)+} \subset \Phi^{(m+k)}_{(\mu)+}, \quad \nu > |\mu|, \quad \Phi = C, H,$$

откуда $\mathfrak{S}_+ * \Phi_+ \subset \Phi_+$, $\Phi = \mathfrak{S}, \mathfrak{D}, C^{(\infty)}_{(\mu)}, H^{(\infty)}_{(\mu)}$.

С помощью п. д. о. с символами из $C^{(\nu)+}_{(-\infty)}$, $\nu \in \mathbb{R}$, (скажем, с символами (17)—(19)) мы определим свертку на $(\mathfrak{D}')_+ \times \times (\mathfrak{S}')_+$; при этом

$$(\mathfrak{D}')_+ * \Phi_+ \subset \Phi_+, \quad \Phi = \mathfrak{S}, \mathfrak{D}, \mathfrak{S}', \mathfrak{D}'. \tag{29}$$

В частности, согласно (29) $(\mathfrak{D}')_+$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{D}'$. Как нетрудно показать, изоморфизм (20) является изоморфизмом алгебр. Но тогда согласно следствию 2.2 не существуют такие дифференциальные операторы $P(D)$ (отличные от умножения на константу), что распределения $P(D)\delta(x)$ являются обратимыми элементами $(\mathfrak{D}')_+$.

Ниже мы опишем свертыватели на Φ_+ для $\Phi = \mathfrak{S}, \mathfrak{D}, \mathfrak{S}', \mathfrak{D}'$. Для этого нам придется рассмотреть свертку с распределениями из $(\mathfrak{K}')_\pm$. Ввиду леммы 2.4 мы сначала рассмотрим свертку в пространствах $C_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+}$.

Лемма. *Если* $\nu_2 > |\lambda_2|$, *то найдется такое* λ, *что*

$$C_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle+} * C_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle+} \subset C_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle+}. \tag{30}$$

Проверка (30) сводится к независимым оценкам интеграла по $\mathbb{R}^{n-1}$ и интеграла по конечному отрезку. Оценка интеграла по $\mathbb{R}^{n-1}$ дословно повторяет оценку из предложения 1 из п. 1.7, оценка одномерного интеграла очевидна. Детали доказательства мы оставляем читателю.

Сочетая (30) с леммой 2.4, мы докажем включения

$$(\mathfrak{K}')_+ * \Phi_+ \subset \Phi_+, \quad \Phi = \mathfrak{D}, \mathfrak{S}', \mathfrak{K}'. \tag{31}$$

Из (31), в частности, следует, что $(\mathfrak{R}')_+$ является алгеброй относительно свертки. Более того, изоморфизм (25) является изоморфизмом алгебр. Отсюда и из предложения 2 п. 2.4 следует, что распределение $P(D)\delta(x)$ ($P(\zeta)$ — полином) является обратимым элементом $(\mathfrak{K}')_+$ тогда и только тогда, когда $P(\zeta)$ — экспоненциально корректный полином.

2.6. Операторы свертки и свертыватели в Φ_+, $\Phi = \mathfrak{S}, \mathfrak{D}, \mathfrak{S}', \mathfrak{D}'$. *Оператором свертки*

$$A\colon \Phi_+ \to \Phi_+ \tag{32}$$

для $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ называется непрерывный (соответственно регулярный) оператор, перестановочный со сдвигами T_h, $h \in \mathbb{R}^n_-$.

Теорема. (i) *Пусть* $\Phi = \mathfrak{S}, \mathfrak{D}'$. *Тогда для всякого оператора свертки* (32) *найдется такое распределение* $f \in (\mathfrak{D}')_+$, *что*

$$A\varphi = f * \varphi \quad \forall \varphi \in \Phi_+. \tag{33}$$

(ii) *Пусть* $\Phi = \mathfrak{D}, \mathfrak{S}'$. *Тогда для каждого оператора свертки* (32) *найдется такое* $f \in (\mathfrak{K}')_+$, *что он представляется в виде* (33).

Доказательство этой теоремы получается почти дословным повторением рассуждений теоремы II.4.2, поэтому мы ограничимся только тем, что применительно к новому контексту напомним план доказательства.

1. Для $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, как и в п. II.4.2, определим пространства Φ_∞, $(\Phi_\infty)'$ и установим аналог предложения 1 из п. II.4.2, т. е. докажем существование такого распределения $f \in (\Phi_\infty)'$, что оператор (32) представляется в виде (I.3.3). Но тогда можно определить

$$\mathfrak{C}(\Phi_+) = \{f \in (\Phi_\infty)',\ f * \varphi \in \Phi_+ \quad \forall \varphi \in \Phi_+\}, \qquad \Phi = \mathfrak{S}, \mathfrak{D}. \tag{34}$$

2. Повторением доказательства предложения 2 из п. II.4.2 устанавливается, что каждый оператор свертки A_0: $\Phi_+ \to \Phi_+$, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, по непрерывности продолжается до оператора свертки A: $\Psi_+ \to \Psi_+$, $\Psi = \mathfrak{D}'$, $\mathfrak{S}'$, и обратно, сужение A_0 оператора A на Φ_+ будет оператором свертки на этом пространстве. Таким образом, естественно положить

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_+) = \mathfrak{C}((\mathfrak{D}')_+), \quad \mathfrak{C}(\mathfrak{D}_+) = \mathfrak{C}((\mathfrak{S}')_+). \tag{35}$$

3. Согласно (29) $(\mathfrak{D}')_+ \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{S}_+)$. С другой стороны, $\delta(x) \in \in (\mathfrak{D}')_+$. Сопоставляя с первым равенством (35), получим

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{S}_+) = \mathfrak{C}((\mathfrak{D}')_+) = (\mathfrak{D}')_+, \tag{36}$$

что и доказывает утверждение (i) теоремы.

4. Если воспользоваться (31) и тем обстоятельством, что $\delta(x) \in (\mathfrak{S}')_+$, то мы получим цепочку включений

$$(\mathfrak{K}')_+ \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{D}_+) = \mathfrak{C}((\mathfrak{S}')_+) \subset (\mathfrak{S}')_+ \cap (\mathfrak{D}_\infty)'_+. \tag{37}$$

Поскольку в одномерном случае $(\mathfrak{R}')_+ = (\mathfrak{S}')_+$, то при $n = 1$ утверждение (ii) доказано.

5. Если воспользоваться теоремой о ядре 1.10, то в нашем контексте можно воспроизвести рассуждения п. II.4.3 и заменить правое пространство в (37) на $(\mathfrak{K}')_+$, т. е. доказать равенство

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_+) = \mathfrak{C}((\mathfrak{S}')_+) = (\mathfrak{K}')_+. \tag{38}$$

2.7. Сверточные уравнения в $\mathbb{R}^n_+$ в пространствах функций и распределений экспоненциального убывания и роста. Дословным повторением рассуждений теоремы I.4.2 (ср. теоремы из пп. II.4.6 и II.4.7) доказывается

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}'$ и $A \in \mathfrak{C}(\Phi_+)$. Следующие условия эквивалентны:*

(I) *Для любого $f \in \Phi_+$ сверточное уравнение*

$$A * u = f \tag{39}$$

имеет единственное решение $u \in \Phi_+$.

(II) *Уравнение (39) имеет фундаментальное решение $G \in \in \mathfrak{C}(\Phi_+)$.*

Замечания. 1) Условие (II) теоремы 1 является достаточным условием разрешимости в $\mathfrak{D}_+$, необходимость этого условия не доказана.

2) Заметим, что $\mathfrak{C}((\mathfrak{K}')_+) = (\mathfrak{K}')_+$ и в теореме 1 можно взять $\Phi = \mathfrak{K}'$.

Согласно данному выше описанию свертывателей распределения $A \in \mathfrak{C}(\Phi_+)$, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}$, принадлежат либо $(\mathfrak{D}')_+$, либо

$(\mathfrak{K}')_+$ и, следовательно, имеют преобразование Фурье — Лапласа $\widehat{A}(\zeta)$, принадлежащее либо $\mathfrak{M}^+$, либо $\mathfrak{C}^+$. Условие (II) теоремы 1 эквивалентно обратимости $\widehat{A}$ в этих пространствах. С учетом предложений 2.2 и 2.4 мы получим следующие утверждения.

Теорема 2. (i) *Пусть $A \in (\mathfrak{D}')_+$. Уравнение* (39) *однозначно разрешимо в $\mathfrak{S}_+$, $(\mathfrak{D}')_+$ тогда и только тогда, когда $\forall \rho$, $\nu > 0$, $\exists s_1, s_2, K > 0$, так что справедлива оценка*

$$|\widehat{A}(\zeta)| > K(1 + |\zeta_1|)^{s_1}(1 + |\zeta_2| + \cdots + |\zeta_n|)^{s_2}, \quad \zeta \in \overline{T^+_{\rho,\nu}}. \quad (40)$$

(ii) *Пусть $A \in (\mathfrak{K}')_+$. Уравнение* (39) *однозначно разрешимо в $(\mathfrak{S}')_+$, $(\mathfrak{K}')_+$ тогда и только тогда, когда $\forall \nu > 0$ $\exists \rho$, s_1, s_2, K, так что справедлива оценка* (40). *Эта оценка является достаточным условием разрешимости* (39) *в $\mathfrak{D}_+$.*

Теорема 3. (i) *Не существует дифференциальных операторов $P(D_t, D_y)$ с постоянными коэффициентами, таких, что уравнение*

$$P(D_t, D_y)u = f \quad (41)$$

имело бы единственное решение $u \in \mathfrak{S}_+$, $(\mathfrak{D}')_+$ при любой правой части $f \in \mathfrak{S}_+$, $(\mathfrak{D}')_+$.

(ii) *Для всякого экспоненциально корректного полинома уравнение* (41) *имеет единственное решение $u \in \mathfrak{D}_+$, $(\mathfrak{S}')_+$, $(\mathfrak{K}')_+$ при любой правой части $f \in \mathfrak{D}_+$, $(\mathfrak{S}')_+$, $(\mathfrak{K}')_+$.*

(iii) *Если уравнение* (41) *имеет единственное решение $u \in (\mathfrak{S}')_+$, $(\mathfrak{K}')_+$ при любой правой части $f \in (\mathfrak{S}')_+$, $(\mathfrak{K}')_+$, то полином $P(\zeta)$ — экспоненциально корректный.*

В теоремах 1, 2, 3 фигурируют предельные пространства $\mathfrak{S}_+$, $(\mathfrak{S}')_+$ и т. д. Как и в п. I.4.4, эти теоремы можно переформулировать в терминах шкал. Как мы уже отмечали выше, предельные пространства Φ_+, $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{K}'$ конструируются с помощью операций проективного и индуктивного предела из шкал $\Phi^{(m_1,m_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}$ $(\Phi = C, H)$. Элементы этих шкал имеют по времени t и по пространственным переменным y различный экспоненциальный характер убывания или роста.

В случае $\Phi = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}'$ условие (I) в теореме 1 можно заменить условием

(Ia). *Пусть $\Phi = C$, H. Тогда $\forall \nu_1$, $\nu_2 \exists \sigma_1$, σ_2, так что $\forall f \in \left(\Phi^{(s_1,s_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}\right)_+$ существует единственное решение $u \in \left(\Phi^{(s_1+\sigma_1,s_2+\sigma_2)}_{\langle\nu_1,\nu_2\rangle}\right)_+$.*

В случае $\Phi = \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{K}'$ условие (I) в теореме 1 можно заменить условием

(Ib) *Пусть $\Phi = H$, C. Тогда $\forall \nu \exists \rho(\nu)$, σ_1, σ_2, так что при $\rho < \rho(\nu)$ и $\forall f \in \left(\Phi^{(s_1,s_2)}_{(\rho,\nu)}\right)_+$ существует единственное решение $u \in \left(\Phi^{(s_1+\sigma_1,s_2+\sigma_2)}_{(\rho,\nu)}\right)$ уравнения* (39).

Условие (Ib) означает, что если правая часть экспоненциально корректного уравнения (41) с нулевыми данными Коши растет (убывает) как $\exp(\nu|y|)$, $\nu \in \mathbb{R}$, по пространственным переменным, то и решение обладает этим свойством, при этом гладкость решения и характер его роста по времени t зависят от гладкости правой части и числа ν.

§ 3. Однородная задача Коши в конечной полосе в пространствах функций и распределений экспоненциального убывания и роста

3.1. Шкалы функциональных пространств $\Phi[a, b)$[1]) в случае функций (распределений) экспоненциального убывания и роста строятся по той же схеме, что и в случае степенного убывания и роста (ср. гл. II). Отдельно рассматриваются пространства $\Phi^{m}_{\langle\nu\rangle}[a, b)$, $\Phi = C, H$, отвечающие натуральным m. Применяя к вложениям (2.1) операторы сдвига по переменной t, получим для любого $c \in \mathbb{R}$

$$C^{(m)}_{\langle\nu+\varepsilon\rangle}[c, \infty) \subset H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[c, \infty) \subset C^{(m-\varkappa)}_{\langle\nu\rangle}[c, \infty),$$

откуда при $a < b$

$$C^{(m)}_{\langle\nu+\varepsilon\rangle}[a, b) \subset H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[a, b) \subset C^{(m-\varkappa)}_{\langle\nu\rangle}[a, b), \tag{1}$$

т. е. *шкалы* $\{C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[a, b)\}$ *и* $\{H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[a, b)\}$ *эквивалентны, а их проективные (индуктивные) пределы по разным индексам совпадают.*

Естественным образом определяются пространства $\Phi^{(m)}_{\langle\nu\rangle}(\mathbb{R}^n_+)$, $\Phi^{(m)}_{\langle\nu\rangle}(\mathbb{R}^n_{[a,b)})$, $\Phi = C, H$. На эти пространства легко распространяются результаты § II.3 об операторах продолжения функций. В итоге доказываются равенства

$$\mathfrak{S}[a, b) = \bigcap C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[a, b) = \bigcap H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[a, b), \tag{2}$$

$$\mathfrak{D}[a, b) = \bigcup_{\nu} \bigcap_{m} C^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[a, b) = \bigcup_{\nu} \bigcap_{m} H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}[a, b), \tag{3}$$

где правые пространства понимаются как проективные и индуктивные пределы, а левые — как соответствующие фактор-пространства. Как уже отмечалось в п. 2.3, п. д. о. $a(D)$ с символами $a(\zeta) \in C^{(|\nu|)+}_{(-\infty)}$ переводят в себя пространства $\left(H^{(\pm\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}\right)_+$. Но тогда они переводят в себя и сдвиги $\left(H^{(\pm\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}\right)[c, \infty)$ этих пространств, и, следовательно, фактор-пространства $H^{(\pm\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}[a, b)$.

Рассматривая символы $a(\zeta) \in C^{(|\nu|)+}_{(-\infty)}$, дополнительно удовлетворяющие условию (2.15_+), мы получим шкалы пространств $(a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle})[a, b)$, причем

$$H^{(\infty)}_{\langle\nu\rangle}[a, b) = \bigcap_{s} \left(a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle}\right)[a, b),$$

$$H^{(-\infty)}_{\langle\nu\rangle}[a, b) = \bigcup_{s} \left(a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle}\right)[a, b).$$

[1]) Как мы уже отмечали в п. II.3.2.3 теория пространств $\Phi(a, b]$ тривиально выводится из теории пространств $\Phi[a, b)$ с помощью (II.2.17), поэтому далее пространств типа $\Phi(a, b]$ мы касаться не будем.

т. е. в равенствах (2), (3) пространства $H^{(m)}_{\langle\nu\rangle}$ можно заменить на $a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle}$.

Операторы $a(D)$ с символами $a(\zeta)\in C^{(|\nu|)+}_{(-\infty)}$ естественным образом индуцируют операторы на фактор-пространствах, поэтому

$$(a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle})\,[a,\ b)=a^{-s}(D)\,(H_{\langle\nu\rangle}\,[a,\ b)). \qquad (4)$$

Аналогично дело обстоит и с пространствами $\Phi(a,\ b]$, только здесь надо рассматривать п. д. о. с символами из $C^{\langle\nu\rangle-}_{(-\infty)}$.

Из двойственности

$$(H_{\langle\nu\rangle}\,[a,\ b))'=H_{\langle-\nu\rangle}(a,\ b]$$

и соотношений (4) вытекает двойственность банаховых пространств

$$(a^{-s}(D)H_{\langle\nu\rangle}\,[a,\ b))'=a^{s}(-D)H_{\langle-\nu\rangle}(a,\ b]. \qquad (5)$$

Полагая

$$(\mathfrak{S}')\,[a,b)=\bigcup_{s,\nu}a^{-s}(D)\,H_{\langle\nu\rangle}\,[a,b);$$

$$(\mathfrak{D}')\,[a,b)=\bigcap_{\nu}\ \bigcup_{s}a^{-s}(D)\,H_{\langle\nu\rangle}\,[a,b),$$

мы в силу общих результатов Дополнения к гл. I придем к равенствам

$$(\mathfrak{S}\,[a,\ b))'=(\mathfrak{S}')\,(a,\ b],\quad (\mathfrak{S}(a,\ b])'=(\mathfrak{S}')\,[a,\ b), \qquad (6)$$

$$(\mathfrak{D}\,[a,\ b))'=(\mathfrak{D}')\,(a,\ b],\quad (\mathfrak{D}(a,\ b])'=(\mathfrak{D}')\,[a,\ b), \qquad (7)$$

причем (6) является топологическим изоморфизмом.

В случае конечной полосы удобно работать с пространствами $H^{(s_1,s_2)}_{\langle\rho,\nu\rangle}[a,b)$, отвечающими п. д. о. с символами (2.19). Повторением рассуждений лемм 1, 2 из п. II.2.3 доказывается совпадение этих пространств при разных ρ:

$$\Phi^{(s_1,s_2)}_{\langle\rho,\nu\rangle}[a,b)\cong\Phi^{(s_1,s_2)}_{\langle\rho',\nu\rangle}[a,b),\quad \Phi=C,H,\quad \rho\neq\rho'. \qquad (8)$$

Ввиду этого обстоятельства в обозначениях пространств (8) индекс ρ можно опускать. Следствием изоморфизмов (8) является изоморфизм

$$(\mathfrak{K}')\,[a,\ b)=(\mathfrak{D}')\,[a,\ b),\quad -\infty<a<b<\infty, \qquad (9)$$

играющий фундаментальную роль в теории свертывателей и сверточных уравнений в конечной полосе.

3.2. Операция свертки, определенная выше на Φ_+, автоматически переносится на $\Phi[a,\ b)$. Как мы уже отмечали в п. II.4.8, если для пространств Φ_i, $i=1,\ 2,\ 3$, определена операция свертки $\Phi_1*\Phi_2\subset\Phi_3$, то $\forall a<b$

$$\Phi_1[0,\ b-a)*\Phi_2[a,\ b)\subset\Phi_3[a,\ b).$$

Если мы возьмем $\Phi_1=\mathfrak{D}'$ и $\Phi_2=\Phi_3=\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$, то придем к включениям

$$(\mathfrak{D}')[0,\ b-a)*\Phi[a,\ b)\subset\Phi[a,\ b),\quad \Phi=\mathfrak{S},\ \mathfrak{S}',\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{D}'.$$

Как было показано в п. II.4.8, операторы сдвига T_h, $h\in\overline{\mathbb{R}^n_-}$, определены на $\Phi[a,\ b)$, и мы можем определить оператор свертки на $\Phi[a,\ b)$, $\Phi=\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$, как непрерывный (регулярный) оператор, перестановочный со сдвигами. Как и в случае умеренных распределений (ср. предложение 1 из п. II.4.8), для каждого оператора свертки

$$A\colon \Phi[a,\ b)\to\Phi[a,\ b),$$

$\Phi=\mathfrak{S}, \mathfrak{D}$, найдется такое распределение $f\in(\Phi')[0,\ b-a)$, что $(A\varphi)(t,\ y)=(f,\ IT_{(t,y)}\varphi)=(f*\varphi)(t,\ y),\quad a\leqslant t<b,\quad \varphi\in\Phi[a,\ b)$.

Операторы свертки на $\Phi=\mathfrak{S}, \mathfrak{D}$ по непрерывности продолжаются до операторов свертки на $\Psi=\mathfrak{D}', \mathfrak{S}'$, и обратно, сужения операторов свертки, действующих на Ψ, на пространство Φ является оператором свертки. Таким образом,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{S}[a,\ b))=\mathfrak{C}((\mathfrak{D}')[a,\ b)),\quad \mathfrak{C}(\mathfrak{D}[a,\ b))=\mathfrak{C}((\mathfrak{S}')[a,\ b)).$$

Дословным повторением теоремы II.4.8 доказывается

Теорема. *Для любых $a,\ b\in\mathbb{R}$, $a<b$, имеют место равенства*

$$\mathfrak{C}(\Phi[a,\ b))=(\mathfrak{D}')[0,\ b-a),\quad \Phi=\mathfrak{S},\ \mathfrak{S}',\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{D}'. \tag{10}$$

Таким образом, различие между свертывателями на $\mathfrak{S}_+$ и $\mathfrak{D}_+$ в случае конечной полосы пропадает. Роль этого обстоятельства в условиях разрешимости дифференциальных уравнений в конечной полосе проявится ниже.

3.3. Как и в п. II.4.9 (см. теорему I), доказывается

Теорема 1. *Пусть $A\in(\mathfrak{D}')[0,\ b)$ и $\Phi=\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$. Следующие условия эквивалентны:*

(I) *Сверточное уравнение*

$$A*u=f \tag{11}$$

однозначно разрешимо в $\Phi[c,\ c+b)$ для любого $c\in\mathbb{R}$ (для некоторого $c\in\mathbb{R}$).

(II) *Распределение A является обратимым элементом $(\mathfrak{D}')[0,\ b)$, т. е. $\exists G\in(\mathfrak{D}')[0,\ b)$, что*

$$A*G-\delta(x)=G*A-\delta(x)=0\ \textit{(в смысле } (\mathfrak{D}')[0,\ b)).$$

Пусть $A\in(\mathfrak{D}')[0,\ b)$. *Символом* $\widehat{A}(\zeta)$ этого распределения мы будем называть преобразование Фурье — Лапласа некоторого распределения из $(\mathfrak{D}')_+$, являющегося одним из представителей класса смежности A. Каждому $A\in(\mathfrak{D}')[0,\ b)$ отвечает класс символов $\widehat{A}\in\mathfrak{M}^+$, отличающихся на символы из $\mathcal{F}(T_{(-b,0)}(\mathfrak{D}')_+)=$ $=e^{-ib\zeta_1}\mathfrak{M}^+$.

Как и в п. II.4.9, мы из условия (II) теоремы 1 выведем отдельно необходимые и отдельно достаточные условия на символ $\widehat{A}$, гарантирующие разрешимость уравнения (10).

Лемма 1. *Пусть* $\widehat{A}(\zeta)\in\mathfrak{M}^+$ — *символ* $A\in(\mathfrak{D}')\,[0,\,b)$, *и пусть найдутся такие* $\nu>0$, $\rho<0$, $s\in\mathbb{R}$, $K>0$, *что в трубчатой области* $T^+_{\rho,\nu}$ (см. (2.22)) *имеет место оценка снизу*

$$|\widehat{A}(\zeta)|>K(1+|\zeta|)^s,\quad \zeta\in\overline{T^+_{\rho,\nu}}.$$

Тогда выполнено условие (II) *теоремы* 1.

Следствие. *Распределение* $A=P(D)\delta(x)$, *где* $P(\zeta)$ — *экспоненциально корректный полином, удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Доказательство леммы 1. Пусть $\widehat{A}$ является преобразованием Фурье — Лапласа распределения $A_0\in(\mathfrak{D}')_+$, принадлежащего классу смежности $A\in(\mathfrak{D}')\,[0,\,b)$. Условие леммы является необходимым и достаточным условием обратимости $A_0\in\in(\mathfrak{D}')_+\subset(\mathfrak{K}')_+$ в пространстве $(\mathfrak{K}')_+$. Таким образом, найдется распределение $G_0\in(\mathfrak{K}')_+$ такое, что $A_0*G_0=G_0*A_0=\delta(x)$. Теперь остается воспользоваться (7).

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (II) *теоремы* 1 *и* $A_0\in\in(\mathfrak{D}')_+$ — *представитель класса смежности* $A\in(\mathfrak{D}')\,[0,\,b)$. *Тогда* $\forall\nu>0\ \ \exists c_1,\,c_2$, *так что*

$$\{\widehat{A}_0(\zeta)=0,\ |\operatorname{Im}\zeta_j|\leqslant\nu,\ \ j=2,\,\ldots,\,n\}\Leftrightarrow\{\operatorname{Im}\zeta_1> >c_1(\nu)\ln(1+|\zeta|)+c_2(\nu),\ \ |\operatorname{Im}\zeta_j|\leqslant\nu,\ \ j=2,\,\ldots,\,n\}.\quad(12)$$

Ввиду теоремы Тарского — Зайденберга (ср. п. II.4.9) отсюда вытекает

Следствие. *Если распределение* $A=P(D)\delta(x)$, *где* $P(\zeta)$ — *полином, удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то полином* $P(\zeta)$ *экспоненциально корректный.*

Доказательство леммы 2. Пусть выполнено условие (II) теоремы 1 и пусть $G_0\in(\mathfrak{D}')_+$ — представитель класса смежности $G\in(\mathfrak{D}')\,[0,\,b)$. Тогда $A_0*G_0-\delta(x)\in(\mathfrak{D}')\,[b,\,\infty)$, где $b>0$. Отсюда (как мы уже говорили выше)

$$\widehat{A}_0(\zeta)\widehat{G}_0(\zeta)-1\in\exp(-ib\zeta_1)\mathfrak{M}^+.$$

Из описания пространства $\mathfrak{M}^+$ следует, что $\forall\nu>0$, $\forall\rho$ можно указать $s\in\mathbb{R}$ и $K>0$, так что выполняется оценка

$$|\widehat{A}_0(\zeta)\widehat{G}_0(\zeta)-1|<K(1+|\zeta|)^s\exp(b\operatorname{Im}\zeta_1),\quad \zeta\in\overline{T^+_{\rho,\nu}}.$$

Если $\widehat{A}_0(\zeta)=0$, то мы приходим к условию (12).

Условие (I) теоремы 1 эквивалентно условию (ср. условие (Ia) и (Ib) из п. 2.8)

(Ia) Пусть $\Phi=C,\,H$. Тогда найдутся такие σ_1, σ_2, что $\forall f\in\Phi^{(s_1,s_2)}_{(\nu)}\,[a,\,b)$ уравнение (11) имеет единственное решение $u\in\Phi^{(s_1+\sigma_1,s_2+\sigma_2)}_{(\nu)}\,[a,\,b)$.

Из следствий к леммам 1, 2 вытекает

Теорема 2. *Дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами удовлетворяет условиям* (I), (Ia) *теоремы* 1 *тогда и только тогда, когда этот оператор экспоненциально корректный.*

§ 4. Экспоненциально корректные дифференциальные операторы

Этот параграф посвящен исследованию понятия экспоненциально корректного полинома (см. конец п. 2.4). Будут приведены эквивалентные определения и рассмотрены некоторые специальные классы таких полиномов.

4.1. Эквивалентные определения экспоненциально корректных полиномов. Начнем с некоторых обозначений. Пусть $\lambda_1(\eta), \ldots, \lambda_k(\eta)$ — корни полинома $P(\tau, \eta)$ по τ,

$$T(\eta) = \max_j (-\operatorname{Im} \lambda_j(\eta))$$

и

$$\chi_P(\omega) = \sup_{\operatorname{Im}\eta=\omega} T(\eta). \tag{1}$$

Другими словами, определяется максимальное трубчатое множество, на котором $P \neq 0$:

$$P(\tau, \eta) \neq 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} \tau \leqslant \chi_P(\operatorname{Im} \eta). \tag{2}$$

Пусть полином $P(\tau, \eta)$ удовлетворяет однородному условию корректности (см. (II.4.54)); последнее равносильно тому, что

$$\chi_P(0) < \infty. \tag{3}$$

Будем рассматривать сдвиги P в комплексную область

$$P_\omega(\tau, \eta) = P(\tau, \eta + i\omega), \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \omega \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Тогда множество тех $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, для которых $\chi_P(\omega) < \infty$, совпадает с множеством ω, для которых сдвиги $P_\omega(\tau, \eta)$ удовлетворяют однородному условию корректности по Петровскому. Для нас важна непрерывность функции χ_P, что является следствием простых фактов многомерного комплексного анализа (см., например, В. С. Владимиров [1]).

Лемма. *Функция* $\chi_P(\operatorname{Im} \eta)$ *является плюрисубгармонической функцией от* η, *и, следовательно,* χ_P *— выпуклая книзу функция.*

Эта лемма является вариантом известной теоремы Бохнера о трубчатых областях голоморфности. При $n = 2$ функция χ_P зависит от одного переменного, и вне конечного числа точек, в которых обращается в нуль дискриминант P по τ, функция χ_P является sup мнимых частей голоморфных функций, т. е. гармонических функций. На оставшиеся точки (в конечном числе) χ_P продолжается по непрерывности.

При $n>2$ надо ограничить χ_P по η на всевозможные комплексные прямые и воспользоваться утверждением при $n=2$. Получаем, что $\chi_P(\operatorname{Im}\eta)$ субгармонична на всех прямых, а значит, по определению, плюрисубгармонична. Остается заметить, что плюрисубгармоническая функция, зависящая лишь от мнимых частей переменных, является выпуклой книзу функцией от мнимых частей.

Из теоремы Зайденберга — Тарского можно непосредственно вывести, что χ_P кусочно алгебраична там, где она конечна, и бесконечно дифференцируема вне алгебраического множества коразмерности $\geqslant 1$.

Предложение. *Для полинома $P(\tau, \eta)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *P — экспоненциально корректный полином, т. е.* (см. (2.28)) $\forall \nu>0 \quad \exists \rho(\nu)$, *так что*

$$P(\tau, \eta+i\omega)\neq 0, \quad \operatorname{Im}\tau<\rho(\nu), \quad |\omega_j|<\nu, \quad j=2, \ldots, n. \qquad (4)$$

(i′) $\chi_P(\omega)<\infty$ *для всех* $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$, *т. е. все сдвиги P_ω удовлетворяют однородному условию корректности по Петровскому.*

(ii) *$\delta_P(\tau, \eta)$ — расстояние от точки (τ, η) до многообразия нулей полинома P — стремится к бесконечности при* $\operatorname{Im}\tau\to-\infty$ *равномерно по* $\operatorname{Re}\tau$, $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$.

(iii) $P^{(\alpha)}(\tau, \eta)P^{-1}(\tau, \eta)\to 0$ *при* $\operatorname{Im}\tau\to-\infty$ *для любого ненулевого мультииндекса α равномерно по* $\operatorname{Re}\tau$, $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Доказательство. Условие (i′) равносильно условию (i) в силу непрерывности функции $\chi_P(\omega)$. Условие (ii) тавтологично (i). Эквивалентность (ii) и (iii) следует из известного свойства полиномов (см. Хёрмандер [1], формула (4.1.5)):

$$\sum_{\alpha\neq 0}\left|\frac{P^{(\alpha)}(\tau, \eta)}{P(\tau, \eta)}\right|^{1/|\alpha|}\leqslant \mathrm{const}\cdot[\delta_P(\tau, \eta)]^{-1}. \qquad (5)$$

Следствие. *Экспоненциально корректный полином разрешен относительно старшей степени τ.*

Действительно, пусть $k=\deg_\tau P$ и P содержит моном $\tau^k\eta^\beta$, $\beta\neq 0$, с ненулевым коэффициентом. Тогда, беря в (iii) $\alpha=(0,\beta)$, мы придем к противоречию, поскольку $P^{(0,\beta)}(\tau, 0)=c\tau^k+\ldots$, $c\neq 0$, $P(\tau, 0)=o(\tau^k)$.

Замечание. Класс экспоненциально корректных символов замкнут относительно умножения и дифференцирования по τ. Первое свойство непосредственно выводится из определения; второе следует из того, что корни $dQ(\tau)/d\tau$ принадлежат выпуклой оболочке корней $Q(\tau)$.

4.2. Специальные классы экспоненциально корректных символов. Прежде всего отметим, что понятие экспоненциальной корректности естественно ассоциируется с понятием гипоэллиптичности. Напомним, что полином $P(\xi)$ гипоэллиптичен, если $\delta_P(\xi)\to\infty$ при $|\xi|\to\infty$ (см. Хёрмандер [1], гл. IV).

Предложение. *Если гипоэллиптический полином $P(\tau, \eta)$ удовлетворяет однородному условию корректности по Петровскому, то он является экспоненциально корректным.*

Доказательство. Заметим, что класс гипоэллиптических полиномов замкнут относительно любых сдвигов, а класс полиномов с условием однородной корректности замкнут относительно сдвигов по τ. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $T(\eta)<0$ при $\operatorname{Im}\eta=0$. Из гипоэллиптичности следует, что для любого $c>0$ существует такое d, что $P(\tau, \eta)\neq 0$ при $|\operatorname{Im}\eta|<c$, $|\operatorname{Im}\tau|<c$, $|\operatorname{Re}\eta|>d$, т. е. что $|T(\eta)|>c$ при $|\operatorname{Im}\eta|<c$, $|\operatorname{Re}\eta|>d$. Так как $T(\eta)<0$ при $\operatorname{Im}\eta=0$, то $T(\eta)<-c$ при $|\operatorname{Im}\eta|<c$, $|\operatorname{Re}\eta|>d$. Функция T ограничена сверху при $|\operatorname{Im}\eta|\leqslant c$, $|\operatorname{Re}\eta|\leqslant d$ из соображений непрерывности, так что $T(\eta)<c$ при $|\operatorname{Im}\eta|<c$ и при всех $\operatorname{Re}\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$. Поскольку c можно выбрать любым, наше предложение доказано.

Это предложение позволяет устанавливать экспоненциальную корректность некоторых классов символов. Например, гипоэллиптическими являются $2b$-параболические символы. Впрочем, их экспоненциальную корректность проще усмотреть непосредственно. Действительно, если $P(\tau, \eta)$ — $2b$-параболический символ, $k=\deg_\tau P$, то для некоторых c_1, c_2 (см. предложение II.4.10, формула (II.4.61))

$$|P(\tau, \eta)|\geqslant c_1(|\tau|+|\eta|^{2b})^k, \quad \operatorname{Im}\tau<c, \quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{6}$$

Далее, если $\tau^\alpha\eta^\beta$ — «младший моном» (т. е. $2b|\alpha|+\beta\overset{\text{def}}{=}\deg_{(2b,1)}\tau^\alpha\eta^\beta<2bk=\deg_{(2b,1)}P$), то для всякого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое c, что

$$|\tau^\alpha\eta^\beta|<\varepsilon(|\tau|+|\eta|^{2b})^k, \quad \operatorname{Im}\tau<c, \quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{7}$$

Остается учесть, что $P^{(\alpha)}(\tau, \eta)$ при $\alpha\neq 0$ состоит из младших мономов и, значит, для $P(\tau, \eta)$ выполнено условие (iii) из предложения 4.1.

По аналогичной причине будут экспоненциально корректными строго гиперболические символы. Для всякого $\varepsilon>0$ существует такое c, что (см. (II.4.72))

$$\varepsilon|P(\tau, \eta)|>(|\tau|+|\eta|)^{k-1}, \quad \operatorname{Im}\tau<c, \quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad k=\deg P. \tag{8}$$

Условие (iii) будет выполняться, поскольку $P^{(\alpha)}(\tau, \eta)$ при $\alpha\neq 0$ оценивается сверху через $(|\tau|+|\eta|)^{k-1}$.

Однако экспоненциально корректными являются любые гиперболические символы, а не только строго гиперболические. Мы не будем проводить подробного доказательства, ограничившись пояснениями и ссылкой. Напомним, что гиперболичность $P(\tau, \eta)$ означает одновременную однородную корректность по Петровскому $P(\tau, \eta)$ и его старшей однородной части $\tilde{P}(\tau, \eta)$. В частности, полиномы $\tilde{P}$ (а значит, и P) разрешены относительно старшей степени τ. В противном случае при $\eta=0$ не выполнялось бы условие однородной корректности.

Мы воспользуемся теперь структурой корней гиперболического полинома. Поскольку это утверждение будет использоваться и в дальнейшем, выделим его в виде леммы.

Лемма. *Пусть $P(\tau, \eta)$ — гиперболический полином, $\lambda_j(\eta)$ — его корни по τ, $\tilde{\lambda}_j(\eta)$ — соответствующие корни его старшей части $\tilde{P}(\tau, \eta)$. Тогда при $|\eta| \to \infty$*

$$\lambda_j(\eta) = \tilde{\lambda}_j(\eta) + \mu_j(\eta) + o(1),$$

где $\mu_j(\eta)$ — однородные функции нулевого порядка, причем μ_j и оценка остаточного члена непрерывно зависят от младших коэффициентов в P.

Напомним, что $\tilde{\lambda}_j(\eta)$ является однородной функцией степени 1 и что $\tilde{\lambda}_j(\eta)$ — ветви многозначной функции так же, как и μ_j. Для строго гиперболического полинома ветви $\tilde{\lambda}_j$ и μ_j выделяются канонически.

Мы не будем приводить доказательства леммы, которое достаточно провести для случая, когда имеется единственное пространственное переменное η (в многомерном случае P рассматривается как полином от $|\eta|$). Доказательство проводится при помощи прямолинейного использования разложений Пюизе для λ_j.

Возвращаясь к доказательству экспоненциальной корректности гиперболических полиномов, заметим, что переход от вещественных η к комплексным можно интерпретировать как возмущение младших коэффициентов в $P(\tau, \operatorname{Re}\eta)$, непрерывно зависящее от $\operatorname{Im}\eta$. Поэтому в силу леммы $|\operatorname{Im}\lambda_j(\eta)|$ ограничены, если $|\operatorname{Im}\eta| < c$.

Другой способ доказательства экспоненциальной корректности связан с известным характеристическим свойством гиперболических полиномов: они остаются корректными если заменить координатное направление τ на достаточно близкое направление. Более точно: рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ связную компоненту V множества $\{(\sigma, \eta), \tilde{P}(\sigma, \eta) \neq 0\}$, содержащую вектор $(1, 0, \ldots, 0)$. Доказывается, что V — выпуклый конус (конус гиперболичности) и для любого $e \in V$ при некотором c имеем: $P(\tau, \eta) \neq 0$, при $\operatorname{Im}(\tau, \eta) = \lambda e$, $\lambda < c$. Отсюда следует, что выпуклое множество $\rho < \chi_P(\omega)$ содержит сдвиг телесного конуса $-V$, в свою очередь содержащего луч $(-1, 0, \ldots, 0)$, т. е. $\chi_P < \infty$ при всех $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$. Доказательства можно найти в книге Хёрмандера [1, теорема 5.5.4].

4.3. Классы экспоненциально корректных символов, связанные с многоугольниками Ньютона. В силу сказанного выше экспоненциально корректными будут произведения $2b$-параболических полиномов с разными b (произведение $2b$-параболических полиномов с одним и тем же b снова является $2b$-параболическим). Поскольку экспоненциальная корректность $2b$-параболических полиномов связывалась с оценкой (7), естественно попытаться найти более общую оценку, определяющую экспоненциальную корректность их произведений при разных b. Такая оценка существует, и она связана с многоугольником Ньютона полинома.

Для полинома $P(\tau, \eta)$ рассмотрим в положительном квадранте $\mathbb{R}^2$ множество таких целочисленных пар (α, γ), что для некоторого монома $\tau^\alpha\eta^\beta$, входящего в P с ненулевым коэффициентом, $\gamma = |\beta|$. Дополним это множество проекциями на оси (α), (γ), точкой $(0, 0)$ и возьмем выпуклую оболочку. Полученный многоугольник N_P назовем *многоугольником Ньютона* полинома P. Разрешенность P относительно старшей степени τ означает, что у N_P нет некоординатной стороны, параллельной оси (γ).

Полином $P(\tau, \eta)$ назовем *N-параболическим*, если он разрешен относительно старшей степени τ, его многоугольник Ньютона не имеет также некоординатной стороны, параллельной оси (α), и для любой пары $(\alpha, \gamma) \in N_P$ имеем при некоторых $c_1 > 0$, c_2

$$|P(\tau, \eta)| > c_1|\tau|^\alpha|\eta|^\gamma \text{ при } \operatorname{Im}\tau \leqslant c_2. \tag{9}$$

Заметим, что $2b$-параболические полиномы отвечают случаю, когда N_P — треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(k, 0)$, $(0, 2bk)$. Произведение $2b$-параболических полиномов с разными b является N-параболическим. Это получается из непосредственного перемножения оценок (6) с учетом следующих простых неравенств.

Пусть $\alpha' > \alpha''$, $\gamma' < \gamma''$ и (α, γ) — точка на отрезке $[(\alpha', \gamma'), (\alpha'', \gamma'')]$. Тогда для некоторого $c > 0$

$$|\tau|^\alpha|\eta|^\gamma \leqslant c\left(|\tau|^{\alpha'}|\eta|^{\gamma'} + |\tau|^{\alpha''}|\eta|^{\gamma''}\right). \tag{10}$$

Далее, если $(\tilde\alpha, \tilde\gamma)$ — младшая точка N_P (существует $(\alpha, \gamma) \in N_P$, для которой $\alpha \geqslant \tilde\alpha$, $\gamma \geqslant \tilde\gamma$ и $(\alpha - \tilde\alpha) + (\gamma - \tilde\gamma) > 0$), то для всякого $c > 0$ существует такое c_1, что

$$c|\tau|^{\tilde\alpha}|\eta|^{\tilde\gamma} \leqslant \sum |\tau|^\alpha|\eta|^\gamma, \quad \operatorname{Im}\tau < c_1, \tag{11}$$

где сумма берется по всем вершинам $(\alpha, \gamma) \in N_P$, отличным от $(0, 0)$. В частности, в определении N-параболического полинома можно ограничиться этими вершинами N_P.

Из (11) непосредственно следует экспоненциальная корректность N-параболических полиномов, поскольку для мономов $\tau^\alpha\xi^\beta$, входящих в $P^{(\varkappa)}$ при $\varkappa \neq 0$, обязательно $(\alpha, |\beta|)$ — младшая точка N_P.

Мы уже говорили о том, что произведения $2b$-параболических полиномиальных символов являются N-параболическими. Замечательно, что в некотором смысле имеет место и обращение этого утверждения. При этом приходится расширить запас символов. Будем называть *квазиполиномами* функции $P(\tau, \eta)$, которые являются полиномами от τ, $|\eta|$ с коэффициентами, зависящими от $\theta = \eta/|\eta|$. На квазиполиномы естественно переносятся понятия многоугольника Ньютона, $2b$-параболичности и N-параболичности, гиперболичности.

Для всякого N-параболического полинома $P(\tau, \eta)$ существуют такие $b_1 > \ldots > b_r$ и $2b_j$-параболические квазиполиномы $Q_j(\tau, \eta)$, что $|P(\tau, \eta) - \prod Q_j(\tau, \eta)|$ оценивается сверху через $\sum |\tau|^\alpha |\eta|^\gamma$, где сумма берется по младшим точкам N_P, (т. е. $P - \Pi Q_j$ является квазиполиномом, раскладывающимся по младшим мономам $\tau^\alpha|\eta|^\gamma$).

Без ограничения общности можно считать Q_j квазиоднородными. Доказательство проводится при помощи исследования разложений Пюизе по $|\eta|$ корней $P(\tau, \eta)$ относительно τ и изучения их связи с многоугольником Ньютона N_P. Это доказательство можно найти в работе Л. Р. Волевича, С. Г. Гиндикина [3] (и [15]).

Расширим класс N-параболических полиномов с тем, чтобы включить в него как строго гиперболические полиномы, так и произведения $2b$-параболических и строго гиперболических. Полином $P(\tau, \eta)$ назовем *доминантно корректным*, если он разрешен относительно старшей степени τ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое c, что для всякой младшей точки многоугольника Ньютона (α, γ) имеем

$$|\tau|^\alpha |\eta|^\gamma < \varepsilon |P(\tau, \eta)| \text{ при } \operatorname{Im} \tau < c, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{12}$$

Отметим, что мы не требуем теперь, чтобы у N_P не было некоординатной стороны, параллельной оси (α) (такой стороны, параллельной оси (γ), нет ввиду разрешенности P относительно старшей степени τ). Итак, требуется, чтобы все младшие мономы оценивались через полином со сколь угодно большой константой, если $-\operatorname{Im} \tau$ достаточно велико. Это характеристическое свойство строго гиперболических полиномов, обобщенное с обычных старших частей на старшие части, отвечающие многоугольнику Ньютона. Гиперболический случай получается, когда N_P — равнобедренный прямоугольный треугольник.

Из (11) следует, что *доминантно корректные полиномы являются экспоненциально корректными*. Далее, непосредственно проверяется доминантная корректность произведения $2b$-параболического полинома на строго гиперболический (надо перемножить оценки). Чтобы описать структуру доминантно корректных полиномов, перейдем к квазиполиномам. Естественно определяется понятие строго гиперболического квазиполинома.

Пусть $P(\tau, \eta)$ — доминантно корректный полином. Тогда существуют такие N-параболический квазиполином $R(\tau, \eta)$, однородный строго гиперболический полином $H(\tau, \eta)$ и $b \geqslant 0$, что $P(\tau, \eta) - \tau^b R(\tau, \eta) H(\tau, \eta)$ является квазиполиномом, раскладывающимся по мономам $\tau^\alpha|\eta|^\gamma$ с младшими (α, γ). При этом если $b > 0$, то $H(0, \eta) \neq 0$ при $\eta \neq 0$. Это утверждение доказано в цитированной выше работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [3].

4.4. Плюрипараболические полиномы. Рассмотрим еще один класс полиномов, у которых экспоненциальная корректность определяется старшей квазиоднородной частью. Эти полиномы в естественном смысле по части переменных гиперболичны, а по части — $2b$-параболичны.

Мы несколько изменим обозначения. Пусть теперь $\eta = (\sigma_1, \ldots, \sigma_l, \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$. Будем приписывать переменным τ, σ_i вес $2b$, а ζ_j — вес 1. Пусть полином $P(\tau, \eta)$ квазиоднороден и корректен по Петровскому относительно τ. Пусть $\lambda_j(\sigma, \zeta)$ — корни P по τ. Квазиоднородный полином $P(\tau, \sigma, \zeta)$ называется *плюрипараболическим*, если

(i) $P(\tau, \sigma, 0)$ — строго гиперболический полином;

(ii) для некоторого $c > 0$ и всех j имеем

$$\operatorname{Im} \lambda_j(\sigma, \zeta) \geqslant c|\zeta|^{2b}, \quad (\sigma, \zeta) \in \mathbb{R}^{l+m}. \tag{13}$$

Полином $P(\tau, \sigma, \zeta)$ называется плюрипараболическим, если плюрипараболична его старшая квазиоднородная часть.

Пусть $P(\tau, \sigma, \zeta)$ — квазиоднороден и $P(\tau, \sigma, 0)$ — строго гиперболичен. Тогда можно написать разложение корней $\lambda_j(\sigma, \zeta)$ по степеням σ (лемма 4.2):

$$\lambda_j(\sigma, \zeta) = \lambda_j(\sigma, 0) + \mu_j(\sigma, \zeta), \tag{14}$$

где $\lambda_j(\sigma, 0)$ некратны при $|\sigma| \neq 0$; μ_j имеет нулевой порядок по $|\sigma|$, т. е. с учетом квазиоднородности: $\mu_j(\rho\sigma, \lambda\zeta) = \lambda^{2b}\mu_j(\sigma, \zeta)$.

Предложение. *Пусть $P(\tau, \sigma, \zeta)$ — квазиоднородный полином, разрешенный относительно старшей степени τ. Следующие условия эквивалентны:*

(I) *P — плюрипараболический полином (т. е. выполнены условия* (i), (ii));

(II) *для некоторого $c > 0$ имеет место оценка*

$$|P(\tau, \sigma, \zeta)| \geqslant c[(-\operatorname{Im}\tau + |\zeta|^{2b})(|\tau| + |\sigma|)^{k-1} + |\zeta|^{2b(k-1)}] \tag{15}$$

$$\text{при } \operatorname{Im}\tau \leqslant 0, \quad (\sigma, \zeta) \in \mathbb{R}^{l+m};$$

(III) *полином $P(\tau, \sigma, 0)$ строго гиперболичен, и для всех j*

$$\operatorname{Im} \lambda_j(\sigma, \zeta) > 0, \quad \operatorname{Im} \mu_j(\sigma, \zeta) > 0 \ \text{при}\ \zeta \neq 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^m,$$

где μ_j определено в (14).

Наметим доказательство (подробности см. в работе Л. Р. Волевича, С. Г. Гиндикина [2]).

(II)$\Rightarrow$(I) Из (15) при $\zeta = 0$ непосредственно следует строгая гиперболичность $P(\tau, \sigma, 0)$ (оценка (8)). Для доказательства плюрипараболичности еще надо показать, что существует такое $a > 0$, что $P(\tau, \sigma, \zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\tau < a$, $|\zeta| = 1$. Но из (15) непосредственно выводится, что $P(\tau, \sigma, \zeta) \neq 0$ при $|\zeta| = 1$, если $|\operatorname{Im}\tau|$ достаточно мало или $\operatorname{Im}\tau < 0$.

(I)$\Rightarrow$(II) В силу (13) для каждого j имеем: $|\tau - \lambda_j(\sigma, \zeta)| \geqslant c(-\operatorname{Im}\tau + |\zeta|^{2b})$, т. е.

$$|P(\tau, \sigma, \zeta)| > \mathrm{const} \cdot (-\operatorname{Im}\tau + |\zeta|^{2b})^k \ \text{при}\ \operatorname{Im}\tau < 0.$$

В частности, в любой области $\varepsilon(|\tau|+|\sigma|)\leqslant|\zeta|^{2b}$ будет иметь место (15). Далее, имеется оценка

$$|\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma,\ \zeta)-\lambda_j(\sigma,\ 0)|\leqslant c_1|\zeta|^{2b}.$$

При $|\zeta|=1$ она получается из разложения корней гиперболического полинома $P(\tau,\ \sigma,\ \zeta)$ (лемма 4.2), зависящего от ζ, $|\zeta|=1$, как от параметра, а затем продолжается на все ζ по однородности. Пользуясь некратностью $\lambda_j(\sigma,\ 0)$ при $\sigma\neq 0$, выберем $c_2>0$ так, чтобы $|\operatorname{Re}\tau-\lambda_j(\sigma,\ 0)|\leqslant c_2(|\tau|+|\sigma|)$ не более чем для одного j. Если такое j имеется, то соответствующий множитель $|\tau-\lambda_j(\sigma,\ \zeta)|$ оценим через $(-\operatorname{Im}\tau+|\zeta|^{2b})$, а произведение остальных множителей при $\varepsilon(|\tau|+|\sigma|)>|\zeta|^{2b}$, если $\varepsilon>0$ достаточно мало, можно оценивать через $|\tau|^{k-1}$. Это и дает (15).

Мы не будем подробно проводить вывод эквивалентности (II) и (III). Из соображений непрерывности общий случай сводится к фиксированному $\zeta/|\zeta|$, а тогда эквивалентность следует из рассмотрения разложения корней гиперболического полинома по $|\sigma|$ (лемма 4.2): $\operatorname{Im}\lambda_j(\sigma,\ \zeta)=\operatorname{Im}\mu_j(\sigma,\ \zeta)+o(1)$. Подчеркнем важность условия на μ_j, благодаря которому $\operatorname{Im}\lambda_j(\sigma,\ \zeta)$ не может стремиться к нулю при $|\sigma|\to\infty$. Существенность этого условия показывает пример полинома $P(\tau,\ \sigma,\ \zeta)=\tau^2+2\tau\sigma-2i\tau\zeta^2-\zeta^4$, для которого лишь оно не выполнено.

Если рассмотреть общий (не обязательно квазиоднородный) плюрипараболический полином, то оценка (1) будет иметь место при $\operatorname{Im}\tau<c_1$ для некоторого $c_1<0$. Из этой оценки немедленно следует экспоненциальная корректность плюрипараболических полиномов.

Мы закончим этот пункт описанием одного класса примеров плюрипараболических полиномов. Пусть $Q(\tau,\ \sigma)$ — однородный строго гиперболический полином и V — его конус гиперболичности. Пусть имеется однородное полиномиальное отображение F степени $2b$ из $\mathbb{R}^m_\zeta$ в $\mathbb{C}^{l+1}_{(\tau,\sigma)}$. Пусть $\operatorname{Im} f(\zeta)$ является V-эллиптическим, т. е. $\operatorname{Im} F(\zeta)$ является внутренней точкой V при $\zeta\neq 0$. Тогда полином

$$P(\tau,\ \sigma,\ \zeta)=Q(\tilde{\tau}-F(\zeta)),\quad \tilde{\tau}=(\tau,\ \sigma),$$

является плюрипараболическим.

ГЛАВА IV

НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СВЕРТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

0.1. Целью настоящей главы является построение варианта теории сверточных уравнений в $\mathbb{R}^n_+$, содержащей, в качестве частного случая, теорию неоднородной задачи Коши в полупространстве для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Под *неоднородной задачей Коши*, скажем в $\mathscr{S}$ для дифференциального оператора

$$P(D_t, D_y) = \sum_{j=0}^{m} P_j(D_y) D_t^{m-j} \tag{1}$$

понимается задача определения функции $u(t, y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению в $\mathbb{R}^n_+$:

$$(P(D_t, D_y) u)(t, y) = f(t, y), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2}$$

и имеющей заданные данные Коши до порядка $m - 1$:

$$\left(D_t^k u\right)(0, y) = \varphi_k(y), \quad k = 0, \ldots, m-1. \tag{3}$$

Здесь $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ и $\varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $k = 0, \ldots, m-1$.

0.2. В гл. II мы несколько условно назвали *однородной* задачей Коши задачу обращения оператора $P(D)$ на $\mathscr{S}_+$. Напомним, что функции из $\mathscr{S}_+$ при $t = 0$ имеют нуль бесконечного порядка, поэтому в случае уравнения на $\mathscr{S}_+$ мы требуем, чтобы у решения обращались в нуль не только производные до порядка $m - 1$, $m = \deg_\tau P$, но и все последующие (соответственно и правая часть имеет нуль бесконечного порядка). Чтобы отказаться от этих излишних требований, естественно рассмотреть в качестве пространства решений пространство таких функций, которые имеют нуль в точности порядка $m - 1$. Нам будет удобно функции в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ рассматривать как функции на $\mathbb{R}^n$, продолженные нулем для $t < 0$. Более формально, в качестве пространства правых частей в (2) вместо $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ будем рассматривать изоморфное ему пространство

$$\mathscr{S}_{[+]} = \{\varphi_+ = \theta_+\varphi, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\}, \ ^1) \tag{4}$$

а в качестве пространства решений будем рассматривать подпространство

$$\mathscr{S}^{\{m\}}_{[+]} = \{\varphi_+ \in \mathscr{S}_{[+]}, \quad (D^k_t\varphi_+)(+0) = 0, \quad k = 0, \ldots, m-1\}, \tag{4'}$$

отвечающее натуральному m. Определено действие дифференциального оператора

$$P(D_t, D_y)\colon \mathscr{S}^{\{m\}}_{[+]} \to \mathscr{S}_{[+]}. \tag{5}$$

Под однородной задачей Коши мы теперь будем понимать задачу обращения оператора (5).

0.3. При такой интерпретации однородной задачи легко перейти к неоднородной задаче Коши. Этому сведению мы предпошлем следующие замечания.

Напомним, что действие дифференциального оператора на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ согласовано с каноническим изоморфизмом $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+) \approx \approx \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)_\oplus$. Это действие можно перенести и на $\mathscr{S}_{[+]}$ ввиду изоморфизма $\mathscr{S}_{[+]} \approx \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$, однако так определенное действие дифференциального оператора на $\mathscr{S}_{[+]}$ не согласовано с вложением $\mathscr{S}_{[+]}$ в пространство распределений $(\mathscr{O}')_+$. Образы дифференциальных операторов при этих двух определениях различаются на распределение, сосредоточенное при $t = 0$. Найдем явный вид этого распределения, т. е. вычислим разность $Pu_+ - (Pu)_+$, $u \in \mathscr{S}$.

Лемма. *Пусть P — оператор* (1). *Тогда* $\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ *имеем*

$$P(D_t, D_y)\,u_+ - (P(D_t, D_y)\,u)_+ = \sum_{j=1}^{m} h_j(y)\,D_t^{j-1}\delta(t), \tag{6}$$

где

$$h_j(y) = -i \sum_{k=0}^{m-j} \left(P_k(D_y)\,D_t^{m-j-k}u\right)(0, y). \tag{7}$$

Доказательство. По существу равенство (6) надо проверить для случая обыкновенного дифференциального оператора $P(D) = D^l_t$, т. е. для функции $v(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ проверить равенство (в смысле распределений)

$$D^l(\theta_+v) - \theta_+D^lv = \frac{1}{i}\sum_{r=0}^{l-1}\left(D_t^{l-1-r}v\right)(0)\,D^r\delta(t). \tag{8}$$

---

[1]) Напомним, что $\theta_+(t)$ — характеристическая функция полупрямой $t > 0$.

Если равенство (8) доказано, то, заменяя $v(t)$ на $u(t, y)$, мы получим, что левая часть (6) равна

$$\sum_{k=0}^{m}\left[D_t^{m-k}(P_k(D_y)u(t, y))_+ - \left(D_t^{m-k}P_k(D_y)u(t, y)\right)_+\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{m-k}\left(D_t^{m-k-j}P_k(D_y)u\right)(0, y)\,D_t^{j-1}\delta(t).$$

Меняя порядки суммирования, придем к равенствам (6), (7).

Докажем (8). Это соотношение означает, что для любой функции $\varphi(t)\in\mathscr{D}$

$$\int_0^\infty\left[v(t)(-D_t)^l\varphi(t) - D_t^l v(t)\varphi(t)\right]dt =$$

$$= -i\sum_{r=0}^{l-1}D_t^{l-r-1}v(0)(-D_t)^r\varphi(0).$$

Последнее равенство легко проверяется последовательным интегрированием по частям.

Пусть $u(t, y)$ — решение задачи (2), (3). Тогда в силу леммы функция $u_+ = \theta_+ u$ удовлетворяет уравнению в распределениях

$$P(D_t, D_y)u_+ = f_+ + \sum_{j=1}^{m}h_j(y)D_t^{j-1}\delta(t), \tag{9}$$

где в силу (7)

$$h_j(y) = -i\sum_{k=0}^{m-j}P_k(D_y)\varphi_{m-j-k+1}(y), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

При дополнительном предположении

$$P_0(\eta)\neq 0 \quad \forall\eta\in\mathbb{R}^{n-1} \tag{11}$$

задачи (2), (3) и (9) оказываются эквивалентными в том смысле, что каждому распределению $f_+ + \sum h_j D_t^{j-1}\delta(t)$, $f\in\mathscr{S}_{[+]}$, $h_j\in\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, можно сопоставить набор функций $\{f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, $f\in\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $\varphi_j\in\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ таким образом, что сужение u решения u_+ уравнения (9) будет решением неоднородной задачи Коши (2), (3). Аккуратно проверим последнее утверждение.

Пусть $u_+\in\mathscr{S}_{[+]}$ — решение (9) с заданными $f_+\in\mathscr{S}_{[+]}$ и $h_j\in\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, и пусть u, $f\in\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ — сужения u_+, f_+ на полупространство $t > 0$. Сначала проверим, что u — решение уравнения (2). Если φ — финитная функция, носитель которой лежит в полупространстве $t > 0$, то в силу (9) $(u, P(-D)\varphi) = (f, \varphi)$, т. е. при $t > 0$ (2) выполняется в смысле распределений. Из гладкости u, f следует, что (2) выполнено в обычном смысле. Но тогда в силу леммы функции $h_j(y)$ и данные Коши (3) должны быть связаны соотношениями (10). Перепишем эти соотношения, полагая $j = m, m-1, \ldots$:

$$\begin{aligned} &P_0(D_y)\varphi_1 = ih_m, \\ &P_0(D_y)\varphi_2 = ih_{m-1} - P_1(D_y)\varphi_1, \\ &P_0(D_y)\varphi_3 = ih_{m-2} - P_1(D_y)\varphi_2 - P_2(D_y)\varphi_1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &P_0(D_y)\varphi_m = ih_1 - P_1(D_y)\varphi_{m-1} - \ldots - P_{m-1}(D_y)\varphi_1. \end{aligned} \tag{12}$$

Если выполнено (11), то согласно теореме I.4.3 оператор

$$P_0(D_y)\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}_y^{n-1}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}_y^{n-1})$$

имеет непрерывный обратный, поэтому из системы (12) мы, зная функции $h_j \in \mathscr{S}$, можем однозначно восстановить данные Коши $\varphi_j \in \mathscr{S}$.

Ввиду сказанного естественно продолжить шкалу $\mathscr{S}_{[+]}^{\{m\}}$ на отрицательные показатели, полагая

$$\mathscr{S}_{[+]}^{\{-m\}} = \Big\{\varphi = \varphi_+ + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y)\, D_t^{j-1}\delta(t), \quad \varphi_+ \in \mathscr{S}_{[+]},$$

$$\varphi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad j = 1, \ldots, m\Big\}. \tag{4''}$$

Тогда мы можем интерпретировать неоднородную задачу Коши как задачу обращения оператора

$$P(D)\colon \mathscr{S}_{[+]} \to \mathscr{S}_{[+]}^{\{-m\}}. \tag{5'}$$

В пространства (4), (4′), (4″) можно естественным образом внести топологию и определить вложения $\mathscr{S}_{[+]}^{\{m\}} \subset \mathscr{S}_{[+]}^{\{m-1\}} \subset \ldots$ Тогда можно определить индуктивный предел

$$\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathscr{S}_{[+]}^{\{m\}}.$$

Это пространство состоит из тех и только тех $f \in (\mathscr{O}')_+$, сужения $p_\oplus f$ которых принадлежат $\mathscr{S}_\oplus$. Задачи обращения операторов (5), (5′) являются частными случаями формально более общей задачи обращения оператора

$$P(D)\colon \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}} \to \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}. \tag{5''}$$

Из результатов этой главы будет следовать, что эти три задачи эквивалентны, так что разрешимость однородной задачи Коши (в смысле обращения оператора (5) эквивалентна разрешимости неоднородной задачи Коши (в смысле обратимости (5′)).

Определения (4), (4′), (4″) тривиально переносятся на пространство $\mathscr{O}$, и наряду с задачей (5″) можно рассматривать задачу обращения оператора

$$P(D)\colon \mathscr{O}_{[+]}^{\{-\infty\}} \to \mathscr{O}_{[+]}^{\{-\infty\}}. \tag{13}$$

0.4. В настоящей главе задачу о решении дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в пространствах $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, мы включим в более общую задачу о решении сверточных уравнений в этих пространствах. Для этого предварительно надо получить описания пространств свертывателей $\mathfrak{C}(\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]})$, $\mathfrak{C}(\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]})$. Эта задача сводится к выделению таких распределений из $(\mathscr{O}')_+ = \mathfrak{C}(\mathscr{S}_+)$ или из $(\mathscr{K}')_+ = \mathfrak{C}(\mathscr{O}_+)$, свертки с которыми сохраняют гладкость распределений справа. Будет доказано, что этим свойством обладают те и только те $A \in (\mathscr{O}')_+$, $(\mathscr{K}')_+$, символы которых $\widehat{A}(\tau, \eta)$ по переменной τ в окрестности бесконечности разлагаются в асимптотический ряд Лорана. Последнее условие является аналогом для пространств $\mathscr{M}^+$, $\mathscr{L}^+$ известного условия трансмиссии (гладкости) Буте де Монвеля [1] и М. И. Вишика, Г. И. Эскина [1] для однородных эллиптических символов. Описав свертыватели на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, мы по схеме глав I, II покажем, что разрешимость сверточного уравнения $A * u = f$ на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ эквивалентна существованию у этого уравнения фундаментального решения $G \in \mathfrak{C}(\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]})$. В случае дифференциальных операторов, т. е. $A = P(D)\delta(x)$, к условию обратимости $P(D)$ в $\mathscr{S}_+$ (т. е. к однородному условию И. Г. Петровского) добавляется условие (11).

В техническом плане центр тяжести главы лежит в изучении шкал функциональных пространств, элементы которых обладают большей гладкостью при $t > 0$, чем во всем пространстве. Пространства (4)—(4″) являются «предельными» для этих шкал. При этом возникают новые пространства распределений на прямой $\mathbb{R}_t$. Изучению одномерной теории посвящен § 1. В многомерном случае возникают пространства, являющиеся тензорными произведениями пространств § 1 и пространств гл. I, изучению этих пространств и сверточных уравнений в них посвящен § 2.

§ 1. Шкалы пространств распределений, обладающих дополнительной гладкостью при $t > 0$, и сверточные уравнения в этих шкалах (одномерный случай)

Во введении мы ввели пространство $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Настоящий параграф посвящен детальному изучению этого пространства в одномерном случае. Мы изучим шкалы пространств, для которых это пространство является предельным, изучим свертку и преобразование Фурье в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. В конце параграфа мы построим аналогичную теорию для пространства $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$.

1.1. Биградуировка по гладкости в пространствах $H^{(s)}_{(l)}(\mathbb{R})$. Рассмотрим канонический проектор

$$p_{\oplus}\colon H^{(r)}_{(l)}(\mathbb{R}) \to H^{(r)}_{(l)}(\mathbb{R})_{\oplus}. \tag{1}$$

Образ $p_{\oplus}f$ заданного элемента $f \in H^{(r)}_{(l)}$ может обладать большей гладкостью, чем f. Тем самым на $H^{(r)}_{(l)}$ возникает дополнительная градуировка по гладкости. Итак, при $q > r$ определим пространство

$$H^{(r|q)}_{(l)} = \{f \in H^{(r)}_{(l)}, \quad p_{\oplus}f \in H^{(q)}_{(l)\oplus}\}, \tag{2}$$

и снабдим его банаховой нормой

$$\|f\|^{(r|q)}_{(l)} = \|f\|^{(r)}_{(l)} + \|p_{\oplus}f\|^{(q)}_{(l)}. \tag{3}$$

Замечание 1. Пусть $f \in H^{(r|q)}$ и $f_0 \in H^{(q)}_{(l)}$ — представитель класса смежности $p_{\oplus}f$. Тогда $p_{\oplus}(f - f_0) = 0$, т. е. $f_- = f - f_0 \in H^{(r)}_{(l)-}$. Таким образом, определение (2) эквивалентно следующему определению:

$$H^{(r|q)}_{(l)} = \{f = f_0 + f_-, \; f_0 \in H^{(q)}_{(l)}, \; f_- \in H^{(r)}_{(l)-}\}. \tag{2'}$$

Нас в этой главе будет интересовать не само пространство (2), а его подпространство $H^{(r|q)}_{(l)+}$, состоящее из элементов этого пространства, сосредоточенных при $t > 0$. Прежде чем детально изучить структуру $H^{(r|q)}_{(l)+}$, мы более подробно остановимся на свойствах сужения проектора (1) на подпространство $H^{(r)}_{(l)+}$, т. е. рассмотрим проектор

$$p_{\oplus}\colon H^{(r)}_{(l)}(\mathbb{R})_+ \to H^{(r)}_{(l)}(\mathbb{R})_{\oplus}. \tag{1_+}$$

Для простоты будем считать, что r — целое (общий случай разобран в [14], с. 274—276).

Предложение. (i) *При $r \leqslant 0$ отображение (1_+) сюръективно и имеет конечномерное ядро размерности r, состоящее из распределений вида*

$$\sum_{j=1}^{r} c_j D^{j-1}\delta(t), \quad (c_1, \ldots, c_{-r}) \in \mathbb{C}^{-r}. \tag{4}$$

(ii) *При $r \geqslant 0$ отображение (1_+) инъективно, а его образ будет замкнутым подпространством коразмерности r, выделяемым уравнениями*

$$\varphi(0) = \ldots = (D^{r-1}\varphi)(0) = 0. \tag{5}$$

Доказательство. (i) Докажем сначала сюръективность (1_+). Пусть $f \in H^{(r)}_{(l)\oplus}$. Так как операторы $\delta_s^-(D)$ определяют градуировку по гладкости в фактор-пространствах, то найдется такой элемент $g \in H_{(l)\oplus}$, что $f = \delta^-_{-r}(D)\,g$. Обозначим через g_+ функцию на прямой, равную 0 при $t < 0$ и совпадающую с g при $t > 0$ [1]). Рассмотрим распределение $f_+ = \delta^-_{-r}(D)\,g_+$. Так как дифференциальный оператор $\delta^-_{-r}(D)$ сохраняет носитель, то $f_+ \in$

[1]) Ср. изоморфизм (II.3.22) при $m = 0$.

$\in H^{(r)}_{(l)+}$. С другой стороны, $p_{\oplus}f_+ = \delta^-_{-r}(D)\, p_{\oplus}g_+ = \delta^-_{-r}(D)\, g = p_{\oplus}f$. Положим

$$H^{(r)}[0] = H^{(r)}_{(l)+} \cap H^{(r)}_{(l)-}. \tag{6}$$

Правое пространство состоит из распределений, сосредоточенных при $t=0$. Очевидно, что это пространство не зависит от l, так что наше обозначение корректно. Очевидно также, что ядро оператора (1_+) совпадает с $H^{(r)}[0]$. Нам теперь остается показать, что $H^{(s)}_+ \cap H^{(s)}_-$ состоит из распределений вида (4). В самом деле, если $\varphi \in H^{(s)}_+ \cap H^{(s)}_-$, то преобразование Фурье $\widehat{\varphi}(\tau)$ будет целой функцией, квадрат модуля которой интегрируем с весом $(1+|\tau|)^{2r}$ по любой вещественной прямой. По теореме Лиувилля отсюда следует, что $\widehat{\varphi}(\tau)$ будет полиномом степени не выше $-r-1$. Но тогда обратное преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ имеет вид (4).

(ii) Инъективность (1_+) при $r>0$ мы уже доказали. Условия (5) вытекают из результатов § II.3 (см. теорему 3.6).

Замечание 2. При доказательстве предложения (i) мы фактически построили непрерывный оператор

$$\pi^{(r)}_+ \colon H^{(r)}_{(l)\oplus} \to H^{(r)}_{(l)+}, \tag{7}$$

являющийся правым обратным к (1_+). Если через π_+ обозначить оператор отождествления $H_{(l)\oplus}$ и $H_{(l)+}$, то

$$\pi^{(r)}_+ = \delta^-_{-r}(D)\,\pi_+\delta^-_r(D). \tag{7'}$$

Отметим, что оператор (7′) (в отличие от (1_+)) не является каноническим и зависит от выбора градуирующего оператора $\delta^-_r(D)$. Варьируя градуирующие операторы в $H^{(r)}_{(l)\oplus}$, мы будем получать различные правые обратные к оператору (1_+).

1.2. Структура пространства $H^{(r|q)}_{(l)+}$. В этом пункте и ниже индексы r, q и т. д., характеризующие гладкость по t рассматриваемых нами распределений, будем считать целыми, как правило специально не оговаривая. Из определения пространства $H^{(r|q)}_{(l)+}$ следует, что $H^{(q)}_{(l)+}$ будет подпространством в нем. Сейчас мы опишем конечномерное подпространство в $H^{(r|q)}_{(l)+}$, дополнительное к $H^{(q)}_{(l)+}$.

Лемма. *Для целого μ положим*

$$z_\mu(t) = \delta^+_{-\mu}(D)\,\delta(t). \tag{8}$$

Тогда для любого l и любого $q>\mu$

$$z_\mu(t) \in H^{(\mu-1|q)}_{(l)+}, \quad z_\mu(t) \notin H^{(\mu)}_{(l)+}. \tag{9}$$

Доказательство. Для простоты ограничимся целыми $l \geqslant 0$. Для принадлежности (8) к $H^{(r)}_{(l)}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы

$$\int (1+\sigma^2)^r \left|\partial^k (\sigma - i)^{-\mu}\right|^2 d\sigma, \quad k = 0, \ldots, l.$$

Очевидно, что эти интегралы сходятся при $r \leqslant \mu - 1$ и расходятся при $r \geqslant \mu$. Так как символ $(\sigma - i)^{-\mu}$ голоморфен при $\operatorname{Im}\tau \leqslant 0$, то носитель (8) принадлежит полупрямой $t \geqslant 0$. Итак, мы доказали, что

$$z_\mu \in H^{(\mu-1)}_{(l)+}, \quad z_\mu \notin H^{(\mu)}_{(l)}. \tag{9'}$$

Чтобы закончить доказательство (9), проверим, что

$$p_\oplus z_\mu(t) \in \mathscr{S}_\oplus. \tag{9''}$$

Согласно определению п. д. о. (8) при $\mu > 0$ означает, что

$$z_\mu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{i \exp(i\sigma t)}{(\sigma - i)^\mu} d\sigma. \tag{8'}$$

Учитывая экспоненциальное убывание $\exp(it\tau)$ при $t > 0$, $\operatorname{Im}\tau < 0$ и при $t < 0$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, мы получим, что $z_\mu(t) = 0$ при $t < 0$, а при $t > 0$ интеграл (8′) равен вычету подынтегральной функции $i\exp(it\tau)(\tau - i)^{-\mu}$ в точке $\tau = i$, т. е.

$$z_\mu(t) = \frac{i^\mu t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} e^{-t}, \quad t > 0, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+, \tag{8''}$$

откуда следует (9″) при $\mu > 0$. При $\mu < 0$ п. д. о. $\delta^+_{-\mu}(D)$ будет дифференциальным, а тогда $p_\oplus z_\mu \equiv 0$.

Следствие. *Для целых $r < q$ определим конечномерное пространство распределений*

$$\delta^+_{-q} H^{(r-q)}[0] = \left\{ f = \sum_{j=1}^{q-r} c_j D^{j-1} \delta^+_{-q}(D)\,\delta(t) \right\} \in H^{(r)}_{(\infty)+}. \tag{10}$$

Тогда (10) *является подпространством в* $H^{(r|q)}_{(l)+}$ $(\forall l \in \mathbb{R})$, *дополнительным к* $H^{(q)}_{(l)+}$.

Предложение 1. *При целых $r < q$ каждое распределение $f \in H^{(r|q)}_{(l)+}$ однозначно представляется в виде*

$$f = f_0 + f_1, \quad f_0 \in H^{(q)}_{(l)+}, \quad f_1 \in \delta^+_{-q} H^{(r-q)}[0], \tag{11}$$

причем норма (3) *на* $H^{(r|q)}_{(l)+}$ *эквивалентна норме*

$$\|f_0\|^{(q)}_{(l)} + \|f_1\|^{(r)}_{(l)}, \tag{3'}$$

индуцированной разложением (11).

Доказательство. 1) Разберем сначала случай $q < 0$. Ввиду замечания 2 из п. 1.1 положим

$$f = \pi^{(q)}_+ p_\oplus f + f', \quad \pi^{(q)}_+ p_\oplus f \in H^{(q)}_{(l)+}, \quad f' \in H^{(r)}[0],$$

причем в силу непрерывности оператора (7)

$$\|\pi^{(q)}_+ p_\oplus f\|^{(q)}_{(l)} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|p_\oplus f\|^{(q)}_{(l)} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|^{(r|q)}_{(l)}. \tag{12}$$

Итак, при $q < 0$ достаточно построить разложение (11) на конечномерном пространстве распределений $H^{(r)}$ $[0]$:

$$H^{(r)}[0] = H^{(q)}[0] + \delta_{-q}^{+}(D)\,H^{(r-q)}[0].$$

В самом деле, левое пространство состоит из распределений $P(D)\delta(t)$, где $P(\tau)$ — полином степени не выше $-r-1$. Обозначив через $P_1(\tau)$ остаток от деления $P(\tau)$ на полином $\delta_{-q}^{+}(\tau)$, получим искомое разложение

$$P(D)\,\delta(t) = \delta_{-q}^{+}(D)\,P_0(D)\,\delta(t) + P_1(D)\,\delta(t),$$

где $P_1(D)\delta \in H^{(q)}[0]$, $\delta_{-q}^{+}P_0(D)\,\delta(t) \in \delta_{-q}^{+}H^{(r-q)}[0]$. Если обозначить через $\lambda^{(r|q)}$ проектор (конечномерный)

$$\lambda^{(r|q)}\colon\ H^{(r)}[0] \to H^{(r)}[0] \quad (P(D)\,\delta \mapsto P_1(D)\,\delta), \tag{13}$$

то в разложении (11) компонента f_0 имеет вид

$$f_0 = \pi_{+}^{(q)}p_{\oplus}f + \lambda^{r|q}\left(f - \pi_{+}^{(q)}p_{\oplus}f\right). \tag{11'}$$

Проверим эквивалентность норм (3) и (3'). Поскольку $p_{\oplus}f_1 = 0$ при $f_1 \in \delta_{-q}^{+}H^{(r-q)}[0]$, $q<0$, то

$$\|f\|_{(l)}^{(r|q)} \leqslant \|f_0\|_{(l)}^{(r)} + \|p_{\oplus}f_0\|_{(l)}^{(q)} + \|f_1\|_{(l)}^{(r)} + \|p_{\oplus}f_1\|_{(l)}^{(q)} \leqslant 2\|f_0\|_{(l)}^{(q)} + 2\|f_1\|_{(l)}^{(r)}.$$

Для оценки нормы (3') через (3) с учетом (11) достаточно показать, что

$$\|f_0\|_{(l)}^{(q)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|f\|_{(l)}^{(r|q)}, \tag{14}$$

где f_0 имеет вид (11'). В силу (12) можно считать, что $p_{\oplus}f = 0$, т. е. $f \in H^{(r)}[0]$. В этом случае оценка (14) вытекает из непрерывности проектора (13).

2) Рассмотрим случай $q > 0$. Поскольку $\delta_q^{+}(D)$ — дифференциальный оператор, то $g = \delta_q^{+}(D)f \in H_{(l)+}^{(r-q|0)}$ при $f \in H_{(l)+}^{(r|q)}$. Применяя к g уже доказанное предложение, мы получим

$$g = g_0 + g_1, \qquad g_0 \in H_{(l)+}, \qquad g_1 \in H^{(r-q)}[0],$$

причем норма $\|g\|_{(l)}^{(r-q|0)}$ эквивалентна $\|g_0\|_{(l)} + \|g_1\|_{(l)}^{(r-q)}$. Действуя на последнее разложение оператором $\delta_{-q}^{+}(D)$, получим (13). Нам теперь осталось проверить эквивалентность норм (3) и (3') для случая $q \geqslant 0$. Для оценки (3') через (3) достаточно проверить (14). Имеем

$$\|f_0\|_{(l)}^{(q)} = \|g_0\|_{(l)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|g\|_{(l)}^{(r-q|0)} =$$
$$= \mathrm{const}\cdot\left(\|\delta_q^{+}f\|_{(l)}^{(r-q)} + \|p_{\oplus}\delta_q^{+}f\|_{(l)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\cdot\left(\|f\|_{(l)}^{(r)} + \|\delta_q^{+}p_{\oplus}f\|_{(l)}\right) \leqslant \mathrm{const}\cdot\|f\|_{(l)}^{(r|q)}.$$

Для оценки (3) через (3') достаточно доказать неравенство

$$\|p_{\oplus}f\|_{(l)}^{(q)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|f\|_{(l)}^{(r)} \quad \forall f \in \delta_{-q}^{+}H^{(r-q)}[0]. \tag{15}$$

Пусть f имеет вид правой части (10). В силу включений (9″) левая часть (15) оценивается сверху через $\sum_{j=1}^{q-r}|c_j|$. С другой стороны, поскольку на конечномерном пространстве (10) все банаховы нормы эквивалентны, то правая часть оценивается снизу через $\sum|c_j|$.

Из доказанного предложения следует, что на подпространстве $H^{(q)}_{(l)+}$ норма $\|\ \|^{(q)}_{(l)}$ эквивалентна норме (3), так что это подпространство является замкнутым. Разложение (11) означает, что пространство $H^{(r|q)}_{(l)+}$ разлагается в прямую сумму $H^{(q)}_{(l)+}$ и конечномерного подпространства (10):

$$H^{(r|q)}_{(l)+} = H^{(q)}_{(l)+} \oplus \delta^{+}_{-q}H^{(r-q)}[0], \tag{16}$$

причем норма (3) эквивалентна естественной норме прямой суммы. Поскольку операторы $\delta^{+}_{k}(D)$ осуществляют градуировку по гладкости в каждом из прямых слагаемых в (16), то они задают градуировку по гладкости в левом пространстве (16), т. е. нами доказано

Предложение 2. *Для любого $k\in\mathbb{Z}$ имеет место изоморфизм*

$$\delta^{+}_{k}(D)H^{(r|q)}_{(l)+} = H^{(r-k|q-k)}_{(l)+}. \tag{17}$$

Замечание 1. Отметим, что изоморфизм (17) существенно использует разложение (16) и эквивалентность норм (3) и (3′). Дело в том, что, хотя п. д. о. $\delta^{+}_{k}(D)$ переводит $H^{(r)}_{(l)+}$ в $H^{(r-k)}_{(l-k)+}$, мы заранее ничего не можем сказать об образе $H^{(q)}_{(l)\oplus}$ под действием этого оператора при $k<0$. Изоморфизм (17) показывает, что оператор $\delta^{+}_{k}(D)$ сохраняет свойство распределений из $H^{(r|q)}_{(l)+}$ иметь большую гладкость при $t>0$. Аналогичными свойствами обладают п. д. о. $(D_t-z)^k$, $\operatorname{Im} z>0$. Общей задачей описания п. д. о. подобного рода мы займемся ниже.

В конечномерном пространстве $H^{(r-q)}[0]$ вместо базиса из распределений $D^{j-1}\delta(t)$, $j=1,\ldots,q-r$, можно выбрать базис из распределений $\delta^{+}_{q-r-j}(D_t)\,\delta(t)$, $j=1,\ldots,q-r$. Но тогда каждый элемент $\delta^{+}_{-q}H^{(r-q)}[0]$ однозначно разлагается по распределениям (8). Таким образом, из предложения 1 вытекает

Предложение 3. *Распределение $f\in H^{(r)}_{(l)+}$ принадлежит пространству $H^{(r|q)}_{(l)+}$, $q>r$, тогда и только тогда, когда оно представляется в виде*

$$f=\sum_{j=1}^{q-r} c_j z_{r+j}(t)+f_q, \tag{18}$$

где $f_q\in H^{(q)}_{(l)+}$; числа $c_1,\ldots,c_{q-r}$ однозначно определяются по f, *а норма* (3) **эквивалентна норме**

$$\sum_{j=1}^{q-r} |c_j| + \|f_q\|_{(l)}^{(q)}. \qquad (3'')$$

Замечание 2. При фиксированных r, q имеют место вложения $H_{(l)+}^{(r|q)} \subset H_{(l')+}^{(r|q)}$, $l' < l$, т. е. наши пространства образуют шкалу.

Если проследить за доказательством предложения 1, то нетрудно увидеть, что построенный нами проектор $H_{(l)+}^{(r|q)} \to H_{(l)+}^{(q)}$ (вдоль $\delta_{-q}^{+} H^{(r-q)}[0]$) перестановочен с вложениями, т. е. является оператором в шкале. Отсюда вытекает, что числа $c_1, \ldots, c_{q-r}$ и распределение f_q не меняются, если мы рассматриваем f как элемент пространства $H_{(\lambda)+}^{(r|q)}$ для различных $\lambda \leqslant l$.

1.3. Пространство $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ было определено во введении как индуктивный предел пространств (0.4), (0.4′), (0.4″). Сейчас мы покажем, что оно является предельным пространством для шкалы пространств $H_{(l)+}^{(r|q)}$. Ввиду вложений $H_{(l)+}^{(r|q)} \subset H_{(l')+}^{(r|q')}$, $q \geqslant q'$, $l \geqslant l'$, можно определить индуктивный предел $H_{(\infty)+}^{(r|\infty)} = \bigcap\limits_{q,l} H_{(l)+}^{(r|q)}$. Тогда имеет место изоморфизм

$$\mathscr{S}_{[+]}^{\{r\}} = H_{(\infty)+}^{(r|\infty)} \quad \forall r \in \mathbb{Z}. \qquad (19)$$

В самом деле, пусть $\varphi \in H_{(\infty)+}^{(r|\infty)}$, т. е. $\varphi \in H_{(l)+}^{(r|q)}$ $\forall q \in \mathbb{Z}$, $\forall l \in \mathbb{R}$. Тогда $p_{\oplus}\varphi \in \bigcap\limits_{q,l} H_{(l)\oplus}^{(q)} = \mathscr{S}_{\oplus}$. Пусть φ_0 — произвольный представитель класса смежности $p_{\oplus}\varphi \in \mathscr{S}_{\oplus}$. Тогда, очевидно, $\varphi_+ = \theta_+ \times \times \varphi_0 \in H_{(\infty)+}^{(0|\infty)}$. Если $r < 0$, то $\varphi - \varphi_+ \in H^{(r)}[0]$, откуда $\varphi \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{r\}}$. Если $r > 0$, то $\varphi = \varphi_+ \in H_{(\infty)+}^{(r)}$, откуда (см. п. II.3.6) $(D^j\varphi_+)(0) = 0$, $j = 0, \ldots, r-1$, т. е. $\varphi \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{r\}}$.

Итак, мы доказали, что правое пространство (19) содержится в левом; противоположное включение очевидно.

Сопоставляя (19) и (17), получим изоморфизм

$$\delta_k^{+}(D)\mathscr{S}_{[+]}^{\{r\}} = \mathscr{S}_{[+]}^{\{r-k\}}. \qquad (17')$$

Предложение 3 из п. 1.2 позволяет построить разложение типа (18) в пространствах $\mathscr{S}_{[+]}^{\{r\}}$. Справедливо

Предложение 1. *Для каждого $f \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ можно указать такое r (целое), что для любого $q > r$ имеет место разложение (18) с остаточным членом $f_q \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{q\}}$. Числа c_j однозначно определяются по f и не зависят от q.*

Обратно, если для распределения $f \in (\mathscr{O}')_+$ при любом достаточно большом q имеет место разложение (18) с остаточным членом $f_q \in H_{(\infty)+}^{(q)}$, то $f \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$.

Доказательство. Согласно определению $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ можно найти такое r, что $f \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{r\}}$ и, следовательно, $f \in H_{(l)+}^{(r|q)}$ для любых l и $q \geqslant r$. Ввиду предложения 3 из предыдущего пункта мы можем написать разложение (18), причем (замечание 2 из п. 1.2) коэффициенты c_j не зависят от q и l и $f_q \in H^{(q)}_{(l)+}$. Согласно лемме 1.2 $p_\oplus f_q = p_\oplus f - \sum c_j p_\oplus z_{r+j} \in \mathscr{S}_\oplus$, т. е. $f_q \in \mathscr{S}^{\{q\}}_{[+]}$.

Обратно, из разложения (18) следует, что $f \in H^{(r)}_{(\infty)+}$ и $p_\oplus f \in H^{(q)}_{(\infty)\oplus}$ для любого q, т. е. $p_\oplus f \in \mathscr{S}_\oplus$. Но тогда $f \in \mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$.

Ввиду замечания 1 из п. 1.2 предложение 1 можно несколько усилить.

Предложение 1'. *Для каждого $f \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ можно указать такое r, что при $q > r$ и любом $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, имеет место разложение*

$$f = \sum_{j=1}^{q-r} c_j(z)(D_t - z)^{-r-j}\,\delta(t) + f_q, \tag{18'}$$

где $f_q \in \mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$.

Обратно, если для $f \in (\mathcal{O}')_+$ при некотором $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, и любом достаточно большом q имеет место разложение (18') с остатком $f_q \in H^{(q)}_{(\infty)+}$, то $f \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$.

Если $f \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, то через r обозначим наибольшее целое число, для которого $f \in \mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$ (т. е. $f \notin \mathscr{S}^{\{r+1\}}_{[+]}$). Тогда наибольшая степень, в которой берется оператор $(D_t - z)$, в (18'), равна $-r-1$. Это число мы обозначим через $\deg f$, т. е.

$$\{\deg f = -r-1\} \Leftrightarrow \{f \in \mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]},\ f \notin \mathscr{S}^{\{r+1\}}_{[+]}\}.$$

Из разложения (18) вытекает цепочка вложений

$$\ldots \subset \mathscr{S}^{\{r+1\}}_{[+]} \subset \mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]} \subset \mathscr{S}^{\{r-1\}}_{[+]} \subset \ldots \subset \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}.$$

Ввиду предложения 1 из п. 1.2 пространство $\mathscr{S}^{\{r+1\}}_{[+]}$ является замкнутым подпространством $\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$ коразмерности 1, причем топология любого пространства $\mathscr{S}^{\{p\}}_{[+]}$ эквивалентна топологии, индуцированной на нем пространством $\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$, $r < p$. Последнее также относится и к «предельному» пространству $\mathscr{S}^{\{\infty\}}_{[+]} = \mathscr{S}_+$. Из сказанного выше следует, что $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ является строгим индуктивным пределом (см. замечание из п. 3 Дополнения к гл. I) и, следовательно, регулярным индуктивным пределом.

1.4. Свертка в пространстве $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Поскольку $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \subset (\mathcal{O}')_+$, то для элементов f', f'' этого пространства определена операция свертки. Мы сейчас покажем, что эта свертка лежит в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, т. е. справедливо

Предложение. *$\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ является подалгеброй алгебры $(\mathcal{O}')_+$ (относительно свертки). При этом*

$$\deg(f' * f'') = \deg f' + \deg f'', \quad f', f'' \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}.$$

Доказательство основано на разложении (18) и том обстоятельстве, что (см. (8))

$$z_\mu(t) * z_\nu(t) = z_{\mu+\nu}(t).$$

Если записать f', f'' в виде формальных рядов (18)

$$f' = \sum_{j=0}^{\infty} c'_j z_{p'+j+1}, \quad f'' = \sum_{k=0}^{\infty} c''_k z_{p''+k+1},$$

то свертку $f' * f''$ можно записать в виде формального ряда

$$f' * f'' = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z_{p'+p''+2+j}, \quad c_j = \sum_{k=0}^{j} c'_{j-k} c''_k.$$

Для аккуратного доказательства нам следует проверить, что этот ряд является разложением типа (18). Более точно, пусть $f'_{q'} \in H^{(q')}_{(\infty)+}$, $f''_{q''} \in H^{(q'')}_{(\infty)+}$ — остаточные члены в разложениях (18) для f' и f''. Тогда мы покажем, что для любого $q \geqslant p' + p''$ можно подобрать такие q', q'', что

$$f_q = f' * f'' - \sum_{j=0}^{q'-p'-1} \sum_{k=0}^{q''-p''-1} c'_j c''_k z_{2+p'+p''+j+k} \in H^{(q)}_{(\infty)+}. \tag{20}$$

Имеем

$$f_q = f'_{q'} * f''_{q''} + \sum_{j=0}^{q'-p'-1} c'_j \delta^{+}_{-p'-1-j} f''_{q''} + \sum_{j=0}^{q''-p''-1} c''_j \delta^{+}_{-p''-1-j} f'_{q'} = f_q^{(1)} + f_q^{(2)} + f_q^{(3)}.$$

Ясно, что $f_q^{(2)} \in H^{(q''+p'+1)}_{(\infty)+}$, $f_q^{(3)} \in H^{(q'+p''+1)}_{(\infty)+}$. Согласно теореме вложения $f'_{q'} \in H^{(q')}_{(\infty)+} \subset C^{(q'-1)}_{(\infty)+}$ при $q' > 1$, $f''_{q''} \in C^{(q''-1)}_{(\infty)+}$, $q'' > 1$. Таким образом,

$$f_q^{(1)} = f'_{q'} * f''_{q''} \subset C^{(q'+q''-2)}_{(\infty)+} \subset H^{(q'+q''-2)}_{(\infty)+}.$$

Итак, зададимся произвольным $q > p' + p'' + 2$ и выберем q', q'' таким образом, чтобы

$$\min\{q'' + p' + 1,\ q' + p'' + 1,\ q' + q'' - 2\} \geqslant q.$$

Тогда получим включение (20).

1.5. Преобразование Фурье в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Пространство $\mathscr{H}^+$. Обозначим через $\mathscr{H}^+$ подпространство $\mathscr{M}^+$, состоящее из функций $\psi(\tau)$, удовлетворяющих условиям:

(i) Найдется такое целое $r = r(\psi)$, что $\psi(\tau) \in C^{(\infty)+}_{(r)}$, т. е. функция $\psi(\tau)$ голоморфна в открытой полуплоскости $\operatorname{Im}\tau < 0$, бесконечно дифференцируема в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\tau \leqslant 0$ и удовлетворяет оценкам

$$|\partial^k \psi(\tau)| < c_k (1 + |\tau|)^{-r}, \quad \operatorname{Im}\tau \leqslant 0 \ (\partial^k\psi = \partial^k\psi/\partial\tau^k) \tag{21}$$

(ii) для любого целого $q > r$ и любого $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, можно подобрать такие константы c_j, $j = 1, \ldots, q - r$ (разумеется, зависящие от z), что

$$\psi(\tau) = \sum_{j=0}^{q-r} c_j (\tau - z)^{-r-j} + \psi_q(\tau), \tag{22}$$

где $\psi_q(\tau) \in C_{(q)}^{(\infty)+}$, так что

$$|\partial^k \psi_q(\tau)| < c_{kq}(1 + |\tau|)^{-q}, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant 0. \tag{22'}$$

Отметим свойства функций из $\mathscr{H}^+$, непосредственно вытекающие из приведенного определения

1) Условие (i) вытекает из (ii). Более того, ввиду разложений (22) оценку (21) можно усилить: если $\psi \in \mathscr{H}^+$ и имеет место (21), то $\forall k \in \mathbb{Z}$ справедлива оценка

$$|\partial^k \psi(\tau)| < c_k'(1 + |\tau|)^{-r-k}. \tag{21'}$$

Для доказательства (21′) надо записать ψ в форме (22) с $q \geqslant r + k$ и k раз продифференцировать это равенство.

2) Из 1) вытекает, что $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, функция $\psi \in \mathscr{H}^+$ разлагается в асимптотический ряд Лорана по степеням $\tau - z$. Ряд для производных $\partial^k \psi$ получается из исходного ряда путем дифференцирования.

3) Наименьшее целое $-r$, для которого справедлива оценка (21), обозначим через $\deg \psi$; это число совпадает со степенью первого члена в разложении (22). Если $\deg \psi = -r$, то $\psi \in C_{(r)}^{(\infty)+}$ и $\psi \notin C_{(r+1)}^{(\infty)+}$. Если $\psi \in \mathscr{S}^+ \subset \mathscr{H}^+$, то будем полагать $\deg \psi = -\infty$.

4) Поскольку $(\tau - z)^{-p} \in C_{(p)}^{(\infty)+}$ и $(\tau - z)^{-p} \notin C_{(p+1)}^{(\infty)+}$, то отсюда вытекает однозначность разложения (22). Сравнивая эти разложения при разных q, получим, что числа c_j не зависят от q.

5) Пространство $\mathscr{H}^+$ является подалгеброй алгебры $\mathscr{M}^+$ относительно умножения. Это утверждение доказывается повторением рассуждений предложения 1.4, и мы оставляем его читателю в качестве простого упражнения.

Предложение 1. *Преобразование Фурье—Лапласа порождает изоморфизм*

$$\mathscr{F}\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}} = \mathscr{H}^+. \tag{23}$$

Это равенство является изоморфизмом алгебр.

Доказательство. Если $f \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, то $f \in (\mathscr{O}')_+$ и существует преобразование Фурье — Лапласа $\widehat{f}(\tau) \in \mathscr{M}^+$. Покажем, что для $\widehat{f}$ выполнены условия (i), (ii), фигурирующие в определении класса $\mathscr{H}^+$.

(i) Если $f \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, то найдется такое p, что $f \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{p\}} \subset H_{(\infty)+}^{(p)}$. Но тогда $\widehat{f} \in H_{(p)}^{(\infty)+} \subset C_{(p)}^{(\infty)+}$.

(ii) Согласно предложению 1′ из п. 1.3 для распределения $f \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ можно написать разложение (18′) с произвольным $z \in$

$\in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, и $f_q \in H^{(q)}_{(\infty)+}$. Но тогда $\widehat{f}(\tau) = \sum_{j=0}^{q-r} (\tau - z)^{-r-j} + \widehat{f}_q(\tau)$, где $\widehat{f}_q(\tau) \in H^{(\infty)+}_{(q)} \subset C^{(\infty)+}_{(q)}$, т. е. для $\psi = \widehat{f}$ справедливо разложение (22). Итак, мы показали, что преобразование Фурье — Лапласа переводит $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{+}$ в $\mathcal{H}^{+}$. Нам осталось проверить сюръективность этого отображения.

Для этого надо заметить, что если $\psi(\tau)$ записано в виде (22), то $\psi(\tau)$ является обратным преобразованием Фурье распределения (18′), где $f_q \in \mathcal{F}^{-1} C^{(\infty)+}_{(q)} \subset H^{(q-1)}_{(\infty)+}$ (мы берем $q \geqslant 2$). Предложение доказано.

Предложение 2. *Распределение $f \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ является обратимым элементом этой алгебры тогда и только тогда, когда f — обратимый элемент алгебры $(\mathcal{O}')_+$.*

Ввиду изоморфизма (23) это утверждение является следствием аналогичного утверждения для алгебры $\mathcal{H}^+$. Справедливо

Предложение 3. *Для функции $\psi \in \mathcal{H}^+$ следующие условия эквивалентны*:

(a) $\psi^{-1}(\tau) \in \mathcal{H}^+$;

(b) $\psi^{-1}(\tau) \in \mathcal{M}^+$;

(c) *для некоторых $c \geqslant 0$ и μ справедлива оценка*

$$|\psi(\tau)| > c(1 + |\tau|)^{\mu}, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant 0;$$

(d) $\deg \psi(\tau) > -\infty$ *и* $\psi(\tau) \neq 0$ *при* $\operatorname{Im} \tau \leqslant 0$.

Доказательство. Импликации (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d) очевидны. (d)$\Rightarrow$(a). Пусть $-r = \deg \psi$. Тогда согласно (21)

$$|\partial^k \psi(\tau)| < c_k (1 + |\tau|)^{-r}, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant 0. \tag{24}$$

Покажем, что имеет место условие (c) $\mu = -r$, т. е.

$$|\psi(\tau)| > c(1 + |\tau|)^{-r}, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant 0. \tag{25}$$

В самом деле, из (22) для $q = r + 1$ и $z = i$ следует, что $\psi(\tau) - c_1(\tau - i)^{-r} = O(|\tau|^{-r-1})$ при $|\operatorname{Im} \tau| \to \infty$. Но тогда $\forall c < |c_1|$ можно указать такое R, что $|\psi(\tau)| > c(1 + |\tau|)^{-r}$ при $|\tau| \geqslant R$, $\operatorname{Im} \tau \leqslant 0$. Так как $\psi(\tau) \neq 0$ при $\operatorname{Im} \tau \leqslant 0$, то приходим к (25).

Итак, мы фактически доказали, что (d)$\Rightarrow$(c), и по доказанному в гл. II (c)$\Rightarrow$(b). Таким образом, если выполнено (d), то $\psi^{-1} \in \mathcal{M}^+$, и нам надо проверить, что это распределение удовлетворяет условиям (i), (ii).

Согласно формуле Лейбница

$$\partial^k \psi^{-1}(\tau) = \sum_{r_1 + \ldots + r_s = k} d_{r_1 \ldots r_s} \partial^{r_1} \psi \ldots \partial^{r_s} \psi \cdot \psi^{-s-1}.$$

С учетом оценок (24), (25) мы получим, что

$$|\partial^k \psi^{-1}(\tau)| < \mathrm{const} \cdot (1 + |\tau|)^{r}, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant 0. \tag{26}$$

Теперь мы построим для ψ^{-1} разложение вида (22). Для этого обозначим через Ψ_q сумму в правой части (22), а через Ψ —

формальный ряд Лорана, отвечающий $q=\infty$. Пусть Φ — обратный элемент к Ψ в кольце формальных рядов Лорана, т. е.

$$\Phi(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty} d_j(\tau-z)^{r-j}, \tag{27}$$

где коэффициенты $d_0, d_1, \ldots$ связаны с коэффициентами $c_0, c_1, \ldots$ из (22) рекурентными соотношениями

$$c_0 d_0=1, \quad \sum_{k=0}^{j} c_{j-k} d_k=0, \quad j=1,2, \ldots \tag{27'}$$

Через $\Phi_N(\tau)$ обозначим сумму первых N членов в (27). Положим

$$\Psi^{-1}(\tau)=\Phi_N(\tau)+\varphi_N(\tau). \tag{28}$$

Тогда наше утверждение сводится к доказательству оценок

$$|\partial^k\varphi_N(\tau)|<d_k(1+|\tau|)^{r-N}, \quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots \tag{29}$$

Для доказательства (29) запишем $\psi(\tau)=\Psi_M(\tau)+\psi_M(\tau)$ и в тождестве $\psi\psi^{-1}\equiv 1$ заменим ψ выражением (28). Тогда получим

$$\varphi_N(\tau)=\psi^{-1}(\tau)\,[(1-\Phi_N(\tau)\,\Psi_M(\tau))-\psi_M(\tau)\,\Phi_N(\tau)].$$

Обозначим квадратную скобку через $H_{MN}(\tau)$, и пусть, для определенности $M\geqslant N$. Покажем, что

$$|\partial^k H_{MN}(\tau)|<\beta_k(1+|\tau|)^{-N}, \quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots \tag{30}$$

Из неравенств (30) и (26) ввиду формулы Лейбница мы получим неравенства (29).

В силу соотношений (27′)

$$1-\Phi_N\psi_N=1-\sum_{j\leqslant N,k\leqslant M} c_j\,d_k(\tau-z)^{-j-k}=$$
$$=(\tau-z)^{-N}\left(k_0+k_1(\tau-z)^{-1}+\ldots+k_m(\tau-z)^{-M}\right).$$

Из этого равенства следует, что

$$|\partial^k(1-\Phi_N\Psi_M)|<\gamma_k(1+|\tau|)^{-N}.$$

Далее из неравенств

$$|\partial^k\psi_M|<\delta_k'(1+|\tau|)^{-r-M}, \quad |\partial^k\Phi_N|<\delta_k''(1+|\tau|)^{r}$$

и формулы Лейбница мы получим при $M\geqslant N$, что

$$|\partial^k(\Psi_M\Phi_N)|<\varepsilon_k(1+|\tau|)^{-N},$$

что и доказывает оценки (29). Предложение доказано.

1.6. Свертыватели и сверточные уравнения в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Выше мы уже изучили свертку на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$; теперь мы хотим аксиоматически определить операторы свертки. При этом надо иметь ввиду, что указанное пространство не инвариантно относительно сдвигов. С подобной ситуацией мы уже встречались раньше, требуя от операторов свертки перестановочности с теми сдвигами, которые переводят в себя рассматриваемое пространство.

Как легко видеть, если $\varphi \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ и для некоторого h сдвиг $T_h\varphi$ принадлежит $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, то $\varphi \in \mathscr{S}_+$. Пространство $\mathscr{S}_+$ не плотно в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, в силу чего оператор на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ не определяется своим сужением на $\mathscr{S}_+$.

К условию перестановочности со сдвигами очень близко условие перестановочности с дифференциальными операторами, о котором можно говорить в более общей ситуации. Воспользовавшись этим обстоятельством, дадим следующее

Определение. Непрерывный оператор A: $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \to \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ называется *оператором свертки*, если

(i) оператор A перестановочен с дифференциальными операторами;

(ii) оператор A коммутирует со сдвигами на подпространстве $\mathscr{S}_+ \subset \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$.

Предложение. *Для каждого оператора свертки*

$$A\colon \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \to \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \tag{31}$$

найдется такое распределение $f \in (\mathscr{O}')_+$, что

$$A\varphi = f * \varphi \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}, \tag{32}$$

где справа свертка понимается в смысле $\mathscr{O}'$.

Это предложение подсказывает определение свертывателей на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$:

$$\mathfrak{C}\left(\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}\right) = \{f \in (\mathscr{O}')_+,\ f * \varphi \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}\}. \tag{33}$$

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{C}\left(\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}\right) = \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}. \tag{34}$$

Доказательство. Правое пространство (34) содержится в левом в силу предложения 1.4. Противоположное включение вытекает из того, что $\delta(x) \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, откуда для любого $f \in \mathfrak{C}\left(\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}\right)$ имеем $f = f * \delta \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$.

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Сверточное уравнение*

$$A * u = f \tag{35}$$

однозначно разрешимо в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ тогда и только тогда, когда существует фундаментальное решение $G \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$: $A * G = G * A = \delta(x)$.

Доказательство. Существование фундаментального решения $G \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ вытекает из разрешимости (35), поскольку $\delta(x) \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Обратно, из существования фундаментального решения ввиду предложения 1.4. следует существование и единственность для уравнения (35).

Отметим, что фундаментальное решение существует тогда и только тогда, когда символ $\widehat{A}(\tau)\in\mathscr{H}^+$ удовлетворяет эквивалентным условиям предложения 3 из п. 1.5.

Доказательство предложения. 1) Если оператор (31) коммутирует с дифференциальными операторами, то он коммутирует с градуирующими операторами $\delta_k^+, k\in\mathbb{Z}_+$, а следовательно, и с обратными операторами $\delta_{-k}^{\pm}, k\in\mathbb{Z}_+$. Таким образом,

$$A\varphi=\delta_k^+A\delta_{-k}^{\pm}\varphi\quad\forall k\in\mathbb{Z}. \tag{36}$$

Поскольку операторы δ_k^+ на $(\mathcal{O}')_+$ коммутируют с операторами свертки con_f, $f\in(\mathcal{O}')_+$, то при доказательстве (32) можно ограничиться $\varphi\in\mathscr{S}_{[+]}^{\{k\}}$ для некоторого $k\in\mathbb{Z}_+$.

2) Согласно (ii) оператор A переводит $\mathscr{S}_+$ в себя. Поскольку $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ индуцирует на $\mathscr{S}_+$ топологию, эквивалентную исходной, то сужение A на $\mathscr{S}_+$ будет оператором свертки, а согласно теореме II.4.3. (i) найдется такое распределение $f\in(\mathfrak{D}')_+$, что

$$(A\varphi)(t)=(f*\varphi)(t)=(f,IT_t\varphi)\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}_+. \tag{32'}$$

3) Обозначим через A_0 оператор con_f: $\mathscr{S}_+\to\mathscr{S}_+$. Без ограничения общности мы можем считать, что f — регулярная функция, более того, $f\in C^{(m)}$ для некоторого $m>1$ (в противном случае заменим A на $\delta_{-p}^{\pm}A$, где p — достаточно велико; в этом случае f заменится на $\delta_{-p}^{\pm}f$). Тогда оператор A_0 по непрерывности продолжается до оператора (обозначим его также через A_0) A_0: $\mathscr{S}_{[+]}\to C^{(1)}$.

4) Рассмотрим теперь оператор $B=A-A_0$. Он обладает следующими свойствами:

(a) $(B\varphi)(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция при $t>0$, $(\varphi\in\mathscr{S}_{[+]})$;

(b) $B\varphi=0\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}_+$.

В силу (a) $\varphi\mapsto(B\varphi)(t_0)$ будет непрерывным линейным функционалом на $\mathscr{S}_{[+]}$ $\forall t_0>0$. Но тогда $\forall t>0$ найдется такое распределение $B_t\in(\mathscr{S}')_+$, что

$$(B\varphi)(t)=\left(B_t,\tilde{\varphi}\right)\qquad\forall\varphi\in\mathscr{S}_{[+]},$$

где $\tilde{\varphi}$ — произвольное гладкое продолжение $\varphi\in\mathscr{S}_{[+]}$ до элемента $\mathscr{S}$. Так как $B_t\in(\mathscr{S}')_+$, правая часть не зависит от выбора продолжения $\tilde{\varphi}$. Из условия (b) следует, что функционал B_t обращается в нуль на $\mathscr{S}_+$, т. е. $B_t\in(\mathscr{S}')_+\cap(\mathscr{S}')_-$. Как мы уже неоднократно отмечали выше, последнее пространство состоит из функционалов, являющихся линейными комбинациями конечного числа производных $\delta(t)$. Итак, мы доказали, что для любого $t>0$

$$(A\varphi)(t)=(f*\varphi)(t)+\sum_{j=0}^{p(t)}a_j(t)\left(D^j\varphi\right)(0)\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}_{[+]}. \tag{37}$$

5) Нашей целью является доказательство того, что все числа $p(t)$ равномерно ограничены сверху некоторым целым положи-

тельным числом $p-1$. Тогда на подпространстве $\mathscr{S}^{\{p\}}_{[+]}$ получим равенство

$$(A\varphi)(t)=(f*\varphi)(t).$$

Воспользовавшись (36) для $k=p-q$, мы распространим это равенство на любое подпространство $\mathscr{S}^{\{q\}}_{[+]}\subset\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, т. е. докажем наше утверждение.

6) Для доказательства равномерной ограниченности чисел $p(t)$ из (37) более детально изучим их свойства. Для этого подставим в (37) такую функцию $\varphi_k(t)$, у которой $(D^j\varphi_k)(0)=\delta_{kj}$[1]. Тогда (37) примет вид

$$(A\varphi_k)(t)=(f*\varphi_k)(t)+a_k(t).$$

Так как функции $(A\varphi_k)(t)$ и $(f*\varphi_k)(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t>0$, то и $a_k(t)$ обладает этим свойством. Тогда имеем

$$(DA\varphi_k)(t)=(f*D\varphi_k)(t)+a_k'(t), \tag{38′}$$

$$(AD\varphi_k)(t)=(f*D\varphi_k)(t)+a_{k-1}(t). \tag{38″}$$

Ввиду перестановочности оператора A и оператора дифференцирования левые части (38′), (38″) совпадают, откуда следуют рекуррентные соотношения

$$a_0'(t)=0,\quad a_k'(t)=a_{k-1}(t),\quad k=1,2,\ldots$$

Из этих соотношений, в свою очередь, следует, что $a_k(t)$ — полином степени k.

7) Итак, предположим, что для чисел $p(t)$ нет равномерной оценки сверху. Так как функции $a_k(t)$ являются полиномами, то множество точек $\mathbb{R}_+$, на которых хотя бы один из коэффициентов $a_k(t)$ равен 0, не более чем счетно. Но тогда дополнение к этому множеству имеет мощность континиума, и заведомо существует такая точка t_0, в которой $a_k(t_0)\neq 0$ для всех $k=0, 1, \ldots$. Таким образом, мы пришли к противоречию с условием конечности числа $p(t_0)$.

1.7. Пространство $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Заменяя в определениях (0.4), (0.4′), (0.4″) пространства $\mathscr{S}$ на $\mathscr{O}$, мы определим пространства $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}=\bigcup\limits_{p}\mathscr{O}^{\{p\}}_{[+]}$. Теория этих пространств и сверточных уравнений в них аналогична построенной выше теории в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, поэтому мы бегло остановимся только на тех моментах, где проявляются некоторые отличия.

Ввиду определения и изоморфизмов (17)

$$\mathscr{O}^{\{p\}}_{[+]}=\bigcup_{l}\bigcap_{s}H^{(p|s)}_{(l)+},\qquad \delta_k^{+}(D)\,\mathscr{O}^{\{p\}}_{[+]}=\mathscr{O}^{\{p-k\}}_{[+]}. \tag{39}$$

---

[1]) Можно взять, например, $\varphi_k(t)=t^k\chi(t)\theta_+(t)/k!$, где $\chi(t)\in\mathscr{S}$, $\chi(t)=1$, скажем, при $|t|\leqslant 1$, $\theta_+(t)$ — характеристическая функция полупрямой $t>0$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для каждого* $f \in \mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *можно указать такое целое* r, *что для любого* $q > r$ *имеет место разложение* (15) *с остаточным членом* $f_q \in \mathcal{O}^{\{q\}}_{[+]}$. *Числа* c_j *однозначно определяются по* f *и не зависят от* q.

Обратно, если для распределения $f \in (\mathcal{S}')_+$ *можно указать такое* $l \in \mathbb{R}$, *что при любом достаточно большом* q *справедливо разложение* (15) *с остаточным членом* $f_q \in H^{(q)}_{(l)+}$, *то* $f \in \mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$.

Поскольку $\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]} \subset (\mathcal{S}')_+$, то для элементов этого пространства определена операция свертки. По схеме предложения 1.4 доказывается

П р е д л о ж е н и е 2. $\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *является подалгеброй алгебры* $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))_+$ *относительно свертки.*

Для распределений $f \in \mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ естественным образом определяется их порядок $\deg f$, при свертке $f', f'' \in \mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ порядки этих распределений складываются.

Обозначим через $\mathcal{G}^+$ подпространство $\mathcal{L}^+$, состоящее из функций $\psi(\tau)$, голоморфных при $\operatorname{Im}\tau < 0$ и удовлетворяющих условию: для любого целого $q > r$ и любого $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, можно подобрать такие константы c_j, $j = 1, \ldots, q - r$, что имеет место разложение (22) с остаточным членом $\psi_q(\tau) \in \mathcal{L}^+$, для которого справедливы оценки

$$|\partial^k \psi_q(\tau)| < c_{kq} |\operatorname{Im}\tau|^{-\nu_k} (1 + |\tau|)^{-q}, \quad \operatorname{Im}\tau < 0. \tag{40}$$

Из приведенного определения вытекают аналоги замечаний из п. 1.5. В частности, ввиду разложения (22) оценку (40) можно усилить:

$$|\partial^k \psi(\tau)| < c_k |\operatorname{Im}\tau|^{-\nu_k} (1 + |\tau|)^{-r-k}, \tag{40'}$$

и $\mathcal{G}^+$ является подалгеброй $\mathcal{L}^+$ (относительно умножения).

П р е д л о ж е н и е 3. *Преобразование Фурье — Лапласа порождает изоморфизм*

$$\mathcal{F}\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]} = \mathcal{G}^+. \tag{41}$$

Это равенство является изоморфизмом алгебр.

Доказательство проводится по плану предложения 1 из п. 1.5 с использованием леммы 2 из п. II.1.7.

П р е д л о ж е н и е 4. *Распределение* $f \in \mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *является обратимым элементом этой алгебры тогда и только тогда, когда* f — *обратимый элемент алгебры* $(\mathcal{S}')_+$.

Ввиду изоморфизма (41) это утверждение вытекает из аналогичного результата для алгебры $\mathcal{G}^+$.

П р е д л о ж е н и е 5. *Для функции* $\psi \in \mathcal{G}^+$ *следующие условия эквивалентны*:

(a) $\psi^{-1} \in \mathcal{G}^+$;

(b) $\psi^{-1} \in \mathcal{L}^+$;

(c) *для некоторых* $c>0$, $\nu \geqslant 0$ *и* $\mu \in \mathbb{R}$ *выполнена оценка*

$$|\psi(\tau)| > c|\operatorname{Im}\tau|^{-\nu}(1+|\tau|)^{\mu}, \quad \operatorname{Im}\tau<0. \tag{42}$$

Как и в предложении 3 из п. 1.5, надо доказать, что (c)$\Rightarrow$(a). Специфика нашего случая проявляется при проверке того, что в неравенстве (42) можно взять $\mu=\deg\psi$.

В самом деле, согласно разложению (22) для $\psi\in\mathscr{G}^+$, $\deg\psi=-r$, имеем $\psi=c_0(\tau-i)^{-r}+\psi_1$, $|\psi_1|<c_1|\operatorname{Im}\tau|^{-\nu_0}(1+|\tau|)^{-r-1}$. Отсюда следует, что $|\psi_1|<|c_0(\tau-i)^{-r}|/2$, если $\operatorname{Im}\tau\leqslant -1$ и $|\tau|>2|c_0|/|c_1|$, откуда с учетом (42)

$$|\psi(\tau)|>c_2(1+|\tau|)^{-r} \text{ при } \operatorname{Im}\tau\leqslant -1. \tag{43}$$

Эта же оценка сохранится и при $\operatorname{Im}\tau>-1$, $|\operatorname{Re}\tau|>2|c_0|\times\times|\operatorname{Im}\tau|^{-\nu_0}|c_1|^{-1}$. В случае $|\operatorname{Re}\tau|<2|c_0||\operatorname{Im}\tau|^{-\nu_0}|c_1|^{-1}$ оценка (42) переходит в оценку

$$|\psi(\tau)|>c_3|\operatorname{Im}\tau|^{-\nu-|\nu_0\mu|}. \tag{44}$$

Объединяя оценки (43), (44), получим (46) с $\mu=r$.

Оператором свертки A: $\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}\to\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ называется **регулярный**[1]) оператор, перестановочный с дифференциальными операторами и со сдвигами на подпространстве $\mathcal{O}_+\subset\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$.

Из этого определения следует, что сужение A на $\mathcal{O}_+$ будет оператором свертки на $\mathcal{O}_+$ и, следовательно, найдется такое распределение $f\in(\mathcal{O}_1)_+$, что $A\varphi=f*\varphi$ для $\forall\varphi\in\mathcal{O}_+$. По плану предложения 1.6 доказывается, что это представление сохраняется и для $\forall\varphi\in\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Теперь естественно определить

$$\mathfrak{C}(\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]})=\{f\in(\mathscr{S}')_+, f*\varphi\in\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]} \quad \forall\varphi\in\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}\}.$$

Аналогично теоремам 1, 2 из п. 1.6 доказываются

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{C}(\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]})=\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A\in\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. *Сверточное уравнение* (35) *однозначно разрешимо в* $\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *тогда и только тогда, когда существует фундаментальное решение* $G\in\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$.

---

[1]) Регулярные операторы на пространстве $\mathcal{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}=\bigcup_{p,l}\bigcap_{s}H^{(p|s)}_{(l)+}$ определяются по той же самой схеме, что и регулярные операторы на пространстве $\mathcal{O}=\bigcup_{l}\bigcap_{s}C^{(s)}_{(l)}$ (см. п. I.1.6).

§ 2. Шкалы пространств распределений, обладающих дополнительной гладкостью при $t > 0$, и сверточные уравнения в этих шкалах (многомерный случай)

Настоящий параграф посвящен изучению пространств $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, $\mathscr{O}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ в многомерном случае и описанию свертывателей на них. Все эти пространства являются предельными пространствами для шкал пространств $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$, которые можно воспринимать как тензорные произведения $H_{(\rho)}^{(r|q)}(\mathbb{R}_t)_+ \otimes H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_y^{n-1})$ пространств из § 1 на стандартные пространства $H_{(l)}^{(s)}$ по переменным y. Большинство утверждений настоящего параграфа доказывается по плану их частных случаев из § 1 с использованием техники глав I, II. В силу этого обстоятельства мы не будем проводить подробно большинство доказательств, останавливаясь только на тех деталях, в которых проявляется специфика многомерного случая.

2.1. Дополнительная градуировка по гладкости в пространствах $H_{(\varrho,l)+}^{(r,s)}$. Всюду ниже мы будем выделять переменное t, т. е. $x=(t,\ y)$, $t\in\mathbb{R}^1, y\in\mathbb{R}^{n-1}$, и будем рассматривать пространства $H_{(\rho,l)}^{(r,s)}$, отвечающие этому разбиению. Рассмотрим канонический проектор

$$p_{\oplus}\colon\ H_{(\rho,l)+}^{(r,s)}\to H_{(\rho,l)\oplus}^{(r,s)},\quad r\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Предложение. (i) *При $r\leqslant 0$ отображение* (1) *сюръективно и имеет ядро, состоящее из распределений вида*

$$\sum_{j=1}^{|r|} c_j(y)\,D_t^{j-1}\delta(t),\quad c_j(y)\in H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_y^{n-1}). \tag{2}$$

(ii) *При $r\geqslant 0$ отображение* (1) *инъективно, а его образ будет замкнутым подпространством, выделяемым уравнениями*

$$\varphi(0,y)=\ldots=\left(D_t^{r-1}\varphi\right)(0,y)=0. \tag{3}$$

Доказательство. Мы остановимся на проверке того, что ядро оператора (1) имеет вид (2). Остальные доказательства являются дословным повторением доказательств предложения 1.1.

Очевидно, что ядро (1) совпадает с пересечением

$$H_{(l)}^{(r,s)}[0]=H_{(\rho,l)+}^{(r,s)}\cap H_{(\rho,l)-}^{(r,s)}, \tag{2$'$}$$

и нашей целью является доказательство совпадения пространств (2) и (2′). Правое пространство (2′) не зависит от ρ, так что обозначение корректно и мы можем считать, что $\rho=0$. Ввиду изоморфизмов

$$(1+|y|^2)^{-h/2}H_{(\rho,l)}^{(r,s)}=H_{(\rho,l+h)}^{\prime(r,s)}$$

достаточно доказать совпадение пространств (2) и (2′) в случае $l=0$. Но теперь мы можем воспользоваться преобразованием Фурье. Преобразование Фурье $\widehat{\varphi}(\tau, \eta)$ распределения $\varphi \in H_+^{(r,s)} \cap \cap H_-^{(r,s)}$ для почти всех η является целой функцией τ, интегрируемой в квадрате по вещественной прямой с весом $(1+\sigma^2)^r$. Следовательно, $\widehat{\varphi}(\tau, \eta) = \sum_{j=1}^{-r} c_j(\eta)\tau^{j-1}$. Переходя к обратному преобразованию Фурье, мы получим, что пространство (2′) состоит из распределений вида (2). Нам надо только проверить включения

$$c_j(y) \in H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_y^{n-1}), \quad j=1, \ldots, r. \tag{4}$$

Для этого заметим, что если распределение f принадлежит $H_{(\rho,l)}^{(r,s)}$, то $\forall \varphi \in \mathscr{S}$ справедлива оценка

$$|(f, \varphi)| < c\|\varphi\|_{(-\rho,l)}^{(-r,-s)}.$$

Пусть f имеет вид (2). Тогда подставим в это неравенство функцию $\varphi = \chi(t)\psi(y)$, $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_t), \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_y^{n-1})$, причем $(D^{j-1}\chi)(0) = \delta_{kj}$. В результате получим

$$|(c_k, \psi)| \leqslant c\|\chi\|_{(-\rho)}^{(-r)}\|\psi\|_{(-l)}^{(-s)} = c_1\|\psi\|_{(-l)}^{(-s)},$$

откуда следуют включения (4).

2.2. Структура пространства $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$. По аналогии с § 1 определим пространства распределений с дополнительной гладкостью при $t>0$:

$$H_{(\rho,l)}^{(r|q,s)} = \{f \in H_{(\rho,l)}^{(r,s)}, p_\oplus f \in H_{(\rho,l)\oplus}^{(q,s)}\}, \quad r \leqslant q, \tag{5}$$

и снабдим его банаховой нормой

$$\|f\|_{(\rho,l)}^{(r|q,s)} = \|f\|_{(\rho,l)}^{(r,s)} + \|p_\oplus f\|_{(\rho,l)}^{(q,s)}. \tag{6}$$

Далее мы будем иметь дело только с подпространством $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$ пространства (5). Здесь и ниже показатели r, q, характеризующие гладкость по t, будут предполагаться целыми.

Очевидно, что $_{(\rho,l)+}^{(q,s)}$ является подпространством $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$. Из леммы 1.2 вытекает, что совокупность распределений вида

$$\delta_{-q}^{+}H_{(l)}^{(r-q,s)}[0] = \left\{f = \sum_{j=1}^{q-r} c_j(y)D_t^{j-1}\delta_{-q}^{+}(D_t)\delta(t)\right\}, \tag{7}$$

$$q > r, \quad q, r \in \mathbb{Z}, \quad c_j(y) \in H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad j = 1, \ldots, q-r,$$

будет подпространством $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$, дополнительным к $H_{(\rho,l)+}^{(q,s)}$. Мы покажем, что, как и в одномерном случае, эти подпространства замкнуты, а их прямая сумма дает все $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$. Имеет место

Предложение 1. *При целых $r<q$ каждое распределение $f \in H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$ однозначно представляется в виде*

$$f = f_0 + f_1, \quad f_0 \in H_{(\rho,l)+}^{(q,s)}, \quad f_1 \in \delta_{-q}^{-}H_{(l)}^{(r-q,s)}[0], \tag{8}$$

причем норма (6) *эквивалентна норме*

$$\|f_0\|^{(q,s)}_{(\rho,l)}+\|f_1\|^{(r,s)}_{(\rho,l)}. \tag{8'}$$

Доказательство этого утверждения проводится по плану предложения 1 из п. 1.2. Как и при доказательстве предложения 2.1, можно ограничиться (не нарушая общности) случаем $\rho=l=0$.

1) Пусть сначала $q\leqslant 0$. Введенному в п. 1.1 (см. замечание 2) оператору $\pi_+^{(q)}$ отвечает непрерывный оператор

$$\pi_+^{(q)}\colon\ H_\oplus^{(q,s)}\to H_+^{(q,s)},$$

являющийся правым обратным к $p_\oplus$. Но тогда положим

$$f=\pi_+^{(q)}p_\oplus f+f',\quad \pi_+^{(q)}p_\oplus f\in H_+^{(q,s)},\quad f'\in H^{(r,s)}[0],$$

причем

$$\|\pi_+^{(q)}p_\oplus f\|^{(q,s)}\leqslant \mathrm{const}\cdot\|p_\oplus f\|^{(q,s)}\leqslant \mathrm{const}\cdot\|f\|^{(r|q,s)}. \tag{9}$$

Таким образом, нам достаточно построить разложение

$$H^{(r,s)}[0]=H^{(q,s)}[0]+\delta_{-q}^{\pm}(D_t)\,H^{(r-q,s)}[0],\quad r\leqslant q\leqslant 0. \tag{10}$$

Если в пространстве (10) сделать преобразование Фурье, то элементами получившегося пространства будут полиномы $P(\eta,\sigma)=$ $=\sum_{j=1}^{-r}\widehat{c}_j(\eta)\,\sigma^{j-1}$ с коэффициентами $\widehat{c}_j(\eta)\in H_{(s)}(\mathbb{R}^{n-1})$. Производя деление с остатком таких полиномов на полином $(\sigma-i)^q$ и переходя к обратному преобразованию Фурье, придем к разложению (10).

Обозначим через $\lambda^{(r|q)}$ проектор, отвечающий этому разложению (ср. (1.13)); он будет непрерывным оператором из $H^{(r,s)}[0]$ в $H^{(q,s)}[0]$. В самом деле, пусть $P(\eta,\sigma)$ — произвольный полином по σ степени $-r-1$ с коэффициентами из $H_s(\mathbb{R}^{n-1})$, и пусть $P_1(\eta,\sigma)$ — остаток от деления на $(\sigma-i)^{-q}$. При фиксированных (почти всех) η отображение $P(\eta,\sigma)\mapsto P_1(\eta,\sigma)$ будет непрерывным отображением конечномерных пространств, а поскольку в конечномерных пространствах все банаховы нормы эквивалентны, то справедливо неравенство

$$\int|P_1(\eta,\sigma)|^2(1+\sigma^2)^q\,d\sigma\leqslant K^2\int|P(\eta,\sigma)|^2(1+\sigma^2)^r\,d\sigma$$

с константой K, не зависящей от η. Умножая это неравенство на $(1+|\eta|^2)^s$, интегрируя по η и пользуясь равенством Парсеваля, мы докажем непрерывность оператора

$$\lambda^{(r|q)}\colon\ H^{(r,s)}[0]\to H^{(q,s)}[0]. \tag{11}$$

С помощью этого оператора мы получим разложение (8) с

$$f_0=\pi_+^{(q)}p_\oplus f+\lambda^{(r|q)}\left(f-\pi_+^{(q)}p_\oplus f\right).$$

Используя (9) и непрерывность оператора (11), легко показать эквивалентность норм (6) и (6′).

2) Пусть теперь $q>0$. Как и в одномерном случае, разложение (8) получается из разложения для $g=\delta_q^+(D_t)f\in H_+^{(r-q|0,s)}$ путем применения оператора $\delta_{-q}^+(D_t)$. Проверка эквивалентности норм (6) и (6′) сводится к доказательству аналога оценки (1.15).

$$\|p_\oplus f\|^{(q,s)}\leqslant \mathrm{const}\cdot\|f\|^{(r,s)}\quad \forall f\in\delta_{-q}^+(D_t)\,H^{(r-q|s)}[0]. \tag{12}$$

Если распределение f имеет вид правой части (7), то ввиду леммы 1.2

$$\|p_\oplus f\|^{(q,s)}\leqslant \mathrm{const}\cdot\sum_{j=1}^{q-r}\|c_j\|^{(s)}; \tag{12′}$$

таким образом, для доказательства (12) достаточно установить, что на пространстве (7) норма $\|\ \|^{(r,s)}$ эквивалентна правой норме в (12′). Это утверждение доказывается повторением уже проведенных нами рассуждений. Действительно, ввиду эквивалентности банаховых норм на конечномерных пространствах полиномов (от σ) для почти всех $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$ имеет место неравенство

$$K^{-1}\sum_{j=1}^{q-r}|\widehat{c}_j(\eta)|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{q-r}\widehat{c}_j(\eta)\,\sigma^{j-1}\right|^2(1+\sigma^2)^{r-j}\,d\sigma\leqslant K\sum_{j=1}^{q-r}|\widehat{c}_j(\eta)|^2.$$

Умножив эти неравенства на $(1+|\eta|^2)^s$ и проинтегрировав по η, мы придем к нужному нам утверждению.

Следствие 1. *$H_{(\rho,l)+}^{(q,s)}$ и $\delta_{-q}^+H_{(l)}^{(r-q,s)}[0]$ являются замкнутыми подпространствами $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$, причем норма (6) индуцирует на $H_{(\rho,l)+}^{(q,s)}$ топологию, эквивалентную исходной. Указанные подпространства дополнительны, и имеет место прямое разложение*

$$H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}=H_{(\rho,l)+}^{(q,s)}\oplus\delta_{-q}^+H_{(l)}^{(r-q,s)}[0]. \tag{13}$$

Разложение типа (13) сохранится, если градуирующие п. д. о. $\delta_k^+(D)=(D_t-i)^k$ мы заменим на п. д. о. $(D_t-z)^k$, $\operatorname{Im}z>0$.

Следствие 2. *Для каждого $k\in\mathbb{Z}$ имеет место изоморфизм*

$$\delta_k^+(D_t)\,H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}=H_{(\rho,l)+}^{(r-k|q-k,s)}. \tag{14}$$

Предложение 2. *Распределение $f\in H_{(\rho,l)+}^{(r,s)}$ принадлежит пространству $H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие распределения $c_j(y)\in H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}_y^{n-1})$, однозначно определяемые по f, что f представляется в виде*

$$f=\sum_{j=1}^{q-r}c_j(y)\,z_{r+j}(t)+f_q, \tag{15}$$

где $f_q\in H_{(\rho,l)+}^{(q,s)}$, причем норма (6) эквивалентна норме

$$\sum_{j=1}^{q-r}\|c_j\|_{(l)}^{(s)}+\|f_q\|_{(\rho,l)}^{(q,s)}. \tag{6″}$$

Замечания. 1) Если проследить за доказательством предложения 1, то несложно заметить, что конструкция (явная) разложения (8) не зависит от поведения f по переменным y. Отсюда следует, что если f одновременно принадлежит нескольким пространствам (5), отвечающим различным показателям s, l, то и функции f_0 и f_1 из правой части будут отвечать пересечениям соответствующих пространств.

2) (Ср. замечание из п. 1.2.) Ввиду естественных вложений пространств (5), возникающих при изменении показателей ρ, l, s, можно образовать шкалу $\mathbb{H}^{(r|q)}$, причем операторы проектирования $H^{(r|q,s)}_{(\rho,l)+}$ на $H^{(q,s)}_{(\rho,l)+}$ (вдоль $\delta^{+}_{-q}H^{(r-q,s)}_{(l)}[0]$), построенные в предложении 1, можно рассматривать как компоненты соответствующего непрерывного оператора в шкале.

2.3. Пространство $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ было определено во введении к главе и подробно изучено в пп. 1.3—1.5 в одномерном случае. При $n>1$ пространство $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}(\mathbb{R}^n)$ можно представлять себе как тензорное произведение $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Перенос большинства утверждений § 1 на рассматриваемый нами случай не вызывает никаких затруднений, поэтому мы ограничимся формулировками.

Прежде всего отметим, что $\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$ — проективный предел шкалы $H^{(r|q,s)}_{(\rho,l)+}$, т. е.

$$\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}=H^{(r|\infty,\infty)}_{(\infty,\infty)+}\overset{\text{def}}{=}\bigcap_{q,s,\rho,l}H^{(r|q,s)}_{(\rho,l)+}. \tag{16}$$

Из предложения 1 предыдущего пункта с учетом замечаний 1, 2 этого же пункта вытекает

Предложение 1. *Для каждого* $f\in\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *можно указать такое* r, *что при* $\forall q>r$ *или любом* $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z>0$, *имеет место разложение* (ср. (1.18′))

$$f=\sum_{j=1}^{q-r}c_j(y)(D_t-z)^{-r-j}\delta(t)+f_q, \tag{15′}$$

где $f_q\in\mathscr{S}^{\{q\}}_{[+]}$, *а функции* $c_j(y)$ *принадлежат* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, *однозначно определяются по* f *и* z *и не зависят от* q.

Обратно, если для распределения $f\in(\mathcal{O}')_+$ *при некотором* $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z>0$, *и любом достаточно большом* q *имеет место разложение* (15′) *с* $c_j(y)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j=1,\ldots,q-r$, *и* $f_q\in H^{(q,\infty)}_{(\infty,\infty)+}=\bigcap_{s,\rho,l}H^{(q,s)}_{(\rho,l)+}$, *то* $f\in\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$.

Как и в § 1, будем полагать для $f\in\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$

$$\{\deg_t f=-r-1\}\Leftrightarrow\{f\in\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]},\quad f\notin\mathscr{S}^{\{r+1\}}_{[+]}\}.$$

Из разложений (15), (15′) вытекает цепочка вложений

$$\mathscr{S}^{\{\infty\}}_{[+]}\overset{\text{def}}{=}\mathscr{S}_+\subset\ldots\subset\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}\subset\mathscr{S}^{\{r-1\}}_{[+]}\subset\ldots\subset\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]},$$

причем каждое пространство из этой цепочки является замкнутым подпространством пространств, стоящих справа. Топология на $\mathscr{S}^{\{p\}}_{[+]}$ (см. (16)) эквивалентна топологии, индуцированной пространством $\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$, $r<p$. Следовательно, $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}=\bigcup\mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}$ является строгим индуктивным пределом.

Предложение 2. *$\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ является подалгеброй алгебры $(\mathcal{O}')_+$ (относительно свертки).*

Это предложение доказывается по плану предложения 1.4, только здесь несколько усложняется оценка остаточного члена в разложении для свертки. Грубо говоря, оценки по переменной t, проведенные в п. 1.4, надо сочетать со стандартными (для глав I, II) оценками свертки в $\mathscr{S}$ по переменным y. Проведение подробных доказательств мы оставляем читателю.

Это предложение вытекает также из предложения 2 (ii) следующего пункта.

2.4. Пространство $U^{\{-\infty\}}_+$. В этом пункте мы опишем пространство потенциальных свертывателей на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Если представлять это пространство как тензорное произведение $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, то пространство свертывателей можно представлять как тензорное произведение $\mathfrak{C}(\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}(\mathbb{R}))\otimes\mathfrak{C}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1}))=\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}\otimes\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$. Или иначе, если $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ пространство формальных рядов типа (15) с коэффициентами из $\mathscr{S}$, то естественно ожидать, что свертыватели будут формальными рядами (15) с коэффициентами из $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$. Сейчас мы определим соответствующие пространства распределений. Положим

$$\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_+=\bigcup_{z\in\mathcal{L}}\mathscr{U}^{\{r\}}_+,\quad \mathscr{U}^{\{r\}}_+=\bigcap_{q,\rho,l}H^{(r|q,-\infty)}_{(\rho,l)+}. \tag{17}$$

Согласно этим определениям, если $f\in\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_+$, то

$$f\in\bigcup_{r}\bigcap_{\rho,l}H^{(r,-\infty)}_{(\rho,l)+},\quad p_\oplus f\in\bigcap_{q,\rho,l}H^{(q,-\infty)}_{(\rho,l)\oplus}. \tag{17'}$$

Обратно, если для распределения f справедливы включения (17′), то $f\in\mathscr{U}^{(-\infty)}$. В самом деле, согласно первому включению $\exists r,\forall\rho,l\,\exists s_1$, так что $f\in H^{(r,s_1)}_{(\rho,l)+}$. Согласно второму включению $\forall q,\rho,l\,\exists s_2$, так что $f\in H^{(q,s_2)}_{(\rho,l)\oplus}$. Выбирая $s<s_1,s_2$, мы получим, что $\exists r,\ \forall q,\rho,l\ \exists s$, так что $f\in H^{(r,q,s)}_{(\rho,l)+}$, т. е. имеет место (17).

Предложение 1. *Для каждого $f\in\mathscr{U}^{(-\infty)}$ можно указать такое r, что при $q>r$ и любого $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}z>0$, имеет место разложение (15′) с коэффициентами $c_j(y)\in\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1}_y)$, $f_q\in\mathscr{U}^{\{q\}}_+$.*

Обратно, если $f\in(\mathcal{O}')_+$ и для некоторого $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}z>0$, и любого достаточно большого q имеет место разложение (15′) с $c_j(y)\in\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$ и $f_q\in\bigcap_{\rho,l}H^{(q,-\infty)}_{(\rho,\iota)+}$, то $f\in\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_+$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$. Прежде всего можно указать такое (наибольшее) $r \in \mathbb{Z}$, что $f \in \mathscr{U}_{+}^{\{r\}}$. Согласно (17) $\forall \rho, l, q$ найдется такое $s = s(\rho, l, q)$, что для $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0$, можно написать разложение (15′), в котором $c_j \in H_{(l)}^{(s)}(\mathbb{R}^{n-1})$ и $f_q \in H_{(\rho,l)+}^{(q,s)}$. Согласно замечанию 1 из предыдущего пункта разложения, отвечающие разным l и ρ, совпадают, поэтому $c_j \in \bigcap\limits_{l} H_{(l)}^{(s(l))} = \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$ и $f_q \in \bigcap\limits_{\rho,l} H_{(\rho,l)+}^{(q,-\infty)}$. Далее, из (17′) и леммы 1.2 следует, что

$$p_{\oplus} f_q = p_{\oplus} f - \sum c_j p_{\oplus}\left((D_t - z)^{-r-j}\delta(t)\right) \in \bigcap_{p,\rho,l} H_{(\rho,l)\oplus}^{(p,-\infty)}.$$

Итак, мы показали, что $f_q \in \mathscr{U}_{+}^{\{q\}}$.

Обратно, если для $f \in (\mathscr{O}')_{+}$ имеют место разложения (15′) с $c_j(y) \in \mathscr{O}'$ и $f_q \in \bigcap\limits_{\rho,l} H_{(\rho,l)+}^{(q,-\infty)}$ для любого q, то (с учетом леммы 1.2) для f имеют место включения (17′), т. е. $f \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$.

Предложение 2. (i) *$\mathscr{U}^{\{-\infty\}}$ — подалгебра алгебры $(\mathscr{O}')_{+}$ (относительно свертки).*

(ii) *$\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ — идеал алгебры $\mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$.*

Доказательство. Более точно мы установим, что

$$\mathscr{U}_{+}^{\{r'\}} * \mathscr{U}_{+}^{\{r''\}} \subset \mathscr{U}_{+}^{\{r'+r''\}}, \tag{18}$$

$$\mathscr{U}_{+}^{\{r'\}} * \mathscr{S}_{[+]}^{\{r''\}} \subset \mathscr{S}_{+}^{\{r'+r''\}}. \tag{18'}$$

При доказательстве (18), (18′) нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. (i) *Если $f' \in \bigcap\limits_{\rho,l} H_{(\rho,l)+}^{(p',-\infty)}$ и $f'' \in \bigcap\limits_{\rho,l} H_{(\rho,l)+}^{(p'',-\infty)}$, то $f' * f'' \in \bigcap\limits_{\rho,l} H_{(\rho,l)+}^{(p'+p''-2,-\infty)}$.*

(ii) *Если в условиях* (i) *$f'' \in \bigcap\limits_{\rho,l} H_{(\rho,l)+}^{(p'',+\infty)}$, то $f' * f'' \in \bigcap\limits_{\rho,l} H_{(\rho,l)+}^{(p'+p''-2,\infty)}$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $p' = p'' = 1$ (в противном случае положим $f' = \delta_{p'-1}^{+} g'$, $f'' = \delta_{p''-1}^{+} g''$). Используя теорему вложения для заданных (достаточно больших) ρ, l, представим распределения f', f'' в виде $f' = P'(D_y) g'$, $f'' = P''(D_y) g''$, где $g', g'' \in C_{(\rho,l)+}$. Если $\rho'' < \rho' < \rho - 1$, $l'' < l' < l - n + 1$, то $g' * g'' \in C_{(\rho',l')+} \subset H_{(\rho'',l'')+}$, откуда и следует (i). При условии (ii) $g'' \in C_{(\rho,l)+}^{(0,\infty)}$, откуда $g' * g'' \in C_{(\rho',l')+}^{(0,\infty)} \subset H_{(\rho'',l'')+}^{(0,\infty)}$.

Лемма 2. (i) *Если $b(y) \in \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$ и $g \in \mathscr{U}_{+}^{\{p\}}, \mathscr{S}_{[+]}^{\{p\}}$, то $b * g \in \mathscr{U}_{+}^{\{p\}}, \mathscr{S}_{[+]}^{\{p\}}$.*

(ii) *Если $b(y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ и $g \in \mathscr{U}_{+}^{\{p\}}$, то $f * g \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{p\}}$.*

Доказательство. Идея доказательства совсем проста. Будем считать, что $p > 0$ (в противном случае заменим g на $\delta_{-p-1}^{+} g$). Тогда $g(t, y)$ можно рассматривать как элемент $H_{(\infty)}^{(p)}(\mathbb{R}_t)$ со значениями $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$. Применяя оператор свертки con_b, $b \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, получим элемент $H^{(p)}_{(\infty)}(\mathbb{R}_t)$ со значениями (соответственно) в $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Детали доказательства мы оставляем читателю[1]).

Переходим теперь к доказательству включений (18), (18′). Пусть $f' \in \mathcal{U}_+^{\{r'\}}$, $f'' \in \mathcal{U}_+^{\{r''\}}$, $\mathcal{S}_{[+]}^{\{r''\}}$. Запишем для этих распределений разложения (15′), т. е. $f' = F'_{q'} + f'_{q'}$, $f'' = F''_{q''} + f''_{q''}$, где $f'_{q'} \in \mathcal{U}_+^{\{q'\}}$, $f''_{q''} \in \mathcal{U}_+^{\{q''\}}$, $\mathcal{S}_{[+]}^{\{q''\}}$, а числа q', q'' будут выбраны ниже. Тогда свертку f' и f'' можно записать в виде

$$f' * f'' = F'_{q'} * F''_{q''} + \left(F'_{q'} * f''_{q''} + F''_{q''} * f'_{q'} + f'_{q'} * f''_{q''}\right). \tag{19}$$

Поскольку $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$ является алгеброй относительно свертки, то

$$F'_{q'} * F''_{q''} = \sum_{j,k \geqslant 1} b'_j * b''_k (D_t - z)^{-r'-r''-j-k} \delta(t) \in \mathcal{U}_{[+]}^{\{r'+r''\}}.$$

Если $f'' \in \mathcal{S}_{[+]}^{\{r''\}}$, то правая часть будет лежать в $\mathcal{S}_{[+]}^{\{r'+r''\}}$. Подберем теперь q', q'' таким образом, чтобы второй член в правой части (19) лежал в $\bigcap_{\rho,l} H^{(q,\pm\infty)}_{(\rho,l)+}$. Имеем

$$F'_{q'} * f''_{q''} = \sum b'_j(y) * (D_t - z)^{-r'-j} f''_{q''}.$$

Заметим, что $(D_t - z)^{-r'-j} f''_{q''} \in \mathcal{U}_+^{\{r'+q''\}}$, $\mathcal{S}_{[+]}^{\{r'+q''\}}$, а согласно лемме 2 (i) это включение остается в силе и после свертки с $b'_j \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$, т. е. $F'_{q'} * f''_{q''} \in \mathcal{U}_+^{\{r'+q''\}}$, $\mathcal{S}_{[+]}^{\{r'+q''\}}$. Аналогично применяя лемму 2 (i) для $f'' \in \mathcal{U}_+^{\{r''\}}$ и лемму 2 (ii) для $f'' \in \mathcal{S}_{[+]}^{\{r''\}}$, мы докажем, что $F''_{q''} * f'_{q'} \in \mathcal{U}_+^{\{r''+q'\}}$, $\mathcal{S}_{[+]}^{\{r''+q'\}}$. Наконец, воспользовавшись леммой 1, покажем, что $f'_{q'} * f''_{q''} \subset \bigcap_{\rho,l} H^{(q'+q''-2,\mp\infty)}_{(\rho,l)+}$. Выбирая q', q'' из условий $r' + q''$, $r'' + q'$, $q' + q'' - 2 > q$, мы получим, что скобка в (19) лежит в $\bigcap_{\rho,l} H^{(q,\mp\infty)}_{(\rho,l)+}$. Предложение доказано.

Замечания. 1) Разложения (15′) позволяют естественным образом определить степень $\deg_t f$ для $f \in \mathcal{U}_+^{\{-\infty\}}$; это определение согласуется с ранее данным определением для $f \in \mathcal{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$.

Из доказательства включения (18) легко вывести неравенство

$$\deg_t (f' * f'') \leqslant \deg_t f' + \deg_t f''. \tag{18″}$$

В одномерном случае (см. предложение 1.4) это неравенство переходит в равенство. Поясним различие этих случаев. Если разложения (15′) для f' и f'' имеют вид $f' = a'_0(y)(D_t - i)^{r'} \delta(t) + f'_1$, $f'' = a''_0(y)(D_t - i)^{r''} \delta(t) + f''_1$, то разложение для $f' * f''$ должно

---

[1]) Эту лемму очень просто доказать, сделав частичное преобразование Фурье по y.

начинаться с члена $\left(a_0'(y) * a_0''(y)\right)(D_t - i)^{r'+r''}\delta(t)$. Однако алгебра $\mathcal{O}'$ имеет делители нуля, т. е. существуют такие a_0', $a_0'' \not\equiv 0$, что $a_0' * a_0'' \equiv 0$. В этом случае разложение для $f' * f''$ начинается с члена $c(y)(D_t - i)^r \delta(t)$, $r < r' + r''$, что и объясняет неравенство (18″).

Отметим, что если одно из распределений a_0', a_0'' является обратимым элементом алгебры $\mathcal{O}'$, то тогда $a_0' * a_0'' \not\equiv 0$ и (18″) переходит в равенство.

2) Согласно предложению 2 (ii) каждому $G \in \mathcal{U}_+^{\{-\infty\}}$ отвечает непрерывный оператор

$$\mathrm{con}_G\colon \mathcal{S}_{[+]}^{\{-\infty\}} \to \mathcal{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}.$$

Более того, согласно (18′) $\forall r$ непрерывен оператор

$$\mathrm{con}_G\colon \mathcal{S}_{[+]}^{\{r\}} \to \mathcal{S}_{[+]}^{\{r-p\}}, \quad p = \deg_t G.$$

Так как $\mathcal{S}_{[+]}^{\{r\}}$ — проективный предел банаховых пространств, то из общих результатов об операторах в таких пространствах (см. Дополнение к гл. I) следует, что $\forall q, \rho, l\ \exists q', \rho', l'$, так что наш оператор продолжается до непрерывного оператора

$$\mathrm{con}_G\colon H_{(\rho', l')+}^{(r|q', s')} \to H_{(\rho, l)+}^{(r-p|q, s)}.$$

Однако если более внимательно проанализировать доказательство предложения 2 и учесть лемму 1, то мы увидим, что можно взять $\rho' = \rho$, $l' = l$, $q' = q + p$, $s' = s + \sigma$, где σ зависит только от ρ и l.

3) Полезно отметить, что определение (17) эквивалентно формально более широкому определению:

$$\mathcal{U}_+^{\{-\infty\}} = \bigcap_{q,\rho,l} \bigcup_{r,s} H_{(\rho,l)+}^{(r|q,s)}, \tag{20}$$

которое означает, что $f \in \mathcal{U}_+^{\{-\infty\}}$ тогда и только тогда, когда

$$f \in (\mathcal{O}')_+, \quad p_\oplus f \in \bigcap_{q,\rho,l} H_{(\rho,l)\oplus}^{(q,-\infty)}.$$

2.5. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ и $\mathcal{U}_+^{\{-\infty\}}$. Как было показано в п. 1.5, фурье-образами элементов $\mathcal{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}(\mathbb{R})$ были элементы пространства $\mathcal{H}^+$ формальных рядов Лорана по степеням $\tau - z$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$. В многомерном случае естественно ожидать, что фурье-образами распределений из $\mathcal{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, $\mathcal{U}_+^{\{-\infty\}}$ будут аналогичные ряды с коэффициентами из $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\eta^{n-1})$, $\mathcal{M}(\mathbb{R}_\eta^{n-1})$. Соответствующие пространства естественно обозначить через $\mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{S}$ и $\mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{M}$. Дадим аккуратные определения.

Обозначим через $\mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{S}$ подпространство $\mathcal{M}^+$, состоящее из функций $\psi(\tau, \eta)$, голоморфных по τ при $\operatorname{Im}\tau < 0$, бесконечно дифференцируемых по всем переменным при $\operatorname{Im}\tau \leqslant 0$ и таких, что для некоторого $r = r(\psi)$ при любых $q > r$ и $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, можно подобрать такие функции $b_j(\eta)\in\mathscr{S}$, что

$$\psi(\tau,\eta)=\sum_{j=0}^{q-r-1} b_j(\eta)(\tau-z)^{-r-j}+\psi_q(\tau,\eta), \tag{21}$$

где $\forall N$, k, β найдется такая константа $c_{qkN\beta}$, что

$$\left|\partial_\tau^k\partial_\eta^\beta\psi_q(\tau,\eta)\right|<c_{qkN\beta}(1+|\tau|)^{-q}(1+|\eta|)^{-N}. \tag{22}$$

Аналогичным образом определяется пространство $\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{M}$; только здесь $b_j(\eta)\in\mathscr{M}$, а число N не является произвольным, т. е. $N=N(q,k,\beta)$.

Применительно к рассматриваемому нами случаю можно естественно переформулировать замечания из п. 1.5. В частности, если $-r$ — наивысшая степень $(\tau-z)$ в разложении (19) (она не зависит от q), то $\deg_\tau\psi=-r$.

Отметим также, что $\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{M}$ и $\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{S}$ являются алгебрами относительно умножения, причем $\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{S}$ — идеал в $\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{M}$.

Предложение 1. *Преобразование Фурье — Лапласа устанавливает изоморфизмы*

$$\mathscr{F}\mathscr{U}_+^{\{-\infty\}}=\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{M},\quad \mathscr{F}\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}=\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{S}. \tag{23}$$

Эти равенства являются изоморфизмами алгебр.

Доказательство. Возьмем распределение $f\in\mathscr{U}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}\subset(\mathscr{O}')_+$. Оно имеет преобразование Фурье — Лапласа $\widehat{f}(\tau,\eta)\in\mathscr{M}^+$. Покажем, что $\widehat{f}$ принадлежит правым пространствам (23). Напишем для f разложение (15′). Преобразование Фурье переводит правую сумму (15′) в правую сумму (21), поэтому нам остается установить оценки (22) для остатка $\widehat{f}_q(\tau,\eta)$.

Зафиксировав произвольные ρ, l, $\rho\geqslant 2$, $l\geqslant n$, представим распределение $f_q\in\mathscr{U}_+^{\{q\}}$ в виде

$$f_q=(D_t-z)^{-q}P_{\rho l}(D_y)g,\quad g\in C_{(\rho,l)+},$$

где $P_{\rho l}(D_y)$ — дифференциальный оператор. Тогда

$$\widehat{f}_q(\tau,\eta)=(\tau-z)^{-q}P_{\rho l}(\eta)\widehat{g}(\tau,\eta),\quad \widehat{g}\in C^{(\rho-2,\,l-n)+}.$$

Из этого представления следуют оценки (22) для $k\leqslant\rho-2$, $|\beta|\leqslant l-n$. Увеличивая l, ρ (и тем самым меняя порядок роста полинома $P_{\rho l}(\eta)$), мы получим оценки для любых k, β.

Если же $f_q\in\mathscr{S}_{[+]}^{\{q\}}$, то $(D_t-z)^q f_q\in C_{(\rho,l)+}^{(0,m)}$ для любых ρ, l, m, откуда легко следует оценка (22) $\forall N$.

Для доказательства сюръективности (23) надо проверить, что функция $\psi\in\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{S}$, $\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{M}$ является преобразованием Фурье некоторого распределения $f\in\mathscr{U}_+^{\{-\infty\}}$, $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$. Ввиду разложений (19) достаточно проверить, что обратное преобразование Фурье функции ψ_q, удовлетворяющей оценкам (22), принадлежит соответственно $\mathscr{S}_{[+]}^{\{q-1\}}$, $\mathscr{U}_+^{\{q-1\}}$, $q>1$. Соответствующие стандартные рассуждения мы оставляем читателю (ср. предложение 1 из п. 1.5).

Предложение 2. *Распределение $f \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$ является обратимым элементом этой алгебры тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) *f — обратимый элемент алгебры $(\mathscr{O}')_{+}$;*

(ii) *если $c_1(y) \in \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$ — старший коэффициент в разложении (15′) для f, то $c_1(y)$ — обратимый элемент $\mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Ввиду изоморфизма (22) это предложение вытекает из аналогичного утверждения для алгебры $\mathscr{H}^{+} \otimes \mathscr{M}$.

Предложение 3. *Для функции $\psi(\tau, \eta) \in \mathscr{H}^{+} \otimes \mathscr{M}$ включение $\psi^{-1}(\tau, \eta) \in \mathscr{H}^{+} \otimes \mathscr{M}$ имеет место тогда и только тогда, когда*

(i) $\psi^{-1} \in \mathscr{M}^{+}(\mathbb{R}^{n})$;

(ii) *если $b_0(\eta)$ — старший коэффициент в разложении (19), то $b_0^{-1}(\eta) \in \mathscr{M}$.*

Доказательство. Необходимость условия (i) очевидна. В силу этого условия найдутся такие $c > 0$ и $\mu \in \mathbb{R}$, что

$$|\psi(\tau, \eta)| > c(1 + |\tau| + |\eta|)^{\mu}, \quad \operatorname{Im}\tau \leqslant 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{24}$$

откуда, в частности, следует, что $\deg_{\tau}\psi > -\infty$.

Докажем необходимость (ii). Согласно (15′)

$$\psi(\tau, \eta) = \psi_0(\eta)(\tau - z)^{-r} + \psi_1(\tau, \eta), \quad \psi_1 = O(|\tau|^{-r-1}), \quad |\tau| \to \infty.$$

Так как $\psi^{-1}(\tau, \eta) \in \mathscr{H}^{+} \otimes \mathscr{M}$, то $\psi^{-1} = \varphi_0(\eta)(\tau - z)^{r'} + \varphi_1$, где $\varphi_1 = O(|\tau|^{r'-1})$, $|\tau| \to \infty$. Из условия $\psi\psi^{-1} \equiv 1$ следует, что $\deg_{\tau}\psi^{-1} = r' = r$, откуда

$$\psi_0(\eta)\varphi_0(\eta) - 1 = O(|\tau|^{-1}), \quad |\tau| \to \infty.$$

Левая часть не зависит от τ, правая стремится к нулю при $|\tau| \to \infty$, следовательно, левая часть тождественно равна 0, откуда и следует условие (ii).

Достаточность. Если выполнено (i), то справедлива оценка (24) с некоторым $\mu > -\infty$, и, следовательно, $-r = \deg_{\tau}\psi > -\infty$. Используя (ii), оценку (24) можно заменить более точной:

$$|\psi(\tau, \eta)| > c(1 + |\tau|)^{-r}(1 + |\eta|)^{\nu}. \tag{25}$$

В самом деле, если $\psi \in \mathscr{H}^{+} \otimes \mathscr{M}$, то согласно (15′) $\psi = b_0(\eta)(\tau - i)^{-r} + \psi_1$, где согласно (21)

$$|\psi_1(\tau, \eta)| < c_1(1 + |\tau|)^{-r-1}(1 + |\eta|)^{\mu_1}. \tag{25′}$$

С другой стороны, в силу (ii) найдутся такие c_2 и μ_2, что $|b_0(\eta)| > c_2(1 + |\eta|)^{\mu_2}$, так что

$$|b_0(\eta)(\tau - i)^{-r}| > c_2(1 + |\tau|)^{-r}(1 + |\eta|)^{\mu_2}. \tag{25″}$$

Если $|\tau| > 2(c_1/c_2)(1 + |\eta|)^{\mu_1 - \mu_2}$, то правая часть (25′) не превосходит половины правой части (25″). При $|\tau| < 2(c_1/c_2) \times$

$\times (1+|\eta|)^{\mu_1-\mu_2}$ можно воспользоваться (24), в итоге мы придем к оценке (25).

Дифференцируя $\psi^{-1}(\tau, \eta)$ по формуле Лейбница и оценивая ψ^{-1} с помощью (25), а производные ψ, с помощью оценок (22), мы получим оценку типа (22′) для функции ψ^{-1}:

$$|\partial_\tau^k \partial_\eta^\beta \psi^{-1}(\tau, \eta)| < c_{k\beta}(1+|\tau|)^r (1+|\eta|)^{\mu_{k\beta}}. \tag{26}$$

Теперь нам надо для ψ^{-1} построить разложение (21) и оценить остаточный член. Ввиду обратимости $b_0(\eta)$ в $\mathscr{M}$ формальный ряд Лорана для ψ обратим в кольце формальных рядов Лорана по степеням $\tau - z$ с коэффициентами из $\mathscr{M}(\mathbb{R}^{n-1})$. Пусть $\Phi_N(\tau, \eta)$ — сумма первых N членов формального ряда для ψ^{-1}, и пусть $\varphi_N(\tau, \eta) = \psi^{-1}(\tau, \eta) - \Phi_N(\tau, \eta)$. Если Ψ_M — сумма первых M членов ряда (21), то имеем (ср. предложение 3, п. 1.5) $\varphi_N(\tau, \eta) =$

$$= \psi^{-1}(\tau, \eta)\left[(1 - \Phi_N(\tau, \eta)\Psi_M(\tau, \eta)) - \Psi_M(\tau, \eta)\Phi_N(\tau, \eta)\right].$$

Дифференцируя это равенство по формуле Лейбница, оценивая производные ψ^{-1} с помощью (26) и пользуясь рекуррентными формулами типа (1.27′) для коэффициентов Φ_N и Ψ_M, мы при достаточно большом M получим оценки

$$|\partial_\tau^k \partial_\eta^\beta \varphi_N(\tau, \eta)| < c_{k\beta N}(1+|\tau|)^{r-N-k}(1+|\eta|)^{\mu_{Nk\beta}},$$

доказывающие наше утверждение.

2.6. Свертыватели и сверточные уравнения в $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ и в $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}$. Пространство $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ инвариантно относительно сдвигов по переменным y; что касается сдвигов по t, то они (как в одномерном случае) определены только на неплотном подпространстве $\mathscr{S}_+ \subset \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{+}$.

Аналогично, $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}$ инвариантно относительно сдвигов по y, а сдвиги по t определены только на подпространстве $\bigcap\limits_{q,\rho,l} H^{(q,-\infty)}_{(\rho,l)+} \subset$ $\subset \mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}$.

Оператором свертки на $\Phi = \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ будет называться непрерывный оператор A: $\Phi \to \Phi$, удовлетворяющий условиям:

(i) A перестановочен с дифференциальными операторами;

(ii) если φ, $T_h\varphi \in \Phi$, то $T_h A\varphi = AT_h\varphi$.

Предложение. *Для каждого оператора свертки*

$$A\colon \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \to \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \tag{27}$$

найдется такое распределение $f \in (\mathcal{O}')_+$, что

$$A\varphi = f * \varphi \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}, \tag{28}$$

где справа свертка понимается в смысле $\mathcal{O}'$.

Доказательство проводится по плану предложения 1.6.

Ввиду предложения естественно определить

$$\mathfrak{C}\left(\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}\right) = \{f \in (\mathcal{O}')_+, f * \varphi \in \dot{\mathscr{S}}^{\{-\infty\}}_{[+]} \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}\}. \tag{29}$$

Теперь мы обсудим связь операторов свертки на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ с операторами свертки на $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ (определение которых будет дано ниже).

Итак, пусть задан оператор свертки (27). Как мы уже говорили выше, $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ является строгим, а следовательно, регулярным индуктивным пределом. Далее, пространства $\mathscr{S}^{\{p\}}_{[+]}$ (см. (16)) являются проективными пределами банаховых пространств и, следовательно, метризуемыми пространствами, так что для $\mathscr{S}^{\{p\}}_{[+]}$ выполнена первая аксиома счетности. Таким образом, к оператору (27) применима теорема из п. 4 дополнения к гл. I. Согласно этой теореме $\forall p \in \mathbb{Z}$ можно указать такое $r = r(p) \in \mathbb{Z}$, что сужение A на $\mathscr{S}^{\{p\}}_{[+]}$ индуцирует непрерывный оператор

$$A\colon\ \mathscr{S}^{\{p\}}_{[+]} \to \mathscr{S}^{\{r\}}_{[+]}. \tag{27_p}$$

Отметим, что, в силу перестановочности A с п. д. о. $\delta_k^+(D_t)$, $r(p) = p + r(0)$, но в данный момент это обстоятельство для нас несущественно. К оператору (27_p), действующему из одного проективного предела банаховых пространств в другой, применима теорема из п. 5 Дополнения к гл. I. Согласно этой теореме $\forall q, \rho, l, s \ \ \exists q', \rho', l', s'$ (зависящие от q, ρ, l, s), так что оператор (27_p) по непрерывности продолжается до непрерывного оператора

$$A^{q\rho ls}_{q'\rho'l's'}\colon\ H^{(p|q',s')}_{(\rho',l')+} \to H^{(r|q,s)}_{(\rho,l)+}. \tag{30}$$

Поскольку операторы (30) коммутируют со сдвигами по переменным y, то, как и в предложении 2 (i) из п. I.4.1, можно показать, что $s' = s + \sigma(\rho, l, q)$, а числа ρ', q', l' не зависят от s. Таким образом, $\forall q, \rho, l \ \ \exists q', \rho', l'$, так что $\forall s \ \exists s'$ и непрерывен оператор

$$A^{q\rho ls'}_{q'\rho'l's}\colon\ H^{(p|q',s)}_{(\rho',l')+} \to H^{(r|q,s')}_{(\rho,l)+}. \tag{30'}$$

Из непрерывности и естественной согласованности операторов (30′) вытекает существование непрерывного оператора

$$A\colon \bigcap_{q,\rho,l} \bigcup_{s} H^{(p|q,s)}_{(\rho,l)+} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{U}^{\{p\}}_{+} \to \mathscr{U}^{\{r\}}_{+}, \tag{31}$$

который при любых p продолжается до непрерывного оператора (30). Операторы (31), обладающие указанным свойством, будем называть регулярными операторами из $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}$ в $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}$.

Естественно определить *оператор свертки* на $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}$ как р е г у л я р н ы й оператор (31), перестановочный с дифференциальными операторами и с теми сдвигами элементов $\varphi \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$, которые не выводят φ за пределы $\mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$.

Мы только что показали, что всякий оператор свертки на $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ продолжается до оператора свертки на $\mathscr{U}_{[+]}^{\{-\infty\}}$. Без труда (ср. предложение 2 (ii) из п. I.4.1) проверяется, что сужение оператора свертки (31) на $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ также будет оператором свертки на $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$.

Таким образом, естественно определить

$$\mathfrak{C}(\mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}) = \mathfrak{C}(\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}).$$

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\mathfrak{C}(\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}) = \mathfrak{C}(\mathscr{U}_{[+]}^{\{-\infty\}}) = \mathscr{U}_{[+]}^{\{-\infty\}}. \tag{32}$$

Доказательство. Левые пространства (32) содержат правое в силу предложения 2 из п. 2.4. Так как $\delta(x) \in \mathscr{U}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, то $\mathfrak{C}(\mathscr{U}_{[-]}^{\{-\infty\}}) \subset \mathscr{U}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, откуда следуют равенства (32).

Теорема 2. *Пусть* $\Phi_+ = \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, $\mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$ *и* $A \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$. *Следующие условия эквивалентны*:

(I) *Сверточное уравнение*

$$A * u = f \tag{33}$$

для любого $f \in \Phi_+$ *имеет единственное решение* $u \in \Phi_+$.

(II) A — *обратимый элемент алгебры* $\mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$, *т. е. найдется такое* $G \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$, *что* $A * G = G * A = \delta(x)$.

Доказательство. (II)$\Rightarrow$(I) ввиду предложения 2 из п. 2.4.

(I)$\Rightarrow$(II). Для $\Phi_+ = \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$ это утверждение тривиально, поскольку $\delta(x) \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$. Если уравнение (33) однозначно разрешимо в $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, то обратный оператор $(\mathrm{con}_A)^{-1}$ будет оператором свертки на $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$. Воспользовавшись предложением и теоремой 1, мы получим, что $(\mathrm{con}_A)^{-1} = \mathrm{con}_G$ для некоторого $G \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$.

Условие II теоремы 2 эквивалентно условию обратимости символа $\widehat{A}(\tau, \eta)$ в пространстве $\mathscr{H}^{+} \otimes \mathscr{M} = \mathscr{F}\mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$. Ввиду предложения 3 из п. 2.5 условие (II) можно заменить условием

($\widehat{\mathrm{II}}$) *Если* $\widehat{A}(\tau, \eta) = \widehat{b}_0(\eta)(\tau - i)^{-r} + \ldots$ — *символ распределения* $A \in \mathscr{U}_{+}^{\{-\infty\}}$, *то найдутся такие константы* c, $c_1 > 0$ *и вещественные* μ, μ_1, *что*

$$|\widehat{A}(\tau, \eta)| > c(1 + |\tau| + |\eta|)^{\mu}, \quad \operatorname{Im}\tau \leqslant 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{34}$$

$$|\widehat{b}_0(\eta)| > c_1(1 + |\eta|)^{\mu_1}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{35}$$

Если выполнено условие (II), то $u = G * f$ является решением (единственным) уравнения (33) при заданной правой части f. Как было отмечено в замечании 2 из п. 2.4, найдется такое m

$(m=-\deg_t G)$, что $u\in\mathcal{S}^{\{p+m\}}_{[+]}$, $\mathcal{U}^{\{p+m\}}_{+}$ при $f\in\mathcal{S}^{\{p\}}_{+}$, $\mathcal{U}^{\{p\}}_{+}$. Таким образом, из условия (II) вытекает условие

(Ia) *Найдется такое* m, *что* $\forall p\in\mathbb{Z}$ *у уравнения* (33) $\forall f\in\mathcal{S}^{\{p\}}_{[+]}$, $\mathcal{U}^{\{p\}}_{[+]}$ *существует единственное решение* $u\in\mathcal{S}^{\{p+m\}}_{[+]}$, $\mathcal{U}^{\{p+m\}}_{+}$.

Из (Ia) тривиально следует (I), т. е. (Ia) можно включить в число эквивалентных условий теоремы 2.

Как уже отмечалось в замечании 2 из п. 2.4, $\forall\rho$, l $\exists\sigma=\sigma(\rho, l)$, так что оператор con_G: $\mathcal{S}^{\{p\}}_{[+]}\to\mathcal{S}^{\{p+m\}}_{[+]}$ по непрерывности продолжается до непрерывного оператора из $H^{(p|q,s)}_{(\rho,l)+}$ в $H^{(p+m|q+m,s+\sigma)}_{(\rho,l)+}$. Таким образом, в число эквивалентных условий теоремы 2 можно включить условие

(Ib) *Найдется такое* $m\in\mathbb{Z}$, *что* $\forall\rho$, l $\exists\sigma$, *так что при любых* p, $q\in\mathbb{Z}$, $s\in\mathbb{R}$ *и* $\forall f\in H^{(p|q,s)}_{(\rho,l)+}$ *найдется единственное решение* $u\in H^{(p+m|q+m,s+\sigma)}_{(\rho,l)+}$ *уравнения* (33).

Из условий (34), (35) следует, что

$$\widehat{A}(\tau,\eta)\neq 0,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{34$'$}$$

$$\widehat{b}_0(\eta)\neq 0,\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{35$'$}$$

являются необходимыми условиями справедливости условий (I), (Ia), (Ib) теоремы 2. В случае полиномиальных символов ввиду теоремы Зайденберга — Тарского эти условия являются достаточными. Справедлива

Т е о р е м а 3. *Для дифференциального оператора*

$$P(D_t, D_y)=\sum_{j=0}^{m} p_j(D_y)\,D_t^{m-j}$$

выполнены условия (I), (Ia), (Ib) *теоремы* 2 *тогда и только тогда, когда для* $\widehat{A}=P(\tau,\eta)$, $\widehat{b}_0(\eta)=P_0(\eta)$ *выполнены условия* (34′), (35′).

Теорема 2 допускает следующее уточнение.

Т е о р е м а 2′. *Для* $A\in\mathcal{U}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *следующие условия эквивалентны.*

(I) $\forall p\in\mathbb{Z}$ *отображение*

$$\mathrm{con}_A\colon\ \mathcal{S}^{\{p+m\}}_{[+]}\to\mathcal{S}^{\{p\}}_{[+]} \tag{33$'$}$$

является изоморфизмом.

(II) *Найдется фундаментальное решение* $G\in\mathcal{U}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *и* $\deg_t A=m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (II)$\Rightarrow$(I). Если $\deg_t A=m$, то оператор (33′) непрерывен. Далее, если G — фундаментальное решение (33), то согласно замечанию 1) из п. 2.4 $\deg_t G=\deg_t\delta(x)-\deg_t A=-m$, а согласно замечания 2) из п. 2.4 оператор $\mathrm{con}_G=(\mathrm{con}_A)^{-1}$ является непрерывным оператором из $\mathcal{S}^{\{p\}}_{[+]}$ в $\mathcal{S}^{\{p+m\}}_{[+]}$, т. е. (33′) — изоморфизм.

(I)$\Rightarrow$(II). Прежде всего заметим, что из существования оператора, обратного к (33′), следуют эквивалентные утверждения теоремы 2 и, в частности, существование фундаментального решения G и равенство: $\deg_t G=-\deg_t A$. Таким образом, нам надо только проверить, что $\deg_t A=m$. Ввиду замечания 1) из п. 2.4 всегда можно подобрать такой элемент $\varphi\in\mathscr{S}^{\{p+m\}}_{[+]}$, что $A\varphi$ лежит в $\mathscr{S}^{\{p+m-\deg_t A\}}_{[+]}$ и не лежит в более узком пространстве этой шкалы, т. е. $p+m-\deg_t A\geqslant p$, т. е. $\deg_t A\leqslant m$.

С другой стороны, из непрерывности оператора, обратного к (33′), следует, что $p-\deg_t G\geqslant p+m$, т. е. $\deg_t G\leqslant -m$, откуда $\deg_t A\geqslant m$. Итак, окончательно $\deg_t A=m$.

Замечание.[1]) Применительно к пространству $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ (определенному во введении к этой главе) можно построить теорию операторов свертки, аналогичную развитой выше для пространства $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Для этого вводятся еще два функциональных пространства

$$\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}=\bigcup_{r}\bigcap_{q,l}H^{(r|q,-\infty)}_{(-\infty,l)+},\quad \mathscr{V}^{\{-\infty\}}_{[+]}=\bigcup_{r,\rho,l}\bigcap_{q}H^{(r|q,-\infty)}_{(\rho,l)+}.$$

Первое из них является потенциальным пространством свертывателей, на второе естественным образом продолжаются операторы свертки, первоначально определенные на $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Доказывается, что

$$\mathfrak{C}\left(\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}\right)=\mathfrak{C}\left(\mathscr{V}^{\{-\infty\}}_{[+]}\right)=\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}.$$

В пространстве $\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}\subset(\mathscr{K}')_+$ определено преобразование Фурье — Лапласа, которое устанавливает изоморфизм

$$\mathscr{F}\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}=\mathscr{G}^+\otimes\mathscr{M}.$$

Элементы правого пространства будут формальными рядами Лорана из $\mathscr{G}^+$ (см. п. 1.7) с коэффициентами из $\mathscr{M}(\mathbb{R}^{n-1})$. *Пространство $\mathscr{G}^+\otimes\mathscr{M}$ является алгеброй относительно умножения*; в нем (как и в $\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{M}$) эффективно описываются обратимые элементы. Отсюда вытекает, что $\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *является алгеброй относительно свертки, а распределение $f\in\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ является обратимым элементом этой алгебры тогда и только тогда, когда f — обратимый элемент $(\mathscr{K}')_+$, а $f_0(y)$ — старший коэффициент в разложении* (15′) — *обратимый элемент $\mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$*. Отсюда выводятся критерии разрешимости сверточных уравнений в $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, $\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. В случае дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в условиях (34′), (35′) замкнутую полуплоскость $\operatorname{Im}\tau\leqslant 0$ надо заменить на открытую полуплоскость $\operatorname{Im}\tau<0$.

---

[1]) Подробное изложение вопросов, затронутых в настоящем замечании, можно найти в Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. [14, с. 295—303].

2.7. Сверточные уравнения в конечной полосе. Определение фактор-пространств из гл. II

$$\Phi[a, b) = \Phi[a, \infty)/\Phi[b, \infty), \qquad a < b,$$

остается в силе и в случае изученных выше пространств $\Phi = \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, $\mathscr{W}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, $\mathscr{V}^{\{-\infty\}}_{[+]}$. Эти же фактор-пространства можно реализовать как предельные пространства для шкал

$$H^{(r|q,s)}_{(l)}[0, b) = H^{(r|q,s)}_{(\rho,l)+}/H^{(q,s)}_{(\rho,l)}[b, \infty), \quad b > 0. \tag{36}$$

Это определение корректно (т. е. правая часть не зависит от ρ в силу леммы 1 из п. II.2.3), мы также воспользовались тем, что распределения из $H^{(r|q,s)}_{(\rho,l)+}$, равные 0 в окрестности $t = 0$, на самом деле принадлежат $H^{(q,s)}_{(\rho,l)+}$.

Проверяются равенства

$$\mathscr{S}^{\{-\infty\}}[0, b) = \bigcup_r H^{(r|\infty,\infty)}_{(\infty)}[0, b), \tag{37}$$

$$\mathscr{O}^{\{-\infty\}}[0, b) = \bigcup_{r,l} H^{(r|\infty,\infty)}_{(l)}[0, b), \tag{38}$$

$$\mathscr{U}^{\{-\infty\}}[0, b) = \bigcup_r \bigcap_{q,l} H^{(r|q,-\infty)}_{(l)}[0, b). \tag{39}$$

Разложения типа (15), (15′) автоматически переносятся на пространства (37)—(39), соответствующие формулировки мы оставляем читателю.

Как было показано выше, пространство $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}$ является алгеброй относительно свертки, а распределения из этого пространства является свертывателями на пространствах $\Phi_+ = \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, сохраняющими подпространства $\Phi[b, \infty)$, и тем самым порождают операторы на фактор-пространствах $\Phi[0, b)$. При этом имеют место включения

$$\mathscr{U}^{\{-\infty\}}[0, b) * \Phi[0, b) \subset \Phi[0, b), \quad \Phi = \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}, \ \mathscr{O}^{\{-\infty\}}_{[+]}, \ \mathscr{U}^{\{-\infty\}}_{+}. \tag{40}$$

Операторами свертки на пространствах (37)—(39) естественно называть регулярные (непрерывные) операторы, коммутирующие с дифференциальными операторами и теми сдвигами, которые не выводят за пределы этих пространств. Повторением доказательства предложения 2.6 доказывается, что для всякого оператора свертки A на $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}[0, b)$, $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}[0, b)$ найдется такой элемент $f \in \mathscr{O}'[0, b)$, что

$$A\varphi = f * \varphi \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}[0, b), \quad \mathscr{O}^{\{-\infty\}}[0, b).$$

Распределения f, для которых отвечающий им оператор con_f переводит $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}[0, b)$, $\mathscr{O}^{\{-\infty\}}[0, b)$ в себя, называются *свертывателями*.

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\mathfrak{C}(\Phi^{\{-\infty\}}[0, \mathrm{b})) = \mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, b), \quad \Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, \mathcal{U}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, b)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(I) *Уравнение* (33) *однозначно разрешимо в пространствах* $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}[0, b)$, $\mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, b)$.

(II) *Уравнение* (33) *имеет фундаментальное решение* $G \in \mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, b)$, *т. е.*

$$A * G - \delta(x) = G * A - \delta(x) \equiv 0 \bmod \bigcap_{q,l} H^{(q,-\infty)}_{(-\infty,l)}[b, \infty).$$

Условие (II) *является достаточным условием однозначной разрешимости* (33) *в* $\mathcal{O}^{\{-\infty\}}[0, b)$.

Как и в случае теоремы 2 из п. 2.6, условие (I) можно заменить эквивалентным условием о разрешимости в пространствах типа (36) (см. (Ia), (Iв) в п. 2.6).

Теперь займемся анализом условия (II) теоремы 2. Наряду с пространствами $\mathcal{U}_{+}^{\{-\infty\}}$ можно рассмотреть пространства $(\mathcal{U}_{+}^{\{-\infty\}})_{[\gamma]}$, а пространство $\mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, b)$ реализовать как фактор-пространство $(\mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, \infty))_{[\gamma]}/(\mathcal{U}^{\{-\infty\}}[c, \infty))_{[\gamma]}$ для любого γ. Но тогда имеет место

Достаточное условие обратимости в $\mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, b)$. *Существует* γ *и такой представитель* $A_0 \in (\mathcal{U}_{+}^{\{-\infty\}})_{[\gamma]}$ *класса смежности* A, *что* A_0 — *обратимый элемент* $(\mathcal{U}_{+}^{\{-\infty\}})_{[\gamma]}$.

Тривиальная модификация предложений 2, 3 из п. 2.6 показывает, что это условие эквивалентно тому, что

(i) $\exists c > 0$, μ, γ, *так что*

$$|\widehat{A}_0(\tau, \eta)| > c(1 + |\tau| + |\eta|)^{\mu}, \quad \operatorname{Im}\tau \leqslant \gamma;$$

(ii) *если* $\widehat{A}_0(\tau, \eta) = \widehat{b}(\eta)(\tau - i)^{-r} + \widehat{A}_0'$, $A_0' = O(|\tau|^{-r-1})$, *то* $\exists c'$, μ',

$$|\widehat{b}_0(\eta)| > c'(1 + |\eta|)^{\mu'}.$$

Замечание. Так как разные представители класса смежности A отличаются на распределение из $\left(\bigcap_{q,\rho,l} H^{(q,-\infty)}_{(\rho,l)}\right)[b, \infty)$, то символ $\widehat{b}_0(\eta)$ не зависит от выбора A_0 и однозначно определяется по A.

Необходимое условие обратимости A *в* $\mathcal{U}^{\{-\infty\}}[0, b)$ *состоит в том, что*

(a) A — *обратимый элемент* $\mathcal{O}'[0, b)$;

(b) *если* $A = b_0(y)(D_t - i)^{-r}\delta(t) + b_1(y)(D_t - i)^{-r-1}\delta(t) + \ldots$, *то* $b_0(y)$ — *обратимый элемент* $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$.

Как было показано в п. II.4.9, из условия (a) вытекает условие (см. (II.4.61))

(i′) $\{\widehat{A}_0(\tau, \eta) = 0, \operatorname{Im}\tau \leqslant 0\} \Rightarrow \{\operatorname{Im}\tau > c_1 \ln(1 + |\tau| + |\eta|) + c_2\}$.

Из условия (b) вытекает условие (ii).

Рассмотрим теперь полином

$$P(\tau, \eta) = p_0(\eta)\tau^m + \sum_{j>0} p_j(\eta)\tau^{m-j}.$$

Как было уже замечено в п. II.4.9, для $\widehat{A} = P$ условия (i), (i′) эквивалентны однородному условию И. Г. Петровского: $\exists\gamma$, так что

$$P(\tau, \eta) \neq 0, \quad \operatorname{Im}\tau \leqslant \gamma, \quad \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{41}$$

Условие (ii) эквивалентно тому, что

$$p_0(\eta) \neq 0. \tag{42}$$

Полиномы, удовлетворяющие (41), (42), называются *корректными по И. Г. Петровскому.*

2.8. Граничные задачи в $\mathbb{R}^n_+$ для псевдодифференциальных уравнений. Пусть $A \in \mathscr{U}^{\{-\infty\}}_+$. Используя естественные отождествления $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$, $\mathscr{S}_{[+]}$ и $\mathscr{S}_\oplus$, можно сопоставить распределению A оператор, действующий в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$, этот оператор определяется из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+) & \xrightarrow{p_\oplus \mathrm{con}_A} & \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathscr{S}_{[+]} \xrightarrow{\mathrm{con}_A} & \mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} & \xrightarrow{p_\oplus} \mathscr{S}_\oplus \end{array}$$

Возникает задача о решении уравнения в полупространстве

$$p_\oplus(A * u) = f. \tag{43}$$

Свойства этого уравнения существенно зависят от знака $\deg_t A$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть A — обратимый элемент $\mathscr{U}^{\{-\infty\}}_+$ и $\deg_t A = 0$. Тогда $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ существует единственное решение $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ уравнения* (43).

Доказательство. Согласно теореме 2 из п. 2.6 (см. условие (Ia)) уравнение

$$A * u_+ = f_+ \tag{44}$$

$\forall f \in \mathscr{S}_{[+]}$ имеет решение $u_+ \in \mathscr{S}_{[+]}$, которое также удовлетворяет (43). Докажем единственность. Если выполнено (43), то

$$A * u_+ - f_+ = h_- \in (\mathcal{O}')_-. \tag{43′}$$

Если $u_+ \in \mathscr{S}_{[+]}$ и $\deg_t A = 0$, то левая часть (43) принадлежит $\mathscr{S}_{[+]}$. Поскольку пересечение $\mathscr{S}_{[+]} \cap (\mathcal{O}')_-$ пусто, то в условиях теоремы всякое решение (43) является решением (44) и, следовательно, (43) имеет единственное решение.

Теперь мы перейдем к случаю $\deg_t A = m > 0$. В этом случае, если $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_+)$ — решение (43), то $A * u_+ \in \mathscr{S}^{\{-m\}}_{[+]}$, а следовательно, правая часть (43′) лежит в $\mathscr{S}^{\{-m\}}_{[+]} \cap (\mathcal{O}')_-$, т. е. сосредоточена на плоскости $t = 0$. Но тогда найдутся такие функции

$h_j(y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, что $h_- = \sum_{j=1}^{m} h_j(y) D_t^{j-1}\delta(t)$, т. е.

$$A * u_+ = f_+ + \sum_{j=1}^{m} h_j(y) D_t^{j-1}\delta(t). \tag{45}$$

Если A — обратимый элемент $\mathscr{U}_+^{\{-\infty\}}$, и если G — соответствующее фундаментальное решение, то общее решение (43) имеет вид

$$u_+ = G * f_+ + \sum_{j=1}^{m} G * \left(h_j(y) D_t^{j-1}\delta(t)\right), \tag{46}$$

т. е. зависит от m произвольных функций. Чтобы выделить единственное решение, ставятся граничные условия, например, задаются данные Коши:

$$\left(D_t^{k-1}u\right)(0, y) = \varphi_k(y), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{47}$$

Теорема 2. *Пусть A — обратимый элемент $\mathscr{U}_+^{\{-\infty\}}$ и $\deg_t A = m > 0$. Тогда $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+^n)$ и $\forall \varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $k = 1, \ldots, m$ существует единственное решение задачи* (43), (47).

Доказательство. В условиях теоремы уравнение (45) при произвольной правой части из $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-m\}}$ имеет единственное решение $u_+ \in \mathscr{S}_{[+]}$. Доказательство теоремы свелось к проверке того, что всегда можно так подобрать функции $h_j(y)$, чтобы выполнялись условия (47). Нам будет удобно переписать (46) в виде

$$u_+ = G * f_+ + G * \sum_{j=1}^{m} h_j'(D_t - i)^{j-1}\delta(t) \tag{46'}$$

и подбирать h_j' таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\left((D_t - i)^{k-1} u\right)(0, y) = \varphi_k'(y), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{47'}$$

Решения задач (43), (47) и (43′), (47′) тривиально выражаются друг через друга.

Если $A \in \mathscr{U}_+^{\{-\infty\}}$ и $\deg_t A = m$, то $\deg_t G = -m$ и $G \in \mathscr{U}_+^{\{m-1\}}$. Отсюда следует, что $G(t, y)$ будет гладкой функцией t со значениями в $\mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$ и имеет смысл обозначение

$$g_l(y) = \left((D_t - i)^l G\right)(0, y) \in \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{48}$$

Заметим, что

$$g_l(y) \equiv 0, \quad l = 0, \ldots, m-2. \tag{49}$$

Нам еще понадобится явный вид $g_{m-1}(y)$. Пусть $A = b_0(y)(D_t - i)^m + A'$, $\deg_t A' \leqslant m - 1$. Пусть $h_0(y)$ — фундаментальное решение оператора con_{b_0}, т. е. $b_0 * h_0 = \delta(y)$. Тогда $G =$

$= h_0(y)(D_t - i)^{-m}\delta(t) + G'$, $G' \in \mathcal{U}_+^{\{m\}}$. С учетом (1.8′) получим

$$g_{m-1} = h_0(y) z_1(0) = ih_0(y). \tag{49′}$$

Подставим теперь из (46′) в (47′). Тогда получим систему

$$\sum_{j=1}^{m} g_{k+j-2} * h_j' = \varphi_k' - \left((D_t - i)^{k-1} G * f_+\right)(0, y).$$

В силу (49) эта система будет диагональной, причем на главной диагонали стоит обратимый (в $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ (оператор $i\,\mathrm{con}_{h_0}$. Теорема доказана.)

Рассмотрим теперь случай $\deg_t = -m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае всякое решение (43) будет решением (44), причем правая часть f_+ принадлежит $\mathcal{S}_+^{\{m\}}$, т. е. уравнение (44) разрешимо не для всех f_+. Чтобы избавиться от коядра, рассмотрим так называемую задачу с потенциалами.

Теорема 3. *Пусть A — обратимый элемент $\mathcal{U}_+^{\{-\infty\}}$ и $\deg_t A = -m$, $m > 0$. Тогда $\forall f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ найдется такое $u \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ и такие $h_j(y) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $j = 1, \ldots, m$, что*

$$p_{\oplus} A * \left(u_+ + \sum_{j=1}^{m} h_j(y) D_t^{j-1}\delta(t)\right) = f_+. \tag{50}$$

Доказательство следует из изоморфизма $A * \mathcal{S}_{[+]}^{\{-m\}} = \mathcal{S}_{[+]}$.

ГЛАВА V

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение

Целью этой главы является доказательство разрешимости задачи Коши для некоторого класса корректных по Петровскому дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Условия, налагаемые на рассматриваемые нами операторы, диктуются методом параметрикса Е. Е. Леви.

Общая идея метода параметрикса состоит в том, что уравнение с переменными коэффициентами решается методом последовательных приближений, причем в качестве начального приближения берется решение уравнения с постоянными (замороженными) коэффициентами. Этот подход был впервые применен Е. Е. Леви при построении фундаментального решения эллиптического уравнения. Он приводит к цели в тех ситуациях, когда локально, в подходящих функциональных пространствах, оператор с переменными коэффициентами является малым возмущением аналогичного оператора с коэффициентами, замороженными в точке.

Конкретизируя сказанное выше, рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными данными для дифференциального уравнения:

$$P(x;\ D)u(x)=f(x). \tag{1}$$

Мы рассматриваем это уравнение в таких пространствах, в которых нулевые данные Коши можно заменить условием

$$u\,(t,\ x)=f\,(t,\ y)=0,\quad t\leqslant 0,\quad \forall y\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что символ $P(x;\ \tau,\ \eta)$ оператора (1) равномерно по x удовлетворяет однородному условию Петровского, т. е. найдется такое γ_0, что

$$P\,(x;\ \tau,\ \eta)\neq 0,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant\gamma_0\quad \forall\eta\in\mathbb{R}^{n-1},\quad \forall x\in\mathbb{R}^{n}. \tag{3}$$

Решение (1), (2) ищется в виде псевдодифференциального оператора с символом $P^{-1}(x;\ \tau,\ \eta)$, примененного к неизвестной плотности g:

$$u(x) = {}_\gamma P^{-1}(x;\ D_t,\ D_y)\,g =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\operatorname{Im}\tau=\gamma<\gamma_0} \exp(it\tau + i\langle y,\ \eta\rangle)\, P^{-1}(x;\ \tau,\ \eta)\,\widehat{g}(\tau,\ \eta)\,d\xi. \quad (4)$$

Если коэффициенты оператора P не зависят от x, то при $g = f$ (4) будет определять решение задачи (1), (2). При условии (3) п. д. о. (4) переводит функции (распределения), сосредоточенные при $t \geqslant 0$, в функции (распределения) такого же типа. Подставим теперь выражение (4) в уравнение (1), внесем дифференциальный оператор под знак интеграла и применим формулу Лейбница — Хёрмандера (см. (I.2.54)):

$$P(x;\ D)\left[\exp(it\tau + i\langle y,\ \eta\rangle)\, P^{-1}(x;\ \tau,\ \eta)\right] =$$
$$= \exp(it\tau + i\langle y,\ \eta\rangle)\left[1 + \sum_{|\alpha|>0}^{\operatorname{ord} P} P^{(\alpha)}(x;\ \tau,\ \eta)\, D_x^\alpha P^{-1}(x;\ \tau,\ \eta)/\alpha!\right] \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \exp(it\tau + i\langle y,\ \eta\rangle)\,[1 + r(x;\ \tau,\ \eta)]. \quad (5)$$

Тогда получим псевдодифференциальное уравнение для g:

$$g + r(x;\ D)\,g = f. \quad (6)$$

Мы наложим на символ исходного оператора P алгебраические условия, гарантирующие оценки для символа $r(x;\ \tau,\ \eta)$ из (5):

$$\left|D_x^\alpha \partial_{(\tau,\eta)}^\beta r(x;\ \tau,\ \eta)\right| < \varepsilon_{\alpha\beta}(\operatorname{Im}\tau) \to 0, \quad \operatorname{Im}\tau \to -\infty. \quad (7)$$

Как будет показано ниже, из оценок (7) следует, что $\forall s,\ l$ $\exists \gamma_{sl}$, так что норма оператора

$${}_{[\gamma]}r(x;\ \ D)\colon\ H^{(s)}_{(l)[\gamma]+} \to H^{(s)}_{(l)[\gamma]+} \quad (6')$$

при $\gamma < \gamma_{sl}$ не превосходит, скажем, 1/2. Но тогда для $\forall f \in$ $\in H^{(s)}_{(l)[\gamma]+}$ уравнение (6) имеет единственное решение $g \in H^{(s)}_{(l)[\gamma]+}$. Оператор, обратный к $1 + r(x,\ D)$, представляется в виде ряда Неймана $\sum(-r(x;\ D))^j$. Таким образом, мы на самом деле строим решение (6) методом последовательных приближений, отправляясь от уравнения с постоянными (замороженными) коэффициентами. Найдя g из уравнения (6), мы по формуле (4) определим решение $u(x)$ исходного уравнения (1), (2). При этом $u(x) = 0$ в полуплоскости $t < 0$.

Укажем достаточные условия на символ оператора (1), гарантирующие оценки (7) для символа r.

(а) *Полином* $P(x;\ \tau,\ \eta)$ *для любого (фиксированного)* $x \in \mathbb{R}^n$ *является экспоненциально корректным, т. е. (предложение* III.4.2 (iii)) $\forall \alpha > 0$ *равномерно по* $(\operatorname{Re}\tau,\ \eta)$

$$P^{(\alpha)}(x;\ \tau,\ \eta)\,P^{-1}(x;\ \tau,\ \eta) \to 0, \quad \operatorname{Im}\tau \to -\infty.$$

(b) *Символ* $P(x;\ \tau,\ \eta)$ *удовлетворяет условию постоянства силы*: $\exists A>0$, γ_0 *такие, что*

$$|P(x';\ \tau,\ \eta)P^{-1}(x'';\ \tau,\ \eta)|<A,\quad (\operatorname{Re}\tau,\ \eta)\in\mathbb{R}^n,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant\gamma_0.$$

Замечание. Если выполнено условие (b), то отношение $P^{(\alpha)}/P$ в условии (a) стремится к нулю равномерно по $\operatorname{Re}\tau$, η и x и выполняется условие (3).

П. д. о. (4) называется *параметриксом* оператора (1); как уже говорилось, если выполнены условия (a), (b), то в подходящем функциональном пространстве этот оператор отличается от обратного к (1) на оператор с малой нормой. Мы включаем дифференциальные операторы, удовлетворяющие условиям типа (a), (b), в широкий класс псевдодифференциальных операторов, содержащий наряду с исходными операторами и их параметриксы. Тогда теоремы о разрешимости псевдодифференциальных уравнений являются простыми следствиями утверждений о композиции п. д. о.

Сделаем еще одно общее замечание. Традиционное исчисление п. д. о., ориентированное на изучение локальных свойств дифференциальных операторов, строится в шкалах типа $\{H^{(s)}\}$, а сами операторы рассматриваются с точностью до операторов меньшего порядка (сглаживающих операторов). Для изучения вопросов разрешимости задачи Коши мы разовьем исчисление п. д. о., которые действуют в шкалах пространств $\{\Phi^{(s)}_{[\rho]}\}$, $\Phi=H$, $H_{(l)}$, $H_{\langle\nu\rangle}$, одновременно для всех $\rho<\rho_0$, причем операторы рассматриваются с точностью до таких, норма которых стремится к нулю при $\rho\to-\infty$. При этом центр тяжести будет лежать в оценках п. д. о. при фиксированных ρ, т. е. оценках п. д. о. в $\mathbb{R}^n$.

Задача Коши для уравнения (1) будет решаться нами в различных функциональных пространствах, характеризуемых поведением функций из этих пространств на бесконечности по пространственным переменным y: пространства интегрируемых в квадрате функций (§ 1), пространства функций степенного убывания и роста (§ 2), пространства функций растущих или убывающих как $\exp(\nu|y|)$, $\nu\in\mathbb{R}$. В каждом из указанных случаев мы построим свое исчисление п. д. о.

Характер поведения на бесконечности функций, на которые действует п. д. о., диктует выбор соответствующего класса символов. Заметим, что для того чтобы п. д. о. с символом $a(x;\ \xi)$ переводил в себя некоторую шкалу функциональных пространств, естественно потребовать, чтобы функция $a_\xi(x)=a(x;\ \xi)$ была мультипликатором на индуктивном пределе этой шкалы, а функция $b_x(\xi)=a(x;\ \xi)$ была преобразованием Фурье свертывателя на этом пространстве (в случае «вырожденных» символов $a(x;\ \xi)=a(x)b(\xi)$ эти условия становятся необходимыми и достаточными). Ввиду сказанного при построении исчисления на $H^{(-\infty)}$ следует рассматривать символы $a(x;\ \xi)$, принадлежащие $C_{(0)}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n_{x'})$ при каждом фиксированном ξ и $C_{(-\infty)}(\mathbb{R}^n_\xi)$ при каждом фиксированном x.[1]) Однако при оценках таких операторов в банаховых нормах типа $\| \ \|^s$ приходится налагать дополнительные условия на рост по ξ производных символа по x и предполагать стабилизацию символа при $|x| \to \infty$, т. е. считать, что

$$a(x;\ \xi) = a(\xi) + a'(x;\ \xi), \tag{8}$$

$$a'_{(\beta)}(x;\xi) \in L_1(\mathbb{R}^n_x) \quad \forall \beta \geqslant 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{8'}$$

Мы пользуемся стандартным обозначением

$$a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\xi) = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a(x;\xi).$$

В случае шкал, связанных с $\mathcal{S}'$, условия $a_\xi(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n_x)$, $b_x(\xi) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n_\xi)$ обеспечивают непрерывность оператора $a(x;\ D)$ на $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}'$, но не позволяют получать оценки в шкалах типа $\{H_{(l)}^{(s)}\}$. Поэтому в § 2 мы будем иметь дело с символами $a(x;\ \xi)$, допускающими оценки

$$\left|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\xi)\right| < A_{\alpha\beta}(1+|x|)^p(1+|\xi|)^q. \tag{9}$$

В этом случае условия стабилизации типа (8), (8′) оказываются излишними. В § 1 при оценках норм п. д. о. мы пользуемся элементарными оценками интегральных операторов, возникающих после применения к п. д. о. преобразования Фурье. Эти оценки являются простыми модификациями оценок, проведенных в основополагающей работе Кона — Ниренберга [1]. В § 2 в случае символов, удовлетворяющих условиям типа (9), используется глубокая теорема Кальдерона — Вайянкура [1]. В § 2 линейное пространство символов, удовлетворяющих (9), мы превращаем в алгебру с инволюцией, определив на символах операции композиции $(a, b) \to a \circ b$ и инволюции $a \to a^{\#}$. При этом оказывается, что композиция п. д. о. $a(x;\ D) \cdot b(x;\ D)$ является п. д. о. с символом $(a \circ b)(x;\ \xi)$, т. е. соответствие между символами $a(x;\ \xi)$ и операторами $a(x;\ D)$: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ является представлением алгебры символов в алгебре ограниченных операторов на $\mathcal{S}$. При этом инволюция $a \mapsto a^{\#}$ переходит в инволюцию $a(x;D) \mapsto (a(x;\ D))^*$.

Напомним основные формулы для п. д. о. Каждому символу $a(x;\ \xi)$ наряду с п. д. о.

$$a(x;D)u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \exp(i\langle x,\ \xi\rangle)\,a(x;\ \xi)\,\widehat{u}(\xi)\,d\xi \tag{10}$$

можно сопоставить п. д. о.

$$^t a(x;D)u(x) =$$
$$= (2\pi)^{-n}\int \exp(i\langle x,\xi\rangle)\int \exp(-i\langle y,\xi\rangle)\,a(y;\xi)\,u(y)\,dy\,d\xi. \tag{11}$$

---

[1]) На самом деле требование непрерывности символов по ξ также является излишним.

Используя равенство Парсеваля, несложно проверить (формально), что

$$\int \bar{v}(x)\, a(x;\, D)\, u(x)\, dx = \int u(x)^t a(x;\, -D)\, v(x)\, dx.$$

Отметим, что в случае полиномиальных символов $a(x;\ \xi) = \sum a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$ операторы (10), (11) переходят в операторы

$$a(x;\ D)\, u(x) = \sum a_\alpha(x)\, D^\alpha\, u(x),$$

$$^t a(x;\ D)\, u(x) = \sum D^\alpha\, (a_\alpha(x)\, u(x)).$$

§ 1. Однородная задача Коши для п. д. о. в шкалах пространств, связанных с $H_+^{(-\infty)}$

Основной целью этого параграфа является доказательство разрешимости задачи Коши с нулевыми начальными данными для экспоненциально корректных дифференциальных операторов постоянной силы (см. введение к главе) в пространствах $(H_{[\gamma]}^{(\pm\infty)})_+$. Это утверждение получается как непосредственное следствие некоторых теорем о разрешимости п. д. уравнений.

Как уже говорилось во введении к главе, мы рассматриваем п. д. о. с символами $a(x;\ \xi)$ *как возмущения п. д. о., отвечающих символам* $a(x^0;\ \xi)$, *замороженным в точках* $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Для правильной оценки норм $a(x;\ D) - a(x^0;\ D)$ нам придется перейти от достаточно грубых шкал $H^{(s)} = (1 + |D|^2)^{-s/2} H$ к шкалам $H^\mu = \mu^{-1}(D) H$, отвечающих широкому набору $\mathscr{B}$ символов (в частности, мы сможем рассматривать $\mu(\xi) = a(x^0;\ \xi)$). С каждым символом $\mu \in \mathscr{B}$ мы свяжем пространство S^μ символов $a(x;\ \xi)$ «порядка μ» по ξ. Основная часть параграфа посвящена оценкам п. д. о. с символами из $S^{-\infty} = \bigcup S^\mu$ в пространствах типа H^μ и доказательству разрешимости п. д. уравнений в случае малости некоторых констант, фигурирующих в оценках символов. Во второй части параграфа от пространств H^μ мы переходим к пространствам $(H^\mu)_{[\gamma]+}$, дополнительно предполагая голоморфность всех символов по переменной τ, двойственной времени t, в полуплоскости $\operatorname{Im} \tau < \gamma$. В этом случае малые константы возникают за счет выбора «большого» параметра $-\gamma$.

Следующая часть параграфа посвящена задаче Коши в конечной полосе $a \leqslant t \leqslant b$. При этом мы будем пользоваться тем, что при соответствующих условиях, связывающих символ $a(x;\ \xi)$ и весовые функции $\mu(\xi)$, $\lambda(\xi)$, одновременно имеют место изоморфизмы

$$a(x;\ D)\colon H_{[\gamma]+}^\mu \to H_{[\gamma]+}^\lambda,$$

где γ принадлежит лучу $(-\infty,\ \gamma(\mu,\ \lambda))$. Из-за зависимости γ от μ и λ мы не можем продолжить эти изоморфизмы до изоморфизмов предельных пространств $H_+^{(\pm\infty)}$. Однако в случае конечной полосы мы можем реализовать $H^\mu[a,\ b)$ как фактор-пространство $H^{\mu}_{[\rho]}[a,\infty)/H^{\mu}_{[\rho]}[b,\infty)$, причем при разных ρ мы получаем одно и то же фактор-пространство (меняется только на эквивалентную индуцированная норма). Это представление индуцирует изоморфизм

$$a(x;D)\colon H^{(\pm\infty)}[a,b)\to H^{(\pm\infty)}[a,b).$$

В конце § 1 мы рассмотрим п. д. о., символы которых удовлетворяют всем условиям параграфа, а по переменной τ разлагаются в асимптотический ряд Лорана (символы с условием трансмиссии). Как и в гл. IV, можно определить пространства $\Phi^{\{-\infty\}}_{[-1]}$ $\left(\Phi=H^{(\infty)}\right)$ распределений, гладких при $t>0$, и для символов с условием трансмиссии установить изоморфизм

$$a(x;D)\colon \Phi^{\{-\infty\}}[0,b)\to\Phi^{\{-\infty\}}[0,b)\qquad (\Phi=H^{(\infty)}).$$

Опираясь на этот изоморфизм, мы покажем, что для экспоненциально корректного дифференциального оператора постоянной силы задача Коши

$$P(x;D)u(x)=f(x),\quad x=(t,x),\quad y\in\mathbb{R}^{n-1},\quad 0\leqslant t<b,$$
$$\left(D_t^{j-1}u\right)(0,y)=\varphi_j(y),\quad j=1,\ldots,m,$$

при $f\in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ и $\varphi_j\in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ имеет единственное решение $u\in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n_{[0,b)}\right)$.

1.1. Некоторые оценки п. д. о. в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathscr{B}$ класс отличных от нуля непрерывных (для простоты) функций $\mu(\xi)$, удовлетворяющих условию: $\exists K_\mu$, N_μ, так что

$$|\mu(\xi')\mu^{-1}(\xi'')|\leqslant K_\mu(1+|\xi'-\xi''|)^{N_\mu}\quad\forall\xi',\ \xi''\in\mathbb{R}^n.\tag{1}$$

Полагая в (1) соответственно $\xi'=\xi$, $\xi''=0$ или $\xi'=0$, $\xi''=\xi$, получим

$$K_\mu'^{-1}(1+|\xi|)^{-N_\mu}\leqslant|\mu(\xi)|<K_\mu'(1+|\xi|)^{N_\mu}.\tag{1$'$}$$

Очевидно, что $\mathscr{B}$ является кольцом относительно умножения и наряду с $\mu(\xi)$ содержит $\mu^{-1}(\xi)$.

С каждой функцией $\mu\in\mathscr{B}$ свяжем функциональное пространство

$$H^\mu=\mu^{-1}(D)H=\{\varphi\in H^{(-\infty)},\ \mu(D)\varphi\in H\}\tag{2}$$

с естественной банаховой нормой

$$\|\varphi\|^\mu=\|\mu(D)\varphi\|.\tag{3}$$

Из этого определения (как и в случае пространств $H^{(s)}$, отвечающих $\mu(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}\in\mathscr{B}$) выводится, что

$$\left(H^\mu\right)'=H^{1/\mu},\quad \mathscr{F}H^\mu=H_\mu\overset{\text{def}}{=}\{f(\xi)\in H_{(-\infty)},\ \mu f\in H\}.$$

Из (1$'$) вытекают вложения $H^{(N_\mu)}\subset H^\mu\subset H^{(-N_\mu)}$, откуда

$$H^{(\infty)}=\bigcap_{\mu\in\mathscr{B}}H^\mu,\quad H^{(-\infty)}=\bigcup_{\mu\in\mathscr{B}}H^\mu.\tag{4}$$

Мы будем изучать п. д. о. в шкале пространств $\{H^\mu\}$; символы этих п. д. о. будут удовлетворять условиям стабилизации (0.8), (0.8′). При этих условиях можно определить набор норм, отвечающих натуральным q (см. (5)):

$$[a(\cdot;\ \xi)|_{(q)} = |a(\xi)| + \sum_{|\beta|\leqslant q} \int |a'_{(\beta)}(x;\ \xi)|\,dx.$$

Определение. Обозначим через S^μ, $\mu \in \mathscr{B}$, класс функций $a(x;\ \xi)$, непрерывных (для простоты) в $\mathbb{R}^{2n}$, бесконечно дифференцируемых по $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию стабилизации (0.8), (0.8′) и оценкам

$$[a(\cdot;\ \xi)]_{(q)} \leqslant A_q(a)\,|\mu(\xi)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

$$[a(\cdot;\ \xi') - a(\cdot;\ \xi'')]_{(q)} \leqslant B_q(a)(1 + |\xi' - \xi''|)^{M_a}|\mu(\xi'')|$$
$$\forall \xi',\ \xi'' \in \mathbb{R}^n, \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

Можно показать, что если $a_j(x;\ \xi) \in S^{\mu_j}$, $j = 1, \ldots, J$, то $(a_1 \ldots a_J)(x;\ \xi) \in S^\mu$, $\mu = \mu_1 \ldots \mu_J$.

Далее, если символ $a(x;\ \xi)$ допускает оценку снизу $|a(x;\ \xi)| > \delta|\mu(\xi)|$, то $a^{-1}(x;\ \xi) \in S^{1/\mu}$.

Замечание. Если символ $a(x;\ \xi)$ вида (0.8) удовлетворяет условиям (5) и имеет первые производные по ξ, также удовлетворяющие таким оценкам, то $a(x;\ \xi) \in S^\mu$. В самом деле, согласно формуле Лагранжа

$$a(x;\ \xi') - a(x;\ \xi'') = \sum_{|\alpha|=1} (\xi' - \xi'')^\alpha a^{(\alpha)}(x;\ \zeta),$$
$$\zeta = t\xi' + (1-t)\xi'', \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тогда

$$[a(\cdot;\ \xi') - a(\cdot;\ \xi'')]_{[q]} \leqslant \sum_{|\alpha|=1} [a^{(\alpha)}(\cdot;\ \zeta)]_q (1 + |\xi' - \xi''|) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha|=1} A_q(a^{(\alpha)})\,|\mu(\zeta)|\,(1 + |\xi' - \xi''|).$$

Применяя к $\mu(\zeta)$ оценку (1), окончательно получим, что

$$[a(\cdot;\ \xi') - a(\cdot;\ \xi'')]_{(q)} \leqslant B_q\,|\mu(\xi'')|\,(1 + |\xi' - \xi''|)^{N_\mu + 1}.$$

Если $a(x;\ \xi)$ имеет вид (0.8), (0.8′), то, как легко видеть, п. д. о.

$$a(x;\ D)\varphi = a(D)\varphi + a'(x;\ D)\varphi \tag{7}$$

переводит функции $\varphi \in H^{(\infty)}$ в функции из этого же пространства. Применяя преобразование Фурье, получим важную для дальнейшего формулу

$$(\widehat{a(x;\ D)\varphi})(\xi) = a(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi) + (2\pi)^{-n/2} \int \widehat{a'}(\xi - \xi',\ \xi')\,\widehat{\varphi}(\xi')\,d\xi'. \tag{8}$$

Отметим также, что

$$({}^t\overline{a(x;\,D)\varphi})(\xi)=a(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)+(2\pi)^{-n/2}\int\widehat{a'}(\xi'-\xi,\,\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi')\,d\xi'. \tag{8'}$$

Предложение 1. *Пусть символ $a(x;\,\xi)$ вида* (0.8), (0.8′) *удовлетворяет условиям* (5). *Тогда* $\forall\lambda\in\mathscr{B}$, $\forall q\geqslant n+1+N_\lambda$ *справедлива оценка*

$$\|a(x;\,D)\varphi\|^{\lambda}\leqslant c(\lambda,\,n)\ A_q(a)\|\varphi\|^{\mu\lambda}\quad \forall\varphi\in H^{(\infty)}. \tag{9}$$

Доказательство. Заменяя φ на $\mu^{-1}(D)\lambda^{-1}(D)\psi$, $\psi\in H^{(\infty)}$, и пользуясь определением норм (3), перепишем неравенство (9) в виде

$$\|\lambda(D)a(x;\,D)\mu^{-1}(D)\lambda^{-1}(D)\psi\|\leqslant c(\lambda,\,n)A_q(a)\|\psi\|. \tag{9'}$$

В случае $a(x;\,\xi)\equiv a(\xi)$ эта оценка с $q=0$ тривиально следует из равенства Парсеваля и условия (5). Рассмотрим случай $a(x;\,\xi)=a'(x;\,\xi)$. Переходя к преобразованию Фурье и пользуясь (8), мы получим, что в левой части (9′) стоит L_2-норма интегрального оператора с ядром

$$H(\xi,\,\xi')=(2\pi)^{-n/2}\widehat{a}(\xi-\xi',\,\xi')\mu^{-1}(\xi')\lambda^{-1}(\xi')\lambda(\xi). \tag{10}$$

Согласно формуле обращения преобразования Фурье

$$|\zeta^{\alpha}\widehat{a'}(\zeta,\,\xi)|\leqslant(2\pi)^{-n/2}\int|a'_{(\alpha)}(x;\,\xi)|\,d\mu(\xi).$$

Суммируя эти оценки для $|\alpha|\leqslant N$ и пользуясь условием (5), получим, что $\forall N\in\mathbb{Z}_+$

$$|\widehat{a}'(\zeta,\,\xi)|\leqslant\varkappa(N,\,n)A_N(a)\,(1+|\zeta|)^{-N}|\mu(\xi)|. \tag{11}$$

Заменяя в этом неравенстве ζ на $\xi-\xi'$ и ξ на ξ' и учитывая (1), получим оценку ядра (10)

$$\begin{aligned}H(\xi,\,\xi')|&\leqslant\varkappa(N,\,n)A_N(a)(1+|\xi-\xi'|)^{-N}|\lambda(\xi)\lambda^{-1}(\xi')|\leqslant\\&\leqslant\varkappa(N,\,n)K_\lambda A_N(a)(1+|\xi-\xi'|)^{-N+N_\lambda}.\end{aligned}$$

Положим $N=N_\lambda+n+1$ и обозначим правую часть через $h(\xi-\xi')$. Тогда получим, что интегральный оператор с ядром (10) мажорируется оператором свертки с функцией $h\in L_1$, откуда

$$\begin{aligned}\|\lambda(D)\,a(x;\,D)\,\mu^{-1}(D)\,\lambda^{-1}(D)\,\psi\|&\leqslant\|h*|\widehat{\psi}|\|\leqslant\\&\leqslant\|h\|_{L_1}\|\widehat{\psi}\|=c(\nu,\,n)\ A_{n+1+N_\lambda}(a)\|\psi\|.\end{aligned}$$

Вспоминая, что $\psi=\lambda(D)\mu(D)\varphi$, получим неравенство (9).

Следствие. *Пространство H^{μ} является модулем над бесконечно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими* *условию стабилизации на бесконечности:*

$$a(x) = a + a'(x), \quad \int |D^\alpha a'(x)|\, dx < \infty \quad \forall \alpha > 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что функция $a(x)$ удовлетворяет условиям предложения 1 с $\mu(\xi) \equiv 1$.

Предложение 1'. *В условиях предложения 1 $\forall \lambda \in \mathscr{B}$ и $\forall q \geqslant n + 1 + N_\lambda + N_\mu$ справедлива оценка*

$$\| {}^t a(x; D)\varphi \|^\lambda \leqslant c'(\nu, n) A_q(a) \|\varphi\|^{\mu\lambda} \quad \forall \varphi \in H^{(\infty)}. \tag{12}$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 1, только ввиду (8') вместо L_2-нормы интегрального оператора с ядром (10) надо оценивать L_2-норму интегрального оператора с ядром

$$H'(\xi, \xi') = (2\pi)^{-n/2} \widehat{a'}(\xi - \xi'; \xi') \mu^{-1}(\xi') \lambda^{-1}(\xi') \lambda(\xi), \tag{10'}$$

с учетом (11) имеем

$$|H'(\xi, \xi')| \leqslant \varkappa(N, n) A_N(a)(1 + |\xi - \xi'|)^{-N} |\lambda(\xi)\lambda^{-1}(\xi')| \times$$
$$\times |(\mu(\xi)\mu^{-1}(\xi')| \leqslant K_\lambda K_\mu \varkappa(N, n)(1 + |\xi - \xi'|)^{-N+N_\mu+N_\lambda},$$

откуда и следует оценка (12).

Из представления $H^{(\infty)}$ в виде проективного предела шкалы пространств (2) (см. (4)) и предложений 1, 1' вытекает непрерывность операторов

$$a(x; D), \ {}^t a(x; D): H^{(\infty)} \to H^{(\infty)}. \tag{13}$$

Пространство $H^{(\infty)}$ плотно в H^μ для любого $\mu \in \mathscr{B}$,[1]) поэтому из предложений 1, 1' вытекает, что $\forall \lambda \in \mathscr{B}$ операторы (13) по непрерывности продолжаются до непрерывных операторов

$$a(x; D), \ {}^t a(x; D): H^{\mu\lambda} \to H^\lambda. \tag{14}$$

Из непрерывности операторов (13) следует непрерывность операторов

$${}^t a(x; D), \ a(x; D): H^{(-\infty)} \to H^{(-\infty)}, \tag{13'}$$

определенных с помощью двойственности (0.11). Это определение согласовано с определением (13) и естественным вложением $H^{(\infty)} \subset H^{(-\infty)}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что сужение (13') на $H^{\mu\lambda}$ совпадает с оператором (14), определенным с помощью продолжения по непрерывности.

Пусть символы $a_j(x; \xi)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (5) для $\mu = \mu_1, \mu_2$. Тогда символ $(a_1 a_2)(x; \xi)$ также удовлетворяет этому условию с $\mu = \mu_1\mu_2$, а константы $A_q(a_1 a_2)$ можно

---

[1]) Поскольку $H_{(\infty)}$ плотно в H (ср. лемма I.2.1), а оператор умножения на $\mu(\xi)$, $\mu \in \mathscr{B}$, переводит $H_{(\infty)}$ в себя, то $H_{(\infty)}$ плотно в $\mu^{-1}(\xi)H$, откуда $H^{(\infty)}$ плотно в H^μ.

оценить сверху через $A_q(a_1)A_{q+n}(a_2)$.[1]) Ввиду этого обстоятельства п. д. о. $(a_1a_2)(x;\ D)$ и композиции $a_1(x;\ D)\cdot a_2(x;\ D)\times \times a_2(x;\ D)\cdot a_1(x;\ D)$ будут непрерывными операторами из $H^{\mu_1\mu_2\lambda}$ в H^λ для любого $\lambda\in\mathscr{B}$. Таким образом, из предложения 1 вытекает непрерывность оператора

$$a_1(x;\ D)\cdot a_2(x;\ D)-(a_1a_2)(x;\ D): H^{\mu_1\mu_2\lambda}\to H^\lambda$$

и оценка нормы этого оператора через произведение констант $A_{q_1}(a_1)A_{q_2}(a_2)$, где $q_1,\ q_2$ зависят от λ.

Если же $a_j(x;\ \xi)\in S^{\mu_j}$, то $a_1a_2\in S^{\mu_1\mu_2}$ и можно получить более аккуратную оценку нормы указанного оператора.

Предложение 2. *Пусть* $\mu_1,\ \mu_2\in\mathscr{B}$ *и* $a_j(x;\ \xi)\in S^{\mu_j}$, $j=1,\ 2$. *Тогда* $\forall\lambda\in\mathscr{B}$ *справедлива оценка*

$$\|(a_1(x;\ D)\cdot a_2(x;\ D)-(a_1a_2)(x;\ D))\varphi\|^\lambda\leqslant$$
$$\leqslant c(\lambda,\ a_1,\ a_2)\|\varphi\|^{\mu_1\mu_2\lambda}\quad\forall\varphi\in H^{(\infty)},\qquad(15)$$

где в качестве константы в (15) *можно взять*

$$c(\lambda,\ a_1,\ a_2)=\varkappa(n,\ q_1,\ q_2,\ \lambda)B_{q_1}(a_1)A_{q_2}(a_2)\qquad(15')$$

для любых

$$q_1\geqslant N_\lambda+n+1,\qquad q_2\geqslant q_1+M_{a_2}+n+1.\qquad(15'')$$

Доказательство. Нам нужно оценить $(L_2\to L_2)$-норму оператора

$$\lambda(D)[a_1(x;\ D).a_2(x;\ D)-(a_1a_2)(x;\ D)]\lambda^{-1}(D)\mu_1^{-1}(D)\mu_2^{-1}(D)=$$
$$=\lambda(D)\left[a_1(D)a_2'(x;\ D)-a_2'(x;\ D)a_1(D)\right]\lambda^{-1}(D)\mu_1^{-1}(D)\mu_2^{-1}(D)+$$
$$+\lambda(D)\left[a_1'(x;\ D)\cdot a_2'(x;\ D)-\left(a_1'a_2'\right)(x;\ D)\right]\lambda^{-1}(D)\mu_1^{-1}(D)\mu_2^{-1}(D).$$

Займемся оценкой нормы второго оператора (первый оценивается проще). После преобразования Фурье мы получим интегральный оператор с ядром

$$H(\xi,\ \xi')=(2\pi)^{-n/2}\lambda(\xi)\lambda^{-1}(\xi')\mu_1^{-1}(\xi')\mu_2^{-1}(\xi')\times$$
$$\times\int\left[\widehat{a}_1'(\xi-\theta;\ \theta)-\widehat{a}_1'(\xi-\theta;\ \xi')\right]\widehat{a}_2'(\theta-\xi';\ \xi')\,d\theta.\qquad(16)$$

Согласно условию (6) и определению норм $[\ ]_{(q)}$ (ср. оценку (11))

$$|\widehat{a}_1(\xi-\theta;\ \theta)-\widehat{a}_1(\xi-\theta;\ \xi')|\leqslant$$
$$\leqslant\varkappa(N_1,\ n)B_{N_1}(a_1)(1+|\xi-\theta|)^{-N_1}(1+|\xi'-\theta|)^{M_{a_1}}|\mu_1(\xi')|.\qquad(17)$$

---

[1]) При оценке $A_q(a_1a_2)$ надо воспользоваться формулой Лейбница и оценивать один сомножитель в L_1-норме, а другой в L_∞-норме. При оценке L_∞-норм через L_1-нормы производных надо воспользоваться теоремой вложения С. Л. Соболева

$$\max|w(x)|\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant n}\int|D^\alpha w(x)|\,dx.$$

Согласно (11),

$$|\widehat{a}_2'(\theta-\xi';\xi')|\leqslant\varkappa'(N_2,n)A_{N_2}(a_2)(1+|\xi'-\theta|)^{-N_2}|\mu_2(\xi')|.$$

Перемножая эти оценки, мы получим, что подынтегральное выражение в (16) не превосходит

$$\varkappa(N_1,N_2,n)B_{N_1}(a_1)A_{N_2}(a_2)|\mu_1(\xi')\mu_2(\xi')|(1+|\xi-\theta|)^{-N_1}\times$$
$$\times(1+|\xi'-\theta|)^{-N_2+M_{a_1}}\leqslant\varkappa(N_1,N_2,n)B_{N_1}(a_1)A_{N_2}(a_2)\times$$
$$\times|\mu_1(\xi')\mu_2(\xi')|(1+|\xi-\xi'|)^{-N_1}(1+|\xi'-\theta|)^{-N_2+N_1+M_{a_2}}.$$

Положим $N_2=N_1+M_{a_1}+n+1$. Тогда последнее выражение можно проинтегрировать по θ и получить оценку

$$|H(\xi',\xi'')|\leqslant$$
$$\leqslant\varkappa'(N_1,n)B_{N_1}(a_1)A_{N_1+M_{a_1}+n+1}(a_2)|\lambda(\xi)\lambda^{-1}(\xi')|(1+|\xi-\xi'|)^{-N_1}\leqslant$$
$$\leqslant\varkappa(N_1,n,\lambda)B_{N_1}(a_1)A_{N_1+M_{a_1}+n+1}(a_2)(1+|\xi-\xi'|)^{-N_1+N_\lambda}.$$

Полагая $N_1=N_\lambda+n+1$, мы получим, что интегральный оператор с ядром (16) мажорируется оператором свертки с функцией, L_1-норма которой не превосходит $\varkappa(n,q_1,q_2)B_{q_1}(a_1)A_{q_2}(a_2)$, где q_1 и q_2 имеют вид (15″).

Аналогично из (8), (8′) выводится

Предложение 3. *Пусть* $\mu\in\mathscr{B}$ *и* $a(x;\xi)\in S^\mu$. *Тогда* $\forall q\geqslant M_a+N_\lambda+n+1$ *справедлива оценка*

$$\|(a(x;D)-{}^ta(x;D))\varphi\|^\lambda\leqslant\varkappa(n,q,\lambda)B_q(a)\|\varphi\|^{\mu\lambda}.$$

1.2. Псевдодифференциальные уравнения в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть символ* $a(x;\xi)=a(\xi)+a'(x;\xi)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(I) $a(x;\xi)\in S^{a(\xi)}$;

(II) *найдется такая константа* $\delta>0$, *что*

$$|a(x';\xi)a^{-1}(x'';\xi)|<\delta\quad\forall x',x''\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда $\forall\lambda\in\mathscr{B}$ *можно указать такое натуральное* p *и такое* ε, *что при условии*

(III) $B_p(a)A_p(a)<\varepsilon$

отображение (14) *является изоморфизмом пространств.*

Замечания. 1) В определение класса S^μ мы включали предположение о принадлежности μ к $\mathscr{B}$. Отметим, что в силу условия (I) $a(\xi)\in\mathscr{B}$. Действительно, имеем

$$|a(\xi')-a(\xi'')|<B(a)(1+|\xi'-\xi''|)^{M_a}|a(\xi'')|,$$

откуда

$$|a(\xi')a^{-1}(\xi'')|<1+B(a)(1+|\xi'-\xi''|)^{M_a}\leqslant\widetilde{B}(a)(1+|\xi'-\xi''|)^{M_a}.$$

Используя (II), мы аналогично получим, что $a(x^0; \xi) \in \mathscr{B}$ $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$.

2) Положим формально $a(\infty; \xi) = a(\xi)$. Тогда условия (I), (II) можно объединить в одно условие:

$$a(x; \xi) \in S^{a(x^0; \xi)} \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что непрерывность операторов (14) вытекает из предложений 1, 1′ предыдущего пункта. Мы докажем, что условия теоремы обеспечивают существование единственного решения уравнения

$$a(x; D)u = f \in H^\lambda \qquad ({}^t a(x; D)v = h \in H^\lambda). \tag{18}$$

Тогда в силу теоремы Банаха оператор (14) имеет непрерывный обратный, т. е. (14) является изоморфизмом.

Для доказательства разрешимости (18) рассмотрим операторы

$$H_1 = 1 - a(x; D) \cdot b(x; D) \colon H^\lambda \to H^\lambda,$$

$$H_2 = 1 - b(x; D) \cdot a(x; D) \colon H^{a\lambda} \to H^{a\lambda},$$

где мы положили $b(x; \xi) = a^{-1}(x; \xi)$. Как нетрудно проверить, символ $b(x; \xi) = b(\xi) + b'(x; \xi)$ удовлетворяет условиям теоремы, и в частности $b \in S^{1/a}$. Отсюда и из предложения 1 п. 1.1 вытекает непрерывность операторов H_1, H_2. Покажем, что если ε из (III) достаточно мало, то нормы операторов H_1, H_2 не превосходят, скажем, 1/2. Действительно, согласно предложению 2 из п. 1.1 норму H_1 можно оценить сверху через

$$\varkappa(n, q_1, q_2, \lambda) B_{q_1}(a) A_{q_2}(b) \quad (q_i = q_i(\lambda),\ i = 1, 2).$$

Далее,

$$A_q(b) \leqslant K(q, \delta) A_q(a) (1 + A_{q+n}(a))^{R(q)},$$ [1]

откуда норма оператора H_1 оценивается сверху через

$$\varkappa(n, \delta, \lambda, A_p) B_p(a) A_p(a),$$

где $p \geqslant n + q_1$, $n + q_2$. Аналогично можно оценить норму оператора H_2. Итак, в (III) можно взять $\varepsilon = \frac{1}{2} \varkappa(n, \delta, \lambda, A_p)$.

Теперь, как и во введении к главе, будем искать решение (18) в виде

$$u = b(x; D) g, \quad g \in H^\lambda.$$

Согласно предложению 1 из п. 1.1 $u \in H^{a\lambda}$. Подставляя в (18), получим уравнение для g:

$$a(x; D) \cdot b(x; D) g \overset{\text{def}}{=} g - H_1 g = f.$$

---

[1]) Это неравенство проверяется с помощью совсем элементарных выкладок, которые мы не будем приводить.

Если норма оператора H_1 меньше 1, то это уравнение имеет единственное решение $g \in H^\lambda$, задаваемое рядом Неймана: $g = \sum_{j=0}^{\infty} H_1^j f$.

Для доказательства единственности подействуем на (18) оператором $b(x; D)$. Тогда получим

$$u - H_2 u = b(x; D) f,$$

откуда

$$\|u\|^{\alpha\lambda} \leqslant \|b(x; D) f\|^{\alpha\lambda} + \|H_2 u\|^{\alpha\lambda} \leqslant c\|f\|^\lambda + 1/2\|u\|^{\alpha\lambda},$$

или

$$\|u\|^{\alpha\lambda} \leqslant 2c\|f\|^\lambda.$$

В силу этой оценки $u \equiv 0$ при $f \equiv 0$.

Однозначная разрешимость уравнения

$${}^t a(x; D) v = h$$

вытекает из предложения 3 из п. 1.1, поскольку операторы

$$(a(x; D))^{-1} (a(x; D) - {}^t a(x; D)) \colon H^{\alpha\lambda} \to H^{\alpha\lambda},$$

$$(a(x; D) - {}^t a(x; D)) (a^{-1}(x; D)) \colon H^\lambda \to H^\lambda$$

имеют малую норму, если выполнены условия теоремы и константы $B_q(a)$ достаточно малы (точные условия на эти константы мы не будем выписывать).

В случае дифференциальных операторов с переменными коэффициентами условия на символ в теореме 1 приобретают более простой вид.

Лемма 1. *Пусть полиномиальный символ*

$$P(x; \xi) = \sum a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{19}$$

удовлетворяет условиям:

(A) *найдется такая константа $B > 0$, что*

$$|P^{(\beta)}(x; \xi)| < B|P(x; \xi)|;$$

(B) *найдется такая константа $\delta > 0$, что*

$$|P(x'; \xi) P^{-1}(x''; \xi)| < \delta \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

(C) *коэффициенты символа имеют вид*

$$a_\alpha(x) = a_\alpha + a'_\alpha(x), \quad \int |D^\beta a'_\alpha(x)| \, dx \leqslant A_\beta \quad \forall \beta > 0.$$

Тогда символ $a(x; \xi) = P(x; \xi)$ удовлетворяет условиям (I), (II) *теоремы* 1.

Мы начнем с анализа условия (B). Справедлива

Лемма 2. *Пусть полином $P(x; \xi)$ удовлетворяет условиям* (B) *и* (C). *Тогда он представляется в виде*

$$P(x; \xi) = P(\xi) + \sum_{j=1}^{J} b_j(x) P(x^j; \xi), \quad P(\xi) = \sum a_\alpha \xi^\alpha, \tag{20}$$

где $x^1, \ldots, x^J$ — *некоторый конечный набор точек, и существуют такие числа* $p_{j\alpha}$, $j = 1, \ldots, J$, $|\alpha| \leqslant m$, *что*

$$b_j(x) = \sum_\alpha p_{j\alpha} a'_\alpha(x), \quad j = 1, \ldots, J. \tag{21}$$

Доказательство. Если выполнено (B), то полиномы $P_x(\xi) = P(x; \xi)$ имеют одинаковую степень, поэтому линейная оболочка $L(P)$ семейства полиномов $\{P_x,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ является подпространством конечномерного пространства полиномов от n переменных степени не выше $m = \deg P(\xi)$. Следовательно, можно так подобрать точки $x^1, \ldots, x^J$, чтобы полиномы $P(\xi)$, $P(x^1; \xi), \ldots, P(x^J; \xi)$ образовали базис в $L(P)$. Но тогда при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ можно подобрать коэффициенты $b_j(x)$ таким образом, чтобы имело место представление (20). Записывая правую часть (20) в виде (19) и приравнивая коэффициенты при степенях ξ^α, получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов $b_j(x)$:

$$\sum_{j=1}^{J} a_\alpha(x^j)\, b_j(x) = a_\alpha(x) - a_\alpha = a'_\alpha(x).$$

Линейная независимость $\{P, P(x^1; \cdot), \ldots, P(x^J; \cdot)\}$ означает, что матрица $\|a_\alpha(x^j)\|$ имеет максимальный ранг, откуда и следует (21).

Отметим, что в силу (21) и (C) функции $b_j(x)$ принадлежат L_1 вместе со всеми производными $D^\beta b_j(x)$ и $\exists L > 0$, так что

$$\int |D^\beta b_j(x)|\, dx \leqslant L \sum_\alpha \int |D^\beta a'_\alpha(x)|\, dx. \tag{22}$$

Лемма 3. *Для полинома* $Q(\xi)$ *степени* m *следующие условия эквивалентны*:

(i) $|Q^{(\alpha)}(\xi)| < B\,|Q(\xi)| \quad \forall \beta > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $|Q(\xi') - Q(\xi'')| < B'\,|Q(\xi'')|\,(1 + |\xi' - \xi''|)^m \quad \forall \xi', \xi'' \in \mathbb{R}^n$,

где отношение B/B' *сверху и снизу оценивается через константы, зависящие только от* m *и* n.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii) Разлагая $Q(\xi')$ по формуле Тейлора в точке ξ'', получим

$$Q(\xi') - Q(\xi'') = \sum_{\beta > 0} (\xi' - \xi'')^\beta Q^{(\beta)}(\xi'')/\beta!. \tag{23}$$

Оценивая $Q^{(\beta)}(\xi'')$ с помощью (i), получим оценку (ii) с константой $B' = B \sum_{\beta > 0} 1/\beta!$

(ii)$\Rightarrow$(i). Если в (23) заменить ξ'' на ξ и $\xi' - \xi''$ на θ, получим

$$\left| \sum_{\beta > 0} \frac{1}{\beta!} \frac{Q^{(\beta)}(\xi)}{Q(\xi)} \theta^\beta \right| \leqslant B'(1 + |\theta|)^m \leqslant 2^m B', \quad |\theta| < 1.$$

Из интерполяционной формулы Лагранжа (см. Хёрмандер [1], лемма 3.1.5) следует, что коэффициент при θ^β (т. е. $Q^{(\beta)}(\xi)/Q(\xi)\beta!$) оценивается через $2^m B'$ с константой, зависящей только от m и n, т. е. имеет место (i).

Доказательство леммы 1 сводится к проверке условия $P(x;\ \xi)\in S^{P(\xi)}$, поскольку (B) совпадает с условием (II) теоремы 1. Ввиду леммы 3 для каждого полинома $Q(\xi)=P(x;\ \xi)$, $x\in\mathbb{R}^n$, имеет место (ii) с константой $B'=B\varkappa(n,\ m)$. Теперь остается воспользоваться равенством

$$D_x^\beta(P(x;\ \xi')-P(x;\ \xi''))=\sum_{j=1}^{J}D^\beta b_j(x)(P(x^j;\ \xi')-P(x^j;\ \xi'')) \qquad (24)$$

и неравенствами (22).

Если к условиям леммы 1 добавить некоторые предположения о малости константы B из (A) (или производных $D^\beta a_\alpha(x)$), то можно получить для символов (19) аналог теоремы 1. Ниже теорема 1 на самом деле будет применяться к семействам п. д. о. $a_\gamma(x;\ D)$, зависящих от параметра $\gamma\in\mathbb{R}$, а выполнения условия малости (III) будем добиваться за счет выбора этого параметра. В случае символов (19) имеет место

Теорема 2. *Пусть $P(x;\ \xi)$ является экспоненциально корректным полиномиальным символом постоянной силы, т. е. выполнены условия* (A), (B) *из введения к главе. Пусть для коэффициентов выполнено условие* (C) *леммы* 1. *Тогда* $\forall\lambda\in\mathscr{B}$ $\exists\gamma(\lambda)$, *так что при* $\gamma\leqslant\gamma(\lambda)$ *отображение* (14) *при* $a(x;\xi)=P_\gamma(x;\ \xi)\overset{\text{def}}{=}P(x;\ \xi_1+i\gamma,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ *является изоморфизмом пространств.*

Доказательство. Ввиду условия (B) и леммы 2 полиномы $P_\gamma(x;\ \xi)$ при $\gamma<\gamma_0$ представляются в виде

$$P_\gamma(x;\ \xi)=P_\gamma(\xi)+\sum b_j(x)P_\gamma(x^j;\ \xi), \qquad (25)$$

где коэффициенты $b_j(x)$ имеют вид (21) и не зависят от γ. С учетом (22) мы получим оценки

$$[P_\gamma(\cdot;\ \xi)]_{(q)}\leqslant A_q|P_\gamma(\xi)|$$

с константами A_q, не зависящими от γ. Далее, условие (A) означает, что

$$\left|P_\gamma^{(\alpha)}(x;\ \xi)P_\gamma^{-1}(x;\ \xi)\right|<\varepsilon(\gamma,\ x),\ \varepsilon(\gamma,\ x)\to 0,\quad \gamma\to-\infty.$$

Полагая $\varepsilon(\gamma)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant J}\varepsilon(\gamma,\ x^j)$ и пользуясь равенством (24), мы получим, что

$$[P_\gamma(\cdot;\ \xi')-P_\gamma(\cdot;\ \xi'')]_{(q)}\leqslant\varepsilon(\gamma)A_q|P_\gamma(\xi'')|(1+|\xi'-\xi''|)^m.$$

В этом случае условие (III) теоремы 1 примет вид

$$\varepsilon(\gamma)A_p^2\leqslant\varepsilon(p,\ \lambda,\ \delta,\ A_p),$$

где правая часть не зависит от γ. Так как $\varepsilon(\gamma)\to 0$, $\gamma\to-\infty$, то это неравенство будет выполнено при $\gamma\leqslant\gamma_0$.

1.3. Исчисление п. д. о. в пространствах $H_{+}^{(-\infty)}$. Теперь мы установим аналоги результатов пп. 1.1—1.2 для пространств функций (распределений), сосредоточенных при $t \geqslant 0$. Для работы с такими пространствами классы символов $\mathscr{B}$, $S^{-\infty} = \bigcup\limits_{\mu} S^{\mu}$ уже не пригодны, поскольку п. д. о. с такими символами не переводят распределения, сосредоточенные при $t \geqslant 0$, в распределение такого же типа. Естественным дополнительным условием на символы для работы в $H_{+}^{(\pm\infty)}$ является их голоморфность при $\operatorname{Im} \tau < 0$. Нам будет удобно работать в пространствах $(H_{[\gamma]}^{(-\infty)})_{+}$, где γ заранее не фиксируется. Соответственно мы будем рассматривать символы, голоморфные в полуплоскостях типа $\operatorname{Im} \tau \leqslant \gamma_0$, где γ_0 будет зависеть от символа.

Обозначим через $\mathscr{B}^{+}$ класс символов $\mu(\tau, \eta)$, определенных для $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\operatorname{Im} \tau \leqslant \gamma(\mu)$, непрерывных (для простоты) по всем переменным, голоморфных по τ при $\operatorname{Im} \tau < \gamma(\mu)$ и удовлетворяющих аналогу условия (1):

$$|\mu(\tau', \eta') \mu^{-1}(\tau'', \eta'')| < K_{\mu} (1 + |\tau' - \tau''| + |\eta' - \eta''|)^{N_{\mu}} |\mu(\tau'', \eta'')|,$$
$$\eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \operatorname{Im} \tau', \ \operatorname{Im} \tau'' \leqslant \gamma(\mu). \qquad (1_{+})$$

Соответственно через $S^{\mu+}$, $\mu \in \mathscr{B}^{+}$, обозначим класс символов $a(x;\ \tau, \eta)$, определенных при $\operatorname{Im} \tau \leqslant \gamma(a) \leqslant \gamma(\mu)$, непрерывных (для простоты) по всем переменным, бесконечно дифференцируемых по $x \in \mathbb{R}^{n}$, голоморфных по τ при $\operatorname{Im} \tau < \gamma(a)$, удовлетворяющих условиям стабилизации (0.8), (0.8′) и оценкам

$$[a(\cdot;\ \tau, \eta)]_{(q)} \leqslant A_{q}(a) |\mu(\tau, \eta)|,$$
$$\operatorname{Im} \tau \leqslant \gamma(a), \quad (\operatorname{Re} \tau, \eta) \in \mathbb{R}^{n}, \qquad (5_{+})$$

$$|a(\cdot;\ \tau', \eta') - a(\cdot;\ \tau'', \eta'')|_{(q)} \leqslant \varepsilon_{q}(\rho) (1 + |\tau' - \tau''| +$$
$$+ |\eta' - \eta''|)^{M_{a}} |\mu(\tau'', \eta'')|, \ \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \ \operatorname{Im} \tau', \operatorname{Im} \tau'' \leqslant \rho, \qquad (6_{+})$$

причем

$$\varepsilon_{q}(\rho) \to 0, \qquad \rho \to -\infty. \qquad (26)$$

Каждому символу $a(x;\ \tau, \eta)$, удовлетворяющему указанным выше условиям гладкости, стабилизации и оценкам типа (5_{+}) (причем в правой части вместо $\mu(\tau, \eta)$ можно поставить $(1 + |\tau| + |\eta|)^{M}$), сопоставим п. д. о.

$$_{\gamma}a(x;\ D_t, D_y) \varphi = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\operatorname{Im} \tau = \gamma} a(x;\ \tau, \eta) \widehat{\varphi}(\tau, \eta) \times$$
$$\times \exp(it\tau + i\langle y, \eta\rangle)\, d\sigma\, d\eta = \exp(-\gamma t)\, a(x;\ D_t + i\gamma, D_y) \exp(\gamma t) \varphi. \qquad (27)$$

П. д. о. (27) определен для $\varphi \in (H_{[\gamma_0]}^{(\infty)})_{+}$, $\gamma_0 \leqslant \gamma(a)$, не зависит от γ при $\gamma \leqslant \gamma(a)$, и левая часть (27) лежит в $(H_{[\gamma_0[}^{(\infty)})_{+}$; в силу этого индекс γ в левой части (27) можно опустить.

Каждому символу $\mu \in \mathscr{B}^+$ отвечает семейство символов $\mu_\gamma(\xi) = \mu(\sigma + i\gamma, \eta) \in \mathscr{B}$. Ввиду (1_+)

$$|\mu_{\gamma'}(\xi)\mu_{\gamma''}^{-1}(\xi)| \leqslant K_\mu(1 + |\gamma' - \gamma''|)^{N_\mu} = K(\mu, \gamma', \gamma''),$$

так что п. д. о. $\mu_\gamma(D)$ определяют эквивалентные нормировки в одном и том же пространстве H^μ. Согласно принятым нами обозначениям $H^\mu_{[\gamma]} = \exp(-\gamma t) H^\mu$, а в качестве нормы в этом пространстве естественно взять

$$\|\mu(D)\exp(\gamma t)\varphi\|. \tag{28}$$

Если же $\mu \in \mathscr{B}^+$, то замена μ на μ_γ в (28) приведет к эквивалентной норме

$$\|\varphi\|^\mu_{[\gamma]} \stackrel{\text{def}}{=} \|\exp(\gamma t)\,{}_\gamma\mu(D)\varphi\| = \|\mu_\gamma(D)\exp(\gamma t)\varphi\| =$$

$$= \left(\int |\mu(\sigma + i\gamma, \eta)\widehat{\varphi}(\sigma + i\gamma, \eta)|^2 \, d\sigma \, d\eta\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Мы будем работать с подпространствами $H^\mu_{[\gamma]+}$, состоящими из тех элементов $H^\mu_{[\gamma]}$, носители которых принадлежат $\overline{\mathbb{R}^n_+}$; для этих подпространств имеет место следующий аналог предложения 1 из п. II.1.4, доказательство которого является несложной модификацией этого предложения.

Лемма. *Для* $\mu \in \mathscr{B}^+$ *и* $\varphi \in H^{(-\infty)}_{[\gamma]}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\varphi \in H^\mu_{[\gamma]+}$, *т. е.* $\varphi \in H^\mu_{[\gamma]}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$;

(ii) $\varphi = {}_\gamma\mu^{-1}(D)\psi$, $\psi \in H_{[\gamma]+}$, $\|\psi\|_{[\gamma]} = \|\varphi\|^\mu_{[\gamma]}$;

(iii) $\varphi \in H^\mu_{[\rho]}$ $\forall \rho < \gamma$ *и конечна норма*

$$\|\varphi\|^\mu_{[\gamma]+} = \sup_{\rho<\gamma}\|\varphi\|^\mu_{[\rho]}. \tag{30}$$

Приведем теперь аналоги предложений 1, 2, 3 из п. 1.1.

Предложение 1. *Пусть* $\mu \in \mathscr{B}^+$ *и пусть* $a(x; \tau, \eta) \in S^{\mu+}$.[1] *Тогда* $\forall \lambda \in \mathscr{B}^+$ *можно указать такое* $\gamma(a, \mu, \gamma)$, *что при любом* $\gamma \leqslant \gamma(a, \mu, \lambda)$ *непрерывен оператор*

$$a(x; D)\colon H^{\mu\lambda}_{[\gamma]+} \to H^\lambda_{[\gamma]+}. \tag{31}$$

Доказательство основано на оценке

$$\|a(x; D)\varphi\|^\lambda_{[\rho]} \leqslant K\|\varphi\|^{\mu\lambda}_{[\rho]}, \quad \rho < \gamma, \quad \varphi \in H^{(\infty)}_{[\gamma]+}, \tag{32}$$

с константой K, не зависящей от ρ. Действительно, взяв сначала верхнюю грань правой части по $\rho < \gamma$, а затем верхнюю грань левой части, мы придем к неравенству

$$\|a(x; D)\varphi\|^\lambda_{[\gamma]+} \leqslant K\|\varphi\|^{\mu\lambda}_{[\gamma]+}. \tag{33}$$

[1]) **При доказательстве этого предложения условие (6_+) не используется.**

Тогда согласно лемме $a(x; D) \in H^{\lambda}_{[\gamma]+}$, т. е. оператор $a(x; D)$ переводит $H^{[\gamma]}_{\mu+}$ в $H^{\lambda}_{[\gamma]+}$, а согласно (33) он ограничен и, следовательно, непрерывен.

Для доказательства (32) сделаем замену $\psi = \exp(\rho t)\varphi$ и перепишем неравенство в виде

$$\|\lambda_\rho(D) a(x;\ D_t + i\rho,\ D_y)\psi\| \leqslant K \| (\mu_\rho \lambda_\rho)(D)\psi\|. \tag{32'}$$

Символы $a(x;\ \sigma + i\rho,\ \eta)$, $\lambda(\sigma + i\rho,\ \eta)$, $\mu(\sigma + i\rho,\ \eta)$ при каждом ρ связаны условиями предложения 1 из п. 1.1, причем соответствующие константы в неравенствах типа (1) и (5) не зависят от ρ. Поэтому справедлива оценка (32′) с единой константой K для всех $\rho \leqslant \gamma$, и, следовательно, оценки (32) являются непосредственными следствиями предложения 1 из п. 1.1.

Предложение 2. *Пусть* $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{B}^+$ *и* $a_j(x;\ \tau,\ \eta) \in S^{\mu_j}$, $j = 1, 2$. *Тогда* $\forall \lambda \in \mathscr{B}^+$ *справедлива оценка*

$$\| (a_1(x;\ D) \cdot a_2(x;\ D) - (a_1 a_2)(x;\ D))\varphi \|^{\lambda}_{[\rho]} \leqslant \varepsilon_\lambda(\rho) \|\varphi\|^{\mu_1\mu_2\lambda}_{[\rho]}, \tag{34}$$

где $\varepsilon_\lambda(\rho) \to 0$ *при* $\rho \to -\infty$, $\varphi \in H^{\mu_1\mu_2\lambda}_{[\gamma]+}$, $\gamma \geqslant \rho$.

Доказательство. Неравенство (34) с константой, не зависящей от ρ, вытекает из предложения 1 (т. е. из условия (5_+)). Чтобы получить малую константу $\varepsilon_\lambda(\rho)$, надо использовать условие (6_+). После замены $\psi = \exp(\rho t)\varphi$, неравенство (34) перейдет в неравенство

$$\| (a_{1\rho}(x;\ D) \cdot a_{2\rho}(x;\ D) - (a_1 a_2)_\rho(x;\ D))\psi \|^{\lambda_\rho} \leqslant \varepsilon_\lambda(\rho) \|\psi\|^{(\mu_1\mu_2\lambda)_\rho}, \tag{34'}$$

где $a_{j\rho}(x;\ \xi) = a_j(x;\ \sigma + i\rho,\ \eta)$. Согласно предложению 2 из п. 1.1 левая часть (34′) оценивается через $\|\psi\|^{(\mu_1\mu_2\lambda)\rho}$ с константой (см. (15′), (15″))

$$c(\lambda_\rho,\ a_{1\rho},\ a_{2\rho}) = \varkappa(n,\ q_{1\rho},\ q_{2\rho},\ \lambda_\rho) B_{q_1}(a_{1\rho}) A_{q_2}(a_{2\rho}).$$

Прежде всего заметим, что константы K_{λ_ρ}, $K_{\mu_{1\rho}}$, $K_{\mu_{2\rho}}$, N_{λ_ρ}, $N_{\mu_{1\rho}}$, $N_{\mu_{2\rho}}$ из (1) для символов μ_1, μ_2, $\lambda \in \mathscr{B}^+$ ввиду (1_+) не зависят от ρ. Отсюда вытекает, что числа $q_{1\rho}$, $q_{2\rho}$ не зависят от ρ. Константа $\varkappa$, зависящая от q_1, q_2, и K_{λ_ρ} также от ρ не зависит. Согласно условиям (5_+) константы $A_{q_2}(a_{2\rho}) = A_{q_2}(a_2)$ не зависят от ρ, а согласно (6_+) $B_{q_1}(a_{1\rho}) = \varepsilon_{q_1}(\rho) \to 0$, $\rho \to -\infty$, откуда и следует наше утверждение. Аналогичным образом из предложения 3 п. 1.1 выводится

Предложение 3. *Пусть* $\mu \in \mathscr{B}^+$ *и* $a(x;\ \tau,\ \eta) \in S^{\mu+}$. *Тогда* $\forall \lambda \in \mathscr{B}^+$

$$\| (a(x;\ D) - {}^t a(x;\ D))\varphi \|^{\lambda}_{[\rho]} \leqslant \varepsilon_\lambda(\rho) \|\varphi\|^{\mu\lambda}_{[\rho]} \quad \forall \varphi \in H^{(\infty)}_{[\gamma]+} \gamma \geqslant \rho,$$

причем $\varepsilon_\lambda(\rho) \to 0$, $\rho \to -\infty$.

1.4. Псевдодифференциальные и дифференциальные уравнения в $\mathbb{R}^n_+$.

Теорема 1. *Пусть символ* $a(x;\tau,\eta)$ *вида* (0.8), (0.8′) *удовлетворяет следующим условиям*:

(I) $a(x;\ \tau,\ \eta)\in S^{\alpha(\tau,\eta)+}$;

(II) *найдутся такие константы* $\gamma(a)$ *и* $\delta>0$, *что*

$$|a(x';\tau,\eta)a^{-1}(x'';\tau,\eta)|<\delta\quad\forall x',\quad x''\in\mathbb{R}^n,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant\gamma(a).$$

Тогда $\forall\lambda\in\mathscr{B}^+$ *найдется такое* $\gamma(\lambda)\leqslant\gamma(a)$, *что при* $\gamma\leqslant\gamma(\lambda)$ *отображение* (31) *является изоморфизмом.*

Доказательство проводится по схеме теоремы 1 из п. 1.2. Проверяется, что символ $a(x;\ \tau,\ \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы тогда и только тогда, когда этим свойством обладает символ $b(x;\ \tau,\ \eta)=a^{-1}(x;\ \tau,\ \eta)$. Как и выше, решение уравнения

$$a(x;D_t,D_y)u=f\in H^\lambda_{[\gamma]+}\tag{35}$$

ищется в виде

$$u=b(x;D_t,D_y)g,\quad g\in H^\lambda_{[\gamma]+}.$$

Согласно предложению 1 $u\in H^{a\lambda}_{[\gamma]+}$, а согласно предложению 2 норму оператора

$$H_1=1-a(x;D)\cdot b(x;D)\colon\ H^\lambda_{[\gamma]+}\to H^\lambda_{[\gamma]+}\tag{36}$$

можно сделать меньше 1 путем выбора достаточно большого — γ. Отсюда вытекает существование обратного оператора $(1-H_1)^{-1}$ при $\gamma\leqslant\gamma(\lambda)$. Действуя на (35) оператором $b(x;\ D)$ слева и выбирая $\gamma(\lambda)$ таким образом, чтобы при $\gamma\leqslant\gamma(\lambda)$ норма оператора

$$H_2=1-b(x;D)\cdot a(x;D)\colon\ H^{a\lambda}_{[\gamma]+}\to H^{a\lambda}_{[\gamma]+}\tag{37}$$

была меньше 1, мы докажем единственность для уравнения (35).

Используя предложение 3, можно доказать разрешимость уравнения

$${}^t a(x;D_t,D_y)v=h\in H^\lambda_{[\gamma]+}.\tag{38}$$

В случае полиномиальных символов $P(x;\ \tau,\ \eta)$ с помощью леммы 2 из п. 1.2 (ср. теорема 2 из п. 1.2) доказывается

Теорема 2. *Пусть символ* $P(x;\ \tau,\ \eta)$, *полиномиальный по* τ, η, *экспоненциально коректен при каждом* $x\in\mathbb{R}^n$ *и выполнено условие постоянства силы* (см. условия (A), (B) из Введения). *Пусть коэффициенты* $a_\alpha(x)$ *символа удовлетворяют условиям стабилизации* (*условие* (C) *леммы* 1 *из п.* 1.2). *Тогда символ* $a(x;\ \tau,\ \eta)=P(x;\ \tau,\ \eta)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а отображение* (31) *при* $\gamma\leqslant\gamma(\lambda)$ *является изоморфизмом.*

1.5. Псевдодифференциальные уравнения в конечной полосе. Согласно нашим обозначениям через $H^\mu_{[\gamma]}[c,\infty)$ обозначим подпространство $H^\mu_{[\gamma]}$, состоящее из распределений, сосредоточенных в полупространстве $t \geqslant c$. Для случая этих пространств лемму 1.3 надо модифицировать следующим образом: в условиях (i), (ii) заменить $[0, \infty)$ на $[c, \infty)$, а норму (30) заменить на норму $\sup\limits_{\rho<\gamma} e^{-\rho c} \| u \|_\rho^{[\mu]}$. Все утверждения п. 1.3 и предыдущего пункта тривиально переносятся на пространства $H^{\mu}_{[\gamma]}[c, \infty)$, и мы не будем приводить соответствующие формулировки.

При $c_1 < c_2$ определим фактор-пространство

$$H^{\mu}[c_1, c_2) = H^{\mu}_{[\gamma]}[c_1, \infty)/H^{\mu}_{[\lambda]}[c_2, \infty). \tag{39}$$

Как и в лемме II.2.3, проверяется, что правое пространство на самом деле не зависит от γ, так что определение (39) корректно.

Замечание. Правая часть (39) индуцирует на $H^{\mu}[c_1, c_2)$ банахову норму. Таким образом, на фактор-пространстве (39) имеется однопараметрическое семейство эквивалентных норм, зависящих от параметра γ. Именно это обстоятельство позволяет как мы сейчас увидим, реализовать в пространствах (39) развитый выше метод параметрикса.

Теорема 1. *Пусть символ $a(x;\ \tau,\ \eta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из п. 1.4. Тогда для любых конечных $c_1 < c_2$ и любого $\lambda \in \mathscr{B}^+$ отображение*

$$a(x;\ D):\ H^{\lambda a}[c_1,\ c_2) \to H^{\lambda}[c_1,\ c_2) \tag{40}$$

является изоморфизмом. Аналогичным свойством обладает оператор ${}^t a(x;\ D)$.

Доказательство. Как мы уже отмечали выше, в условиях теоремы для достаточно большого γ непрерывен оператор

$$a(x; D):\ H^{\lambda a}_{[\gamma]}[c_j, \infty) \to H^{\lambda}_{[\gamma]}[c_j, \infty),\ \ j = 1, 2. \tag{41}$$

Но тогда этот оператор естественным образом продолжается до непрерывного оператора (40). Аналогично, если $b(x;\ \tau,\ \eta) = a^{-1}(x;\ \tau,\ \eta)$, то будет непрерывным оператор

$$b(x;\ D):\ H^{\lambda}[c_1,\ c_2) \to H^{a\lambda}[c_1,\ c_2).$$

Теперь мы рассмотрим непрерывные операторы

$$H_1 = 1 - a(x;\ D) \cdot b(x;\ D):\ H^{\lambda}[c_1,\ c_2) \to H^{\lambda}[c_1,\ c_2),$$
$$H_2 = 1 - b(x;\ D) \cdot a(x;\ D):\ H^{\lambda a}[c_1,\ c_2) \to H^{\lambda a}[c_1,\ c_2).$$

Если снабдить пространства (39) нормами

$$\| \varphi \|^{\mu}_{[\gamma][c_1, c_2)} = \inf_{\varphi_1 \in H^{\mu}_{[\gamma]}[c_2, \infty)} \| \varphi_0 + \varphi_1 \|^{\mu}_{[\gamma]}$$

(φ_0 — произвольный представитель класса смежности φ), то из предложения 2 из п. 1.4 (точнее, из его аналога для пространств $H^{\lambda}_{[\gamma]}[c, \infty)$) легко следует, что при подходящем выборе γ будут иметь место оценки

$$\| H_1 g \|^{\lambda}_{[\gamma][c_1, c_2)} \leqslant \theta \| g \|^{\lambda}_{[\gamma][c_1, c_2)},\quad \| H_2 g \|^{\lambda a}_{[\gamma][c_1, c_2)} \leqslant \theta \| g \|^{\lambda a}_{[\gamma][c_1, c_2)}$$

с константой $\theta < 1$. Отсюда по схеме теоремы 1 из п. 1.2 выводится, что отображение (40) является изоморфизмом пространств.

Важное отличие теоремы 1 от теоремы 1 из предыдущего пункта состоит в том, что в ней нет дополнительного условия на экспоненциальный вес. Поэтому непрерывные операторы

$$a(x;\ D)\colon H^{\lambda a}[c_1,\ c_2] \to H^{\lambda}[c_1,\ c_2], \tag{42}$$

$$a^{-1}(x;\ D)\colon H^{\lambda}[c_1,\ c_2] \to H^{\lambda a}[c_1,\ c_2] \tag{42'}$$

порождают изоморфизмы проективных или индуктивных шкал (см. Дополнение к гл. I) $\{H^{a\lambda}[c_1,\ c_2]\}$ и $\{H^{\lambda}[c_1,\ c_2]\}$, где вес $\lambda(\tau,\ \eta)$ пробегает некоторое подмножество $'\mathscr{B}^+ \subset \mathscr{B}^+$, и тем самым индуцируют изоморфизмы проективных (индуктивных) пределов этих шкал.

Возьмем в качестве подмножества $'\mathscr{B}^+$ совокупность символов $\lambda_s(\tau,\ \eta) = (\tau - i\sqrt{1 + |\eta|^2})^s$, $s \in \mathbb{R}$. Ясно, что проективным (индуктивным) пределом пространств $H^{\lambda_s}[c_1, c_2]$ будет $H^{(\pm\infty)}[c_1,\ c_2]$. Далее, если символ $a(x;\ \tau,\ \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 из п. 1.4, то $a(\tau,\ \eta) = a(x^0;\ \tau,\ \eta) \in \mathscr{B}^+$, и этот символ оценивается сверху (снизу) через $\lambda_{\pm N}(\tau,\ \eta)$. Но тогда проективный (индуктивный) предел шкалы $\{H^{a\lambda}[c_1,\ c_2]\}$ совпадает с $H^{(\pm\infty)}[c_1,\ c_2]$. Таким образом, в условиях теоремы 1 имеет место изоморфизм

$$a(x;\ D)\colon H^{(\pm\infty)}[c_1,\ c_2] \to H^{(\pm\infty)}[c_1,\ c_2].$$

В связи с неоднородной задачей Коши (которая будет рассмотрена ниже) определим веса

$$\lambda_{r,s} = \delta_r^+(\tau)(1 + |\eta|^2)^{s/2} \in \mathscr{B}^+$$

и отвечающие им пространства $H^{(r,s)} \overset{\text{def}}{=} H^{\lambda(r,s)}$. Рассмотрим проективный предел (по s) этих пространств $H^{(r,\infty)} = \bigcap\limits_s H^{(r,s)}$. Для экспоненциально корректных дифференциальных операторов постоянной силы мы установим изоморфизм в пространствах $H^{(r,s)}[c_1,\ c_2]$. Для этого нам понадобится

Лемма. *Пусть символ $P(x;\ \tau,\ \eta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 из п. 1.4. Тогда найдется натуральное m и такие N, $c > 0$, γ_1, что*

$$c^{-1}|\tau|^m(1 + |\eta|)^{-N} < |P(x;\ \tau,\ \eta)| < c|\tau|^m(1 + |\eta|)^N, \qquad \gamma \leqslant \gamma_1. \tag{43}$$

Доказательство. Ввиду условия постоянства силы неравенство (43) достаточно доказать для одного фиксированного $x = x^0$, т. е. для экспоненциально корректного полинома $P(\tau,\ \eta) = P(x^0;\ \tau,\ \eta)$. Экспоненциально корректный полином разрешен относительно старшей степени τ (следствие II.4.1), т. е. $P(\tau,\ 0) = a\tau^m + O(|\tau|^{m-1})$. Согласно лемме 3 из п. 1.2 $P(\tau,\ \eta) \in \mathscr{B}^+$. Применяя к $\mu(\tau,\ \eta) = P(\tau,\ \eta)$ неравенство (1_+), где $\tau' = \tau'' = \tau$, $\eta' = \eta$, $\eta'' = 0$, получим неравенство (43).

Замечание. Как видно из доказательства леммы, экспоненциально корректный символ постоянной силы $P(x;\ \tau,\ \eta)$ представляется в виде

$$P(x;\ \tau,\ \eta)=a(x)\tau^m+O(|\tau|^{m-1}).$$

Число m называется *степенью P по τ*: $m=\deg_\tau P$. Число $\deg_\tau P$ совпадает с числом m из неравенства (43).

Теорема 2. *Пусть полиномиальный символ $P(x;\ \tau,\ \eta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 из п. 1.4 и $m=\deg_\tau P$. Тогда $\forall r\in\mathbb{R}$ и $\forall c_1<c_2$ имеет место изоморфизм пространств*

$$P(x;\ D):\ H^{(r+m,\infty)}[c_1,\ c_2)\to H^{(r,\infty)}[c_1,\ c_2). \qquad (44)$$

Доказательство. Заменяя в (42), (42′) $a(x;\ D)$ на $P(x;\ D)$, $a(\bar D)$ на $P(x^0;\ D)$ и λ на $\lambda_{(r,s)}$, мы получим изоморфизм

$$P(x; D):\ H^{P\lambda(r,s)}[c_1, c_2)\to H^{(r,s)}[c_1, c_2), \qquad (45)$$

где $P(x^0;\ D)=P$. Из неравенства (43) вытекают вложения

$$H^{(r+m,s-N)}[c_1, c_2)\supset H^{P\lambda(r,s)}[c_1, c_2)\supset H^{(r+m,s+N)}[c_1, c_2).$$

Переходя к проективному пределу по s, найдем

$$H^{(r+m,\infty)}[c_1, c_2)\subset \bigcap_s H^{P\lambda(r,s)}[c_1, c_2)\subset H^{(r+m,\infty)}[c_1, c_2).$$

Поскольку изоморфизмы (45) продолжаются до изоморфизма проективных пределов (по s), то ввиду указанных вложений мы докажем изоморфизм (44).

1.6. П. д. о с условием трансмиссии. В главе IV при изучении задачи Коши с неоднородными начальными условиями из $\Phi=\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ мы ввели пространства $\Phi^{\{-\infty\}}_{[+]}$; свертыватели на этих пространствах имели символы, разлагающиеся в ряд Лорана по степеням τ с коэффициентами из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Конец настоящего параграфа посвящен неоднородной задаче Коши для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами с начальными условиями из $H^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n-1})$. Для этого определим пространство

$$H^{\{-\infty\}}_{[+]}=\bigcup_r H^{\{r\}}_{[+]},\ H^{\{r\}}_{[+]}=\bigcap_{q,s} H^{(r\,|\,q,s)}_{+}. \qquad (46)$$

Очевидно, что $\varphi\in H^{\{-\infty\}}_{[+]}$ *тогда и только тогда, когда найдется такое r, что при $q>r$*

$$\varphi=\sum_{j=1}^{q-r}\varphi_j(y)(D_t-i)^{-r-j}+\varphi_q, \qquad (47)$$

где $\varphi_j(y)\in H^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n-1})$ *и* $\varphi_q\in H^{(q,\infty)}_{+}$.

Теперь мы опишем те символы из введенных выше классов $S^{\mu+}$, $\mu\in\mathcal{B}^+$, для которых соответствующие операторы переводят в себя пространство (46).

Определение. Будем говорить, что символ $a(x;\ \tau,\ \eta)\in\in\bigcup S^{\mu+}$ удовлетворяет *условию трансмиссии*, если найдется такое целое r, что для любого целого $q>r$ он представляется в виде

$$a(x;\tau,\eta)=\sum_{j=0}^{q-r-1}a_j(x;\eta)(\tau-i)^{-r-j}+a_q(x;\tau,\eta), \tag{48}$$

где

$$[a_j(\cdot;\eta)]_{(p)}\leqslant c_{pj}(1+|\eta|)^{h_j}, \tag{48'}$$

$$[a_q(\cdot;\tau,\eta)]_{(p)}\leqslant c_{pq}(1+|\eta|)^{h_q}(1+|\tau|)^{-q},\ \operatorname{Im}\tau\leqslant\gamma(a). \tag{48''}$$

Совокупность символов с условием трансмиссии, разложение (48) которых начинается с члена $O(|\tau|^{-r})$, обозначим через $S^{\{-r\}+}$ и $S^{\{\infty\}+}=\bigcup S^{\{r\}+}$.

Каждому символу $a\in S^{\{\infty\}+}$, разумеется, соответствует п. д. о. $a(x;\ D)$, действующий в пространствах $\left(H_{[\gamma]}^{(-\infty)}\right)_+$, где $\gamma\leqslant\gamma(a)$. Мы сейчас покажем, что этот оператор сохраняет подпространства $\exp(\gamma t)H_{[+]}^{\{-\infty\}}$, $\gamma\leqslant\gamma(a)$[1]. Чтобы не загромождать обозначения, будем считать, что $\gamma(a)\geqslant 0$, а тогда можно брать $\gamma=0$. Этим случаем мы и ограничимся; переход к $\gamma<0$ очевиден.

Предложение. *Символу* $a(x;\ \tau,\ \eta)\in S^{\{-r\}+}(\gamma(a)=0)$ $\forall p\in\mathbb{Z}$ *отвечает непрерывный оператор*

$$a(x;D)\colon\ H_{[+]}^{\{p\}}\to H_{[+]}^{\{p+r\}}. \tag{49}$$

Доказательство. 1) Возьмем произвольное распределение $\varphi\in H_{[+]}^{\{p\}}$ и покажем, что

$$a(x;D)\,\varphi)\in H_{+}^{(p+r,\infty)}, \tag{50}$$

$$p_{\oplus}(a(x;D)\,\varphi)\in H_{\oplus}^{(N)}\quad\forall N. \tag{51}$$

2) Для доказательства (50) заметим, что согласно (48″) (для $r=q$)

$$[a(\cdot;\ \tau,\ \eta)]_{(p)}\leqslant A_p(1+|\eta|^2)^{h/2}|(\tau-i)^{-r}|=A_p|\lambda_{(-r,h)}(\tau,\ \eta)|,$$

т. е. $a\in\overset{\lambda}{S}{}^{(-r,h)+}$, Воспользовавшись предложением 1 из п. 1.3, получим, что для любого $s\in\mathbb{R}$ оператор $a(x;\ D)$ переводит $H_+^{(p,s)}$ в $H_+^{(p+r,s-h)}$, откуда и следует (50).

3) При доказательстве (51) можно считать, что распределение φ имеет вид

$$\varphi(x)=\psi(y)(D_t-i)^k\delta(t),\quad \psi(y)\in H^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n-1}),\ k\leqslant-p-1. \tag{52}$$

Действительно, напишем для φ разложение (47). Если $\varphi_q\in$

---

[1] Через $H_{[+]}^{\{p\}}$, $H_{[+]}^{\{-\infty\}}=\bigcup\limits_p H_{[+]}^{\{p\}}$ мы обозначаем пространства, определяемые с помощью (IV.0.4), (IV.0.4′), (IV.0.4″), где $\mathcal{S}$ надо заменить на $H^{(\infty)}$.

$\in H_+^{(q,\infty)}$, то $a(x; D)\,\varphi_q \in H_+^{(q+r,\infty)} \subset H_+^{(N,\infty)}$, коль скоро $q \geqslant N-r$. Тогда $p_\oplus(a(x; D)\,\varphi_q) \in H_\oplus^{(N)}$.

4) Аналогично можно считать, что наш п. д. о. имеет вид

$$a(x;\ D) = b(x;\ D_y)\,(D_t - i)^l,\ l \leqslant -r, \tag{53}$$

где символ $b(x;\ \eta)$ удовлетворяет оценкам типа $(48')$. Действительно, разложению (48) соответствует разложение оператора:

$$a(x; D) = \sum_{j=0}^{q-r-1} a_j(x; D)\,(D_t - i)^{-r-j} + a_q(x; D).$$

По доказанному

$$a_q(x; D)\,\varphi \in H_+^{(p+q,\infty)} \subset H_+^{(N,\infty)},\ p+q > N.$$

5) Применяя оператор (53) к распределению (52), получим

$$a(x;\ D)\varphi = \chi(x)\,(D_t - i)^{k+l}\delta(t), \qquad \chi(x) = a(x;\ D_y)\,\psi(y). \tag{54}$$

Несложно проверить (дифференцируя под знаком п. д. о.), что $\chi(x) \in C_{(0)}^{(\infty)}$, если $\psi(y) \in H^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n-1})$. Как уже отмечалось в гл. IV, $p_\oplus((D_t - i)^{k+1}\delta(t)) \in \mathscr{S}_\oplus$, поэтому для выражения (54) имеет место включение (51).

1.7. Неоднородная задача Коши в пространствах $H^{(\infty)}$.

Теорема 1. *Пусть символ* $a(x;\ \tau,\eta) \in S^{(-r)+}$ *удовлетворяет условиям теоремы 1 из п. 1.4. Пусть дополнительно символ* $a_0(x;\ \eta)$ *из* (48) *не зависит от* x, *т. е.* $a_0(x;\ \eta) \equiv a_0(\eta)$ *и допускает оценку снизу*

$$|a_0(\eta)| > \mathrm{const}\cdot(1 + |\eta|)^\nu. \tag{55}$$

Тогда $\forall b > 0$ *имеет место изоморфизм*

$$a(x;\ D):\ H^{(p)}[0,\ b) \to H^{(p+r)}[0,\ b). \tag{56}$$

Замечание. Дополнительное условие на символ $a_0(x;\ \eta)$ можно заменить условиями $a_0(x;\ \eta) \equiv a_0(x)$, и функция $a_0(x) \in C_{(0)}^{(\infty)}$ допускает оценку

$$|a_0(x)| > \delta > 0. \tag{55$'$}$$

Действительно, в силу $(55')$ $a_0(x)$ будет обратимым элементом $C_{(0)}^{(\infty)}$, а оператор умножения на $a_0(x)$ порождает изоморфизм пространств $H^{(p)}[0, b)$ $\forall p \in \mathbb{Z}$. Но тогда символ $a(x;\ \tau,\ \eta)$ можно заменить на символ $a_0^{-1}(x)\,a(x; \tau, \eta)$, который будет удовлетворять всем условиям теоремы (в этом случае $a_0(x;\ \eta) \equiv 1$).

Доказательство теоремы 1. Непрерывность оператора (56) легко выводится из непрерывности оператора (49). При доказательстве инъективности и сюръективности (56) мы используем оператор в более широком пространстве:

$$a(x;\ D):\ H^{(p,\infty)}[0,\ b) \to H^{(p+r,\infty)}[0,\ b). \tag{57}$$

В случае полиномиальных символов в п. 1.5 (см. теорему 2) было доказано, что (57) — изоморфизм. Рассуждения теоремы 2 из п. 1.5 проходят и для $a \in S^{\{-r\}+}$. Из инъективности (57) тривиально следует инъективность (56).

Далее, если $f \in H^{\{p+r\}}[0, b) \subset H^{(p+r,\infty)}[0, b)$, то из изоморфизма (56) следует существование такого распределения $u \in H^{(p,\infty)}[0, b)$, что

$$a(x; D)u = f. \tag{58}$$

Покажем, что из (58) следует бесконечная гладкость u при $t > 0$, т. е. включение $u \in H^{\{p\}}[0, b)$.

Иными словами, мы для рассматриваемых нами п. д. о. докажем некоторый вариант теоремы о частичной гипоэллиптичности по переменной t вплоть до границы (ср. Хёрмандер [1], теорема 4.3.1).

Предложение. Пусть $a(x; \tau, \eta) = a_0(\eta)(\tau - i)^{-r} + a_1(x; \eta)(\tau - i)^{-r-1} + \ldots \in S^{\{-r\}+}$, *и пусть для символа* $a_0(\eta)$ *выполнено условие* (55). *Пусть* $u \in H^{(p,\infty)}[0, b)$ *является решением уравнения* (58) *с правой частью* $f \in H^{\{p+r\}}_{[+]}$. *Тогда* $u \in H^{\{p\}}_{[+]}$.

Доказательство является стандартным (ср. цитированный выше результат Хёрмандера). Полагая $a(x; D) = a_0(D_y) \times (D_t - i)^{-r} + a_1(x; D)$, $a_1 \in S^{\{-r-1\}+}$, перепишем уравнение (58) в виде

$$a_0(D_y)(D_t - i)^{-r}u = f - a_1(x; D)u.$$

Действуя на обе части обратным оператором к стоящему в левой части [1]), мы получим для u операторное уравнение

$$u = Lu + g, \tag{59}$$

где согласно предложению 1.6

$$g = a_0^{-1}(D_y)(D_t - i)^r f \in H^{\{p\}}[0, b), \tag{60}$$

а оператор L имеет вид

$$L = -a_0^{-1}(D_y)(D_t - i)^r a_1(x; D).$$

Модифицируя рассуждения предложения 1.6, несложно доказать непрерывность оператора

$$L\colon H_+^{(k\mid q,\infty)}[0, b) \to H_+^{(k+1\mid q+1,\infty)}[0, b) \ \ \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{61}$$

По условию $u \in H^{(r,\infty)}$, а поэтому можно указать такое $q_0 \geqslant r$, что $u \in H^{(r\mid q_0,\infty)}[0, b)$. Но тогда согласно (61) $Lu \in H^{(r+1\mid q_0+1,\infty)}[0, b]$. С учетом (60) правая часть уравнения (59) лежит в $H^{(\cdot\mid q_0+1,\infty)}[0, b)$. Итак, всякое решение $u \in H^{(r\mid q_0,\infty)}[0, b)$ уравне-

[1]) Отметим, что именно в этом месте используется дополнительное предположение о том, что символ $a_0(x; \eta)$ не зависит от x и выполнено (55).

ния (59) автоматически попадает в $H^{(r|q_0+1,\infty)}[0, b)$. Итерируя это рассуждение, мы установим включение $u \in H^{(r|\infty,\infty)}[0, b) \stackrel{\text{def}}{=} H^{\{r\}}[0, b)$.

Следствие. *Пусть $P(x;\ \tau,\ \eta)$ — экспоненциально корректный символ постоянной силы, а его коэффициенты удовлетворяют условию* (C) *леммы* 1 п. 1.2. *Тогда $\forall p \in \mathbb{Z}$ отображение*

$$P(x;\ D)\colon H^{\{p\}}[0,\ b) \to H^{\{p-m\}}[0,\ b) \tag{62}$$

является изоморфизмом пространств.

Доказательство. Как уже отмечалось выше (см. замечание 1.5), символ $P(x;\ \tau,\ \eta)$ разрешен относительно старшей степени τ:

$$P(x;\ \tau, \eta) = a_0(x)\,\tau^m + \sum_{j>1} P_j(x;\ \eta)\,\tau^{m-j},\quad a_0(x) \neq 0.$$

Более того, если в условии постоянства силы (см. условие (B) из введения) положить $x' = x^0$, $x'' = x$, $\eta = 0$ и устремить $\operatorname{Im}\tau \to -\infty$, то получим, что

$$|a_0(x)| > \delta > 0.$$

Таким образом, выполнены условия замечания к теореме 1, откуда следует наше утверждение.

Теорема 2. *Пусть $P(x;\ \tau,\ \eta)$ — экспоненциально корректный символ постоянной силы, а его коэффициенты удовлетворяют условию* (C) *леммы* 1 *из п.* 1.2. *Пусть $m = \deg_\tau P$. Тогда задача*

$$P(x;\, D)\,u(x) = f(x),\ x = (t, y),\ 0 \leqslant t \leqslant b, \tag{63}$$

$$\left(D_t^{j-1}u\right)(0, y) = \varphi_j(y),\ j = 1, \ldots, m, \tag{64}$$

для любых $f \in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n_{(0,b)}\right)$ [1]*, $\varphi_j(y) \in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^{(n-1)}\right)$ имеет единственное решение $u \in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n_{(0,b)}\right)$.*

Доказательство. Изоморфизм (62) для случая $p = 0$ означает, что $\forall f_+ \in H^{\{0\}}_{[+]}$ для любых $f_j(y) \in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $j = 1, \ldots, m$, существует единственное решение $u_+ \in H^{\{0\}}_{[+]}$ уравнения

$$P(x;\, D)\,u_+ = f_+ + \sum_{j=1}^{m} f_j(y)\,D_t^{j-1}\delta(t) \quad \left(\operatorname{mod} H^{(\infty)}[b, \infty)\right). \tag{65}$$

Согласно определению $H^{\{0\}}_{[+]}$ можно подобрать такие $u, f \in H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n\right)$, что $u_+ = \theta_+(t)\,u$, $f_+ = \theta_+(t)\,f$. При $0 \leqslant t \leqslant b$ из (65) вытекает уравнение (63). Теперь покажем, что функции $f_j(y)$ можно подобрать таким образом, чтобы выполнялись соотношения (64). Для этого заметим, что согласно лемме из введения к гл. IV функции $f_j(y)$ связаны с данными Коши $(D^k u)(0,\ y)$

---

[1]) Как и в § II.3, мы обозначаем через $\Phi\left(\mathbb{R}^n_{(0,b)}\right)$ пространство сужений функций из $\Phi\left(\mathbb{R}^n\right)$ на полосу $0 \leqslant t \leqslant b$.

соотношениями

$$\sum_{k=0}^{m-j} P_k(0, y; D_y)\left(D_t^{m-j-k}u\right)(0, y) = if_j(y),\ ij = 1, \ldots, m.$$

Возьмем теперь в качестве $f_j(y)$ функции

$$f_j(y) = -i\sum_{k=0}^{m-j} P_k(0,\ y;\ D_y)\,\varphi_{m-j-k+1}.$$

Тогда получим (ср. равенства (12) из введения к гл. IV)

$$a_0(x)(\varphi_1(y) - u(0, y)) = 0,$$

$$a_0(x)(\varphi_2(y) - (D_tu)(0, y)) = -iP_1(0, y; D_y)(\varphi_1 - u(0, y)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0(x)\left(\varphi_m(y) - \left(D_t^{m-1}u\right)(0, y)\right) = -iP_1(0, y; D_y)\left(\varphi_{m-1} - \right.$$
$$\left. - \left(D_t^{m-2}u\right)(0, y)\right) - \ldots - iP_{m-1}(0, y; D_y)(\varphi_1 - u(0, y)),$$

где

$$P(x; D) = \sum_{k=0}^{m} P_k(x; D_y)\,D_t^{m-k},\ \ P_0(x; D_y) \equiv a_0(x).$$

Пользуясь тем, что $a_0 \neq 0$, мы последовательно придем к равенствам (64).

Замечание. Задаче (63), (64) можно сопоставить непрерывный оператор

$$H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n_{(0,b)}\right) \to H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^n_{(0,b)}\right) \times H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right) \times \ldots \times H^{(\infty)}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$$
$$\left(u \mapsto P(x; D)\,u, u(0, y), \ldots, \left(D^{m-1}u\right)(0, y)\right).$$

Согласно доказанной теореме этот оператор имеет непрерывный обратный. Из условия непрерывности обратного оператора можно вывести, что для любого достаточно большого s найдутся такие s_0, s_1, s_m, что при $f \in H^{(s_0)}\left(\mathbb{R}^n_{(0,b)}\right)$, $\varphi_j \in H^{(s_j)}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ существует решение $u \in H^{(s)}\left(\mathbb{R}^n_{(0,b)}\right)$.

§ 2. Однородная задача Коши для п. д. о. в шкалах пространств, связанных с $\mathcal{S}$

Основной целью этого параграфа является доказательство разрешимости задачи Коши для экспоненциально корректных дифференциальных операторов постоянной силы в пространствах функций и распределений степенного убывания и роста. Как мы уже говорили во введении к главе, при построении исчисления п. д. о. в $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ естественно работать с пространством $S_{-\infty}^{-\infty}$ символов $a(x;\ \zeta)$, бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^{2n}$ и допускающих степенные оценки типа (0.9). Параграф начинается с «исчисления символов». На пространстве $S_{-\infty}^{-\infty}$ наряду с операциями сложения и умножения определяется операция композиции $(a, b) \to a \circ b$ и инволюция $a \mapsto a^{\#}$. Далее, символам из $S_{-\infty}^{-\infty}$ сопоставляются п. д. о., которые переводят в себя $\mathscr{S}$ (а — по сопряженности — $\mathscr{S}'$). При этом (в отличие от исчисления § 1) композиция п. д. о. с символами a и b вновь является п. д. о. с символом $a \circ b$.

Если в § 1 мы имели дело со шкалами H^{μ}, отвечающими $\mu \in \in \mathscr{B}$, то в настоящем параграфе мы строим шкалы $H_m^{\mu} = m^{-1}(x) H^{\mu}$, отвечающие более узкому классу весовых функций $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$; в частном случае $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$, $m(x) = (1 + |x|^2)^{l/2}$ эти пространства переходят в $H_{(l)}^{(s)}$. При изучении пространств H_m^{μ} мы опираемся на развитое перед этим исчислением п. д. о. в $\mathscr{S}'$ и на теорему Кальдерона — Вайянкура об ограниченности в L_2 п. д. о. с символами, допускающими оценки (0.9) для $p = q = 0$. Дальнейшее изложение параллельно § 1. Налагая на символы условия малости констант в неравенствах типа (0.9), мы находим достаточные условия разрешимости п. д. о. уравнений в пространствах H_m^{μ} (ср. п. 1.2).

Во второй части параграфа от пространств H_m^{μ} мы переходим к пространствам $(H_m^{\mu})_{[\gamma]+}$ дополнительно предполагая голоморфность всех рассматриваемых символов по переменной, двойственной t

Параграф заканчивается обсуждением задачи Коши (с нулевыми и ненулевыми начальными данными) на конечном интервале времени. В частности, доказывается корректность в $\mathscr{S}$ неоднородной задачи Коши для экспоненциально корректных дифференциальных операторов постоянной силы.

Отметим, что при построении исчисления этого параграфа мы использовали некоторые соображения Билса и Феффермана [1], Кумано-го [1] и В. С. Рабиновича [1].

2.1. Алгебра символов. Обозначим через $\mathscr{B}_0$ подкласс класса $\mathscr{B}$, состоящий из функций $\mu(\xi)$, бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условиям

$$|\mu^{(\alpha)}(\xi)\mu^{-1}(\xi)| < K_{\alpha}(\mu) \quad \forall \alpha > 0, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$|\mu(\xi')\mu^{-1}(\xi'')| < K_{\mu}(1 + |\xi' - \xi''|)^{N_{\mu}} \quad \forall \xi', \xi' \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Замечание 1. (а) $\mathscr{B}_0$ является группой относительно умножения.

(b) Если $\mu(\xi)$ — полином или $\mu^{-1}(\xi)$ — полином, то условие (2) является следствием условия (1).

(с) Если вместо (1) выполнено более сильное условие

$$|\mu^{(\alpha)}(\xi)\mu^{-1}(\xi)| < K_{\alpha}(\mu)(1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha|}, \ \rho > 0, \tag{1'}$$

то условие (2) можно заменить более слабым условием

$$K_{\mu}^{-1}(1 + |\xi|)^{-N_{\mu}} < |\mu(\xi)| < K_{\mu}(1 + |\xi|)^{N_{\mu}}, \tag{2'}$$

при этом сохранится включение $\mu \in \mathscr{B}_0$, т. е. (2) будет выполнено автоматически.

(d) Поскольку оценка (2′) вытекает из (2), то следствием (1), (2) является

$$|\mu^{(\alpha)}(\xi)| < K'_\alpha (1 + |\xi|)^{N_\mu}, \qquad (1'')$$

т. е. $\mu(\xi) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_\xi) \in \mathscr{M}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что п. д. о. $\mu(D)$ и операторы умножения на $m(x)$ $(m \in \mathscr{B}_0)$ переводят в себя пространства $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$.

Определение. Пусть $\mu(\xi)$, $m(x) \in \mathscr{B}_0$. Тогда через S^μ_m обозначим класс символов $a(x;\ \xi)$, бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^{2n}$ и удовлетворяющих оценкам

$$|a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x; \xi)| < A_{\alpha\beta}(a)\,|\mu(\xi)\,m(x)| \quad \forall\,(x; \xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \qquad (3)$$

Очевидно, что S^μ_m является линейным пространством, замкнутым относительно дифференцирования.

Снабдим S^μ_m набором норм

$$\{a\}^{(p)\mu}_{(q)m} = \sup_{|\alpha| \leqslant p,\, |\beta| \leqslant q} |\mu^{-1}(\xi)\,m^{-1}(x)\,a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x; \xi)| \qquad (4)$$

и обозначим через $S^{-\infty}_{-\infty}$ объединение классов S^μ_m, $\mu, m \in \mathscr{B}_0$; в $S^{-\infty}_{-\infty}$ можно ввести топологию индуктивного предела.

Справедлива

Лемма 1. (i) *Если* $a_j(x; \xi) \in S^{\mu_j}_{m_j}$, $\mu_j, m_j \in \mathscr{B}_0$, $j = 1, 2$, *то* $(a_1 a_2)(x; \xi) \in S^{\mu_1\mu_2}_{m_1 m_2}$.

(ii) *Если* $a(x; \xi) \in S^\mu_m$ *допускает оценку снизу*

$$|a(x;\ \xi)| > \mathrm{const} \cdot |\mu(\xi)\,m(x)|,$$

то $a^{-1}(x; \xi) \in S^{1/\mu}_{1/m}$.

Как легко видеть, пространства $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ содержатся в S^μ_m для любых μ, $m \in \mathscr{B}_0$, но произвольный символ из S^μ_m по нормам (4) нельзя аппроксимировать элементами $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ или $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ (ср. случай пространств $C^{(m)}_{(l)}$ в п. I.1.3). Мы будем пользоваться более слабой аппроксимацией. Нам понадобится

Лемма 2. *Для любого символа* $a(x; \xi) \in S^\mu_m$ $(\mu, m \in \mathscr{B}_0)$ *можно указать семейство символов* $a_\varepsilon(x; \xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *обладающее следующими свойствами:*

(i) *для любых натуральных p и q нормы* $\{a_\varepsilon\}^{(p)\mu}_{(q)m}$ *ограничены константой, не зависящей от* ε;

(ii) *имеет место равномерная сходимость* $a_\varepsilon(x;\ \xi) \to a(x;\ \xi)$ *на любом компакте в* $\mathbb{R}^{2n}$.

Утверждения (i), (ii) *остаются в силе для любых производных* $a^{(\alpha)}_{\varepsilon(\beta)}$ (*с естественной заменой a на* $a^{(\alpha)}_{(\beta)}$ *в* (ii)).

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\chi \in D$, $\chi(0) = 1$, и положим

$$a_\varepsilon(x;\ \xi) = \chi(\varepsilon x)\chi(\varepsilon\xi)a(x;\ \xi). \tag{5}$$

Очевидно, что функция (5) удовлетворяет всем условиям леммы.

Пусть $\mu(\xi)$, $\mu'(\xi)$, $m(x)$, $m'(x) \in \mathscr{B}_0$ и $\mu'(\xi)\mu^{-1}(\xi) \to 0$, $|\xi| \to \infty$, $m'(x)m^{-1}(x) \to 0$, $|x| \to \infty$. Тогда $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ плотно в S_m^μ в топологии $S_{m'}^{\mu'}$ (ср. доказательство леммы 2 из п. I.1.3). Отсюда вытекает, что $S_{-\infty}^{-\infty}$ можно рассматривать как пополнение $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Ввиду сказанного мы начнем изучение операций композиции $(a, b) \mapsto a \circ b$ и инволюции $a \mapsto a^\#$ с пространства финитных символов.

Пусть $a(x; \xi), b(x; \xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ и $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим композицию п. д. о. с этими символами. Так как в этом случае все интегралы сходятся абсолютно, то можно не заботиться о порядке интегрирования. Имеем

$$\begin{aligned}(a(x; D)(b(x; D)\varphi))(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int a(x; \eta)\exp(i\langle x, \eta\rangle)\times\\ &\times(2\pi)^{-n/2}\int \exp(-i\langle y, \eta\rangle)(2\pi)^{-n/2}\int \exp(i\langle y, \xi\rangle)\,b(y; \xi)\times\\ &\times\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\,dy\,d\eta = (2\pi)^{-n/2}\int \exp(i\langle x, \xi\rangle)\,\widehat{\varphi}(\xi)\times\\ &\times(2\pi)^{-n}\int\int a(x; \eta)\,b(y; \xi)\exp(i\langle x-y, \eta-\xi\rangle)\,dy\,d\eta\,d\xi.\end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$$a(x; D)(b(x; D))\varphi = (a\circ b)(x; D)\varphi,$$
$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\quad a, b \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n}),$$

где мы положили

$$(a\circ b)(x; \xi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int a(x; \eta)\,b(y, \xi)\exp(i\langle x-y, \eta-\xi\rangle)\,dy\,d\eta. \tag{6}$$

Аналогично, если $a(x; \xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ и $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, то с учетом определения (0.11) имеем

$$\begin{aligned}({}^ta(x; D)\varphi)(x) &= (2\pi)^{-n}\int\int \exp(i\langle x-y, \eta\rangle)\,a(y; \eta)\,\varphi(y)\,dy\,d\eta =\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int \exp(i\langle x, \xi\rangle)\,\widehat{\varphi}(\xi)(2\pi)^{-n}\int\int a(y; \eta)\times\\ &\qquad\times\exp(i\langle x-y, \eta-\xi\rangle)\,dy\,d\eta\,d\xi.\end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$${}^ta(x; D)\varphi = a^\#(x; D)\varphi,\quad a \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n}),\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

где мы положили

$$a^\#(x; \xi) = (2\pi)^{-n}\int\int a(y; \eta)\exp(i\langle x-y, \eta-\xi\rangle)\,dy\,d\eta. \tag{7}$$

Прежде чем распространять операции (6), (7) на $S_{-\infty}^{-\infty}$, мы проведем оценки этих символов в нормах (4).

Лемма 3. (i) *Пусть* $a(x;\xi), b(x;\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ *и* μ_i, $m_i\in\mathscr{B}_0$, $i=1, 2$. *Тогда найдутся такие* N_1, N_2, *что для любых натуральных* p, q

$$\{a\circ b\}_{(q)m_1m_2}^{(p)\mu_1\mu_2}\leqslant\mathrm{const}\cdot\{a\}_{(q)m_1}^{(2N_1+p)\mu_1}\{b\}_{(2N_2+q)m_2}^{(p)\mu_2}. \tag{8}$$

(ii) *Пусть* $a(x;\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ *и* μ, $m\in\mathscr{B}_0$. *Тогда найдутся такие* N_1, N_2 *что для любых натуральных* p, q

$$\{a^{\#}\}_{(q)m}^{(p)\mu}\leqslant\mathrm{const}\cdot\{a\}_{(2N_2+q)m}^{(2N_1+p)\mu}. \tag{8'}$$

Доказательство. С помощью замен $y\to y+x, \eta\to\eta+\xi$ перепишем интеграл (6) в виде

$$(a\circ b)(x;\xi)=(2\pi)^{-n}\int\int\exp(-i\langle y,\eta\rangle)\,a(x;\xi+\eta)\times$$
$$\times b(x+y;\xi)\,dy\,d\eta. \tag{6'}$$

Воспользуемся тождеством

$$(1-\Delta_y)^{N_2}(1+|\eta|^2)^{-N_2}(1+|y|^2)^{-N_1}(1-\Delta_\eta)^{N_1}\exp(-i\langle y,\eta\rangle)=$$
$$=\exp(-i\langle y,\eta\rangle). \tag{9}$$

Подставляя из (9) в (6′) и интегрируя по частям, перепишем интеграл (6) в виде

$$(a\circ b)(x;\xi)=(2\pi)^{-n}\int\int\exp(-i\langle y,\eta\rangle)\left[(1+|y|^2)^{-N_1}\times\right.$$
$$\left.\times(1-\Delta_y)^{N_2}b(x+y;\xi)\right]\left[(1-\Delta_\eta)^{N_1}\left(a(x;\xi+\eta)(1+|\eta|^2)^{-N_2}\right)\right]dy\,d\eta. \tag{6''}$$

Оценим выражения в квадратных скобках. Первую скобку можно оценить сверху через

$$c(N_2)\{b\}_{(2N_2)m_2}^{\mu_2}|\mu_2(\xi)m_2(x+y)|^{-1}(1+|y|^2)^{-2N_1}\leqslant$$
$$\leqslant c(N_1,N_2,m_2)\{b\}_{(2N_2)m_2}^{\mu_2}|\mu_2(\xi)m_2(x)|^{-1}(1+|y|)^{-2N_1+M_2}.$$

Аналогично, вторая квадратная скобка оценивается сверху через

$$c(N_1,N_2)\{a\}_{m_1}^{(2N_1)\mu_1}|m_1(x)\mu_1(\xi+\eta)|^{-1}(1+|\eta|)^{-2N_2}\leqslant$$
$$\leqslant c(N_1,N_2,\mu_1)\{a\}_{m_1}^{(2N_1)\mu_1}|m_1(x)\mu_1(\xi)|^{-1}(1+|\eta|)^{-2N_2+M_1}.$$

Выбирая $2N_1>|M_2|+n$, $2N_2>|M_1|+n$, подставляя эти оценки в (6″) и интегрируя по y и η придем к неравенству (8) для случая $p=q=0$. Дифференцируя по x и ξ под знаком интеграла (6″) и повторяя проведенные выше оценки, получим неравенства (8) для произвольных натуральных p и q.

(ii) Перепишем интеграл (7) в виде

$$a^{\#}(x;\xi)=(2\pi)^{-n}\int\int_{\mathbb{R}^{2n}}\exp(-i\langle y,\eta\rangle)\,a(x+y,\eta+\xi)\,dy\,d\eta. \quad (7')$$

Заменяя экспоненту выражением (9) и интегрируя по частям, окончательно получим

$$a^{\#}(x;\xi)=(2\pi)^{-n}\int\int\exp(-i\langle y,\eta\rangle)(1+|y|^2)^{-N_1}\times$$
$$\times(1-\Delta_y)^{N_2}\left[(1+|\eta|^2)^{-N_1}\left((1-\Delta_\eta)^{N_2}a\right)(x+y,\eta+\xi)\right]dy\,d\eta. \quad (7'')$$

Дальнейшие оценки, аналогичные проведенным выше, мы оставляем читателю.

Интеграл (6″) (в отличие от (6)) абсолютно сходится для произвольных символов $a(x;\xi)\in S^{\mu_1}_{m_1}$, $b(x;\xi)\in S^{\mu_2}_{m_2}$ и не зависит от конкретного выбора натуральных чисел $N_1\geqslant N_1(m_2)$, $N_2\geqslant N_2(\mu_1)$. От одного набора N_1, N_2 к другому набору N_1', N_2' можно перейти с помощью интегрирования по частям. Пусть символы $a_\varepsilon, b_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ аппроксимируют a, b в смысле леммы 2. Тогда символ $a_\varepsilon\circ b_\varepsilon$ можно записать в виде (6) (с заменой a и b на a_ε, b_ε), а затем с помощью интегрирования по частям переписать в виде (6″). В силу леммы 3 семейство $a_\varepsilon\circ b_\varepsilon$ будет равномерно ограничено по нормам $\{\ \}^{(p)\mu_1\mu_2}_{(q)m_1m_2}$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ и под знаком интеграла (6″) можно переходить к пределу при $\varepsilon\to0$.

Аналогично, (7″) может служить определением операции $\#$ для любых $a\in S^{\mu}_{m}$. Если $a_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $a_\varepsilon\to a$ в смысле леммы 2, то $a_\varepsilon^{\#}\to a^{\#}$ также в этом смысле. Итак, доказано

Предложение 1. (i) *Равенство (6″) определяет непрерывное отображение*

$$S^{\mu_1}_{m_1}\times S^{\mu_2}_{m_2}\to S^{\mu_1\mu_2}_{m_1m_2}\qquad ((a,b)\to a\circ b).$$

При этом если $a_\varepsilon\to a$, $b_\varepsilon\to b$ $(\varepsilon\to0)$ в смысле леммы 2, то и $a_\varepsilon\circ b_\varepsilon\to a\circ b$ в смысле этой леммы.

(ii) *Равенство (7″) определяет непрерывное отображение*

$$S^{\mu}_{m}\to S^{\mu}_{m}\quad (a\to a^{\#}).$$

При этом если $a_\varepsilon\to a$ $(\varepsilon\to0)$ в смысле леммы 2, то $a_\varepsilon^{\#}\to a^{\#}$ в смысле этой леммы.

Финитным символам a, b можно наряду с (6) сопоставить финитный символ

$$c(a,b)\overset{\mathrm{def}}{=}(2\pi)^{-n}\int_0^1\int\int_{\mathbb{R}^{2n}}\exp(i\langle x-y,\eta-\xi\rangle)\,a(x;\xi+t(\eta-\xi))\,b(y;\xi)\,dy\,dt\,d\eta. \quad (10)$$

Заменяя экспоненту выражением типа (9) и интегрируя по частям, мы получим интеграл типа (6″), который естественным образом определяется для любых $a \in S^{\mu_1}_{m_1}$, $b \in S^{\mu_1}_{m_2}$, при этом левая часть (10) попадает в $S^{\mu_1\mu_2}_{m_1m_2}$ и имеет место неравенство

$$\{c(a, b)\}^{(p)\mu_1\mu_2}_{(q)m_1m_2} \leqslant \mathrm{const}\cdot\{a\}^{(2N_1+p)\mu_1}_{(q)m_1}\{b\}^{(p)\mu_2}_{(2N_1+q)m_2}.$$

Далее проверяется, что если $a_\varepsilon \to a \in S^{\mu_1}_{m_1}$ и $b_\varepsilon \to b \in S^{\mu_2}_{m_2}$, $\varepsilon \to 0$, то $c(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \to c(a, b) \in S^{\mu_1\mu_2}_{m_1m_2}$, где сходимость понимается в смысле леммы 2.

Аналогично, наряду с (7) финитному символу a можно сопоставить интеграл

$$d(a) = (2\pi)^{-n}\int\int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp(i\langle x-y, \eta-\xi\rangle)\, a(x; \xi + t(\eta-\xi))\, dy\, d\eta\, dt. \tag{11}$$

С помощью интегрирования по частям интеграл (11) можно переписать в форме (7″) и тем самым продолжить отображение (11) до непрерывного отображения S^μ_m в себя. При этом если $a_\varepsilon \to a$ в смысле леммы 2, то $d(a_\varepsilon) \to d(a)$ в этом же смысле.

Предложение 2. (i) *Для символов $a, b \in S^{-\infty}_{-\infty}$ имеет место разложение*

$$(a \circ b)(x; \xi) = (ab)(x; \xi) + \sum_{|\alpha|=1}\left(c\left(a^{(\alpha)}, b_{(\alpha)}\right)\right)(x; \xi). \tag{12}$$

Если $a \in S^{\mu_1}_{m_1}$, $b \in S^{\mu_2}_{m_2}$, то оба слагаемых в правой части принадлежат $S^{\mu_1\mu_2}_{m_1m_2}$.

(ii) *Для символов $a \in S^{-\infty}_{-\infty}$ имеет место разложение*

$$a^{\#}(x; \xi) = a(x; \xi) + \sum_{|\alpha|=1} d\left(a^{(\alpha)}_{(\alpha)}\right)(x; \xi). \tag{13}$$

Если $a \in S^\mu_m$, то оба слагаемых в правой части принадлежат S^μ_m.

Доказательство. (i) Рассмотрим сначала частный случай, когда символы a, b финитные или достаточно быстро убывают на бесконечности по x и ξ. Тогда символ $a \circ b$ задается с помощью интеграла (6). Возьмем $\chi(\eta) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi(0) = 1$. Так как интеграл (6) абсолютно сходится, то

$$(a \circ b)(x; \xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\,(2\pi)^{-n}\int\int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp(i\langle x-y, \eta-\xi\rangle)\,\chi(\varepsilon\eta)\, a(x, \eta)\times$$

$$\times b(y; \xi)\, dy\, d\eta = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-n}\int\int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp(i\langle x-y, \eta-\xi\rangle)\,\chi(\varepsilon\eta)\, a(x; \xi)\times$$

$$\times b(y;\,\xi)\,dy\,d\eta + \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}\int \exp(i\langle x-y,\,\eta-\xi\rangle)\,\chi(\varepsilon\eta)\times$$
$$\times[a(x;\,\eta)-a(x;\,\xi)]\,b(y;\,\xi)\,dy\,d\eta.$$

Если к выражению в скобках применить формулу Лагранжа

$$a(x;\,\eta)-a(x;\,\xi)=\int_0^1\sum_{j=1}^n\frac{\partial a}{\partial\xi_j}(x;\,\xi+t(\eta-\xi))\,dt, \tag{14}$$

а затем перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$, то получим второй член в правой части.

В первом члене в правой части мы можем поменять порядки интегрирования и провести интегрирование по переменной η. Тогда получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(i\langle y-x,\,\xi\rangle)\,a(x;\,\xi)\,b(y;\,\xi)\,\widehat{\chi}\left((y-x)\,\varepsilon^{-1}\right)\varepsilon^{-n}dy=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(i\varepsilon\langle z,\,\xi\rangle)\,a(x;\,\xi)\,b(x+\varepsilon z;\,\xi)\,\widehat{\chi}(z)\,dz=$$
$$=a(x;\,\xi)\,b(x;\,\xi)\,(2\pi)^{-n/2}\int\widehat{\chi}(z)\,dz=\chi(0)\,a(x;\,\xi)\,b(x;\,\xi)=$$
$$=a(x;\,\xi)\,b(x;\,\xi).$$

В случае произвольных $a\in S^{\mu_1}_{m_1}$, $b\in S^{\mu_2}_{m_2}$ мы аппроксимируем эти символы (в смысле леммы 2) символами $a_\varepsilon, b_\varepsilon\in\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$. Для последних можно написать разложение

$$a_\varepsilon\circ b_\varepsilon=a_\varepsilon b_\varepsilon+\sum_{|\alpha|=1}c\left(a_\varepsilon^{(\alpha)},\,b_{\varepsilon(\alpha)}\right).$$

На каждом компакте в $\mathbb{R}^{2n}$ символы $a_\varepsilon\circ b_\varepsilon$ и $a_\varepsilon b_\varepsilon$ равномерно сходятся при $\varepsilon\to 0$ соответственно к $a\circ b$ и ab. Что касается $c\left(a_\varepsilon^{(\alpha)},\,b_{\varepsilon(\alpha)}\right)$, то в соответствующем интеграле (10) мы проведем интегрирование по частям, после чего мы сможем перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Аналогично доказывается разложение (13).

2.2. Исчисление п. д. о. с символами из $S^{-\infty}_{-\infty}$.

Предложение 1. (i) *Пусть $a(x;\,\xi)\in S^{-\infty}_{-\infty}$. Тогда выражение* (0.10) *определяет непрерывный оператор из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.*

(ii). *Если для некоторых μ, m последовательность $\{a_\varepsilon(x;\,\xi)\}$ ограничена в S^μ_m и имеет место поточечная сходимость $a_\varepsilon(x;\,\xi)\to\to a(x;\,\xi)\in S^\mu_m$, то $a_\varepsilon(x;\,D)\varphi\to a(x;\,D)\varphi$ в топологии $\mathscr{S}$ $\forall\varphi\in\mathscr{S}$.*

Доказательство. Ввиду (0.10) и (3) имеем

$$|a(x;\,D)\,\varphi(x)|\leqslant(2\pi)^{-n/2}\int|a(x;\,\xi)|\,|\widehat{\varphi}(\xi)|\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant A\,|m(x)|\int\mu(\xi)\,|\widehat{\varphi}(\xi)|\,d\xi\leqslant A'\,(1+|x|)^{N_m}\,|\widehat{\varphi}|_{(N_\mu+n+1)}.$$

Дифференцируя под знаком интеграла (0.10), найдем

$$D_x^\alpha (a(x; D)\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \sum \binom{\alpha}{\beta} a_{(\alpha)}(x; \xi)\, \xi^{\alpha-\beta} \widehat{\varphi}(\xi) \exp(i\langle x, \xi\rangle)\, d\xi.$$

Замечая, что

$$x^\beta \exp(i\langle x, \xi\rangle) = \left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta \exp(i\langle x, \xi\rangle),$$

и интегрируя по частям под знаком интеграла, окончательно найдем

$$x^\beta D_x^\alpha (a(x; D)\varphi)(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int \sum \binom{\alpha}{\beta} \exp(i\langle x, \xi\rangle) \left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta (a_{(\alpha)}(x; \xi)\, \xi^{\alpha-\beta} \widehat{\varphi}(\xi))\, d\xi.$$

Повторяя проведенную выше оценку, найдем для $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant l$

$$\left| x^\beta D_x^\alpha (a(x; D)\varphi)(x) \right| \leqslant A_{\alpha\beta} (1 + |x|)^{N_m} |\widehat{\varphi}|^{(l)}_{(N_\mu+n+1+m)},$$

откуда

$$|a(x; D)\varphi|^{(m)}_{(l-N_m)} \leqslant A_{ml} |\widehat{\varphi}|^{(l)}_{(N_\mu+n+1+m)}.$$

Воспользовавшись неравенствами Парсеваля (I.1.19), окончательно получим оценки

$$|a(x; D)\varphi|^{(m)}_{(l)} \leqslant B_{ml} |\varphi|^{(m+N_\mu+n+1)}_{(l+N_m+n+1)}, \tag{15}$$

следствием которых является непрерывность оператора $a(x; D)$: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$.

(ii) Как видно из первой части доказательства, константы B_{ml} из (15) зависят (линейно) только от констант $A_{\alpha\beta}(a)$ из (3) для $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant l + N_m$. Отсюда следует, что если семейство $\{a_\varepsilon(x; \xi)\}$ ограничено в S^μ_m, то семейство функций $\{a_\varepsilon(x; D)\varphi\}$ ограничено в $\mathscr{S}$. Поскольку всякое ограниченное множество в $\mathscr{S}$ компактно (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], § 6, гл. I), то можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{a_\varepsilon(x; D)\varphi\}$. Эта подпоследовательность сходится к $a(x; D)\varphi \in \mathscr{S}$, поскольку интеграл (0.10) для $a(x; \xi) = a_\varepsilon(x; \xi)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ сходится к интегралу (0.10) для $a(x; \xi)$.

Предложение 2. (i) *Пусть* $a(x; \xi)$, $b(x; \xi) \in S^{-\infty}_{-\infty}$. *Тогда*

$$a(x; D)(b(x; D)\varphi) = (a \circ b)(x; D)\varphi \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}. \tag{16}$$

(ii) *Пусть* $a(x; \xi) \in S^{-\infty}_{-\infty}$. *Тогда*

$$(a(x; D)\varphi, \psi) = \left(\varphi, a^\#(x; -D)\psi\right) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}. \tag{17}$$

Доказательство (i). Если $a(x; \xi), b(x; \xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, то равенство (16) уже доказано в п. 2.1. В общем случае аппроксимируем (в смысле леммы 2 из п. 2.1) a и b символами a_ε, b_ε из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, напишем для этих символов равенство (16) и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Левая часть будет сходится к левой части (16) для $\varepsilon = 0$ ввиду предложения 1 (i). Ввиду предложения 1 (i) из предыдущего пункта $a_\varepsilon \circ b_\varepsilon \to a \circ b$ в смысле леммы 2 из п. 2.1. Применяя предложение 1 (i), мы докажем равенство (16).

(ii) Для случая $a(x; \xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ равенство (17) было установлено в п. 2.1. В общем случае аппроксимируем $a(x; \xi)$ символами $a_\varepsilon(x; \xi) \in \mathscr{D}$ и воспользуемся предложением 1 (ii) и предложением 1 (ii) из п. 2.1.

Равенство (17) позволяет определить оператор $a(x; D)$ для $\varphi \in \mathscr{S}'$. Этот оператор, как сопряженный к непрерывному оператору $a^{\#}(x; -D)$: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, будет непрерывным оператором из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$, причем сужение этого оператора на $\mathscr{S}$ переводит $\mathscr{S}$ в себя и задается с помощью (0.10).

Теорема. *Пусть* $a(x; \xi) \in S_1^1$ [1]. *Тогда оператор* $a(x; D)$: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ *по непрерывности продолжается до непрерывного оператора из* L_2 *в* L_2, *причем норма этого оператора не превосходит* $c(n)\{a\}_{(3n+4)}^{(3n+4)}$.

Эта теорема принадлежит Кальдерону и Вайянкуру, простое доказательство этой теоремы, основанное на рассуждениях Билса, приведено у Тейлора [1].

2.3. Пространства H_m^μ. Если μ, $m \in \mathscr{B}_0$, то, как уже отмечалось выше (см. замечание 1(d) из п. 2.1), операторы $m(x)$ и $\mu(D)$ переводят $\mathscr{S}$ в себя. Определим пространства

$$H_m^\mu = \{f \in \mathscr{S}',\ m(x) f \in H^\mu\} \tag{18}$$

с нормой

$$\| f \|_m^\mu = \| m(x) f \|^\mu = \| \mu(D) m(x) f \|. \tag{19}$$

Очевидно, что $f \in H_m^\mu$ тогда и только тогда, когда

$$f = m^{-1}(x) \mu^{-1}(D) g, \quad g \in L_2, \ \| g \| = \| f \|_m^\mu. \tag{20}$$

Поскольку $\mathscr{S}$ плотно в L_2 и операторы $\mu(D)$ и $m(x)$ переводят $\mathscr{S}$ в себя, то $\mathscr{S}$ плотно в H_m^μ и последнее пространство можно рассматривать как пополнение $\mathscr{S}$ по норме (19). Итак, имеют место вложения с топологией $\mathscr{S} \subset H_m^\mu \subset \mathscr{S}'$ $\forall \mu, m \in \mathscr{B}_0$.

Наряду с пространством (18) можно рассмотреть пространство

$$'H_m^\mu = \{f \in \mathscr{S}',\ \mu(D) f \in H_m\} \tag{18'}$$

с нормой

$$'\| f \|_m^\mu = \| \mu(D) f \|_m = \| m(x) \mu(D) f \|. \tag{19'}$$

Очевидно, что $f \in {'H_m^\mu}$ тогда и только тогда, когда

$$f = \mu^{-1}(D) m^{-1}(x) g, \quad g \in L_2, \ \| g \| = {'\| f \|_m^\mu}. \tag{20'}$$

---

[1] Через S_1^1 мы обозначаем S_m^μ, отвечающее случаю $\mu(\xi) \equiv 1$, $m(x) \equiv 1$.

Предложение 1. *Если* $\mu,\ m \in \mathscr{B}_0$, *то имеют место неравенства*

$$'\|f\|_m^\mu \leqslant c\,\|f\|_m^\mu,\quad \|f\|_m^\mu \leqslant c'\,'\|f\|_m^\mu, \tag{21}$$

т. е. пространства (18) *и* (18′) *совпадают.*

Доказательство. Ввиду (19), (19′) оценки (21) эквивалентны $L_2 \to L_2$-ограниченности операторов

$$A_{\mu m} = m(x)\,\mu(D)\,m^{-1}(x)\,\mu^{-1}(D); \tag{22}$$

$$B_{\mu m} = \mu(D)\,m(x)\,\mu^{-1}(D)\,m^{-1}(x). \tag{22′}$$

Согласно предложению 2 (i) из п. 2.2 оператро $A_{\mu m}$ будет п. д. о. с символом $(m(x)\mu(\xi))\circ(m^{-1}(x)\mu^{-1}(\xi))$. Согласно предложению 1 (i) из п. 2.1 этот символ принадлежит S_1^1. Воспользовавшись теоремой 2.2, мы получим $A_{\mu m} \in \mathscr{L}(H,\ H)$. Аналогично, $B_{\mu m}$ будет п. д. о. с символом $\mu(\xi)\circ\left(\left(m(x)\,\mu^{-1}(\xi)\right)\circ m^{-1}(x)\right) \in S_1^1$, и $B_{\mu m} \in \mathscr{L}(H,\ H)$ согласно теореме 2.2.

Замечание. При доказательстве неравенств (21), т. е. при оценках L_2-норм операторов (22), (22′), мы использовали теорему Кальдерона — Вайянкура. В частном случае, когда каждый из весов μ, m является либо полиномом, либо полиномом в степени — 1, доказательство (21) совсем элементарно и фактически проведено в приложении к § I.2.

Из определения пространств (18), (18′) следует, что $FH_m^\mu = {}'H_\mu^m$, $\mathscr{F}'H_m^\mu = H_\mu^m$. Воспользовавшись предложением 1, получим

$$\mathscr{F}H_m^\mu = H_\mu^m \quad \forall m,\ \mu \in \mathscr{B}_0.$$

Из определения (18) (или (18′)) легко выводится, что

$$\left(H_m^\mu\right)' = H_{1/m}^{1/\mu} \quad \forall m,\ \mu \in \mathscr{B}_0.$$

Предложение 2. *Пусть* $a(x;\ \xi) \in S_m^\mu$. *Тогда* $\forall \lambda,\ l \in \mathscr{B}_0$ *непрерывен оператор*

$$a(x;\ D)\colon\ H_{ml}^{\mu\lambda} \to H_l^\lambda, \tag{23}$$

причем норма этого оператора не превосходит $c\,\{a\}_{(q)m}^{(p)\mu}$, *где константа* c *зависит только от* n, λ, l, *а числа* p *и* q *зависят только от констант* $N_\lambda, N_l, N_\mu, N_m$ *из неравенств* (21) *для весов* $\lambda, l, \mu, m \in \mathscr{B}_0$.

Доказательство. Непрерывность оператора (23) ввиду (20′) эквивалентна $L_2 \to L_2$-ограниченности оператора

$$\lambda(D)\,l(x)\,a(x;\ D)\,\mu^{-1}(D)\,\lambda^{-1}(D)\,m^{-1}(x)\,l^{-1}(x).$$

Согласно предложению 1 (i) из п. 2.2 этот оператор будет псевдодифференциальным с символом

$$\lambda(\xi)\circ\left((l(x)\,a(x;\ \xi)\,\mu^{-1}(\xi)\,\lambda^{-1}(\xi))\circ(m^{-1}(x)\,l^{-1}(x))\right),$$

и ограниченность оператора (23) вытекает из теоремы 2.2.

2.4. Псевдодифференциальные уравнения в пространствах H_m^μ.

В этом пункте мы для п. д. о. с символами из $S_{-\infty}^{-\infty}$ докажем аналог теоремы 1 из п. 1.2 в предположении малости некоторых констант в условиях типа (2). Начнем с аналога предложений 2, 3 из п. 1.2.

Предложение. (i) *Пусть* $a(x;\xi)\in S_{m_1}^{\mu_1}$, $b(x;\xi)\in S_{m_2}^{\mu_2}$. *Тогда* $\forall\lambda, l\in\mathscr{B}_0$ *имеет место оценка*

$$\|(a(x;D)\cdot b(x;D)-(ab)(x;D))\varphi\|_l^\lambda\leqslant c(a,b,\lambda,l)\|\varphi\|_{m_1m_2l}^{\mu_1\mu_2\lambda}, \tag{24}$$

где

$$c(a,b,\lambda,l)\leqslant K\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\{a^{(\alpha)}\}_{(q_1)m_1}^{(p_1)\mu_1}\{b_{(\beta)}\}_{(q_2)m_2}^{(p_2)\mu_2}, \tag{24'}$$

а числа p_1, p_2, q_1, q_2 *зависят только от констант* N_{μ_1}, N_{μ_2}, N_{m_1}, N_{m_2}, N_λ, N_l *из* (2).

(ii) *Пусть* $a(x;\xi)\in S_m^\mu$. *Тогда* $\forall\lambda, l\in\mathscr{B}_0$ *имеет место оценка*

$$\|({}^ta(x;D)-a(x;D))\varphi\|_l^\lambda\leqslant c(a,\lambda,l)\|\varphi\|_{ml}^{\mu\lambda}, \tag{25}$$

где

$$c(a,\lambda,l)\leqslant K\sum_{|\alpha|=1}\{a_{(\alpha)}^{(\alpha)}\}_{(q)m}^{(p)\mu}. \tag{25'}$$

а числа p *и* q *зависят только от констант* N_μ, N_m, N_λ, N_l.

Доказательство. (i) Согласно предложению 1 (i) из п. 2.2 $a(x;D)\cdot b(x;D)$ будет п. д. о. вида (0.10) с символом $(a\circ b)(x;\xi)\in S_{m_1m_2}^{\mu_1\mu_2}$. Согласно предложению 2 (i) из п. 2.1 символ $a\circ b-ab$ задается интегралом из правой части (12), причем нормы $\{a\circ b-ab\}_{(q)m_1m_2}^{(p)\mu_1\mu_2}$ можно оценить через правые части (24′). Воспользовавшись предложением 1 из п. 2.3, мы получим оценки (24), (24′). Аналогично, пользуясь предложением 1(ii) из п. 2.2 и предложением 2 (ii) из п. 2.1, мы докажем оценки (25), (25′).

Теорема 1. *Пусть* $a(x;\xi)\in S_{-\infty}^{-\infty}$ *и найдутся такие* $m(x)$, $\mu(\xi)\in\mathscr{B}_0$, *что выполнены условия:*

(I) $|a(x;\xi)|>\delta|\mu(\xi)m(x)|$ $\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$;

(II) $a(x;\xi)\in S_m^\mu$, *т. е.*

$$|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\xi)|<A_\beta^\alpha|\mu(\xi)m(x)|\quad\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}.$$

Тогда $\forall\lambda, l\in\mathscr{B}_0$ *можно указать целое* $p=p(\lambda,l)$ *и такую константу* $\varepsilon>0$, *зависящую от* p *и* $R_p=\max\limits_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p}A_\alpha^\beta$, *что при выполнении условия*

(III) $$\max_{1\leqslant|\alpha|\leqslant p,|\beta|\leqslant p}A_\beta^\alpha<\varepsilon$$

отображение (23) *будет изоморфизмом пространств.*

Доказательство. Положим $b(x;\ \xi)=a^{-1}(x;\ \xi)$. Из условий (I), (II) легко выводится, что символ $b(x;\ \xi)$ удовлетворяет аналогичным условиям, в которых μ, m следует заменить на μ^{-1}, m^{-1} и δ на $(A_0^0)^{-1}$. Но тогда символы $a(x;\ \xi)\circ b(x;\ \xi)$ и $b(x;\ \xi)\circ a(x;\ \xi)$ принадлежат S_1^1 и непрерывны операторы

$$H_1 = 1 - a(x;\ D)\cdot b(x;\ D) = 1-(a\circ b)(x;\ D)\colon\ H_l^\lambda \to H_l^\lambda;$$

$$H_2 = 1 - b(x;\ D)\cdot a(x;\ D) = 1-(b\circ a)(x;\ D)\colon\ H_{ml}^{\mu\lambda} \to H_{ml}^{\mu\lambda}.$$

Оценивая нормы этих операторов с помощью предложения (i), несложно показать, что за счет малости ε в условии (III) можно сделать нормы операторов H_1, H_2 меньше 1. Но тогда нам останется повторить рассуждения теоремы 1 из п. 1.2.

Повторением рассуждений леммы 1 из п. 1.2 доказывается, что полиномиальный по ξ символ

$$P(x;\ \xi)=\sum a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \tag{26}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 тогда и только тогда, когда выполнены условия (A), (B) леммы 1 п. 1.2, а коэффициенты (26) принадлежат $C_{(0)}^{(\infty)}$, т. е.

$$|D^\beta a_\alpha(x)| \leqslant L_{|\beta|},\quad |\beta| = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{27}$$

Аналогично теореме 2 из п. 1.2 доказывается

Теорема 2. *Пусть $P(x;\ \xi)$ является экспоненциально корректным полиномиальным символом постоянной силы и коэффициенты удовлетворяют условиям* (27). *Тогда $\forall\lambda(\xi)$, $l(x)\in\mathcal{B}_0$ можно указать $\gamma(\lambda,\ l)$, так что при $\gamma\leqslant\gamma(\lambda,\ l)$ отображение* (23) *для $a(x;\ \xi)=P(x;\ \xi_1+i\gamma,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$, $\mu(\xi)=a(x^0;\ \xi)$, $m(x)\equiv 1$ будет изоморфизмом.*

Доказательство (ср. доказательство теоремы 2 из п. 1.2) сводится к проверке условий теоремы 1 для символа $a(x;\ \xi)=$ $=P_\gamma(x;\ \xi)=P(x;\ \xi_1+i\gamma,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$. Как и в лемме 2 из п. 1.2, представим символ P_γ в виде

$$P_\gamma(x;\ \xi)=\sum_{j=1}^{J} b_j(x)\,P_\gamma(x^j,\ \xi),$$

где $b_j(x)\in C_{(0)}^{(\infty)}$, т. е. для этих коэффициентов выполнены оценки типа (27). Тогда

$$P_{\gamma(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \xi)=\sum_{j=1}^{J} D^\beta b_j(x)\,P_\gamma^{(\alpha)}(x^j;\ \xi).$$

В силу экспоненциальной корректности полиномов $P_\gamma(x^j;\ \xi)$ можно указать такую функцию $\varepsilon(\gamma)\to 0$, $\gamma\to-\infty$, что $\left|P_\gamma^{(\alpha)}(x^j;\ \xi)\right| <$ $<\varepsilon(\gamma)\left|P_\gamma(x^j;\ \xi)\right|$, откуда $\forall x^0\in\mathbb{R}^n$

$$\left|P_{\gamma(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \xi)\right| < cL_{|\beta|}\varepsilon(\gamma)\,|P_\gamma(x^0;\ \xi)|.$$

Выбирая достаточно большое $-\gamma$, мы добьемся выполнения условия (III) теоремы 1.

2.5. Псевдодифференциальные уравнения в пространствах $H^{\mu}_{m[\gamma]+}$. В п. 1.3 при переходе от классов H^{μ} к H^{μ}_{+} мы сузили класс рассматриваемых символов $\mathscr{B}$, заменив его классом $\mathscr{B}^{+}$ символов, голоморфных по τ. Аналогичным образом, переходя от пространств H^{μ}_{m} к $(H^{\mu}_{m})_{+}$, мы сузим класс $\mathscr{B}_0$.

Определение. Обозначим через $\mathscr{B}_0^{+}$ класс символов $\mu(\tau, \eta)$, определенных для $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\operatorname{Im}\tau \leqslant \gamma(\mu)$, голоморфных по τ, бесконечно дифференцируемых по всем переменным и таких, что выполнены оценки

$$|\mu^{(\alpha)}(\tau, \eta)\mu^{-1}(\tau, \eta)| < K_{\alpha}(\mu), \ \operatorname{Im}\tau \leqslant \gamma(\mu), \tag{28}$$

$$|\mu(\tau', \eta')\mu^{-1}(\tau'', \eta'')| < K_{\mu}(1 + |\tau' - \tau''| + |\eta' - \eta''|)^{N_{\mu}}. \tag{29}$$

Согласно принятым нами обозначениям $H^{\mu}_{m[\gamma]} = \exp(\gamma t) H^{\mu}_{m}$, а в качестве нормы в этом пространстве можно взять $\|\exp(\gamma t)\varphi\|^{\mu}_{m}$ или $'\|\exp(\gamma t)\varphi\|^{\mu}_{m}$.

В случае $\mu \in \mathscr{B}_0^{+}$ мы определим эквивалентные нормы

$$\|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]} = \|\exp(\gamma t)\, {}_{\gamma}\mu(D)\, m(x)\varphi\|, \tag{30}$$

$$'\|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]} = \|\exp(\gamma t)\, m(x)\, {}_{\gamma}\mu(D)\varphi\|. \tag{30'}$$

Свойства пространств $(H^{\mu}_{m[\gamma]})_{+}$ мы резюмируем в следующем утверждении.

Лемма. *Для* $\mu \in \mathscr{B}_0^{+}$, $m \in \mathscr{B}_0$ *и распределения* φ *следующие условия эквивалентны*:

(i) $\varphi \in H^{\mu}_{m[\gamma]+}$, *т. е.* $\exp(\gamma t)\varphi \in H^{\mu}_{m}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^{n}_{+}$;

(ii) $\varphi = m^{-1}\, {}_{\gamma}\mu^{-1}(D)\psi$, $\quad \psi \in H_{[\gamma]+}$, $\quad \|\psi\|_{[\gamma]} = \|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]}$;

(ii′) $\varphi = {}_{\gamma}\mu^{-1}(D)\, m^{-1}\psi$, $\quad \psi \in H_{[\gamma]+}$, $\quad \|\psi\|_{[\gamma]} = {}'\|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]}$;

(iii) $\varphi \in H^{\mu}_{m[\rho]}$ $\ \forall \rho < \gamma$ *и конечна норма*

$$\|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]+} = \sup_{\rho<\gamma}\|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]}; \tag{31}$$

(iii′) $\varphi \in H^{\mu}_{m[\rho]}$ $\ \forall \rho < \gamma$ *и конечна норма*

$$'\|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]+} = \sup_{\rho<\gamma}{}'\|\varphi\|^{\mu}_{m[\gamma]}. \tag{31'}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi \in H^{\mu}_{m}$ тогда и только тогда, когда $m\varphi \in H^{\mu}$, то эквивалентность утверждений (i), (ii), (iii) вытекает из леммы 1.3, отвечающей случаю $m(x) \equiv \text{const}$.

Эквивалентность (ii) и (ii′), (iii) и (iii′) основана на том, что константы эквивалентности норм (30) и (30′) можно выбрать не зависящими от γ. Последнее связано с тем, что константы

$K_\alpha(\mu)$ в (28) не зависят от $\operatorname{Im}\tau$, в силу чего равномерные по γ оценки $L_2 \to L_2$-норм операторов

$$m(x)\mu(D_t+i\gamma,\ D_y)m^{-1}(x)\mu^{-1}(D_t+i\gamma,\ D_y),$$
$$\mu(D_t+i\gamma,\ D_y)m(x)\mu^{-1}(D_t+i\gamma,\ D_y)m^{-1}(x)$$

вытекает из предложения 1 п. 2.3.

Обозначим через $S_m^{\mu+}$ совокупность символов $a(x;\ \tau,\ \eta)$. голоморфных по τ при $\operatorname{Im}\tau<\gamma(a)$, бесконечно дифференцируемых по всем переменным и удовлетворяющих оценкам

$$|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \tau,\ \eta)|<\varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(a,\ \operatorname{Im}\tau)\,|\,\mu(\tau,\ \eta)\,m(x)\,|, \tag{32}$$
$$\operatorname{Im}\tau\leqslant\gamma(a),$$
$$\varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(a,\ \operatorname{Im}\tau)\leqslant\varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(a),\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant\gamma(a). \tag{32$'$}$$

Предложение 1. *Пусть* $a\in S_m^{\mu+}$, $\mu\in\mathscr{B}_0^+$. *Тогда* $\forall\lambda\in\mathscr{B}_0^+$, $l\in\mathscr{B}_0$, *непрерывен оператор*

$$a(x;\ D)\colon\ (H_{ml[\gamma]}^{\mu\lambda})_+\to(H_{l[\gamma]}^{\lambda})_+,\quad \gamma\leqslant\gamma(a), \tag{33}$$

причем его норма допускает оценку, не зависящую от γ.

Это утверждение выводится из предложения 2 п. 2.3 таким же образом, как предложение 1 п. 1.3 из предложения 1 п. 1.1.

Обозначим через $\mathring{S}_m^{\mu+}$ совокупность тех символов $a(x;\ \tau,\ \eta)\in S_m^{\mu+}$, для которых выполнено условие

$$\varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(a,\ \operatorname{Im}\tau)\to 0,\quad \operatorname{Im}\tau\to-\infty,\quad |\alpha|\geqslant 1, \tag{32$''$}$$

более сильное, чем (32′).

Предложение 2. (i) *Пусть* $a\in\mathring{S}_{m_1}^{\mu_1+}$, $b\in S_{m_2}^{\mu_2+}$, $\mu_1,\ \mu_2\in\mathscr{B}_0^+$, $m_1,\ m_2\in\mathscr{B}_0$. *Тогда* $\forall\lambda\in\mathscr{B}_0^+$, $\forall l\in\mathscr{B}_0$ *можно указать такую функцию* $\varepsilon(\rho)\to 0$, $\rho\to-\infty$, *что*

$$\|(a(x;\ D)\cdot b(x;\ D)-(ab)(x;\ D))f\|_{l[\rho]}^{\lambda}\leqslant\varepsilon(\rho)\|f\|_{m_1m_2l[\rho]}^{\mu_1\mu_2\lambda}.$$

(ii) *Пусть* $a\in\mathring{S}_m^{\mu+}$, $\mu\in\mathscr{B}_0^+$, $m\in\mathscr{B}_0$. *Тогда* $\forall\lambda\in\mathscr{B}_0^+$, $\forall l\in\mathscr{B}_0$ *можно указать такую функцию* $\varepsilon(\rho)\to 0$, $\rho\to-\infty$, *что*

$$\|(a(x;\ D)-{}^ta(y;\ D))f\|_{l[\rho]}^{\lambda}\leqslant\varepsilon(\rho)\|f\|_{ml[\rho]}^{\mu\lambda}.$$

Эти утверждения выводятся из предложения 2.4 таким же образом, как предложения 2, 3 п. 1.3 из предложений 2, 3 п. 1.1.

Предложения 1, 2 позволяют воспроизвести схему п. 1.4 и для рассматриваемых нами шкал доказать теоремы об изоморфизме.

Теорема 1. *Пусть символ* $a(x;\ \tau,\ \eta)$, *голоморфный по* τ *при* $\operatorname{Im}\tau\leqslant\gamma_0$ *и бесконечно дифференцируемый по всем переменным, удовлетворяет следующим условиям:*

(I) *Найдутся символы* $\mu \in \mathscr{B}_0^+$, $m \in \mathscr{B}_0$ *и такие константы* δ *и* $\gamma_1 \leqslant \gamma_0$, *что*

$$|a(x;\ \tau,\ \eta)| \geqslant \delta |\mu(\tau,\ \eta) m(x)|, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant \gamma_1.$$

(II) *Символ* $a(x;\ \tau,\ \eta)$ *принадлежит классу* $\overset{\circ}{S}{}_m^{\mu+}$, *т. е.*

$$|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \tau,\ \eta)| < \varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(\operatorname{Im} \tau) |\mu(\tau,\ \eta) m(x)|, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant \gamma_1,$$

где функции ε_β^α *равномерно ограничены, т. е.* $\varepsilon_\beta^\alpha(\rho) \leqslant \varepsilon_\beta^\alpha$ при $\rho \leqslant \gamma_1$ *и* $\varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(\rho) \to 0$, $\rho \to -\infty$.

Тогда $\forall \lambda \in \mathscr{B}_0^+$, $\forall \lambda \in \mathscr{B}_0$ *можно указать такое* $\gamma(\lambda,\ l)$, *что при* $\gamma \leqslant \gamma(\lambda,\ l)$ *отображение* (33) *будет изоморфизмом.*

С помощью рассуждений теоремы 2 из п. 2.4 доказывается

Теорема 2. *Пусть символ* $P(x;\ \tau,\ \eta)$ *при каждом* $x \in \mathbb{R}^n$ *является экспоненциально корректным полиномом, и пусть найдутся такие константы* $A > 0$ *и* γ_0, *что*

$$|P(x';\ \tau,\ \eta) P^{-1}(x'';\ \tau,\ \eta)| < A, \quad \operatorname{Im} \tau \leqslant \gamma_0, \quad (\operatorname{Re} \tau,\ \eta) \in \mathbb{R}^n. \tag{34}$$

Пусть коэффициенты символа принадлежат $C_{(0)}^{(\infty)}$. *Тогда* $\forall \lambda \in \mathscr{B}_0^+$, $\forall l \in \mathscr{B}_0$ *можно указать такое* $\gamma(\lambda,\ l)$, *что при* $\gamma \leqslant \gamma(\lambda,\ l)$, $a(x;\ \tau,\ \eta) = P(x;\ \tau,\ \eta)$, $\mu(\tau,\ \eta) = P(x^0;\ \tau,\ \eta)$, $m(x) = 1$ *отображение* (33) *будет изоморфизмом.*

2.6. Псевдодифференциальные уравнения в конечной полосе. Как и в п. 1.5 от теории псевдодифференциальных уравнений в пространствах $H_{m[\gamma]+}^{\mu}$ перейдем к аналогичной теории в пространствах

$$H_m^\mu[c_1, c_2) = H_{m[\gamma]}^\mu[c_1,\ \infty)/H_{m[\gamma]}^\mu[c_2,\ \infty), \quad c_1 < c_2, \tag{35}$$

где правое пространство на самом деле от γ не зависит. Дословным повторением рассуждений теоремы 1 из п. 1.5 доказывается

Теорема 1. *Пусть символ* $a(x;\ \tau,\ \eta)$ *удовлетворяет всем условиям теоремы* 1 *п.* 2.5. *Тогда для любых конечных* $c_1 < c_2$ *и любых* $\lambda \in \mathscr{B}_0^+$, $l \in \mathscr{B}_0$ *отображение*

$$a(x;\ D):\ H_{ml}^{\mu\lambda}[c_1,\ c_2) \to H_l^\lambda[c_1,\ c_2) \tag{36}$$

является изоморфизмом пространств.

Рассматривая последовательности весов $\lambda = (\tau - i\sqrt{1 + |\eta|^2})^s$, $l = (1 + |x|^2)^{r/2}$, s, $r \in \mathbb{R}$, и переходя к индуктивным и проективным пределам соответствующих шкал, можно доказать, что в условиях теоремы 1 имеют место изоморфизмы

$$a(x;\ D):\ \Phi[c_1,\ c_2) \to \Phi[c_1,\ c_2),\ \Phi = \mathscr{S},\ \mathscr{O},\ \mathscr{S}',\ \mathscr{O}'. \tag{37}$$

Рассмотрим пространства $H_{(l)}^{(r,s)}[c_1,\ c_2)$, отвечающие весам $\lambda_{r,s} \in \mathscr{B}^+$ (см. п. 1.5) и $l = (1 + t^2)^{\rho/2}(1 + |y|^2)^{\sigma/2}$. Повторением рассуждений теоремы 2 из п. 1.5 доказывается

Теорема 2. *Пусть полиномиальный символ* $P(x;\ \tau,\ \eta)$ *удовлетворяет условиям теоремы 2 п. 2.5. Тогда для любых* l, $c_1 < c_2$, *имеет место изоморфизм пространств*

$$P(x;\ D):\ H_{(l)}^{(r+m,\infty)}[c_1,\ c_2) \to H_{(l)}^{(m,\infty)}[c_1,\ c_2) \quad (m = \deg_\tau P). \tag{38}$$

2.7. Неоднородная задача Коши в $\mathscr{S}$ и $\mathscr{O}$. Как и в п. 1.6, среди символов из класса $(S_{-\infty}^{-\infty})^+$ мы выделим символы, удовлетворяющие условию *трансмиссии*, т. е. такие символы $a(x;\ \tau,\ \eta)$, что для некоторого $r \in \mathbb{Z}$ и любого $q > r$ их можно записать в форме (1.48), где коэффициенты $a_j(x;\ \eta)$ принадлежат классу $S_{-\infty}^{-\infty}$, остаток $a_q(x;\ \tau,\ \eta)$ принадлежит $(S_{-\infty}^{-\infty})^+$ и допускает оценки

$$|a_{q(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \tau,\ \eta)| < c_{\alpha\beta q}|m_q(x)\mu_q(\eta)|(1+|\tau|)^{-q}, \tag{39}$$

где $m_q,\ \mu_q \in \mathscr{B}_0$.

Можно показать, что символу $a(x;\ \tau,\ \eta)$, удовлетворяющему сформулированному выше условию трансмиссии, для любого $p \in \mathbb{Z}$ отвечает непрерывный оператор

$$a(x;\ D):\ \mathscr{S}_{[+]}^{\{p\}} \to \mathscr{S}_{[+]}^{\{p+r\}}.\ ^{1)} \tag{40}$$

Мы не будем рассматривать произвольные символы, удовлетворяющие условию трансмиссии, а ограничимся более узким классом подобных символов, для которых оценки (39) и оценки для производных $a_{j(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \eta)$ не зависят от x. В этот класс попадают экспоненциально корректные символы $P(x;\ \tau,\ \eta)$ постоянной силы с коэффициентами из $C_{(0)}^{(\infty)}$ и символы $P^{-1}(x;\tau,\eta)$, поэтому, имея ввиду неоднородную задачу Коши для дифференциальных операторов $P(x;\ D)$, мы можем ограничиться указанным классом символов с условием трансмиссии.

Итак, определим через $S^{\{-r\}+}$ подкласс $(S_{-\infty}^{-\infty})^+$, состоящий из символов $a(x;\ \tau,\ \eta)$, которые $\forall q > r\ (q \in \mathbb{Z})$ можно записать в форме (1.48), причем для символов $a_j(x;\ \eta)$, $a_q(x;\ \tau,\ \eta)$ и всех их призводных справедлива оценка

$$|a_{j(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \eta)| < c_{j\alpha\beta}|\mu_j(\eta)|, \tag{41}$$

$$|a_{q(\beta)}^{(\alpha)}(x;\ \tau,\ \eta)| < c_{\alpha\beta q}|\mu_q(\eta)|(1+|\tau|)^{-q}. \tag{41'}$$

Предложение. *Пусть* $a(x;\ \tau,\ \eta) \in S_{(0)}^{\{-r\}+}$. *Тогда* $\forall p \in \mathbb{Z}$ *и любых* $\rho,\ l \in \mathbb{R}$ *непрерывен оператор*

$$a(x;\ D):\ H_{(\rho,l)+}^{(p|\infty,\infty)} \to H_{(\rho,l)+}^{(p+r|\infty,\infty)}. \tag{42}$$

1) Более аккуратно, каждому символу a, удовлетворяющему условию трансмиссии, отвечает такое $\gamma(a)$, что оператор $a(x;\ D)$ переводит пространство $\exp(-\gamma t)\,\mathscr{S}_{[+]}^{\{p\}}$ в пространство $\exp(-\gamma t)\,\mathscr{S}_{[+]}^{\{p+r\}}$ при $\gamma \leqslant \gamma(a)$. Как и в п. 1.6, мы будем считать (для простоты), что $\gamma(a) \geqslant 0$. Тогда можно взять $\gamma = 0$, т. е. рассмотреть отображение (40).

Доказательство. Случай ρ, $l=0$ рассматривается по схеме предложения 1.6, только вместо предложений из п. 1.3 надо использовать предложения из п. 2.5. Далее, опираясь на результаты п. 2.2, несложно проверить, что

$$(1+|y|^2)^{-l/2}(1+t^2)^{-\rho/2}a(x;\ D)\,(1+|y|^2)^{l/2}(1+t^2)^{\rho/2}$$

будет п. д. о. с символом из $S_{(0)}^{\{-r\}+}$, и, следовательно, этот оператор является непрерывным оператором из $H_{+}^{(p|\infty,\infty)}$ в $H_{+}^{(p+r|\infty,\infty)}$ при любом P. Отсюда, в свою очередь, вытекает непрерывность оператора (42).

Переходя к конечной полосе, мы получим аналогичное утверждение для пространств (IV.2.36)

Следствие. Пусть $a(x;\ \tau,\ \eta)\in S_{(0)}^{\{-r\}+}$. *Тогда* $\forall p\in\mathbb{Z}$, $\forall l\in\mathbb{R}$ *и* $\forall b>0$ *непрерывен оператор*

$$a\,(x;\ D)\colon\ H_{(l)}^{(p|\infty,\infty)}\,[0,\ b)\to H_{(l)}^{(p+r|\infty,\infty)}\,[0,\ b). \tag{43}$$

Переходя к индуктивному или проективному пределу, докажем непрерывность оператора

$$a(x;\ D)\colon\ \Phi^{\{p\}}\,[0,\ b)\to\Phi^{\{p+r\}}\,[0,\ b),\ \Phi=\mathscr{S},\ \mathscr{O}. \tag{44}$$

Теорема 1. *Пусть символ* $a(x;\ \tau,\ \eta)\in S_{(0)}^{\{-r\}+}$ *удовлетворяет условиям теоремы 1 п. 2.5 для* $m(x)=\text{const}$. *Пусть, как и в теореме 1 п. 1.7, старший коэффициент* $a_0(x;\ \eta)$ *в разложении* (1.48) *символа* a *не зависит от* x *и допускает оценку* (1.55). *Тогда отображение* (43) $\forall b>0$, $\forall l\in\mathbb{R}$ *и* $\forall p\in\mathbb{Z}$ *будет изоморфизмом пространств.*

Доказательство проводится по плану теоремы 1 из п. 1.7. Поскольку непрерывность оператора (42) уже доказана, надо проверить инъективность и сюръективность этого оператора. Для этого заметим, что для п. д. о. $a(x;\ D)$, удовлетворяющего условиям теоремы, остается в силе изоморфизм (38):

$$a\,(x;\ D)\colon\ H_{(l)}^{(p,\infty)}\,[0,\ b)\to H_{(l)}^{(p+r,\infty)}\,[0,\ b). \tag{45}$$

Поскольку $H_{(l)}^{(p|\infty,\infty)}\,[0,\ b)\subset H_{(l)}^{(p,\infty)}\,[0,\ b)$, то из инъективности (45) следует инъективность (42), а из сюръективности (45) вытекает, что уравнение

$$a\,(x;\ D)\,u=f\in H_{(l)}^{(p+r|\infty,\infty)}\,[0,\ \infty)$$

заведомо имеет решение $u\in H_{(l)}^{(p,\infty)}\,[0,\ b)$. По плану теоремы 1 из п. 1.7 доказывается, что на самом деле $u\in H_{(l)}^{(p|\infty,\infty)}\,[0,\ b)$.

Как и в п. 1.7, из этой теоремы выводится

Следствие. *Если полиномиальный символ* $P(x;\ \tau,\ \eta)$ *удовлетворяет условиям теоремы 2 п. 2.5 и* $m=\deg_\tau P$, *то* $\forall p\in\mathbb{Z}$ *отображение*

$$P(x;\ D)\colon\ \Phi^{\{p\}}\,[0,\ b)\to\Phi^{\{p-m\}}\,[0,\ b),\quad \Phi=\mathscr{S},\ \mathscr{O}, \tag{46}$$

является изоморфизмами пространств.

По плану теоремы 2 из п. 1.7 доказывается

Теорема 2. *Пусть $P(x;\ \tau,\ \eta)$ — экспоненциально корректный полином постоянной силы с коэффициентами из $C^{(\infty)}_{(0)}$. Тогда у задачи* (1.63), (1.64) *для любых $f\in\Phi(\mathbb{R}^n_{(0,b)})$. $\Phi=\mathcal{S}, \mathcal{O}, H^{(\infty)}$, и начальных условий $\varphi_j\in\Phi(\mathbb{R}^{n-1})$ существует единственное решение $u\in\Phi(\mathbb{R}^n_{(0,b)})$.*

Из этой теоремы можно вывести (ср. замечание 1.7), что при достаточно большом s можно указать такие $s_0, s_1, \ldots, s_m$, что при $f\in H^{(s_0)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_{(0,b)})$, $\varphi_j\in H^{(s_j)}_{(l)}(\mathbb{R}^{n-1})$ существует единственное решение $u\in H^{(s)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_{(0,b)})$. Аналогичный результат можно установить в пространствах $C^{(s)}_{(l)}(\mathbb{R}^n_{(0,b)})$.

§ 3. Псевдодифференциальные уравнения в $\mathbb{R}^n_+$ (случай пространств $H^{(\pm\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}$ и связанных с ними шкал)

Результаты § 1, 2 распространяются на пространства функций и распределений экспоненциального убывания и роста, изученные в гл. III. Следует отметить, что теория п. д. о. в этих пространствах является прямым следствием теории § 2. Действительно, если символ $a(x;\ \zeta)$ и преобразование Фурье $\tilde\varphi(\zeta)$ голоморфны в трубчатой области, содержащей точки $\mathbb{R}^n+i\omega$, то, как мы уже неоднократно отмечали (ср. § I.5),

$$a(x;\ D)\varphi=\exp(-\langle\omega,\ x\rangle)a(x;\ D+i\omega)(\exp(\langle\omega,\ x\rangle)\varphi).$$

Из результатов гл. III следует, что $H_{\langle\gamma,\nu\rangle+}$ состоит из тех и только тех элементов пересечения $\bigcap\limits_{\rho<\gamma} H_{\langle\rho,\nu\rangle}$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{\langle\gamma,\nu\rangle+}=\sup_{\rho<\gamma}\|\varphi\|_{\langle\rho,\nu\rangle}.$$

Таким образом, прежде чем строить шкалы подпространств $\Phi_{\langle\gamma,\nu\rangle+}$ (для которых $H^{(\pm\infty)}_{\langle\gamma,\nu\rangle+}$ являются предельными пространствами) и исчисление п. д. о. в них, надо изучить исчисление п. д. о. в исходных пространствах $\Phi_{\langle\gamma,\nu\rangle}$. При $\gamma=0$ пространства $\Phi_{\langle 0,\nu\rangle}$ состоят из функций (распределений), убывающих (растущих) как $\exp(\nu|y|)$, $\nu\in\mathbb{R}$ при $|y|\to\infty$. При построении теории таких пространств следует трубчатую область T_ν с основанием в $\mathbb{R}^n$ заменить на $T_{0,\nu}$ — трубчатое множество с основанием в $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$T_{0,\nu}=\{\zeta\in\mathbb{C}^n,\ \operatorname{Im}\zeta_1=0,\ |\operatorname{Im}\zeta_j|<\nu,\ j=2,\ \ldots,\ n\},\quad \nu>0. \tag{1}$$

Естественным образом определяются классы символов $\mathcal{B}_{\langle 0,\nu\rangle}$, $S^{\mu}_{\langle 0,\nu\rangle}$ пространства $H^{\mu}_{\langle 0,\nu\rangle}$. $\mu\in\mathcal{B}_{\langle 0,\nu\rangle}$, и соответствующие исчисления символов и п. д. о. Переходя от трубчатого множества (1) к его сдвигу

$$T_{\rho,\nu}=\{\zeta\in\mathbb{C}^n,\ \operatorname{Im}\zeta_1=\rho,\ |\operatorname{Im}\zeta_j|<\nu,\ j=2,\ \ldots,\ n\},\quad \rho\in\mathbb{R},\ \nu>0,$$

мы естественным образом определим классы $\mathscr{B}_{\langle\rho,\nu\rangle}$, $S^{\mu}_{\langle\rho,\nu\rangle}$ и пространства $H^{\mu}_{\langle\rho,\nu\rangle} = \exp(\rho t) H^{\mu}_{\langle 0,\nu\rangle}$. В силу этого обстоятельства исчисление п. д. о., развитое для пространств $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{S}', H^{(\pm\infty)}$, автоматически переносится на пространства $\Phi_{[\omega]} = \exp(-\langle\omega, x\rangle)\Phi$. Поскольку пространства $\Phi_{\langle\nu\rangle}$ (и шкалы в них) конструируются из пространств типа $\Phi_{[\omega]}$ с помощью операций объединения и пересечения, то мы без труда получаем теорию п. д. о. в пространствах типа $\Phi_{\langle\nu\rangle}$. Мы не будем систематически формулировать (как в предыдущих параграфах) все результаты, а ограничимся беглым наброском теории.

Пусть, как и в гл. III, $T_\nu (\nu > 0)$ — трубчатая область:

$$T_\nu = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Re}\zeta \in \mathbb{R}^n, |\operatorname{Im}\zeta_j| < \nu, j = 1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathscr{B}_{\langle\nu\rangle}$, $\nu > 0$,— пространство функций $\mu(\zeta)$, обладающих следующим свойством: $\forall\mu \in \mathscr{B}_{\langle\nu\rangle}$ $\exists\varepsilon(\mu) > 0$, так что функция $\mu(\zeta)$ голоморфна в трубчатой области $T_{\nu+\varepsilon(\mu)}$ и найдутся такие константы N_μ и $K_\mu < 0$, что

$$|\mu(\zeta')\mu^{-1}(\zeta'')| < K_\alpha(\mu)(1 + |\zeta' - \zeta''|)^{N_\mu}, \quad \zeta', \zeta'' \in \overline{T_{\nu+\varepsilon(\mu)}}. \tag{3}$$

С помощью интегральной формулы Коши легко выводится, что если $\mu \in \mathscr{B}_{\langle\nu\rangle}$, то найдутся такие константы $K_\alpha(\mu)$, что

$$|\mu^{(\alpha)}(\zeta)\mu^{-1}(\zeta)| < K_\alpha(\mu), \quad \zeta \in \overline{T_\nu}, \tag{4}$$

т. е. $\mathscr{B}_{\langle\nu\rangle} \subset \mathscr{B}_0$.

С каждым $\mu \in \mathscr{B}_{\langle\nu\rangle}$ свяжем класс символов $a(x; \zeta)$, обладающих следующим свойством: $\forall a \in S^{\mu}_{\langle\nu\rangle}$ $\exists\varepsilon(a) > 0$, так что функция $a(x; \zeta)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n \times \overline{T_{\nu+\varepsilon(a)}}$, голоморфна по ζ при $\zeta \in T_{\nu+\varepsilon(a)}$, причем в этой трубчатой области справедливы оценки

$$|a_{(\beta)}(x; \zeta)| < K_\beta(a)|\mu(\zeta)|, \quad \zeta \in \overline{T_{\nu+\varepsilon(a)}}. \tag{5}$$

С помощью теоремы Коши отсюда выводится, что найдутся такие константы $A_{\alpha\beta}(a)$, что

$$\left|a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x; \zeta)\right| < A_{\alpha\beta}(a)|\mu(\zeta)|, \quad \zeta \in \overline{T_\nu}. \tag{6}$$

Таким образом, если $\mu(\zeta) \in \mathscr{B}_{\langle\nu\rangle}$ и $a(x; \zeta) \in S^{\mu}_{\langle\nu\rangle}$, то семейство символов $a_\omega(x; \xi) = a(x; \xi + i\omega)$, $|\omega_j| \leqslant \nu$, $j = 1, \ldots, n$, является ограниченным множеством в $S^{\mu(\xi)}_{m(x)}$, где $m(x) \equiv 1$.

Обозначим через $\mathscr{D}^{\mu}_{\langle\nu\rangle}$ совокупность таких символов $a(x; \zeta) \in S^{\mu}_{\langle\nu\rangle}$, которые имеют компактный носитель по x и убывают вместе с производными быстрее любой степени $|\operatorname{Re}\zeta|$. Справедлив аналог леммы 2 из п. 2.1, в котором $D^{\mu}_{\langle\nu\rangle}$ играет роль $\mathscr{D}$. Отметим способ аппроксимации

$$a_\varepsilon(x; \zeta) = \chi(\varepsilon x)\exp\left(-\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\zeta_j^2\right)a(x; \zeta).$$

Поскольку класс $S_{\langle\nu\rangle}^{-\infty}$ принадлежит $S_{-\infty}^{-\infty}$, то на этом классе определены операции $\circ$ и $\#$. Повторением доказательства предложения 1 из п. 2.1 устанавливается, что равенство (2.6″) определяет непрерывное отображение $S_{\langle\nu\rangle}^{\mu_1}\times S_{\langle\nu\rangle}^{\mu_2}\to S_{\langle\nu\rangle}^{\mu_1\mu_2}((a, b)\mapsto a\circ b)$. При этом если $a_\varepsilon\to a$, $b_\varepsilon\to b(\varepsilon\to 0)$ в смысле леммы, то и $a_\varepsilon\circ b_\varepsilon\to a\circ b$. Аналогично, равенство (2.7″) определяет непрерывное отображение $S_{\langle\nu\rangle}^{\mu}\to S_{\langle\nu\rangle}^{\mu}(a\mapsto a^{\#})$. В конце гл. III мы сформулировали теорему о разрешимости экспоненциально корректных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в шкале пространств, построенной над «нулевым» пространством $H_{\langle\gamma,\nu\rangle+}$. Это пространство состоит из функций, равным 0 при $t<0$ и имеющих конечную норму $\|\varphi\|_{\langle\gamma,\nu\rangle}=\|\exp(\gamma t+\nu|y|)\varphi\|$.

В гл. III было корректно определено действие п. д. о. с постоянными голоморфными символами на пространствах $H_{\langle\pm\nu\rangle}^{(\infty)}$, $\nu>0$. Эти определения автоматически переносятся на п. д. о. с символами из $S_{\langle\nu\rangle}^{(-\infty)}$. По сопряженности эти п. д. о. распространяются на $H_{\langle\pm\nu\rangle}^{(-\infty)}$. В частности, если $a(x, \zeta)\in S_{\langle\nu\rangle}^{\mu}$, $\mu=\mathrm{const}$, $\nu>0$, то оператор $a(x; D)$ переводит в себя $H_{\langle\pm\nu\rangle}$, а его норма оценивается через константы $A_{\alpha\beta}$ из (6).

Естественным образом определяются пространства $H_{\langle\pm\nu\rangle}^{\mu}$ с нормой $\|f\|_{\langle\pm\nu\rangle}^{\mu}=\|\mu(D)f\|_{\langle\pm\nu\rangle}$. Тогда для $a(x;\zeta)\in S_{\langle\nu\rangle}^{\mu}$ непрерывен оператор

$$a(x; D)\colon\ H_{\langle\pm\nu\rangle}^{\mu\lambda}\to H_{\langle\pm\nu\rangle}^{\lambda}. \tag{7}$$

На операторы типа (7) автоматически переносится предложение 2.4, что позволяет установить аналог теоремы 2.4: если выполнены условия

(I) $|a(x;\zeta)|>\delta|\mu(\zeta)|$, $\zeta\in\overline{T}_\nu$,

(II) $\left|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\zeta)\right|<A_\beta^\alpha|\mu(\zeta)|$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\zeta\in\overline{T}_\nu$,

и константы A_β^α, $|\alpha|\geqslant 1$, достаточно малы, то отображение (7) является изоморфизмом пространств.

Рассмотрим трубчатую область

$$T_{\rho,\nu}^{+}=\{\zeta\in\mathbb{C}^n,\ \mathrm{Im}\,\zeta_1<\rho,\ |\mathrm{Im}\,\zeta_j|<\nu,\ j=2,\ \ldots,\ n\},$$
$$\rho\in\mathbb{R},\quad \nu>0. \tag{8}$$

Как и в п. 2.5, от классов $\mathscr{B}_{\langle\nu\rangle}$, $S_{\langle\nu\rangle}^{(-\infty)}$ перейдем к $\mathscr{B}_{\langle\nu\rangle}^{+}$, $S_{\langle\nu\rangle}^{(-\infty)+}$ символов, голоморфных в (8) и удовлетворяющих в ней оценкам типа (4), (5). Из (5) выводится, что

$$\left|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\zeta)\right|<\varepsilon_\beta^\alpha(a,\gamma)\,|\mu(\zeta)|,\quad \zeta\in\overline{T_{\gamma,\nu}^{+}}. \tag{9}$$

Подкласс $\mathring{S}_{\langle\nu\rangle}^{\mu+}$ состоит из таких символов $a(x;\zeta)$, для которых $\varepsilon_\beta^\alpha(a,\gamma)\to 0$, $\gamma\to-\infty$ при $|\alpha|\geqslant 1$. Символу $a(x;\zeta)\in S_{\langle\nu\rangle}^{\mu+}$

сопоставляется непрерывный оператор

$$a(x; D)\colon \left(H^{\mu\lambda}_{\langle\gamma,\pm\nu\rangle}\right)_{+} \to \left(H^{\lambda}_{\langle\gamma,\pm\nu\rangle}\right)_{+}. \qquad (10)$$

Доказывается, что если условия (I), (II) выполняются для $\zeta \in \overline{T^{+}_{\rho,\nu}}$ и $a(x;\zeta) \in \overset{\circ}{S}{}^{\mu+}_{\langle\nu\rangle}$, то отображение (10) является изоморфизмом пространств, отсюда выводится

Теорема 1. *Пусть символ $P(x; \zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 п. 2.5. Тогда $\forall\nu > 0$ и $\forall\lambda \in \mathscr{B}^{+}_{\langle\nu\rangle}$ можно указать такое $\gamma(\nu, \lambda)$, что при $\gamma \leqslant \gamma(\nu, \lambda)$, $a(x; \zeta) = P(x; \zeta)$ и $\mu(\zeta) = P(x^0; \zeta)$ $\left(\forall x^0 \in \mathbb{R}^n\right)$ отображение (10) будет изоморфизмом.*

Как и в п. 1.5, от пространств $H^{\mu}_{\langle\rho,\nu\rangle+}$ легко перейти к пространствам $H^{\mu}_{\langle\nu\rangle}[c_1, c_2)$ и изучить псевдодифференциальные уравнения в конечной полосе $0 \leqslant t \leqslant T$. В частности, из теоремы 1 по схеме п. 1.5 выводится

Теорема 2. *Если для символа $P(x; \zeta)$ выполнены условия теоремы 2, то $\forall\nu > 0$, $\forall\lambda \in \mathscr{B}^{+}_{\langle\nu\rangle}$ и $\forall c_1 < c_2$ отображение*

$$P(x; D)\colon H^{P_\lambda}_{\langle\pm\nu\rangle}[c_1, c_2) \to H^{\lambda}_{\langle\pm\nu\rangle}[c_1, c_2) \quad (P(\zeta) = P(x^0; \zeta))$$

является изоморфизмом.

Переходя к проективному или индуктивному пределу при $\lambda \in \mathscr{B}^{+}_{\langle\nu\rangle}$, получим

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 $\forall\nu \in \mathbb{R}_{+}$ и $\forall c_1 < c_2$ имеют место изоморфизмы*

$$P(x; D)\colon H^{(\pm\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}[c_1, c_2) \to H^{(\pm\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}[c_1, c_2).$$

Переходя к индуктивным или проективным пределам при $\nu \in \mathbb{R}_{+}$, получим

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 $\forall c_1 < c_2$ и $\Phi = \mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ имеют место изоморфизмы*

$$P(x; D)\colon \Phi[c_1, c_2) \to \Phi[c_1, c_2).$$

Замечание. В § 1, 2 мы ввели символы с условием трансмиссии и для п. д. о. с этими символами из результатов о разрешимости задачи Коши в конечной полосе с нулевыми начальными данными получили утверждение о разрешимости неоднородной задачи Коши (1.63), (1.64) начальными данными из $H^{(\infty)}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, $H^{(\infty)}_{(l)}$ и т. д. Аналогичную теорию можно построить применительно к пространствам из этого параграфа. В частности, для случая экспоненциально корректных дифференциальных операторов постоянной силы можно доказать разрешимость задачи Коши (163), (164) с начальными данными из $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $H^{(\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}$, $C^{(\infty)}_{\langle\pm\nu\rangle}$. Отсюда можно получить результаты о разрешимости задачи Коши в пространствах функций конечной гладкости и экспоненциального убывания (роста). Детали мы оставляем читателю.

§ 4. Экспоненциально корректные дифференциальные операторы с переменными коэффициентами

Конкретизируем полученные в предыдущих параграфах результаты о разрешимости задачи Коши для сильно корректных дифференциальных операторов постоянной силы применительно к специальным классам таких операторов, введенным в § III.4. Собственно нуждается в обсуждении лишь условие постоянства силы. Для определенности мы будем ориентироваться на теорему 2 из п. 2.5. Будем, не оговаривая этого, предполагать, что коэффициенты оператора принадлежат $C_{(0)}^{(\infty)}$.

4.1. $2b$-параболические операторы. Пусть символ $P(x;\ \tau,\ \eta)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ является $2b$-параболическим (см. гл. II, п. 4.10), его степень $k = \deg_\tau P$ не зависит от x и, более того, выполняется условие равномерной $2b$-параболичности. Это означает, что для корней $\widetilde{\lambda}_j(x;\ \eta)$ старшей $(2b,\ 1)$-квазиоднородной части $P(x;\ \tau,\ \eta)$ для некоторого $c > 0$ имеет место оценка

$$\operatorname{Im} \widetilde{\lambda}_j(x;\ \eta) \geqslant c\,|\eta|^{2b}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{1}$$

подчеркнем, что c не зависит от x (ср. (II.4.69)). Это равносильно оценке для корней самого символа

$$\operatorname{Im} \lambda_j(x;\ \eta) > c_1 |\eta|^{2b} - c_2, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1'}$$

где константы $c_1 > 0$, c_2 не зависят от x. Это, в свою очередь, эквивалентно оценке (II.4.71) с константами, не зависящими от x: для некоторых $c_1 > 0$, γ_0

$$|P(x;\ \tau,\ \eta)| \geqslant c_1(|\tau| + |\eta|^{2b})^k, \quad \operatorname{Im}\tau < \gamma_0, \quad (\operatorname{Re}\tau,\ \eta) \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Из условия на коэффициенты (принадлежность $C_{(0)}^{(\infty)}$) следует существование аналогичной верхней оценки. Полученная адекватная оценка обеспечивает, очевидно, постоянство силы символа, и мы можем применить теорему 2 из п. 2.5.

С $2b$-параболическими символами естественно связать подшкалу в шкале H_m^μ. Обозначим через $H_{(l)}^{(s)2b}$ пространства H_m^μ, отвечающие весам $m(x) = (1 + |x|^2)^{l/2}$ и

$$\mu_{s,2b}(\tau,\ \eta) = (\tau - i(1 + |\eta|^2)^b)^s. \tag{3}$$

Ясно, что $\mu(\tau,\ \eta) = P(x^0;\ \tau,\ \eta)$ и $\mu_{k,2b}$ задают эквивалентные нормы. В результате при $\gamma < \gamma(s,\ l)$ имеем изоморфизм

$$P(x;\ D)\colon\ H_{(l)[\gamma]+}^{(s)2b} \to H_{(l)[\gamma]+}^{(s-k)2b}. \tag{4}$$

Соответственно при всех s имеется изоморфизм

$$P(x;\ D)\colon\ H_{(l)}^{(s)2b}[c_1,\ c_2) \to H_{(l)}^{(s-k)2b}[c_1,\ c_2), \quad c_1 < c_2 < \infty. \tag{4'}$$

4.2. N-параболические дифференциальные операторы. Пусть символ $P(x;\ \tau,\ \eta)$ при каждом x является N-параболическим (п. III.4.3), его многоугольник Ньютона $N_{P(x)}$ не зависит от x (будем обозначать его через N_P) и константы в (III.4.9) не зависят от x. Перепишем оценку в виде

$$|P(x;\ \tau,\ \eta)| \geqslant c_1 \sum_{(\alpha,\gamma)\in N_P} |\tau|^\alpha |\eta|^\gamma, \quad \operatorname{Im}\tau \leqslant \gamma_0, \tag{5}$$

где $c_1 > 0$, γ_0 не зависят от x. Ввиду ограниченности коэффициентов имеет место аналогичная верхняя оценка, и из полученной адекватной оценки следует, что для $P(x;\ \tau,\ \eta)$ выполняется условие постоянства силы и применима теорема 2 из п. 2.5.

Для того чтобы конкретизировать оценки в случае N-параболических операторов, введем подкласс символов в $\mathscr{B}_0^+$, получающихся из символов (3) перемножениями. Пусть $B=(b_1,\ \ldots,\ b_p)$; $b_1 < \ldots < b_p$ — натуральные, $S=(s_1,\ \ldots,\ s_p)$. Положим

$$\mu_{S,2B} = \prod_{j=1}^{p} \mu_{s_j,2b_j}(\tau,\ \eta), \tag{6}$$

и через $H_{(l)}^{(S)2B}$ будем обозначать пространство H_m^μ, отвечающее весам $m(x)=(1+|x|^2)^{l/2}$, $\mu(\tau,\ \eta)=\mu_{s,2B}(\tau,\ \eta)$.

Пусть $s_1,\ \ldots,\ s_p$ — натуральные числа. Тогда $\mu_{s,2B}$ — квазиполином (см. п. III.4.3), и ему будет отвечать многоугольник Ньютона $N(S,\ 2B)$, ненулевые вершины которого Γ_j, $j=0,\ \ldots,\ p$, имеют координаты соответственно $\left(\alpha = \sum_{k=j+1}^{p} s_k,\ \gamma = \sum_{k=1}^{j} 2s_kb_k\right)$. В частности, для многоугольника N_P можно подобрать $(S_P,\ 2B_P)$ так, что $N(S_P,\ 2B_P)$ будет совпадать с N_P.

В этом случае символы $\mu(\tau,\ \eta)=P(x^0;\ \tau,\ \eta)$ и $\mu_{S_P,2B_P}(\tau;\ \eta)$, принадлежащие $\mathscr{B}_0^+$, будут задавать эквивалентные нормы. Эквивалентную норму будет задавать и символ $\sum_{(\alpha,\gamma)\in N_P} |\tau|^\alpha|\eta|^\gamma$, но он не будет принадлежать $\mathscr{B}_0^+$, поскольку он не будет толоморфен по τ.

В силу теоремы 2 из п. 2.5 при $\gamma < \gamma(S,\ l)$ имеется изоморфизм

$$P(x;\ D)\colon \left(H_{(l)[\gamma]}^{(S+S_P)2B_P}\right)_+ \to \left(H_{(l)[\gamma]}^{(S)2B_P}\right)_+.$$

При желании можно расширить шкалу, не ограничиваясь $B=B_P$. Для этого разрешим s_j равняться нулю. Поэтому формально можно расширять в (6) B, полагая $s_j=0$ для дополнительных b_j. Для B и B_P обозначим через $\{B,\ B_P\}$ вектор наименьшей длины, содержащий B и B_P, через $\tilde{S}$, $\tilde{S}_P$ — расширения S, S_P, отвечающие переходу от B, B_P к $\{B,\ B_P\}$. Тогда при $\gamma < \gamma(S,\ B,\ l)$ имеется изоморфизм

$$P(x;\ D)\colon H_{(l)}^{(\tilde{S}+\tilde{S}_P)\{B,B_P\}} \to H_{(l)}^{(S)B}.$$

Приведенные примеры показывают, что постоянство силы является достаточно естественным и необременительным для гипоэллиптических экспоненциально корректных дифференциальных операторов. При отсутствии же гипоэллиптичности оно становится обременительным, как показывает уже пример гиперболических операторов. Если $P(x;\ \tau,\ \eta)$ — строго гиперболический символ, то постоянство силы можно гарантировать лишь в случае постоянных коэффициентов в старшей части. Аналогично для плюрипараболических символов (п. III.4.4) постоянство силы имеет место, если коэффициенты в старшей гиперболической части постоянны и константы в оценке (III.4.13) на корни не зависят от x. В результате параметрикс Леви не позволяет в полной мере перейти к переменным коэффициентам для этих операторов. Это, однако, можно сделать с помощью методов, основанных на энергетических оценках (Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин [7, 11]).

В заключение отметим, что экспоненциально корректные операторы замечательны тем, что для них можно решать задачу Коши в функциях (распределениях) существенно более быстрого роста (убывания). Соответствующие пространства определяются выпуклой функцией χ_P, отвечающей экспоненциально корректным полиномам (п. III.4.1) (см. С. Г. Гиндикин [6, 7]).

ГЛАВА VI

СВЕРТЫВАТЕЛИ ВИНЕРА — ХОПФА И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СВЕРТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Одним из прототипов теории, изложенной в предыдущих главах, было интегральное уравнение на полуоси с ядром, зависящим от разности аргументов, т. е. уравнение вида

$$u(t)+\int_0^\infty a(t-\theta)\,u(\theta)\,d\theta=f(t),\quad t>0. \qquad (1)$$

Здесь функция $a(s)$ **сосредоточена при** $s\geqslant 0$, так что $a(t-\theta)=0$ при $\theta>t$, и фактически уравнение (1) является уравнением Вольтерра:

$$u(t)+\int_0^t a(t-\theta)\,u(\theta)\,d\theta=f(t),\quad t>0.$$

Прототипом результатов настоящей главы является теория уравнения (1) в том случае, когда функция $a(s)$ сосредоточена **на всей оси**. Метод решения таких уравнений в начале тридцатых годов был предложен Н. Винером и Е. Хопфом (см. Н. Винер, Р. Пэли [1, гл. IV] и имеющиеся там ссылки), соответствующие интегральные уравнения теперь носят их имя. Исчерпывающая теория уравнений (1) для случая $a(t)\in L_1(\mathbb{R})$ была построена М. Г. Крейном [1]. Чтобы сформулировать эти результаты, положим

$$A(t)=\delta(t)+a(t). \qquad (2)$$

Если обозначить через $u_+(t)$ функцию на всей оси, получающуюся из $u(t)$ продолжением нулем при $t<0$, то уравнение (1) можно будет переписать в виде

$$p_\oplus(A*u_+)=f, \qquad (3)$$

где $p_\oplus$ — оператор сужения на полупрямую $t\geqslant 0$.

Совокупность функций (2) при $a(t) \in L_1$ замкнута относительно свертки — это *алгебра Винера* W. Основной результат М. Г. Крейна [1] состоит в том, что оператор, отвечающий левой части (3) (и действующий, скажем, в $L_p(\mathbb{R}_+)$), является *фредгольмовым* (т. е. имеет замкнутый образ и конечномерные ядро и коядро) тогда и только тогда, когда $A(t)$ допускает факторизацию в алгебре W: $A(t)$ представляется в виде

$$A(t) = A_+(t) * A_-(t), \tag{4}$$

где $A_\pm(t)$ принадлежит подалгебре $W_\pm$, состоящей из тех элементов W, которые равны 0 при $\mp t > 0$, и $A_\pm$ — обратимый элемент подалгебры $W_\pm$ (т. е. найдутся такие $B_\pm \in W_\pm$, что $A_\pm * B_\pm = \delta(t)$).

В этой главе мы, отправляясь от уравнения (3), пытаемся осмыслить метод Винера — Хопфа в рамках теории распределений. Для этого, ограничиваясь функциями $u \in C^\infty$, берем в качестве свертывателей A распределения, которые принадлежат C^∞ вне начала, а в нуле могут иметь особенность любого конечного порядка. При естественных уточнениях этих понятий мы получаем аналог теории М. Г. Крейна об эквивалентности фредгольмовости оператора из левой части (3) и факторизации свертывателя A.

Изложение материала в этой главе организовано следующим образом.

В § 1 для случая пространств $\Phi = \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\mathscr{O}(\mathbb{R})$ определяются и описываются пространства $\mathfrak{C}(\Phi_+, \Phi_\oplus)$ *свертывателей Винера — Хопфа*, т. е. таких распределений A, что для $u_+ \in \Phi_+$ левая часть (3) определена и принадлежит $\Phi_\oplus$. Среди свертывателей Винера — Хопфа выделяется более узкий класс $\mathfrak{C}(\Phi_{[+]}, \Phi_\oplus)$ — *свертыватели с условием трансмиссии*. В случае таких A левая часть (3) имеет смысл при $u_+ \in \Phi_{[+]} = \theta_+(t)\Phi$ (и даже при $u_+ \in \Phi_{[+]}^{\{\infty-\}}$) и также принадлежит $\Phi_\oplus$.

В § 2 изучаются пространства свертывателей Винера — Хопфа с условием трансмиссии. Специально исследуются подпространства распределений $\mathscr{S}^{(-\infty)}$, элементы которых являются свертывателями Винера — Хопфа с условием трансмиссии как на $\mathscr{S}$, так и на $\mathscr{O}$. Элементы $A \in \mathscr{S}^{(-\infty)}$ принадлежат $\mathscr{O}'$ и имеют особенность только в начале, причем $p_\oplus A \in \mathscr{S}_\oplus$ и $p_\ominus A \in \mathscr{S}_\ominus$. Пространство $\mathscr{S}^{(-\infty)}$ является алгеброй относительно свертки, аналогичной алгебре Винера W. Доказывается критерий обратимости в $\mathscr{S}^{(-\infty)}$ (аналогичный критерию Винера для W). На эту алгебру переносится теорема М. Г.Крейна о факторизации обратимых элементов.

В § 3 приведены упомянутые выше результаты о фредгольмовости оператора (3). Здесь же рассмотрены граничные и кограничные задачи для операторов (3), сформулированы условия Шапиро — Лопатинского для этих задач и указаны необходимые и достаточные условия разрешимости таких задач.

В § 4 результаты § 3 переносятся на случай уравнений вида (3) в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$.

Систематическому исследованию метода Винера — Хопфа в пространствах гладких и обобщенных функций посвящены статьи авторов (см. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин [8, 9, 10, 12]). Отметим некоторые вопросы, изложенные в этих работах и не вошедшие в настоящую главу.

В § 3, 4 мы изучаем краевые задачи для операторов Винера — Хопфа, удовлетворяющих условию трансмиссии. Теория таких задач по духу близка к теории граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений и эллиптических п. д. о. (см. Буте де Монвель [2], М. И. Вишик, Г. И. Эскин [1]). Однако имеется и другой вариант теории эллиптических п. д. о., не использующий условие трансмиссии (см., например, Г. И. Эскин [1]), в этой теории число граничных (кограничных) условий зависит от гладкости разыскиваемого нами решения, и результаты этой теории не переносятся на пространство бесконечно гладких функций. Аналогичную теорию можно строить и для операторов (3) с $A \in \mathcal{O}'$ (см. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин [8]), здесь очень полезным оказывается язык неограниченных операторов в шкалах пространств. На этом языке можно излагать теорию операторов Винера — Хопфа (3) и в случае распределений A, удовлетворяющих условию трансмиссии (см. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин [10], [12]).

§ 1. Свертыватели Винера — Хопфа

1.1. Операторы Винера — Хопфа и отвечающие им свертыватели. В предыдущих главах для пространств $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$, $H^{(\pm\infty)}_{(l)}$ мы изучали операторы свертки, т. е. такие непрерывные (регулярные) операторы, которые переводили в себя соответственно Φ, Φ_+, $\Phi_\oplus$ и коммутировали с некоторыми наборами сдвигов T_h, сохраняющих соответствующее пространство.

В этой главе мы будем иметь дело с непрерывными (регулярными) операторами, действующими из подпространства Φ_+ в фактор-пространство $\Phi_\oplus$:

$$A\colon \Phi_+ \to \Phi_\oplus. \tag{1}$$

Напомним, как действуют операторы сдвига на Φ_+ и $\Phi_\oplus$. Операторы сдвига T_h, $h \geqslant 0$, переводят в себя подпространства Φ_- и, следовательно, продолжаются до операторов на фактор-пространствах. Операторы сдвига T_h, $h \leqslant 0$, переводят в себя пространства Φ_+. При $h \geqslant 0$ операторы T_h на всем подпространстве Φ_+ не определены. Однако имеются такие функции (распределения) $\varphi \in \Phi_+$, для которых сдвиг $T_h\varphi$, $h \geqslant 0$, лежит в Φ_+.

Определение. Пусть $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'$, $H^{(\pm\infty)}_{(l)}$. Оператор (1) называется *оператором Винера — Хопфа*, если он непрерывен (регулярен в случае $\Phi = \mathcal{O}, \mathcal{O}'$) и перестановочен со сдвигами T_h, $h \geqslant 0$.

Изучим общий вид операторов Винера — Хопфа для случая пространств гладких функций $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}(\mathbb{R})$. Как и в п. II.4.2, определим индуктивный предел $\Phi_\infty = \bigcup\limits_h \Phi(-\infty, h]$. Очевидно, что $\mathcal{D} \subset \Phi_\infty$. Но тогда сопряженное пространство $(\Phi_\infty)'$ можно интерпретировать как совокупность таких распределений из $\mathcal{D}'$, которые продолжаются на функции из Φ, имеющие ограниченный справа носитель.

Предложение. *Пусть $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$. Тогда для всякого оператора Винера — Хопфа* (1) *можно указать такое распределение $f \in (\Phi_\infty)'$, что*

$$(A\varphi)(t) = p_\oplus (f * \varphi)(t) = p_\oplus (f, IT_t\varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi_+. \tag{2}$$

Доказательство очень близко к доказательству предложения 1 из п. II.4.2. Рассмотрим непрерывный функционал $a_t \in (\Phi_+)'$, определенный из равенства

$$(A\varphi)(t) = (a_t, \varphi), \quad \varphi \in \Phi_+, \quad t > 0,$$

и рассмотрим функционалы $f_t \in (\Phi(-\infty, t])'$, $t > 0$,

$$(f_t, IT_t\varphi) = (a_t, \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi_+, \quad t > 0.$$

Равенство (4) будет доказано, если мы установим, что функционалы f_t являются сужениями на $(\Phi(-\infty, t])'$ единого функционала $f \in (\Phi_\infty)'$. Последнее вытекает из перестановочности (1) и сдвигов.

Ввиду доказанного предложения для $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$, $H_{(l)}^{(\infty)}$ определим

$$\mathfrak{C}(\Phi_+, \Phi_\oplus) = \{f \in (\Phi_\infty)', \quad p_\oplus (f * \varphi) \in \Phi_\oplus \quad \forall \varphi \in \Phi_+\}. \tag{3}$$

Распределения f из пространства (3) будем называть *свертывателями Винера — Хопфа* на Φ.

Теорема. *Имеют место равенства*

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_\oplus) = \{f \in \mathcal{S}', \ p_\oplus f \in (\mathcal{O}')_\oplus\}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{C}(\mathcal{O}_+, \mathcal{O}_\oplus) = \{f \in \mathcal{S}', \ p_\ominus f \in (\mathcal{O}')_\ominus\}. \tag{5}$$

Поясним смысл равенств (4), (5). В случае (4) свертыватели Винера — Хопфа должны быстро убывать при $t \to +\infty$ — это необходимо для того, чтобы результат свертки быстро убывал при $t \to +\infty$. В случае (5) свертыватели Винера — Хопфа быстро убывают при $t \to -\infty$ — это необходимо для того, чтобы существовала свертка с функциями, растущими степенным образом при $t \to +\infty$.

Доказательство (4). Сначала проверим, что правое пространство (4) содержится в левом. В самом деле, если $p_\oplus f \in (\mathcal{O}')_\oplus$, то найдется такое $f_0 \in \mathcal{O}'$, что $p_\oplus(f - f_0) = 0$, т. е. $f - f_0 \in (\mathcal{S}')_-$. Таким образом, правое пространство (4) состоит из распределений вида

$$f = f_0 + f_-, \quad f_0 \in \mathcal{O}', \quad f_- \in (\mathcal{S}')_-. \tag{6}$$

Но тогда $f_0 \in \mathfrak{C}(\mathcal{S})$, $f_- \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}_\oplus)$, откуда $p_\oplus(f * \varphi) \in \mathcal{S}_\oplus$, коль скоро $\varphi \in \mathcal{S}_+$.

Теперь докажем, что левое пространство (4) содержится в правом. Для этого прежде всего заметим, что каждый элемент $f \in (\Phi_\infty)'$ представляется в виде

$$(\Phi_\infty)' \ni f = f_+ + f_-, \quad f_+ \in (\Phi_\infty)'_+, \quad f_- \in (\mathcal{S}')_-. \tag{6'}$$

В самом деле, поскольку $(\Phi_\infty)_- = \mathcal{S}_-$, то возникает отображение

$$p_\ominus\colon\ (\Phi_\infty)' \to (\mathcal{S}')_\ominus.$$

С другой стороны, ввиду предложения IV.1.1 отображение

$$p_\ominus\colon\ (\mathcal{S}')_- \to (\mathcal{S}')_\ominus$$

будет сюръективным, т. е. можно подобрать такое распределение $f_- \in (\mathcal{S}')_-$, что $p_\ominus(f - f_-) = 0$, откуда и следует разложение (6′). По доказанному $(\mathcal{S}')_- \subset \mathfrak{C}(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_\oplus)$, поэтому если $f \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_\oplus)$, то слагаемые $f_\pm$ в разложении (6′) принадлежат $\mathfrak{C}(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_\oplus)$. Если мы докажем, что на самом деле

$$f_+ \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}_+) = (\mathcal{O}')_+, \tag{7}$$

то тем самым будет доказано нужное нам включение.

Для распределения $f_+ \in (\Phi_\infty)'_+ = (\mathcal{D}')_+$ определена свертка

$$(f_+ * \varphi)(t) = (f_+, IT_t\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}_+,$$

причем функция $(f_+ * \varphi)(t)$ принадлежит C^∞ на всей оси и равна нулю при $t \leqslant 0$. Так как по условию $p_\oplus(f_+ * \varphi) \in \mathcal{S}_\oplus$, то на самом деле $f_+ * \varphi \in \mathcal{S}_+$. Таким образом, мы доказали, что $f_+ \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}_+)$, откуда и следует (7).

Доказательство (5) проводится по той же самой схеме. Правое пространство состоит из распределений вида

$$f = f_0 + f_+, \quad f_0 \in \mathcal{O}', \quad f_+ \in (\mathcal{S}')_+.$$

Но тогда $f_0 \in \mathfrak{C}(\mathcal{O})$, $f_+ \in \mathfrak{C}(\mathcal{O}_+)$, откуда $p_\oplus(f * \varphi) \in \mathcal{O}_\oplus$. Чтобы доказать, что левое пространство (5) содержится в правом, рассмотрим аналог (6)

$$(\mathcal{O}_\infty)' \ni f = f_+ + f_-, \quad f_+ \in (\mathcal{D}')_+, \quad f_- \in (\mathcal{O}')_-.$$

Тогда $f_- \in \mathfrak{C}(\mathcal{O}_\oplus) \subset \mathfrak{C}(\mathcal{O}_+, \mathcal{O}_\oplus)$, откуда $f_+ \in \mathfrak{C}(\mathcal{O}_+, \mathcal{O}_\oplus)$.

Как и выше, легко проверяется

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_\oplus) \cap \mathfrak{C}(\mathcal{O}_+, \mathcal{O}_\oplus) = \mathcal{O}'. \tag{8}$$

По сопряженности мы получим

$$\mathfrak{C}((\mathcal{S}')_+, (\mathcal{S}')_\oplus) \cap \mathfrak{C}((\mathcal{O}')_+, (\mathcal{O}')_\oplus) = \mathcal{O}'.$$

Замечания. 1) Если оператор (1) является оператором Винера — Хопфа, то и оператор BA, где B — оператор свертки на $\Phi_\oplus$, также будет оператором Винера — Хопфа. Согласно результатам § II.4, $B = p_\oplus \operatorname{con}_g$, где $g \in \mathfrak{C}(\Phi_\oplus) = (\mathcal{S}')_-$, $(\mathcal{O}')_-$ при $\Phi = \mathcal{S}$, $\mathcal{O}$. Из перестановочности проектора $p_\oplus$ и оператора con_g, $g \in (\mathcal{S}')_-$, следует, что (см. теорему)

$$BA = p_\oplus \operatorname{con}_g p_\oplus \operatorname{con}_f = p_\oplus \operatorname{con}_{g*f}. \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай этого равенства, когда $\widehat{g}(\sigma)$ — полином. Поскольку дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами переводят Φ_+ в себя, то получим

$$P(D)A = AP(D). \tag{10}$$

2) Отметим, что из (10) следует утверждение

$$g * f \in \mathfrak{C}(\Phi_+, \Phi_\oplus), \quad g \in \mathfrak{C}(\Phi_\oplus), \quad f \in \mathfrak{C}(\Phi_+, \Phi_\oplus), \quad \Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}.$$

1.2. Свертыватели Винера — Хопфа с условием трансмиссии. Операторы свертки с условием трансмиссии в случае прямой были изучены в п. IV.1.6. Это были такие операторы, которые переводили в себя пространство $\Phi_{[+]}^{\{-\infty\}}$, коммутировали с дифференциальными операторами, а сужения этих операторов на Φ_+ были операторами свертки на этих подпространствах.

По этой же схеме мы дадим аксиоматическое определение операторов Винера — Хопфа

$$A\colon \quad \Phi_{[+]} \to \Phi_\oplus \qquad (\Phi_{[+]} = \theta_+(t)\Phi) \tag{11}$$

с условием трансмиссии.

Определение. Пусть $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}$; оператор (11) называется *оператором Винера — Хопфа с условием трансмиссии*, если он непрерывен (регулярен в случае $\Phi = \mathcal{O}$) и выполнены следующие условия:

1) сужение A_0 оператора (11) на подпространство $\Phi_+ \subset \Phi_{[+]}$ будет оператором Винера — Хопфа;

2) оператор (11) коммутирует с дифференциальными операторами, т. е. если одновременно u_+ и $P(D)u_+$ принадлежат $\Phi_{[+]}$, то имеет место равенство (10).

Используя условие 2) и инвариантность $\Phi_\oplus$ относительно действия дифференциальных операторов, можно оператор (11) продолжить на замыкание $\Phi_{[+]}$ относительно действия дифференциальных операторов, т. е. на пространство $\Phi_{[+]}^{\{-\infty\}}$.

В самом деле, пусть $u_+ \in \Phi_{[+]}^{\{-\infty\}}$ и натуральное k столь велико, что $\delta_{-k}^{+}(D)u_+ \in \Phi_{[+]}$. Тогда положим

$$Au_+ = \delta_k^+(D)A\delta_{-k}^{+}(D)u_+. \tag{12}$$

Легко проверяется корректность этого определения, т. е. что правая часть (12) не зависит от выбора числа k и что канонические операторы $\delta_k^+(D)$ можно заменить семейством операторов

$P^k(D)$, где полином $P(\tau)$ отличен от нуля при $\operatorname{Im}\tau \leqslant 0$ (ср. п. I.3.2).

В силу сказанного под операторами Винера — Хопфа с условием трансмиссии естественно понимать непрерывные (регулярные) операторы

$$A\colon \Phi_{[+]}^{\{-\infty\}} \to \Phi_{\oplus}, \tag{13}$$

удовлетворяющие условию 1) определения и коммутирующие с дифференциальными операторами.

По плану предложения IV.1.6 доказывается

Предложение. *Пусть* $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}$. *Для каждого оператора Винера — Хопфа с условием трансмиссии* (13) *найдется такое распределение* $f \in \mathfrak{C}(\Phi_+, \Phi_\oplus)$ (*см.* (4), (5)), *что этот оператор представляется в виде* (3).

Доказанное предложение позволяет определить $\mathfrak{C}\left(\Phi_{[+]}^{\{-\infty\}}, \Phi_\oplus\right)$ как совокупность таких распределений $f \in \mathfrak{C}(\Phi_+, \Phi_\oplus)$, что оператор $p_\oplus \operatorname{con}_f$ переводит $\Phi_{[+]}^{\{-\infty\}}$ в $\Phi_\oplus$. Они называются *свертывателями Винера — Хопфа с условием трансмиссии*. Справедлива

Теорема. *Распределение* $f \in \mathfrak{C}(\Phi_+, \Phi_\oplus)$, $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}$, *принадлежит* $\mathfrak{C}\left(\Phi_{[+]}^{\{-\infty\}}, \Phi_\oplus\right)$ *тогда и только тогда, когда* $p_\ominus f \in \Phi_\ominus$.

Доказательство. Необходимость вытекает из включения $\delta(t) \in \Phi_{[+]}^{\{-\infty\}}$, $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}$.

Достаточность. С учетом (4), (5) утверждение теоремы можно переписать в виде равенств

$$\mathfrak{C}\left(\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}, \mathscr{S}_\oplus\right) = \{f \in \mathscr{S}', p_\ominus f \in \mathscr{S}_\ominus\}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{C}\left(\mathscr{O}_{[+]}^{\{-\infty\}}, \mathscr{O}_\oplus\right) = \{f \in \mathscr{S}', p_\ominus f \in \mathscr{O}'_\ominus, p_\ominus f \in \mathscr{O}_\oplus\}. \tag{15}$$

Распределение f из правого пространства (14) представляется в виде $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in \mathscr{S}$, $f_- \in (\mathscr{S}')_-$. Если $\varphi \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$, то $f_0 * \varphi \in \mathscr{S}$, поскольку $\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}} \subset \mathscr{O}' = \mathfrak{C}(\mathscr{S})$. Далее, распределение $\varphi \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ представляется в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_-$, $\varphi_0 \in \mathscr{S}$, $\varphi_- \in (\mathscr{O}')_-$, откуда $p_\oplus(f_- * \varphi) = p_\oplus(f_- * \varphi_0) \in \mathscr{S}_\oplus$, поскольку $(\mathscr{S}')_- = \mathfrak{C}(\mathscr{S}_+)$.

Распределение f из правого пространства (15) нетрудно представить в виде $f = f_0 + f_-$, $f_0 \in \mathscr{O}[-1, \infty)$, $f_- \in (\mathscr{O}')_-$. Аналогично, каждый элемент $\varphi \in \mathscr{O}_{[+]}^{\{-\infty\}}$ можно представить в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_-$, $\varphi_0 \in \mathscr{O}[-1, \infty)$, $\varphi_- \in (\mathscr{O}')_-$. Тогда

$$p_\oplus(f * \varphi) = p_\oplus(f_0 * \varphi_0) + p_\oplus(f_0 * \varphi_-) + p_\oplus(f_- * \varphi_0) \in \mathscr{O}_\oplus,$$

поскольку $f_0 * \varphi_0 \in \mathscr{O}[-2, \infty)$; $f_- * \varphi_0$, $f_0 * \varphi_- \in \mathscr{O}$.

Из равенств (14), (15) следует, что

$$\mathscr{U} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{C}\left(\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}, \mathscr{S}_\oplus\right) \cap \mathfrak{C}\left(\mathscr{O}_{[+]}^{\{-\infty\}}, \mathscr{O}_\oplus\right) = \{f \in \mathscr{O}', p_\ominus f \in \mathscr{S}_\oplus\}. \tag{16}$$

§ 2. Факторизация свертывателей Винера — Хопфа

В конце § 1 мы определили пространство

$$\mathscr{U} \overset{\mathrm{def}}{=} \{f \in \mathscr{O}', p_{\oplus} f \in \mathscr{S}_{\oplus}\}, \tag{1}$$

элементы которого являются свертывателями Винера — Хопфа с условием трансмиссии как на $\mathscr{S}$, так и на $\mathscr{O}$. При изучении $\mathscr{U}$ важную роль играет подпространство

$$\mathscr{S}^{\{-\infty\}} \overset{\mathrm{def}}{=} \{f \in \mathscr{O}', p_{\oplus} f \in \mathscr{S}_{\oplus}, p_{\ominus} f \in \mathscr{S}_{\ominus}\}, \tag{2}$$

которое (как уже отмечалось во введении) напоминает алгебру Винера $W = \{A = c\delta(t) + a(t),\ c \in \mathbb{R},\ a(t) \in L_1(\mathbb{R})\}$. Настоящий параграф посвящен описанию обратимых элементов алгебр (относительно свертки) $\mathscr{U}$, $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ и доказательству того, что каждый обратимый элемент $A \in \mathscr{U}$, $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ допускает факторизацию

$$A = A_+ * A_-, \tag{3}$$

где $A_\pm$ — обратимый элемент подалгебры $\mathscr{U}_\pm$ (соответственно $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}_{[\pm]}$). При доказательстве этой теоремы используется ряд соображений из работы М. Г. Крейна [1].

2.1. Пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$. Согласно данному выше определению (1) распределение A принадлежит $\mathscr{U}$ тогда и только тогда, когда A представляется в виде

$$\mathscr{U} \ni A = a + A_-, \quad a \in \mathscr{S}, \quad A_- \in (\mathscr{O}')_-. \tag{1'}$$

$\mathscr{U}$ является линейным пространством, замкнутым относительно свертки. В самом деле, если $B \in \mathscr{U}$, то $B = b + B_-$, $B_- \in (\mathscr{O}')_-$, $b \in \mathscr{S}$, а тогда $A * B = A_- * B_- + (A_- * b + B_- * a + a * b) \in \mathscr{U}$, поскольку $A_- * B_- \in (\mathscr{O}')_-$, а последняя скобка принадлежит $\mathscr{S}$.

Пространство фурье-образов распределений из $\mathscr{U}$ будем обозначать через $\widehat{\mathscr{U}}$. Согласно (1′) оно состоит из таких $\hat{A} \in \mathscr{M}$, которые представляются в виде

$$\widehat{\mathscr{U}} \ni \widehat{A} = \widehat{a} + \widehat{A}_-, \quad \widehat{a} \in \mathscr{S}, \quad \widehat{A}_- \in \mathscr{M}^- \tag{$\widehat{1}$}$$

(напоминаем, что $\mathscr{M}^-$ состоит из функций $\psi(\tau)$, голоморфных при $\operatorname{Im}\tau > 0$, бесконечно дифференцируемых при $\operatorname{Im}\tau \geqslant 0$, причем каждая производная $\partial^k\psi(\tau)$ растет не быстрее некоторой степени $|\tau|$ при $|\tau| \to \infty$). Ясно, что $\widehat{\mathscr{U}}$ является алгеброй относительно умножения.

Наряду с пространством (1) можно рассмотреть пространство

$$I\mathscr{U} = \{A \in \mathscr{O}',\ p_{\ominus} A \in \mathscr{S}_{\ominus}\}. \tag{4}$$

При этом пространство (2) можно трактовать как подпространство пространств (1), (4), инвариантное относительно отражений:

$$\mathscr{S}^{\{-\infty\}} = \mathscr{U} \cap I\mathscr{U}. \tag{2'}$$

Из определения (2) (или из (1′) и (2′)) следует, что для каждого $A \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ можно подобрать такие функции $a_\pm \in \mathscr{S}$, что

A совпадает с $a_\pm$ при $\pm t > 0$. Но тогда распределение $A - \theta_+ a_+ - \theta_- a_-$ сосредоточено в нуле, т. е. является распределением вида $P(D)\delta(t)$, где $P(\tau)$ — полином. Таким образом, $A \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}$ тогда и только тогда, когда

$$A = \theta_+ a_+ + \theta_- a_- + P(D)\delta(t), \quad a_\pm \in \mathcal{S}, \quad P(\sigma) \text{ — полином.} \tag{5}$$

Если носитель A принадлежит полупрямой $t \geqslant 0$, то $a_- \equiv 0$ и $A \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$, т. е. $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}$ является подпространством $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}$.

Поскольку пространства $\mathcal{U}$, $I\mathcal{U}$ замкнуты относительно операции свертки, этим же свойством обладает и пространство (2′), т. е. $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}$ — подалгебра алгебр $\mathcal{U}$, $I\mathcal{U}$, $\mathcal{O}'$.

2.2. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}^{\{\infty\}}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ *пространство фурье-образов пространства* $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}$.

Предложение 1. *Функция* $\psi(\sigma) \in \mathcal{M}$ *принадлежит* $\mathcal{H}$ *тогда и только тогда, когда для любого* $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, *и любого (целого)* q *имеет место представление (ср.* (IV.1.22))

$$\psi(\sigma) = \sum_{j=0}^{q-r} c_j (\sigma - z)^{-r-j} + \psi_q(\sigma), \quad \psi_q(\sigma) \in C^{(\infty)}_{(q)}, \tag{6}$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $\psi(\sigma)$ — преобразование Фурье некоторого распределения $A \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}$. В силу (5) имеем

$$A = a_- + A_+, \quad a_- \in \mathcal{S}, \quad A_+ \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}, \tag{5′}$$

откуда

$$\psi(\sigma) = \widehat{a}_-(\sigma) + \widehat{A}_+(\sigma), \quad \widehat{a}_- \in \mathcal{S}, \quad \widehat{A}_+ \in \mathcal{H}^+.$$

Воспользовавшись результатами п. IV.1.5, мы получим разложение (6) для случая $\operatorname{Im} z > 0$.

Аналогичным образом из (5) вытекает представление

$$A = a_+ + A_-, \quad a_+ \in \mathcal{S}, \quad A_- \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[-]},$$

откуда

$$\psi(\sigma) = \widehat{a}_+(\sigma) + \widehat{A}_-(\sigma), \quad \widehat{a}_+ \in \mathcal{S}, \quad \widehat{A}_- \in \mathcal{H}^-.$$

Результаты п. IV.1.5 естественным образом можно переформулировать для $\mathcal{H}^-$, заменив всюду полуплоскость $\operatorname{Im}\tau < 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\tau > 0$. Отсюда мы получим разложение (6) в случае $\operatorname{Im} z < 0$.

Пусть теперь для функции $\psi(\sigma)$ для любого q и $\operatorname{Im} z < 0$ имеют место разложения (6), т. е.

$$\psi(\sigma) = \Psi_q^+(\sigma) + \psi_q^+(\sigma), \quad \Psi_q^+(\sigma) \in \mathcal{H}^+, \quad \psi_q^+ \in C_q^{(\infty)}.$$

С учетом предложения 1 из п. IV.1.5 и неравенств Парсеваля $\psi(\sigma)$ является преобразованием Фурье распределения

$$A = A_q^+ + a_q^+, \quad A_q^+ \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[+]}, \quad a_q^+ \in C^{(q-2)}_{(\infty)}.$$

Таким образом, мы получим, что $A \in \mathcal{O}'$ и $p_{\oplus}A \in C^{(q-2)}_{(\infty)\oplus}$ (поскольку $p_{\oplus}\mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[+]} \subset \mathcal{S}_{\oplus}$) для любого $q \in \mathbb{Z}$. Последнее означает, что $p_{\oplus}A \in \mathcal{S}_{\oplus}$, т. е. $A \in \mathcal{U}$. Аналогично доказывается, что $A \in I\mathcal{U}$, так что $A \in \mathcal{U} \cap I\mathcal{U} = \mathcal{S}^{\{-\infty\}}$.

Отметим свойства функций из $\mathcal{H}$, непосредственно вытекающие из приведенного выше описания (ср. п. IV.1.5).

1) Числа r и c_j в разложении (6) не зависят от q; число $-r$ в (6) обозначим через $\deg \psi$. Если все c_j равны нулю в любом разложении (6), то $\deg \psi = -\infty$.

2) Согласно определению $C^{(\infty)}_{(q)}$ остаточный член в (6) допускает оценки

$$|\partial^k \psi_q(\sigma)| < c_k(1 + |\sigma|)^{-q};$$

сравнивая разложение (6) для q и $q+k$, получим

$$|\partial^k \psi_q(\sigma)| < c'_k(1 + |\sigma|)^{-q-k}.$$

3) Учитывая замечание 2), предложение 1 можно переформулировать в таком виде: $\psi \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $\psi \in C^\infty$ и разлагается в асимптотический ряд

$$\psi(\sigma) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sigma^{-r-j}, \quad |\sigma| \to \infty.$$

Ряд для производных получается путем дифференцирования исходного ряда.

Дословным повторением доказательства предложения 3 из п. IV.1.5 мы установим

Предложение 2. *Для функции $\psi(\sigma) \in \mathcal{H}$ следующие условия эквивалентны*:

(a) $\psi^{-1}(\sigma) \in \mathcal{H}$;

(b) $\psi^{-1}(\sigma) \in \mathcal{M}$;

(c) *для некоторого $c \geqslant 0$ и μ справедлива оценка*

$$|\psi(\sigma)| > c(1 + |\sigma|)^{\mu}, \quad \sigma \in \mathbb{R};$$

(d) $\deg \psi(\sigma) > -\infty$ и $\psi(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

2.3. Обратимые элементы алгебр $\mathcal{U}, I\mathcal{U}, \mathcal{S}^{\{-\infty\}}$. Пусть Φ — одна из алгебр (относительно свертки) $\mathcal{O}'$, $\mathcal{U}$, $I\mathcal{U}$, $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}$. Через Φ^{reg} обозначим совокупность обратимых элементов Φ. Иными словами, $A \in \Phi^{\mathrm{reg}}$ тогда и только тогда, когда найдется такое $G \in \Phi$, что $A * G = G * A = \delta(t)$ (т. е. уравнение $A * u = f$ имеет фундаментальное решение).

Прежде всего отметим, что из предложения 2 предыдущего пункта и предложения 2 из п. IV.1.5 вытекает

Предложение. (i) *Распределение $A \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}$ принадлежит $\mathcal{S}^{\{-\infty\}\mathrm{reg}}$ тогда и только тогда, когда $A \in (\mathcal{O}')^{\mathrm{reg}}$.*

(ii) *Распределение $A_{\pm} \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[\pm]}$ принадлежит $\mathcal{S}^{\{-\infty\}\mathrm{reg}}_{[\pm]}$ тогда и только тогда, когда $A_{\pm} \in (\mathcal{O}')^{\mathrm{reg}}_{\pm}$.*

Основным результатом пункта является

Теорема. *Для распределения $A \in \mathcal{U}$ следующие три условия эквивалентны:*

(I) $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$,

(II) a) $\hat{A}(\sigma) \neq 0, \ -\infty < \sigma < \infty$ *и*

b) *если A каким-либо образом представлено в виде* (1′), *то найдутся такие константы R, $c > 0$, что*

$$|\widehat{A}_-(\tau)| \geqslant c|\tau|^{-N}, \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0, \quad |\tau| \geqslant R \ ^{1)} \tag{7}$$

(III) *A представляется в виде*

$$A = B_- * C, \quad B_- \in (\mathcal{O}')_-^{\mathrm{reg}}, \quad C \in \mathcal{S}^{\{-\infty\}\mathrm{reg}}.$$

Доказательство. (I)⇒(II). Если $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$, то заведомо $A \in (\mathcal{O}')^{\mathrm{reg}}$, а тогда $\hat{A}(\sigma)$ — обратимый элемент $\mathcal{M}$, откуда следует условие a). Для доказательства (7) заметим, что согласно определению $\mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$ найдется $G \in \mathcal{U}$, так что $A * G = \delta(t)$. Заменяя A и G их разложением типа (1′), т. е. $G = G_- + g$, $G_- \in (\mathcal{O}')_-$, $g \in \mathcal{S}$, получим

$$A_- * G_- - \delta(t) = -A_- * g - G_- * a - a * g.$$

Левая часть этого равенства лежит в $(\mathcal{O}')_-$, а правая часть лежит в $\mathcal{S}$, следовательно, обе части равенства лежат в $\mathcal{S}_-$, откуда

$$\widehat{A}_-(\tau)\widehat{G}_-(\tau) - 1 = O(|\tau|^{-\infty}), \qquad |\tau| \to \infty, \qquad \mathrm{Im}\,\tau \geqslant 0.$$

Поскольку $\widehat{G}_-(\tau)$ растет не быстрее степени τ, мы приходим к условию (7).

(II)⇒(III). Ввиду (1′) и (7) можно указать такое R, что функция $\widehat{A}_-(\tau)$ отлична от нуля вне полукруга $L_R = \{\mathrm{Im}\,\tau > 0, |\tau| < R\}$. Поскольку голоморфная функция $\widehat{A}_-(\tau)$ бесконечно дифференцируема в замыкании L_R, то ее нули не могут накапливаться ни к какой точке $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, $|\sigma_0| \leqslant R$, так что число нулей $\widehat{A}_-(\tau)$ внутри L_R не более чем конечно. Но тогда $\widehat{A}_-$ представляется в виде $\widehat{A}_-(\tau) = P(\tau)\widehat{B}_-(\tau)$, где $P(\tau)$ — полином, причем его нулями (с учетом кратностей) являются нули $\widehat{A}_-$. Но тогда функция $\widehat{B}_-(\tau)$ принадлежит $\mathcal{M}$ и отлична от нуля при $\mathrm{Im}\,\tau \geqslant 0$. Ввиду (7) справедлива оценка $|\widehat{B}_-(\tau)| > \mathrm{const}\cdot(1 + |\tau|)^{-N_1}$, $\mathrm{Im}\,\tau \geqslant 0$, откуда $\widehat{B}_-$ является символом распределения $B_- \in (\mathcal{O}')_-^{\mathrm{reg}}$. Теперь имеем

$$\widehat{A}(\sigma) = a(\sigma) + P(\sigma)\widehat{B}_-(\sigma) = \widehat{B}_-(\sigma)\left[P(\sigma) + \frac{\widehat{a}(\sigma)}{\widehat{B}_-(\sigma)} \overset{\mathrm{def}}{=\!=}\right]\widehat{B}_-(\sigma)\widehat{C}(\sigma).$$

Если $a \in \mathcal{S}$, то $\widehat{a}/\widehat{B}_- \in \mathcal{S}$ (поскольку $\widehat{B}_-^{-1} \in \mathcal{M}$) и, следовательно, $\widehat{C}(\sigma) \in \mathcal{H}$. Так как $\widehat{B}_-(\sigma) \neq 0$, то согласно условию (a)

---

[1]) В представлении (1′) распределение A_- определено mod $\mathcal{S}_-$. Поскольку преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}_-$ убывают при $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ быстрее любой степени $|\tau|$, то неравенство (7) не зависит от выбора A_-.

$\widehat{C}(\sigma)\neq 0$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Далее, $\deg\widehat{C}=\deg P\geqslant 0$. Согласно предложению 2 предыдущего пункта $\widehat{C}$ — обратимый элемент $\mathscr{H}$, а ввиду предложения 1 этого же пункта $\widehat{C}$ — преобразование Фурье некоторого распределения $C\in\mathscr{S}^{\{-\infty\}\mathrm{reg}}$.

(III)$\Rightarrow$(I). Эта импликация следует из того, что $(\mathscr{O}')_-$ и $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ являются подалгебрами $\mathscr{U}$.

Отметим, что аналог теоремы справедлив и для распределений $A\in I\mathscr{U}$. Надо только записать A в виде $A=A_++a$, $A\in\mathscr{S}$, $A_+\in(\mathscr{O}')_+$ и заменить (7) на условие

$$|\widehat{A}_+(\tau)|>c|\tau|^{-N},\quad |\tau|\geqslant R,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0.$$

2.4. Каноническая факторизация в $\mathscr{O}'$, $\mathscr{U}$, $I\mathscr{U}$, $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$. Пусть Φ — одна из алгебр $\mathscr{O}'$, $\mathscr{U}$, $I\mathscr{U}$, $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ и $\Phi_\pm$ подалгебры элементов Φ, сосредоточенных при $\pm t>0$. Пусть $A\in\Phi^{\mathrm{reg}}$. Факторизация (3) называется канонической, если $A_\pm\in(\Phi_\pm)^{\mathrm{reg}}$.

Лемма. *Каноническая факторизация распределения $A\in\Phi^{\mathrm{reg}}$, $\Phi=\mathscr{O}'$, $\mathscr{U}$, $I\mathscr{U}$, $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ определена с точностью до константы.*

Доказательство. Пусть $A\in\Phi^{\mathrm{reg}}$ и наряду с факторизацией (3) имеется другая факторизация

$$A=A'_+*A'_-,\quad A'_\pm\in(\Phi_\pm)^{\mathrm{reg}}.$$

Пусть $G_\pm, G'_\pm\in\Phi_\pm$ — обратные элементы к $A_\pm, A'_\pm$. Свертывая равенство $A_+*A_-=A'_+*A'_-$ с распределением $G_+*G'_-$, получим $A_-*G'_-=A'_+*G_+\overset{\mathrm{def}}{=}C$. Поскольку $A_-*G'_-\in(\Phi_-)^{\mathrm{reg}}$, $A'_+*G_+\in(\Phi_+)^{\mathrm{reg}}$, то $C\in\Phi_+\cap\Phi_-$. Но тогда носитель C сосредоточен в нуле, и, следовательно, $C=P(D)\delta$, где $P(\tau)$ — полином. Из регулярности C в $(\mathscr{O}')_\pm$ вытекает, что $P(\tau)\neq 0$, $\tau\in\mathbb{C}$. Но тогда $P(\tau)$ является константой.

Замечания. 1) Если $A\in\mathscr{U}^{\mathrm{reg}}$ допускает каноническую факторизацию (3) в более широком пространстве $\mathscr{O}'$, то A допускает каноническую факторизацию в $\mathscr{U}$. В самом деле, пусть в (3) $A_\pm\in((\mathscr{O}')_\pm)^{\mathrm{reg}}$ и $G_\pm\in((\mathscr{O}')_\pm)^{\mathrm{reg}}$ — соответствующие обратные элементы. Тогда $A_+=A*G_-\subset\mathscr{U}\cap(\mathscr{O}')_+^{\mathrm{reg}}=\mathscr{U}_+\cap(\mathscr{O}')_+^{\mathrm{reg}}=\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}\cap(\mathscr{O}')_+^{\mathrm{reg}}$. Воспользовавшись предложением 2.3 (ii), получим, что $A_+\in\left(\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}\right)^{\mathrm{reg}}$.

Аналогично, если $A\in\mathscr{S}^{\{-\infty\}\mathrm{reg}}$ допускает каноническую факторизацию в $\mathscr{O}'$, то по доказанному выше $A_+\in\left(\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}\right)^{\mathrm{reg}}$, откуда $A_-=A*G_+\in I\mathscr{U}\cap(\mathscr{O}')_-^{\mathrm{reg}}=\mathscr{S}_{[-]}^{\{-\infty\}}\cap(\mathscr{O}')_-^{\mathrm{reg}}=\left(\mathscr{S}_{[-]}^{\{-\infty\}}\right)^{\mathrm{reg}}$ (мы опять воспользовались предложением 2.3(ii)).

2) Каноническая факторизация (3) эквивалентна факторизации символа

$$\widehat{A}(\sigma)=\widehat{A}_+(\sigma)\widehat{A}_-(\sigma),\quad \widehat{A}_\pm,\ 1/\widehat{A}_\pm\in\mathscr{F}\Phi_\pm. \tag{8}$$

Напомним, что $\mathscr{F}(\mathscr{O}')_+=\mathscr{M}^+$, $\mathscr{F}(\mathscr{O}')_-=\mathscr{M}^-$, $\mathscr{F}\mathscr{U}_+=\mathscr{F}\left(\mathscr{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}\right)=\mathscr{H}^+$, $\mathscr{F}(I\mathscr{U})_-=\mathscr{F}\mathscr{S}_{[-]}^{\{-\infty\}}=\mathscr{H}^-$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема. (i). *Распределение* $A\in\mathcal{S}^{(-\infty)}$ *допускает каноническую факторизацию в* $\mathcal{S}^{(-\infty)}$ *тогда и только тогда, когда* $A\in\mathcal{S}^{(-\infty)\mathrm{reg}}$.

(ii) *Распределение* $A\in\mathcal{U}$ *допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда* $A\in\mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$.

Необходимость условия обратимости A в $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}^{(-\infty)}$ для существования канонической факторизации очевидна. Далее, ввиду теоремы 2.3 из существования факторизации (канонической) в $\mathcal{S}^{(-\infty)}$ следует существование канонической факторизации в $\mathcal{U}$, $I\mathcal{U}$. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству существования канонической факторизации в $\mathcal{S}^{(-\infty)\mathrm{reg}}$. Ввиду замечания 2) это эквивалентно существованию факторизации (8) в пространстве $\mathcal{H}$. Доказательству этого результата (фактически принадлежащего М. Г. Крейну [1]) посвящен следующий пункт.

2.5. Каноническая факторизация в $\mathcal{H}$. В этом пункте будет доказано

Предложение. *Пусть* ψ — *обратимый элемент* $\mathcal{H}$, *т. е.* (*см. предложение* 2, п. 2.3)

$$\deg\psi>-\infty,\quad \psi(\sigma)\neq 0,\quad -\infty<\sigma<\infty. \tag{9}$$

Тогда ψ *допускает каноническую факторизацию*

$$\psi=\psi_+\psi_-,\quad \psi_\pm\in\mathcal{H}^\pm,\quad (\psi_\pm)^{-1}\in\mathcal{H}^\pm. \tag{10}$$

При доказательстве предложения будет использована

Лемма. (i) *Пусть* $\varphi(\sigma)\in\mathcal{H}$ *и* $\deg\varphi(\sigma)\leqslant 0$. *Пусть функция* $\chi(\theta)$ *ограничена вместе со всеми производными в окрестности множества* $\}\theta=\varphi(\sigma),\sigma\in\mathbb{R}\}$. *Тогда* $\chi(\varphi(\sigma))\in\mathcal{H}$.

(ii) *Пусть* $\varphi_\pm(\sigma)\in\mathcal{H}^\pm$ *и* $\deg\varphi_\pm\leqslant 0$. *Пусть функция* $\chi(z)$ *голоморфна в окрестности множества* $\{z=\varphi_\pm(\tau),\ \mathrm{Re}\,\tau\in\mathbb{R},\ \pm\mathrm{Im}\,\tau>0\}$. *Тогда* $\chi(\varphi_\pm)\in\mathcal{H}^\pm$.

Считая лемму доказанной, докажем предложение.

Доказательство предложения. Если $\deg\psi>-\infty$, то ввиду (6) (для частного случая $z=i$) запишем

$$\psi(\sigma)=(\sigma-i)^{-r}\psi_0(\sigma). \tag{11}$$

Тогда $\psi_0(\sigma)\in\mathcal{H}$, $\deg\psi_0\leqslant 0$ и ψ_0 удовлетворяет условию (9) предложения. Таким образом, мы будем заниматься факторизацией функции ψ_0. Поскольку $\psi_0=c_0+O(\sigma^{-1})$, $|\sigma|\to\infty$ (см. (6) и (11)), то $\psi_0(\sigma)\to c_0$ при $\sigma\to\pm\infty$, т. е. функция $\psi_0(\sigma)$ определена на сомкнутой прямой. Отсюда следует, что приращение аргумента $\psi_0(\sigma)$, когда σ меняется от $-\infty$ до ∞, будет целым кратным 2π:

$$\mathrm{ind}\,\psi_0=\int_{-\infty}^{\infty} d(\arg\psi_0(\sigma))=2\pi m.$$

Но такой же индекс имеет функция $(\sigma-i)^m(\sigma+i)^{-m}$, которая уже представлена в виде (10). Итак, окончательно

$$\psi(\sigma)=(\sigma-i)^{\deg\psi+m}(\sigma+i)^{-m}\varphi(\sigma), \tag{12}$$

где

$$\varphi(\sigma)\in\mathscr{H}, \quad \deg\varphi=0, \quad \operatorname{ind}\varphi=0, \quad \varphi(\sigma)\neq 0, \quad \sigma\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Займемся факторизацией функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей всем условиям (13). Будем считать, что $\varphi(\pm\infty)=1$. Кривая $\Gamma=\{\theta=\varphi(\sigma),\ \sigma\in\mathbb{R}\}$ принадлежит ограниченному множеству на комплексной плоскости, не содержащему начала координат (здесь используется условие $\operatorname{ind}\varphi=0$). Следовательно, на Γ можно определить однозначную ветвь $\ln\varphi(\sigma)$, нормировав ее условиями $\ln\varphi(-\infty)=\ln\varphi(+\infty)=0$. Согласно лемме (i) $\ln\varphi(\sigma)\in\mathscr{H}$, а так как $\ln\varphi(\sigma)\to 0$, $|\sigma|\to\infty$, то $\deg\ln\varphi\leqslant -1$. Функция $\ln\varphi(\sigma)$ представляется в виде

$$\ln\varphi(\sigma)=p_+(\sigma)+p_-(\sigma), \quad p_\pm\in\mathscr{H}^\pm, \quad \deg p_\pm\leqslant -1. \tag{14}$$

В самом деле, пусть $B(t)$ — обратное преобразование Фурье $\ln\varphi(\sigma)\in\mathscr{H}$. Тогда $B(t)\in\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$, т. е.

$$B(t)=P(D)\delta+\theta_+B_++\theta_-B_-, \quad B_\pm\in\mathscr{S}. \tag{14'}$$

Поскольку $\deg\ln\varphi\leqslant -1$, то $P(D)\equiv 0$. Обозначая через $p_\pm(\sigma)$ преобразование Фурье $\theta_\pm B_\pm\in\mathscr{S}_{[+]}$, мы получим разложение (14), откуда

$$\varphi(\sigma)=\varphi_+(\sigma)\varphi_-(\sigma), \quad \varphi_\pm(\sigma)=\exp(p_\pm(\sigma)).$$

Согласно лемме (ii) $\varphi_\pm(\sigma)\in\mathscr{H}^\pm$. Далее, так как функции $\theta_\pm B_\pm$ принадлежат L_1, то их преобразования Фурье $p_\pm(\sigma)$ ограничены, откуда $|\varphi_\pm|=|\exp p_\pm|>\text{const}$, $\mp\operatorname{Im}\tau>0$. Отсюда следует, что $\varphi_\pm\in(\mathscr{H}^\pm)^{\text{reg}}$, что и доказывает наше предложение.

Доказательство леммы (i). Обозначим через $W(\mathbb{R})$ пространство функций, принадлежащих C^∞ на прямой с отождествленными точками $+\infty$ и $-\infty$. Ясно, что всякая функция $\varphi(\sigma)\in\mathscr{H}$, $\deg\varphi\leqslant 0$ принадлежит $W(\mathbb{R})$. Обратно, пусть $\psi(\sigma)\in\in W(\mathbb{R})$. Тогда $a(\theta)=\psi(1/\theta)$ принадлежит C^∞ в окрестности нуля. Ряд Тейлора для $a(\theta)$ будет асимптотическим рядом для $\psi(\sigma)$ по неотрицательным степеням $1/\sigma$ в окрестности бесконечности. Итак, наше утверждение о суперпозиции достаточно проверить на пространстве $W(\mathbb{R})$. Для этого пространства оно очевидно.

Доказательство леммы (ii). Обозначим через K единичный круг $K=\{|z|<1\}$, и пусть $W(K)$ — пространство функций, голоморфных в K и бесконечно дифференцируемых в замыкании $\bar{K}$. Рассмотрим дробнолинейное отображение

$$\lambda\colon K\to\mathbb{C}_+=\{\operatorname{Im}\tau\geqslant 0\} \quad \left(z\mapsto\tau=i\frac{1+z}{1-z}\right)$$

и индуцированное им отображение пространств функций

$$\lambda^*=\{\varphi\in\mathscr{H}^-,\ \deg\varphi\leqslant 0\}\to W(K).$$

Это отображение является изоморфизмом. В самом деле, если $\varphi(\tau) \in \mathscr{H}^-$, $\deg \varphi \leqslant 0$, то функция $\Phi(z) = \varphi\left(i \frac{1+z}{1-z}\right)$ будет голоморфна при $|z| < 1$. Проверим, что эта функция гладкая в окрестности круга $|z| = 1$. Для точек $z \neq 1$ это очевидно. Если $z \to 1$, то $\tau = i(1+z)/(1-z) \to \infty$. Поскольку $\varphi(\tau)$ разлагается в асимптотический ряд по отрицательным степеням $\tau + i$, функция $\Phi(z)$ в окрестности $z = 1$ разлагается в асимптотический ряд по положительным степеням $(\tau + i)^{-1} = (1-z)/(2i)$, т. е. $\Phi(z) \in C^\infty$ в окрестности $z = 1$. Обратно, если $\Phi(z) \in W(K)$, то $\Phi(z)$ разлагается в асимптотический ряд Тейлора по положительным степеням $1 - z$, а тогда $\varphi(\tau) = \Phi((\tau - i)/(\tau + i))$ разлагается в асимптотический ряд по отрицательным степеням $(\tau + i)/(2i)$.

Для доказательства леммы теперь остается заметить, что для пространства $W(K)$ ее утверждение очевидно.

§ 3. Уравнение Винера — Хопфа на полупрямой

В этом параграфе мы будем заниматься сверточными уравнениями вида

$$p_\oplus(A * u) = f, \tag{1}$$

где $u \in \Phi_{[+]}$, $f \in \Phi_\oplus$, $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, H^{(\infty)}_{(l)}$, а A — свертыватель Винера — Хопфа с условием трансмиссии, действующий на всех указанных пространствах Φ, т. е. $A \in \mathscr{U}$. Если $A = \delta(t) + a(t)$ и, скажем, $a(t) \in L_1$, то, как уже отмечалось во введении, получается интегральное уравнение второго рода на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Метод решения таких уравнений, основанный на факторизации $A = A_+ * A_-$, был предложен Винером и Хопфом. Этот метод широко используется при изучении эллиптических псевдодифференциальных уравнений в ограниченной области (см. Г. И. Эскин [1] и имеющиеся там ссылки). Мы изложим метод Винера — Хопфа применительно к распределениям $A \in \mathscr{U}$; каноническая факторизация таких распределений характеризуется целым числом $\operatorname{ind} A = \deg \widehat{A}_+ (\widehat{A}_+ \in \mathscr{H}^+)$. В зависимости от знака $\operatorname{ind} A$ оператор $p_\oplus \operatorname{con}_A$ может иметь ядро или коядро размерности $|\operatorname{ind} A|$. Чтобы получать изоморфные отображения, надо иметь возможность сужать или расширять как пространство левых частей $\Phi_{[+]}$, так и пространство правых частей $\Phi_\oplus$. В гл. IV мы включили $\Phi_{[+]}$ в однопараметрическое семейство пространств $\Phi^{\{r\}}_{[+]}$, где $\Phi^{\{0\}}_{[+]} = \Phi_{[+]}$ и $\Phi^{\{r\}}_{[+]}$ является подпространством $\Phi^{\{r-1\}}_{[+]}$ коразмерности 1. Мы начнем с того, что построим семейство фактор-пространств $\Phi^{\{r\}}_\oplus$, обладающее аналогичными свойствами: $\Phi^{\{0\}}_\oplus \cong \Phi_\oplus$ и $\Phi^{\{r\}}_\oplus$ является подпространством $\Phi^{\{r-1\}}_\oplus$ коразмерности 1. Обозначим через $\Phi^{\{-\infty\}}_\oplus$ индуктивный предел $\bigcup_r \Phi^{\{r\}}_\oplus$ и через $p^{\{-\infty\}}_\oplus$ —

соответствующий проектор. Тогда распределению $A \in \mathcal{U}$ мы сопоставим оператор

$$p_{\oplus}^{\{-\infty\}} \operatorname{con}_A\colon \Phi_{[+]}^{\{-\infty\}} \to \Phi_{\oplus}^{\{-\infty\}}. \tag{2}$$

Наш основной результат состоит в том, что для некоторых Φ (2) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда A допускает каноническую факторизацию в $\mathcal{U}$. Из этого результата мы выведем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи с граничными условиями (или потенциалами) для уравнения (1).

3.1. Фактор-пространства $\Phi_{\oplus}^{\{r\}}$. В основе конструкции фактор-пространств, указанных в заголовке, участвуют расширения $[\Phi]$ пространств $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, H_{(l)}^{(\infty)}$, состоящие из таких распределений, которые убывают (растут) таким же образом, как функции из Φ, а их сужения на $\mathbb{R}_+$ попадают в $\Phi_{\oplus}$. В случае $\Phi = \mathcal{S}$ это пространство нами уже введено:

$$[\mathcal{S}] = \mathcal{U} \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{O}', \ p_{\oplus} f \in \mathcal{S}_{\oplus}\},$$

где через $p_{\oplus}$ обозначен канонический проектор $\mathcal{O}' \to (\mathcal{O}')_{\oplus}$, а $\mathcal{S}_{\oplus}$ рассматривается как подмножество $(\mathcal{O}')_{\oplus}$. Аналогично определим

$$[\mathcal{O}] = \{f \in \mathcal{S}', \ p_{\oplus} f \in \mathcal{O}_{\oplus}\},$$

$$[H_{(l)}^{(\infty)}] = \{f \in H_{(l)}^{(-\infty)}, \ p_{\oplus} f \in H_{(l)\oplus}^{(\infty)}\}.$$

Согласно этим определениям $[\mathcal{S}]_- = (\mathcal{O}')_-$, $[\mathcal{O}]_- = (\mathcal{S}')_-$, $[H_{(l)}^{(\infty)}]_- = H_{(l)-}^{(-\infty)}$.

Лемма. *Пусть* $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, H_{(l)}^{(\infty)}$. *Для любого целого* r, *распределение* $f \in [\Phi]$ *однозначно представляется в виде*

$$f = f_+^{(r)} + f_-^{(r)}, \quad f_+^{(r)} \in \Phi_{[+]}^{\{r\}}, \quad f_-^{(r)} = \delta_{-r}^{\pm}(D)\, h_-, \\ h_- \in [\Phi]_-. \tag{3}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай $r = 0$. Из определения $[\Phi]$ следует, что для каждого $f \in [\Phi]$ можно подобрать такую функцию $f_0 \in \Phi$, что $f - f_0 \in [\Phi]_-$. Полагая $f_+^{(0)} = \theta_+ f_0 \in \Phi_{[+]}$, $f_-^{(0)} = f_0 - \theta_+ f_0 \in [\Phi]_-$, получим разложение (3) для $r = 0$. Это разложение однозначно. Действительно, если $f \equiv 0$, то $f_+^{(0)} = -f_-^{(0)} \in (\mathcal{S}')_+ \cap (\mathcal{S}')_-$. Отсюда следует, что найдется такой полином $P(\tau)$, что $f_+^{(0)} = P(D)\,\delta$, $f_-^{(0)} = -P(D)\,\delta$. Так как $f_+^{(0)} \in \Phi_{[+]}$, то $P(\tau) \equiv 0$, так что $f_+^{(0)} = f_-^{(0)} = 0$.

2) Пусть $r > 0$. Напишем разложение (3) для $r = 0$. Согласно результатам § IV.1 (см. разложение (IV.1.18)) $f_+^{(0)} \in \Phi_{[+]}$ можно представить в виде

$$f_+^{(0)} = f_+^{(r)} + g^{(r)}, \quad f_+^{(r)} \in \Phi_{[+]}^{\{r\}}, \quad g^{(r)} = \delta_{-r}^{\pm}(D)\, P(D)\, \delta,$$

а $P(\tau)$ — полином степени не выше $r - 1$. Полагая

$$f_-^{(r)} = f_-^{(0)} + \delta_{-r}^{\pm}(D)\, P(D)\, \delta = \delta_{-r}^{\pm}\left[\delta_r^{+}(D) f_-^{(0)} + \delta\right] \in \delta_{-r}^{\pm}[\Phi]_-.$$

мы получим разложение (3) для $r > 0$. Однозначность этого разложения вытекает из однозначности (3) для $r=0$. Действительно, если $f\equiv 0$, то $\delta_r^+ f_+^{(r)} + \delta_r^+ f_-^{(r)} = 0$, и остается заметить, что $\delta_r^+ f_+^{(r)} \in \Phi_{[+]}$, $\delta_r^+ f_-^{(r)} \in [\Phi]_-$.

3) Рассмотрим случай $r<0$. Мы опять будем исходить из разложения (3) для $r=0$ и покажем, что найдется такой полином $P(\tau)$ степени $-r-1$, что

$$f_-^{(0)} = P(D)\,\delta + \delta_{-r}^{\pm}(D)\,h_-,\ h_- \in [\Phi]_-. \tag{3'}$$

Полагая $f_+^{(r)} = f_+^{(0)} + P(D)\,\delta \in \Phi_{[+]}^{\{r\}}$, получим (3). Для доказательства (3') заметим, что распределение $g_- \in [\Phi]_-$ принадлежит $\delta_{-r}^{\pm}(D)\,[\Phi]_-$, $r<0$, тогда и только тогда, когда символ $\widehat{g}_-(\tau)$ в точке $\tau = i$ имеет нуль порядка $|r|$. Этого можно всегда добиться, вычитая из $\widehat{g}_-(\tau)$ подходящий полином степени $|r|-1$. Единственность (3) для $r<0$ следует из единственности для $r=0$.

Утверждение леммы можно переформулировать как существование для любого $r\in\mathbb{Z}$ прямого разложения

$$[\Phi] = \Phi_{[+]}^{\{r\}} \dotplus \delta_{-r}^{\pm}(D)\,[\Phi]_- \quad \left(\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, H_{(l)}^{(\infty)}\right). \tag{4}$$

Определим теперь фактор-пространства

$$\Phi_{\oplus}^{\{r\}} = [\Phi]/\delta_{-r}^{\pm}(D)\,[\Phi]_- \quad \left(\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, H_{(l)}^{(\infty)}\right) \tag{5}$$

и обозначим через $p_{\oplus}^{\{r\}}$ канонический проектор

$$p_{\oplus}^{\{r\}}\colon\ [\Phi] \to \Phi_{\oplus}^{\{r\}} \quad \left(\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, H_{(l)}^{(\infty)}\right). \tag{6}$$

Так как $\Phi_{[+]}^{\{r\}} \subset [\Phi]$, то можно рассмотреть сужение оператора (6)

$$p_{\oplus}^{\{r\}}\colon\ \Phi_{[+]}^{\{r\}} \to \Phi_{\oplus}^{\{r\}} \quad \left(\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, H_{(l)}^{(\infty)}\right). \tag{7}$$

Автоматическим следствием разложения (4) является

Предложение 1. *Для каждого* $r\in\mathbb{Z}$ *отображение* (7) *является изоморфизмом (мы снабжаем* $\Phi_{\oplus}^{\{r\}}$ *топологией, индуцированной топологией в* $[\Phi]$*).*

Из разложения (4) и доказанных в гл. IV изморфизмов $\delta_k^+(D)\,\Phi_{[+]}^{\{r\}} = \Phi_{[+]}^{\{r-k\}}$, $\Phi = \mathscr{S}, \mathscr{O}, H_{(l)}^{(\infty)}$, вытекает

Предложение 2. *Для любого* $k\in\mathbb{Z}$ *имеет место изоморфизм*

$$\delta_k^+(D)\,\Phi_{\oplus}^{\{r\}} = \Phi_{\oplus}^{\{r-k\}}.$$

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Phi_{[+]}^{\{r\}} \arrow[r, "p_{\oplus}^{\{r\}}"] \arrow[d, "\delta_r^+(D)"'] & \Phi_{\oplus}^{\{r\}} \arrow[d, "\delta_{-r}^{\pm}(D)"] \\
\Phi_{[+]} \arrow[r, "p_{\oplus}^{\{0\}}"] & \Phi_{\oplus}^{\{0\}}
\end{tikzcd}$$

Ввиду предложений 1, 2 все отображения этой диаграммы являются изоморфизмами. Таким образом,

$$p_{\oplus}^{\{r\}} = \delta_{-r}^{+}(D)\, p_{\oplus}^{\{0\}} \delta_{r}^{+}(D). \tag{8}$$

Обозначим через $\pi^{\{r\}}$ оператор, обратный к (7). При $r=0$ его можно рассматривать как оператор умножения на характеристическую функцию полупрямой [1]). Тогда

$$\pi^{\{r\}} f = \delta_{-r}^{+}(D)\, \theta_{+} \delta_{r}^{+}(D) f \tag{9}$$

будет обратным оператором к (7).

Предложение 3. *Для каждого* $r \in \mathbb{Z}$ $\Phi_{\oplus}^{\{r\}}$ — *подпространство* $\Phi_{\oplus}^{\{r-1\}}$ *коразмерности* 1.

Доказательство. Как было показано в § IV.1, $\Phi_{[+]}^{\{r\}}$ является подпространством $\Phi_{[+]}^{\{r-1\}}$ коразмерности 1. Теперь остается воспользоваться предложением 1.

Топология в пространстве $\Phi_{\oplus}^{\{r\}}$, индуцированная топологией в $[\Phi]$, совпадает с топологией, индуцированной пространством $\Phi_{\oplus}^{\{r-1\}}$. Таким образом, можно рассмотреть строгий индуктивный предел $\Phi_{\oplus}^{\{-\infty\}} = \bigcup\limits_{r} \Phi_{\oplus}^{\{r\}}$.

3.2. Основная теорема. *Для распределения* $A \in \mathcal{U}$ *следующие условия эквивалентны*:

(I) A — *обратимый элемент алгебры* $\mathcal{U}$ (*т. е. выполнены эквивалентные условия теоремы* 2.3).

(II) A *допускает каноническую факторизацию.*

(III) *Найдется такое* $c \in \mathbb{Z}$, *что для любого* $r \in \mathbb{Z}$ *и* $\Phi = H^{(\infty)}$ *отображение*

$$p_{\oplus}^{\{r\}} \operatorname{con}_A \colon \Phi_{[+]}^{\{r+c\}} \to \Phi_{\oplus}^{\{r\}} \tag{10}$$

является изоморфизмом пространств.

Эквивалентность (I) и (II) была установлена в § 2 (теорема 2.4), условие (III) выводится из (II) с помощью метода Винера — Хопфа. Мы сформулируем два утверждения, уточняющие и усиливающие импликации (II)$\Rightarrow$(III) и (III)$\Rightarrow$(I).

Если $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$, то A допускает каноническую факторизацию $A = A_{+} * A_{-}$, $A_{\pm} \in (\mathcal{U}_{\pm})^{\text{reg}}$. *Индексом* A (обозначается $\operatorname{ind} A$) мы назовем $\deg \widehat{A}_{+}$ (распределение $\widehat{A}_{+}$ определено с точностью до константы, поэтому определение $\operatorname{ind} A = \deg \widehat{A}_{+}$ корректно).

Предложение 1. *Пусть* $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$ *и* $\operatorname{ind} A = d_{+}$. *Пусть* $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, H_{(l)}^{(\infty)}$. *Тогда* $\forall r \in \mathbb{Z}$ *и* $c = d_{+}$ *отображение* (10) *является изоморфизмом пространств.*

Предложение 2. *Пусть* $A \in \mathcal{U}$ *и* $\Phi = H^{(\infty)}$. *Пусть для некоторых* $r, c \in \mathbb{Z}$ *оператор* (10) *имеет непрерывный левый обратный. Тогда* $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$.

---

[1]) Более аккуратно, если $f \in \Phi_{\oplus}^{\{r\}}$ и $f_0 \in \Phi$ — элемент класса смежности f (такой элемент всегда существует), то $\pi^{\{0\}} f = \theta_{+} f_0$ не зависит от выбора f_0.

3.3. Метод Винера — Хопфа (доказательство предложения 1 из п. 3.2). Прежде всего заметим, что оператор con_{A_-}, $A_- \in (\mathcal{O}')_-$, переводит в себя пространство $[\Phi]$, $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, H^{(\infty)}_{(l)}$. В самом деле, если $\varphi \in [\Phi]$, то $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, $\varphi_0 \in \Phi$, $\varphi_- \in [\Phi]_-$. Но такой же вид имеет распределение $A_- * \varphi = A_- * \varphi_0 + A_- \varphi_-$, поскольку $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{C}(\Phi)$ и $(\mathcal{O}')_- \subset \mathfrak{C}([\Phi]_-)$. Так как оператор con_{A_-} переводит в себя подпространство $\delta^{\pm}_{-r}[\Phi]_-$, то он продолжается на фактор-пространство $\Phi^{\{r\}}_{\oplus}$ и коммутирует с каноническим проектором $p^{\{r\}}_{\oplus}$.

Пусть $A = A_+ * A_-$, где $A_\pm \in (\mathcal{U}_\pm)^{\mathrm{reg}}$ и $\deg \widehat{A}_+ = d_+$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\Phi^{\{r+d_+\}}_{[+]} & \xrightarrow{p^{\{r\}}_{\oplus}\mathrm{con}_A} & \Phi^{\{r\}}_{\oplus} \\
{\scriptstyle \mathrm{con}_{A_+}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{con}_{A_-}} \\
\Phi^{\{r\}}_{[+]} & \xrightarrow{p^{\{r\}}_{\oplus}} & \Phi^{\{r\}}_{\oplus}
\end{array}$$

Поскольку операторы $\mathrm{con}_{A_\pm}$ имеют непрерывные обратные операторы $\mathrm{con}_{G_\pm}$ (где $G_\pm \in \mathcal{U}_\pm$ и $A_\pm * G_\pm = \delta(t)$), то вертикальные отображения будут изоморфизмами пространств. Нижнее горизонтальное отображение будет изоморфизмом в силу предложения 1 из п. 3.1. Но тогда и верхнее горизонтальное отображение будет изоморфизмом, причем

$$\left(p^{\{r\}}_{\oplus}\,\mathrm{con}_A\right)^{-1} = \mathrm{con}_{G_+}\pi^{\{r\}}_{+}\,\mathrm{con}_{G_-}, \tag{11}$$

где $\pi^{\{r\}}_{+}$ — оператор (9).

Замечание. Доказанное нами предложение 1 из п. 3.2 можно переформулировать следующим образом: если $A = A_+ * A_-$, $A_\pm \in (\mathcal{U}_\pm)^{\mathrm{reg}}$ и $\deg A_+ = d_+$, то $\forall f \in \Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, H^{(\infty)}_{(l)}$ уравнение

$$A * u_+ - f \in \delta^{\pm}_{-r}[\Phi]_-, \quad [\Phi]_- = (\mathcal{O}')_-, (\mathcal{S}')_-, H^{(-\infty)}_{(l)-}, \tag{12}$$

имеет единственное решение $u_+ \in \Phi^{\{r+d_+\}}_{[+]}$, которое задается формулой (см. (10) и (9)):

$$u_+ = G_+ * \delta^{\pm}_{-r}(D)\,\theta_+ G_- * \delta^{+}_{r}(D)\,f, \tag{13}$$

где $G_\pm \in \mathcal{U}_\pm$ и $A_\pm * G_\pm = \delta(t)$.

3.4. Необходимость условия факторизации для разрешимости уравнения (12) (доказательство предложения 2 из п. 3.2). Итак, пусть для $\Phi = H^{(\infty)}$ оператор (10) для некоторых $r, c \in \mathbb{Z}$ имеет левый обратный.

1) Не ограничивая общности, можно считать, что $r = 0$. Действительно, если для некоторого r оператор $\mathfrak{A} = p^{\{r\}}_{\oplus}\,\mathrm{con}_A$: $\Phi^{\{r+c\}}_{[+]} \to \Phi^{\{r\}}_{\oplus}$ имеет левый обратный $\mathfrak{B}$: $\Phi^{\{r\}}_{\oplus} \to \Phi^{\{r+c\}}_{[+]}$, то согласно (8) оператор $\delta^{+}_{r}(D)\,\mathfrak{A} = p^{\{0\}}_{\oplus}\,\mathrm{con}_{\delta^{+}_{r}A}$: $\Phi^{\{r+c\}}_{[+]} \to \Phi^{\{0\}}_{\oplus}$ имеет

непрерывный левый обратный $\mathfrak{B}\delta_{-r}^{+}(D)$: $\Phi_{\oplus}^{\{0\}} \to {}_{[+]}^{+c\}}$. Теперь остается заменить $r+c$ на c и A на $\delta_r^{+}(D)\,A$.

2) Не ограничивая общности, можно считать, что $c=0$. Действительно, если $\mathfrak{B}\colon \Phi_{\oplus}^{\{0\}} \to \Phi_{[+]}^{\{c\}}$ является левым обратным к $\mathfrak{A} = p_{\oplus}^{\{0\}} \operatorname{con}_A\colon \Phi_{[+]}^{\{c\}} \to \Phi_{\oplus}^{\{0\}}$, то $\delta_c^{+}(D)\,\mathfrak{B}\colon \Phi_{\oplus}^{\{0\}} \to \Phi_{[+]}$ будет левым обратным к $\mathfrak{A}\delta_{-c}^{+}(D) = p_{\oplus} \operatorname{con}_{\delta_{-c}^{+}A}\colon \Phi_{[+]} \to \Phi_{\oplus}^{\{0\}}$.

3) Итак, нам дано, что для $A \in \mathcal{U}$ оператор

$$p_{\oplus}^{\{0\}} \operatorname{con}_A\colon\ \Phi_{[+]} \to \Phi_{\oplus}^{\{0\}} \tag{10'}$$

имеет непрерывный левый обратный

$$\mathfrak{B}\colon\ \Phi_{\oplus}^{\{0\}} \to \Phi_{[+]}. \tag{10''}$$

Напомним, что для $\Phi = H^{(\infty)}$ пространство $\Phi_{[+]}$ является проективным пределом $\bigcap\limits_q H_{+}^{(0|q)}$; $\Phi_{\oplus}^{\{0\}}$ можно отождествить с проективным пределом $\bigcap\limits_q H_{\oplus}^{(q)}$. Из непрерывности (10″) следует, что $\forall q \geqslant 0\ \exists q'$, так что оператор $\mathfrak{B}$ продолжается до непрерывного оператора из $H_{\oplus}^{(q')}$ в $H_{+}^{(0|q)}$. Вспоминая, что $\mathfrak{B}P_{\oplus} \operatorname{con}_A u = u$, получим оценку

$$\|u, H_{+}^{(0|q)}\| \leqslant \mathrm{const}\cdot \|p_{\oplus}(A*u), H_{\oplus}^{(q')}\| \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{const}\cdot \|\delta_{q'}^{-}(D)\, p_{\oplus}(A*u), H_{\oplus}\| = \\ = \mathrm{const}\cdot \left(\int\limits_0^{\infty} |(\delta_{q'}^{-}A)*u|^2\,dt \right)^{1/2}.$$

4) Мы ограничимся случаем $q=0$. Можно считать, не ограничивая общности, что $q'=0$ (в противном случае заменим A на $\delta_{q'}^{-}(D)\,A \in \mathcal{U}$). Итак, мы показали, что в условиях предложения 2 из п. 3.2 справедлива оценка

$$\int\limits_0^{\infty} |u(t)|^2\,dt < \mathrm{const}\cdot \int\limits_0^{\infty} |(A*u)(t)|^2\,dt \quad \forall u \in H_{+}^{(0|N)}. \tag{14}$$

(N достаточно велико).

Отсюда вытекает более слабая оценка

$$\|u\| \leqslant \mathrm{const}\cdot\|Au\| \quad \forall u \in H_{+}^{(N)}. \tag{15}$$

В силу теоремы 2.3 утверждение предложения 2 из п. 3.2 является следствием двух лемм.

Лемма 1. *Пусть для распределения* $A \in \mathcal{O}'$ *справедлива оценка* (15). *Тогда* $A \in (\mathcal{O}')^{\mathrm{reg}}$.

Лемма 2. *Пусть* $A = A_{-} + a$, $A_{-} \in (\mathcal{O}')_{-}$, $a \in \mathcal{S}$, *и пусть выполнена оценка* (14). *Тогда найдутся такие* $R > 0$, $c > 0$, *что*

$$|\widehat{A}_{-}(z)| > c, \quad |z| \geqslant R, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0. \tag{16}$$

3.5. Доказательство леммы 1 из п. 3.4. Ввиду фурье-двойственности между $\mathcal{O}'$, $(\mathcal{O}')_+$ и $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^+$ вместо леммы 1 мы будем доказывать эквивалентное (а фактически, более точное) утверждение.

Предложение. *Пусть* $B(\sigma) \in \mathcal{M}$ *и справедлива оценка*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |B(\sigma)\varphi(\sigma)|^2 d\sigma \quad \forall \varphi \in H^+_{(N)}. \tag{17}$$

Тогда найдется такая константа $c_0 > 0$, *что*

$$|B(\sigma)| > c_0. \tag{18}$$

Доказательство будем проводить от противного, рассматривая оценку (17) на всевозможных сдвигах функций

$$\varphi_m(\sigma) = c(m)^{-1/2}(\sigma - i)^{-m} \in \mathcal{M}^+ \cap H_{(m-1)}, \tag{19}$$

где $c(m)$ выбрано из условия нормировки $\|\varphi_m\| = 1$, так что

$$c(m) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\sigma^2)^{-m} d\sigma. \tag{20}$$

При доказательстве предложения будет использована техническая лемма.

Лемма. *Пусть* $c(m)$ *определено посредством* (20). *Тогда при больших* m

$$c^{-1}(m) = O(m^{1/2}), \tag{21}$$

$$(c(m-\mu-1) - c(m-\mu))\, c^{-1}(m) = O(m^{-1}), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+. \tag{22}$$

Считая лемму доказанной, приступим к доказательству предложения. Если не существует такой постоянной $c_0 > 0$, для которой выполнена оценка снизу, то символ $B(\sigma)$ либо имеет нуль в некоторой точке $\sigma_0 \in \mathbb{R}$:

$$B(\sigma_0) = 0, \tag{18'}$$

либо $B(\sigma)$ имеет нуль на бесконечности, т. е. найдется такая последовательность σ_k, $|\sigma_k| \to \infty$, что

$$|B(\sigma_k)| < 1/k \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{18''}$$

Покажем сначала, что (18′) противоречит (16). Для этого подставим в (16) $\varphi = \varphi_m(\sigma - \sigma_0)$. Неравенство примет вид

$$1 \leqslant \frac{c^2}{c(m)} \int_{-\infty}^{\infty} |B(\sigma)|^2 (1 + |\sigma - \sigma_0|^2)^{-m} d\sigma. \tag{23}$$

Если выполнено (18′), то можно указать такое $K > 0$ и такое μ (для простоты считаем μ натуральным), что

$$|B(\sigma)| \leqslant K|\sigma - \sigma_0|(1 + |\sigma - \sigma_0|^2)^{\mu/2}.$$

Тогда неравенство (23) приводит к неравенству

$$1 \leqslant \frac{c^2 K^2}{c(m)} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 (1+\sigma^2)^{\mu-m}\, d\sigma = K^2 c^2 \frac{c(m-\mu-1) - c(m-\mu)}{c(m)}.$$

Воспользовавшись (22), мы получим, что (18′) противоречит оценке (16).

Пусть теперь выполнено (18″). Подставляя в (16) $\varphi = \varphi_m(\sigma - \sigma_k)$ и считая, что $m = m(k)$ (эта зависимость будет указана в процессе доказательства), получим

$$1 \leqslant \frac{c^2}{c(m)} \int_{-\infty}^{\infty} |B(\sigma)|^2 (1 + |\sigma - \sigma_k|^2)^{-m}\, d\sigma =$$

$$= \frac{c^2}{c(m)} \left(\int\limits_{|\sigma-\sigma_k| \leqslant m^{-\varepsilon}} + \int\limits_{|\sigma-\sigma_k| \geqslant m^{-\varepsilon}} \right) = \psi_k' + \psi_k''. \quad (24)$$

Если $|\sigma - \sigma_k| < m^{-\varepsilon}$ и $|\sigma_k| > 1$, то с учетом (18″) получим оценку для $|B(\sigma)|$:

$$|B(\sigma)| \leqslant |B(\sigma_k)| + |B(\sigma) - B(\sigma_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k} + |\sigma - \sigma_k|\, |B'(\sigma_k + \theta(\sigma - \sigma_k))| \leqslant \frac{1}{k} + B_0 m^{-\varepsilon} |\sigma_k|^{\mu}.$$

Подставляя эту оценку в выражение для ψ_k', найдем

$$\psi_k' \leqslant c_1^2 \left(k^{-2} + B_0^2 m^{-2\varepsilon} |\sigma_k|^{2\mu}\right) c^{-1}(m) \int\limits_{|\sigma| < m^{-\varepsilon}} (1 + |\sigma|^2)^{-m} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_1^2 \left(k^{-2} + B_0^2 m^{-2\varepsilon} |\sigma_k|^{2\mu}\right). \quad (25)$$

В области $|\sigma - \sigma_k| > m^{-\varepsilon}$ функцию $B(\sigma)$ оценим следующим образом:

$$|B(\sigma)| < B_1 (1 + |\sigma|)^{\nu} \leqslant B_1 |\sigma_k|^{|\nu|} (1 + |\sigma - \sigma_k|^2)^{\nu/2}.$$

Тогда

$$\psi_k'' \leqslant c_2^2 |\sigma_k|^{2|\nu|} c^{-1}(m) \int\limits_{|\sigma| \geqslant m^{-\varepsilon}} (1 + |\sigma|^2)^{\nu - m} d\sigma. \quad (26)$$

Далее, имеем

$$\int\limits_{|\sigma| \geqslant m^{-\varepsilon}} (1+\sigma^2)^{\nu-m} d\sigma = \int\limits_{m^{-\varepsilon} \leqslant |\sigma| \leqslant 1} + \int\limits_{|\sigma| \geqslant 1} \leqslant (1 + m^{-2\varepsilon})^{\nu - m} +$$

$$+ 2 \int_1 \sigma^{2\nu - 2m} d\sigma = O(\exp(-m^{1-2\varepsilon})) + (m - \nu - 1/2)^{-1}. \quad (27)$$

Если $0 < \varepsilon < 1/2$, то первый член в правой части (27) убывает быстрее любой степени m и, следовательно, правая часть (27) есть $O(m^{-1})$. С учетом неравенства (21) из (26) следует неравенство

$$\psi_k'' \leqslant c_3^2 |\sigma_k|^{2|\nu|} m^{-1/2}. \qquad (28)$$

Подставляя оценки (25), (28) в (24), окончательно получим

$$1 \leqslant c_4^2 \left(k^{-2} + m^{-2\varepsilon} |\sigma_k|^{2\mu} + m^{-1/2} |\sigma_k|^{2|\nu|}\right). \qquad (29)$$

Возьмем $m = m(k) = |\sigma_k|^\lambda$, где λ столь велико, что $\lambda\varepsilon > \mu$, $\lambda > 4|\nu|$. Тогда правая часть $(29) \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. неравенства $(18'')$ противоречат (16).

Доказательство леммы. Мы можем ограничиться целыми значениями m. По теореме о вычетах

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^m} = 2\pi i \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\tau^{m-1}} (\tau + i)^{-m}\Big|_{\tau=i} =$$

$$= 2\pi i \frac{(-m)\dots(-2m+2)}{(m-1)!} (2i)^{-2m+1},$$

откуда

$$c(m) = 4\pi 2^{-2m} (2m-2)!/((m-1)!)^2. \qquad (30)$$

Из (30) непосредственно следует, что $c(m-1)/c(m) = (2m-2)/ /(2m-3)$. Отсюда следует, что $c(m-\mu)c^{-1}(m) \to 1$ при $m \to \infty$ и любом натуральном μ. Далее,

$$\frac{c(m-\mu-1) - c(m-\mu)}{c(m)} = \frac{c(m-\mu)}{c(m)} \frac{c(m-\mu-1) - c(m-\mu)}{c(m-\mu)} =$$

$$= \frac{c(m-\mu)}{c(m)} \frac{1}{2m-2\mu-3},$$

откуда и следует (22).

Если воспользоваться формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} (1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

то получим

$$c(m) = \sqrt{\frac{\pi}{m-1}} (1 + o(1)), \quad m \to \infty,$$

откуда и следует (21).

3.6. Доказательство леммы 2 из п. 3.4. Подставим в неравенство (14) функцию

$$v_z(t) = \sqrt{2 \operatorname{Im} z}\, \theta_+(t) \exp(izt) \in (H^{(\infty)})_{[+]}, \quad \operatorname{Im} z > 0, \qquad (31)$$

множитель $\sqrt{2 \operatorname{Im} z}$ взят для нормировки:

$$\|v_z\|^2 = 2 \operatorname{Im} z \int_0^\infty \exp(-2 \operatorname{Im} zt)\, dt = 1.$$

Лемма. *Если $A_- \in (\mathcal{O}')_-$ и $z_z(t)$ имеет вид (31), то*

$$(A_- * v_z)(t) = \sqrt{2\pi} \widehat{A}_-(z) v_z(t), \quad t > 0. \qquad (32)$$

Доказательство. Как было отмечено в предложении 3(i) из п. I.3.3, оператор con_f, $f \in \mathcal{O}'$, является п. д. о. с символом $\sqrt{2\pi}\hat{f}(\sigma)$. Предположим сначала, что $\widehat{A_-}(\tau) = O(|\tau|^{-1})$. Тогда

$$(A_- * v_z)(t) = \int \exp(i\sigma t)\widehat{A}_-(\sigma)\widehat{v}_z(\sigma)\,d\sigma. \tag{32'}$$

Имеем

$$\widehat{v}_z(\sigma) = \frac{\sqrt{2\,\mathrm{Im}\,z}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i\sigma t + izt}\,dt = \frac{\sqrt{2\,\mathrm{Im}\,z}}{i\sqrt{2\pi}}(\sigma - z)^{-1}.$$

Подставляя это выражение в интеграл (32') и применяя к функции $\exp(it\tau)\widehat{A}_-(\tau)\widehat{v}_z(\tau)$, мероморфной в верхней полуплоскости, теорему о вычетах, получим равенство (32). В общем случае запишем $A_- = \delta_k^-(D)\delta_{-k}^+(D)A_- = \delta_k^-(D)A_-^{(0)}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, а $A_-^{(0)} \in (\mathcal{O}')_-$ и $\widehat{A}_-^{(0)}(\tau) = O(|\tau|^{-1})$. Тогда по доказанному

$$(A_- * v_z)(t) = \sqrt{4\pi\,\mathrm{Im}\,z}\,\delta_k^-(D)\left[\widehat{A}^{(0)}(z)\,\theta_+(t)\exp(izt)\right].$$

Поскольку $\theta_+(t) \equiv 1$ при $t > 0$, то, дифференцируя экспоненту, получим (32).

Итак, подставляя функцию (31) в неравенство (14) и записывая A в виде (2.1'), получим оценку

$$1 \leqslant c^2|\widehat{A}_-(z)|^2 + c^2\|a * v_z\|^2, \qquad a \in \mathcal{S}. \tag{33}$$

Так как con_a — п. д. о. с символом $\sqrt{2\pi}\hat{a}(\sigma)$, то

$$\|a * v_z\|^2 = 2\pi\|\hat{a}\hat{v}_z\|^2 = 2\,\mathrm{Im}\,z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{a}(\sigma)|^2}{(\sigma - \mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2}\,d\sigma. \tag{34}$$

Если в знаменателе подынтегральной функции отбросить член $(\sigma - \mathrm{Re}\,z)^2$, то получим

$$\|a * v_z\| \leqslant (2/\mathrm{Im}\,z)^{1/2}\|a\|.$$

Из (33) следует, что

$$|\widehat{A}_-(z)| > 2^{-1/2}c^{-1}, \qquad \mathrm{Im}\,z > 4\|a\|^2c^2. \tag{35}$$

Покажем теперь, что

$$\|a * v_z\| \leqslant c(r)|\mathrm{Re}\,z|^{-1}, \quad 0 \leqslant \mathrm{Im}\,z \leqslant r. \tag{36}$$

Тогда в силу (33) найдется такое R_0, что неравенство (35) сохранится при $|\mathrm{Re}\,z| > R_0$, $\mathrm{Im}\,z \leqslant r$.

Для доказательства (36) сделаем в правом интеграле (34) замену $\sigma = \mathrm{Re}\,z + \theta\,\mathrm{Im}\,z$. Тогда получим

$$\|a * v_z\|^2 = 2\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{a}(\mathrm{Re}\,z + \theta\,\mathrm{Im}\,z)|^2(1 + \theta^2)^{-1}\,d\theta =$$

$$= 2\int_{|\theta| < |\mathrm{Re}\,z|/2\mathrm{Im}\,z} + 2\int_{|\theta| > |\mathrm{Re}\,z|/2\mathrm{Im}\,z} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \max_{|\theta|>|\operatorname{Re} z|/2} |\widehat{a}(\theta)|^2 + 2 \max_{\theta\in\mathbb{R}} |\widehat{a}(\theta)|^2 \int\limits_{|\operatorname{Re} z|/2 \operatorname{Im} z}^{\infty} \theta^{-2}\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \max_{|\theta|>|\operatorname{Re} z|/2} |\widehat{a}(\theta)|^2 + 4 \operatorname{Im} z \max |\widehat{a}(\theta)|^2 \, |\operatorname{Re} z|^{-1}. \qquad (37)$$

Первый член в правой части убывает быстрее любой степени $|\operatorname{Re} z|$, откуда вытекает неравенство (36).

3.7. Граничные задачи для операторов Винера — Хопфа (случай положительного индекса (факторизации). Рассмотрим теперь исходное уравнение (1).

Предложение 1. *Пусть* $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$ *и* $\operatorname{ind} A = d_+ > 0$. *Тогда оператор*

$$\mathfrak{A} = p_\oplus \operatorname{con}_A\colon\ \Phi_{[+]} \to \Phi_\oplus, \quad \Phi = \mathscr{S}, \ \mathcal{O}, \ H_{(l)}^{(\infty)}, \qquad (38)$$

сюръективен и имеет ядро размерности d_+.

Если записать A *в виде* $A = A_+ * A_-$ *и если* $G_\pm$ — *обратные элементы к* $A_\pm$ *в алгебре* $\mathcal{U}_\pm (A_\pm * G_\pm = \delta(t))$, *то в качестве базиса* $\operatorname{Ker} \mathfrak{A}$ *можно взять распределения*

$$u_j = G_+ * D^{j-1}\delta(t) \in \mathscr{S}_{[+]}^{\{d_+ - j\}}, \quad j = 1, \ldots, d_+. \qquad (39)$$

Доказательство. Согласно предложению 1 из п. 3.2 в условиях предложения имеет место изоморфизм

$$\mathfrak{A}_0 = p_\oplus \operatorname{con}_A\colon\ \Phi_{[+]}^{\{d_+\}} \to \Phi_\oplus. \qquad (38')$$

Так как $\Phi_{[+]}^{\{d_+\}} \subset \Phi_{[+]}$ при $d_+ > 0$, то отображение (38) будет сюръективным. Далее, изоморфизм $\mathfrak{A}_0$ позволяет каждый элемент $\varphi \in \Phi_{[+]}$ представить в виде

$$\varphi = \mathfrak{B}_0 \mathfrak{A}\varphi + (\varphi - \mathfrak{B}_0 \mathfrak{A}\varphi) = \varphi_0 + \psi, \quad \varphi_0 \in \Phi_{[+]}^{\{d_+\}}, \quad \psi \in \operatorname{Ker} \mathfrak{A},$$

где через $\mathfrak{B}_0$ обозначен оператор, обратный к (38′). Очевидно, что это разложение однозначно. Таким образом, $\operatorname{Ker} \mathfrak{A}$ является дополнительным подпространством к $\Phi_{[+]}^{\{d_+\}}$ в $\Phi_{[+]}$. Согласно результатам § IV.1 $\Phi_{[+]}^{\{d_+\}}$ будет подпространством $\Phi_{[+]}$ коразмерности d_+. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker} \mathfrak{A}$ — конечномерное подпространство и $\dim \operatorname{Ker} \mathfrak{A} = d_+ = \operatorname{ind} A$.

Распределения (39) принадлежат ядру (38), поскольку

$$A * u_j = A_- * (A_+ * G_+) * D^{j-1}\delta(t) = A_- * D^{j-1}\delta(t) \in (\mathcal{O}')_-.$$

Распределения (39) линейно независимы. Действительно, так как con_{G_+} — обратимый оператор, то из линейной зависимости (39) следовала бы линейная зависимость распределений $D^{j-1}\delta(t)$ или их символов σ^{j-1}, $j = 1, \ldots, d_+$. Обращением предложения 1 является

Предложение 2. *Пусть для* $A \in \mathcal{U}$, $\Phi \in H^{(\infty)}$, *оператор* (38) *сюръективен и имеет конечномерное ядро. Тогда* $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$ *и* $\dim \operatorname{Ker} \mathfrak{A} = \operatorname{ind} A$.

Доказательство. Пусть L — некоторое подпространство $\Phi_{[+]}$, дополнительное к ядру оператора (38) (существование такого подпространства вытекает из конечномерности ядра). Тогда оператор

$$\mathfrak{A}_L = p_\oplus \operatorname{con}_A\colon L \to \Phi_\oplus$$

будет одновременно инъективным и сюръективным. Но тогда по теореме Банаха оператор $\mathfrak{A}_L$ имеет непрерывный обратный

$$\mathfrak{B}_L\colon \Phi_\oplus \to L$$

(напомним, что пространства $\Phi_\oplus = H_\oplus^{(\infty)}$ и $L \subset H^{(0|\infty)}$ являются пространствами Фреше). Отсюда, в частности, вытекает априорная оценка (ср. доказательство предложения 3.4)

$$\int_0^\infty |u(t)|^2\,dt \leqslant \text{const}\cdot\int_0^\infty \left|\left(\left(\delta_{q'}^- A\right) * u\right)(t)\right|^2 dt \quad \forall u \in L. \tag{40}$$

Мы сейчас покажем, что подпространство L можно подобрать таким образом, чтобы вывести из этой оценки аналоги лемм 1, 2 из п. 3.4.

Для любого натурального k положим

$$U_{[+]}^{\{k\}} = \delta_k^-(D)\,\Phi_{[+]}^{\{k\}} = \delta_k^-(D)\,\delta_{-k}^+(D)\,\Phi_{[+]}.$$

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathcal{U}$ и $\Phi = H^{(\infty)}$. Пусть на подпространстве $L = U_{[+]}^{\{k\}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, выполнена оценка* (40). *Тогда $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$.*

Доказательство. Подставим в (40) $u = \delta_k^-\delta_{-k}^+ v_+$, где $v_+ \in H_+^{(N)}$. Тогда $u \in H_+^{(N)}$, и интеграл в левой части (40) можно заменить интегралом по всей прямой. Замечая, что $|(\sigma + i)^k(\sigma - i)^{-k}| = 1$ и заменяя $\delta_{q'}^- A$ на B, получим неравенство

$$\|\widehat{v}_+\| \leqslant \text{const}\cdot\|\widehat{B}\widehat{v}_+\| \quad \forall v_+ \in H_+^{(N)}.$$

Воспользовавшись предложением 3.5, мы получим, что $A \in (\mathcal{O}')^{\text{reg}}$.

Теперь нам надо показать, что если A записано в форме (2.1′), то $\widehat{A}_-(z)$ допускает степенную оценку снизу вне большого полукруга $\{|z| \geqslant R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Как и в п. 3.6, подставим в (40) функцию $u = \delta_k^-(D)\,\delta_{-k}^+(D)\,v_z$, где v_z задается посредством (31). Тогда оценка примет вид

$$1 \leqslant c^2\left\|\left(\delta_{q'+k}^- A_-\right) * \delta_{-k}^+ v_z\right\|^2 + c^2\|a_k * v_z\|^2,$$

где $a_k = \delta_{k+q'}^-\delta_{-k}^+ a \in \mathcal{S}$. Оценки второго члена в правой части фактически уже проведены в п. 3.6. Если мы покажем, что первый член в правой части не превосходит

$$c_1^2\left|\widehat{A}_-(z)(z+i)^{q'}\right| + O\left(|z|^{-1/2}\right), \quad |z| > 2,$$

то нужная нам оценка A_- и, следовательно, включение $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$ будут доказаны.

Как и в лемме 3.6, имеем при $\operatorname{Im} z > 0$

$$((\delta^-_{q'+k}A_-) * (\delta^+_{-k}v_z))(t) =$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi \operatorname{Im} z}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t}\widehat{A}_-(\sigma)(\sigma+i)^{k+q'}(\sigma-i)^{-k}(\sigma-z)^{-1}\,d\sigma =$$

$$= \sqrt{4\pi \operatorname{Im} z}\, e^{izt}\widehat{A}_-(z)(z+i)^{k+q'}(z-i)^{-k} +$$

$$+ \frac{\sqrt{4\pi \operatorname{Im} z}}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left[e^{i\tau t}\widehat{A}_-(\tau)(\tau+i)^{k+q'}(\tau-z)^{-1}\right]_{\tau=i} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k \widehat{A}_-(z)(z+i)^{q'}v_z(t) + \frac{\sqrt{\operatorname{Im} z}}{z-i}h_z(t),$$

где $\|v_z\| = 1$ и $\|h_z\| = O(1)$ при $|z| \geqslant 2$.

Лемма 2. *Для любого* $\varphi \in \Phi_{[+]}$ $(\Phi \neq H^{(\infty)})$ *можно указать такое натуральное* N_0, *что* $\varphi \notin U^{\{N\}}_{[+]}$ *при* $N \geqslant N_0$.

Доказательство. Пространство $U^{\{k\}}_{[+]}$ состоит из функций ψ, которые имеют преобразование Фурье — Лапласа $\widehat{\psi}(\tau)$, голоморфное при $\operatorname{Im}\tau < 0$ и имеющее в точке $\tau = -i$ нуль порядка k. Так как преобразование Фурье — Лапласа $\widehat{\varphi}(\tau)$ произвольного элемента $\varphi \in \Phi_{[+]}$ может иметь нуль только конечного порядка, то приходим к утверждению леммы.

Закончим доказательство предложения. Из конечномерности $\operatorname{Ker}\mathfrak{A}$ и леммы 2 следует, что всегда можно так выбрать дополнительное подпространство L, чтобы оно содержало подпространство $U^{\{k\}}_{[+]}$, где k — достаточно большое натуральное число. Воспользовавшись леммой 1, мы получим, что $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$.

Нам осталось проверить, что $\operatorname{ind} A > 0$. Действительно, если предположить, что $\operatorname{ind} A \leqslant 0$, то оператор (38) не будет иметь ядра в силу нижеследующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$ *и* $\operatorname{ind} A \leqslant 0$. *Тогда оператор* (38) *инъективный.*

Доказательство. Согласно предложению 1 из п. 3.2 (в этом предложении надо взять $r = d_+ = -\operatorname{ind} A$) оператор

$$p^{\{d+\}}_{\oplus}\operatorname{con}_A\colon\ \Phi_{[+]} \to \Phi^{\{d+\}}_{\oplus}$$

является изоморфизмом и, следовательно, не имеет ядра, т. е.

$$\{u \in \Phi_{[+]},\quad A * u = \delta^+_{-d_+}h_-,\ h_- \in [\Phi]_-\} \Rightarrow \{u \equiv 0\}.$$

Но тогда и оператор (38) не может иметь ядра.

Итак, если распределение $A \in \mathcal{U}^{\text{reg}}$ имеет положительный индекс факторизации, то уравнение

$$p_{\oplus}(A * u) = f \in \Phi \tag{41}$$

имеет много решений. Согласно теореме 3.2 всегда существует решение $u_0 \in \Phi^{\{d_+\}}_{[+]}$ уравнения (41). Тогда $u - u_0$ принадлежит ядру оператора (38) и, следовательно, является линейной комбинацией функций (39) — базисных функций ядра.

Чтобы устранить неоднозначность решения, зададимся набором $B_1, \ldots, B_{d_+}$ линейных непрерывных функционалов на $\Phi_{[+]}$ и дополним уравнение (41) «граничными условиями»

$$B_j(u) = c_j, \quad j = 1, \ldots, d_+. \tag{42}$$

Как мы уже говорили, общее решение уравнения (41) имеет вид

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{d_+} \alpha_k u_k, \quad u_0 \in \Phi_{[+]}^{\{d_+\}}.$$

Поэтому уравнение (42) приводит к системе алгебраических уравнений на коэффициенты α_j

$$\sum_{k=1}^{d_+} B_j(u_k)\,\alpha_k = c_j - B_j(u_0).$$

Последняя система однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\det \|B_j(u_k)\| \neq 0. \tag{43}$$

Условие (43) принято называть *условием Шапиро — Лопатинского* для задачи (41), (42).

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда функционалы (42) определяются распределениями $B_j \in \mathcal{U}$ и имеют вид

$$B_j(u) = (B_j * u)(+0). \tag{44}$$

Перепишем применительно к условиям (44) условие Шапиро — Лопатинского. Для функций (39) имеем

$$B_j(u_k) = D^{k-1}(B_j * G_+)(0). \tag{45}$$

Если символ $\widehat{B}_j(\sigma)$ достаточно быстро убывает при $|\sigma| \to \infty$, то (45) можно переписать в виде

$$B_j(u_k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{B}_j(\sigma)\,\sigma^{k-1} \widehat{A}_+^{-1}(\sigma)\,d\sigma, \tag{45'}$$

и условие (43) примет вид

$$\det \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{B}_j(\sigma)\,\sigma^{k-1} A_+^{-1}(\sigma)\,d\sigma \right\| \neq 0. \tag{43'}$$

В общем случае для вычисления (45) надо распределение $B_j * G_+ \in \mathcal{U}$ записать в форме (2.1′) и отбросить слагаемое, принадлежащее $(\mathcal{O}')_-$. Однако и в этом случае мы сохраним обозначение (43′).

Теорема. *Пусть* $A \in \mathcal{U}$, $\Phi = H^{(\infty)}$ *и функционалы* $B_j(u)$ *имеют вид* (44) *с* $B_j \in \mathcal{U}$. *Граничная задача* (41), (42) *имеет единственное решение при любых* $f \in \Phi$, *и* $(c_1, \ldots, c_{d_+}) \in \mathbb{C}^{d_+}$ *тогда и только тогда, когда*

(i) $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$;

(ii) $\operatorname{ind} A = d_+$;

(iii) *справедливо условие Шапиро — Лопатинского* (43′).

Доказательство. Достаточность условий (i) — (iii) мы уже фактически доказали. Остановимся на необходимости этих условий. Из однозначной разрешимости задачи (41), (42) $\forall f \in \Phi$ следует сюръективность оператора (38). Из однозначной разрешимости задачи (41), (42) для $f = 0$ следует, что оператор (38) имеет ядро размерности d_+. Применяя предложение 2, мы придем к необходимости условий (i), (ii). Применяя предложение 1, мы найдем, что ядро оператора (38) состоит из линейных комбинаций функций (39). Но тогда условие (43′) необходимо для разрешимости задачи (41), (42) для $f = 0$. Теорема доказана.

3.8. Кограничные задачи для операторов Винера — Хопфа (случай отрицательного индекса факторизации).

Предложение 1. *Пусть* $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$ *и* $\operatorname{ind} A = -d$, $d > 0$, *и пусть* $\Phi = \mathcal{S}, \mathcal{O}, H_{(l)}^{(\infty)}$. *Тогда оператор* (38) *инъективен, его образ замкнут и имеет коразмерность* d.

Более того, если $A = A_+ * A_-$ — *каноническая факторизация и* $G_\pm * A_\pm = \delta(t)$, $G_\pm \in \mathcal{U}_\pm$, *то элемент* $f \in \Phi_\oplus$ *принадлежит образу* (38) *тогда и только тогда, когда*

$$D^{k-1}(G_- * f)(+0) = 0, \qquad k = 1, \ldots, d. \tag{46}$$

Замечание. Каждый элемент $f \in \Phi_\oplus$ является набором распределений $f = f_0 + f_-$, $f_- \in [\Phi]_- = (\mathcal{O}')_-$, ... Тогда условие (46) эквивалентно условиям

$$D^{k-1}(G_- * f_0)(0) = 0, \qquad k = 1, \ldots, d. \tag{46′}$$

Условия (46′) не зависят от выбора f_0.

Доказательство. Инъективность оператора (38) доказана в лемме 3 предыдущего пункта.

Пусть $f \in \Phi_\oplus$ лежит в образе оператора (38) и f_0 — представитель класса смежности f, т. е. существует такое $u_+ \in \Phi_{[+]}$, что $A * u_+ - f_0 \in [\Phi]_-$. Действуя оператором con_{G_-}, получим

$$A_+ * u_+ - G_- * f_0 = h_- \in [\Phi]_-,$$

откуда

$$A_+ * u_+ - \theta_+ G_- * f_0 = h_- + \theta_- G_- * f_0 \in [\Phi]_-.$$

Поскольку левая часть лежит в $\Phi_{[+]}$, то она тождественно равна нулю, откуда

$$\theta_+ G_- * f_0 = A_+ * u_+ \in \Phi_{[+]}^{\{d\}}.$$

Включение $\theta_+ G_- * f_0 \in \Phi_{[+]}^{\{d\}}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия (46′).

Обратно, пусть $f \in \Phi_\oplus$ и f_0 — элемент класса смежности f. Согласно результатам п. 3.3, существует такое распределение $u_+ \in \Phi_{[+]}$, что $A * u_+ - f_0 \in \delta_{-d}^{+}[\Phi]_-$. Мы сейчас проверим, что если выполнены условия (46), то $A * u_+ - f_0 \in [\Phi]_-$. В самом деле, в классе смежности f можно выбрать функцию f_0, удовлетворяющую (46′). Согласно замечанию 3.3 функция u_+ задается с помощью (13), где $r=d$, $f=f_0$. Тогда

$$A*u_+ - f_0 = A*G_+*\delta^{+}_{-d}\theta_+\delta^{+}_{d}G_-*f_0 - f_0 = \\ = A_-*\left(\delta^{+}_{-d}\theta_+\delta^{+}_{d}G_-*f_0 - G_-*f_0\right). \quad (47)$$

Если выполнены условия (46), то $\theta_+G_-*f_0 \in \Phi_+^{\{d\}}$ и $\theta_+\delta^{+}_{d}G_-*f_0 = \delta^{+}_{d}\theta_+G_-*f_0$. Но тогда правая часть (47) будет равна

$$A_-*(\theta_+G_-*f_0 - G_-*f_0) = A_-*\theta_-G_-*f_0 \in [\Phi]_-.$$

Итак, образ оператора (38) выделяется d уравнениями (46). Поскольку левые части (46) являются непрерывными функционалами на $\Phi_{[+]}$, то мы доказали, что образ (38) замкнут и имеет коразмерность d.

Обращением предложения 1 является

Предложение 2. *Пусть* $A\in\mathcal{U}$ *и* $\Phi = H^{(\infty)}$. *Пусть оператор* (38) *инъективен, а его образ является замкнутым подпространством* $\Phi_\oplus = H_\oplus^{(\infty)}$ *коразмерности* d. *Тогда* $A\in\mathcal{U}^{\text{reg}}$ *и* $\operatorname{ind} A = -d$.

Доказательство. Обозначим через L образ (38). Согласно условиям предложения оператор (38) имеет обратный $\mathfrak{B}: L\to\Phi_{[+]}$. Этот оператор будет левым обратным к (38). Но тогда согласно предложению 2 из п. 3.2 $A\in\mathcal{U}^{\text{reg}}$. Из леммы 3 п. 3.7 следует, что $\operatorname{ind} A<0$. Применяя предложение 1, получим, что $-d = \operatorname{ind} A$.

Итак, если распределение $A\in\mathcal{U}^{\text{reg}}$ имеет отрицательный индекс факторизации, то уравнение (41) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть удовлетворяет $-\operatorname{ind} A$ условиям (см. (46)). Чтобы освободиться от этих условий, зададимся набором распределений $C_j\in\mathcal{U}$, $j=1, \ldots, d=-\operatorname{ind} A$ и рассмотрим более общее уравнение (*кограничная задача*)

$$p_\oplus\left(A*u + \sum \rho_j C_j\right) = f. \quad (48)$$

Ставится задача определения $u\in\Phi_{[+]}$ и констант $\rho_1, \ldots, \rho_d$ по правой части $f\in\Phi_\oplus$. Эта задача в естественном смысле сопряжена задаче (41), (42) и называется кограничной. Если $A=A_+*A_-$ и $G_\pm$ — обратные элементы к $A_\pm$, то *условие Шапиро — Лопатинского* задачи (48) записывается в виде

$$\det\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{k-1}\widehat{c}_j(\sigma)\widehat{A}_-^{-1}(\sigma)\,d\sigma \right\| \neq 0, \quad (49)$$

где $c_j\in\mathcal{S}$ и $C_j\equiv c_j(\operatorname{mod}(\mathcal{O}')_-)$. Отметим, что функции c_j определены с точностью до элементов $\mathcal{S}_-$, т. е. символы $\widehat{c}_j(\sigma)$ определены с точностью до функций, голоморфных в верхней полуплоскости и убывающих на бесконечности быстрее любой степени. Так как функция $\sigma^k\widehat{A}_-^{-1}(\sigma)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и растет там не быстрее степени, то в силу теоремы Коши неоднозначность в выборе c_j не влияет на значение интегралов в (49).

Теорема. *Пусть* A, C_1, ..., $C_d \in \mathcal{U}$. *Уравнение* (48) *для любой правой части* $f \in H_{\oplus}^{(\infty)}$ *имеет единственное решение* $\{u, \rho_1, \ldots, \rho_d\} \in H_{+}^{(0|\infty)} \times \mathbb{C}^d$ *тогда и только тогда, когда*

(i) $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$;

(ii) $\operatorname{ind} A = -d$;

(iii) *справедливо условие Шапиро — Лопатинского* (49).

Доказательство. Необходимость. Из единственности для уравнения (48) вытекает единственность для уравнения (41), т. е. оператор (38) инъективен. Далее, согласно теореме Банаха, из однозначной разрешимости задачи (48) вытекает существование непрерывного оператора

$$\mathfrak{B}\colon H_{\oplus}^{(\infty)} \to H_{+}^{(0|\infty)} \times \mathbb{C}^d,$$

обратного к оператору

$$\mathfrak{A}\colon H_{+}^{(0|\infty)} \times \mathbb{C}^d \to H_{\oplus}^{(\infty)} \left(\{u, \rho_1, \ldots, \rho_d\} \mapsto p_{\oplus}\left(A * u + \sum \rho_j C_j\right)\right).$$

Обозначим через P естественный проектор $H_{+}^{(0|\infty)} \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$. *Уравнение* (48) *имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$P\mathfrak{B}f = 0. \tag{50}$$

Поскольку оператор $P\mathfrak{B}$ является непрерывным оператором из $H_{\oplus}^{(\infty)}$ в $\mathbb{C}^d$, то он задается набором непрерывных линейных функционалов $\rho_j(f)$, $j = 1, \ldots, d$, а (50) является конечной системой

$$\rho_1(f) = \ldots = \rho_d(f) = 0.$$

Итак, мы доказали, что оператор $p_{\oplus} \operatorname{con}_A$ инъективен, а его образ замкнут и имеет коразмерность d. Согласно предложению 2 $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$ и $\operatorname{ind} A = -d$. Но тогда согласно предложению 1 уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$D^{k-1}\left(G_-\left(f - \sum \rho_j C_j\right)\right)(+0) = 0,$$

т. е. числа ρ_1, ..., ρ_d являются решениями системы линейных уравнений

$$\sum A_{k_j} \rho_j = f_k, \tag{51}$$

где

$$A_{jk} = (D^{k-1}(G_- * C_j))(+0), \quad f_k = (D^{k-1}(G_- * f))(+0). \tag{52}$$

Теперь остается заметить, что условие (50) является необходимым и достаточным условием разрешимости системы (51). (52).

Достаточность. Если выполнены условия (i), (ii), то согласно предложению 1 уравнение (48) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда числа ρ_1, ..., ρ_d являются решениями системы (51), (52). Ввиду (iii) эта система имеет единственное решение.

3.9. О фредгольмовости операторов Винера — Хопфа. Напомним, что если L, F — линейные топологические пространства, то непрерывный оператор

$$\mathfrak{A}\colon L \to F \tag{53}$$

называется *фредгольмовым*, если (i) ядро оператора (51) конечномерно, (ii) коядро оператора (51) конечномерно, т. е. $\dim(F/\overline{\mathfrak{A}L}) < \infty$, где $\overline{\mathfrak{A}L}$ — замыкание образа $\mathfrak{A}$ в F; (iii) образ (53) замкнут.

Как мы уже говорили во введении, для случая $L = F = L_p(\mathbb{R}_+)$ и операторов $\mathfrak{A} = p_\oplus \operatorname{con}_A$, где A — элемент алгебры Винера, М. Г. Крейн [1] доказал, что свойства (i), (ii), (iii) эквивалентны обратимости A в алгебре Винера. Аналогичную теорему можно сформулировать и в нашем контексте.

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{U}$ и $\Phi = H^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Оператор*

$$\mathfrak{A} = p_\oplus \operatorname{con}_A\colon \Phi_{[+]} \to \Phi_\oplus \tag{54}$$

является фредгольмовым тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$.

Более того, если $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$, то либо ядро, либо коядро оператора (54) *тривиально.*

Доказательство. Достаточность. Если $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$, то мы можем воспользоваться предложениями 1 из пп. 3.7, 3.8. Из этих предложений следует, что либо оператор (54) сюръективен и имеет конечномерное ядро (п. 3.7), либо инъективен и имеет замкнутый образ конечной коразмерности (п. 3.8).

Необходимость фактически была доказана в предложении 2 п. 3.7. В самом деле, обозначим через F образ оператора (54) и выберем замкнутое подпространство $L \subset \Phi_\oplus$, дополнительное к ядру. Тогда оператор (53) (являющийся сужением (54) на замкнутое подпространство $L \subset \Phi_{[+]}$) имеет непрерывный обратный $\mathfrak{B}\colon F \to L$. Из существования такого оператора вытекает оценка (40), т. е. возникает ситуация, уже разобранная в п. 3.7. Воспользовавшись леммами 1, 2 этого пункта, мы докажем, что $A \in \mathcal{U}^{\mathrm{reg}}$.

§ 4. Уравнение Винера — Хопфа в полупространстве

В настоящем параграфе результаты § 1—3 распространяются на задачи в полупространстве, т. е. изучаются уравнения вида

$$p_\oplus(A * u) = f. \tag{1}$$

Определения свертывателей Винера — Хопфа и свертывателей Винера — Хопфа с условием трансмиссии тривиально переносятся на случай полупространства. Мы не будем останавливаться на описании этих пространств, отсылая к работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [10]. Там, в частности, показано, что

$$\mathfrak{C}(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_\oplus) \cap \mathfrak{C}(\mathcal{O}_+, \mathcal{O}_\oplus) = \mathcal{O}',$$

$$\mathfrak{C}\left(\mathcal{S}_{[+]}^{\{-\infty\}}, \mathcal{S}_\oplus\right) \cap \mathfrak{C}\left(\mathcal{O}_{[+]}^{\{-\infty\}}, \mathcal{O}_\oplus\right) = \mathcal{U},$$

где правое пространство (как и его подпространство $\mathscr{U}_+$) определяется по формулам (IV.2.17), в которых следует опустить индекс $+$.

По аналогии с одномерным случаем для $\Phi = \mathscr{S}$, $\mathscr{O}$, $H^{(\infty)}$ можно определить фактор-пространство $\Phi_{\oplus}^{\{r\}}$ и рассмотреть задачу обращения оператора

$$p_{\oplus}^{\{r\}} \operatorname{con}_A \colon \Phi_{+}^{\{r+c\}} \to \Phi_{\oplus}^{\{r\}}, \quad A \in \mathscr{U}. \tag{2}$$

Если A допускает каноническую факторизацию в $\mathscr{U}$, т. е. $A = A_+ * A_-$, $A_\pm \in \mathscr{U}_\pm^{\text{reg}}$, то при $c = \deg_t A_+$ отображение (2) является изоморфизмом.

Опираясь на отмеченный выше изоморфизм, можно построить теорию граничных и кограничных задач в полупространстве. Все эти построения не требуют новых идей (по сравнению с одномерным случаем), и мы не будем на них останавливаться.

К сожалению, в отличие от одномерного случая, в описанном выше контексте нам не удалось получить обратные теоремы, т. е. доказать, что изоморфизм (2) влечет за собой факторизацию. Соответствующие результаты удается получить для более узкого класса свертывателей $\mathscr{Y} \approx \mathscr{S}^{\{-\infty\}}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$, причем вместо пространств $\Phi_{[+]}^{\{r\}} = H_{+}^{(r|\infty,\infty)}$ распределений, принадлежащих C^∞ при $t > 0$, рассматриваются пространства распределений $H_{+}^{(r|p,\infty)}$, имеющих при $t > 0$ конечную гладкость p по t и бесконечную гладкость по y. Соответствующим образом подбираются фактор-пространства $H_{\oplus}^{(r|q,\infty)}$. Если $A \in \mathscr{Y}$, то в указанных пространствах оператор Винера — Хопфа $p_\oplus \operatorname{con}_A$ допускает оценки, адекватные по переменной t. Условие $A \in \mathscr{Y}^{\text{reg}}$ оказывается необходимым условием справедливости таких оценок.

План дальнейшего изложения следующий. Прежде всего мы уточним одномерные результаты § 3 применительно к распределениям из $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}$. Далее мы сформулируем многомерный аналог этого результата для $A \in \mathscr{Y} = \mathscr{S}^{\{-\infty\}} \otimes \mathscr{O}'$. Большая часть параграфа посвящена доказательству необходимости существования факторизации для однозначной разрешимости соответствующего уравнения Винера — Хопфа. Возможность доказательства этого утверждения связана с тем, что для распределений из пространства $\mathscr{S}^{\{-\infty\}} \otimes \mathscr{O}'$ можно указать достаточно эффективные критерии обратимости и существования канонической факторизации (аналогичные критерии для пространства $\mathscr{U}$ в $\mathbb{R}^n$ нам не удалось получить).

4.1. Уравнения Винера — Хопфа для распределений из $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}(\mathbb{R})$. Распределениям $A \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ будем сопоставлять операторы Винера — Хопфа, действующие из подпространств типа $H_{+}^{(q|s)}$, $q \leqslant s$, в фактор-пространства

$$H_{\oplus}^{(r|s)} = H^{(-\infty,s)} / \delta_{-r}^{+}(D)\, H_{-}^{(-\infty)}. \tag{3}$$

Все показатели q, s, r, характеризующие пространства и фактор-пространства, будем считать целыми. Через $p_{\oplus}^{\{r\}}$ будем обозначать канонический проектор $H^{(-\infty,s)}$ на $H_{\oplus}^{(r|s)}$.

Теорема 1. *Пусть* $A\in\mathcal{S}^{\{-\infty\}\,\mathrm{reg}}$, $d=\deg A$, $d_+=\operatorname{ind}A$. *Тогда* $\forall\, s,\ r\in\mathbb{Z},\ s\geqslant r+d_+$ *отображение*

$$p_{\oplus}^{\{r\}}\operatorname{con}_A\colon\ H_+^{(r+d_+|s)}\to H_{\oplus}^{(r|s-d)} \tag{4}$$

является изоморфизмом пространств.

Теорема 2. *Пусть* $A\in\mathcal{S}^{\{-\infty\}}$ *и для некоторых (целых)* s, r, d, d_+, $s\geqslant r+d_+$, *отображение* (4) *является изоморфизмом пространств. Тогда*

(i) $A\in\mathcal{S}^{\{-\infty\}\,\mathrm{reg}}$;

(ii) $d=\deg A$, $d_+=\operatorname{ind}A$.

Доказательство теоремы 1 вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_+^{(r+d_+|s)} \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{con}_{A_+}"'] & H_{\oplus}^{(r|s-d)} \\ H_+^{(r|s-d_+)} \arrow[r, "p_{\oplus}^{\{r\}}"] & H_{\oplus}^{(r|s-d_+)} \arrow[u, "\operatorname{con}_{A_-}"'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия (i) для существования левого обратного у оператора (4) видна из доказательства предложения 2 п. 3.2. Но тогда в силу теоремы 2.4 (i) A допускает каноническую факторизацию в $\mathcal{S}^{\{-\infty\}}$, т. е. $A=A_+ * A_-$, $A_\pm * G_\pm=\delta$, $A_\pm$, $G_\pm\in\mathcal{S}^{\{-\infty\}}_{[\pm]}$. Если изоморфизм (4) имеет место, то после применения обратимого оператора con_{G_-} получим изоморфизм

$$p_{\oplus}^{\{r\}}\operatorname{con}_{A_+}\colon\ H_+^{(r+d_+|s)}\to H_{\oplus}^{(r|s-d+\deg A_-)}.$$

Замечая, что оператор con_{A_+} изоморфно отображает $H_+^{(r+d_+|s)}$ на $H^{(r+d_+-\deg A_+|s-\deg A_+)}$, мы окончательно получим, что канонический проектор $p_{\oplus}^{\{r\}}$ осуществляет изоморфизм

$$p_{\oplus}^{\{r\}}\colon\ H_+^{(r+d_+-\deg A_+|s-\deg A_+)}\to H_{\oplus}^{(r|s-d+\deg A_-)}.$$

Последнее может иметь место тогда и только тогда, когда $r+d_+-\deg A_+=r$, $s-\deg A_+=s-d+\deg A_-$, т. е. когда $d_+=\deg A_+$ и $d=\deg A_++\deg A_-=d$.

4.2. Формулировка основного результата для уравнений Винера — Хопфа в полупространстве. Прежде всего мы введем основные пространства, которые будут конструироваться из пространств $H_{(l,l')}^{(r|s,s')}$, $r\leqslant s$, введенных в § IV.2. Положим

$$\mathcal{H}^{(r|s)}=\bigcap_{s'}H^{(r|s,s')}\overset{\text{def}}{=}H^{(r|s,\,\infty)}. \tag{6}$$

Определим фактор-пространства

$$H_{\oplus}^{(r|s,s')}=H^{(-\infty|s,s')}/\delta_{-r}^{+}H_{-}^{(-\infty|s,s')}, \tag{7}$$

и пусть

$$\mathscr{H}_{\oplus}^{(r|s)} = \bigcap_{s'} H_{\oplus}^{(r|s,s')} \stackrel{\text{def}}{=} H_{\oplus}^{(r|s,\infty)}. \tag{8}$$

Если $\mathscr{U}$ — пространство, определенное выше, то положим

$$\mathscr{Y} = \mathscr{U} \cap I\mathscr{U}. \tag{9}$$

Из определения (9) для $A \in \mathscr{Y}$ можно получить представление (ср. (1.5))

$$A = \theta_+(t)\, a_+ + \theta_-(t)\, a_- + \sum_{j=1}^{J} b_j(y)\, D_t^{j-1}\, \delta(t), \tag{10}$$

где $b_j \in \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \ldots, J$ и

$$a_\pm \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{s,l,l'} \bigcup_{s'} H_{(l,l')}^{(s,s')}.$$

Представление (10) эквивалентно также представлению

$$\mathscr{Y} \ni A = a + A_+, \quad A_+ \in \mathscr{U}_+, \quad a \in \mathscr{S} \otimes \mathscr{O}'. \tag{11}$$

Отсюда и из результатов § IV.2 для пространств $\mathscr{U}_+$ вытекает, что $\forall A \in \mathscr{Y}$ найдется такое целое r, что для любого z, $\operatorname{Im} z \neq 0$, и любого $q > r$ имеет место разложение

$$A = \sum_{j=0}^{q-1} a_j (D_t - z)^{r-j}\, \delta(t) + A_q, \tag{12}$$

где

$$a_j \in \mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1}), \quad A_q \in \bigcap_{l,l'} H_{(l,l')}^{(q,-\infty)}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что Фурье-образы $\widehat{A}(\sigma, \eta)$, где $A \in \mathscr{Y}$, образуют пространство $\mathscr{H} \otimes \mathscr{M}$ асимптотических рядов Лорана по σ с коэффициентами из $\mathscr{M}$ (см. описание пространства $\mathscr{H}^+ \otimes \mathscr{M}$ в § IV.2). Распределения a_j из (12) не зависят от q, число r называется степенью A по t: $r = \deg_t A$.

Теорема 1. *Пусть распределение* $A \in \mathscr{Y}$, $\deg_t A = d$, *допускает каноническую факторизацию* [1])

$$A = A_+ * A_-, \quad A_\pm \in \mathscr{Y}_\pm^{\text{reg}}, \quad d_+ = \deg_t A_+ \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ind} A. \tag{13}$$

Тогда $\forall r \leqslant s$ *отображение*

$$p_{\oplus}^{\{r\}} \operatorname{con}_A \colon \mathscr{H}_+^{(r+d_+|s)} \to \mathscr{H}_{\oplus}^{(r|s-d)} \tag{14}$$

является изоморфизмом пространств.

Доказательство этой теоремы проводится таким же образом, как и доказательство ее одномерного аналога в предыду-

---

[1]) Ниже мы покажем, что распределения $A_\pm$ определены с точностью до свертки с распределениями $b(y) \in (\mathscr{O}'(\mathbb{R}^{n-1}))^{\text{reg}}$. Отсюда вытекает, что числа $d_\pm = \deg_t A_\pm$ определяются однозначно.

щем пункте, надо только в коммутативной диаграмме (5) заменить пространства типа $H_{+}^{(p|q)}$, $H_{\oplus}^{(p|q)}$ на пространства типа $\mathscr{H}_{+}^{(p|q)}$, $\mathscr{H}_{\oplus}^{(p|q)}$.

Основным содержанием параграфа является обратная

Теорема 2. *Пусть для $A \in \mathscr{Y}$ при некоторых r, d_+, d и $\forall s \geqslant \geqslant r + d_+$ отображение* (14) *является изоморфизмом пространств. Тогда*

(i) *распределение A допускает каноническую факторизацию* (13);

(ii) $d = \deg_t A$, $d_+ = \operatorname{ind} A$.

4.3. Семейства одномерных уравнений Винера — Хопфа, зависящие от параметра. Необходимость первого условия (ii). Как было указано в п. I.6.3, для распределения $A \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_x^n)$ можно определить частичное преобразование Фурье $\widehat{A}'(\eta)$, которое будет элементом $\mathscr{S}'(\mathbb{R}_t)$, зависящим от параметра $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$. В случае распределения $A \in \mathscr{Y}$ частичное преобразование Фурье $\widehat{A}'(\eta)$ будет элементом пространства $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}(\mathbb{R}_t)$, гладко зависящим от параметра η (это легко выводится из разложений (12)). Отметим, что

$$\deg \widehat{A}'(\eta) \leqslant \deg_t A \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1},$$

причем равенство достигается при тех η, для которых $\widehat{a}_0(\eta) \neq 0$, где $a_0(y)$ — старший коэффициент в разложении (12).

Сопоставим $\widehat{A}'(\eta) \in \mathscr{S}^{\{-\infty\}}$ *одномерный* (вообще говоря, неограниченный) *оператор Винера — Хопфа*

$$p_{\oplus}^{\{r\}} \operatorname{con}_{\widehat{A}'(\eta)}\colon H_{+}^{(r+d_+|s)}(\mathbb{R}_t) \to H_{\oplus}^{(r\, s-d)}(\mathbb{R}_t), \tag{15}$$

зависящий от параметра $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Отметим, что пространство $H_{[+]}^{\{-\infty\}} = \bigcup_r H_{+}^{(r|\infty)}$ принадлежит области значения этого оператора, причем

$$(\widehat{A}'(\eta) * v)(t_0) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \forall t_0 > 0, \quad \forall v \in H_{[+]}^{\{-\infty\}}.$$

Предложение. *Пусть оператор* (14) *непрерывен и имеет непрерывный обратный. Тогда $\forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ оператор* (15) *непрерывен и имеет непрерывный обратный.*

Прежде чем доказывать это предложение, остановимся на следствиях из него. Согласно теореме 2 из п. 4.1 распределение $\widehat{A}'(\eta)$ при каждом η является обратимым элементом $\mathscr{S}^{\{-\infty\}}(\mathbb{R}_t)$ и, следовательно, согласно теореме 2.4 (i) допускает каноническую факторизацию:

$$\widehat{A}'(\eta) = a_+(\eta) * a_-(\eta), \quad a_{\pm} \in \left(\mathscr{S}_{[\pm]}^{\{-\infty\}}(\mathbb{R}_t)\right)^{\mathrm{reg}}. \tag{16}$$

Факторизация (16) определена однозначно с точностью до числового множителя, зависящего от η. Далее, согласно теореме 2 из п. 4.1

$$\deg \widehat{A}'(\eta) = d, \quad \operatorname{ind} \widehat{A}'(\eta) = \deg a_+(\eta) = d_+ \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{17}$$

Так как $\deg \widehat{A}'(\eta) \leqslant \deg_t A$, а для некоторых η равенство обязано достигаться, то из (17) следует, что $d = \deg_t A$.

Если в (16) сделать преобразование Фурье по t, то получим

$$\widehat{A}(\sigma, \eta) = \widehat{a}_+(\sigma, \eta)\widehat{a}_-(\sigma, \eta), \quad \widehat{a}_\pm(\sigma, \eta) \in \mathscr{H}^\pm. \tag{16'}$$

Доказательство предложения носит технический характер и подробно проведено в работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [10]. Мы бегло поясним только основные моменты, считая, что $r = 0$ (последнее не ограничивает общности). Непрерывность оператора (14) означает, что $\forall s'$ $\exists s''$, так что оператор $p_\oplus \operatorname{con}_A$ является непрерывным оператором из $H_+^{(d+|s,s'')}$ в $H_\oplus^{(0|s-d,s')}$ и, следовательно, справедлива оценка

$$\left\| p_\oplus (A * u), H_\oplus^{(0|s-d,s')} \right\|^2 \leqslant c^2 \left\| u, H^{(d+|s,s'')} \right\|^2. \tag{18}$$

Если в эту оценку подставить функцию

$$u(t, y) = v(t)\,\varphi(y), \quad v \in H_+^{(d+|\infty)}(\mathbb{R}), \quad \varphi \in H^{(\infty)}(\mathbb{R}_y^{n-1})$$

и учесть, что

$$\mathscr{F}'(A * v\varphi)(t, \eta) = \widehat{\varphi}(\eta)\,(\widehat{A}'(\eta) * v)(t), \tag{19}$$

где через $\mathscr{F}'$ обозначено частичное преобразование Фурье по y, то мы получим, что $\forall v \in H_+^{(d+|\infty)}$ и почти всех $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\left| p_\oplus(\widehat{A}'(\eta) * v), H_\oplus^{(r|s-d)} \right| \leqslant c\,(1 + |\eta|^2)^{(s''-s')/2} \left| v, H^{(d+|s)} \right|. \tag{20}$$

Как мы уже отмечали выше, выражение, стоящее под знаком нормы в левой части (20), является непрерывной функцией η, так что неравенство (21) выполнено для любого $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$. Поскольку функции $v \in H_+^{(d+|\infty)}$ плотны в $H_+^{(d+|s)}$, отсюда вытекает непрерывность оператора (15).

Докажем теперь существование непрерывного обратного у оператора (15). Обозначим $\mathfrak{A} = p_\oplus \operatorname{con}_A$. Согласно условию существуют непрерывный обратный

$$\mathfrak{G}\colon \mathscr{H}_\oplus^{(0|s-d)} \to \mathscr{H}_+^{(d+|s)} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\mathfrak{A} = E). \tag{21}$$

Зададимся произвольной функцией $\varphi \in H^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\widehat{\varphi}(\eta) \neq 0$, и положим

$$\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)\,g = (\widehat{\varphi}(\eta))^{-1}\,\mathscr{F}'\mathfrak{G}(\varphi g) \quad \forall g \in H_\oplus^{(0|s-d)}(\mathbb{R}_+). \tag{22}$$

Как и выше, из непрерывности оператора (21) выводится непрерывность оператора

$$\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)\colon H_\oplus^{(s-d)}(\mathbb{R}) \to H_+^{(d+|s)}(\mathbb{R}). \tag{23}$$

Если оператор $E = \mathfrak{A}\mathfrak{G}$ применить к функции $v(t)\varphi(y)$ и воспользоваться (19), то мы легко получим, что $\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)\widehat{\mathfrak{A}}'(\eta)v = v$, где $\widehat{\mathfrak{A}}'(\eta) = p_{\oplus}\mathrm{con}_{\widehat{A}'(\eta)}$. Аналогично проверяется, что оператор $\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)$ является левым обратным к $\widehat{\mathfrak{A}}'(\eta)$.

Замечания. 1) Так как оператор (23) является обратным к (15), то он не зависит от $\widehat{\varphi}(\eta)$, откуда

$$\mathcal{F}'\mathfrak{G}(\varphi g) = \widehat{\varphi}(\eta)\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)g \quad \forall\varphi. \tag{24}$$

2) Пусть $\widehat{A}(\eta)$ записано в форме (16), и пусть $g_{\pm}(\eta) \in \mathcal{S}^{(-\infty)}$ — обратные элементы к $a_{\pm}(\eta)$. Тогда в силу (3.13) оператор $\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)$ имеет вид

$$\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta) = g_{+}(\eta) * \delta_{-r}^{+}(D_t)\,\theta_{+}(t)\,g_{-}(\eta) * \delta_r^{+}(D_t)\,f. \tag{25}$$

Это представление будет существенно использоваться в дальнейшем.

4.4. Необходимость условия $A \in \mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}$. В предыдущем пункте мы доказали необходимость первого условия (ii) теоремы 2 п. 4.2. Кроме того, равенства (17) показывают, что если символ удовлетворяет (i), то его индекс обязан равняться d_+. Теперь мы переходим к доказательству необходимости условия (i). Из существования канонической факторизации (13), в частности, следует, что $A \in \mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}$. Сейчас мы установим необходимость этого условия.

Замечание. В отличие от одномерного случая, включение $A \in \mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}$ не гарантирует существования канонической факторизации, для этого должно выполняться дополнительное аналитическое условие. Доказательство необходимости этого условия является наиболее трудоемкой частью доказательства нашей теоремы, ему посвящен следующий пункт.

Отметим, что дословным повторением рассуждений предложений 2, 3 из п. IV.2.5 доказывается

Предложение 1. *Пусть $A \in \mathcal{Y}$, и пусть*

$$A = a_0(y)\,\delta_d^{+}(D_t)\,\delta(t) + A_1\,(\deg_t A_1 < \deg_t A = d). \tag{26}$$

Включение $A \in \mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$A \in (\mathcal{O}')^{\mathrm{reg}}, \quad a_0 \in \left(\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})\right)^{\mathrm{reg}}. \tag{27}$$

Условия (27) эквивалентны тому, что найдутся такие константы c, $c_0 > 0$ и μ, μ_0, что

$$|\widehat{A}(\sigma, \eta)| > c\,(1 + |\sigma| + |\eta|)^{\mu} \quad (\sigma, \eta) \in \mathbb{R}^n, \tag{27'}$$

$$|\widehat{a}_0(\eta)| > c_0(1 + |\eta|)^{\mu_0} \qquad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{27''}$$

По схеме предложения 2 из п. 3.2 доказывается

Предложение 2. *Пусть $A \in \mathcal{Y}$ и $\deg_t A = d$. Пусть оператор (14) имеет непрерывный левый обратный. Тогда $A \in \mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}$.*

Доказательство. Как и в п. 3.4, из существования левого обратного у оператора (14) вытекает, что $\forall s'\ \exists s''$, так что справедлива априорная оценка

$$\left| u,\ H_+^{(d_+|s,s')} \right| \leqslant C \left| p_\oplus (A * u),\ H_\oplus^{(0|s-d,s'')} \right|$$

для любого $u \in H_+^{(d_+,\infty)}$. Отсюда, в свою очередь, вытекает более слабая оценка: $\forall u \in H_+^{(\infty)}$

$$\left\| \delta_s^+ (D_t)\, \delta_{s'} (D_y)\, u \right\| \leqslant c \left\| \delta_{s-d}^+ (D_t)\, \delta_{s''} (D_y)\, (A * u) \right\|.$$

Полагая $\delta_s^+ (D_t)\, \delta_{s'} (D_y)\, u = v$, получим оценку

$$\| v \| \leqslant c \| B * v \| \quad \forall v \in H_+^{(\infty)}, \tag{28}$$

где в силу (26)

$$B = \delta_{-d}^+ (D_t)\, \delta_{s''-s'} (D_y)\, A = b_0 (y) + B_1, \quad \deg_t B_1 < 0. \tag{29}$$

Лемма. *Пусть $B \in \mathcal{O}'$ и выполнена оценка* (28). *Тогда найдется такая константа c_0, что*

$$| \widehat{B} (\sigma, \eta) | > c_0. \tag{30}$$

Если распределение B имеет вид (29), то оценка (30) приводит к оценке

$$c_0 \leqslant | \widehat{b}_0 (\eta) | + | \widehat{B}_1 (\sigma, \eta) | \leqslant | \widehat{b}_0 (\eta) | + \frac{c_1 (1 + | \eta |)^{\mu_1}}{1 + | \sigma |}.$$

Если $|\sigma|$ столь большая величина, что второй член в правой части не превосходит $c_0/2$, то

$$| \widehat{b}_0 (\eta) | > c_0/2 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Замечая, что $\widehat{b}_0 (\eta) = (1 + | \eta |^2)^{(s''-s')/2} \widehat{a}_0 (\eta)$, получим оценку (27″). Из (29) и (30) следует и оценка (27′).

Доказательство леммы при $n > 1$ аналогично доказательству для $n = 1$, проведенному в п. 3.5. Единственное различие состоит в том, что вместо сдвигов функций (3.19) рассматриваются сдвиги функции

$$\varphi_{mn} (t,\ y) = (c (m,\ n))^{-1/2} (D_t - i\sqrt{1 + |D_y|^2})^{-m},$$

а константа $c(m,\ n)$ подобрана из условия

$$1 = \| \varphi_{mn} \|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n c\,(m,\ n)} \int \frac{d\xi}{(1 + | \xi |^2)^m} =$$

$$= \frac{\omega_{n-1} (2\pi)^{-n}}{c\,(m,\ n)} \int_0^\infty r^{n-1} (1 + r^2)^{-m} dr.$$

С помощью замены $t = (1 + r^2)^{-1}$ правый интеграл сводится к

В-функции Эйлера

$$\int_0^\infty r^{n-1}(1+r^2)^{-m}dr = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{n}{2}-1} t^{m-\frac{n}{2}-1}\, dt =$$

$$= \mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, m-\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{n}{2}\right)\Big/\Gamma(m),$$

откуда

$$c(m, n) = \varkappa(n)\,\Gamma(m-n/2)/\Gamma(m),$$

и, в частности (формула Стирлинга),

$$c(m, n) = \varkappa_1(n)\,m^{-n/2}(1+o(1)), \quad m\to\infty.$$

Приведенные формулы для $c(m, n)$ позволяют без труда воспроизвести доказательство леммы 3.5.

4.5. Необходимое условие существования правого обратного у оператора (14). Если $A\in\mathscr{Y}^{\mathrm{reg}}$, то символ $\widehat{A}$ можно представить в виде (16′), где $\widehat{a}_\pm(\tau, \eta)\in(\mathscr{H}^\pm)^{\mathrm{reg}}$ при каждом $\eta\in\mathbb{R}^{n-1}$. Отсюда следует, что $\widehat{a}_\pm(\tau, \eta)\neq 0$ при $\mp\operatorname{Im}\tau\geqslant 0$, и можно выбрать однозначные ветви $\ln\widehat{a}_\pm(\tau, \eta)$. Положим

$$p_+(\sigma, \eta) = \operatorname{Re}\ln\widehat{a}_+(\sigma, \eta) - \operatorname{Re}\ln\widehat{a}_+(0, \eta), \tag{31}$$

$$q_+(\sigma, \eta) = \operatorname{Im}\ln\widehat{a}_+(\sigma, \eta) - \operatorname{Im}\ln\widehat{a}_+(0, \eta). \tag{31′}$$

З а м е ч а н и е. Факторизация (16′) определена с точностью до множителя, зависящего от η. Функции (31), (31′) не зависят от выбора этого множителя, т. е. однозначно восстанавливаются по символу $\widehat{A}$.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть* $A\in\mathscr{Y}^{\mathrm{reg}}$ *и* $\deg_t A = d$. *Пусть для некоторых* r *и* $\forall s\geqslant r+d_+$ *оператор* (14) *имеет непрерывный правый обратный*:

$$\mathfrak{G}\colon \mathscr{H}_{\oplus}^{(r|s-d)}\to\mathscr{H}_{+}^{(r+d_+|s)}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{G}f = f$$

($\mathfrak{A}$ — *оператор* (14)). *Тогда найдется* $c>0$, *так что*

$$|p_+(\sigma, \eta)| < c\ln(1+|\sigma|+|\eta|). \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Как мы уже это неоднократно делали, сведем наше утверждение к случаю $r=d_+=d=s=0$, т. е. будем считать, что оператор

$$\mathfrak{A} = p_\oplus \operatorname{con}_A\colon H_+^{(0,\infty)}\to H_\oplus^{(0,\infty)}, \tag{33}$$

где

$$A\in\mathscr{S}^{\mathrm{reg}}, \quad \deg_t A = 0, \quad \operatorname{ind}\widehat{A}'(\eta) = 0 \quad \forall\eta\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{34}$$

имеет непрерывный правый обратный

$$\mathfrak{G}\colon H_\oplus^{(0,\infty)}\to H_+^{(0,\infty)}. \tag{35}$$

2) Как и в п. 4.3, обозначим через $\widehat{\mathfrak{A}}'(\eta)$, $\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)$ операторы, получающиеся из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}$ после частичного преобразования Фурье по y. Тогда $\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)$ будет правым обратным оператором к $\widehat{\mathfrak{A}}'(\eta)$. С другой стороны, если выполнены условия (34), то согласно теореме 1 п. 4.2 оператор $\widehat{\mathfrak{A}}'(\eta)$ обратим, а поэтому $\widehat{\mathfrak{G}}'(\eta)$ является обратным оператором к $\widehat{\mathfrak{A}}'(\eta)$. Но тогда для этого оператора справедливо представление (25), т. е.

$$\mathfrak{G}f = \mathcal{F}'^{-1}_{\eta\to y} g_+(\eta) * \theta_+(t)\, g_-(\eta) * \widehat{f}'(\cdot,\, \eta).$$

Если $A \in \mathscr{Y}^{\mathrm{reg}}$, то найдется такое $G \in \mathscr{Y}$, что $A * G = \delta$, откуда $g_-(\eta) = a_+(\eta) * \widehat{\widehat{G}}(\eta)$. Тогда получим нужное нам явное выражение для оператора $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G}f = \mathcal{F}'^{-1}_{\eta\to y} g_+(\eta) * \theta_+(t)\, a_+(\eta) * \mathcal{F}'(G * f). \tag{36}$$

3) Непрерывность оператора (35) означает, что $\forall s'\ \exists s''$, так что оператор $\mathfrak{G}$: $H_{\oplus}^{(0,s'')} \to H_{+}^{(0,s')}$ непрерывен, откуда следует оценка

$$\|\mathfrak{G}f\|_{(0,s')} \leqslant c\,\|f\|_{(0,s'')} \quad \forall f \in H^{(\infty)}(\mathbb{R}^n).$$

Заменим в этом неравенстве f на $A * f$. Так как $\deg_t A = 0$, то найдется такое d'', что $\|A * f\|_{(0,s'')} \leqslant c_1 \|f\|_{(0,s''+d'')}$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\|\mathfrak{G}(A * f)\|_{(0,s')} \leqslant c_2 \|f\|_{(0,s''+d'')} \quad \forall f \in H^{(\infty)}(\mathbb{R}^n).$$

Заменяя в этом неравенстве f на $\delta_{-s''-d''}(D_y)\, g$, $g \in H^{(\infty)}$, получим оценку

$$\|\delta_{s'}(D_y)\, \mathfrak{G}(A * \delta_{-s''-d''}(D_y)\, g)\| \leqslant c_2 \|g\|.$$

Сделав в этом неравенстве частичное преобразование Фурье по η, получим (с учетом (36))

$$\int (1 + |\eta|^2)^{\lambda} \|g_+(\eta) * \theta_+(t)\, a_+(\eta) * \widehat{g}'(\cdot,\, \eta)\|^2 d\eta \leqslant c_2^2 \|g\|,$$

где $\lambda = s' - s'' - d''$. Сделаем теперь преобразование Фурье по t. Операторы свертки с a_+ и g_+ перейдут в операторы умножения на $\widehat{a}_+(\sigma,\, \eta)$ и $(\widehat{a}_+(\sigma,\, \eta))^{-1}$. Оператор умножения на характеристическую функцию $\theta_+(t)$ перейдет в оператор свертки с ядром Коши $(\sigma - i0)^{-1}$ (см. замечание 3 из п. II.3.6). Итак, в условиях предложения выполняется неравенство

$$\int\int (1 + |\eta|^2)^{\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{a}_+(\theta,\, \eta)}{\widehat{a}_+(\sigma,\, \eta)} \cdot \frac{\widehat{g}(\theta,\, \eta)}{\sigma - \theta - i0}\, d\theta \right|^2 d\eta\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c \int\int |\widehat{g}(\sigma,\, \eta)|^2 d\sigma\, d\eta \quad \forall \widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi).$$

4) Согласно (31), (31′)

$$\frac{\widehat{a}_+(0,\eta)}{\widehat{a}_+(\sigma,\eta)}=\exp[-p_+(\sigma,\eta)+p_+(\theta,\eta)-iq_+(\sigma,\eta)+iq_+(\theta,\eta)].$$

Из условия (34) мы ниже выведем, что

$$p_+(\sigma,\eta),\ q_+(\sigma,\eta)\in\mathscr{H}\otimes\mathscr{M},\qquad \deg_\sigma p_+<0,\qquad \deg_\sigma q_+<0. \tag{37}$$

Тогда в написанном выше неравенстве мы можем заменить $\widehat{g}(\sigma,\eta)$ на $\exp(-iq_+(\sigma,\eta))\varphi(\sigma,\eta)$, $\varphi\in\mathscr{S}$. Окончательно получим неравенство

$$\int\int(1+|\eta|^2)^\lambda\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-p_+(\sigma,\eta)+p_+(\theta,\eta))(\sigma-\theta-i0)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times\varphi(\sigma,\eta)\,d\theta\right|^2d\sigma\,d\eta\leqslant c\int\int|\varphi(\sigma,\eta)|^2d\sigma\,d\eta\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}. \tag{38}$$

В следующем пункте мы покажем, что из этого неравенства вытекает условие (32).

5) Утверждения (37) доказываются по той же схеме, что и соответствующие одномерные результаты в п. 2.5. Если распределение A удовлетворяет условиям (34), то $\widehat{A}(\sigma,\eta)=\widehat{a}_0(\eta)+\widehat{A}_1(\sigma,\eta)$, $\deg A_1<0$, $\widehat{a}_0\in\mathscr{M}^{\mathrm{reg}}$. Заменяя $\widehat{A}$ на $\widehat{A}/\widehat{a}_0(\eta)$, мы придем к случаю символов, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\sigma\to\pm\infty}\widehat{A}(\sigma,\eta)=1. \tag{39}$$

Условие $\operatorname{ind}\widehat{A}'(\eta)=0$ означает, что при каждом η приращение $\arg\widehat{A}(\sigma,\eta)$ при $-\infty<\sigma<\infty$ равно нулю. Таким образом (ср. лемму 2.5 (i)), функция $a(\theta,\eta)=\widehat{A}(\theta^{-1},\eta)$ будет C^∞-функцией на окружности со значениями в $\mathscr{M}(\mathbb{R}^{n-1})$. Так как область значений этой функции не содержит начала координат, то и $\ln a(\theta,\eta)$ будет функцией на окружности со значениями в $\mathscr{M}(\mathbb{R}^{n-1})$. Таким образом, мы показали, что $\ln\widehat{A}(\sigma,\eta)\in\mathscr{H}\otimes\mathscr{M}$, а в силу (39) $\deg_\sigma\ln\widehat{A}\leqslant-1$. Но тогда если $B\in\mathscr{S}^{(-\infty)}$ — обратное преобразование Фурье $\ln\widehat{A}$, то $\deg_t B\leqslant0$, и поэтому $B=B_++B_-$, $B_\pm\in\mathscr{Y}_\pm$, $\deg B_\pm<0$. Таким образом, мы получим факторизацию

$$\widehat{A}(\sigma,\eta)=\exp(\widehat{B}_+(\sigma,\eta))\exp(\widehat{B}_-(\sigma,\eta)). \tag{40}$$

Так как при каждом η факторизация (16) определена с точностью до множителя, то (31), (31′) можно переписать в виде

$$p_+(\sigma,\eta)=\operatorname{Re}\widehat{B}_+(\sigma,\eta)-\operatorname{Re}\widehat{B}_+(0,\eta), \tag{41}$$
$$q_+(\sigma,\eta)=\operatorname{Im}\widehat{B}_+(\sigma,\eta)-\operatorname{Im}\widehat{B}_+(0,\eta). \tag{41′}$$

Теперь остается заметить, что если $\widehat{B}_+(\sigma,\eta)\in\mathscr{H}^+\otimes\mathscr{M}$, $\deg_\sigma\widehat{B}_+<0$, то этими же свойствами обладают функции $\widehat{B}_+(0,\eta)$, $\overline{\widehat{B}_+(\sigma,\eta)}$.

$\operatorname{Re}\widehat{B}_- = (\widehat{B}_+ + \overline{\widehat{B}}_+)/2$, $\operatorname{Im}\widehat{B}_+ = (\widehat{B}_+ - \overline{\widehat{B}}_+)/(2i)$, и, следовательно, функции (41), (41′). Таким образом, условия (37) доказаны.

4.6. Окончание доказательства необходимости условия (32). В предыдущем пункте мы показали, что в условиях предложения 4.5 выполняется оценка (38). Теперь мы выведем (32) из этой оценки. Справедливо

Предложение. *Пусть* $p_+(\sigma, \eta) \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{M}$, $\deg_\sigma p_+ \leqslant -1$. *Пусть для любой функции* $\varphi(\sigma, \eta) \in \mathscr{S}$ *справедлива оценка* (38). *Тогда*

$$|p_+(\sigma, \eta)| < c\ln(2 + |\eta|). \tag{42}$$

Доказательство. 1) Будем рассуждать от противного. Если оценка (42) не выполнена, то найдется такая последовательность $(\sigma_k, \eta_{(k)}) \in \mathbb{R}^n$, что

$$|p_+(\sigma_k, \eta_{(k)})| > 2k\ln(2 + |\eta_{(k)}|), \tag{43}$$

т. е. либо выполняется неравенство

$$p_+(\sigma_k, \eta_{(k)}) > 2k\ln(2 + |\eta_{(k)}|), \tag{43′}$$

либо неравенство

$$p_+(\sigma_k, \eta_{(k)}) < -2k\ln(2 + |\eta_{(k)}|). \tag{43″}$$

Так как $p_+ \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{M}$ и $\deg_\sigma p_+ \leqslant -1$, то найдутся такие константы c и M, что

$$|p_+(\sigma, \eta)| < c(1 + |\eta|)^M (1 + |\sigma|)^{-1}. \tag{44}$$

Если в это неравенство подставить $\eta = \eta_{(k)}$, $\sigma = \sigma_k$ и левую часть с помощью (43) оценить снизу через $2\ln 2$, то мы с некоторым $R > 0$ получим оценку

$$|\sigma_k| < R(1 + |\eta_{(k)}|)^M. \tag{45}$$

Ввиду этой оценки последовательность $\eta_{(k)}$ неограничена (в противном случае нашлась бы точка $(\sigma_0, \eta_{(0)})$, в окрестности которой функция $p_+(\sigma, \eta)$ принимала бы сколь угодно большие значения). Таким образом мы можем выбрать такую последовательность $(\sigma_k, \eta_{(k)})$, чтобы

$$|\eta_{(k)} - \eta_{(j)}| > 1, \quad k \neq j, \quad |\eta_{(k)}| > k, \tag{46}$$

при этом либо

$$p_+(\sigma_k, \eta_{(k)}) > 2k\ln|\eta_{(k)}|, \tag{47}$$

либо

$$p_+(\sigma_k, \eta_{(k)}) < -2k\ln|\eta_{(k)}|. \tag{47′}$$

Из последовательности σ_k можно выбрать подпоследовательность, ограниченную либо сверху, либо снизу. Далее для определенности будем считать, что

$$\sigma_k \geqslant 2. \tag{48}$$

2) Покажем теперь, что (47) противоречит оценке (38). Предварительно мы эту оценку модифицируем следующим образом.

a) Вместо функции $\varphi(\sigma, \eta) \in \mathcal{S}$ возьмем функцию $\varphi(\eta) h(\sigma)$, где $\varphi(\eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $h(\sigma) \in \mathcal{D}$, причем $h(\sigma) \geqslant 0$ и носитель $h(\sigma)$ принадлежит лучу $\sigma \geqslant 1$.

b) В левой части (38) область интегрирования по σ ограничим лучом $-\infty < \sigma < -R(1+|\eta|)^M$.

c) Положительный множитель $\exp(-p_+(\sigma, \eta))$ мы можем вынести из-под знака внутреннего интеграла в левой части (38). При $\sigma \leqslant -R(1+|\eta|)^M$ правая часть неравенства (44) не превосходит c/R, поэтому множитель $\exp(-2p_+(\sigma, \eta))$ можно снизу оценить константой $\exp(-2c/R)$.

d) Если $\sigma \leqslant 1$, то в левой части (38) будет стоять квадрат интеграла

$$\int_1^\infty \exp(-p_+(\theta, \eta)) h(\theta)(\theta-\sigma)^{-1} d\theta$$

с неотрицательным подынтегральным выражением. Поскольку

$$\frac{1}{\theta-\sigma} \geqslant \frac{1}{2\theta|\sigma|}, \quad \theta > 1, \quad \sigma < -1,$$

то под знаком интеграла по θ мы оставим множитель θ^{-1}, а множитель $(2|\sigma|)^{-1}$ вынесем из-под знака интеграла. После этого мы сможем левую часть проинтегрировать по σ и получить окончательную оценку

$$c\int (1+|\eta|^2)^{\lambda-M} |\varphi(\eta)|^2 \left(\int_1^\infty \exp(p_+(\theta, \eta)) h(\theta)\theta^{-1} d\theta\right)^2 d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int |\varphi(\eta)|^2 d\eta \int_1^\infty h^2(\theta)\, d\theta. \quad (49)$$

Эта оценка должна выполняться для всех $\varphi \in \mathcal{S}$. По соображениям непрерывности она продолжается на произвольные $\varphi \in H$.

3) Теперь мы подставим в (49) функцию φ, «сосредоточенную» в основном около точек $\eta_{(k)}$. Положим

$$\varphi(\eta) = \sum_{k=1}^\infty |\eta_{(k)}|^{-\varkappa} \psi\left(\frac{\eta-\eta_{(k)}}{a_k}\right), \quad (50)$$

где $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi(\eta) = 1$ при $|\eta| < 1/2$, $\psi(\eta) = 0$ при $|\eta| > 3/4$ и

$$a_k = \varepsilon |\eta_{(k)}|^{-L}, \quad (50')$$

числа $\varkappa$, ε, L будут указаны ниже. Если ε достаточно мало, то ввиду (46) носители членов суммы (50) не пересекаются, а поэтому

$$\int |\varphi(\eta)|^2 d\eta = \sum_{k=1}^\infty |\eta_{(k)}|^{-2\varkappa} \int \left|\psi\left(\frac{\eta-\eta_{(k)}}{a_k}\right)\right|^2 d\eta =$$

$$= \|\psi\| \sum_{k=1}^\infty |\eta_{(k)}|^{-2\varkappa} a_k^{n-1} = \|\psi\| \varepsilon^{n-1} \sum |\eta_{(k)}|^{-2\varkappa - L(n-1)} \leqslant \text{const},$$

если $-2\varkappa - L(n-1) < -1$ (сходимость ряда вытекает из второго неравенства (46)).

Таким образом, для функций φ вида (50) оценка (49) переходит в оценку

$$c_1 \sum |\eta_{(k)}|^{2\lambda-2M-2\varkappa} \int \left| \psi\left(\frac{\eta-\eta_{(k)}}{a_k}\right)\right|^2 \times$$

$$\times \left(\int_1^\infty \exp(p_+(\theta,\eta))\, h(\theta)\, \theta^{-1} d\theta\right)^2 d\eta \leqslant \|h\|^2. \quad (51)$$

4) Мы можем считать (выделяя, если нужно, подпоследовательность), что

$$\sigma_k \to \sigma_0, \qquad k \to \infty, \qquad \sigma_0 \geqslant 2. \qquad (52)$$

Разберем сначала более простой случай $\sigma_0 < \infty$. В этом случае в качестве h возьмем произвольную неотрицательную финитную функцию, сосредоточенную при $\sigma \geqslant 1$ и равную 1 при $|\sigma - \sigma_0| < 1/2$. Тогда в правой части (51) будет стоять константа. Заменим в левой части (51) интеграл по $\theta \in [1, \infty)$ интегралом по отрезку $|\sigma_0 - \theta| < 1/2$. На этом отрезке $h(\theta) \equiv 1$, а θ^{-1} можно снизу оценить константой. Тогда получим неравенство

$$\sum |\eta_{(k)}|^{2\lambda-2M-2\varkappa} \int \left| \psi\left(\frac{\eta-\eta_{(k)}}{a_k}\right)\right|^\lambda \left(\int_{\sigma_0-1/2}^{\sigma_0+1/2} \exp(p_+(\theta,\eta)\, d\theta\right)^2 d\eta \leqslant c_2. \qquad (53)$$

Заметим, что если ε в (50′) достаточно мало, а L достаточно велико, то

$$p_+(\sigma,\eta) > k \ln |\eta_{(k)}| \text{ при } |\sigma - \sigma_k| \leqslant a_k, \qquad |\eta - \eta_{(k)}| < a_k. \qquad (54)$$

В самом деле, ввиду теоремы о среднем и неравенства (45) имеем

$$|p_+(\sigma_k, \eta_{(k)}) - p_+(\sigma,\eta)| \leqslant K(1 + |\eta_{(k)}|)^{N_1}(1 + |\sigma_k|)^{N_2} a_k \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon K_1 |\eta_{(k)}|^{N_1+MN_2-L} \leqslant k \ln |\eta_{(k)}|,$$

откуда и следует неравенство (54). В силу этой оценки

$$\int_{\sigma_k-a_k}^{\sigma_k+a_k} \exp(p_+(\theta,\eta))\, d\theta \geqslant 2a_k |\eta_{(k)}|^k = 2\varepsilon |\eta_{(k)}|^{k-L}.$$

Оставляя в левой части (53) интегралы по θ только по отрезкам $|\sigma_k - \theta| < a_k$, получим неравенства

$$\sum |\eta_{(k)}|^{2k+2\lambda-2M-2\varkappa-2L} \int \left|\psi\left(\frac{\eta-\eta_k}{a_k}\right)\right|^2 d\eta \leqslant c_3,$$

или

$$\sum |\eta_{(k)}|^{2k+2\lambda-2M-2\varkappa-(n+1)L} \leqslant c_4.$$

Поскольку $|\eta_{(k)}| > k$, то сумма в левой части расходится, т. е. (47) противоречит оценке (38).

5) Пусть теперь $\sigma_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Тогда в качестве функции $h(\theta)$ возьмем функцию, «сосредоточенную» около точек $\theta = \sigma_k$, т. е.

$$h(\theta) = \sum \chi\left(\frac{\theta - \sigma_k}{a_k}\right),$$

где $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\chi \geqslant 0$, $\chi(s) = 1$ при $|s| < 1/2$, $\chi(s) = 0$ при $|s| > 3/4$. Если $L > 1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\theta)\,d\theta = \sum \int \chi^2\left(\frac{\theta - \sigma_k}{a_k}\right) d\theta = \|\chi\|^2 \sum a_k =$$

$$= \varepsilon \|\chi\|^2 \sum |\eta_{(k)}|^{-L} \leqslant \varepsilon \|\chi\|^2 \sum k^{-L} \leqslant \text{const}.$$

Подставим теперь функцию $h(\theta)$ в неравенство (51). В k-м члене суммы слева интеграл по $\theta \in [1, \infty)$ заменим на интеграл по отрезку $|\theta - \sigma_k| \leqslant a_k$. Как уже отмечалось выше, на этом отрезке мы можем оценить $p_+(\sigma, \eta)$ снизу через $k \ln |\eta_{(k)}|$, а θ можно снизу оценить через $\sigma_k/2$. Получим

$$\sum |\eta_{(k)}|^{2\lambda - 2M - 2\varkappa} \int \psi^2\left(\frac{\eta - \eta_{(k)}}{a_k}\right) d\eta\, |\eta_k|^{2k} \sigma_k^{-2} \times$$

$$\times \left(\int_{\sigma_k - a_k}^{\sigma_k + a_k} \chi\left(\frac{\theta - \sigma_k}{a_k}\right) d\theta\right)^2 \leqslant \text{const}.$$

Вычисляя интегралы в левой части, получим неравенство

$$\sum |\eta_{(k)}|^{2k + 2\lambda - 2M - 2\varkappa - (n-1)L} \sigma_k^{-2} \leqslant \text{const}.$$

В силу (45) σ_k^{-2} можно оценить снизу через $\text{const} \cdot |\eta_{(k)}|^{-2M}$. Так как $|\eta_{(k)}| > k$, то в левой части получим расходящийся ряд.

6) Рассмотрим теперь случай, когда выполнено (47′). В этом случае подставим в (38) функцию

$$\varphi(\sigma, \eta) = \varphi(\eta) h(\sigma/R(1 + |\eta|)^M), \tag{55}$$

где $\varphi(\eta) \in \mathscr{S}$, $h(\theta) \in \mathscr{D}$, $h(\theta) \geqslant 0$, $\int h(\theta)\,d\theta > \delta > 0$, а носитель $h(\theta)$ принадлежит интервалу $(-2, -1)$. В случае функции (55) правая часть (38) не превосходит константы, поскольку

$$\int |\varphi(\sigma, \eta)|^2\, d\eta\, d\sigma = \int |\varphi(\eta)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\sigma R^{-1}(1 + |\eta|)^{-M})\, d\sigma\, d\eta =$$

$$= \int |\varphi(\eta)|^2 R(1 + |\eta|)^M d\eta \int h^2(\theta)\,d\theta = \text{const}.$$

С левой частью (38) поступим следующим образом.

a) Ограничим область интегрирования по σ лучом $\sigma \geqslant 1$.

b) Поскольку интегрирование по θ будет проводиться по лучу $\theta > -R(1+|\eta|)^M$, то в интеграле по θ $\exp(p_+(\theta, \eta))$ можно оценить снизу константой (в силу (44)), а $(\sigma-\theta)^{-1}$ можно оценить снизу через $(2\sigma|\theta|)^{-1}$.

c) Вычислим внутренний интеграл по θ:

$$\int\limits_{-2R(1+|\eta|)^M}^{-R(1+|\eta|)^M} h\left(\theta R^{-1}(1+|\eta|)^{-M}\right)\theta^{-1}d\theta = \text{const}.$$

Таким образом, мы получим неравенство

$$\int (1+|\eta|^2)^\lambda |\varphi(\eta)|^2 \int\limits_1^\infty \exp(-2p_+(\sigma, \eta))\,\sigma^{-2}d\sigma \leqslant \text{const}. \tag{56}$$

Подставим в это неравенство функцию (50) и в k-м члене получившегося ряда интеграл по $\sigma \in [1, \infty)$ заменим на интеграл по отрезку $|\sigma-\sigma_k| < a_k$. На этом отрезке $\exp(-2p_+(\sigma, \eta))$ можно оценить снизу через $|\eta_{(k)}|^k$, а интеграл — через

$$|\eta_{(k)}|^k \int\limits_{\sigma_k-a_k}^{\sigma_k+a_k} \sigma^{-2}d\sigma = |\eta_{(k)}|^k \frac{2a_k}{\sigma_k^2-a_k^2} \geqslant 2a_k|\eta_{(k)}|^k\sigma_k^{-2} \geqslant$$

$$\geqslant \text{const}\cdot|\eta_{(k)}|^{k-L-2M}.$$

Вычисляя интегралы от $\psi((\eta-\eta_{(k)})/a_k)$, мы получим в левой части (56) расходящийся ряд. Предложение доказано, а вместе с ним доказана необходимость условия (32) для существования правого обратного у оператора (14).

4.7. Необходимость существования факторизации (13). Закончим теперь доказательство теоремы 2 из п. 4.2. Для этого еще раз кратко напомним уже доказанные утверждения.

1) **Если (14) является изоморфизмом, то символ $\widehat{A}(\sigma, \eta)$ является обратимым элементом $\mathscr{H} \otimes \mathscr{M}$, и при этом**

$$\deg_\sigma \widehat{A}(\sigma, \eta) = d, \quad \operatorname{ind} \widehat{A}(\sigma, \eta) = d_+ \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

2) **Если символ $\widehat{A}(\sigma, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы, то и символ**

$$A_0(\sigma, \eta) = (\sigma-i)^{-d_+}(\sigma+i)^{-d+d_+}A(\sigma, \eta)$$

также удовлетворяет условиям этой теоремы с $d_+ = d = 0$. Таким образом, мы можем считать, не ограничивая общности, что выполнено условие (34). Не является также ограничением общности условие (39).

3) **В конце п. 4.5, модифицируя рассуждение одномерного случая, мы показали, что найдутся такие символы $\widehat{B}_\pm \in \mathscr{H}^\pm \otimes \mathscr{M}$, $\deg_\sigma \widehat{B}_\pm \leqslant -1$, что справедлива факторизация (40).**

4) В п. 4.6 (см. (41)) было доказано, что из условия теоремы следует оценка вещественной части $\widehat{B}_+$

$$|\operatorname{Re}\widehat{B}_+(\sigma,\ \eta)| < c\ln(1+|\eta|). \tag{57}$$

Из этой оценки легко следует, что

$$\exp(\widehat{B}_+(\sigma,\ \eta)) \in \mathscr{M}^{\mathrm{reg}}. \tag{58}$$

Далее, так как $\widehat{B}_\pm \in \mathscr{H}^\pm \otimes \mathscr{M}$, то функции $\exp(\widehat{B}_\pm(\tau,\ \eta))$ принадлежат C^∞ при $\mp\operatorname{Im}\tau \geqslant 0$ и голоморфны по τ при $\mp\operatorname{Im}\tau > 0$. Если мы сумеем «продолжить» оценки (57) в комплексную область, т. е. доказать, что

$$|\operatorname{Re}\widehat{B}_+(\sigma+i\gamma,\ \eta)| < c\ln(1+|\eta|+|\sigma|+|\gamma|), \qquad \gamma < 0, \tag{59}$$

то из этой оценки уже непосредственно следует, что

$$\exp(\widehat{B}_+(\tau,\ \eta)) \in (\mathscr{M}^+)^{\mathrm{reg}}. \tag{60}$$

5) Для вывода (59) из (57) следует заметить, что $p_+(\sigma,\ \gamma,\ \eta) = \operatorname{Re}\widehat{B}_+(\sigma+i\gamma\eta)$ при каждом η является гармонической функцией, принимающей при $\sigma\to-0$ граничное значение $\operatorname{Re}\widehat{B}_+(\sigma,\ \eta)$, допускающее оценку (57). Но тогда $p_+(\sigma,\ \gamma,\ \eta)$ представляется в виде интеграла Пуассона:

$$p_+(\sigma,\ \gamma,\ \eta) = \frac{\gamma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\widehat{B}_+(\theta,\ \eta)}{(\sigma-\theta)^2+\gamma^2}\,d\theta.$$

Отсюда сравнительно просто получается оценка (59) (см. А. И. Шнирельман [1]).

6) Покажем теперь, что

$$\exp(\widehat{B}_-(\tau,\ \eta)) \in (\mathscr{M}^-)^{\mathrm{reg}}. \tag{60$'$}$$

В самом деле, в силу (40) и (58)

$$\exp(\widehat{B}_-(\sigma,\ \eta)) = \widehat{A}(\sigma,\ \eta)\exp(-\widehat{B}_+(\sigma,\ \eta)) \in \mathscr{M}^{\mathrm{reg}},$$

откуда следует оценка

$$|\operatorname{Re}\widehat{B}_-(\sigma,\ \eta)| < c\ln(1+|\eta|+|\sigma|).$$

Из этой оценки (60′) выводится таким же образом, как (60) из (58).

7) Из (60), (60′) следует, что факторизация (40) является канонической факторизацией в $\mathscr{M}$. Переходя к обратному преобразованию Фурье, мы получим каноническую факторизацию (13) в пространстве $(\mathscr{O}')^{\mathrm{reg}}$. Сейчас мы покажем, что на самом деле $A_\pm$ принадлежит $(\mathscr{Y}^\pm)^{\mathrm{reg}}$. Имеет место

Лемма. *Пусть $A \in \mathscr{Y}^{\mathrm{reg}}$ допускает каноническую факторизацию (13) в $(\mathscr{O}')^{\mathrm{reg}}$. Тогда A допускает каноническую факторизацию в $\mathscr{Y}^{\mathrm{reg}}$.*

Доказательство. Пусть $G_\pm \in (\mathcal{O}')_\pm$ и $A_\pm * G_\pm = \delta$. Тогда $A_+ = G_- * A \in \mathcal{U} \cap (\mathcal{O}')_+ = \mathcal{U}_+ = \mathcal{Y}_+$. Аналогично проверяется, что $A_- \in \mathcal{Y}_-$. Проверим, что $A_\pm$ — обратимые элементы $\mathcal{Y}_\pm$. Пусть

$$A = a_0(y)(D_t - i)^d + \ldots, \quad A_\pm = a_0^\pm (D_t \mp i)^{d_\pm} + \ldots, d_+ + d_- = d.$$

Так как $A_\pm$ обратимы в $(\mathcal{O}')_+$, то нам надо проверить, что $a_0^\pm(y)$ — обратимые элементы алгебры $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^{n-1})$. Так как $a_0^+ * a_0^- = a$, то $|\widehat{a}_0(\eta)| = |\widehat{a_0^+}(\eta)\,\widehat{a_0^-}(\eta)| \leqslant c_-(1+|\eta|)^\mu |\widehat{a_0^+}(\eta)|$.

Так как левая часть оценивается снизу через $c(1+|\eta|)^\mu$, то $\widehat{a_0^+} \in \mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$. Аналогично проверяется, что $\widehat{a_0^-} \in \mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Агранович М. С., Вишик М. И.

1. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН.— 1964.— Т. 19, вып. 3.— С. 53—161.

Билс, Фефферман (Beals R., Fefferman C.).

1. Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, 1 // CPAM.— 1974.— XXVII, № 1.— P. 1—24.

Бурбаки Н. (Bourbaki N.)

1. Espaces Vectoriels topologiques.— Paris: Hermann. (Имеется перевод: Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.— М.: ИЛ, 1965.)

Буте де Монвель (Boutet de Monvel)

1. Comportement d'un operateur pseudo-differential sur une variéte a bord // J. Analyse Math.— 1966.— V. 17.— P. 241—304.
2. Boundary problems for pseudo differential operators // Acta Math.— 1971.— V. 126.— P. 11—51.

Винер, Пэли (Wiener N., Paley R. E. A. C.)

1. Fourier transforms in complex domian.— Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XIX, New, York, 1934. (Имеется перевод: Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области.— М.: Наука, 1964.)

М. И. Вишик, Г. И. Эскин

1. Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения. // УМН.— 1967.— Т. 22, № 1.— С. 15—76.

Владимиров В. С.

1. Методы теории функций многих комплексных переменных.— М.: Наука, 1964.
2. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.

Волевич Л. Р.

1. Локальные свойства неоднородных псевдодифференциальных операторов // Труды Моск. матем. о-ва.— 1967.— Т. 16.— С. 51—98.

Волевич Л. Р., Мехтиев А. Г.

1. Мультипликаторы интегралов Фурье в весовых классах и теоремы вложения // Известия вузов, Математика.— 1967.— № 10.— С. 27—38.

Волевич Л. Р., Панеях Б. П.

1. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // УМН.— 1965.— Т. 20, № 1.— С. 3—74.

Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.

1. Псевдодифференциальные операторы и задача Коши для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Функц. анализ и его прил.— 1967.— Т. 1, № 4.— С. 8—25.
2. Задача Коши для плюрипараболических дифференциальных уравнений I, II // Матем. сб.— 1968.— Т. 75, № 1.— С. 64—105; — 1969.— Т. 78, № 2.— С. 214—236.
3. Задача Коши для дифференциальных операторов с доминирующей главной частью // Функц. анализ и его прил.— 1968.— Т. 3, № 3.— С. 22—40.

4. Задача Коши для псевдодифференциальных уравнений // ДАН.— 1968.— Т. 181, № 2.— С. 267—270.
5. Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // УМН.— 1972.— Т. 27, № 4.— С. 65—143.
6. Свертыватели в пространствах обобщенных функций и связанные с ними задачи для уравнений в свертках // Школа по теории операторов в функциональных пространствах, Новосибирск.— 1975 (препринт). (Имеется перевод: Volevich L. R., Gindikin S. G. Convolutors in spaces of distributions and related problems for convolution equations // Sel. Math. Sov.— 1982.— V. 2, № 1.— P. 9—30.)
7. Метод энергетических оценок в задаче Коши для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами // Труды всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1987.
8. Уравнение Винера — Хопфа в обобщенных функциях // Труды Моск. матем. о-ва.— 1976.— Т. 35.— С. 165—214.
9. Уравнение Винера — Хопфа в обобщенных функциях, гладких на полупрямой // Труды Моск. матем. о-ва.— 1979.— Т. 38.— С. 29—74.
10. Уравнение Винера — Хопфа для гладких и обобщенных функций в полупространстве // Труды Моск. матем. о-ва.— 1979.— Т. 40.— С. 241—295.
11. Метод энергетических оценок в смешанной задаче // УМН.— 1980.— Т. 35, вып. 5.— С. 53—120.
12. Краевые задачи для уравнения Винера — Хопфа в полупространстве // Труды Моск. матем. о-ва.— 1981.— Т. 42.— С. 176—199.
13. Задача Коши // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— 1988.— Т. 32.— С. 5—98.
14. (Gindikin S. G., Volevich L. R.) Distributions and Convolution Equatins.— Gordon and Breach Sc. Publ., 1992.
15. (Gindikin S. G., Volevich L. R.) The method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations.— Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.
1. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз, 1961.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.
1. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.
2. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.
3. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.

Гиндикин С. Г.
1. Задача Коши для сильно однородных дифференциальных операторов // Труды Моск. матем. о-ва.— 1967.— Т. 16.— С. 181—208.
2. Об одном обобщении параболических дифференциальных операторов на случай многомерного времени // ДАН СССР.— 1967.— Т. 173, № 3.— С. 499—502.
3. Трубчатые области и классы корректности задачи Коши // УМН.— 1968.— Т. 23, вып. 3.— С. 177—178.
4. Классы корректности задачи Коши для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Функц. анализ и его прил.— 1970.— Т. 4, вып. 2.— С. 83—84.
5. Свертыватели в пространствах обобщенных функций с экспоненциальной асимптотикой // Функц. анализ и его прил.— 1972.— Т. 6, вып. 2.— С. 83—86.
6. Задача Коши для экспоненциально корректных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19, вып. 1.— С. 66—68.

7. (Gindikin S.) Tube Domains and the Cauchy Problem/A. M. S., 1992.
Иосида (Yosida K.)
1. Functional analysis.— Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1965 (Имеется перевод: Иосида К. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967).
Кальдерон, Вайянкур (Calderon A., Vaillancourt R.)
1. On the boundness of pseudodifferential operators // J. Math. Soc. Japan.— 1971.— V. 23.— P. 374—378.
Канторович Л. В., Акилов Г. П.
1. Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М.: Физматгиз, 1959.
Крейн М. Г.
1. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН.— 1958.— Т. 13, № 5.— С. 3—120.
Кумано-го (Kumano-go H.)
1. Pseudo-differential operators of multiple symbol and the Calderon — Vaillancuort theorem. // J. Math. Soc. Japan.— 1975.— V. 27, № 27.— P. 113—120.
Макаров Б. М.
1. Об индуктивном пределе последовательности нормированных пространств. // ДАН СССР.— 1958.— Т. 119, № 6.— С. 1092—1094.
2. О некоторых патологических свойствах индуктивных пределов B-пространств // УМН.— 1963.— Т. 18, вып. 3.— С. 171—178.
3. Индуктивные пределы нормированных пространств // Вестник Ленингр. ун-та.— 1965.— Т. 20, № 13.— С. 50—58.
Паламодов В. П.
1. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.— М.: Наука, 1967.
Петровский И. Г.
1. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений в частных производных в области неаналитических функций // И. Г. Петровский, Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.— М.: Наука, 1986.
Рабинович В. С.
1. О нетеровости псевдодифференциальных операторов с символами из класса $S^m_{\rho,\delta}\,(0 \leqslant \delta = \rho < 1)$ // Матем. заметки.— 1980.— Т. 27, вып. 3.— С. 457—467.
Сили (Seeley R. T.)
1. Extensions of C^∞ functions defined in a half space // Proc. Amer. Math. Soc.— 1964.— V. 15.— P. 625—626.
Соболев С. Л.
1. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1950.
2. Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1966.
Солонников В. А.
1. О краевых задачах для линейных параболических систем общего вида // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1965.— Т. 83.
Стейн, Вейс (Stein E., Weiss G.)
1. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.— Princeton Univ. Press, Princeton.— 1971. (Имеется перевод: Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— Мир, 1974.)
Тейлор (Taylor M.)
1. Pseudo-differential operators.— Princeton: Princeton University Press, 1981. (Имеется перевод: Тейлор М., Псевдодифференциальные операторы.— М.: Мир, 1985.)
Трибель (Triebel H.)
1. Interpolation theory function spaces differential operators.— Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wiss., 1978 (Имеется перевод: Три-

бель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.)

Хёрмандер (Hörmander L.)

1. Linear partial differential operators.— Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1963 (Имеется перевод: Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1965.)
2. The Analysis of Linear Partial Differential operators 1. Distribution theory and Fourier Analysis.— Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo: Springer, 1983 (Имеется перевод: Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье.— М.: Мир, 1986.)
3. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces // Acta Math.— 1960— V. 104.— P. 93—140. (Имеется перевод: Хёрмандер Л. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига.— М.; ИЛ, 1962.)

Шварц (Schwartz L.)

1. Théorie des distributions, I, II.— Paris: Hermann, 1950—1951.
2. Théorie des noyaux // Proc. Int. Congr. Math. Cambridge.— 1950.— V. 1.— P. 220—230.
3. Transformation de Laplace des distributions // Comm. Sém. Math. Univ. Lund, Tome suppl. dédie a Marcel Riesz.— 1952.— P. 196—206.

Шнирельман А. И.

1. Уравнение в свертках в полупространстве // Матем. сб.— Т. 82, № 3.— С. 476—493.

Эдвардс (Edwards R. E.)

1. Functional analysis. Theory and applications.— New York Chicago San Francisko Toronto London: Holt, Rinehart and Winston, 1965 (Имеется перевод: Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения.— М.: Мир, 1969.)

Эйдельман С. Д.

1. Параболические системы.— М.: Наука, 1964.

Эскин Г. И.

1. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1973.

Яковлев Г. Н.

1. О следах функций из пространств W_p^l на кусочно гладких поверхностях // Мат. сб.— 1967.— Т. 74, № 4.— С. 326—543.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Научное издание

ВОЛЕВИЧ Леонид Романович,
ГИНДИКИН Семен Григорьевич

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ
И УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *В. В. Абгарян*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *О. М. Карпова*

ИБ № 41244

ЛР № 020297 от 27.11.91.
Сдано в набор 17.06.91. Подписано к печати 14.03.94. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 21. Усл. кр.-отт. 21. Уч.-изд. л. 23,03. Тираж 1000 экз. Заказ изд. № 882053. Заказ тип. № 937. С-045.

Издательская фирма
«Физико-математическая литература» ВО «Наука»
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Новосибирская типография № 4 ВО «Наука».
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА
ВО «НАУКА»

ГОТОВИТСЯ К ИЗДАНИЮ

СИНАЙ Я. Г. **Современные проблемы эргодической теории.**— М.: Физматлит, 1994.— 208 с.

Книга содержит изложение основных общих понятий и конструкций эргодической теории и их применение для анализа различных классов гладких динамических систем, включая одномéрные отображения, гиперболические динамические системы и динамические системы статистической механики.

Для студентов и научных работников — математиков и физиков-теоретиков.

С заказами обращаться по адресу
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, д. 15
Издательская фирма «Физматлит»