

Л. М. ГОЛЬДЕНБЕРГ
Б. Д. МАТЮШКИН
М. Н. ПОЛЯК

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

БКБ 32.88
Г63
УДК 621.372.542

Гольденберг Л. М. и др.
Г63 Цифровая обработка сигналов: Справочник/
Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. —
М.: Радио и связь, 1985. — 312 с., ил.

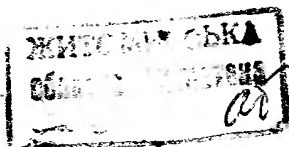
В пер.: 1 р. 40 к. 30 000 экз.

Приведены основные положения и расчетные формулы теории и методов проектирования систем и устройств цифровой обработки сигналов. Основное внимание уделено алгоритмическим методам синтеза и устройствам цифровой обработки в системах связи: избирательной цифровой фильтрации, спектральному анализу, изменению частоты дискретизации сигналов и др. Приведены программы и примеры по расчету цифровых фильтров на ЭВМ, а также таблицы коэффициентов передаточных функций рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров.

Для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием и разработкой устройств цифровой обработки сигналов в технике связи и управления.

Г 2402040000—041
046(01)—85 94—85

БКБ 32.88
6Ф1



Рецензенты: А. М. ТРАХТМАН, Б. А. КАЛАБЕКОВ

Редакция литературы по электрической связи

Лев Моисеевич Гольденберг, Борис Дмитриевич Матюшкин,
Михаил Николаевич Поляк

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. СПРАВОЧНИК

Редактор *Е. В. Комарова*
Художественный редактор *Р. А. Клочков*
Переплет художника *Н. А. Пашуро*
Технический редактор *А. Н. Золотарева*
Корректор *Н. Л. Жукова*

ИБ № 1091

Сдано в набор 30.08.84 Подписано в печать 10.12.84
Т-24016 Формат 60×90^{1/8} Бумага тип. № 2 Гарнитура литературная
Печать высокая Усл. печ. л. 19,5 Усл. кр.-отт. 19,5 Уч.-изд. л. 21,59 Тираж 30 000 экз.
Изд. № 19495 Зак. № 89 Цена 1 р. 40 к.
Издательство «Радио и связь». 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 5 ВГО «Союзучетиздат»
101000 Москва, ул. Кирова, д. 40

© Издательство «Радио и связь», 1985

ПРЕДИСЛОВИЕ

Перед разработчиками цифровой аппаратуры передачи и обработки сигналов неизбежно возникают задачи, для решения которых приходится обращаться к многочисленным монографиям, журнальным статьям, трудам различных конференций и т. д. Трудности решения многих из этих задач обусловлены и тем, что опубликованные работы написаны на разном уровне, с привлечением различного рода допущений и, что особенно существенно, в ряде случаев не доведены до наглядных и вместе с тем строгих процедур и программ.

В настоящей книге сделана попытка изложить с единых позиций наиболее важные законченные результаты в области анализа и синтеза цифровых фильтров и ряда устройств цифровой обработки сигналов. При этом авторы ограничиваются трактовкой и методикой использования этих результатов и, как правило, не приводят их доказательств; приводимые ссылки на литературу помогут читателям при желании восполнить этот пробел. Методы расчета иллюстрируются подробными примерами, приведены программы решения основных задач синтеза цифровых фильтров.

Необходимо отметить, что цифровая обработка сигналов как область науки весьма далека от завершения, поэтому не все ситуации и проблемы, представляющие теоретический и практический интерес, нашли достаточное отражение в предлагаемой книге. При отборе и систематизации материала представлялось необходимым: во-первых, рассмотреть алгоритмы цифровой обработки сигналов, во-вторых, дать законченную методику расчета цифровых фильтров и, в-третьих, изложить ряд основных задач обработки сигналов в технике связи.

В разд. 1 и 2 книги даны основные определения и понятия, относящиеся к дискретным сигналам и дискретным системам, а в разд. 3 рассматриваются эффекты квантования в цифровых фильтрах и методы их учета при синтезе цифровых систем обработки сигналов. Методика синтеза нерекурсивных и рекурсивных цифровых фильтров и соответствующие примеры и алгоритмы приведены в разд. 4 и 5. Методы расчета некоторых типов адаптивных фильтров приведены в разд. 6. В разд. 7—9 изложены цифровые методы решения задач переноса спектров сигналов, формирования сигналов с одной боковой полосой, увеличения и уменьшения частоты дискретизации сигналов, спектрального анализа, сопряжения систем связи с различными принципами каналообразования. В приложениях приведены программы расчета цифровых фильтров.

К сожалению, объем книги не позволил авторам детально рассмотреть ряд других алгоритмов и применений цифровой обработки сигналов, а также вопросы реализации соответствующих устройств на современной элементной базе. В связи с этим хотелось бы обратить внимание читателей на публикации последних лет [1.3, 1.16, 2.2, 2.11].

Авторы признательны А. Т. Байковой, участвовавшей в написании разд. 1, канд. техн. наук В. В. Домрачеву, составившему машинные программы расчета фильтров, а также своим коллегам на кафедре ИВТ ЛЭИС, принимавшим участие в обсуждении рукописи. Авторы благодарят рецензентов Б. А. Калабекова и А. М. Трахтмана за ценные замечания.

Отзывы о книге просим направлять в издательство «Радио и связь» по адресу: 101000, Москва, Почтамт, а/я 693.

3. СВОЙСТВА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

1.1. ТИПЫ СИГНАЛОВ. СВЯЗЬ МЕЖДУ СИГНАЛАМИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

1.1.1. Классификация сигналов

Аналоговый сигнал описывается непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией $x_a(t)$, причем и аргумент, и сама функция могут принимать любые значения из некоторых интервалов: $t' \leq t \leq t''$, $x'_a \leq x_a \leq x''_a$.

На рис. 1.1,а изображен график аналогового сигнала $x_a(t) = U_m \sin \omega t$; $\omega = 2\pi f$; $U_m = 1$ В; $f = 1/(2\pi)$ Гц.

К аналоговым сигналам относятся, например, речевые сигналы в «обычной» телефонии и радиовещании и «обычные» телевизионные сигналы.

Дискретный сигнал описывается решетчатой функцией (последовательностью, временным рядом) $x(nT)$, которая может принимать любые значения в некотором интервале $x' < x < x''$, в то время как независимая переменная n принимает лишь дискретные значения, причем $n = 0, 1, \dots$; T — интервал дискретизации; $f_d = 1/T$ — частота дискретизации. На рис. 1.1,б изображен график дискретного сигнала $x(nT) = U_m \sin n\omega T$; $\omega = 2\pi f$; $U_m = 1$ В; $f = 1/(2\pi)$ Гц; $T = \pi/4$ с.

Используются и иные способы обозначения решетчатой функции: $x(n)$, x_n , когда интервал дискретизации тем или иным способом нормирован и остается постоянным, или $\{x(nT)\}$, когда необходимо подчеркнуть, что речь идет о решетчатой функции в целом, а не об отдельном значении (отсчете) этой функции при $t = nT$. В дальнейшем, как правило, отдельный отсчет решетчатой функции при $t = nT$ и решетчатая функция в целом будут обозначаться одинаково — $x(nT)$. Конечная последовательность, т. е. дискретный сигнал, у которого число отсчетов конечно, представляет

собой вектор и часто обозначается через x . Например, конечная последовательность x , состоящая из трех отсчетов $x(0) = 1$, $x(T) = -2$, $x(2T) = 5$, может быть задана в следующей форме: $x = [1, -2, 5]^T$, где T — символ транспонирования вектора.

Дискретный сигнал может быть вещественным или комплексным. В первом случае отсчеты принимают лишь вещественные значения, во втором — ком-

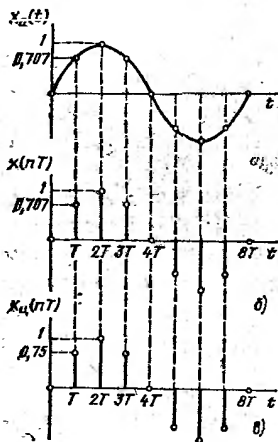


Рис. 1.1.

плексные. К дискретным квантованным по амплитуде сигналам относятся сигналы, используемые в системах связи с амплитудно-импульсной модуляцией.

Цифровой сигнал описывается квантованной решетчатой функцией (квантованной последовательностью, квантованным временным рядом) $x_{\Pi}(nT)$, т. е. решетчатой функцией, принимающей лишь ряд дискретных значений — уровней квантования h_1, h_2, \dots, h_K , в то время как независимая переменная n принимает значения $0, 1, \dots$. На рис. 1.1, в изображен график цифрового сигнала

$$x_{\Pi}(nT) = O_K(U_m \sin n\omega T);$$

$$\omega = 2\pi f; \quad U_m = 1 \text{ В};$$

$$f = 1/(2\pi) \text{ Гц}; \quad T = \pi/4\text{с};$$

$$h_l = -1 + 0,25(l-1),$$

$l=1, 2, \dots, K$; $K=9$ и нелинейная функция $O_K(p)$ определяется следующим образом:

$$O_K(p) = \begin{cases} h_1 & \text{при } p \leq (h_2 + h_1)/2; \\ h_l & \text{при } (h_l + h_{l-1})/2 < p \leq (h_{l+1} + h_l)/2; \\ h_K & \text{при } (h_K + h_{K-1})/2 < p. \end{cases}$$

$$l = 2, 3, \dots, K-1.$$

Каждый из уровней квантования кодируется кодом, состоящим из двоичных цифр, так что передача или обработка отсчета цифрового кодированного сигнала сводится к операциям над безразмерным двоичным кодом. Число K уровней квантования и число s разрядов соответствующих кодов связаны зависимостью $s \geq \text{int}(\log_2 K)$. Значения цифрового сигнала могут быть заданы таблицей. В табл. 1.1 приведены значения рассмотренного выше цифрового сигнала $x_{\Pi}(nT) = O_K(U_m \sin n\omega T)$, причем отсчеты представлены десятичными числами или пятиразрядными двоичными кодами $s=5$, в которых первый слева разряд — знаковый.

К цифровым сигналам относятся сигналы, используемые в системах связи с импульсно-кодовой модуляцией.

Дискретные сигналы, так же как и аналоговые, образуют линейное пространство [1.1]. Поэтому математический аппарат теории дискретных сигналов и линейных дискретных систем развит так же хорошо, как и математический аппарат теории аналоговых сигналов и линейных аналоговых систем. Цифровые сигналы при ограниченном числе разрядов, используемых для представления отсчетов, не образуют линейного пространства относительно обычных операций сложения и умножения. Поэтому при решении задач обработки цифровых сигналов используются линейные дискретные модели, позволяющие применять методы теории дискретных сигналов и линейных дискретных систем (см. разд. 2).

Таблица 1.1

n	$x_{\Pi}(nT)$	
	Десятичный код	Двоичный код
0	0,000	00000
1	0,750	00110
2	1,000	01000
3	0,750	00110
4	0,000	00000
5	-0,750	10110
6	-1,000	11000
7	-0,750	10110
8	0,000	00000

* Значение функции $\text{int}(B)$ — наименьшее целое число, не меньшее числа B .

1.1.2. Связь между аналоговыми и дискретными сигналами

Операция дискретизации [1.2, 1.4] состоит в том, что по заданному аналоговому сигналу $x_a(t)$ строится дискретный сигнал $x(nT)$, причем $x(nT) = x_a(nT)$.

Операция восстановления состоит в том, что по заданному дискретному сигналу $x(nT)$ строится аналоговый сигнал $x_a(t)$, $x(nT) \rightarrow x_a(t)$ [1.4].

Операции дискретизации и восстановления взаимно обратны в том случае, когда дискретизируемый аналоговый сигнал удовлетворяет условиям теоремы Котельникова [1.5]: если аналоговый сигнал $x_a(t)$ имеет ограниченный (финитный) спектр, принимающий отличные от нуля значения лишь при $\omega_{a \min} \leq \omega_a \leq \omega_{a \max}$ (где $\omega_a = 2\pi f_a$ — круговая частота аналогового сигнала), и дискретизация этого сигнала выполняется с частотой f_d такой, что

$$2\omega_{a \max}/q \leq 2\pi f_d \leq 2\omega_{a \min}/(q-1),$$

где

$$q = 1, 2, \dots, E_{\Pi} \left[\frac{\omega_{a \max}}{\omega_{a \max} - \omega_{a \min}} \right]^*,$$

то этот аналоговый сигнал может быть точно восстановлен по отсчетам соответствующего дискретного сигнала.

Связь между спектром $X_a(i\omega)$ аналогового сигнала $x_a(t)$ и спектром $X(e^{i\omega T})$ (см. 1.2.4) дискретного сигнала $x(nT) = x_a(nT)$ определяется формулой [1.6].

$$X(e^{i\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left(i \left(\omega + \frac{2\pi}{T} m \right) \right). \quad (1.1)$$

Это выражение описывает так называемое «размножение» спектра аналогового сигнала при дискретизации.

Согласно теореме Котельникова аналоговый сигнал с ограниченным спектром может быть точно (без потери информации) преобразован в дискретный сигнал и затем точно восстановлен по отсчетам этого дискретного сигнала. Практически любой аналоговый сигнал имеет ограниченный спектр и поэтому может быть заменен при правильно выбранной частоте дискретизации соответствующим дискретным сигналом.

1.1.3. Связь между дискретными и цифровыми сигналами

Операция квантования и кодирования (аналого-цифрового преобразования) состоит в том, что по заданному дискретному сигналу $x(nT)$ строится цифровой кодированный сигнал $x_{ц}(nT)$, $x(nT) \rightarrow x_{ц}(nT)$ так, что $x_{ц}(nT) \approx x(nT)$, $n=0, 1, \dots$

Операция цифро-аналогового преобразования состоит в том, что по заданному цифровому кодированному сигналу $x_{ц}(nT)$ строят дискретный сигнал $x(nT)$, $x_{ц}(nT) \rightarrow x(nT)$ так, что $x(nT) = x_{ц}(nT)$.

Операции квантования и кодирования и цифро-аналогового преобразования не являются точно взаимно обратными, поскольку квантование в общем случае выполняется с неустранимой погрешностью. Как правило, считают, что

* Запись $E_{\Pi}[A]$ означает «целая часть числа A » (например, $E_{\Pi}[8, 6] = 8$).

аналого-цифровые преобразователи (АЦП) выполняют операции дискретизации, квантования и кодирования, а цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП) — операции цифро-аналогового преобразования и восстановления [1.7].

Переход от дискретного сигнала к цифровому, т. е. операция квантования, осуществляется в общем случае неточно. Если для представления каждого отсчета используется достаточно большое число двоичных разрядов, то погрешность квантования оказывается малой и дискретный сигнал (и, следовательно, соответствующий аналоговый сигнал) может быть заменен определенным цифровым сигналом. Практически число разрядов, которое могут обеспечить современные АЦП при необходимой частоте дискретизации, достаточно для получения цифровых телевизионных сигналов, цифровых речевых сигналов в телефонии и радиовещании.

1.1.4. Дискретная дельта-функция

Дискретная дельта-функция $\delta((n-m)T)$ определяется следующим образом (рис. 1.2, $m=3$):

$$\delta((n-m)T) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=m; \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Используя дискретную дельта-функцию, любую последовательность (решетчатую функцию) $\{x(nT)\}$ можно представить как

$$\{x(nT)\} = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \delta((n-m)T). \quad (1.2)$$

Пример 1.1. Пусть $x(0)=1$, $x(T)=-2$, $x(2T)=2,5$, $x(nT)=0$ при $n \geq 3$. Тогда из (1.2)

$$\{x(nT)\} = \delta(nT) - 2\delta((n-1)T) + 2,5\delta((n-2)T).$$

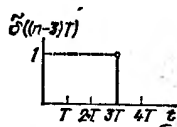


Рис. 1.2

1.2. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1.2.1. Прямое Z-преобразование

Прямое Z-преобразование $X(z)$ последовательности $x(nT)$ определяется формулой

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}. \quad (1.3)$$

Функцию $X(z)$ называют Z-образом последовательности $x(nT)$.

Преобразование (1.3) имеет смысл для тех значений комплексной переменной z , при которых ряд (1.3) сходится.

Пример 1.2. Пусть $x(0)=2$, $x(T)=-1$, $x(2T)=3$, $x(3T)=1,5$, $x(nT)=0$ при $n \geq 4$. Тогда из (1.3)

$$X(z) = 2 - z^{-1} + 3z^{-2} + 1,5z^{-3}.$$

В табл. 1.2 приведены ряд последовательностей и соответствующие им Z-образы [1.8].

С помощью Z-преобразования весьма удобно записывать различные формы выражений для передаточных функций и тем самым получать различные

$x(nT)$	$Z\{x(nT)\}$
	$1/(1-z^{-1})$
$(-1)^n$	$1/(1+z^{-1})$
n	$z^{-1}/(1-z^{-1})^2$
n^2	$(z^{-1}+z^{-2})/(1-z^{-1})^3$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
na^{n-1}	$z^{-1}/(1-az^{-1})^2$
$a^n \sin n\tau$	$\frac{az^{-1} \sin \tau}{1-2az^{-1} \cos \tau + a^2 z^{-2}}$
$a^n \cos n\tau$	$\frac{1-az^{-1} \cos \tau}{1-2az^{-1} \cos \tau + a^2 z^{-2}}$

формы реализации цифровых фильтров (см. 2.2). Кроме того Z-преобразование является основным способом расчета выходных сигналов дискретных и цифровых фильтров при сложных входных воздействиях.

1.2.2. Основные свойства прямого Z-преобразования

Пусть $x_1(nT)$, $x_2(nT)$, $x_3(nT)$ — последовательности; $X_1(z)$, $X_2(z)$, $X_3(z)$ — Z-образы этих последовательностей; c_1 , c_2 — константы.

Если $x_3(nT) = c_1 x_1(nT) + c_2 x_2(nT)$, то $X_3(z) = c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z)$ (линейность). (1.4)

Если $x_2(nT) = x_1((n-m)T)$, то

$$X_2(z) = x_1(-mT) + x_1((-m+1)T)z^{-1} + \dots + x_1(-T)z^{-(m-1)} + z^{-m}X_1(z). \quad (1.5)$$

При $x_1(-mT) = x_1((-m+1)T) = \dots = x_1(-T) = 0$

$$X_2(z) = z^{-m}X_1(z) \quad (\text{теорема сдвига})$$

Если $x_3(nT) = x_1(nT)x_2(nT)$, то

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X_1(v) X_2(z/v) v^{-1} dv, \quad (1.6)$$

где C — замкнутый контур в комплексной v -плоскости, охватывающей все особенности функции $X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}$, лежащие в окружности с центром в точке 0 и с радиусом, равным $|z|$ (теорема о комплексной свертке).

1.2.3. Обратное Z-преобразование

Обратное Z-преобразование определяется формулой

$$x(nT) = Z^{-1} \{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (1.7)$$

где C — замкнутый контур в z -плоскости, охватывающей все особенности функции $X(z)z^{n-1}$.

Обратное z -преобразование может быть определено путем вычисления интеграла (1.7), если последний не является расходящимся [1.9, 1.10]:

$$x(nT) = \sum_{k=1}^P \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k^{(l_k)}} \frac{d^{l_k-1} [(z - z_k^{(l_k)})^{(l_k)} F(z)]}{dz^{l_k-1}}, \quad (1.8)$$

где $F(z) = X(z)z^{n-1}$, $z_1^{(l_1)}$, $z_2^{(l_2)}$, ..., $z_P^{(l_P)}$ — все не равные друг другу полюсы функции $F(z)$; l_k — кратность полюса $z_k^{(l_k)}$, причем $0! = 1$ и $d^n \varphi(z)/dz^n = \varphi^{(n)}(z)$.

Существует второй способ вычисления (1.7) [1.9]:

$$x(nT) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n X(z^{-1})}{dz^n} \right]_{z=0}. \quad (1.9)$$

Формула (1.8) позволяет получить аналитическую зависимость $x(nT)$ от n и рассчитать $x(nT)$ для любого значения n ; формула (1.9) позволяет рассчитать $x(nT)$, не вычисляя полюсов функции $X(z)z^{n-1}$.

Пример 1.3. Пусть $X(z) = z^{-2}/((1-0,5z^{-1})(1-0,25z^{-2}))$. Используя (1.8) и учитывая, что при $n=0$ полюсы $F(z)$ имеют значения $z_1=0$, $z_2=0,5$, $z_3=0,25$, а при $n \geq 1$ — $z_1=0,5$, $z_2=0,25$, получаем

$$x(nT) = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0; \\ 4 \cdot 0,25^{n-1} (2^{n-1} - 1) & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

Пример 1.4. Пусть $X(z) = 1/(1+0,3z^{-1}-0,2z^{-2}+0,1z^{-3}-0,1z^{-4})$. Используя (1.9), получаем: $x(0)=1$; $x(T)=-0,3$; $x(2T)=-0,11$.

1.2.4. Преобразование Фурье

Спектром последовательности $x(nT)$ называют комплексную функцию $X(e^{i\omega T})$:

$$\left. \begin{aligned} X(e^{i\omega T}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-i n \omega T}; \\ x(nT) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{i\omega T}) e^{i n \omega T} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) представляют собой пару преобразований Фурье. Из сравнения (1.3) и (1.10) видно, что спектр может быть получен путем подстановки $z=e^{i\omega T}$ в Z-образ последовательности. Поэтому из (1.4) и (1.5) пря-

мо следуют соответствующие свойства спектров последовательностей. При $x_3(nT) = x_1(nT)x_2(nT)$ из (1.6) следует соотношение

$$X_3(e^{i\omega T}) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_1(e^{i\theta T}) X_2(e^{i(\omega-\theta)T}) d\theta. \quad (1.11)$$

Пусть $y(nT) = x(nT)e^{in\omega_1 T}$, тогда из (1.10)

$$Y(e^{i\omega T}) = X(e^{i(\omega-\omega_1)T}), \quad (1.12)$$

т. е. умножение последовательности $x(nT)$ на последовательность $e^{in\omega_1 T}$ соответствует сдвигу спектра последовательности $x(nT)$ вправо по оси частот.

Из (1.10) следует соотношение

$$X(e^{i\omega T}) = X(e^{i(\omega+m2\pi/T)T}), \quad (1.13)$$

т. е. спектр последовательности периодичен по частоте с периодом

$$\omega_d = 2\pi/T. \quad (1.14)$$

Для вещественных последовательностей из (1.10)

$$\begin{aligned} |X(e^{i\omega T})| &= |X(e^{-i\omega T})|; \\ \arg[X(e^{i\omega T})] &= -\arg[X(e^{-i\omega T})], \end{aligned} \quad (1.15)$$

т. е. модуль спектра вещественной последовательности является четной, а аргумент — нечетной функцией частоты. На рис. 1.3 показано условное изображение модуля спектра вещественной последовательности. Спектр $Y(e^{i\omega T})$ называют инверсным по отношению к спектру $X(e^{i\omega T})$ в том случае, если

$$Y(e^{i\omega T}) = X(e^{i(\omega-k\omega_d/2)T}), \quad k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (1.16)$$

Пример 1.5. Пусть $y(nT) = e^{-i\pi n} x(nT) = (-1)^n x(nT)$, $\omega_1 = \pi/T$, тогда из (1.12)

$$Y(e^{i\omega T}) = X(e^{i(\omega-\pi/T)T}),$$

т. е. умножение отсчетов сигнала $x(nT)$ на $(-1)^n$ позволяет получить сигнал $y(nT)$, спектр которого инверсен по отношению к спектру сигнала $x(nT)$.

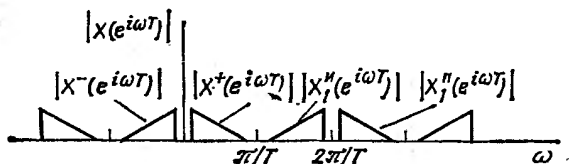


Рис. 1.3

Основным прямым спектром (прямой частью спектра) $X^+(e^{i\omega T})$ называют часть спектра $X(e^{i\omega T})$ сигнала $x(nT)$, полученного в итоге дискретизации аналогового сигнала $x_a(t)$, расположенную в области нижних частот от 0 до $\omega_d/2 = \pi/T$ (см. рис. 1.3).

Основным инверсным спектром (инверсной частью спектра) $X^-(e^{i\omega T})$ называют часть спектра $X(e^{i\omega T})$ сигнала $x(nT)$, полученного в итоге дискретизации аналогового сигнала $x_a(t)$ и расположенную в области частот от 0 до $-\omega_d/2 = -\pi/T$ (см. рис. 1.3).

Сдвинутым прямым спектром (или просто прямым спектром) $X_{\pi/k}^+(e^{i\omega T})$ называют часть спектра $X(e^{i\omega T})$; удовлетворяющую условию

$$X^+(e^{i\omega T}) = X_k^+(e^{i(\omega+k\omega_d)T}), \quad (1.17)$$

$0 \leq \omega \leq \pi/T$; k — целое число.

Сдвинутым инверсным спектром (или просто инверсным спектром) $X_{\pi/k}^-(e^{i\omega T})$ называют часть спектра $X(e^{i\omega T})$, удовлетворяющую условию

$$X^-(e^{i\omega T}) = X_k^-(e^{i(\omega+k\omega_d)T}), \quad (1.18)$$

$0 \leq \omega \leq \pi/T$; k — целое число.

Рисунок 1.3 иллюстрирует (1.17) и (1.18). На этом рисунке показаны модули основных прямого и инверсного спектров, а также модули некоторых сдвинутых прямых и инверсных спектров.

Соотношения (1.10) — (1.18) играют весьма важную роль, поскольку основой решения почти всех задач цифровой обработки является спектральная теория. Так, формула (1.12) соответствует алгоритму сдвига (переноса) спектра дискретного сигнала $x(nT)$ из одной области частот в другую, который сводится к умножению отсчетов $x(nT)$ на отсчеты $e^{i n \omega_1 T}$ (ω_1 — частота, на которую сдвигается спектр). Из формул (1.13) — (1.15) следует, что изменение спектра сигнала при $\omega = \omega_0$ возможно лишь в том случае, если $\omega_0 \leq \omega_{\pi}/2$.

Формула (1.16) определяет понятие «инверсный спектр», а в примере 1.5 рассмотрен алгоритм получения инверсного спектра последовательности $x(nT)$.

1.3. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. АЛГОРИТМЫ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

1.3.1. Общие сведения

Пара взаимно-однозначных преобразований:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) W_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1; \quad (1.19)$$

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (1.20)$$

где $x(nT)$, ($n=0, \dots, N-1$) — последовательность из N временных отсчетов с периодом T ; $X(k)$ ($k=0, \dots, N-1$) — последовательность из N частотных отсчетов; $W_N = e^{-i 2\pi/N}$, $i = \sqrt{-1}$, называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Преобразование (1.19) называется прямым, а преобразование (1.20) — обратным ДПФ (ОДПФ).

В матричной форме ДПФ имеет вид

$$X = W_N x, \quad (1.21)$$

где X и x — N -мерные векторы: $X = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$; $x = [x(0), x(T), \dots, x((N-1)T)]^T$; W_N — матрица размера $N \times N$ с элементами $d(n, k) = W_N^{nk} = W_N^{nk \pmod N}$, $n, k = 0, \dots, N-1$. Обратное ДПФ записывается в виде

$$x = W_N^{-1} X,$$

где W^{-1}_N — матрица, обратная к матрице W_N . Элементы W^{-1}_N равны $d^{-1}(n, k) = \frac{1}{N} W_N^{-n k} = \frac{1}{N} W_N^{-(n k \pmod N)}$.

Дискретное преобразование Фурье вводится для представления как периодических последовательностей с периодом N отсчетов, так и последовательностей конечной длины N . Коэффициенты ДПФ конечной последовательности равны значениям ее Z -преобразования в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности, т. е. $X(k) = X(z) |_{z=e^{i\frac{2\pi k}{N}}}$, $k=0, \dots, N-1$.

Сопоставляя Фурье-преобразование и ДПФ, можно отметить следующее. Фурье-преобразование и понятие «спектр» относятся к бесконечной последовательности $x(nT)$ в целом [см. (1.10)]. В тех случаях, когда речь идет о преобразованиях спектра бесконечной последовательности в целом [см., например, (1.11), (1.12)], ДПФ применяется относительно редко. Так, сдвиг спектра [см. (1.12)] и инверсия спектра (см. пример 1.5) выполняются умножением отсчетов $x(nT)$ на множители, зависящие от n . Цифровая фильтрация (см. разд. 2), реализующая изменение спектра входного сигнала по заданному закону, также выполняется, как правило, без применения ДПФ. Исключением, но весьма важным является применение ДПФ для вычисления линейной свертки (см. 1.4.3), что в сочетании с методами секционирования свертки (см. 1.4.4) позволяет эффективно реализовать нерекурсивную цифровую фильтрацию бесконечной последовательности (см. разд. 2).

Дискретное преобразование Фурье [см. (1.19) и (1.20)] выполняется над конечной последовательностью N отсчетов или над периодической последовательностью, у которой период состоит из N отсчетов. Поскольку характеристики спектра последовательности, такие как спектральная плотность мощности, амплитуды и фазы отдельных частот (см. разд. 8), определяются всегда с использованием конечного числа отсчетов этой последовательности, ДПФ является одним из важнейших средств их определения.

1.3.2. Свойства дискретного преобразования Фурье

Линейность. Если $X(k)$ и $Y(k)$ есть ДПФ последовательностей $x(nT)$ и $y(nT)$ соответственно, то ДПФ последовательности $ax(nT) + by(nT)$, где a и b — произвольные константы, равно $aX(k) + bY(k)$.

Сдвиг. Пусть $X(k)$ — ДПФ последовательности $x(nT)$, а последовательность $y(nT)$ получается из последовательности $x(nT)$ путем сдвига (в случае конечной последовательности — кругового сдвига) на n_0 отсчетов (рис. 1.4).

Тогда ДПФ последовательности $y(nT)$ равно $Y(k) = X(k) W_N^{n_0 k}$.

Аналогичный результат справедлив для сдвига коэффициентов ДПФ. Если $X(k)$ и $Y(k)$ есть ДПФ последовательностей $x(nT)$ и $y(nT)$ соответственно и $Y(k) = X(k - k_0)$, то $y(nT) = x(nT) W_N^{-n k_0}$.

На рис. 1.4 приняты следующие обозначения: $x_n(nT)$ — периодическая последовательность, причем $x_n(nT) = x(nT)$ при $n=0, 1, \dots, N-1$; $x_n((n-n_0)T)$ — периодическая последовательность, сдвинутая относительно $x_n(nT)$ на n_0 отсчетов; $x((n-n_0)T)$ — конечная последовательность, полученная круговым сдвигом $x(nT)$ на n_0 отсчетов; $x((n-n_0)T) = \dot{x}_n((n-n_0)T)$ при $n=0, 1, \dots, N-1$.

Свойства симметрии. Если последовательность $x(nT)$ является действительной, то ее ДПФ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\operatorname{Re}(X(k)) = \operatorname{Re}(X(N-k)); \quad \operatorname{Im}(X(k)) = -\operatorname{Im}(X(N-k));$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|; \quad \arg X(k) = -\arg X(N-k).$$

Дискретное преобразование Фурье симметричной последовательности $x(nT) = x((N-n)T)$ является действительным.

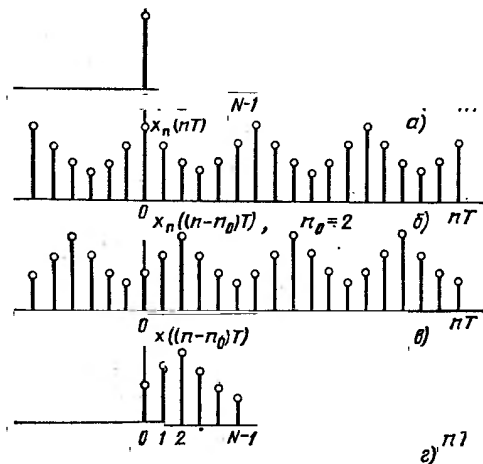


Рис. 1.4

Свойства симметрии позволяют с помощью одного ДПФ преобразовывать одновременно две действительные последовательности. Пусть действительные последовательности $x(nT)$ и $y(nT)$ имеют ДПФ $X(k)$ и $Y(k)$ соответственно, а последовательность $u(nT) = x(nT) + iy(nT)$ имеет ДПФ $U(k) = X(k) + iY(k)$. Тогда:

$$\operatorname{Re}(X(k)) = [\operatorname{Re}(U(k)) + \operatorname{Re}(U(N-k))]/2;$$

$$\operatorname{Im}(Y(k)) = [\operatorname{Re}(U(N-k)) - \operatorname{Re}(U(k))]/2;$$

$$\operatorname{Re}(Y(k)) = [\operatorname{Im}(U(k)) + \operatorname{Im}(U(N-k))]/2;$$

$$\operatorname{Im}(X(k)) = [\operatorname{Im}(U(k)) - \operatorname{Im}(U(N-k))]/2.$$

Круговая свертка (см. 1.4.1). Пусть $x(nT)$ и $y(nT)$ имеют ДПФ $X(k)$ и $Y(k)$ соответственно. Если последовательность $u(nT)$ равна круговой свертке последовательностей $x(nT)$ и $y(nT)$:

$$u(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} x(lT) y((n-l)T),$$

$$n = 0, \dots, N-1,$$

то ее ДПФ равно $U(k) = X(k)Y(k)$.

Если $x(nT)$ и $y(nT)$ имеют ДПФ $X(k)$ и $Y(k)$ соответственно, то ДПФ последовательности $u(nT) = x(nT)y(nT)$ равно (с точностью до постоянного множителя) круговой свертке $X(k)$ и $Y(k)$:

$$U(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) Y(k-l), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Сопряженная формула обращения. Обратное ДПФ (1.20) можно вычислять с помощью формулы для прямого ДПФ

$$x(nT) = \bar{P}(nT), \quad \text{где } P(nT) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) W_N^{nk} \right), \quad n=0, \dots, N-1$$

(черта сверху означает комплексное сопряжение).

1.3.3. Многомерное дискретное преобразование Фурье

Многомерным (l -мерным) ДПФ l -мерных последовательностей называется пара елудующих преобразований:

$$X(k_1, k_2, \dots, k_l) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{n_l=0}^{N_l-1} x(n_1 T, n_2 T, \dots, n_l T) W_{N_1}^{k_1 n_1} \dots W_{N_l}^{k_l n_l},$$

$$k_1 = 0, \dots, N_1-1, \dots, k_l = 0, \dots, N_l-1; \quad (1.22)$$

$$x(n_1 T, n_2 T, \dots, n_l T) = \frac{1}{N_1 N_2 \dots N_l} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{k_l=0}^{N_l-1} X(k_1, k_2, \dots, k_l) \times$$

$$\times W_{N_1}^{-k_1 n_1} W_{N_2}^{-k_2 n_2} W_{N_l}^{-k_l n_l},$$

$$n_1 = 0, \dots, N_1-1, \dots, n_l = 0, \dots, N_l-1. \quad (1.23)$$

Преобразование (1.22) называется прямым, а преобразование (1.23) — обратным многомерным ДПФ.

1.3.4. Алгоритмы БПФ с основанием 2

Вычисление ДПФ непосредственно по формуле (1.19) требует весьма большого числа операций: примерно N^2 операций умножения и N^2 операций сложения комплексных чисел. Быстрым преобразованием Фурье (БПФ) называют набор алгоритмов, позволяющих резко уменьшить число операций, необходимое для вычисления ДПФ.

Алгоритмы с основанием 2 используются при $N=2^v$, $v>0$, v — целое. Основная идея, лежащая в их основе, заключается в сведении вычисления исходного N -точечного ДПФ к вычислению нескольких N_1 -точечных ДПФ, причем $N_1=2v$ и $N_1 \ll N$. Алгоритмы, при реализации которых требуется перестановка отсчетов $x(nT)$ входной последовательности (см. пример 1.6), называются *алгоритмами с прореживанием по времени*. Алгоритмы, при реализации которых требуется перестановка отсчетов $X(k)$ выходной последовательности (см. пример 1.7), называются *алгоритмами с прореживанием по частоте*. По эффективности эти две разновидности алгоритмов эквивалентны и позволяют уменьшить число требуемых арифметических операций примерно в N/v раз по сравнению с прямым методом вычисления ДПФ.

Алгоритм с прореживанием по времени. Если последовательности $x(nT)$ длиной $N=2v$ разделить на две $N/2$ -точечные последовательности, состоящие из $x(nT)$ с четными и нечетными номерами соответственно, то выражение для ДПФ (1.19) можно записать в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2nT) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x((2n+1)T) W_{N/2}^{nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (1.24)$$

Каждая из сумм в (1.24) является $N/2$ -точечным ДПФ, которое аналогичным образом можно представить через $N/4$ -точечные, а $N/4$ -точечные через $N/8$ -точечные и т. д., пока не останутся только 2-точечные. Таких ступеней преобразования всего $\nu = \log_2 N$. На m -ступени ($m=0, \dots, \nu-1$) производится преобразование множества N комплексных чисел $X_m(n)$ в множество N комплексных чисел $X_{m+1}(n)$ в соответствии с базовой операцией «бабочка», описываемой выражениями:

$$\left. \begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + W_N^r X_m(q); \\ X_{m+1}(q) &= X_m(p) - W_N^r X_m(q), \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

где p, q и r зависят от номера ступени m и могут быть определены из выражений, аналогичных (1.24).

Входная последовательность нулевой ступени $X_0(n)$ получается перестановкой последовательности $x(nT)$ в соответствии с двоичной инверсией номеров, т. е. число $x(nT)$ с номером $(n_{\nu-1} \dots, n_0)$ в двоичном представлении записывается на месте $X_0(n_0 \dots, n_{\nu-1})$.

Направленный граф, реализующий «бабочку», изображен на рис. 1.5. Здесь сигналы ветвей, входящих в узел, суммируются; сигнал ветви умножается на

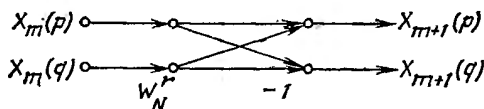


Рис. 1.5

коэффициент, записанный рядом с ветвью. Если коэффициент не указан, то он полагается равным 1.

Пример 1.6. Рассмотрим случай $N=8=2^3$. Так как $\nu=3$, то $m=0, 1, 2$. Для получения входного массива $X_0(n)$ произведем двоично-инверсную перестановку элементов последовательности $x(nT)=x(n)$, $n=0, \dots, 7$:

$$X_0(0) = X_0(000) = x(000) = x(0); \quad X_0(4) = X_0(100) = x(001) = x(1);$$

$$X_0(1) = X_0(001) = x(100) = x(4); \quad X_0(5) = X_0(101) = x(101) = x(5);$$

$$X_0(2) = X_0(010) = x(010) = x(2); \quad X_0(6) = X_0(110) = x(011) = x(3);$$

$$X_0(3) = X_0(011) = x(110) = x(6); \quad X_0(7) = X_0(111) = x(111) = x(7).$$

Направленный граф с использованием «бабочки» и выражения (1.24) изображен на рис. 1.6.

Алгоритм с прореживанием по частоте. Исходная последовательность $x(nT)$ разбивается на две подпоследовательности $x_1(nT)=x(nT)$ и $x_2(nT)=x((n+1/2)T)$, где $n=0, \dots, N/2-1$, и отдельно вычисляются четные и нечетные отсчеты ДПФ:

$$\left. \begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_1(nT) + x_2(nT)) W_{N/2}^{nk}; \\ X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x_1(nT) - x_2(nT)) W_N^n W_{N/2}^{nk} \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Полученные $N/2$ -точечные ДПФ аналогичным образом можно представить через $N/4$ -точечные и т. д., пока не останутся только двухточечные (всего $\nu = \log_2 N$ ступеней преобразования). На m -й ступени ($m=0, \dots, \nu-1$) производится преобразование множества N комплексных чисел $X_m(n)$ в множество

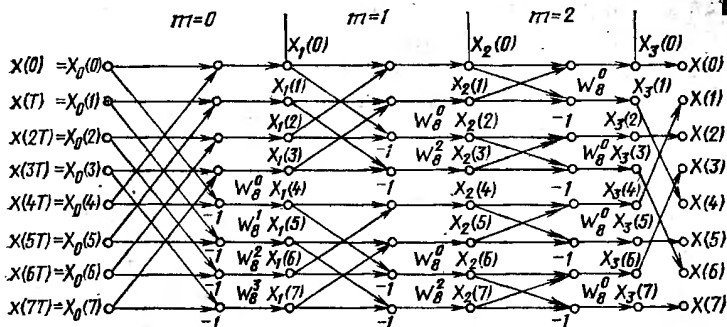


Рис. 1.6

комплексных чисел $X_{m+1}(n)$ в соответствии с базовой операцией «бабочка», описываемой выражениями:

$$\left. \begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + X_m(q); \\ X_{m+1}(q) &= (X_m(p) - X_m(q)) W_N^r, \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

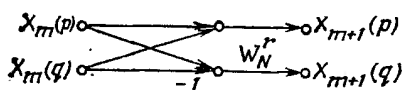


Рис. 1.7

где p, q и r для каждой ступени определяются из выражений, аналогичных (1.26). Направленный граф операции «бабочка» изображен на рис. 1.7.

В рассматриваемом алгоритме, в отличие от алгоритма с прореживанием во времени, в двоично-инверсионном порядке располагается не входная, а выходная последовательность $X(k)$.

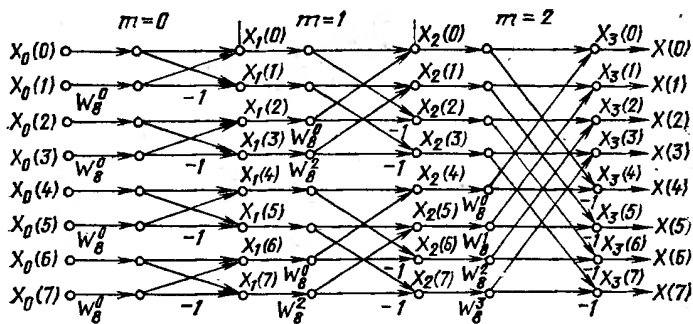


Рис. 1.8

Пример 1.7. Рассмотрим случай $N=8, v=3$. Направленный граф 8-точечного ДПФ с использованием операции «бабочка» и выражения (1.26) изображен на рис. 1.8.

Алгоритмы с прореживанием по времени и по частоте являются дуальными: каждый из них может быть получен из другого путем взаимной замены входа и выхода и обращения направления всех стрелок в направленном графе (см. рис. 1.6 и 1.8).

ФОРТРАН — программа, реализующая алгоритм БПФ с основанием 2 при прореживании по времени, приведена в [1.6]. В пакете прикладных программ ЕС ЭВМ имеется подпрограмма FFTCO, которая также реализует алгоритм БПФ.

1.3.5. Алгоритмы БПФ для произвольного составного N

Алгоритм с множителями поворота. Пусть $N=N_1N_2$, где N_1 и N_2 — любые положительные целые. В этом случае вычисление N -точечного ДПФ можно свести к определению $N_1 N_2$ -точечных и $N_2 N_1$ -точечных ДПФ и N умножениям на множители поворота $W_N^{k_1 n_1}$. Для этого в (1.19) необходимо сделать следующую подстановку:

$$k = k_1 + k_2 N_2, \quad n = n_1 + n_2 N_1, \quad (1.28)$$

где $n_1, k_2 = 0, \dots, N_1 - 1, n_2, k_1 = 0, \dots, N_2 - 1$.

Тогда (1.19) преобразуется к виду

$$X(k_1 + k_2 N_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left[\left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x((n_1 + n_2 N_1) T) W_N^{k_1 n_2} \right) W_N^{k_1 n_1} \right] W_N^{k_2 n_1} \quad (1.29)$$

Пример 1.8. Пусть $N=6; N_1=3; N_2=2$. Согласно (1.28) положим $k = k_1 + k_2 \cdot 2; n = n_1 + n_2 \cdot 3; n_1, k_2 = 0, 1, 2; n_2, k_1 = 0, 1$. Тогда

$$X(k_1 + k_2 \cdot 2) = \sum_{n_1=0}^2 \left[\left(\sum_{n_2=0}^1 x((n_1 + 3n_2) T) W_6^{k_1 n_2} \right) W_6^{k_1 n_1} \right] W_3^{k_2 n_1}.$$

Соответствующий направленный граф изображен на рис. 1.9.

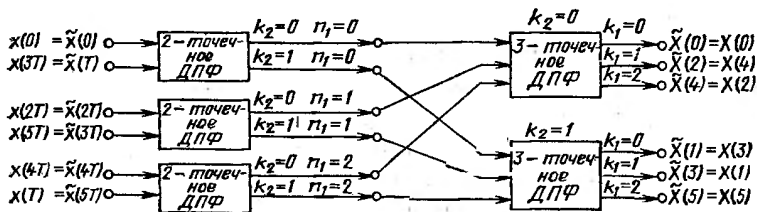


Рис. 1.9

Алгоритмы БПФ с произвольным основанием. Используя алгоритм с множителями поворота, можно получить алгоритмы БПФ с основаниями, отличными от 2. На практике наибольшее применение нашли алгоритмы с основаниями 4, 8 и 16, позволяющие значительно сократить число требуемых операций по сравнению с алгоритмами с основанием 2. В табл. 1.3 приведены выражения для

Алгоритм	Действие	Число действительных умножений	Число действительных сложений
С основанием 2 $N=2^v$ $v \geq 1$, целое	Вычисление $(N/2)^v$ 2-точечных ДПФ Поворот Полное преобразование	0 $(2v-4)N+4$ $(2v-4)N+4$	$2Nv$ $(v-2)N+2$ $(3v-2)N+2$
С основанием 4 $N=(2^2)^{v/2}$ $v/2 \geq 1$, целое	Вычисление $(N/4)^{v/2}$ 4-точечных ДПФ Поворот Полное преобразование	0 $(3v/2-4)N+4$ $(3v/2-4)N+4$	$2Nv$ $(3v/4-2)N+2$ $(275v-2)N+2$
С основанием 8 $N=(2^3)^{v/3}$ $v/3 \geq 1$, целое	Вычисление $(N/8)^{v/3}$ 8-точечных ДПФ Поворот Полное преобразование	$Nv/6$ $(7v/6-4)N+4$ $(4v/3-4)N+4$	$13Nv/6$ $(7v/12-2)N+2$ $(2,75v-2)N+2$
С основанием 16 $N=(2^4)^{v/4}$ $v/4 \geq 1$, целое	Вычисление $(N/16)^{v/4}$ 16-точечных ДПФ Поворот Полное преобразование	$5Nv/8$ $(15v/16-4)N+4$ $(25v/16-4)N+4$	$37Nv/16$ $(15v/32-2)N+2$ $(89v/32-2)N+2$

расчета числа требуемых арифметических операций для алгоритмов с основаниями 2, 4, 8 и 16. Предполагается, что для выполнения базовой операции (2, 4, 8 или 16-точечного ДПФ) используется алгоритм, требующий минимального числа умножений и сложений.

Пример 1.9. Построить алгоритм 16-точечного ДПФ с основанием 4. Положим $N=16=N_1N_2$, где $N_1=4$; $N_2=4$. Согласно (1.28) и (1.29) $k=k_1+k_2 \cdot 4$; $n=n_1+n_2 \cdot 4$; $n_1, n_2, k_1, k_2=0, \dots, 3$;

$$X(k_1+k_2 \cdot 4) = \sum_{n_1=0}^3 \left[\left(\sum_{n_2=0}^3 x((n_1+n_2 \cdot 4)T) W_4^{k_1 n_2} \right) W_{16}^{k_1 n_1} \right] W_4^{k_2 n_1}. \quad (1.30)$$

Построим алгоритм вычисления базового 4-точечного ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(nT) W_4^{nk}, \quad k=0, \dots, 3. \quad (1.31)$$

Положим

$$k = k_1 + k_2 \cdot 2; \quad n = n_1 + n_2 \cdot 2; \quad k_1, k_2, n_1, n_2 = 0, 1. \quad (1.32)$$

Подставляя (1.32) в (1.31), получаем

$$X(k_1+k_2 \cdot 2) = \sum_{n_1=0}^1 \left[\left(\sum_{n_2=0}^1 x((n_1+n_2 \cdot 2)T) W_2^{k_1 n_2} \right) W_4^{k_1 n_1} \right] W_2^{k_2 n_1}. \quad (1.33)$$

Направленный граф, соответствующий (1.33), изображен на рис. 1.10. Направленный граф 16-точечного ДПФ изображен на рис. 1.11.

Алгоритм взаимно-простых делителей. Пусть $N=N_1N_2$, где N_1 и N_2 — взаимно-простые, т. е. $(N_1N_2)^*=1$, а однозначное отображение между числами $n=0, \dots, N-1$; $k=0, \dots, N-1$ и парами (n_1, n_2) , (k_1, k_2) ; $n_1, k_1=0, \dots, N_1-1$, $n_2, k_2=0, \dots, N_2-1$ определяется соотношениями:

$$n = n_1 N_2 + n_2; \quad k = k_1 N_2 + k_2. \quad (1.34)$$

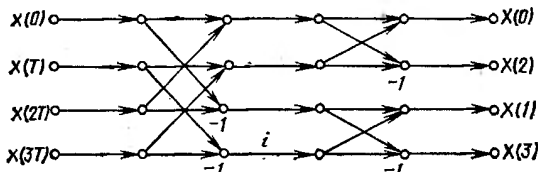


Рис. 1.10

Пусть последовательность $\tilde{x}(nT)$ получается из последовательности $x(nT)$ перестановкой**

$$\tilde{x}((n_1 N_2 + n_2) T) = x((n_2 N_1 + n_1 N_2) \pmod{N} T), \quad (1.35)$$

а последовательность $\tilde{X}(k)$ получается из последовательности ДПФ $X(k)$ перестановкой

$$\tilde{X}(k_1 N_2 + k_2) = X((s_1 k_2 N_1 + s_2 k_1 N_2) \pmod{N}). \quad (1.36)$$

Числа s_1 и s_2 определяются согласно китайской теореме об остатках [12] из уравнений:

$$s_1 N_1 \equiv 1 \pmod{N_2}, \quad s_1 < N_2; \quad (1.37)$$

$$s_2 N_2 \equiv 1 \pmod{N_1}, \quad s_2 < N_1. \quad (1.38)$$

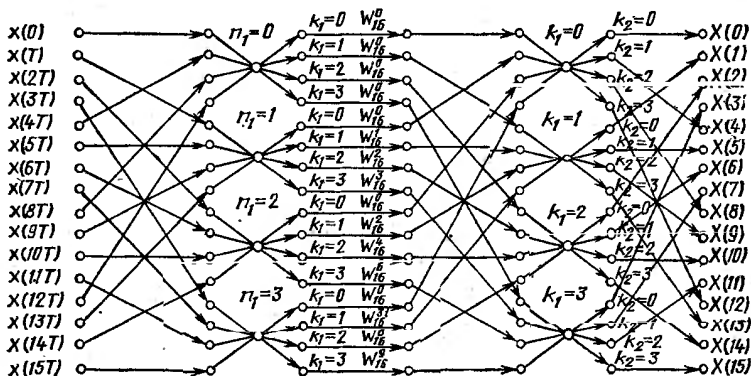


Рис. 1.11

* Запись (N_1, N_2) означает «наибольший общий делитель чисел N_1 и N_2 ».

** Запись $n \pmod{m}$ означает «остаток от деления числа n на число m », например $21 \pmod{5} = 1$.

Тогда справедливо выражение

$$\tilde{X}(k_1 N_2 + k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}((n_1 N_2 + n_2) T) W_{N_2}^{k_2 n_2} \right) W_{N_1}^{n_1 k_1}. \quad (1.39)$$

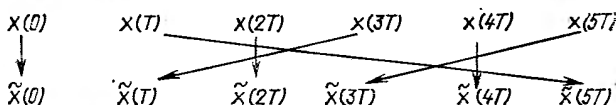
Алгоритм взаимно простых делителей позволяет избавиться от множителей поворота и свести вычисление $N=N_1 N_2$ -точечного ДПФ к вычислению N_1 - и N_2 -точечных ДПФ и является по существу методом отображения одномерного ДПФ на многомерное (см. 1.3.3).

Пример 1.10. Рассмотрим случай $N=6$. Пусть $N_1=3$; $N_2=2$. Согласно (1.34) положим:

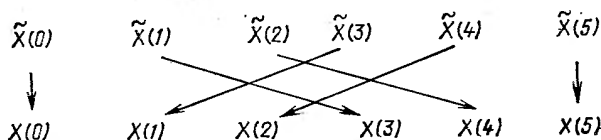
$$n = n_1 \cdot 2 + n_2; \quad k = k_1 \cdot 2 + k_2;$$

$$k_1, n_1 = 0, 1, 2; \quad k_2, n_2 = 0, 1.$$

Из $s_1 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{2}$; $s_1 < 2$; $s_2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{3}$; $s_2 < 3$ найдем: $s_1=1$; $s_2=2$. Получим элементы вектора $\tilde{x}(nT)$ из $x(nT)$ перестановкой (1.35)



и элементы выходного вектора $X(k)$ из $\tilde{X}(k)$ перестановкой (1.36)



Согласно (1.39)

$$\tilde{X}(k_1 \cdot 2 + k_2) = \sum_{n_1=0}^2 \left(\sum_{n_2=0}^1 \tilde{x}(n_1 \cdot 2 + n_2) W_2^{k_2 n_2} \right) W_3^{n_1 k_1}.$$

Соответствующий направленный граф изображен на рис. 1.12.

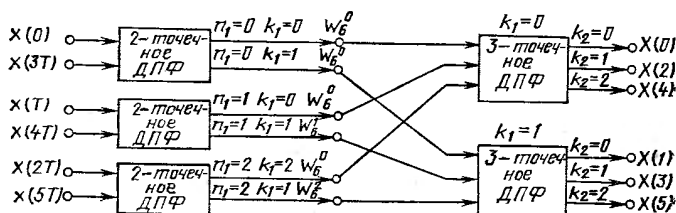


Рис. 1.12

Вычисление l -мерного ДПФ (см. 1.3.3) сводится к вычислению N_1, N_2, \dots, N_l -точечных ДПФ, для реализации которых могут быть использованы алгоритмы БПФ.

1.4. ДИСКРЕТНАЯ СВЕРТКА И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

1.4.1. Круговая свертка

Пусть $x(nT)$ и $h(nT)$ — две периодические последовательности с периодами по N отсчетов.

Круговой (периодической или циклической) *сверткой* таких последовательностей называется последовательность $y(nT)$, определяемая соотношением

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} h(lT) x((n-l)T). \quad (1.40)$$

Запись (1.40) эквивалентна записи

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} x(lT) h_c^*((n-l)T). \quad (1.41)$$

Последовательность $y(nT)$ также является периодической с периодом в N отсчетов, поэтому достаточно вычислять ее на одном периоде, например при $n=0, \dots, N-1$.

Соотношения (1.40) и (1.41) справедливы и для конечных последовательностей $x(nT), h(nT)$ ($n=0, \dots, N-1$), если рассматривать их как один период соответствующих им периодических последовательностей. Круговая свертка конечных последовательностей будет также конечной.

В матричной форме круговая свертка имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h}, \quad (1.42)$$

где $\mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{x}$ — N -мерные векторы;

$$\mathbf{y} = [y(0), y(T), \dots, y((N-1)T)]^T; \quad \mathbf{h} = [h(0), h((N-1)T), \dots, h(T)]^T, \\ \mathbf{x} = [x(0), x((N-1)T), \dots, x(T)]^T,$$

а \mathbf{H} и \mathbf{X} — циклические матрицы размера $N \times N$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h(0)h(T)\dots h((N-1)T) \\ h(T)h(2T)\dots h(0) \\ h(2T)h(3T)\dots h(T) \\ \dots \\ h((N-1)T)\dots h((N-2)T) \end{bmatrix}; \quad (1.43)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(0)x(T)\dots x((N-1)T) \\ x(T)x(2T)\dots x(0) \\ x(2T)x(3T)\dots x(T) \\ \dots \\ x((N-1)T)\dots x((N-2)T) \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Пример 1.11. Вычислить круговую свертку последовательностей $x(nT)$ длины N и $h(nT) = \delta((n-n_0)T)$, $n_0 > 0$.

Представим $h(nT)$ в виде последовательности длины N :

$$h(nT) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq n < n_0; \\ 1 & \text{при } n = n_0; \\ 0 & \text{при } n_0 < n \leq N-1. \end{cases}$$

На рис. 1.13 приведена графическая иллюстрация вычисления круговой свертки по формуле (1.40) для $N=4$ и $n_0=1$. Здесь исходные конечные последовательности периодически продолжены с периодом N отсчетов (пунктиром), чтобы показать, как получается круговой сдвиг. Звездочками обозначены выборки, составляющие $y(nT)$. Результирующая последовательность $y(nT)$ представляет собой последовательность $x(nT)$, сдвинутую на n_0 отсчетов вправо.

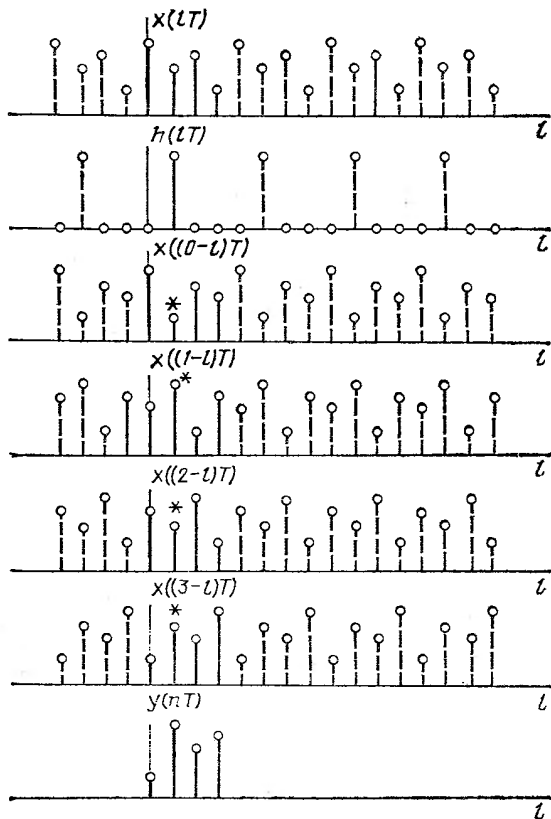


Рис. 1.13

Дискретная свертка является одним из способов вычисления выходного сигнала цифрового фильтра по заданному входному сигналу и известной импульсной характеристике фильтра (см. 2.3.3).

1.4.2. Использование ДПФ для вычисления круговой свертки

Круговая свертка двух последовательностей $x(nT)$ и $h(nT)$ может быть вычислена в результате выполнения следующих действий:

1. Вычисления ДПФ последовательности $x(nT)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) W_N^{nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (1.45)$$

2. Вычисления ДПФ последовательности $h(nT)$:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) W_N^{nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (1.46)$$

3. Перемножения коэффициентов полученных ДПФ:

$$Y(k) = X(k)H(k), \quad k=0, \dots, N-1. \quad (1.47)$$

4. Вычисления ОДПФ последовательности $Y(k)$:

$$y(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-nk}, \quad n=0, \dots, N-1. \quad (1.48)$$

Последовательность $y(nT)$ есть искомая свертка.

Пример 1.12. Решить пример 1.11 с использованием ДПФ.

Пусть ДПФ последовательности $x(nT)$ равно $X(k)$. Из (1.19) ДПФ последовательности $h(nT)$ равно $H(k) = W_N^{n_0 k}$, $k=0, \dots, N-1$. Перемножим $X(k)$ и $H(k)$: $Y(k) = X(k) W_N^{n_0 k}$, $k=0, \dots, N-1$. Согласно свойству сдвига (см. 1.3.2) ОДПФ последовательности $Y(k)$ равно $x((n-n_0)T)$. (Сравните с результатом примера 1.11.)

1.4.3. Линейная свертка

Линейной (апериодической) *сверткой* двух конечных последовательностей $x(nT)$ и $h(nT)$ по N_1 и N_2 отсчетов соответственно называется последовательность $y(nT)$, определяемая соотношением

$$y(nT) = \sum_{l=0}^n h(lT) x((n-l)T), \quad n=0, \dots, N_1+N_2-2, \quad (1.49)$$

или

$$y(nT) = \sum_{l=0}^n x(lT) h((n-l)T), \quad n=0, \dots, N_1+N_2-2.$$

Последовательность $y(nT)$ является также конечной и имеет длину N_1+N_2-1 отсчетов.

Сформируем последовательности $x_1(nT)$ и $h_1(nT)$ длиной по N_1+N_2-1 отсчетов:

$$x_1(nT) = \begin{cases} x(nT) & \text{при } n=0, \dots, N_1-1; \\ 0 & \text{при } n=N_1, \dots, N_1+N_2-2; \end{cases} \quad (1.50)$$

$$h_1(nT) = \begin{cases} h(nT) & \text{при } n=0, \dots, N_2-1; \\ 0 & \text{при } n=N_2, \dots, N_1+N_2-2. \end{cases} \quad (1.51)$$

Тогда линейная свертка последовательностей $x(nT)$ и $h(nT)$ будет равна (N_1+N_2-1) -точечной круговой свертке последовательностей $x_1(nT)$ и $h_1(nT)$:

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{N_1+N_2-2} x_1(lT) h_1((n-l)T), \quad n=0, \dots, N_1+N_2-2, \quad (1.52)$$

и может быть вычислена с использованием (N_1+N_2-1) -точечного ДПФ (см. 1.4.2).

Пример 1.13. Вычислить линейную свертку двух конечных последовательностей: $x=[2, -2, 1]^T$; $h=[1, 2]^T$. Здесь $N_1=3$, $N_2=2$ и, следовательно, $N_1+N_2-1=4$. Сформируем последовательности длиной в четыре отсчета согласно (1.50) и (1.51):

$$\overline{x}_1=[2, -2, 1, 0]^T; \quad h_1=[1, 2, 0, 0]^T.$$

Вычислим круговую свертку последовательностей x_1 и h_1 с помощью алгоритма 4-точечного БПФ (см. пример 1.9).

- 1) ДПФ x_1 равно $X_1=[1, 1+2i, 5, 1-2i]^T$;
- 2) ДПФ h_1 равно $H_1=[3, 1-2i, -1, 1+2i]^T$;
- 3) ДПФ y равно $Y=X_1 \cdot H_1=[3, 5, -5, 5]^T$;
- 4) ОДПФ Y является искомой сверткой и равно $y=[2, 2-3, 2]^T$.

1.4.4. Секционированные свертки

В том случае, когда одна из последовательностей гораздо длиннее другой ($N_1 \gg N_2$ или $N_2 \gg N_1$), используют процедуры, основанные на разбиении длинной последовательности на короткие секции и вычислении частичных свертки, из которых формируется искомая линейная свертка. Существуют два метода с сек-

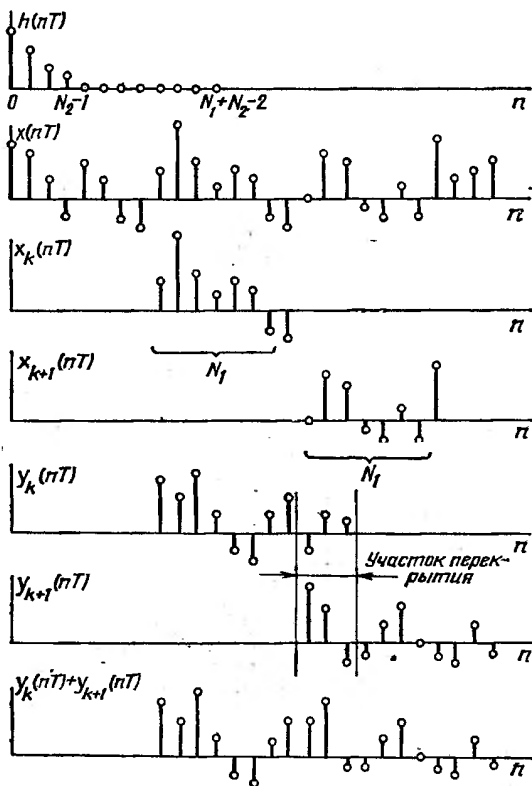


Рис. 1.14

ционированием свертки [1.6]: метод перекрытия с суммированием и метод перекрытия с накоплением.

Метод перекрытия с суммированием. Графическая иллюстрация метода приведена на рис. 1.14.

Пусть более длинной, а в общем случае неограниченной является последовательность $x(nT)$, а $h(nT)$ содержит N_2 отсчетов. Последовательность $x(nT)$ делится на смежные секции $x_k(nT)$ по N_1 отсчетов, так что

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(nT),$$

$$\text{где } x_k(nT) = \begin{cases} x(nT) & \text{при } kN_1 \leq n \leq (k+1)N_1 - 1; \\ 0 & \text{при других значениях } n. \end{cases}$$

Вычисляем k -ю частичную линейную свертку $y_k(nT)$ последовательностей $x_k(nT)$ и $h(nT)$. Каждая частичная свертка имеет длину $N_1 + N_2 - 1$ и перекрывается с $(k+1)$ -частичной сверткой на участке длиной в $N_2 - 1$ отсчетов. Поэтому на участке перекрытия их отсчеты нужно сложить. Прodelывая указанные действия для всех k , получаем искомую свертку:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(nT).$$

Метод перекрытия с накоплением. Графическая иллюстрация метода приведена на рис. 1.15. В данном случае перекрываются не выходные, а входные секции. Пусть $h(nT)$ содержит N_2 отсчетов. Длинная последовательность $x(nT)$ делится на секции $x_k(nT)$ по $N = N_1 + N_2 - 1$ отсчетов, так что каждые две соседние перекрываются на участке длиной в $N_2 - 1$ отсчетов. Последовательность $h(nT)$ дополняется нулями до получения длины в N отсчетов:

$$h_1(nT) = \begin{cases} h(nT) & \text{при } n = 0, \dots, N_2 - 1; \\ 0 & \text{при } n = N_2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Находим k -ю частичную круговую свертку $y_k(nT)$ последовательностей $h_1(nT)$ и $x_k(nT)$. Последние (неверные из-за циклического характера круговой свертки) $N_2 - 1$ отсчетов каждой из последовательностей $y_k(nT)$ отбрасываются, а остальные присоединяются к верным отсчетам $(k-1)$ -й секции. Прodelывая описанную процедуру для всех k , получаем искомую свертку.

1.4.5. Методы быстрого вычисления круговой свертки

Существуют три основных метода быстрого вычисления круговой свертки. Методы различаются требуемым объемом вычислительных операций и памяти, а также степенью точности, связанной с ошибками округления.

Первый метод, основанный на использовании БПФ и получивший название *метода быстрой свертки*, приводит к существенному сокращению требуемого количества арифметических операций для последовательностей, длина которых больше 32. Недостатки метода — значительные ошибки округления, большой объем памяти, требуемый для хранения комплексных экспоненциальных коэффициентов, и все еще значительный объем вычислений.

Второй метод, использующий *теоретико-числовые преобразования* (ТЧП), является точным, так как служит для преобразования последовательностей в кольце целых чисел. Существенный недостаток, ограничивающий его применение в

реальных системах, — зависимость между длиной последовательности N и требуемой длиной кодового слова, что приводит к длинным кодовым словам для больших N .

Третий метод — метод *модульной арифметики в кольце полиномов*, обеспечивающий высокие эффективность и точность вычислений. Недостаток этого метода заключается в сложности программирования вычислений, которая зависит от длины обрабатываемой последовательности.

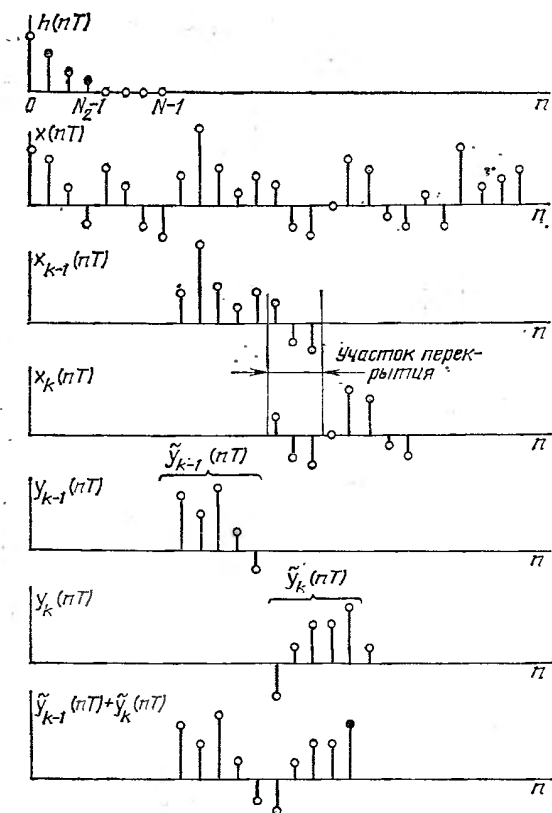


Рис. 1.15

1.4.6. Использование теоретико-числовых преобразований

Так как последовательности в цифровых системах определяются с конечной точностью, то они могут быть представлены в виде последовательностей целых чисел, ограниченных сверху некоторым числом.

Теоретико-числовое преобразование определяется для последовательностей целых чисел $x(nT)$, $n=0, \dots, N-1$ и $X(k)$, $k=0, \dots, N-1$, как пара преобразований:

$$X(k) \equiv \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \alpha^{nk} \right) \pmod{M}; \quad (1.53)$$

$$x(nT) \equiv \left(N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \alpha^{-nk} \right) \pmod{M}, \quad (1.54)$$

имеющих структуру, похожую на структуру ДПФ. Здесь M — целое положительное число; N — целое положительное число, взаимно-простое с M и такое, что на него делится число $P-1$, где P — любой из простых сомножителей M ; α — число такое, что N является наименьшим положительным целым числом, для которого справедливо $\alpha^N \equiv 1 \pmod{M}$.

Преобразование (1.53) называется прямым, а (1.54) — обратным ТЧП (ОТЧП). При вычислении ОТЧП встречаются операции сравнения, выполняемые над отрицательными степенями целого числа. По определению [1.12]

$$r_1^{-s} \equiv r_2 \pmod{M},$$

где r_1, r_2, s — целые числа; $s > 0$ в том и только в том случае, если $1 \equiv r_2 r_1^s \pmod{M}$.

Использование ТЧП для вычисления круговой свертки двух последовательностей целых чисел $x(nT)$ и $h(nT) = 0, \dots, N-1$ аналогично ДПФ (см. 1.4.2) и заключается в выполнении следующих действий:

1) вычисления ТЧП последовательности $x(nT)$:

$$X(k) \equiv \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \alpha^{nk} \right) \pmod{M}, \quad k = 0, \dots, N-1; \quad (1.55)$$

2) вычисления ТЧП последовательности $h(nT)$:

$$H(k) \equiv \left(\sum_{n=0}^{N-1} h(nT) \alpha^{nk} \right) \pmod{M}, \quad k = 0, \dots, N-1; \quad (1.56)$$

3) перемножении полученных ТЧП:

$$Y(k) \equiv (X(k) H(k)) \pmod{M}, \quad k = 0, \dots, N-1; \quad (1.57)$$

4) вычисления ОТЧП последовательности $Y(k)$:

$$y(nT) \equiv \left(N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \alpha^{-nk} \right) \pmod{M}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (1.58)$$

Последовательность $y(nT)$ является искомой сверткой. Так как в кольце целых чисел по $\text{mod } M$ числа могут быть представлены однозначно, если их абсолютное значение не превосходит $M/2$, то $x(nT)$ и $h(nT)$ должны быть промасштабированы таким образом, чтобы $|y(nT)| \leq M/2$.

С точки зрения эффективности вычислений к ТЧП предъявляются следующие требования:

число N должно быть представимо в виде произведения большого числа сомножителей, чтобы существовал эффективный алгоритм типа БПФ;

умножение на степени α должно быть простой операцией; так, если α равно некоторой степени числа 2, то умножение сводится к сдвигам;

число M должно иметь двоичное представление с малым количеством разрядов для облегчения операции по $\text{mod } M$ и быть достаточно большим, чтобы исключить переполнение.

Наибольшее распространение на практике получили теоретико-числовые преобразования с числами Ферма (ТЧПФ) и Мерсенна (ТЧПМ).

Теоретико-числовое преобразование Ферма [1.6, 1.12] является наиболее перспективным, так как позволяет использовать эффективные алгоритмы типа БПФ. В качестве модуля M выбирается одно из чисел Ферма:

$$M = F_t = 2^{2^t} + 1 = 2^b + 1, \quad b = 2^t.$$

Здесь F_t называется t -м числом Ферма. Первые семь чисел равны:

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= 3 \\ F_1 &= 5 \\ F_2 &= 17 \\ F_3 &= 257 \\ F_4 &= 65\,537 \\ F_5 &= 641 \times 6\,700\,417 \\ F_6 &= 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721. \end{aligned} \right\} \text{— простые числа.}$$

В табл. 1.4 приведены параметры нескольких возможных реализаций ТЧПФ.

Таблица 1.4

t	b	F_t	N для $\alpha=2$	N для $\alpha=\sqrt{2}$	N_{\max}	α для N_{\max}
2	4	$2^4 + 1$	8	16	16	$\sqrt{2}$
3	8	$2^8 + 1$	16	32	256	3
4	16	$2^{16} + 1$	32	64	65 536	3
5	32	$2^{32} + 1$	64	128	128	$\sqrt{2}$

Пример 1.14. С помощью ТЧПФ вычислить свертку последовательностей: $x = [2, -2, 1, 0]^{-T}$; $h = [1, 2, 0, 0]^T$ [1.12]. В качестве модуля выберем число $M = F_2 = 17$. При $N=4$ $\alpha=4$. Матрица ТЧПФ (1.53) принимает вид

$$T_{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4^1 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 4^2 & 4^4 & 4^6 \\ 1 & 4^3 & 4^6 & 4^9 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{bmatrix} \pmod{17}.$$

Так как $4^{-1} \equiv -4 \pmod{17}$, то матрица ОТЧПФ

$$T^{-1}_{\Phi} = 4^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4^{-1} & 4^{-2} & 4^{-3} \\ 1 & 4^{-2} & 4^{-4} & 4^{-6} \\ 1 & 4^{-3} & 4^{-6} & 4^{-9} \end{bmatrix} \equiv -4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \end{bmatrix} \equiv 13 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \end{bmatrix} \pmod{17}.$$

Согласно (1.55)—(1.58) вычисляем:

1) ТЧПФ последовательности x :

$$X \equiv T_{\Phi} x \pmod{17} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 18 \\ 78 \\ 243 \\ 213 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \pmod{17}.$$

2) ТЧПФ последовательности h :

$$H \equiv T_{\Phi} h \pmod{17} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 33 \\ 27 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix} \pmod{17}.$$

3) $Y \equiv X \cdot H^T \equiv [3, 90, 80, 90]^T \equiv [3, 5, 12, 5]^T \pmod{17}$.

4) ОТЧПФ от Y дает искомую свертку: $y \equiv T^{-1}_{\Phi} Y \equiv [2, 2, 14, 2]^T \pmod{17}$. Так как результаты должны лежать в диапазоне $[-8, 8]$, то окончательно $y = [2, 2, -3, 2]^T$. (Сравните с примером 1.13).

Теоретико-числовым преобразованием Мерсенна [1.12] называется пара следующих преобразований:

$$X(k) \equiv \left(\sum_{n=0}^{p-1} x(nT) \cdot 2^{nk} \right) \pmod{q}, \quad k=0, \dots, p-1; \quad (1.59)$$

$$x(nT) \equiv \left(p^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} X(k) 2^{-nk} \right) \pmod{q}, \quad n=0, \dots, p-1, \quad (1.60)$$

где p — простое положительное число; $q=2^p-1$ — простое число (число Мерсенна).

В качестве p могут быть выбраны числа 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61. С точки зрения обеспечиваемого динамического диапазона наиболее широко используются числа 31 и 61. Преобразование Мерсенна не обладает структурой БПФ и для своей реализации требует $(p-1)^2$ операций сдвига и $p(p-1)$ — сложения.

Пример 1.15. С помощью ТЧПМ найдем свертку последовательностей: $x = [2, -2, 1, 0, 0]^T$; $h = [1, 2, 0, 0, 0]^T$. Выберем $p=5$, тогда $q=2^5-1=31$. Матрица ТЧПМ имеет вид

$$T_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 2^2 & 2^4 & 2^8 & 2^8 \\ 1 & 2^3 & 2^6 & 2^9 & 2^{12} \\ 1 & 2^4 & 2^8 & 2^{12} & 2^{16} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 & 16 & 4 \\ 1 & 16 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \pmod{31}.$$

Так как $5^{-1} \equiv 25 \pmod{31}$, то матрица ОТЧПМ

$$T_M^{-1} = 5^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & 2^{-4} \\ 1 & 2^{-2} & 2^{-4} & 2^{-6} & 2^{-8} \\ 1 & 2^{-3} & 2^{-6} & 2^{-9} & 2^{-12} \\ 1 & 2^{-4} & 2^{-8} & 2^{-12} & 2^{-16} \end{bmatrix} \equiv 25 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \pmod{31}.$$

Теперь вычисляем:

- 1) ТЧПМ последовательности x : $X = T_M x \equiv [1, 2, 10, 19, 9]^T \pmod{31}$;
 - 2) ТЧПМ последовательности h : $H \equiv T_M h \equiv [3, 5, 9, 17, 2]^T \pmod{31}$;
 - 3) произведение коэффициентов полученных ТЧПМ: $Y \equiv HX^T \equiv [3, 10, 28, 13, 18]^T \pmod{31}$;
 - 4) ОТЧПМ последовательности Y : $y \equiv T_M^{-1} Y \equiv [2, 2, 28, 2, 0]^T \pmod{31}$.
- Так как результат должен лежать в диапазоне $[-15, 15]$, то искомая свертка будет равна $y = [2, 2, -3, 2, 0]^T$. (Сравните с примером 1.14.)

1.4.7. Использование модульной арифметики в кольце полиномов

Последовательность $y(nT)$, равная круговой свертке последовательностей $x(nT)$ и $h(nT)$, $n=0, \dots, N-1$, является последовательностью коэффициентов полинома

$$Y(z) \equiv X(z) H(z) \pmod{(z^N - 1)}, \quad (1.61)$$

где

$$X(z) = \sum_{l=0}^{N-1} x(lT) z^l; \quad H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} h(lT) z^l; \quad Y(z) = \sum_{l=0}^{N-1} y(lT) z^l.$$

Для вычисления (1.61) воспользуемся китайской теоремой об остатках. Если представить полином $z^N - 1$ в виде произведения k взаимно-простых полиномов с коэффициентами из поля рациональных чисел (использование других полей рассмотрено в [1.12])

$$z^N - 1 = \prod_{l=1}^k P_l(z), \quad (P_1(z), \dots, P_k(z)) = 1, \quad (1.62)$$

то

$$Y(z) \equiv \left(\sum_{l=1}^k Y_l(z) Q_l(z) S_l(z) \right) \pmod{(z^N - 1)}, \quad (1.63)$$

где

$$Y_l(z) \equiv X(z) H(z) \pmod{P_l(z)}; \quad (1.64)$$

$$S_l(z) = (z^N - 1) / P_l(z), \quad (1.65)$$

полиномы $Q_l(z)$ должны удовлетворять соотношениям

$$Q_l(z) S_l(z) \equiv 1 \pmod{P_l(z)}, \quad l = 1, \dots, k. \quad (1.66)$$

Пример 1.16. Вывести алгоритм вычисления круговой свертки последовательностей $x(nT)$ и $h(nT)$ длиной $N=2$.

Согласно (1.61):

$$X(z) = x(0) + x(T)z, \quad H(z) = h(0) + h(T)z;$$

$$Y(z) = y(0) + y(T)z \equiv (x(0) + x(T)z)(h(0) + h(T)z) \pmod{(z^2 - 1)}.$$

Представим $z^2 - 1 = P_1(z)P_2(z)$, где $P_1(z) = z - 1$; $P_2(z) = z + 1$. Тогда

$$Y_1(z) = m_1 = (x(0) + x(T))(h(0) + h(T)); \quad Y_2(z) = m_2 = (x(0) - x(T))(h(0) - h(T)).$$

Согласно (1.65) $S_1(z) = z + 1$; $S_2(z) = z - 1$. Согласно (1.66) $Q_1(z)(z + 1) \equiv 1 \pmod{(z - 1)}$; $Q_2(z)(z - 1) \equiv 1 \pmod{(z + 1)}$. Отсюда $Q_1(z) = 1/2$; $Q_2(z) = -1/2$.

Подставляя полученные значения в (1.63), получаем

$$Y(z) = \frac{m_1}{2}(z + 1) - \frac{m_2}{2}(z - 1) = \frac{m_1 + m_2}{2} + z \left(\frac{m_1 - m_2}{2} \right) = y(0) + y(T)z,$$

или

$$y(0) = (m_1 + m_2)/2;$$

$$y(T) = (m_1 - m_2)/2.$$

В том случае, когда необходимо повторить вычисление для различных последовательностей $x(nT)$ при одной и той же последовательности $h(nT)$, целесообразно все вычисления, связанные только с $h(nT)$, выполнять заранее и для дальнейшего использования хранить в ячейках памяти. Такая предварительная обработка данных существенно повышает эффективность вычислений.

Пример 1.17. Алгоритм 2-точечной круговой свертки с предварительной обработкой данных (см. пример 1.16) имеет вид:

$$S_1 = x(0) + x(T); \quad S_2 = x(0) - x(T);$$

$$m_1 = \left(\frac{h(0) + h(T)}{2} \right) S_1; \quad m_2 = \left(\frac{h(0) - h(T)}{2} \right) S_2;$$

$$y(0) = m_1 + m_2; \quad y(T) = m_1 - m_2.$$

В [1.12] показано, что минимальное число операций умножения, требуемых для вычисления (1.16), составляет $2N - K$, где K равно числу различных неприводимых в поле G множителей полинома $2^N - 1$. Для многих (особенно простых) N это число достижимо ценой чрезмерного увеличения числа операций сложения. Поэтому предпочтительными являются так называемые субоптимальные алгоритмы с несколько большим числом операций умножения, но гораздо меньшим числом операций сложения. В [1.12] приведены алгоритмы с предварительной обработкой данных для нескольких значений N . В табл. 1.5 приведено число

Таблица 1.5

N	Число операций		N	Число операций	
	умножения	сложения		умножения	сложения
2	2	4	6	8	34
3	4	11	7	16	70
4	5	15	8	14	46
5	10	31	9	19	81

требуемых арифметических операций, необходимых для их реализации. В том случае, когда $N = N_1 N_2$, где N_1 и N_2 — взаимно-простые числа, исходную матрицу свертки, полученную путем соответствующей перестановки строк и столбцов, можно представить в виде циклической матрицы размера $N_1 \times N_1$, элементами которой, в свою очередь, являются циклические матрицы размера $N_2 \times N_2$, и свести тем самым вычисление N -точечной свертки к вычислению N_1 и N_2 -точечных сверток (алгоритм Агарваля — Кули [1.12]).

Рассматриваемый метод является, по существу, методом представления одномерной N -точечной свертки в виде двумерной $(N_1 \times N_2)$ -точечной свертки:

$$y(n_1 T, n_2 T) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} x(l_1 T, l_2 T) h((n_1 - l_1) T, (n_2 - l_2) T),$$

где

$$l_1 \equiv l \pmod{N_1}; \quad l_2 \equiv l \pmod{N_2};$$

$$n_1 \equiv n \pmod{N_1}; \quad n_2 \equiv n \pmod{N_2}, \quad n, l = 0, \dots, N - 1.$$

Пример 1.18. Рассмотрим алгоритм вычисления 6-точечной круговой свертки. Положим $N_1 = 2$; $N_2 = 3$. Сопоставим каждому индексу $n = 0, \dots, 5$ пару координат (n_1, n_2) , где $n_1 \equiv n \pmod{2}$; $n_2 \equiv n \pmod{3}$. Тогда получим следующее взаимно-однозначное отображение:

$$0 \rightarrow (0, 0), \quad 1 \rightarrow (1, 1), \quad 2 \rightarrow (0, 2),$$

$$3 \rightarrow (1, 0), \quad 4 \rightarrow (0, 1), \quad 5 \rightarrow (1, 2).$$

Теперь изменим порядок расположения элементов $y(nT)$ в векторе Y матричного выражения (1.42) таким образом, чтобы сначала размещались элементы, для которых $n_1=0$; $n_2=0, 1, 2$, а затем элементы, для которых $n_1=1$; $n_2=0, 1, 2$, т. е. $y(0)$, $y(4T)$, $y(2T)$, $y(3T)$, $y(T)$, $y(5T)$. Тогда искомая свертка записывается в виде

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(4T) \\ y(2T) \\ y(3T) \\ y(T) \\ y(5T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(4T) & x(2T) & x(3T) & x(T) & x(5T) \\ x(4T) & x(2T) & x(0) & x(T) & x(5T) & x(3T) \\ x(2T) & x(0) & x(4T) & x(5T) & x(3T) & x(T) \\ x(3T) & x(T) & x(5T) & x(0) & x(4T) & x(2T) \\ x(T) & x(5T) & x(3T) & x(4T) & x(2T) & x(0) \\ x(5T) & x(3T) & x(T) & x(2T) & x(0) & x(4T) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(2T) \\ h(4T) \\ h(3T) \\ h(5T) \\ h(T) \end{bmatrix}. \quad (1.67)$$

Матрица последнего выражения представляет собой циклическую матрицу размера 2×2 ($N_1 \times N_1$), элементами которой являются циклические матрицы размера 3×3 ($N_2 \times N_2$). Вычисление (1.67) сводится к вычислению 2- и 3-точечных круговых сверток. Пусть:

$$\begin{aligned} Y_0 &= [y(0), y(4T), y(2T)]^T; & Y_1 &= [y(3T), y(T), y(5T)]^T; \\ H_0 &= [h(0), h(2T), h(4T)]^T; & H_1 &= [h(3T), h(5T), h(T)]^T; \\ X_0 &= \begin{bmatrix} x(0) & x(4T) & x(2T) \\ x(4T) & x(2T) & x(0) \\ x(2T) & x(0) & x(4T) \end{bmatrix}; & X_1 &= \begin{bmatrix} x(3T) & x(T) & x(5T) \\ x(T) & x(5T) & x(3T) \\ x(5T) & x(3T) & x(T) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ X_1 & X_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix}.$$

Используя алгоритм 2-точечной свертки (см. пример 1.17), получаем:

$$M_1 = \frac{X_0 + X_1}{2} (H_0 + H_1);$$

$$M_2 = \frac{X_0 - X_1}{2} (H_0 - H_1);$$

$$Y_0 = M_1 + M_2; \quad Y_1 = M_1 - M_2.$$

Для вычисления M и M_2 применяется алгоритм 3-точечной свертки.

Пусть m_1 и m_2 — числа требуемых умножений для N_1 - и N_2 -точечных сверток соответственно [$(N_1, N_2) = 1$]. Аналогично a_1 и a_2 — числа требуемых операций сложения. Тогда для $N_1 \times N_2$ -точечной свертки число требуемых операций умножения m и сложения a составит соответственно:

$$m = m_1 m_2; \quad (1.68)$$

$$a = N_1 a_2 + m_2 a_1. \quad (1.69)$$

Пример 1.19. Пусть $N=6$; $N_1=2$; $N_2=3$. Согласно табл. 1.5 $m_1=2$; $m_2=4$; $a_1=4$; $a_2=11$. Пользуясь формулами (1.68) и (1.69), получаем: $m=2 \cdot 4=8$; $a=2 \cdot 11 + 4 \cdot 4=38$.

Теперь положим: $N_1=3$; $N_2=2$. Тогда: $m_1=4$; $m_2=2$; $a_1=11$; $a_2=4$. Аналогично находим: $m=8$; $a=3 \cdot 4 + 2 \cdot 11=12+22=34$.

Расчеты показывают, что второй вариант является более экономичным по числу требуемых операций сложения.

1.5. НЕКОТОРЫЕ ПЕРСПЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДПФ

1.5.1. Алгоритм Винограда

Алгоритм Винограда [1.12] основан на представлении матрицы $N=N_1 \times N_2 \times \dots \times N_v$ -точечного ДПФ, где все N_i — взаимно-простые числа, в виде прямого произведения матриц N_i -точечных ДПФ

$$W_N \Rightarrow W_{N_1} \otimes W_{N_2} \otimes \dots \otimes W_{N_v} \quad (1.70)$$

и сведении вычисления N_i -точечных ДПФ к вычислению круговых сверток с использованием модульной арифметики в кольце полиномов (см. 1.4.7).

Алгоритм Винограда, имеющий «гнездовую» структуру, существенно эффективнее классических алгоритмов БПФ: при приблизительно равном числе операций сложения он требует на 80% меньше операций умножения.

Вычисление ДПФ коротких последовательностей. При $N=p$, p^a , 2^a , где p — простое, нечетное число, $a > 1$, ДПФ можно свести к вычислению круговых сверток:

1. Пусть $N=p$. Тогда матрица ДПФ $W_p |_{k, n \neq 0}$ путем соответствующей перестановки строк и столбцов может быть преобразована в циклическую матрицу \tilde{W}_{p-1} размера $(p-1) \times (p-1)$. Взаимно-однозначное соответствие между показателями степени элементов W^q_p матрицы \tilde{W}_{p-1} и индексами элементов циклической матрицы (1.43) задается так:

$$q \equiv a^n \pmod{p}, \quad n = 0, \dots, p-2, \quad (1.71)$$

где a — первообразный корень числа p [1.12].

Пример 1.20. Пусть $N=p=7$. Первообразным корнем числа 7 является $a=3$. Тогда соответствие (1.71) запишется так:

$$\begin{array}{c} n \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline q \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5 \end{array}$$

а матрица $W_{7/k, n \neq 0}$ преобразуется к виду

$$\tilde{W}_6 = \begin{bmatrix} W_7^1 & W_7^3 & W_7^2 & W_7^6 & W_7^4 & W_7^5 \\ W_7^3 & W_7^2 & W_7^6 & W_7^4 & W_7^5 & W_7^1 \\ W_7^2 & W_7^6 & W_7^4 & W_7^5 & W_7^1 & W_7^3 \\ W_7^6 & W_7^4 & W_7^5 & W_7^1 & W_7^3 & W_7^2 \\ W_7^4 & W_7^5 & W_7^1 & W_7^3 & W_7^2 & W_7^6 \\ W_7^5 & W_7^1 & W_7^3 & W_7^2 & W_7^6 & W_7^4 \end{bmatrix}$$

Тогда искомого ДПФ примет вид:

$$X(0) = \sum_{n=0}^6 x(nT);$$

$$\begin{bmatrix} X(1) - x(0) \\ X(3) - x(0) \\ X(2) - x(0) \\ X(6) - x(0) \\ X(4) - x(0) \\ X(5) - x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \tilde{W}_6 \begin{bmatrix} x(T) \\ x(3T) \\ x(2T) \\ x(6T) \\ x(4T) \\ x(5T) \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

Выражение (1.72) представляет собой 6-точечную круговую свертку последовательностей $[W^1_7, W^3_7, W^2_7, W^6_7, W^4_7, W^5_7]$ и $[x(T), x(3T), x(4T), x(6T), x(2T), x(5T)]$, для вычисления которой с помощью полиномиальных преобразований требуется восемь операций умножения и 34 — сложения (см. табл. 1.5). Для вычисления всего ДПФ к этому числу операций добавляются одна операция умножения на W^0 и две операции сложения (см. табл. 1.6).

2. Пусть $N=pa$, $a>1$ — целое. В этом случае вычисление ДПФ сводится к вычислению двух pa^{-1} -точечных ДПФ и одной $(p-1)pa^{-1}$ -точечной круговой свертки. Это эквивалентно одной $(p-1)pa^{-1}$, двум $(p-1)pa^{-2}$, четырем $(p-1)pa^{-3}, \dots, 2a^{-1}(p-1)$ -точечным сверткам. Взаимно-однозначное соответствие между показателями степени элементов W^q_k циклических матриц $\tilde{W}_{(p-1)p\alpha-k}$, $k=1, \dots, a$, и индексами элементов матрицы (1.43) задается равенством

$$q_k/p^{k-1} \equiv a^n \pmod{p^{\alpha+1-k}},$$

$$n = 0, \dots, (p-1)p^{\alpha-k} - 1,$$

где a_k — первообразный корень числа $pa^{\alpha+1-k}$.

Пример 1.21. Пусть $N=3^2$. В этом случае первообразные корни $a_1=a_2=2$. Соответствие (1.73) для $k=1, 2$ запишется так:

$$\frac{n_1}{q_1} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array}; \quad \frac{n}{q_2} \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 6 \end{array}.$$

Тогда $2 \cdot 3=6$ -точечная круговая свертка будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \tilde{X}(4) \\ \tilde{X}(8) \\ \tilde{X}(7) \\ \tilde{X}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^1_9 & W^2_9 & W^4_9 & W^8_9 & W^7_9 & W^5_9 \\ W^2_9 & W^4_9 & W^8_9 & W^7_9 & W^5_9 & W^1_9 \\ W^4_9 & W^8_9 & W^7_9 & W^5_9 & W^1_9 & W^2_9 \\ W^8_9 & W^7_9 & W^5_9 & W^1_9 & W^2_9 & W^4_9 \\ W^7_9 & W^5_9 & W^1_9 & W^2_9 & W^4_9 & W^8_9 \\ W^5_9 & W^1_9 & W^2_9 & W^4_9 & W^8_9 & W^7_9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x(T) \\ x(2T) \\ x(4T) \\ x(8T) \\ x(7T) \\ x(5T) \end{array}$$

Последовательности $X(3k)$, $k=0, 1, 2$ и $\tilde{X}(k)$, $k=0, \dots, 8$, вычисляются с помощью 3-точечных ДПФ:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(3) \\ X(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^3_9 & W^6_9 \\ 1 & W^6_9 & W^3_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) + x(3T) + x(6T) \\ x(T) + x(4T) + x(7T) \\ x(2T) + x(5T) + x(8T) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{X}}(0) \\ \tilde{\tilde{X}}(1) \\ \tilde{\tilde{X}}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{X}}(3) \\ \tilde{\tilde{X}}(4) \\ \tilde{\tilde{X}}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{X}}(6) \\ \tilde{\tilde{X}}(7) \\ \tilde{\tilde{X}}(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ W^3_9 & W^6_9 \\ W^6_9 & W^3_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(3T) \\ x(6T) \end{bmatrix}$$

Последовательности $X(k)$ и $\tilde{\tilde{X}}(k)$ такие, что

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \tilde{X}(4) \\ \tilde{X}(8) \\ \tilde{X}(7) \\ \tilde{X}(5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{X}}(1) \\ \tilde{\tilde{X}}(2) \\ \tilde{\tilde{X}}(4) \\ \tilde{\tilde{X}}(8) \\ \tilde{\tilde{X}}(7) \\ \tilde{\tilde{X}}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(4) \\ X(8) \\ X(7) \\ X(5) \end{bmatrix}$$

Таким образом, вычисление 9-точечного ДПФ свелось к вычислению 6-точечной круговой свертки и двух 3-точечных ДПФ, которые, в свою очередь, можно определить с помощью 2-точечной круговой свертки.

3. Пусть $N=2^\alpha$, $\alpha > 2$ — целое. В этом случае вычисление ДПФ сводится к вычислению двух $2^{\alpha-1}$ -точечных ДПФ и двумерной $2 \times 2^{\alpha-2}$ -точечной круговой свертки, матрица которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} \tilde{W}'_{2^{\alpha-2}} & \tilde{W}''_{2^{\alpha-2}} \\ \tilde{W}''_{2^{\alpha-2}} & \tilde{W}'_{2^{\alpha-1}} \end{bmatrix}$$

где $\tilde{W}'_{2^{\alpha-2}}$ и $\tilde{W}''_{2^{\alpha-2}}$ представляют собой циклические матрицы размера $2^{\alpha-2} \times 2^{\alpha-2}$. Взаимно-однозначное соответствие между показателями степени q_1 и q_2 элементов матриц $\tilde{W}'_{2^{\alpha-2}}$ и $\tilde{W}''_{2^{\alpha-2}}$ и индексами элементов матрицы (1.43) имеет вид [1.12]:

$$q_1 \equiv 5^n \pmod{2^\alpha}; \quad q_2 \equiv -5^n \pmod{2^\alpha}, \quad n = 0, \dots, 2^{\alpha-2} - 1. \quad (1.74)$$

Пример 1.22. Пусть $N=2^3$. Соответствия (1.74) запишутся так:

$$\frac{n}{q_1} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{matrix}; \quad \frac{n}{q_2} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{matrix}$$

Тогда:

$$\tilde{W}'_2 = \begin{bmatrix} W_8^1 & W_8^5 \\ W_8^5 & W_8^1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}''_2 = \begin{bmatrix} W_8^{-1} & W_8^{-5} \\ W_8^{-5} & W_8^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(5) \\ \tilde{X}(7) \\ \tilde{X}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^1 & W_8^5 & W_8^{-1} & W_8^{-5} \\ W_8^5 & W_8^1 & W_8^{-5} & W_8^{-1} \\ W_8^{-1} & W_8^{-5} & W_8^1 & W_8^5 \\ W_8^{-5} & W_8^{-1} & W_8^5 & W_8^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(T) \\ x(5T) \\ x(7T) \\ x(3T) \end{bmatrix}$$

Последовательности $X(2k)$, $k=0, \dots, 3$, и $\tilde{\tilde{X}}(k)$, $k=0, \dots, 7$, вычисляются с помощью 4-точечного ДПФ:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(4) \\ X(6) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ 1 & W_8^4 & 1 & W_8^4 \\ 1 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) + x(4T) \\ x(T) + x(5T) \\ x(2T) + x(6T) \\ x(3T) + x(7T) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) + x(4T) \\ x(T) + x(5T) \\ x(2T) + x(6T) \\ x(3T) + x(7T) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \tilde{X}(3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{X}(4) \\ \tilde{X}(5) \\ \tilde{X}(6) \\ \tilde{X}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2T) \\ x(4T) \\ x(6T) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Последовательности $\tilde{X}(k)$ и $\tilde{\tilde{X}}(k)$ такие, что

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(5) \\ \tilde{X}(7) \\ \tilde{X}(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{X}}(1) \\ \tilde{\tilde{X}}(5) \\ \tilde{\tilde{X}}(7) \\ \tilde{\tilde{X}}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(1) \\ X(5) \\ X(7) \\ X(3) \end{bmatrix}$$

Вычисление ДПФ рассматриваемым методом не требует умножения на комплексные коэффициенты, т. е. коэффициенты являются либо чисто действительными, либо чисто мнимыми. Вычисление ДПФ комплексных последовательностей требует вдвое больше операций умножения и сложения.

В [1.12] приведены алгоритмы вычисления ДПФ коротких последовательностей для $N=2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 16$. В табл. 1.6 приводится число требуемых при этом арифметических операций.

Вычисление ДПФ длинных последовательностей. Пусть $N=N_1 \cdot N_2$ и N_1 и N_2 — взаимно-простые числа. Если сделать перестановку входной и выходной последовательностей, как и в алгоритме взаимно-простых делителей (см. 1.3.5), то

Таблица 1.6

N	Число операций			N	Число операций		
	умножения	умножения на W^0	сложения		умножения	умножения на W^0	сложения
2	0	2	2	7	8	1	36
3	2	1	6	8	2	6	26
4	0	4	8	9	10	1	45
5	5	1	17	16	10	8	74

матрицу исходного ДПФ можно представить в виде прямого произведения матриц N_1 - и N_2 -точечных ДПФ:

$$W \Rightarrow W_{N_1} \otimes W_{N_2}.$$

Пример 1.23. Пусть $N=15$; $N_1=3$; $N_2=5$. Из уравнений (1.37) и (1.38) $S_1 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$; $S_2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{3}$, т. е. $S_1=S_2=2$. Переставим элементы $x(nT)$ согласно (1.35):

$$\tilde{x}((n_1 \cdot 5 + n_2) T) = x((n_2 \cdot 3 + n_1 \cdot 5) \pmod{5} \cdot T), \quad n_1 = 0, 1, 2; \quad n_2 = 0, \dots, 4.$$

Введем векторы:

$$\tilde{u}_k = [\tilde{x}((0 + 5k) T), \tilde{x}((1 + 5k) T), \tilde{x}((2 + 5k) T), \tilde{x}((3 + 5k) T), \tilde{x}((4 + 5k) T)]^T;$$

$$U_k = [\tilde{X}(0 + 5k), \tilde{X}(1 + 5k), \tilde{X}(2 + 5k), \tilde{X}(3 + 5k), \tilde{X}(4 + 5k)]^T, \quad k = 0, 1, 2.$$

Тогда искомое ДПФ преобразуется к виду

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_0 \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_3^0 & W_5 & W_3^0 & W_5 & W_3^0 & W_5 \\ W_3^0 & W_5 & W_3^1 & W_5 & W_3^2 & W_5 \\ W_3^0 & W_5 & W_3^2 & W_5 & W_3^1 & W_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.75)$$

где $W_3 = e^{-12\pi/3}$; W — матрица 5-точечного ДПФ.

Матрица выражения (1.75) и есть прямое произведение $W_3 \otimes W_5$.

Для вычисления векторов \tilde{U}_0 , \tilde{U}_1 и \tilde{U}_2 воспользуемся алгоритмом вычисления 3-точечного ДПФ [1.12]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2; \quad \tilde{S}_2 = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2; \quad \tilde{S}_3 = \tilde{S}_1 + \tilde{u}_0; \\ \tilde{m}_0 &= W_5 S_3; \quad \tilde{m}_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} - 1 \right) W_5 \tilde{S}_1; \quad \tilde{m}_2 = i \sin \frac{2\pi}{3} W_5 \tilde{S}_2; \\ \tilde{S}_4 &= \tilde{m}_0 + \tilde{m}_1; \quad \tilde{S}_5 = \tilde{S}_4 + \tilde{m}_2; \quad \tilde{S}_6 = \tilde{S}_4 - \tilde{m}_2; \\ \tilde{U}_0 &= \tilde{m}_0; \quad \tilde{U}_1 = \tilde{S}_5; \quad \tilde{U}_2 = \tilde{S}_6. \end{aligned}$$

Для вычисления векторов \tilde{m}_0 , \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 необходимо использовать алгоритм 5-точечного ДПФ. Элементы полученного массива следует переставить согласно (1.36) для получения искомого массива:

$$X((6k_2 + 10k_1) \pmod{15}) = \tilde{X}(k_1 \cdot 5 + k_2), \quad k_1 = 0, 1, 2; \quad k_2 = 0, \dots, 4.$$

Таким образом, N_1 -точечное ДПФ требует a_1 операций сложения и m_1 операций умножения, включая k_1 умножений на W^0 ; N_2 -точечное ДПФ требует a_2 операций сложения и m_2 операций умножения, включая k_2 умножений на W^0 . Тогда число требуемых операций сложения A и умножения M для N -точечного ДПФ составит:

$$M = m_1 m_2 - k_1 k_2; \quad (1.76)$$

$$A = N_1 a_2 + m_2 a_1. \quad (1.77)$$

Пример 1.24. Пусть $N=15$; $N_1=3$; $N_2=5$. Согласно табл. 1.6 $m_1=3$; $k_1=1$; $a_1=6$; $m_2=6$; $a_2=17$. Пользуясь формулами (1.76) и (1.77), находим: $M=17$; $A=87$.

Теперь пусть $N_1=5$; $N_2=3$. Тогда число операций умножения не изменится, а число операций сложения станет равным $A=81$.

1.5.2. Алгоритм Винограда с использованием ТЧП

Теоретико-числовые преобразования (см. 1.4.7) могут быть использованы для эффективного вычисления круговой свертки в алгоритме Винограда. В [1.14, 1.15] предлагается так называемый гибридный алгоритм с использованием ТЧП Мерсенна (см. 1.4.6). В табл. 1.7 приведено число требуемых арифметических операций для $N=q' \cdot (1+a \cdot 2^n) \cdot p$, где q' — простое; $p=31,61$; $a=3,5$; $n=1, 2, 3$. В этом случае ДПФ сводится к вычислению $(q'-1)$ -точечной круговой свертки, которую, в свою очередь, можно представить в виде прямого произведения $a \cdot 2^n$ и p -точечных свертки (см. 1.4.7). Для вычисления p -точечной свертки используется ТЧП Мерсенна, требующее p операций умножения и $2p(p-1)$ сложения.

Т а б л и ц а 1.7

q'	$q'-1$	Число операций для действительной входной последовательности		q'	$q'-1$	Число операций для действительной входной последовательности	
		умножения	сложения			умножения	сложения
367	2·3·61	488	61 976	1831	2·3·5·61	4880	607 560
373	2 ² ·3·31	620	41 044	1861	2 ² ·3·5·31	6200	412 920
733	2 ² ·3·61	1220	153 964	2441	2 ³ ·5·61	8540	1 073 600

1.5.3. Использование эффективных методов поворота вектора (КОРДИК)

КОРДИК* — это совокупность эффективных методов поворота вектора $(x, y) = x + iy$ на угол θ с помощью только операций сложения и сдвига [1.16]. КОРДИК может служить эффективным средством реализации поворачивающих множителей в алгоритмах БПФ. Общее выражение, описывающее КОРДИК, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha x \pm \beta y; \\ y_1 &= \alpha y \pm \beta x, \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

где x_1, y_1 — координаты вектора, повернутого на угол $\theta = \pm \arctg[\beta/\alpha]$. Модуль вектора (x_1, y_1) равен модулю вектора (x, y) , умноженному на коэффициент

$$G = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Различают две основные разновидности КОРДИКа: полный и оптимальный. Полный КОРДИК представляет собой итерационный процесс. В этом случае $\alpha = 1$; $\beta = 2^{-l}$, где l — номер итерации. Процесс поворота вектора (x, y) на угол θ с точностью до n -го разряда требует n итераций и происходит следующим образом: вначале осуществляется присвоение начальных значений

$l=0$; $\theta_l = -\theta$; $G_l = 1$, а затем n раз выполняется последовательность операций:

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow a_l &= \text{sign}(\theta_l); \\ x_{l+1} &= x_l + a_l y_l 2^{-l}; \\ y_{l+1} &= y_l - a_l x_l 2^{-l}; \\ \theta_{l+1} &= \theta_l - a_l a_l + \text{ctg}(2^{-l}); \\ G_{l+1} &= G_l (1 + 2^{-2l})^{1/2}, \\ -l &= l + 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.79)$$

* COORDIC — COordinate Rotation DIGital Computer.

В конце n -й итерации коэффициент $G = \prod_{l=0}^{n-1} (1+2^{-2l})^{1/2} \approx 1,6$.

Из (1.79) следует, что полный КОРДИК требует $2n$ операции сложения с одновременным сдвигом.

Идея оптимального КОРДИКа заключается в том, чтобы выбрать такие целые числа α и β , удовлетворяющие равенству $\theta = \text{arctg}(\beta/\alpha)$ или $\beta/\alpha = \text{tg} \theta$ с заданной степенью точности, чтобы минимизировать число операций сложения при вычислениях по формулам (1.79). Другими словами, двоичное представление таких α и β должно содержать минимальное число единиц.

Использование оптимального КОРДИКа для вычисления ДПФ становится ясным из примера 1.25.

Пример 1.25. Вычислим 8-точечное ДПФ:

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(nT) W_8^{nk},$$

$$k = 0, \dots, 7. \quad (1.80)$$

Преобразуем выражение (1.80) согласно алгоритму с множителями поворота (см. 1.3.5), для чего сделаем подстановку:

$$k = k_1 + k_2 \cdot 2; \quad n = n_1 + n_2 \cdot 4;$$

$$n_1, k_2 = 0, \dots, 3; \quad k_1, n_2 = 0, 1.$$

Тогда

$$X(k_1 + k_2 \cdot 2) = \sum_{n_1=0}^3 \left[\left(\sum_{n_2=0}^1 x((n_1 + n_2 \cdot 4)T) W_2^{k_1 n_2} \right) W_8^{k_1 n_1} \right] W_4^{k_2 n_1}. \quad (1.81)$$

Таким образом, вычисление свелось к 2- и 4-точечным ДПФ, не требующим операций умножения, и умножению на множители поворота $W_8^{k_1 n_1}$. Для реализации множителей поворота используем оптимальный КОРДИК. Пояснения приведены в табл. 1.8 для поворота на $\theta = (2\pi/8)l + \pi/8$.

Таблица 1.8

l	$\frac{2\pi}{8} l$	$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$			
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
0	0	0	0	$\pi/4$	$-\pi/8$
1	$\pi/4$	0	0	$-\pi/4$	$\pi/8$
2	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$-\pi/8$
3	$3\pi/4$	0	$\pi/2$	$-\pi/4$	$\pi/8$
4	π	π	0	$\pi/4$	$-\pi/8$
5	$5\pi/4$	π	0	$-\pi/4$	$\pi/8$
6	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	$\pi/4$	$-\pi/8$
7	$7\pi/4$	π	$\pi/2$	$-\pi/4$	$\pi/8$

Как видно из табл. 1.8, повороты осуществляются в четыре ступени. На первых двух ступенях повороты являются тривиальными и не изменяют модуля векторов. На третьей и четвертой ступенях все векторы поворачиваются на один и тот же угол с точностью до знака с тем, чтобы модуль всех векторов умножался на один и тот же коэффициент G . В конце последней ступени все векторы оказались повернутыми относительно искомого положения на один и тот же дополнительный угол, равный $\pi/8$. Так как дополнительный фазовый сдвиг не изменяет формы ДПФ, то его можно не устранять.

Повороты на π , $\pi/2$ и $\pi/4$ осуществляются следующим образом:

$$\pi \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x; \\ y_1 = -y; \end{cases} \quad \pi/2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -y; \\ y_1 = x; \end{cases}$$

$$\pi/4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = x - y, \\ y_1 = y + x. \end{cases}$$

Поворот на $\pi/8$ с точностью до 16-го разряда обеспечивается оптимальным отношением $\alpha/\beta = 128/309$, которому соответствует

$$\frac{\pi}{8} \rightarrow \begin{cases} t_x = x + x \cdot 2^{-2}; \quad t_y = y + y \cdot 2^{-2}; \\ x_1 = (t_x - t_x \cdot 2^{-5} - x \cdot 2^{-8}) 2^{-1} \pm y \cdot 2^{-2}; \\ y_1 = (t_y - t_y \cdot 2^{-5} - y \cdot 2^{-8}) 2^{-1} \pm x \cdot 2^{-2}. \end{cases}$$

В результате для вычисления 8-точечного ДПФ потребовалось 128 операций сложения и ни одной операции умножения.

1.5.4. Специальные виды ДПФ

В таких важных приложениях цифровой обработки сигналов, как реализация трансмультиплексоров (см. разд. 9), нашли применение нечетно-временное нечетно-частотное ДПФ (Н²ДПФ) [1.20] и косинусное преобразования [1.21], позволяющие существенно сократить число требуемых арифметических операций по сравнению со случаем использования обычного ДПФ.

Нечетно-временное нечетно-частотное ДПФ. Этот вид преобразования используется для эффективного вычисления ДПФ N -точечных (N кратно 4) симметричных действительных последовательностей в случае, когда во временной области отсчеты берутся в нечетные, кратные $T/2$ моменты времени $x((n+1/2)T)$, $n=0, \dots, N-1$, а в частотной области — в нечетные, кратные $1/2NT$, точки частотной оси: $X(k+1/2)$, $k=0, \dots, N-1$.

Пара преобразований Н²ДПФ имеет вид:

$$X\left(k + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)T\right) e^{-i \frac{2\pi(2k+1)(2n+1)}{4N}}; \quad (1.82)$$

$$x\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)T\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{i \frac{2\pi(2k+1)(2n+1)}{4N}}. \quad (1.83)$$

Преобразование (1.82) называется прямым, а (1.83) — обратным (Н²ОДПФ).

В случае действительной входной последовательности с нечетной симметрией $x((N-n-\frac{1}{2})T) = -x((n+\frac{1}{2})T)$ справедливо соотношение

$$X\left(N - k - \frac{1}{2}\right) = -X\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (1.84)$$

причем $X(k+1/2)$, $k=0, \dots, N-1$, является действительной последовательностью.

Процедура вычисления N^2 ДПФ таких последовательностей задается следующим образом [1.20]:

1) формируется комплексный вектор z , содержащий $N/4$ элементов:

$$z = [x((n+1/2)T) - i x((N/2 + 2n + 1/2)T)], n = 0, \dots, N/4 - 1;$$

2) каждый элемент вектора z умножается на множитель $e^{-i \frac{2\pi}{N} (n + \frac{1}{8})}$, $n = 0, \dots, N/4 - 1$, в результате чего получается вектор U ;

3) вычисляется стандартное $N/4$ -точечное ДПФ вектора U , результат — вектор V ;

4) каждый элемент вектора V умножается на множители $e^{-i \frac{2\pi}{N} (k + \frac{1}{8})}$, $k = 0, \dots, N/4 - 1$, в результате чего получается вектор W . Действительная и мнимая части элементов полученного вектора W и есть искомые коэффициенты N^2 ДПФ:

$$W_k = \frac{1}{2} \left(X \left(2k + \frac{1}{2} \right) + i X \left(2k + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right) \right). \quad (1.85)$$

Недостающие отсчеты определяются из соотношения (1.84).

Пример 1.26. Вычислить 8-точечное N^2 ДПФ действительной последовательности с нечетной симметрией $x(nT) = [1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1]$:

1) $Z = [1 + i, 1 + i]$;

$$2) U = \left[(1 + i) e^{-i \frac{\pi}{32}}, \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{32}} \right];$$

3) 2-точечное ДПФ вектора U равно:

$$V = \left[(1 + \sqrt{2} + i) e^{-i \frac{\pi}{32}}, (1 - \sqrt{2} + i) e^{-i \frac{\pi}{32}} \right];$$

$$4) W = \left[(1 + \sqrt{2}) \cos \frac{\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{16} + i \left(\cos \frac{\pi}{16} - \sin \frac{\pi}{16} (1 + \sqrt{2}) \right), \right. \\ \left. (\sqrt{2} - 1) \cos \frac{\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{16} + i \left(\cos \frac{\pi}{16} + (1 - \sqrt{2}) \sin \frac{\pi}{16} \right) \right].$$

Согласно (1.85):

$$X \left(\frac{1}{2} \right) = 2 (1 + \sqrt{2}) \cos \frac{\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{16}; \quad X \left(4 + \frac{1}{2} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{16} - \\ - 2 (1 + \sqrt{2}) \sin \frac{\pi}{16};$$

$$X \left(2 + \frac{1}{2} \right) = 2 (\sqrt{2} - 1) \cos \frac{\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{16};$$

$$X \left(6 + \frac{1}{2} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{16} + 2 (1 - \sqrt{2}) \sin \frac{\pi}{16}.$$

Пользуясь (1.84), получаем:

$$X(1 + 1/2) = -X(6 + 1/2); \quad X(3 + 1/2) = -X(4 + 1/2);$$

$$X(5 + 1/2) = -X(2 + 1/2); \quad X(7 + 1/2) = -X(1/2).$$

Дискретное косинусное преобразование (ДКП). Этот вид преобразования последовательности $x(nT)$, $n=0, \dots, N-1$, определяется как

$$X(k) = \frac{2C(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cos[\pi(2n+1)k/(2N)], \quad (1.86)$$

$$\text{где } C(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{при } k=0; \\ 1 & \text{при } k=1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Обратное ДКП (ОДКП) имеет вид

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos[\pi(2n+1)k/(2N)], \quad n=0, \dots, N-1. \quad (1.87)$$

Дискретное косинусное преобразование можно вычислять с использованием N -точечного ДПФ [1.21]. Пусть

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cos[\pi(2n+1)k/(2N)], \quad k=0, \dots, N-1,$$

и последовательность $y(nT)$, $n=0, \dots, N-1$, такая, что

$$y(lT) = x(2lT);$$

$$y((l+N/2)T) = x((2l+1)T), \quad l=0, \dots, N/2-1.$$

Если вычислить N -точечное ДПФ следующим образом:

$$H(k) = e^{i \frac{2\pi k}{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} y(nT) W_N^{nk},$$

то $F(k) = \text{Re}(H(k))$ и

$$F(N-k) = \text{Im}(H(k)), \quad k=0, \dots, N/2,$$

а искомые коэффициенты ДКП

$$X(k) = 2F(k)C(k)/N, \quad k=0, \dots, N-1.$$

При цифровом преобразовании первичных (12-канальных) групп с частотным разделением каналов) возникает необходимость вычисления 14-точечных ДКП. В этом случае более эффективным является алгоритм, предложенный в [1.18, 1.19]. Пусть требуется вычислить

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{13} X(k) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{28}\right), \quad n=1, \dots, 12. \quad (1.88)$$

Так как

$$x((14-n-1)T) = \sum_{k=0}^{13} (-1)^k X(k) \cos\frac{\pi(2n+1)k}{28},$$

то можно определить две последовательности:

$$a_n = \sum_{k=0}^6 X(2k) \cos\frac{\pi(2n+1)2k}{28};$$

$$b_n = \sum_{k=0}^6 X(2k+1) \cos\frac{\pi(2n+1)(2k+1)}{28}, \quad n=1, \dots, 6,$$

такие, что $a_n + b_n = x(nT)$ и $a_n - b_n = x((14-n-1)T)$.

Пусть $C_k = \cos(\pi k/28)$, $k=1, \dots, 13$. Тогда справедливы соотношения: $a_3 = X(0) - X(4) + X(8) - X(12)$;

$$\begin{bmatrix} (a_1 + a_5)/2 \\ a_6' \\ (a_2 + a_4)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(0) \\ X(0) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{12} & C_4 & -C_8 \\ C_4 & -C_8 & C_{12} \\ -C_8 & C_{12} & C_4 \end{bmatrix}}_* \begin{bmatrix} X(4) \\ -X(8) \\ X(12) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} (a_1 - a_5)/2 \\ -(a_2 - a_4)/2 \\ -a_6'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_6 & -C_{10} & C_2 \\ -C_{10} & C_2 & C_6 \\ C_2 & C_6 & -C_{10} \end{bmatrix}}_* \begin{bmatrix} X(2) \\ X(6) \\ -X(10) \end{bmatrix}.$$

Выражения, отмеченные «*», соответствуют 3-точечной круговой свертке

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_0 \\ x_2 & x_0 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

которая может быть вычислена с использованием полиномиальных преобразований (см. 1.47) следующим образом [1.12]:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{(x_0 + x_1 + x_2)}{3} (y_0 + y_1 + y_2); \\ m_1 &= \frac{(x_2 + x_1 - 2x_0)}{3} (y_0 - y_2); \\ m_2 &= \frac{(x_0 + x_2 - 2x_1)}{3} (y_2 - y_1); \\ m_3 &= \frac{(x_0 + x_1 - 2x_2)}{3} (y_1 - y_0); \\ z_0 &= m_0 + m_2 - m_1; \quad z_1 = m_0 + m_1 - m_3; \quad z_2 = m_0 - m_2 + m_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

Для вычисления b_n используются тождества:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_7(C_6 + C_8); & C_9 &= C_7(C_2 - C_{12}); \\ C_3 &= C_7(C_4 + C_{10}); & C_{11} &= C_7(C_4 - C_{10}); \\ C_5 &= C_7(C_2 + C_{12}); & C_{13} &= C_7(C_6 - C_8). \end{aligned}$$

Пусть $X'(k) = C_7 X(k) = X(k)/\sqrt{2}$, $k=1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$. Тогда $b_3 = X'(7) + (X'(1) - X'(13)) - (X'(3) + X'(11)) - (X'(5) - X'(9))$;

$$\begin{bmatrix} (b_1 + b_5)/2 \\ (b_2 - b_4)/2 \\ b_6' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -C_4 & -C_{12} & C_8 \\ -C_{12} & C_8 & -C_4 \\ C_8 & -C_4 & -C_{12} \end{bmatrix}}_{**} \begin{bmatrix} -X'(1) + X'(13) \\ X'(3) + X'(11) \\ X'(5) - X'(9) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X'(7) \\ X'(7) \\ X'(7) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} (b_1 - b_5)/2 \\ -(b_2 + b_4)/2 \\ -b_6'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -C_{10} & C_2 & C_6 \\ C_2 & C_6 & -C_{10} \\ C_6 & -C_{10} & C_2 \end{bmatrix}}_{**} \begin{bmatrix} -(X'(1) + X'(13)) \\ X'(3) - X'(11) \\ -(X'(5) + X'(9)) \end{bmatrix},$$

где $b'_6 + b''_6 = b_6$. Преобразования, отмеченные $\langle\langle * * \rangle\rangle$ могут быть вычислены по алгоритму (1.89). В общей сложности для вычисления (1.88) потребовалось 16 операций умножения и 76 — сложения.

1.6. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.6.1. Случайная последовательность

Последовательность $\{x(nT)\}$ называется случайной (случайной решетчатой функцией, случайным временным рядом), если каждый отсчет $x(nT)$ является случайной величиной.

Пример 1.27. Пусть $y(nT) \approx x_1(nT)x_2(nT)$, причем $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ — правильные s -разрядные дроби, а $y(nT)$ — правильная r -разрядная дробь, $r < 2s$, т. е. $y(nT)$ вычисляется с округлением до r разрядов. Тогда при непериодических последовательностях $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ можно считать, что $y(nT) = x_1(nT)x_2(nT) + \Delta(nT)$, где $\Delta(nT)$ — случайная последовательность — погрешность (шум) округления.

1.6.2. Математическое ожидание и выборочное среднее

Для непрерывной случайной величины x математическое ожидание μ определяется как [1.22]

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x dx, \quad (1.90)$$

где f_x — плотность распределения x (плотность вероятности x).

Пример 1.28. Для случайной последовательности $\Delta(nT)$ (см. пример 1.27)

$$f_{\Delta} = \begin{cases} 0 & \text{при } \Delta < -2^{-r-1}; \\ 2^r & \text{при } -2^{-r-1} \leq \Delta \leq 2^{-r-1}; \\ 0 & \text{при } 2^{-r-1} < \Delta \end{cases}$$

и $\mu = E[x] = 0$.

Величина μ характеризует среднее значение случайной величины x . Среднее по времени случайной последовательности $\bar{x}(nT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(nT)$. Для рассматриваемых ниже стационарных эргодических процессов статистические характеристики, полученные усреднением по ансамблю выборок n по времени, совпадают. Ниже символом $E[\cdot]$ обозначается усреднение как по ансамблю, так и по времени. Если известна реализация случайной последовательности, состоящая из N отсчетов, то оценкой математического ожидания (1.90) является выборочное среднее

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT). \quad (1.91)$$

1.6.3. Дисперсия и выборочная дисперсия

Для непрерывной случайной величины x дисперсия σ^2 определяется как [1.22]

$$\sigma^2 = \text{var} (x) = E [(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_x dx. \quad (1.92)$$

Величина σ называется стандартным отклонением.

Пример 1.29. Для условия примера 1.27 согласно (1.92)

$$\sigma^2 = 2^{-2r}/12.$$

Если $E[x(nT)] = 0$, то

$$\sigma^2 = \text{var} [x(nT)] = P_{\text{ср}}, \quad (1.93)$$

т. е. если математическое ожидание отсчета случайной последовательности равно нулю, то дисперсия этой последовательности равна ее средней мощности $P_{\text{ср}}$.

Для реализации случайной последовательности $x(nT)$, состоящей из N отсчетов, оценкой дисперсии является выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x(nT) - \hat{x})^2. \quad (1.94)$$

Величина $\hat{\sigma}$ называется средним квадратическим отклонением и является оценкой величины σ .

Пример 1.30. Пусть $x(0) = 1,400$; $x(T) = 1,600$; $x(2T) = 1,700$; $x(3T) = 1,300$; $N = 4$. Тогда из (1.91) и (1.94) $\hat{x} = 1,500$; $\hat{\sigma}^2 = 0,033$.

1.6.4. Автокорреляционная функция стационарной случайной последовательности

Автокорреляционная функция определяется как

$$R(m) = E [(x(nT) - \mu)(x((n+m)T) - \mu)]. \quad (1.95)$$

Оценка $R(m)$ имеет вид

$$r(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} (x(nT) - \hat{x})(x((n+m)T) - \hat{x}). \quad (1.96)$$

Автокорреляционная функция служит мерой корреляции между отсчетами случайной последовательности. Если отсчеты представляют собой независимые случайные величины, то $R(m) = 0$ при $m > 0$.

1.6.5. Спектральная плотность мощности стационарной случайной последовательности

Спектральная плотность мощности $S(\omega)$ есть средняя мощность последовательности $x(nT)$, приходящаяся на достаточно узкую полосу частот $[\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega]$. Функция $S(\omega)$ связана парой преобразований Фурье с автокорреляционной функцией $R(m)$ [1.23]. Для случайной последовательности $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, указанная пара преобразований Фурье имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= 4T \left[\frac{R(0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} R(m) \cos m\omega T \right]; \\ R(m) &= \int_0^{\pi/T} S(\omega) \cos m\omega T d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Значения $S(\omega)$ могут быть непосредственно измерены по реализации случайной последовательности (см. разд. 8) или рассчитаны с помощью (1.97) по известной автокорреляционной функции.

2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ. УСТРОЙСТВА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

2.1.1. Линейные аналоговые фильтры

Линейный аналоговый фильтр представляет собой четырехполюсник, который реализует линейное преобразование входного аналогового сигнала $u_1(t)$. Математически связь между выходным $u_2(t)$ и входным $u_1(t)$ аналоговыми сигналами фильтра выражается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$u_2(t) = - \sum_{j=1}^{M-1} a_j \frac{d^j u_2(t)}{dt^j} + \sum_{l=0}^{N-1} b_l \frac{d^l u_1(t)}{dt^l},$$

где a_j и b_l — коэффициенты, представляющие собой константы или функции, зависящие только от времени t .

Вопросы анализа и синтеза аналоговых фильтров весьма подробно рассмотрены в [2.1]. Главный недостаток этих фильтров заключается в том, что их параметры изменяются при изменении условий работы (температуры, давления и т. д.). Это приводит к неконтролируемой погрешности выходного сигнала, т. е. к низкой точности обработки сигналов.

2.1.2. Линейные дискретные фильтры

Математически работа линейного дискретного (импульсного) фильтра описывается разностным уравнением (уравнением в конечных разностях) [1.10]

$$y(nT) = - \sum_{j=1}^{M-1} a_j y((n-j)T) + \sum_{l=0}^{N-1} b_l x((n-l)T), \quad (2.1)$$

где $x(nT)$, $y(nT)$ — n -е отсчеты входного $\{x(nT)\}$ и выходного $\{y(nT)\}$ сигналов фильтра соответственно; a_j , b_l — константы или отсчеты решетчатых функций, зависящих лишь от n .

Сигналы $\{x(nT)\}$ и $\{y(nT)\}$ могут быть как вещественными, так и комплексными. Уравнение (2.1) можно рассматривать как алгоритм вычисления $y(nT)$. Как правило, решение уравнения (2.1), т. е. решетчатую функцию $\{y(nT)\}$, требуется определить при $n \geq 0$. Если известны коэффициенты a_j и b_l , отсчеты входного сигнала $\{x(nT)\}$ при $n \geq -N+1$ и начальные значения $y(-T)$, $y(-2T)$, ..., $y((-M+1)T)$, то, используя (2.1), можно рассчитать отсчеты $y(nT)$ для любого $n \geq 0$.

Линейные дискретные фильтры делятся на два класса: фильтры с постоянными параметрами (ЛПП системы [1.6], линейные инвариантные во времени импульсные фильтры) и фильтры с переменными параметрами.

Линейные дискретные фильтры с постоянными параметрами описываются уравнениями типа (2.1), в которых все a_j и b_l — константы, называемые коэффициентами фильтра.

Пример 2.1. Линейный дискретный фильтр с постоянными коэффициентами описывается разностным уравнением

$$y(nT) = 0,8 y((n-1)T) + x(nT),$$

причем $x(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ 0 & \text{при } n > 0; \end{cases} \quad y(-T) = 0.$

Тогда:

$$y(0) = 0,8 y(-T) + x(0) = 1;$$

$$y(T) = 0,8 y(0) + x(T) = 0,8;$$

$$y(2T) = 0,8 y(T) + x(2T) = 0,64$$

и т. д. Входной и выходной сигналы фильтра являются вещественными.

Фильтр, у которого хотя бы один коэффициент представляет собой комплексную величину, называют комплексным.

Пример 2.2. Линейный комплексный дискретный фильтр с постоянными коэффициентами описывается разностным уравнением

$$y(nT) = (0,3 + i0,2) y((n-1)T) + x(nT),$$

причем $x(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ 0 & \text{при } n > 0; \end{cases} \quad y(-T) = 0.$

Тогда:

$$y(0) = (0,3 + i0,2) y(-T) + x(0) = 1;$$

$$y(T) = (0,3 + i0,2) y(0) + x(T) = 0,3 + i0,2;$$

$$y(2T) = (0,3 + i0,2) y(T) + x(2T) = 0,05 - i0,12$$

и т. д. Входной сигнал фильтра является вещественным, а выходной — комплексным.

Линейные дискретные фильтры с переменными параметрами описываются уравнениями типа (2.1), если хотя бы один коэффициент изменяется при изменении n , т. е. представляет собой отсчеты последовательности, отличной от константы. Практически всегда эта последовательность представляет собой периодическую функцию n .

Пример 2.3. Линейный дискретный фильтр с переменным коэффициентом описывается разностным уравнением

$$y(nT) = e^{in\pi T} x(nT),$$

причем $T=1$; $x(nT) = 1$ при $n \geq 0$. Тогда:

$$y(0) = x(0) = 1;$$

$$y(1) = -x(1) = -1;$$

$$y(2) = x(2) = 1.$$

и т. д. Выходной сигнал фильтра вещественен, поскольку вещественен входной сигнал и

$$e^{in\pi} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2k; \\ -1 & \text{при } n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Дискретные и цифровые фильтры принято делить на два класса: *нерекурсивные* (НФ) и *рекурсивные* (РФ). Если в (2.1) все коэффициенты $a_j=0$, то фильтр, реализующий этот алгоритм, называется *нерекурсивным*. Из (2.1) следует алгоритм работы такого фильтра

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l x((n-l)T). \quad (2.2)$$

Если в (2.1) хотя бы один из коэффициентов $a_j \neq 0$, то фильтр, реализующий этот алгоритм, называется *рекурсивным*. Очевидно, что НФ представляет собой устройство без обратной связи, а РФ — устройство с обратной связью.

2.1.3. Переход от разностного уравнения к структурной схеме фильтра

Из рассмотрения (2.1) видно, что для реализации фильтров необходимы устройства, выполняющие три операции: задержку (запоминание) отсчетов сигналов, сложение и умножение — и соединяющие эти устройства линии передачи сигналов. На рис. 2.1,а показано условное обозначение линии передачи сигналов,

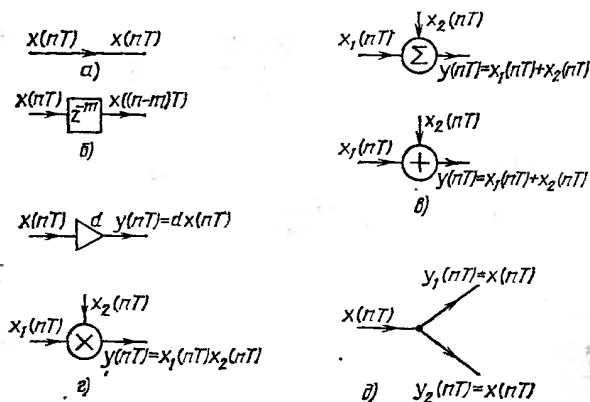


Рис. 2.1

на рис. 2.1,б — устройства, задерживающего каждый отсчет сигнала на t интервалов дискретизации T (m последовательно соединенных регистров), на рис. 2.1,в и г — два варианта обозначения сумматора и множительного устройства соответственно, на рис. 2.1,д — обозначение узла, отмечающего соединение трех и более линий передачи сигналов. Следуя разностному уравнению, разрешенному относительно $y(nT)$, и используя условные обозначения (см. рис. 2.1), можно изобразить структурную схему любого фильтра.

Пример 2.4. Изобразим структурную схему фильтра, рассмотренного в примере 2.1. В эту схему входят: один элемент задержки (регистр) для запоминания отсчета $y((n-1)T)$, множительное устройство для вычисления произведения $0,8y((n-1)T)$ и сумматор для вычисления суммы $0,8y((n-1)T) + x(nT)$. Источник входного сигнала и выход множительного устройства подключаются ко входам сумматора, с выхода которого снимаются отсчеты выходного сигнала $y(nT)$ (рис. 2.2). Выход сумматора подключается ко входу элемента задержки, на выходе которого появляются задержанные на интервал дискретизации отсчеты $y((n-1)T)$. Выход элемента задержки подключается ко входу множи-

тельного устройства, на второй вход которого подается постоянный множитель — коэффициент 0,8.

Пример 2.5. Изобразим структурную схему комплексного фильтра, рассмотренного в примере 2.2. Рассуждая так же, как при рассмотрении примера 2.4, и учитывая, что комплексное уравнение фильтра эквивалентно следующей системе вещественных уравнений:

$$\begin{cases} y_1(nT) = 0,3 y_1((n-1)T) - 0,2 y_2((n-1)T) + x(nT); \\ y_2(nT) = 0,2 y_1((n-1)T) + 0,3 y_2((n-1)T); \end{cases}$$

($y(nT) = y_1(nT) + i y_2(nT)$); $y_1(nT)$, $y_2(nT)$ — вещественные последовательности) получаем схему фильтра (рис. 2.3), в которой каждый элемент реализует операции над вещественными числами.

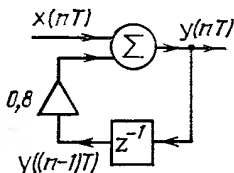


Рис. 2.2

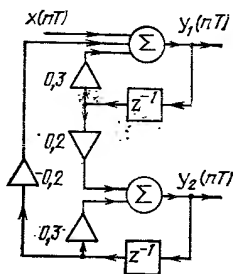


Рис. 2.3

2.1.4. Цифровые фильтры

Если алгоритм (2.1) реализуется с помощью схемы, выполненной на аналоговых элементах (например, линиях задержки, ключах и операционных усилителях [2.1]), то дискретный фильтр будет иметь тот же недостаток, что и аналоговый, — изменение параметров устройства вызывает неконтролируемые изменения (погрешности) выходного сигнала.

Цифровой фильтр (ЦФ) представляет собой цифровое устройство, реализующее алгоритм (2.1). При этом входной и выходной сигналы являются цифровыми, так что в устройстве циркулируют только двоичные коды. Поскольку операция умножения отсчетов цифрового сигнала на число иногда выполняется неточно за счет округлений или усечений произведений, в общем случае цифровое устройство не точно реализует алгоритм (2.1) и выходной сигнал отличается от точного решения (2.1). Однако в ЦФ погрешность выходного сигнала не зависит от условий, при которых работает фильтр, — температуры, влажности и т. п. Кроме того, эта погрешность контролируема — ее можно уменьшить, увеличивая число разрядов, используемых для представления отсчетов цифровых сигналов. Именно этим определяются основные преимущества цифровых фильтров — высокая точность обработки сигналов и стабильность характеристик — по сравнению с аналоговыми и дискретными фильтрами. Строго говоря, цифровые фильтры представляют собой нелинейные устройства, к которым не применимы методы анализа и синтеза линейных систем. Однако число разрядов в кодах, циркулирующих в ЦФ, как правило, достаточно велико, чтобы сигналы считать приблизительно дискретными, а фильтры — линейными дискретными. Это позволяет использовать весьма развитый аппарат анализа и синтеза подобных уст-

ройств. Вводимые ниже характеристики (передаточная функция, частотные характеристики и т. д.) относятся (если не будет особых оговорок) к линейным дискретным фильтрам, точно реализующим алгоритм (2.1). Однако эти же характеристики используют для описания ЦФ, близких по своим свойствам к линейным дискретным фильтрам.

2.1.5. Устройства цифровой обработки сигналов

Устройства цифровой обработки сигналов (ЦОС) — это цифровые устройства, реализующие тот или иной алгоритм цифровой обработки (например, БПФ, см. разд. 1) или алгоритм (2.1).

Основные преимущества устройств ЦОС по сравнению с устройствами аналоговой обработки и дискретными системами, реализуемыми на аналоговых элементах, следующие:

1. Характеристики устройств ЦОС абсолютно стабильны и не изменяются при изменении внешних условий (температуры, влажности и т. д.), пока все элементы устройства сохраняют работоспособность.

Возможна реализация ряда операций и алгоритмов принципиально нереализуемых с помощью аналоговых элементов; например, можно обрабатывать весьма низкочастотные сигналы, поскольку длительность хранения информации цифровыми элементами практически не ограничена.

3. Эти устройства весьма удобно реализовывать в виде больших и сверхбольших интегральных схем, например в виде специализированных микропроцессоров.

Основные недостатки современных устройств ЦОС:

1. Относительно низкая скорость обработки информации, которая ограничивается задержками используемых цифровых элементов.

2. Как правило, относительно большая потребляемая мощность.

3. Относительно большая стоимость.

4. Необходимость использования на входе и выходе элементов АЦП и ЦАП.

Отмеченные выше достоинства позволяют считать устройства ЦОС весьма перспективными при значениях частот дискретизации сигналов до сотен кГц.

Принципиально точность устройств цифровой обработки сигналов ограничена применяемыми АЦП и ЦАП (характеристики АЦП и ЦАП см. в табл. 9.4). Точность вычислений в самом устройстве определяется числом двоичных разрядов, используемых для представления кодов.

2.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ФИЛЬТРОВ. ПЕРВЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

2.2.1. Передаточные функции

Передаточной функцией $H(z)$ называют отношение Z -образов выходного $Y(z)$ и входного $X(z)$ сигналов фильтра при нулевых начальных условиях: $H(z) = Y(z)/X(z)$. Для рекурсивного и нерекурсивного фильтров из (2.1) и (2.2) с помощью (1.2)—(1.4) получаем:

$$H_p(z) = \frac{\sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} a_j z^{-j}}; \quad (2.3)$$

$$H_H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l}. \quad (2.4)$$

Коэффициенты фильтров являются коэффициентами соответствующих передаточных функций. Очевидно, что построение структурной схемы по известной передаточной функции выполняется практически так же, как по известному разностному уравнению. Передаточные функции являются основным аппаратом при рассмотрении соединений и различных форм реализации фильтров (см. 2.2.2 и 2.2.3).

Пример 2.6. Пусть $y(nT) = 0,4y((n-1)T) - 0,1y((n-2)T) + x(nT) - 3x((n-1)T)$. Тогда для этого фильтра

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - 0,4z^{-1} + 0,1z^{-2}},$$

т. е. $b_0 = 1; b_1 = -3; N = 2; a_1 = -0,4; a_2 = 0,1; M = 3$.

2.2.2. Соединение фильтров

Пусть $H_1(z)$ и $H_2(z)$ — передаточные функции фильтров Φ_1 и Φ_2 . Ниже приводятся выражения для передаточных функций $H_3(z)$ фильтров, эквивалентных определенному соединению Φ_1 и Φ_2 .

Соединение, при котором выход одного фильтра соединен со входом другого (рис. 2.4,а), называют *каскадным* (последовательным), причем

$$H_{\text{к.к}}(z) = H_1(z) H_2(z). \quad (2.5)$$

Соединение, при котором фильтры имеют общие входы, а выходы подключены ко входам одного сумматора (рис. 2.4,б), называют *параллельным*, причем

$$H_{\text{п.п}}(z) = H_1(z) + H_2(z). \quad (2.6)$$

Соединение, показанное на рис. 2.4,в, называют *включением фильтра Φ_2 в обратную связь фильтра Φ_1* , причем

$$H_{\text{в.о}}(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z) H_2(z)}. \quad (2.7)$$

Пример 2.7. Пусть $H_1(z) = 1/(1 - 0,3z^{-1})$; $H_2(z) = 0,2 + z^{-1} + z^{-2}$. Тогда из (2.5) — (2.7) получаем:

$$H_{\text{к.к}}(z) = (0,2 + z^{-1} + z^{-2}) / (1 - 0,3z^{-1});$$

$$H_{\text{п.п}}(z) = (0,2 + 0,7z^{-1} + 0,7z^{-2} - 0,3z^{-3}) / (1 - 0,3z^{-1});$$

$$H_{\text{в.о}}(z) = 1,25 / (1 - 1,625z^{-1} - 1,25z^{-2}).$$

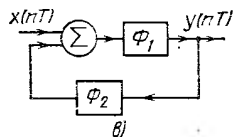
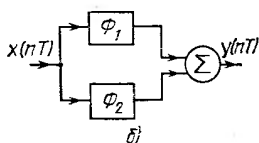
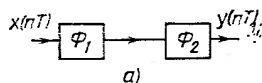


Рис. 2.4

2.2.3. Некоторые формы реализации фильтров

Существует весьма большое число различных форм реализации рекурсивных фильтров [2.2]. Отметим лишь четыре основные формы: прямую, каноническую, каскадную (последовательную) и параллельную.

Прямая форма (рис. 2.5,а) соответствует непосредственной реализации фильтра согласно (2.1) или (2.3).

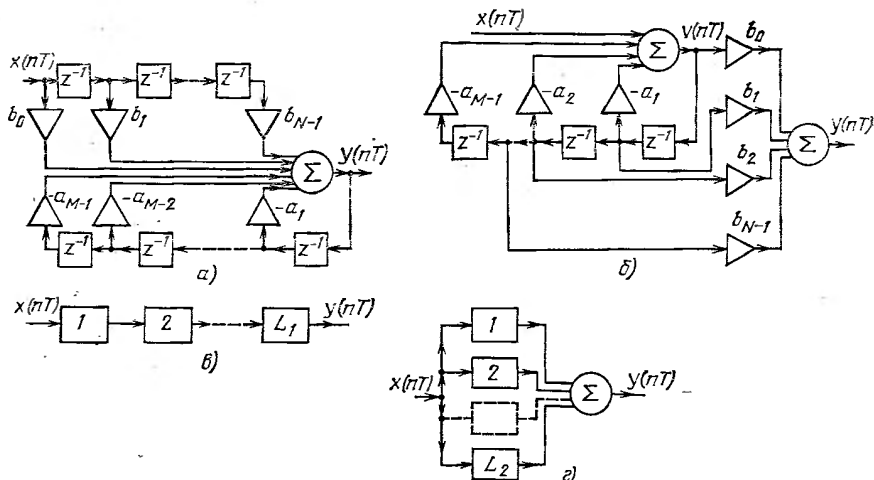


Рис. 2.5

Каноническая форма (рис. 2.5,б, для случая $N=M-1$) соответствует замене (2.1) эквивалентной системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} v(nT) = - \sum_{j=1}^{M-1} a_j v((n-j)T) + x(nT); \\ y(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l v((n-l)T). \end{cases}$$

Введение вспомогательной последовательности $v(nT)$ позволяет уменьшить число элементов задержки по сравнению с их числом при прямой форме реализации: $L_0 = \max(N-1, M-1)$.

Каскадная (последовательная) форма (рис. 2.5,в) реализации представляет собой каскадное соединение однотипных звеньев, соответствующее представлению $H(z)$ в виде произведения:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{L_1} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}. \quad (2.8)$$

Отдельные звенья, каждое из которых имеет передаточную функцию

$$H_k(z) = \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}},$$

называются *биквадратными блоками*. Биквадратный блок является универсальным звеном, пригодным для построения любых фильтров.

Параллельная форма (рис. 2.5,з) реализации фильтра представляет собой параллельное соединение, соответствующее представлению $H(z)$ в виде суммы:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}.$$

Отметим, что каждое звено параллельной формы может быть реализовано в виде биквадратного блока, если положить $\beta_{2k}=0$. Как правило, каскадная форма реализации рекурсивных фильтров обеспечивает наименьший уровень собственных шумов фильтра [2.3]. Вопрос об оптимальной расстановке звеньев каскадной формы рассматривается в разд. 5 и [1.6].

Нерекурсивные фильтры могут быть реализованы в различных формах. Прямая и каскадная формы реализации НФ строятся так же, как и соответствующие формы реализации РФ. Прямая форма (рис. 2.6) соответствует непосредственной реализации фильтра согласно (2.2) или (2.4). Каскадная форма соответствует реализации фильтра согласно (2.8) при $\alpha_{1k} = \alpha_{2k} = 0$. Для весьма важного класса нерекурсивных фильтров с линейными ФЧХ (см. разд. 4) возможны специальные формы реализации, уменьшающие число операций умножения, которые надо выполнить, чтобы получить один отсчет выходного сигнала фильтра. На рис. 2.7 показана структурная схема фильтра, соответствующая (2.2) при $b_1 = b_{N-1} = 1$ и нечетном N .

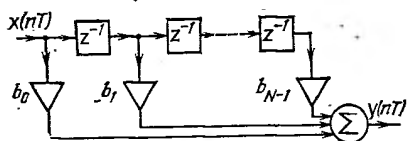


Рис. 2.6

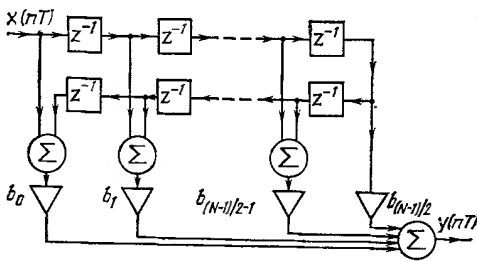


Рис. 2.7

2.2.4. Реализационные характеристики фильтров

Следующие характеристики фильтров определяют сложность аппаратной реализации и моделирования фильтра в реальном масштабе времени:

L_0 — число ячеек (регистров) оперативной памяти, необходимое для реализации фильтра;

L_{π} — число ячеек постоянной памяти, необходимое для реализации фильтра;

V_y — число операций умножения, которые должны быть выполнены в фильтре за время T для получения одного отсчета выходного сигнала;

V_c — число операций алгебраического сложения двух слагаемых, которые должны быть выполнены в фильтре за время T для получения одного отсчета выходного сигнала.

Указанные величины могут быть определены по структурной схеме фильтра: L_0 равно числу элементов задержки; L_{π} — числу различных постоянных множителей, выписанных около обозначений множительных устройств; V_y — числу

множительных устройств; V_c — суммарному числу входов сумматоров минус число сумматоров. Так, для структурной схемы фильтра на рис. 2.3 $L_o=2$; $L_n=3$; $V_y=4$; $V_c=2$.

2.2.5. Устойчивость фильтров. Первый критерий устойчивости

Фильтр называется *устойчивым*, если при любых начальных условиях и любом ограниченном входном сигнале $x(nT)$ выходной сигнал $y(nT)$ также остается ограниченным, т. е. из условия $|x(nT)| \leq B$ при всех n следует, что

$$|y(nT)| < D, \quad (2.9)$$

причем B и D — константы, не зависящие от n . Очевидно, что нерекурсивный фильтр всегда устойчив.

Условие (2.9) неудобно использовать для проверки устойчивости рекурсивных фильтров. Первый критерий устойчивости РФ, удобный для практической проверки, формулируется следующим образом [2.4]: если передаточная функция фильтра представляет собой несократимую дробь, то для устойчивости фильтра необходимо и достаточно выполнение условия

$$|z_l| < 1, \quad l = 1, 2, \dots, M-1, \quad (2.10)$$

где z_l — полюс (корень знаменателя) функции $H(z)$, т. е. все полюсы должны лежать внутри единичной окружности на z -плоскости (рис. 2.8); $z = \alpha + i\beta$.

Пример 2.8. а) $H_1(z) = (1-z^{-1})/(1-0,3z^{-1})$; полюс $z^{(1)}_1 = 0,3$ (см. рис. 2.8); $|z^{(1)}_1| < 1$; фильтр устойчив.

б) $H_2(z) = (1-z^{-1})/(1-2z^{-1})$; полюс $z^{(2)}_1 = 2$ (см. рис. 2.8); $|z^{(2)}_1| > 1$; фильтр неустойчив;

в) $H_3(z) = (1-z^{-2})/(1-1,8z^{-1}+0,97z^{-2})$; полюсы $z^{(3)}_1 = 0,9 + i0,4$; $z^{(3)}_2 = 0,9 - i0,4$ (см. рис. 2.8); $|z^{(3)}_1| = |z^{(3)}_2| < 1$; фильтр устойчив;

г) $H_4(z) = (1-z^{-2})/(1-2,4z^{-1}+1,69z^{-2})$; полюсы $z^{(4)}_1 = 1,2 + i0,5$; $z^{(4)}_2 = 1,2 - i0,5$ (см. рис. 2.8); $|z^{(4)}_1| = |z^{(4)}_2| > 1$; фильтр неустойчив;

д) $H(z) = (1-z^{-2})/(1-z^{-1})$. Так как $H(z) = 1+z^{-1}$; фильтр устойчив.

Неустойчивый фильтр, безусловно, неработоспособен в том случае, когда входной сигнал действует неограниченно долго, так как рано или поздно выходной сигнал перестает зависеть от входного. Он работоспособен и практически используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени. Например, цифровой интегратор с передаточной функцией $H(z) = 1/(1-z^{-1})$ (эта функция имеет полюс $z=1$, т. е. фильтр неустойчив) вполне работоспособен, если входной сигнал $x(nT)$ действует при $0 \leq n \leq N-1$, после чего следует сброс, т. е. восстанавливаются нулевые начальные условия.

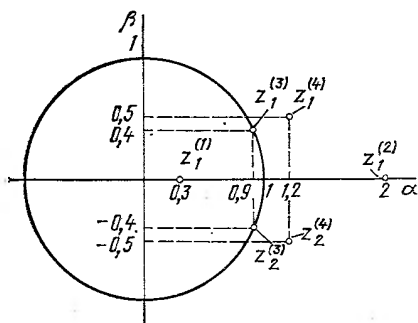


Рис. 2.8

2.3. ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЛЬТРОВ

2.3.1. Частотные характеристики

Комплексные частотные характеристики представляют собой функции, полученные в результате подстановки $z=e^{i\omega T}$ в передаточные функции (2.3) и (2.4):

$$H_p(e^{i\omega T}) = \frac{\sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{-i l \omega T}}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} a_j e^{-j \omega T}}; \quad (2.11)$$

$$H_H(e^{i\omega T}) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{-i l \omega T}. \quad (2.12)$$

Модуль комплексной частотной характеристики $A(\omega) = |H(e^{i\omega T})|$, называемый *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) фильтра, определяет амплитуду выходного сигнала устойчивого фильтра в установившемся режиме при входном сигнале $x(nT) = e^{i n \omega T}$.

Аргумент комплексной частотной характеристики $\varphi(\omega) = \arg[H(e^{i\omega T})]$, называемый *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ) фильтра, определяет фазу выходного сигнала устойчивого фильтра при входном сигнале $x(nT) = e^{i n \omega T}$. Очевидно, что для фильтров с вещественными коэффициентами справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} A_p(\omega) = |H_p(e^{i\omega T})| &= \sqrt{\frac{\left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l \omega T\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l \omega T\right)^2}{\left(\sum_{j=0}^{M-1} a_j \cos j \omega T\right)^2 + \left(\sum_{j=0}^{M-1} a_j \sin j \omega T\right)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} b_m b_k \cos(m-k) \omega T}{\sum_{p=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{M-1} a_p a_s \cos(p-s) \omega T}}, \quad (2.13') \end{aligned}$$

где $a_0=1$;

$$\begin{aligned} \varphi_p(\omega) = \arg[H_p(e^{i\omega T})] &= -\arctg \frac{\sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l \omega T}{\sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l \omega T} + \\ &+ \arctg \frac{\sum_{j=0}^{M-1} a_j \sin j \omega T}{\sum_{j=0}^{M-1} a_j \cos j \omega T}; \quad (2.13'') \end{aligned}$$

$$A_H(\omega) = |H_H(e^{i\omega T})| = \sqrt{\left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l\omega T\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l\omega T\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} b_m b_k \cos(m-k)\omega T}; \quad (2.14')$$

$$\varphi_H(\omega) = \arg[H(e^{i\omega T})] = -\arctg \frac{\sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l\omega T}{\sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l\omega T}. \quad (2.14'')$$

Групповое время замедления (ГВЗ)

$$\tau(\omega) = -d\varphi/d\omega \quad (2.15)$$

равно времени задержки в установившемся режиме выходного сигнала фильтра относительно входного сигнала $x(nT) = e^{in\omega T}$.

Пример 2.9. Пусть $H(z) = 2 + 0,5z^{-1} - z^{-2}$. Из (2.12), (2.14) и (2.15) получаем:

$$H(e^{i\omega T}) = 2 + 0,5e^{-i\omega T} - e^{-i2\omega T};$$

$$A(\omega) = \sqrt{(2 + 0,5 \cos \omega T - \cos 2\omega T)^2 + (0,5 \sin \omega T - \sin 2\omega T)^2};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{0,5 \sin \omega T - \sin 2\omega T}{2 + 0,5 \cos \omega T - \cos 2\omega T};$$

$$\tau(\omega) = \frac{1}{A^2(\omega)} [(2 + 0,5 \cos \omega T - \cos 2\omega T)(0,5 T \cos \omega T - 2 T \cos 2\omega T) -$$

$$- (0,5 \sin \omega T - \sin 2\omega T)(-0,5 T \sin \omega T + 2 T \sin 2\omega T)].$$

Пример 2.10. Пусть $H(z) = 1/(1 - 0,5z^{-1})$. Из (2.11), (2.13) и (2.15) получаем:

$$H(e^{i\omega T}) = \frac{1}{1 - 0,5e^{-i\omega T}};$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,5 \cos \omega T)^2 + (0,5 \sin \omega T)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{0,5 \sin \omega T}{1 - 0,5 \cos \omega T};$$

$$\tau(\omega) = \frac{-1}{A^2(\omega)} [(1 - 0,5 \cos \omega T)0,5 T \cos \omega T - 0,5 \sin \omega T 0,5 T \sin \omega T].$$

Пример 2.11. Пусть $H(z) = 1 + 0,5z^{-1}$ и $x(nT) = \sin n\omega T$, $\omega = 2\pi 2000$ с⁻¹, $T = 1/8000$ с. Из (2.12), (2.14) и (2.15) для установившегося режима получаем:

$$y_{уст}(nT) = A(\omega) \sin[n\omega T + \varphi(\omega)] = \sqrt{1,25} \sin(n\pi/2 - \arctg 0,5);$$

$$\tau = T/4 = 31,25 \text{ мкс.}$$

На рис. 2.9,а изображена структурная схема фильтра с передаточной функцией $H(z) = 1 + 0,5z^{-1}$, на рис. 2.9,б — временные диаграммы $x(nT)$, $y(nT)$ при нулевых начальных условиях и $y_{уст}(nT)$, построенные по данным примера 2.11.

Устройства цифровой обработки способны обрабатывать лишь аналоговые сигналы с ограниченным спектром (см. 1.1.2). Если частота дискретизации аналогового сигнала выбрана в соответствии со значениями $\omega_{a \min}$ и $\omega_{a \max}$ (см.

1.1.2), то характер частотных характеристик в диапазоне частот от 0 до $\omega_d/2 = \pi/T$ полностью определяет изменение спектра аналогового сигнала, полученного после цифро-аналогового преобразования выходного сигнала фильтра.

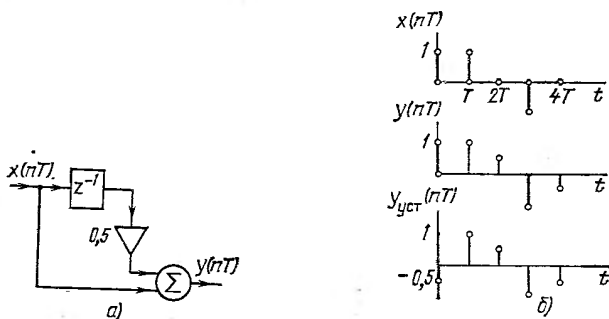


Рис. 2.9

2.3.2. Основные свойства частотных характеристик. Нормировка частоты

Из формул (2.11) — (2.15) следуют основные свойства частотных характеристик фильтров с вещественными коэффициентами.

1. Все частотные характеристики представляют собой периодические функции частоты ω с периодом ω_d , определяемым (1.14).

Пример 2.12. Для условий примера 2.10 при $T=1/8000$ с на рис. 2.10 построен график двух периодов функций $A(\omega)$.

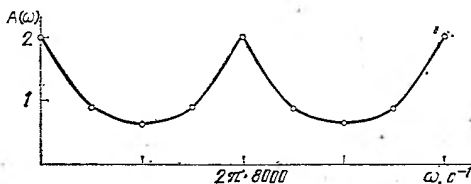


Рис. 2.10

2. Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ и ГВЗ $\tau(\omega)$ представляют собой четные функции частоты ω , а фазо-частотная характеристика $\varphi(\omega)$ — нечетную функцию частоты ω .

Из указанных свойств следует, что требования к частотным характеристикам при постоянном значении T следует задавать лишь на интервале $[0, \pi/T]$. С целью упрощения сопоставимости частотных характеристик различных фильтров нормируют частоту одним из двух способов. При первом способе полагают нормированной частоту $\tilde{\omega} = \omega T$, тогда $\omega_d = \omega_d T = 2\pi$ и требования к частотным характеристикам задаются на интервале $[0, \pi]$. При втором способе полагают нормированной частоту $\omega = \omega T / (2\pi)$, тогда $\omega_d = \omega_d T / (2\pi) = 1$ и требования к частотным характеристикам задаются на интервале $[0; 0,5]$. В справочнике используется, как правило, второй способ нормировки. При этом изменяются аргументы в обозначениях частотных характеристик $H(e^{j\omega_d T})$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и $\tau(\omega)$.

2.3.3. Импульсная характеристика

Импульсная характеристика $h(nT)$ фильтра представляет собой реакцию фильтра при нулевых начальных условиях на входное воздействие:

$$\tilde{\delta}(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0; \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Из этого определения и определения передаточной функции следует, что

$$\left. \begin{aligned} h(nT) &= Z^{-1} \{H(z)\}; \\ H(z) &= Z \{h(nT)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что $h(nT)$ и $H(e^{i\omega T})$ связаны парой преобразований Фурье:

$$\left. \begin{aligned} h(nT) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{i\omega T}) e^{in\omega T} d\omega; \\ H(e^{i\omega T}) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-in\omega T}. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Пример 2.13. Пусть $H(z) = 1 + 0,3z^{-1} - 0,2z^{-2}$, тогда $h(0) = 1$; $h(T) = 0,3$; $h(2T) = -0,2$; $h(nT) = 0$ при $n \geq 3$.

Пример 2.14. Пусть $H(z) = (1 - z^{-1}) / (1 + 0,5z^{-1})$. Используя (1.7), получаем

$$h(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0; \\ -1,5(-0,5)^{n-1} & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

В зависимости от характера импульсной характеристики дискретные и цифровые фильтры принято [1.6] делить на следующие два класса: КИХ-фильтры (фильтры с конечной импульсной характеристикой) и БИХ-фильтры (фильтры с бесконечной импульсной характеристикой). Отметим, что все практически реализуемые НФ являются КИХ-фильтрами, а почти все РФ [за исключением тех, у которых передаточная функция может быть преобразована к виду (2.4)] являются БИХ-фильтрами.

Зная $h(nT)$, можно рассчитать при нулевых начальных условиях выходной сигнал фильтра $y(nT)$ по заданному входному сигналу $x(nT)$. Из (1.2) следует, что последовательность $y(nT)$ представляет собой линейную свертку (см. 1.4) последовательностей $x(nT)$ и $h(nT)$, причем эти три последовательности могут быть как конечные, так и бесконечные:

$$y(nT) = \sum_{l=0}^n h(lT) x((n-l)T) = \sum_{l=0}^n x(lT) h((n-l)T), \quad n=0, 1, \dots, \quad (2.19)$$

при этом $h(nT) = 0$ при $n < 0$ и $x(nT) = 0$ при $n < 0$.

Пример 2.15. Пусть $h(0) = 1$; $h(T) = -0,5$; $h(nT) = 0$ при $n \geq 2$; $x(0) = -1$; $x(T) = 1$; $x(2T) = 0,5$; $x(nT) = 0$ при $n \geq 3$. Из (2.19) получаем:

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0)x(0) = -1; \\ y(T) &= h(0)x(T) + h(T)x(0) = 1,5; \\ y(2T) &= h(0)x(2T) + h(T)x(T) = 0; \\ y(3T) &= h(T)x(2T) = -0,25; \\ y(nT) &= 0 \text{ при } n \geq 4. \end{aligned}$$

Для вычисления (2.19) при обработке сигналов нерекурсивным фильтром можно использовать рассмотренные выше (см. 1.4.4) методы секционирования свертки.

2.3.4. Второй критерий устойчивости фильтров

Из определения (2.9) и (2.19) следует второй критерий устойчивости фильтров: для того чтобы фильтр был устойчив, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| \leq D_1, \quad (2.20)$$

где D_1 — константа.

Второй критерий менее удобен для проверки устойчивости фильтра, чем первый.

2.3.5. Теорема Парсеваля

Пусть $x(nT)$ и $y(nT)$ — комплексные последовательности. Тогда [1.6] согласно (1.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \bar{y}(nT) = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) \bar{Y}(e^{j\omega T}) d\omega,$$

где \bar{a} — величина, комплексно-сопряженная с a : $X(e^{j\omega T})$ и $Y(e^{j\omega T})$ — спектры последовательностей $x(nT)$ и $y(nT)$.

В частном случае при $x(nT) = y(nT)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |X(e^{j\omega T})|^2 d\omega. \quad (2.21)$$

Равенство (2.21) называется *теоремой Парсеваля*. Согласно (2.21) для любого фильтра с действительными коэффициентами справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |H(e^{j\omega T})|^2 d\omega. \quad (2.22)$$

Из (1.6) при $x_1(nT) = x_2(nT) = h(nT)$ следует равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = \frac{1}{2\pi i} \oint H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz, \quad (2.23)$$

где в качестве контура интегрирования выбрана единичная окружность.

Для вычисления интеграла в (2.23) можно использовать (1.8), полагая $F(z) = H(z)H(z^{-1})z^{-1}$ и учитывая при вычислении только полюсы, расположенные внутри единичной окружности.

Пример 2.16. Пусть $H(z) = 1/(1 - 0,5z^{-1})$. Тогда из (1.8) и (2.23) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{0}{z - 0,5} \cdot \frac{1}{1 - 0,5z} dz.$$

Поскольку внутри единичной окружности находится только полюс $z_1 = 0,5$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{1}{1 - 0,5z} = \frac{4}{3}.$$

2.4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.4.1. Цели анализа линейных цифровых цепей с постоянными параметрами

Под линейной цифровой цепью с постоянными параметрами понимается схема, реализующая линейное разностное уравнение и состоящая из элементов задержки (регистров), каждый из которых задерживает один отсчет сигнала на время T , сумматоров, устройств умножения и соединяющих эти элементы линий передачи сигналов (см. рис. 2.1). В задачах анализа этих цепей рассматриваются частотные и временные характеристики цепей, параметры выходных сигналов при детерминированных и случайных воздействиях, чувствительность цепи, т. е. зависимость определенных характеристик от изменения параметров цепи [2.1, 2.3]. Ниже рассматривается один из наиболее эффективных методов анализа, основанный на определении Z -образа выходного сигнала путем решения системы линейных алгебраических уравнений [2.5].

2.4.2. Определение Z -образа сигнала по сигнальному графу цепи

Сигнальный граф состоит из узлов — нумерованных вершин и соединяющих их направленных дуг (рис. 2.11). Стрелки на дугах указывают направление передачи информации от одного узла к другому. Сигнальный граф однозначно соответствует структурной схеме, причем вершина соответствует узлу или сумматору; дуга, соединяющая две вершины, — элементу задержки или множительному устройству; дуга, направленная к одной из вершин, начало которой не соединено с вершиной, — входному сигналу. В сигнальном графе запись z^{-1} рядом с дугой означает, что эта дуга соответствует элементу задержки, а запись b рядом с дугой — что эта дуга соответствует устройству умножения на b .

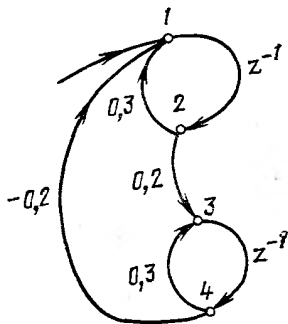


Рис. 2.11

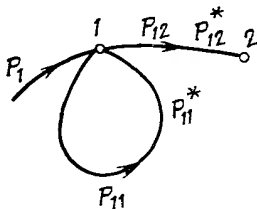


Рис. 2.12

Для определения Z -образа искомого сигнала необходимо по сигнальному графу составить систему линейных алгебраических уравнений относительно Z -образов сигналов цепи. При этом удобно использовать следующие обозначения (рис. 2.12):

P_{mn} — Z -образ сигнала, передаваемого из вершины с номером m в вершину с номером n до преобразования элементом, соответствующим дуге mn ;

P^*_{mn} — Z -образ сигнала, передаваемого из вершины с номером m в вершину с номером n после преобразования элементом, соответствующим дуге mn ;

P_n — Z -образ входного сигнала, поступающего к вершине с номером n .

Основой при записи систем уравнений являются уравнения дуг и вершин.

Эти уравнения имеют следующий вид:

для дуги, соответствующей элементу задержки,

$$P^*_{mn} = z^{-1} P_{mn}; \quad (2.24)$$

для дуги, соответствующей устройству умножения,

$$P^*_{mn} = b P_{mn}; \quad (2.25)$$

для вершины

$$\sum_l P^*_{ln} = P_{nM_1} = P_{nM_2} = \dots = P_{nM_q}, \quad l = K_1, K_2, \dots, K_r, \quad (2.26)$$

где K_1, K_2, \dots, K_r — номера r вершин, в которых начинаются дуги, заканчивающиеся в вершине с номером n ; M_1, M_2, \dots, M_q — номера q вершин, в которых заканчиваются дуги, начинающиеся в вершине с номером n .

Записав уравнения (2.24) — (2.26) для каждой дуги и вершины, получают систему уравнений, которую можно разрешить относительно Z -образа любого сигнала.

Пример 2.17. Сигнальный граф (см. рис. 2.11) соответствует структурной схеме фильтра (см. рис. 2.3). Система уравнений имеет вид:

$$P_1 + P^*_{41} + P_{21} = P_{12} \quad (\text{вершина } 1);$$

$$P^*_{12} = z^{-1} P_{12} \quad (\text{дуга } 12);$$

$$P^*_{21} = 0,3 P_{21} \quad (\text{дуга } 21);$$

$$\left. \begin{aligned} P^*_{12} &= P_{21}, \\ P^*_{12} &= P_{23} \end{aligned} \right\} \quad (\text{вершина } 2);$$

$$P^*_{23} = 0,2 P_{23} \quad (\text{дуга } 23);$$

$$P^*_{23} + P^*_{43} = P_{34} \quad (\text{вершина } 3);$$

$$P^*_{34} = z^{-1} P_{34} \quad (\text{дуга } 34);$$

$$\left. \begin{aligned} P^*_{34} &= P_{43}, \\ P^*_{34} &= P_{41} \end{aligned} \right\} \quad (\text{вершина } 4);$$

$$P^*_{43} = 0,3 P_{43} \quad (\text{дуга } 43);$$

$$P^*_{41} = -0,2 P_{41} \quad (\text{дуга } 41).$$

Решая эту систему методом Гаусса [2.6], можно выразить Z -образ любого сигнала через Z -образ входного сигнала. Например,

$$P_{12} = P_1 (1 - 0,3 z^{-1}) / (0,04 z^{-2} + (1 - 0,3 z^{-1})^2).$$

Отметим, что система линейных алгебраических уравнений, составленная по сигнальному графу, решается в общем виде, т. е. в итоге получаются формулы относительно искомых величин. Процессы составления и решения системы уравнений реализованы в виде программ на ЭВМ (см. приложения 3 и 4).

2.4.3. Определение характеристик цепи и параметров детерминированных и случайных сигналов на выходе цепи

Зная Z -образ сигнала, можно, используя обратное Z -преобразование (1.7), определить значения отсчетов этого детерминированного сигнала для любых n . Рассматривая некоторую точку цепи как вход, можно определить передаточную функцию $H(z)$, импульсную характеристику $h(nT)$, АЧХ $A(\omega)$, ФЧХ $\varphi(\omega)$ и ГВЗ $\tau(\omega)$ (см. 2.3.1).

Если входной сигнал цепи представляет собой стационарную случайную последовательность с некоррелированными между собой отсчетами, то установившаяся дисперсия выходного сигнала в выбранной выходной точке определяется выражением

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT), \quad (2.27)$$

где $\sigma_{\text{вх}}^2$ — постоянная дисперсия входного сигнала; $h(nT)$ — импульсная характеристика.

Вычисление (2.27) по известной передаточной функции $H(z)$ выполняется с помощью (2.23). Если математическое ожидание величины отсчета входной стационарной случайной последовательности равно нулю, то средняя мощность выходной последовательности равна

$$P_{\text{ср}} = \sigma_{\text{вых}}^2. \quad (2.28)$$

Если входной сигнал цепи представляет собой стационарную случайную последовательность с коррелированными между собой отсчетами, то, зная спектральную плотность мощности $S_{\text{вх}}(\omega)$, можно определить среднюю мощность выходной последовательности:

$$P_{\text{ср}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_{\text{вх}}(\omega) |H(e^{i\omega T})|^2 d\omega, \quad (2.29)$$

где $S_{\text{вх}}(\omega) |H(e^{i\omega T})|^2 = S_{\text{вых}}(\omega)$ — спектральная плотность мощности выходной последовательности.

Функция $S_{\text{вх}}(\omega)$ может быть определена путем измерений или рассчитана по известной автокорреляционной функции [см. (1.97)].

Теорема Парсеваля в форме (2.22) весьма удобна для предварительной оценки средней мощности шума $P_{\text{ср}}$ на выходе фильтра по известной дисперсии входного шума $\sigma_{\text{вх}}^2$ и заданной АЧХ фильтра $A^*(\omega)$. Поскольку $|H(e^{i\omega T})| \approx A^*(\omega)$, в силу (2.22), (2.27) и (2.28)

$$P_{\text{ср}} \approx \frac{\sigma_{\text{вх}}^2 T}{\pi} \int_0^{\pi/T} [A^*(\omega)]^2 d\omega.$$

Пример 2.18. Пусть на вход цепи с передаточной функцией $H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$ подаются:

а) стационарная случайная последовательность с некоррелированными между собой отсчетами и математическим ожиданием величины отсчета равным нулю, причем $\sigma_{\text{вх}}^2 = 0,3$;

б) стационарная случайная последовательность, причем

$$S_{\text{вх}}(\omega) = \begin{cases} 3 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_1; \\ 2 & \text{при } \omega_1 < \omega \leq \pi/T. \end{cases}$$

В первом случае согласно (2.27) и (2.28) $P_{\text{ср}} = \sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \cdot 4 = 1,2$. Во втором случае согласно (2.29) и (2.14)

$$P_{\text{ср}} = \sum_{m=0}^3 \sum_{k=0}^3 \frac{\sin(m-k)\omega_1 T}{(m-k)\pi}$$

Таким образом, величина $P_{\text{ср}}$ может быть оценена до синтеза фильтра. На рис. 2.13 изображена схема алгоритма определения параметров детерминированных и случайных сигналов на выходе цепи и характеристик цепи.

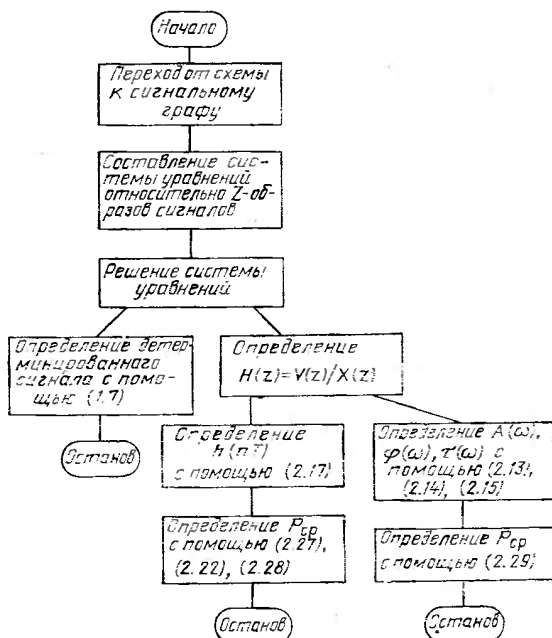


Рис. 2.13

2.5. ВОСХОДЯЩИЕ И НИСХОДЯЩИЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.5.1. Общие сведения

Восходящей дискретной системой (ВДС) [2.7—2.9] называется система, частота дискретизации сигнала на выходе которой выше частоты дискретизации входного сигнала.

Нисходящей дискретной системой (НДС) называется система, частота дискретизации сигнала на выходе которой ниже частоты дискретизации входного сигнала.

Система, в которой увеличение (уменьшение) частоты дискретизации производится в один прием (однократно), называется соответственно *простейшей восходящей дискретной системой* (ПВДС) и *простейшей нисходящей дискретной системой* (ПНДС).

Многократной дискретной системой (МДС) называется система, образованная последовательным соединением дискретных подсистем, работающих с различными (кратными) частотами дискретизации.

Если частота дискретизации последующей подсистемы выше (ниже) частоты дискретизации предшествующей подсистемы, МДС называется *многократной восходящей (нисходящей) дискретной системой* (МВДС и МНДС).

Частным случаем МВДС (МНДС) является ПВДС (ПНДС), которая содержит лишь одну подсистему.

Каждая подсистема ВДС состоит из элемента, увеличивающего частоту дискретизации — *экспандера частоты дискретизации* (ЭЧД), находящегося на входе подсистемы, и дискретного фильтра, выполняющего последующую обработку сигнала с выходной частотой дискретизации.

Каждая подсистема НДС состоит из дискретного фильтра, выполняющего предварительную обработку входного сигнала с входной частотой дискретизации, и элемента, уменьшающего частоту дискретизации — *компрессора частоты дискретизации* (КЧД), находящегося на выходе подсистемы.

При практической реализации ВДС (НДС) операции, выполняемые экспандером (компрессором) частоты дискретизации, часто совмещаются с операциями, выполняемыми дискретным фильтром. Однако при рассмотрении принципов работы ВДС (НДС) целесообразно выделять ЭЧД (КЧД) в отдельный блок.

2.5.2. Экспандер частоты дискретизации

Экспандер частоты дискретизации (рис. 2.14,а), увеличивающий частоту дискретизации входного сигнала в m раз (m — целое), представляет собой блок, преобразующий входной дискретный сигнал, описываемый решетчатой функцией $x(\nu T')$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$) с периодом повторения T' , в выходной дискретный сигнал, описываемый решетчатой функцией $x^*(nT) = x^*(nT'/m)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) с периодом повторения $T = T'/m$ по алгоритму [2.10]:

$$x^*(nT) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{m} T'\right) & \text{при } n=0, m, 2m, \dots; \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases} \quad (2.30)$$

т. е. последовательность $x^*(nT)$ получается из последовательности $x(\nu T')$ путем ввода $(m-1)$ -го нулевого отсчета между двумя последовательными входными отсчетами. На рис. 2.15 показаны последовательности $x(\nu T')$ и $x^*(nT)$ на входе и выходе ЭЧД при увеличении частоты дискретизации в 3 раза ($m=3$).

Z-преобразования входного и выходного сигналов ЭЧД тождественны:

$$X^*(z) = X(z'), \quad (2.31)$$

где $z = \exp(i\omega T)$; $z' = z^m = \exp(i\omega m T)$.

Спектры входного и выходного сигналов ЭЧД связаны соотношением, получаемым из (2.31):

$$X^*(e^{i\omega T}) = X(e^{i\omega m T}) \quad (2.32')$$

или

$$X^*(e^{i2\pi\omega}) = X(e^{i2\pi m\omega}), \quad (2.32'')$$

где $\omega = \omega/\omega_d = \omega T/(2\pi)$ — нормированная частота. Выходной сигнал ЭЧД $x^*(nT)$, формируемый из входного сигнала $x(\nu T')$ по алгоритму (2.30), имеет тот же

спектр, что и входной сигнал. Спектр выходного сигнала периодичен со «старой» частотой дискретизации $\omega'_d = 2\pi/T'$, а не с частотой $\omega_d = 2\pi/T$, как это обычно имеет место для сигналов, интервал дискретизации которых равен T .

На рис. 2.16 условно показаны модули спектров входного и выходного сигналов ЭЧД при $m=3$.

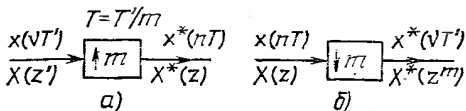


Рис. 2.14

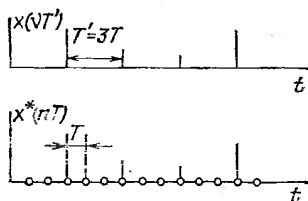


Рис. 2.15

2.5.3. Компрессор частоты дискретизации

Компрессор частоты дискретизации (см. рис. 2.14, б), уменьшающий частоту дискретизации входного сигнала в m раз (m — целое), представляет собой ключ, который замыкается в моменты времени $t = nmT + kT$, $k=0, 1, \dots, m-1$; $n=0, 1, 2, \dots$, т. е. из входного дискретного сигнала, описываемого решетчатой функцией $x(nT)$, $n=0, 1, 2, \dots$, с периодом повторения T , берется только каждый m -й отсчет, что позволяет получить выходной дискретный сигнал, описываемый решетчатой функцией $x^*(vT') = x^*(vmT)$, $v=0, 1, 2, \dots$, с периодом повторения $T' = mT$.

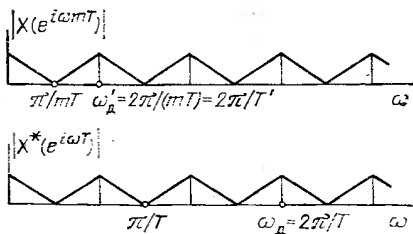


Рис. 2.16

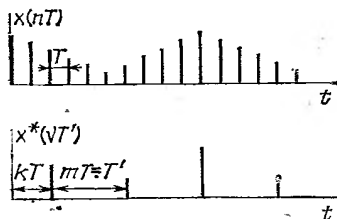


Рис. 2.17

Операция, выполняемая КЧД, часто называется *прореживанием*, а последовательность $x^*(vT')$ на выходе КЧД — *прореженной*.

На рис. 2.17 показаны последовательности $x(nT)$ и $x^*(vT')$ на входе и выходе КЧД при уменьшении частоты дискретизации в 4 раза ($m=4$; $k=2$).

Z-преобразования выходного и входного сигналов КЧД связаны соотношением [2.7, 2.9]

$$X_k^*(z') = z^k \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} e^{i 2\pi \frac{l}{m} k} X \left(z e^{i 2\pi \frac{l}{m}} \right), \quad k=0, 1, \dots, m-1, \quad (2.33)$$

где $z = \exp(i\omega T)$; $z' = z^m = \exp(i\omega mT)$, а $X(z)$ и $X_k^*(z')$ — z-преобразования решетчатой функции $x(nT)$ и прореженной смещенной решетчатой функции $x^*(vT' + kT)$.

В практических случаях, как правило, выбирают $k=0$. При этом связь между z -преобразованиями выходного и входного сигналов имеет вид

$$X^*(z') = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} X \left(z e^{i 2\pi \frac{l}{m}} \right). \quad (2.34)$$

Соответствующее соотношение для спектров выходного и входного сигналов, получаемое из (2.34), имеет вид

$$X^*(e^{i\omega m T}) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} X \left(e^{i\omega T + i 2\pi \frac{l}{m}} \right) \quad (2.35')$$

или

$$X^*(e^{i 2\pi m \omega}) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} X \left(e^{i 2\pi \left(\omega + \frac{l}{m} \right)} \right). \quad (2.35'')$$

Из (2.35) видно, что спектр выходного сигнала есть сумма спектров входного сигнала, сдвинутых относительно друг друга по оси частот ω на величину $2\pi/(mT)$. На рис. 2.18 условно показаны модули спектра входного сигнала (рис. 2.18,а) и составляющих спектра выходного сигнала (рис. 2.18,б) КЧД при уменьшении частоты дискретизации в 3 раза ($m=3$).

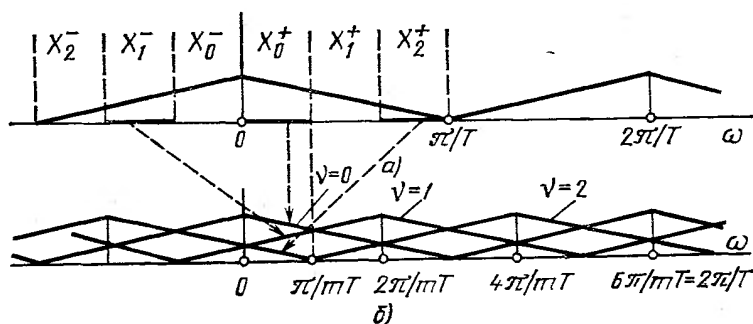


Рис. 2.18

В основной полосе частот $\omega \in [0, \pi/(mT)]$ спектр выходного сигнала КЧД определяется как [2.11]

$$\begin{aligned} X^*(e^{i\omega m T}) &= \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} X_l^\pm \left(e^{i\omega T + i(-1)^l \frac{2\pi}{m} \left[\frac{l+1}{2} \right]} \right) = \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} X_{2l}^+ \left(e^{i\omega T + i 2\pi \frac{l}{m}} \right) + \sum_{l=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} X_{2l-1}^- \left(e^{i\omega T - i 2\pi \frac{l}{m}} \right) \right\}, \quad (2.36) \end{aligned}$$

где $X_l(e^{i\omega T})$ — l -я составляющая спектра входного сигнала, занимающая полосу частот $|\omega| \in \left[l \frac{\pi}{mT}, (l+1) \frac{\pi}{mT} \right]$:

$$X(e^{i\omega T}) = \sum_{l=0}^{m-1} X_l(e^{i\omega T}) = \sum_{l=0}^{m-1} (X_l^+(e^{i\omega T}) + X_l^-(e^{i\omega T})); \quad (2.37)$$

$$X_i(e^{i\omega T}) = \begin{cases} X(e^{i\omega T}) & \text{при } |\omega| \in \left[l \frac{\pi}{mT}, (l+1) \frac{\pi}{mT} \right]; \\ 0 & \text{при } |\omega| \notin \left[\frac{\pi}{mT}, (l+1) \frac{\pi}{mT} \right], \end{cases} \quad (2.38)$$

а $X_l^+(e^{i\omega T})$ и $X_l^-(e^{i\omega T})$ соответствуют верхней ($\omega > 0$) и нижней ($\omega < 0$) полосам l -го спектра. В формуле (2.36) [...] означает наибольшее целое число, не превышающее заданного числа, верхний индекс «+» (X_l^+) соответствует четным l , а «минус» (X_l^-) — нечетным l .

Смысл формулы (2.36) состоит в следующем. Если основной спектр входного сигнала КЧД условно разбить на m составляющих, занимающих m полос на оси частот шириной $\pi/(mT)$ [см. (2.37), (2.38)], то после уменьшения частоты дискретизации в m раз в основную полосу частот $\omega \in [0, \pi/(mT)]$ выходного сигнала попадают прямые спектры $X_{l+1}^+(\cdot)$ четных составляющих ($l=0, 2, \dots$) и инверсные спектры $X_{l-1}^-(\cdot)$ нечетных составляющих ($l=1, 3, \dots$) входного сигнала.

На рис. 2.18 показана графическая интерпретация формулы (2.36) при уменьшении частоты дискретизации в 3 раза ($m=3$). Спектр входного сигнала условно разбит на $m=3$ составляющих ($X_0^\pm, X_{\pm 1}, X_{\pm 2}$), занимающих соответственно частотные диапазоны $|\omega| = \left[0, \frac{\pi}{3T} \right], \left[\frac{\pi}{3T}, 2\frac{\pi}{3T} \right], \left[2\frac{\pi}{3T}, \frac{\pi}{T} \right]$.

После уменьшения частоты дискретизации в 3 раза в соответствии с (2.36) в основной полосе частот спектр выходного сигнала имеет вид

$$X^*(e^{i\omega m T}) = \frac{1}{m} \left\{ X_0^+(e^{i\omega T}) + X_2^+ \left(e^{i\omega T + i\frac{2\pi}{3}} \right) + X_1^- \left(e^{i\omega T - i\frac{2\pi}{3}} \right) \right\},$$

т. е. в основную полосу частот $\omega \in [0, \pi/3T]$ выходного сигнала попадают составляющие $X_{+0}(\cdot), X_{+2}(\cdot)$ при $l=0, 2$ и $X_{-1}(\cdot)$ при $l=1$.

Наложение спектров при уменьшении частоты дискретизации отсутствует, если спектр входного сигнала занимает только одну из полос частот

$$r \frac{\pi}{mT} \leq \omega \leq (r+1) \frac{\pi}{mT}, \quad r = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.39)$$

Условие (2.39) соответствует обобщенной теореме Котельникова, устанавливающей связь между шириной спектра и частотой дискретизации сигнала [1.5].

Выражение для спектра выходного сигнала КЧД (2.35) с помощью теоремы смещения преобразуется к виду [2.11]

$$X^*(e^{i\omega m T}) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_l(nT) e^{-i\omega n T}, \quad (2.40)$$

где $x_l(nT) = x(nT) \exp(-i2\pi \frac{l}{m} n)$.

Формуле (2.40) соответствует эквивалентная схема КЧД, показанная на рис. 2.19.

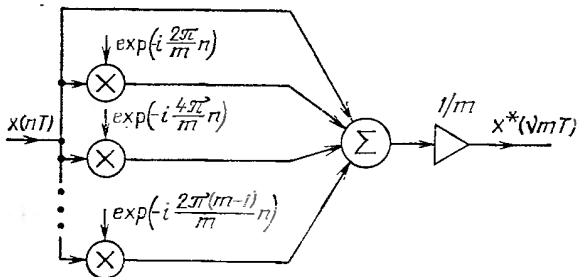


Рис. 2.19

2.5.4. Простейшие восходящие дискретные системы

Простейшая восходящая дискретная система представлена на рис. 2.20,а. Входной дискретный сигнал $x(vT) = x(vmT)$, $v=0, 1, 2, \dots$, с интервалом дискретизации $T' = mT$ поступает на ЭЧД, увеличивающий частоту дискретизации в m раз по алгоритму (2.30). Выходной сигнал $y(nT)$, $n=0, 1, 2, \dots$, ПВДС получается в результате обработки сигнала $x^*(nT)$ дискретным фильтром с передаточной функцией $H(z)$, $z = \exp(i\omega T)$, и импульсной характеристикой $h_i = h(iT)$, работающим на «высокой» частоте дискретизации выходного сигнала (с интервалом дискретизации T).

Z -преобразования выходного и входного сигналов ПВДС связаны соотношением

$$Y(z) = X(z^m) H(z). \quad (2.41)$$

Эквивалентная схема (ЭС) ПВДС показана на рис. 2.20,б. Входным сигналом ЭС является входной сигнал ПВДС $x(vT')$ с интервалом дискретизации

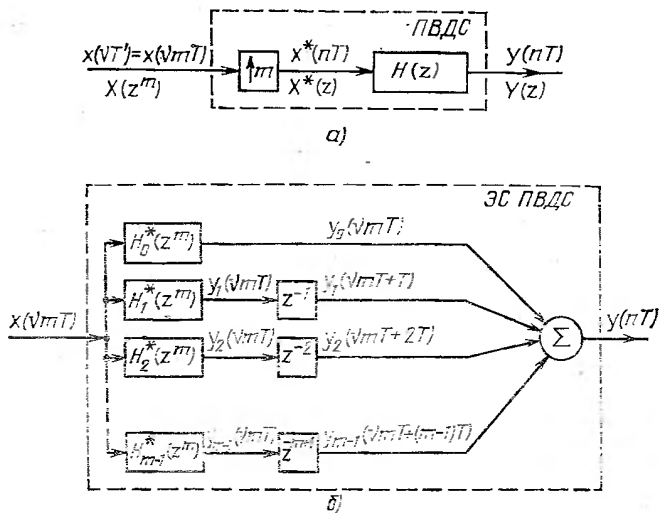


Рис. 2.20

$T' = mT$. Эквивалентная схема содержит m параллельных ветвей, в каждой из которых находится дискретный фильтр с передаточной функцией $H^*_k(z^m)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, работающий с интервалом дискретизации входного сигнала T' . Выходные сигналы фильтров представляют собой дискретные последовательности с интервалом дискретизации T' . На выходе дискретного фильтра k -й ($k = 0, 1, \dots, m-1$) ветви находится элемент задержки на k интервалов T (интервалов дискретизации выходного сигнала ПВДС). Сдвинутые относительно друг друга последовательности $y_k(vmT + kT)$ складываются в сумматоре, образуя выходной сигнал ПВДС $y(nT)$.

Преобразование ПВДС в ЭС (см. рис. 2.20) осуществляется следующим образом [2.12, 2.9]. Выходную последовательность ПВДС $y(nT)$ с периодом дискретизации T можно представить в виде суммы m последовательностей $y_k(vmT + kT)$ с периодом дискретизации $T' = mT$, сдвинутых относительно друг друга на интервал T (рис. 2.21):

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k y_k(vT' + kT) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k y_k(vmT + kT), \quad (2.42)$$

где $v = [n/m]$; $\beta_k = 1$ при $k = n \pmod{m}$ и $\beta_k = 0$ при других k ; $[A]$ означает целую часть числа A ; $A \pmod{B}$ означает число A по модулю B .

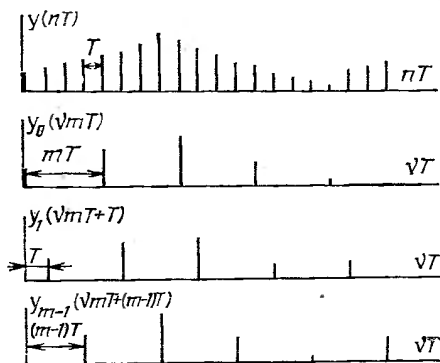


Рис. 2.21

Таким образом, отсчет последовательности $y(nT)$ для фиксированного n определяется только одной из последовательностей $y_k(vmT + kT)$ при $k = n \pmod{m}$.

Поскольку

$$y(nT) = \sum_{l=0}^n h_l x^*(nT - lT), \quad (2.43)$$

где h_l — отсчеты импульсной характеристики фильтра ПВДС с передаточной функцией $H(z)$, а $y_k(vmT + kT) = y((vm+k)T)$, из (2.43) имеем

$$y_k(vmT + kT) = \sum_{l=0}^{vm+k} h_l x^*(vmT - (l-k)T). \quad (2.44)$$

Так как $x^*(nT) \neq 0$ только при $l=k, m+k, 2m+k, \dots$, а $x^*(vmT) = x(vmT)$, из (2.44) получаем

$$y_k(vmT + kT) = \sum_{j=0}^v h_{k+jm} x((v-j)mT). \quad (2.45)$$

Уравнение (2.45) можно интерпретировать следующим образом: каждая из последовательностей $y_k(vmT + kT)$ есть результат фильтрации входного сигнала ПВДС с дискретным фильтром с импульсной характеристикой $h^*_{kj} = h_{k+jm}$, $j=0, 1, 2, \dots$

Уравнение, описывающее ЭС во временной области, получается после подстановки (2.45) в (2.42):

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k \sum_{j=0}^v h_{k+jm} x((v-j)mT), \quad (2.46)$$

где $v = [n/m]$; $\beta_k = 1$ при $k = (n) \bmod m$ и $\beta_k = 0$ при других k . Уравнению (2.46) соответствует ЭС ПВДС (см. рис. 2.20, б).

Отсчеты импульсной характеристики h^*_{kj} , $j=0, 1, 2, \dots$, дискретного фильтра в k -й ($k=0, 1, \dots, m-1$) ветви ЭС есть отсчеты импульсной характеристики h_l , $l=0, 1, 2, \dots$, фильтра в исходной ПВДС (см. рис. 2.20, а), взятые через $m-1$ отсчет:

$$h^*_{kj} = h_{k+jm}, \quad k=0, 1, \dots, m-1; \quad j=0, 1, 2, \dots$$

На рис. 2.22 показаны отсчеты импульсной характеристики h_l фильтра ПВДС ($m=4$) и отсчеты импульсных характеристик фильтров h^*_{kj} в четырех параллельных ветвях ЭС.

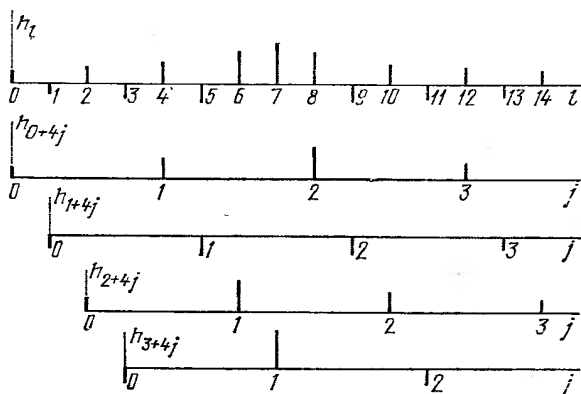


Рис. 2.22

Передаточная функция фильтра в k -й параллельной ветви ЭС определяется как

$$H^*_k(z^m) = z^k \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} e^{i2\pi \frac{l}{m} k} H\left(z e^{i2\pi \frac{l}{m}}\right), \quad (2.47)$$

где $H(z)$ — передаточная функция фильтра в исходной ПВДС.

Пример 2.19. Рассматривается ПВДС (см. рис. 2.20,а), содержащая ЭЧД, увеличивающий частоту дискретизации входного сигнала в $m=4$ раза, и дискретный фильтр, построенный по нерекурсивной структуре с передаточной функцией $H(z) = \sum_{p=0}^{14} h_p z^{-p}$.

Эквивалентная схема ПВДС (см. рис. 2.14,б) содержит четыре параллельные ветви ($k=0, 1, 2, 3$). Уравнение, описывающее ЭС и получаемое из (2.46), имеет вид

$$y(nT) = \sum_{k=0}^3 h_k \sum_{j=0}^v h_{k+3j} x((v-j)3T).$$

Передаточные функции фильтров в ветвях ЭС определим из (2.47). Для фильтра в первой ветви ($k=0$) имеем

$$H_0^*(z^4) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^3 H \left(z e^{i 2 \pi \frac{l}{4}} \right) = \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{14} h_p z^{-p} \sum_{l=0}^3 e^{-i 2 \pi \frac{l}{4} p}.$$

Поскольку

$$\sum_{l=0}^3 e^{-i 2 \pi \frac{l}{4} p} = \begin{cases} 4 & \text{при } p=0, 4, 8, \dots; \\ 0 & \text{при других } p, \end{cases}$$

получаем

$$H_0^*(z^4) = \sum_{j=0}^3 h_{4j} z^{-4j}.$$

Для фильтра во второй ветви ($k=1$)

$$\begin{aligned} H_1^*(z^4) &= z \frac{1}{4} \sum_{l=0}^3 e^{i 2 \pi \frac{l}{4}} H \left(z e^{i 2 \pi \frac{l}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{14} h_p z^{-p+1} \sum_{l=0}^3 e^{i 2 \pi \frac{l}{4} (p-1)} = \sum_{j=0}^3 h_{1+4j} z^{-4j}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются передаточные функции фильтров в третьей и четвертой ветвях ($k=2$ и $k=3$);

$$H_2^*(z^4) = \sum_{j=0}^3 h_{2+4j} z^{-4j}; \quad H_3^*(z^4) = \sum_{j=0}^3 h_{3+4j} z^{-4j}.$$

При нерекурсивной структуре исходного фильтра в ПВДС, для которой отсчеты импульсной характеристики являются коэффициентами передаточной функции, передаточные функции фильтров в ветвях ЭС легко определяются и без использования (2.47) по формуле

$$H_k(z^m) = \sum_{j=0}^p h_{k+jm} z^{-mj}, \quad p = [N/m],$$

где N — порядок передаточной функции исходного фильтра ПВДС (см. рис. 2.22).

При рекурсивной структуре исходного фильтра в ПВДС передаточные функции фильтров в ветвях ЭС определяются либо по (2.47), либо с помощью алгоритма, описанного в [2.12].

Модификации эквивалентной схемы ПВДС [2.8] показаны на рис. 2.23. В структуре на рис. 2.23,а введение $(m-1)$ сумматора на два входа приводит к использованию элементов задержек только на один интервал дискретизации T . В структуре на рис. 2.23,б (в коммутационной структуре) коммутатор играет роль множителя β_k в (2.46), подключая последовательно через интервал T выходы фильтров в ветвях ЭС к выводу схемы, начиная с ветви для $k=0$.

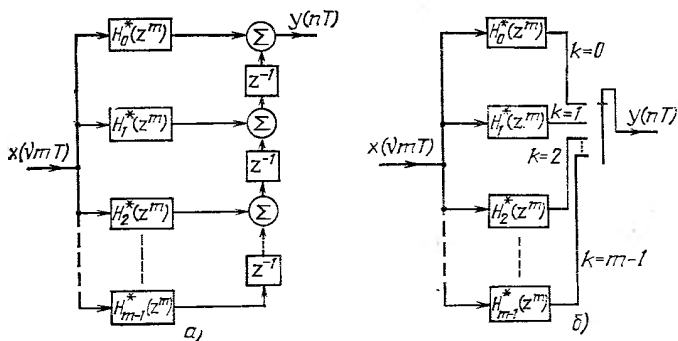


Рис. 2.23

2.5.5. Многократные восходящие дискретные системы

Многократная восходящая дискретная система, состоящая из двух подсистем, показана на рис. 2.24. Первая подсистема состоит из ЭЧД, увеличивающего частоту дискретизации входного сигнала $x(lm_1m_2T)$, $l=0, 1, 2, \dots$, МВДС

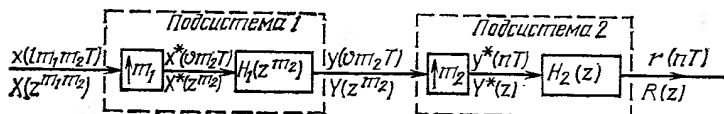


Рис. 2.24

в m_1 раз, и дискретного фильтра с передаточной функцией $H_1(z^{m_2}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{1,j} z^{-m_2 j}$ ($z = \exp(i\omega T)$), где $a_{1,j}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра, работающего с интервалом дискретизации $m_2 T$. Вторая подсистема состоит из ЭЧД, увеличивающего частоту дискретизации выходного сигнала $y(v m_2 T)$, $v=0, 1, 2, \dots$, первой подсистемы в m_2 раз, и дискретного фильтра с передаточной функцией $H_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2,j} z^{-j}$ ($z = \exp(i\omega T)$), где $a_{2,j}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра, работающего с интервалом дискретизации T .

Z-преобразования выходного и входного сигналов МВДС связаны соотношением

$$R(z) = X(z^{m_1 m_2}) H_1(z^{m_2}) H_2(z). \quad (2.48)$$

Спектры выходного и входного сигналов МВДС связаны соотношением, получаемым из (2.48) путем подстановки $z = \exp(i\omega T)$:

$$R(e^{i\omega T}) = X(e^{i\omega m_1 m_2 T}) H_1(e^{i\omega m_2 T}) H_2(e^{i\omega T}).$$

Эквивалентная схема I (ЭСI), сводящая МВДС к ПВДС, показана на рис. 2.25. Она состоит из ЭЧД, увеличивающего частоту дискретизации входного сигнала $x(lm_1 m_2 T)$ МВДС в $m = m_1 m_2$ раз, и эквивалентного фильтра H^* , работающего на частоте дискретизации

выходного сигнала МВДС. Передаточная функция эквивалентного фильтра в ЭСИ имеет вид

$$\frac{x(lm_1 m_2 T)}{X(z^{m_1 m_2})} \rightarrow \boxed{m_1 m_2} \xrightarrow{p(\pi T)} \boxed{H^*(z)} \xrightarrow{r(\pi T)} \frac{r(\pi T)}{R(z)}$$

Рис. 2.25

$$H^*(z) = H_1(z^{m_2}) H_2(z). \quad (2.49)$$

Импульсная характеристика $h^*_l = h^*(lT)$ эквивалентного фильтра в ЭСИ определяется как

$$h^*_l = \sum_{j=0}^l a^*_{1,j} a_{2, l-j}, \quad (2.50)$$

где $a_{2, n}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра второй подсистемы, а

$$a^*_{1,j} = \begin{cases} a_{1, j/m_2} & \text{при } j=0, m_2, 2m_2; \\ 0 & \text{при других } j, \end{cases} \quad (2.51)$$

где $a_{1, n}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра первой подсистемы. Уравнение (2.50) получается из (2.49) с использованием теоремы свертки, если передаточную функцию $H_1(z^{m_2})$ фильтра первой подсистемы представить в виде

$$H_1(z^{m_2}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i} z^{-m_2 i} = \sum_{j=0}^{\infty} a^*_{1,j} z^{-j},$$

где $a^*_{1, j}$ определяются (2.51).

Таким образом, импульсная характеристика эквивалентного фильтра в ЭСИ, работающего на частоте дискретизации выходного сигнала МВДС, представляет собой свертку импульсной характеристики $a_{2, n}$, $n=0, 1, 2, \dots$, фильтра второй подсистемы и вспомогательной импульсной характеристики $a^*_{1, n}$, $n=0, 1, 2, \dots$, образуемой из импульсной характеристики $a_{1, n}$ фильтра первой подсистемы по алгоритму (2.51), т. е. путем ввода (m_2-1) -го нулевого отсчета между каждой парой отсчетов характеристики $a_{1, n}$.

Пример 2.20. Рассмотрим МВДС (см. рис. 2.24) при $m_1 = m_2 = 3$, причем фильтры подсистем являются однородными НФ (все коэффициенты однородного НЦФ равны 1) с передаточными функциями $H_1(z^3) = \sum_{j=0}^2 z^{-3j}$ и $H_2(z) = \sum_{j=0}^2 z^{-j}$. Импульсные характеристики фильтров $a_{1, n} = a_{2, n} = \{1, 1, 1\}$. Вспомогательная импульсная характеристика в соответствии с (2.51) равна $a^*_{1, n} = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1\}$. Импульсная характеристика эквивалентного фильтра ЭСИ определяется (2.50) и равна $h^*_l = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

Эквивалентная схема II (ЭСII), сводящая МВДС к ЭС ПВДС (см. 2.5.4 и рис. 2.20,б), показана на рис. 2.26. Она получается в результате преобразования ЭСИ МВДС, аналогичного преобразованию ПВДС в ЭС, описанному в 2.5.4.

Эквивалентная схема ИМВДС содержит $m = m_1 m_2$ параллельных ветвей, в каждой из которых находится дискретный фильтр с передаточной функцией

$$H_k^*(z^{m_1 m_2}) = z^k \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{l=0}^{m_1 m_2 - 1} e^{i 2 \pi \frac{l}{m_1 m_2} k} H^* \left(z e^{i 2 \pi \frac{l}{m_1 m_2}} \right),$$

где $H^*(z)$ — передаточная функция эквивалентного фильтра в ЭСЛ, определяемая (2.49), и импульсной характеристикой $h^*_{j,k}$, отсчеты которой есть отсчеты импульсной характеристики $h^*_{k,l}$ эквивалентного фильтра в ЭСЛ, взятые через $m_1 m_2 - 1$ отсчет ($h^*_{k,j} = h^*_{k+j m_1 m_2}$, $j=0, 1, \dots$; $k=0, 1, \dots, m_1 m_2 - 1$).

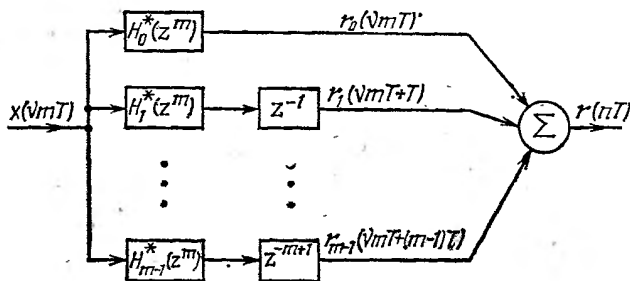


Рис. 2.26

Уравнение, описывающее ЭСЛ МВДС во временной области, имеет вид

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{m_1 m_2 - 1} \beta_k \sum_{j=0}^{\nu} h^*_{k+j m_1 m_2} x((\nu - j) m_1 m_2 T),$$

где $\nu = [n/m]$; $\beta_k = 1$ при $k = n \pmod{m_1 m_2}$ и $\beta_k = 0$ при других k ; $[A]$ означает целую часть числа A .

Модификации ЭСЛ МВДС имеют вид, аналогичный показанному на рис. 2.23.

Многokратная восходящая дискретная система, состоящая из p подсистем, показана на рис. 2.27. Каждая k -я ($k=1, 2, \dots, p$) подсистема содержит ЭЧД, увеличивающий частоту дискретизации входного сигнала k -й подсистемы в m_k раз, и дискретный фильтр с передаточной функцией $H_k(z^{m_k/\omega_k})$, где

$$m = \prod_{k=1}^p m_k, \text{ а } \omega_k = \prod_{k=1}^x m_k.$$

Z -преобразования выходного и входного сигналов МВДС связаны соотношением

$$Y(z) = X(z^m) \prod_{k=1}^p H_k(z^{m_k/\omega_k}).$$

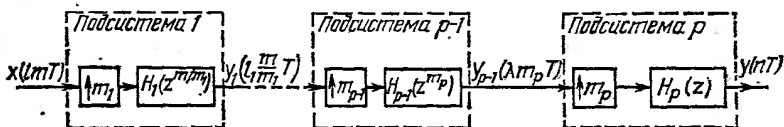


Рис. 2.27

Спектр выходного сигнала МВДС определяется как

$$Y(e^{i\omega T}) = X(e^{i\omega m T}) \prod_{\kappa=1}^p H_{\kappa} \left(e^{i\omega \frac{m}{\omega_{\kappa}} T} \right).$$

Передачная функция эквивалентного фильтра в ЭСИ МВДС определяется аналогично (2.49):

$$H^*(z) = \prod_{\kappa=1}^p H_{\kappa}(z^{m/\omega_{\kappa}}).$$

Импульсная характеристика h_l^* , $l=0, 1, 2, \dots$, эквивалентного фильтра в ЭСИ МВДС определяется аналогично (2.50) как свертка вспомогательных импульсных характеристик $h_{\kappa, j}^*$, $j=0, 1, 2, \dots$; $\kappa=1, 2, \dots, p$, где

$$h_{\kappa, j}^* = \begin{cases} h_{\kappa, j\omega_{\kappa}/m} & \text{при } j=0, m/\omega_{\kappa}, 2m/\omega_{\kappa}, \dots; \\ 0 & \text{при других } j, \end{cases}$$

а $h_{\kappa, n}$ — импульсная характеристика фильтра κ -й подсистемы ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$h_l^* = h_{p, j^*} h_{p-1, j^*}^* \dots h_{1, j^*}^*, \\ l = j = 0, 1, 2, \dots$$

Передачная функция фильтра в k -й ($k=0, 1, \dots, m-1$) ветви ЭСИ определяется аналогично (2.47), где в качестве $H(\cdot)$ в правой части уравнения надо рассматривать передачную функцию эквивалентного фильтра в ЭСИ МВДС.

2.5.6. Простейшие нисходящие дискретные системы

Простейшая нисходящая дискретная система представлена на рис. 2.28,а. Входной дискретный сигнал $x(nT)$ с периодом дискретизации T обрабатывается дискретным фильтром с передачной функцией $H(z)$ ($z = \exp(i\omega T)$) и импульсной характеристикой $h_l = h(lT)$, $l=0, 1, 2, \dots$. На выходе фильтра стоит КЧД, уменьшающий частоту дискретизации выходного сигнала фильтра $y(nT)$ в m раз, в результате чего формируется выходной сигнал $y^*(vT) = y^*(vmT)$, $v=0, 1, 2, \dots$, с периодом дискретизации $T' = mT$.

Z-преобразования выходного и входного сигналов ПНДС связаны соотношением

$$Y^*(z^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} X \left(z e^{i2\pi \frac{i}{m}} \right) H \left(z e^{i2\pi \frac{i}{m}} \right). \quad (2.52)$$

Действительно, $Y(z) = X(z)H(z)$ и, используя (2.34), получаем (2.52).

Спектр выходного сигнала ПНДС определяется как

$$Y^*(e^{i\omega T}) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} X \left(e^{i\omega T + i2\pi \frac{i}{m}} \right) H \left(e^{i\omega T + i2\pi \frac{i}{m}} \right). \quad (2.53)$$

Выходная последовательность $y^*(vmT)$ определяется уравнением, описывающим ПНДС во временной области:

$$y^*(\nu T') = y^*(\nu m T) = \sum_{j=0}^{\nu m} h_j x(\nu m T - j T),$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.54)$$

где h_j — импульсная характеристика дискретного фильтра ПНДС ($j=0, 1, 2, \dots$).

Эквивалентная схема ПНДС показана на рис. 2.28, б. Входным сигналом ЭС является входной сигнал ПНДС $x(nT)$ с периодом дискретизации T . Схема содержит m параллельных ветвей обработки сигнала. В k -й ($k=0, 1, \dots, m-1$) ветви находятся последовательно включенные элемент задержки на k интервалов T (периодов дискретизации входного сигнала ПНДС), КЧД, уменьшающий

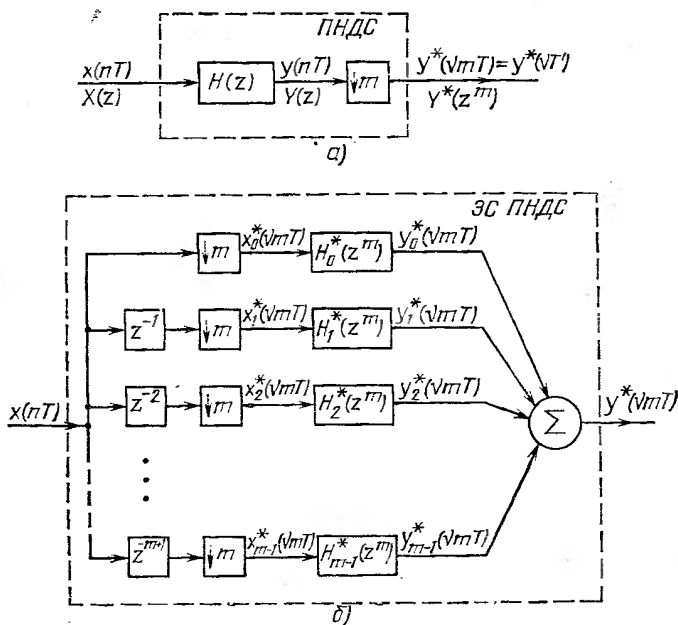


Рис. 2.28

частоту дискретизации входного сигнала в m раз, и дискретный фильтр с передаточной функцией $H_k^*(z^m)$, работающий с интервалом дискретизации выходного сигнала T' . Выходные сигналы фильтров складываются в сумматоре, образуя выходной сигнал $y^*(\nu m T)$ ПНДС. На рис. 2.29 показаны отсчеты входного сигнала $x(nT)$ с интервалом дискретизации T и входных сигналов фильтров $x_k^*(\nu m T)$, $m=3$, $k=0, 1, 2$, с интервалом дискретизации $T'=mT$, полученные уменьшением частоты дискретизации в 3 раза задержанной на k интервалов T последовательности $x(nT)$. Отметим, что отсчеты последовательностей $x_k^*(\nu m T)$ для фиксированного значения ν поступают на входы фильтров в один и тот же момент времени $t=\nu m T$.

Преобразование ПНДС в ЭС (см. рис. 2.28) осуществляется путем приведения уравнения (2.54) к виду

$$y^*(v m T) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^v h_{k+jm} x((v-j) m T - k T). \quad (2.55)$$

аналогично тому, как было выполнено для ПВДС.

Уравнение (2.55), описывающее ЭС ПНДС во временной области, можно интерпретировать следующим образом: выходная последовательность $y^*(v m T)$ ПНДС есть сумма m последовательностей $y_k(v m T)$, $k=0, 1, \dots, m-1$, каждая из которых есть, в свою очередь, результат фильтрации последовательности $x^*_k(v m T) = x(n m T - k T)$ дискретным фильтром с импульсной характеристикой $h^*_{k,j} = h_{k+jm}$, $j=0, 1, \dots$

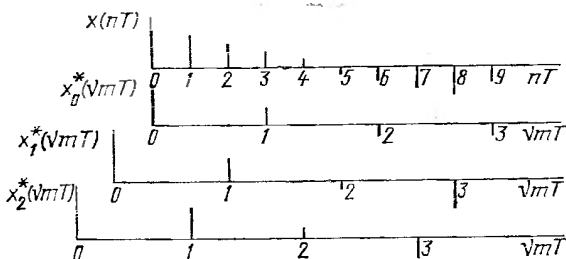


Рис. 2.29

Отсчеты импульсной характеристики $h^*_{k,j}$, $j=0, 1, 2, \dots$, дискретного фильтра в k -й ($k=0, 1, \dots, m-1$) ветви ЭС есть отсчеты импульсной характеристики h_l , $l=0, 1, 2, \dots$, фильтра в исходной ПНДС (см. рис. 2.28,а), взятые через $m-1$ отсчет:

$$h^*_{k,j} = h_{k+jm}, \\ k=0, 1, \dots, m-1; j=0, 1, 2, \dots$$

Передаточная функция фильтра в k -й параллельной ветви ЭС определяется аналогично ЭС ПВДС по формуле (2.47).

Простейшая НДС не инвариантна к временному сдвигу и имеет m различных импульсных характеристик $h^*_{k,j}$ (реакций системы на входную последовательность вида δ -функции). Это видно из (2.54) и рис. 2.28,б.

Модификации эквивалентной схемы ПНДС аналогичны модификациям ЭС ПВДС (см. рис. 2.23) и описаны в [2.8].

2.5.7. Многократные нисходящие дискретные системы

Многократная нисходящая дискретная система, состоящая из двух подсистем, показана на рис. 2.30. Первая подсистема содержит дискретный фильтр с передаточной функцией $H_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{1,j} z^{-j}$ (где $z = \exp(i\omega T)$ и $a_{1,j}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра), работающий с интервалом дискретизации T , на выходе которого стоит КЧД, уменьшающий частоту дискретизации выходного сигнала в m_1 раз. Вторая подсистема содержит фильтр с пе-

редаточной функцией $H_2(z^{m_1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2,j} z^{-m_1 j}$ (где $a_{2,j}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра), работающий с интервалом дискретизации $m_1 T$, на выходе которого стоит КЧД, уменьшающий частоту дискретизации в m_2 раз. В результате формируется выходной сигнал МНДС $r^*(nT) = r^*(n m_1 m_2 T)$ с периодом дискретизации $T' = m_1 m_2 T$.

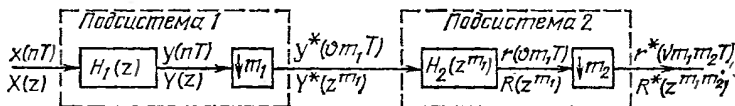


Рис. 2.30

Z-преобразования выходного и входного сигналов МНДС (см. рис. 2.30) связаны соотношением

$$R^*(z^{m_1 m_2}) = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{\mu=0}^{m_2-1} \sum_{\rho=0}^{m_1-1} X \left(z e^{i 2 \pi \frac{\mu + m_2 \rho}{m_1 m_2}} \right) H_1 \left(z e^{i 2 \pi \frac{\mu + m_2 \rho}{m_1 m_2}} \right) \times \\ \times H_2 \left(z^{m_1} e^{i 2 \pi \frac{\mu}{m_2}} \right). \quad (2.56)$$

Спектры выходного и входного сигналов МНДС связаны соотношением, получаемым из (2.56) подстановкой $z = \exp(i \omega T)$:

$$R^*(e^{i \omega m_1 m_2 T}) = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{\mu=0}^{m_2-1} \sum_{\rho=0}^{m_1-1} X \left(e^{i \omega T + i 2 \pi \frac{\mu + m_2 \rho}{m_1 m_2}} \right) \times \\ \times H_1 \left(e^{i \omega T + i 2 \pi \frac{\mu + m_2 \rho}{m_1 m_2}} \right) H_2 \left(e^{i \omega m_1 T + i 2 \pi \frac{\mu}{m_2}} \right).$$

Эквивалентная схема ЭСИ, сводящая МНДС к простейшей НДС, показана на рис. 2.31. Схема состоит из эквивалентного фильтра H^* , работающего на частоте дискретизации входного сигнала МНДС, и КЧД, уменьшающего частоту дискретизации выходного сигнала $\rho(nT)$ эквивалентного фильтра в $m = m_1 m_2$ раз.

Передаточная функция эквивалентного фильтра в ЭСИ имеет вид

$$H^*(z) = H_1(z) H_2(z^{m_1}). \quad (2.57)$$

Импульсная характеристика $h^*_l = h^*(lT)$ эквивалентного фильтра в ЭСИ определяется как

$$h^*_l = \sum_{j=0}^l a^*_{2,j} a_{1,l-j}, \quad (2.58)$$

где $a_{1,n}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра первой подсистемы;

$$a^*_{2,j} = \begin{cases} a_{2,j/m_1} & \text{при } j=0, m_1, 2m_1, \dots; \\ 0 & \text{при других } j, \end{cases} \quad (2.59)$$

где $a_{2, n}$ — отсчеты импульсной характеристики фильтра второй подсистемы.

Уравнение (2.58) определяет импульсную характеристику h^*_l эквивалентного фильтра в ЭС, работающего на частоте дискретизации входного сигнала МНДС, как свертку импульсной характеристики $a_{1, n}$, $n=0, 1, 2, \dots$, фильтра первой подсистемы и вспомогательной импульсной характеристики $a^*_{2, n}$, $n=0, 1, 2, \dots$, образуемой из импульсной характеристики $a_{2, n}$ фильтра второй подсистемы по алгоритму (2.59), т. е. путем ввода (m_1-1) -го нулевого отсчета между каждой парой отсчетов характеристики $a_{2, n}$.

Алгоритм определения импульсной характеристики ЭС МНДС аналогичен соответствующему алгоритму для МВДС и может иллюстрироваться примером 2.20.

Выходная последовательность $r^*(vm_1m_2T)$ определяется уравнением, описывающим ЭС МНДС во временной области:

$$r^*(vm_1m_2T) = \sum_{l=0}^{v m_1 m_2} h^*_l x^*_l(v m_1 m_2 T - lT), \quad v = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.60)$$

где h^*_l , $l=0, 1, 2, \dots$, — импульсная характеристика эквивалентного фильтра, определяемая (2.58).

Пример 2.21. Рассмотрим качественный пример, показывающий, как преобразуется спектр входного сигнала в МНДС (см. рис. 2.30), использующей не-

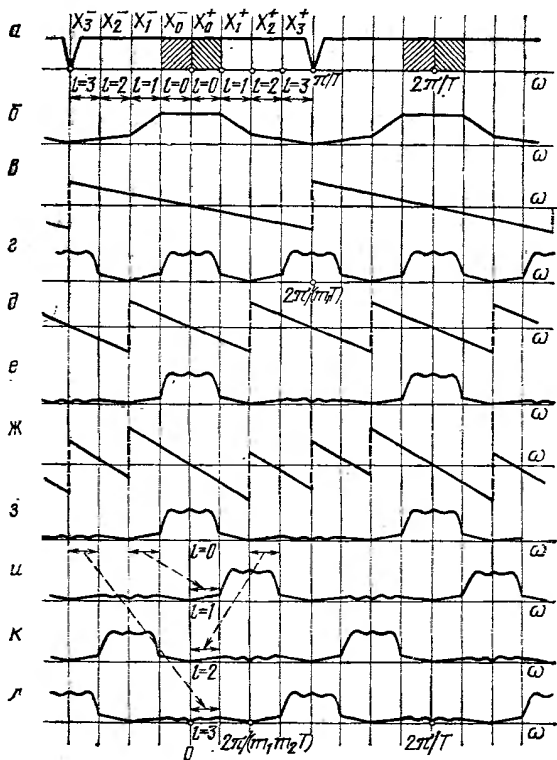


Рис. 2.32

рекурсивные фильтры с передаточными функциями $H_1(z) = \sum_{j=0}^{N_1} a_{1,j} z^{-j}$ и $H_2(z') =$

$= \sum_{j=0}^{N_2} a_{2,j} (z')^{-j}$ (где $z' = z^{m_1}$) и линейными фазовыми характеристиками при $m_1 = 2$ и $m_2 = 2$. Подобные системы могут решать, например, задачу выделения из сигнала с широким спектром, занимающим диапазон $[0, \pi/T]$, узкополосного сигнала с шириной спектра $\pi/m_1 m_2 T$ с одновременным понижением частоты дискретизации выходного сигнала по отношению ко входу в $m = m_1 m_2$ раз (см. разд. 7). На рис. 2.32,а условно показан модуль спектра входного сигнала $x(nT)$ системы (см. рис. 2.30). Спектр входного сигнала периодичен с частотой $\omega_d = 2\pi/T$. Амплитудно-частотная $A_1(\omega)$ и фазочастотная $\varphi_1(\omega)$ характеристики фильтра первой подсистемы, периодичные с той же частотой $\omega_d = 2\pi/T$, показаны на рис. 2.32,б и в соответственно. Для фильтра второй подсистемы $A_2(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ изображены на рис. 2.32,г и д соответственно. Эти характеристики периодичны с частотой дискретизации $\omega'_d = 2\pi/(m_1 T) = \pi/T$.

Преобразуем МНДС в ЭСИ (см. рис. 2.31). Передаточная функция эквивалентного фильтра в соответствии с (2.57) $H^*(z) = \sum_{j=0}^{N_1} a_{1,j} z^{-j} \sum_{i=0}^{N_2} a_{2,i} z^{-m_1 i}$, а импульсная характеристика h^* , определяемая (2.58), есть свертка последовательностей $\{a_{1,0}; a_{1,1}; \dots; a_{1,N_1}\}$ и $\{a_{2,0}; 0; a_{2,1}; 0; \dots; a_{2,N_2-1}; 0; a_{2,N_2}\}$. На рис. 2.32,е и ж изображены АЧХ $A^*(\omega)$ и ФЧХ $\varphi^*(\omega)$ эквивалентного фильтра. Из (2.57) видно, что $A^*(\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega)$, а $\varphi^*(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$. В результате фильтрации входного сигнала эквивалентным фильтром его выходная последовательность $p(nT)$ имеет спектр, определяемый АЧХ и ФЧХ эквивалентного фильтра $P(e^{i\omega T}) = X(e^{i\omega T}) H(e^{i\omega T})$. Так, если $|X(e^{i\omega T})| = \text{const}$ для $\omega \in [0, \pi/T]$, модуль спектра $P(e^{i\omega T})$ на выходе эквивалентного фильтра имеет ту же форму, что и $A^*(\omega)$.

В результате уменьшения частоты дискретизации выходного сигнала эквивалентного фильтра в $m = m_1 m_2 = 4$ раза спектр выходного сигнала системы в основной полосе частот $\omega \in [0, \pi/(4T)]$ в соответствии с (2.36) есть сумма четырех составляющих:

$$R(e^{i\omega T}) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^3 P_l^{\pm} \left(e^{i\omega T + i(-1)^l \frac{2\pi}{4} \left[\frac{l+1}{2} \right]} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ P_0^+ (e^{i\omega T}) + P_1^- \left(e^{i\omega T - i \frac{\pi}{2}} \right) + \right.$$

$$\left. + P_2^+ \left(e^{i\omega T + i \frac{\pi}{2}} \right) + P_3^- (e^{i\omega T - i\pi}) \right\}.$$

Составляющую спектра при $l=0$ можно рассматривать как спектр полезного сигнала. Она представляет собой составляющую спектра входного сигнала $X_0(e^{i\omega T})$ [см. (2.37)], измененную в соответствии с АЧХ и ФЧХ эквивалентного фильтра. Модуль спектра составляющей $P_0(e^{i\omega T})$ показан на рис. 2.32,з. Составляющие спектра $P_{-1}(\cdot)$, $P_{+2}(\cdot)$ и $P_{-3}(\cdot)$ следует рассматривать как помехи, искажающие спектр $P_0(e^{i\omega T})$ полезного сигнала. На рис. 2.32, и, к, л показаны соответственно модули спектров $P_{-1}(\cdot)$, $P_{+2}(\cdot)$ и $P_{-3}(\cdot)$. В полосу частот попадают составляющие $X_{-1}(\cdot)$, $X_{+2}(\cdot)$ и $X_{-3}(\cdot)$ спектра входного сигнала, измененные в соответствии с АЧХ и ФЧХ эквивалентного фильтра на данных интервалах (см. рис. 2.32).

Эквивалентная схема ЭСИ МНДС, сводящая МНДС к ЭС ПНДС (см. 2.5.6), получается в результате преобразования уравнения (2.60), описывающего ЭСИ МНДС (т. е. простейшую НДС), к виду

$$r^*(v m_1 m_2 T) = \sum_{k=0}^{m_1 m_2 - 1} \sum_{j=0}^v h_{k+j m_1 m_2}^* x((v-j) m_1 m_2 T - kT) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_1 m_2 - 1} \sum_{j=0}^v h_{k,j}^* x((v-j) m_1 m_2 T - kT).$$

В качестве ЭСИ МНДС можно рассматривать схему, показанную на рис. 2.28, б, где $m = m_1 m_2$.

Для определения передаточной функции $H_{k,j}^*(z^{m_1 m_2})$ фильтра в k -й ($k = 0, 1, \dots, m_1 m_2 - 1$) параллельной ветви ЭСИ необходимо вначале определить передаточную функцию $H^*(z)$ эквивалентного фильтра в ЭСИ по (2.57). Тогда $H_{k,j}^*(z^{m_1 m_2})$ определяется по формуле (2.46), в которой $m = m_1 m_2$, а в качестве $H(\cdot)$ надо рассматривать $H^*(z)$ — передаточную функцию эквивалентного фильтра в ЭСИ МНДС.

Отсчеты импульсной характеристики $h_{k,j}^*$, $j = 0, 1, 2, \dots$, дискретного фильтра в k -й ($k = 0, 1, \dots, m_1 m_2 - 1$) ветви есть отсчеты импульсной характеристики $h_{k,l}^*$, $l = 0, 1, 2, \dots$, эквивалентного фильтра в ЭСИ, определяемой (2.58), взятые через $m_1 m_2 - 1$ отсчет ($h_{k,j}^* = h_{k+j m_1 m_2}^*$, $j = 0, 1, 2, \dots$).

Многokратная нисходящая дискретная система, состоящая из p подсистем, показана на рис. 2.33. Каждая κ -я ($\kappa = 1, 2, \dots, p$) подсистема содержит дискретный фильтр с передаточной функцией $H_{\kappa}(z^{m/\mu_{\kappa}})$, где $m = \prod_{\kappa=1}^p m_{\kappa}$, $\mu_{\kappa} = \prod_{k=\kappa}^p m_k$, и КЧД, уменьшающий частоту дискретизации выходного сигнала фильтра κ -й подсистемы в m_{κ} раз.

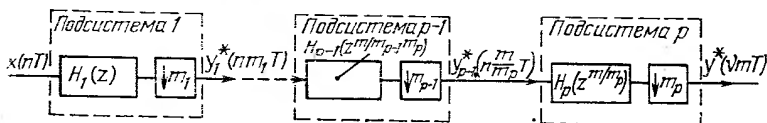


Рис. 2.33

Передаточная функция эквивалентного фильтра в ЭСИ МНДС определяется аналогично (2.57):

$$H^*(z) = \prod_{\kappa=1}^p H_{\kappa}(z^{m/\mu_{\kappa}}).$$

Импульсная характеристика $h_{k,l}^*$, $l = 0, 1, 2, \dots$, эквивалентного фильтра в ЭСИ МНДС определяется аналогично (2.58) как свертка вспомогательных импульсных характеристик $h_{\kappa,j}^*$:

$$h_l^* = h_{1,j_1}^* h_{2,j_2}^* \dots h_{p,j_p}^*,$$

$$l = j = 0, 1, 2, \dots; \kappa = 1, 2, \dots, p, \text{ где}$$

$$h_{\kappa,j}^* = \begin{cases} h_{\kappa,j} \mu_{\kappa} / m & \text{при } j=0, \quad \frac{m}{\mu_{\kappa}}, 2 \frac{m}{\mu_{\kappa}}, \dots; \\ 0 & \text{при других } j; \end{cases}$$

$h_{\kappa,j}^*$ — импульсная характеристика фильтра κ -й подсистемы.

Передаточная функция фильтра в k -й ($k=0, 1, \dots, m-1$) ветви ЭСИ определяется аналогично (2.46), где в качестве $H(\cdot)$ в правой части уравнения надо рассматривать передаточную функцию эквивалентного фильтра в ЭСИ МНДС.

3. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

3.1. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

3.1.1. Основные определения

Под системой счисления (СС) понимается способ представления чисел с помощью символов, имеющих определенное количественное значение.

Позиционной (ПСС) называется система счисления, в которой количественное значение каждого символа определяется еще и местом (позицией), занимаемым данным символом в записи числа.

Основанием p позиционной СС называется число различных символов, используемых в данной ПСС.

В табл. 3.1 приведены символы, используемые в двоичной ($p=2$), восьмеричной ($p=8$), десятичной ($p=10$) и шестнадцатеричной ($p=16$) системах счисления.

Таблица 3.1

Основание СС	Символы
2	0, 1
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, А, В, С, D, E, F

Любое число A можно представить в виде разложения по степеням основания ПСС:

$$A = \pm(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + \dots + a_{-m} p^{-m} + \dots), \quad (3.1)$$

где a_i — символы, используемые в данной ПСС. Число A в СС с основанием p записывается в виде последовательности символов a_i :

$$A_{(p)} = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-m} \dots \quad (3.2)$$

Каждый символ a_i занимает одну позицию в записи числа, называемую *разрядом*. Коэффициент p^i при символе a_i называют *весом* (весовым коэффициентом) i -го разряда. В табл. 3.2 приведены значения весовых коэффициентов для двоичной СС ($p=2$).

i	2^i	i	2^i
0	1	-1	0,5
1	2	-2	0,15
2	4	-3	0,125
3	8	-4	0,0625
4	16	-5	0,03125
5	32	-6	0,015625
6	64	-7	0,0078125
7	128	-8	0,00390625
8	256	-9	0,001953125
9	512	-10	0,0009765625
10	1024	-11	0,00048828125
11	2048	-12	0,000244140625
12	4096	-13	0,0001220703125
13	8192	-14	0,00006103515625
14	16384	-15	0,000030517578125
15	32768	-16	0,0000152587890625
16	65536	-17	0,00000762939453125
17	131072	-18	0,000003814697265625
18	262144	-19	0,0000019073486328125
19	524288	-20	0,00000095367431640625

Пример 3.1. Запишем число $A=25,8125_{(10)}$ в различных системах счисления, используя (3.1) и (3.2):
двоичная СС:

$$A = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4};$$

$$A_{(2)} = 11001, 1101;$$

восьмеричная СС:

$$A = 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2};$$

$$A_{(8)} = 31,64;$$

шестнадцатиричная СС:

$$A = 1 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 + D \cdot 16^{-1};$$

$$A_{(16)} = 19, D.$$

Как правило, в устройствах цифровой обработки сигналов числа представляются в двоичной системе счисления.

3.1.2. Перевод чисел из одной ПСС в другую

Перевод чисел из одной ПСС в другую осуществляется в соответствии со следующими алгоритмами.

Алгоритм подстановки. Для перевода числа $A_{(p_1)}$ из ПСС с основанием p_1 в ПСС с основанием p_2 необходимо в представлении числа $A_{(p_1)}$ в виде (3.1) подставить значения основания p и разрядов a_i , записанные в ПСС с основанием p_2 , и вычислить полученную сумму произведений.

Пример 3.2. Перевод двоичного числа $A_{(2)}=1011,01$ в десятичную систему счисления:

$$A_{(10)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 11,25.$$

Перевод десятичного числа $A_{(10)}=11,25$ в двоичную систему счисления:

$$A_{(2)} = 1 \cdot 1010^{+1} + 1 \cdot 1010^0 + 10 \cdot 1010^{-1} + 101 \cdot 1010^{-10} \approx 1011,01.$$

При «ручном» переводе алгоритм подстановки удобно использовать при преобразовании чисел из двоичной в десятичную СС, а при «машинном» переводе (т. е. при выполнении преобразования чисел в цифровом устройстве, работающем в двоичной системе счисления) — при преобразовании чисел из десятичной в двоичную СС.

Перевод целого числа (алгоритм последовательного деления). Для перевода целого числа $A_{(p_1)}$ из ПСС с основанием p_1 в ПСС с основанием p_2 необходимо последовательно делить число $A_{(p_1)}$ и получающиеся частные (большие, чем p_2) на число p_2 , записанное в ПСС с основанием p_1 , и выписать последовательно все остатки от деления, начиная с последнего.

Пример 3.3. Перевод десятичного числа $A_{(10)}=20$ в двоичную систему счисления:

$$A_{(2)} = 10100.$$

$\begin{array}{r} 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 5 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 1 \end{array}$
--	--	--	--	--	--

Перевод правильной дроби (алгоритм последовательного умножения). Для перевода правильной дроби $A_{(p_1)}$ из ПСС с основанием p_1 в ПСС с основанием p_2 необходимо последовательно умножать данную дробь на число p_2 , записанное в ПСС с основанием p_1 (перемножаются только дробные части), и выписать последовательно все целые части полученных произведений, начиная с первого.

Пример 3.4. Перевод десятичной дроби $A_{(10)}=0,8125$ в двоичную систему счисления:

$$A_{(2)} = 0,1101.$$

$\begin{array}{r} \times 0, \\ \hline 1, \\ \times \\ \hline 1, \\ \times \\ \hline 0, \\ \times \\ \hline 1, \end{array}$	$\begin{array}{r} 8125 \\ 2 \\ \hline 6250 \\ 2 \\ \hline 2500 \\ 2 \\ \hline 5000 \\ 2 \\ \hline 0000 \end{array}$
--	---

Алгоритмы последовательного деления и умножения удобно использовать при «ручном» переводе — в случае преобразования чисел из десятичной СС — и «машинном» — при преобразовании чисел в десятичную СС.

Перевод неправильной дроби выполняется в два приема (отдельно для целой и дробной частей).

3.2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

3.2.1 Фиксированная запятая

При представлении числа в форме с фиксированной запятой считается, что положение запятой, отделяющей целую часть числа от дробной, фиксировано. Разряды слева от запятой представляют целую часть числа и его знак, а справа

ва — дробную часть числа. Все разряды числа (вместе со знаковым) образуют так называемую разрядную сетку ЦФ. Каждый i -й разряд сетки имеет определенный вес, что позволяет просто реализовать арифметические операции.

Как правило, в ЦФ используется нормирование обрабатываемых данных таким образом, чтобы все арифметические операции выполнялись с числами, по абсолютному значению меньшими единицы:

$$0 \leq |A| < 1. \quad (3.3)$$

Разрядная сетка, содержащая $b+1$ двоичных разрядов (старший — знаковый, остальные — числовые), позволяет представить 2^{b+1} различных чисел (2^b отличающихся по абсолютному значению чисел с шагом 2^{-b}) в диапазоне

$$0 \leq |A| \leq 1 - 2^{-b}. \quad (3.4)$$

Если результат арифметической операции выходит за верхний предел неравенства (3.4), происходит *переполнение* разрядной сетки, приводящее к искажению результата. При выполнении условия (3.3) переполнение может произойти только при операциях сложения и вычитания.

3.2.2. Плавающая запятая

Числа в форме с плавающей запятой представляются с помощью двух чисел с фиксированной запятой — мантиссы μ и порядка γ :

$$A = \pm \gamma \pm \mu. \quad (3.5)$$

Представление числа в виде (3.5) основано на записи его в виде

$$A = (\pm \mu) p^{\pm \gamma}, \quad (3.6)$$

где p — основание системы счисления; γ — целое число; μ — правильная дробь.

Пример 3.5. Представим двоичное число $A_{(2)} = 0,0101$ в виде (3.6):

$$а) A = 0,101 \cdot 10^{-01}, \text{ где } \mu_{(2)} = +0,101;$$

$$\gamma_{(2)} = -0,1;$$

$$б) A = 0,0101 \cdot 10^{+00}, \text{ где } \mu_{(2)} = 0,0101;$$

$$\gamma_{(2)} = +00, \text{ и т. д.}$$

Порядок γ (вместе со знаком) указывает истинное положение запятой в числе A .

Число называется *нормализованным*, если в старшем числовом разряде мантиссы стоит цифра, отличная от нуля. Нормализованное представление числа позволяет сохранить в мантиссе наибольшее количество значащих цифр, т. е. повышает точность вычислений.

В разрядной сетке, содержащей b двоичных разрядов, b_γ разрядов отводится на представление порядка и его знака, а b_μ разрядов — на представление мантиссы и ее знака ($b = b_\gamma + b_\mu$). *Диапазон представления* абсолютных значений нормализованных двоичных чисел в форме с плавающей запятой определяется неравенством

$$2^{-1} \cdot 2^{-(2^{b_\gamma} - 1)} \leq |A| \leq (1 - 2^{-b_\mu + 1}) 2^{2^{(b_\gamma - 1)} - 1}. \quad (3.7)$$

Пример 3.6. Определим диапазон представления чисел в форме с плавающей запятой, если разрядная сетка содержит $b=20$ разрядов, причем $b_p=6$; $b_m=14$. В соответствии с (3.7)

$$2^{-22} \leq |A| \leq (1 - 2^{-13}) \cdot 2^{21}.$$

Вероятность переполнения разрядной сетки при выполнении операций над числами в форме с плавающей запятой оказывается незначительной. Однако сами операции являются более сложными по сравнению с арифметическими операциями над числами с фиксированной запятой, поскольку действия выполняются как с мантиссами чисел, так и с порядками. При сложении двух чисел с плавающей запятой вначале осуществляется выравнивание порядков (меньший приводится к большему путем сдвига мантиссы на соответствующее число разрядов вправо), затем — сложение мантисс и нормализация результата. При умножении двух чисел производятся сложение порядков, умножение мантисс и нормализация результата [3.1].

3.3. КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

Существуют три основных кода для представления чисел: *прямой, обратный и дополнительный*.

В данном параграфе рассматриваются положительные и отрицательные числа с фиксированной запятой

$$A = \pm 0, a_1 a_2 \dots a_b,$$

удовлетворяющие условию (3.3).

Код числа содержит $b+1$ разряд. Старший разряд служит для фиксации знака числа и называется знаковым. Следующие b разрядов служат для фиксации дробной части числа и называются числовыми.

3.3.1. Прямой код

Условное обозначение: $[A]_{\text{пр}}$. Используется при выполнении операции умножения в ЦФ.

Правило кодирования: в знаковый разряд кода записывается 0 (для положительных чисел) и 1 (для отрицательных чисел), числовые разряды кода соответствуют числовым разрядам (дробной части) исходного числа:

$$[A]_{\text{пр}} = \begin{cases} 0, a_1 a_2 \dots a_b & \text{при } A \geq 0; \\ 1, a_1 a_2 \dots a_b & \text{при } A \leq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Пример 3.7. Представим положительное число A и отрицательное число B , модуль которых равен 0,10111, в прямом коде. В соответствии с (3.8)

$$[A]_{\text{пр}} = 0.10111 \text{ и } [B]_{\text{пр}} = 1.10111.$$

3.3.2. Дополнительный код

Условное обозначение: $[A]_{\text{доп}}$. Используется при выполнении операций умножения и сложения в ЦФ.

Правило кодирования положительных чисел: дополнительный код положительного числа совпадает с прямым кодом: $[A]_{\text{доп}} = [A]_{\text{пр}}$.

Правило кодирования отрицательных чисел: в знаковый разряд кода записывается 1, числовые разряды исходного числа инвертируются (0 заменяется 1 и наоборот) и к младшему числовому разряду добавляется 1:

$$[A]_{\text{доп}} = \begin{cases} 0. a_1 a_2 \dots a_b \text{ при } A \geq 0; \\ 1. \overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_b} + 2^{-b} \text{ при } A \leq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Пример 3.8. Представим отрицательное число $A = -0,10111$ в дополнительном коде. В соответствии с (3.9)

$$[A]_{\text{пр}} = 1.10111 \rightarrow 1.01000 \\ + \frac{1}{1.01001}$$

$$[A]_{\text{доп}} = 1.01001.$$

Правило перевода дополнительного кода отрицательного числа в прямой: числовые разряды дополнительного кода инвертируются и к младшему разряду добавляется 1.

Пример 3.9. Осуществим обратный перевод дополнительного кода числа A (см. пример 3.8) в прямой код:

$$[A]_{\text{доп}} = 1.01001 \rightarrow 1.10110 \\ + \frac{1}{1.10111}$$

$$[A]_{\text{пр}} = 1.10111.$$

Модифицированный дополнительный код имеет условное обозначение: $[A]_{\text{д.м.}}$. Он образуется по правилам дополнительного кода, но для представления знака числа отводятся два разряда.

Пример 3.10. Представим положительное число A и отрицательное число B , модули которых равны $0,01110$, в модифицированном дополнительном коде:

$$[A]_{\text{доп}}^{\text{м}} = 00.01110; [B]_{\text{доп}}^{\text{м}} = 11.10010.$$

3.3.3. Обратный код

Условное обозначение: $[A]_{\text{обр}}$.

Правило кодирования положительных чисел: обратный код положительного числа совпадает с прямым кодом: $[A]_{\text{обр}} = [A]_{\text{пр}}$.

Правило кодирования отрицательных чисел: в знаковый разряд кода записывается 1, числовые разряды исходного числа инвертируются.

$$[A]_{\text{обр}} = \begin{cases} 0. a_1 a_2 \dots a_b \text{ при } A \geq 0; \\ 1. \overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_b} \text{ при } A \leq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Пример 3.11. Представим отрицательное число $A = -0,10000$ в обратном коде:

$$[A]_{\text{обр}} = 1.01111.$$

Модифицированный обратный код образуется по правилам обратного кода, но для представления знака числа отводятся два разряда.

3.4. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ АРИФМЕТИКУ С ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ

3.4.1. Алгебраическое сложение в дополнительном коде

Пусть заданы дополнительные коды чисел A и B , причем $|A|, |B|, |A + B| < 1$. Дополнительный код суммы чисел образуется путем сложения допол-

нительных кодов слагаемых. Перенос из знакового разряда при сложении не учитывается (теряется).

Пример 3.12. Допустим $A = -0,01100$; $B = -0,10001$. Тогда

$$\begin{array}{r} [A]_{\text{доп}} = 1.10100 \\ + \\ [B]_{\text{доп}} = 1.01111 \\ \hline 1 \text{ ; } 1.00011 \\ \downarrow \\ \text{Единица переноса не учитывается.} \end{array} \quad [A + B]_{\text{доп}} = 1.00011.$$

3.4.2. Алгебраическое сложение в обратном коде

Пусть заданы обратные коды чисел A и B , причем $|A|$, $|B|$, $|A+B| < 1$. Обратный код суммы чисел образуется путем сложения обратных кодов слагаемых с учетом переноса из знакового разряда (циклического переноса), при наличии которого к младшему разряду суммы добавляется 1.

Пример 3.13. Допустим $A = -0,01001$, $B = 0,11000$. Тогда

$$\begin{array}{r} [A]_{\text{обр}} = 1.10110 \\ + \\ [B]_{\text{обр}} = 0.11000 \\ \hline 1 \text{ ; } 0.01110 \end{array} \quad [A + B]_{\text{обр}} = 0.01111.$$

Циклический перенос $\longrightarrow + 1$

0.01111

3.4.3. Переполнение разрядной сетки при сложении

При сложении нескольких чисел, удовлетворяющих условию (3.3), может произойти пополнение разрядной сетки. Для фиксации пополнения используют модифицированные коды, содержащие h дополнительных знаковых разрядов, где $h = \text{int} \log_2 k$, а k — число слагаемых.

При сложении двух чисел ($k=2$) $h=1$. Модифицированный код, фиксирующий пополнение, должен содержать два знаковых разряда. При наличии пополнения значения знаковых разрядов не совпадают, т. е. в знаковых разрядах фиксируется комбинация 01 или 10.

3.4.4. Умножение в прямом коде

Пусть множимое A содержит b числовых разрядов, а множитель B — m числовых разрядов

$$\begin{aligned} [A]_{\text{пр}} &= a_0 \cdot a_1 a_2 \dots a_b ; \\ [B]_{\text{пр}} &= b_0 \cdot b_1 b_2 \dots b_m, \end{aligned}$$

где $a_0, b_0 = \{1, 0\}$ — знаковые разряды сомножителей.

Точное значение произведения $P = AB$ может содержать до $b+m$ числовых разрядов. Значение знакового разряда произведения P определяется путем сложения значений знаковых разрядов сомножителей по модулю 2: $p_0 = a_0 \oplus b_0$, т. е.

$$p_0 = \begin{cases} 1 & \text{при } a_0 \neq b_0; \\ 0 & \text{при } a_0 = b_0. \end{cases}$$

Значения числовых разрядов получаются путем перемножения числовых разрядов сомножителей.

Пример 3.14. Пусть $A = -0,1001$; $B = 0,101$. Выполним умножение чисел в прямом коде по алгоритму умножения, начиная с младших разрядов [3.2]:

$$\begin{array}{r}
 \oplus \quad 1 \leftarrow 1.1001 = [A]_{\text{пр}} \\
 \times \quad 0 \leftarrow 0.101 = [B]_{\text{пр}} \\
 \hline
 1 \quad 1001 \rightarrow \\
 + \quad 01001 \\
 \hline
 \quad 01001 \rightarrow \\
 + \quad 001001 \\
 \quad 1001 \\
 \hline
 \quad \quad 101101 \rightarrow \\
 \rightarrow 1.0101101 = [AB]_{\text{пр}}.
 \end{array}$$

Формирование
знака произведения

Стрелка \rightarrow соответствует сдвигу кода частичной суммы на один разряд вправо.

Различные алгоритмы умножения чисел в прямом коде подробно описаны в [3.2].

3.4.5. Умножение в дополнительном коде

При умножении чисел в дополнительном коде множимое и частичные произведения обычно представляются в модифицированном коде (для устранения переполнений при вычислении частичных сумм).

Алгоритм умножения чисел в дополнительном коде, начиная с младшего разряда, практически аналогичен соответствующему алгоритму для прямого кода, однако на последнем шаге (при отрицательном множителе) к частичной сумме добавляется дополнительный код числа, равного множимому по абсолютному значению и противоположного по знаку.

Пример 3.15. Пусть $A = -0,111$; $B = -0,010$, т. е. $[A]_{\text{доп}}^{\text{м}} = 11.001$; $[B]_{\text{доп}}^{\text{м}} = 1.110$; $[-A]_{\text{доп}}^{\text{м}} = 00.111$;

$$\begin{array}{r}
 [A]_{\text{доп}}^{\text{м}} = 11.001 \\
 \times \\
 [B]_{\text{доп}}^{\text{м}} = 1.110 \\
 \hline
 00.000 \rightarrow \\
 + 00.0000 \\
 \quad 11.001 \\
 \hline
 \quad 11.0010 \rightarrow \\
 + 11.10010 \\
 \quad 11.001 \\
 \hline
 \quad \quad 10.10110 \rightarrow \\
 + 11.010110 \\
 \quad 00.111 \\
 \hline
 \quad \quad 00.001110 = [AB]_{\text{доп}}.
 \end{array}$$

Различные алгоритмы умножения чисел в дополнительном коде, в том числе и широко используемый в ЦФ алгоритм Бута, подробно рассмотрены в [1.6, 3.2].

3.5. КВАНТОВАНИЕ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ АРИФМЕТИКУ С ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ

3.5.1. Общие сведения

Квантование числа есть представление последнего с помощью конечного количества (b) числовых разрядов. Операция квантования является нелинейной и вносит в представлении числа x ошибку

$$E_{\text{кв}} = F(x) - x, \quad (3.11)$$

где x — число до квантования; $F(x)$ — число после квантования (после выполнения нелинейной операции F).

Шагом квантования Q называется весовой коэффициент младшего числового разряда, равный 2^{-b} . При квантовании используются два способа: округление и усечение.

3.5.2. Округление

При округлении числа до b разрядов исходное m -разрядное число ($b < m < \infty$) заменяется на ближайшее b -разрядное (округление соответствует выбору ближайшего уровня квантования).

Ошибка округления $E_0 = F_0(x) - x$ удовлетворяет неравенству

$$-2^{-b}/2 \leq E_0 \leq 2^{-b}/2 \quad (3.12)$$

для всех трех способов кодирования чисел (прямого, обратного и дополнительного кодов). В (3.12) считается, что $m \gg b$.

Характеристика нелинейности, соответствующая операции округления, показана на рис. 3.1, а.

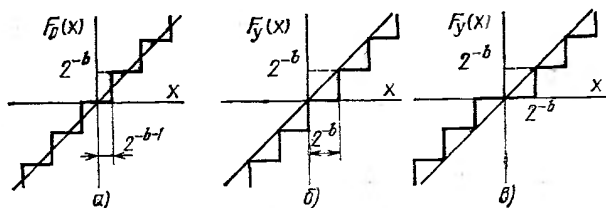


Рис. 3.1

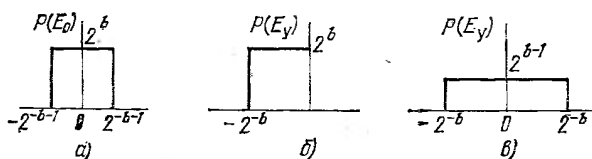


Рис. 3.2

Плотность вероятности ошибки округления $P(E_0)$ показана на рис. 3.2,а. При анализе эффектов квантования в ЦФ, как правило, предполагается, что все значения ошибки квантования равновероятны, т. е. ошибки распределены равномерно.

3.5.3. Усечение

При усечении m -разрядного числа до b разрядов ($b < m < \infty$) младшие $m-b$ разрядов исходного числа отбрасываются.

Ошибка усечения $E_y = F_y(x) - x$ удовлетворяет неравенствам:

а) для положительных чисел при любом способе кодирования и отрицательных чисел в дополнительном коде

$$-2^{-b} \leq E_y \leq 0; \quad (3.13')$$

б) для отрицательных чисел в прямом и обратном кодах

$$0 \leq E_y \leq 2^{-b}. \quad (3.13'')$$

В (3.13) считается, что $m \gg b$.

Характеристика нелинейности, соответствующая операции усечения для дополнительного кода, показана на рис. 3.1,б, а для прямого и обратного кодов — на рис. 3.1,в.

Плотности вероятности ошибки усечения $P(E_y)$ показаны на рис. 3.2,б для дополнительного кода и на рис. 3.2,в для прямого и обратного кодов.

3.6. КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

3.6.1. Модели процесса квантования

Квантование сигнала есть представление отсчетов последнего с помощью конечного числа b числовых разрядов.

Квантованию в ЦФ могут подвергаться дискретные (в аналого-цифровых преобразователях — АЦП) и цифровые (на выходах умножителей и сумматоров) сигналы.

Нелинейная модель процесса квантования сигнала показана на рис. 3.3,а, где $d(nT)$ — квантуемый сигнал (дискретный или m -разрядный цифровой); $p(nT)$ — квантованный сигнал (b -разрядный цифровой, $b < m$), а характеристика нелинейности F квантователя показана на рис. 3.1. Нелинейная модель используется, как правило, при моделировании процессов в ЦФ на ЭВМ.

Линейная модель процесса квантования показана на рис. 3.3,б, где $e(nT)$ — аддитивный дискретный сигнал, учитывающий ошибку квантования:

$$e(nT) = F[d(nT)] - d(nT). \quad (3.14)$$

Линейная модель используется при аналитическом анализе процессов в ЦФ.

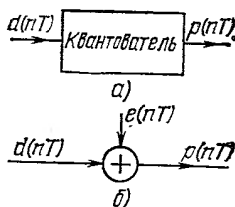


Рис. 3.3

3.6.2. Детерминированные оценки ошибок квантования

Детерминированные оценки позволяют определить абсолютные границы ошибок квантования

$$\max_{n \geq 0} |e(nT)| \leq \frac{1}{\eta} \cdot 2^{-b} = \frac{1}{\eta} Q, \quad (3.15)$$

где b — количество числовых разрядов; Q — шаг квантования; $\eta=2$ при округлении и $\eta=1$ при усечении (см. рис. 3.1 и 3.2).

3.6.3. Вероятностные оценки ошибок квантования

Вероятностные оценки основаны на представлении ошибок квантования (сигнала $e(nT)$) как случайного шумоподобного процесса (шума квантования) [1.6, 3.3]. Допущения, вводимые относительно шума квантования:

последовательность $e(nT)$ является стационарным случайным процессом; последовательность $e(nT)$ не коррелирована с квантуемой последовательностью $d(nT)$;

любые два отсчета последовательности $e(nT)$ не коррелированы, т. е. шум квантования является процессом типа «белый шум»;

распределение вероятности ошибок является равномерным по диапазону ошибок квантования (см. рис. 3.2).

Среднее значение m_e и дисперсия σ_e^2 шума квантования определяются соотношениями:

$$m_e = \begin{cases} 0 & \text{при округлении и усечении прямого} \\ & \text{и обратного кодов;} \\ -0,5Q & \text{при усечении дополнительного кода;} \end{cases} \quad (3.16')$$

$$\sigma_e^2 = \begin{cases} Q^2/12 & \text{при округлении и усечении допол-} \\ & \text{нительного кода;} \\ Q^2/3 & \text{при усечении прямого и обратного} \\ & \text{кодов.} \end{cases} \quad (3.16'')$$

Здесь $Q=2^{-b}$ — шаг квантования.

Из формул (3.16) видно, что использование усечения прямого и обратного кодов нежелательно.

В табл. 3.3 приведены значения дисперсии σ_e^2 шума округления в децибелах при различном шаге квантования, рассчитываемые по формуле $\sigma_e^2 = 10 \lg(Q^2/12) = 10 \lg(2^{-2b}/12) = -(6,02b + 10,79)$ дБ.

Таблица 3.3

Разрядность b	8	10	12	14	16	18	20
Шаг квантования Q	2^{-8}	2^{-10}	2^{-12}	2^{-14}	2^{-16}	2^{-18}	2^{-20}
Дисперсия σ_e^2 , дБ	-59	-71	-83	-95	-107	-119	-131

3.7. УЧЕТ КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ В СТРУКТУРНЫХ СХЕМАХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Структурные схемы цифровых фильтров (ЦФ) с ограниченной разрядностью регистров отличаются от соответствующих схем дискретных (линейных) фильтров наличием нелинейностей F и Φ , учитывающих округление (усечение)

результатов арифметических операций в регистрах умножителей и сумматоров соответственно. Вид характеристик нелинейностей F и Φ показан на рис. 3.1.

При анализе эффектов квантования сигналов нелинейности $F_{j,k}$ и Φ_j в структурных схемах ЦФ заменяются источниками аддитивного шума $e_{j,k}(nT)$ и $e_{j,\Sigma}(nT)$ (j — номер сумматора ЦФ, к которому подключен соответствующий k -й источник шума). В результате формируется линейная модель ЦФ, учитывающая эффекты квантования сигналов.

Если к определенному j -му сумматору ЦФ подключено несколько источников шума, их можно заменить в линейной модели эквивалентным источником шума $\gamma_j(nT)$ [оценки параметров шумового сигнала $\gamma_j(nT)$ см. 3.9].

Пример 3.16. Рассматривается нерекursивный цифровой фильтр (НЦФ) с передаточной функцией $H(z) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j z^{-j}$, реализованный в прямой форме. Нелинейная модель НЦФ показана на рис. 3.4,а. Линейная модель, полученная путем замены нелинейностей $F_{1,k}$ и Φ_1 источниками шумов $e_{1,k}(nT)$ и $e_{1,\Sigma}(nT)$ показана на рис. 3.4,б [считается, что разрядности регистров всех умножителей, подключенных к сумматору, равны, т. е. $e_{1,k}(nT) = e_1(nT)$]. Линейная модель с эквивалентным источником шума $\gamma_1(nT)$ на выходе сумматора показана на рис. 3.4,в.

Пример 3.17. Рассматривается каскадная структура рекурсивного цифрового фильтра (РЦФ) с передаточной функцией $H(z) = \prod_{j=1}^M (b_{0j} + b_{1j}z^{-1} + b_{2j}z^{-2}) / (1 + \dots)$

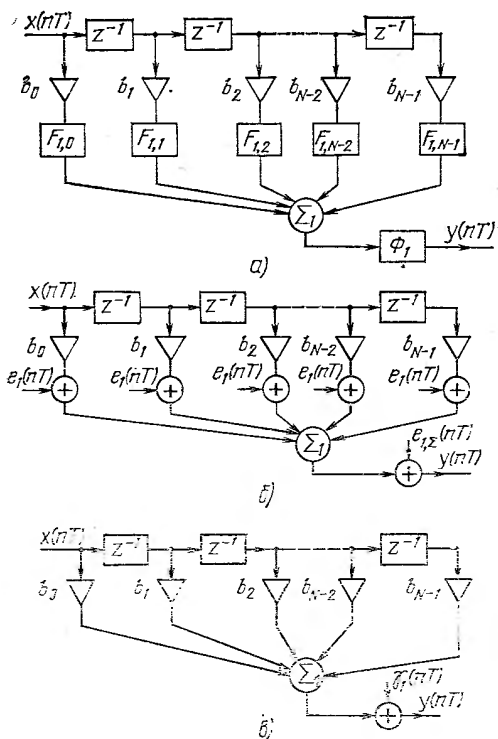


Рис. 3.4

$+a_{1j}z^{-1}+a_{2j}z^{-2}$) при прямой форме реализации биквадратного блока. Нелинейная модель РЦФ показана на рис. 3.5,а (считается, что разрядности регистров умножителей в отдельном биквадратном блоке равны). Линейная модель, полученная путем замены нелинейностей $F_{j,k}$ и Φ_j источниками шумов $e_{j,k}(nT)$ и $e_{j,\Sigma}(nT)$, показана на рис. 3.5,б (разрядности регистров умножителей, подключенных к j -му сумматору, считаются равными, т. е. $e_{j,k}(nT) = e_j(nT)$). Линейная модель с эквивалентными источниками шума $\gamma_j(nT)$ на выходах сумматоров показана на рис. 3.5,в.

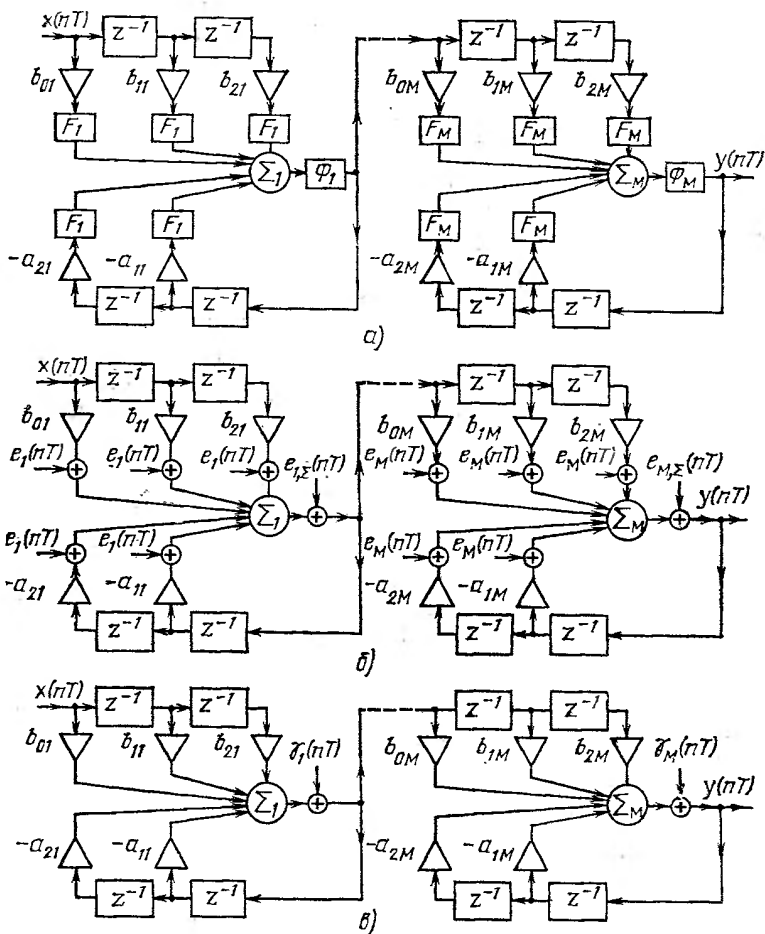


Рис. 3.5

3.8. ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Цифровая система произвольной структуры может быть описана с помощью линейной модели, представляющей собой совокупность дискретной системы и определенного числа ограниченных по абсолютному значению аддитивных воздействий, учитывающих эффекты квантования сигналов и подаваемых на соответствующие точки дискретной системы.

Линейную модель ЦФ удобно представлять в виде направленного графа [1.6], показанного на рис. 3.6, где $\tilde{x}(nT)$ — дискретизированный (но не квантованный по уровню) входной сигнал; $e_0(nT)$ — шум квантования входного сигнала (шум АЦП); $\gamma_j(nT)$ — эквивалентный шум квантования, обусловленный округлением (усечением) результатов операций умножения в регистрах умножителей, подключенных к j -му сумматору, и округлением (усечением) результата суммирования в регистре самого j -го сумматора; $G_j(z)$ и $g_j(nT)$ — соответственно передаточная функция и импульсная характеристика части дискретного фильтра от выхода j -го сумматора до выхода фильтра; $F_i(z)$ и $f_i(nT)$ — соответственно передаточная функция и импульсная характеристика части дискретного фильтра от его входа до выхода i -го сумматора; $v_i(nT)$ — выходной сигнал i -го сумматора; $H(z)$ и $h(nT)$ — передаточная функция и импульсная характеристика всего фильтра.

Верхняя половина графа (см. рис. 3.6) используется при получении оценок выходного шума ЦФ, являющегося результатом сложения выходных шумовых составляющих, обусловленных сигналами $e_0(nT)$ и $\gamma_j(nT)$. Шумовой сигнал $e_0(nT)$, определяемый разрядностью АЦП, проходит через весь фильтр с передаточной функцией $H(z)$. Шумовой сигнал $\gamma_j(nT)$, определяемый разрядностями регистров умножителей, подключенных к j -му сумматору, и разрядностью регистра самого j -го сумматора, проходит на выход через часть фильтра с передаточной функцией $G_j(z)$.

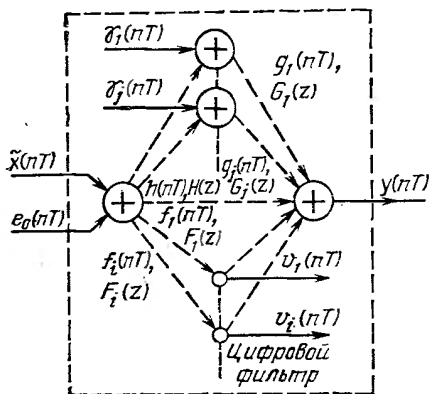


Рис. 3.6

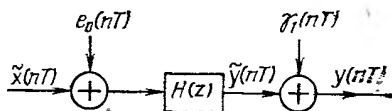


Рис. 3.7

Пример 3.18. Линейная модель НЦФ, реализованного в прямой форме (см. рис. 3.4), показана на рис. 3.7. Она представляет собой совокупность дискретного фильтра с передаточной функцией $H(z)$ и двух источников шума: $e_0(nT)$ и $\gamma_1(nT)$. Шумовой сигнал $e_0(nT)$ проходит через весь фильтр, а сигнал $\gamma_1(nT)$ складывается с выходным сигналом $\tilde{y}(nT)$ дискретного фильтра (т. е. $G_1(z) = 1$).

Пример 3.19. Линейная модель двухзвенной каскадной структуры РЦФ с передаточной функцией $H(z) = \prod_{j=1}^2 B_j(z)/A_j(z)$ при прямой форме реализации звеньев показана на рис. 3.8. Шумовой сигнал $e_0(nT)$, учитывающий шум АЦП, проходит через весь фильтр с передаточной функцией $H(z)$. Шумовой сигнал $\gamma_1(nT)$, появляющийся на выходе сумматора первого звена (см. рис. 3.5,е), проходит через цепь обратной связи данного звена (блок с передаточной функцией $1/A_1(z)$) и второе звено (т. е. $G_1(z) = \frac{1}{A_1(z)} \frac{B_2(z)}{A_2(z)}$). Шумовой сигнал $\gamma_2(nT)$ проходит через цепь обратной связи второго звена (т. е. $G_2(z) = 1/A_2(z)$).

Нижняя половинна графа (см. рис. 3.6) используется при получении оценок диапазона изменения сигналов в любой точке фильтра, которые необходимы для определения величин масштабных множителей, вводимых в схему фильтра для предотвращения переполнений регистров сумматоров и улучшения шумовых ха-

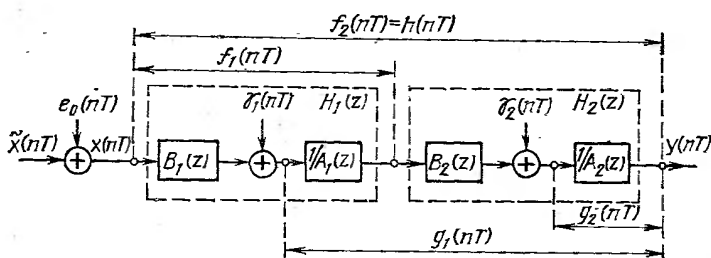


Рис. 3.8

рактеристик. Выходной сигнал i -го сумматора $v_i(nT)$ есть результат прохождения входного сигнала $x(nT) = \tilde{x}(nT) + e_0(nT)$ через часть фильтра с передаточной функцией $F_i(z)$.

3.9. ОЦЕНКИ ОШИБОК (ШУМОВ) КВАНТОВАНИЯ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА В ЦИФРОВОМ ФИЛЬТРЕ

3.9.1. Общие сведения

В данном параграфе предполагается, что:

а) входной сигнал $x(nT)$ нормирован в соответствии

$$\max_{n \geq 0} |x(nT)| \leq 1; \quad (3.17)$$

б) разрядность входного сигнала (АЦП) после запятой равна $s_{вх}$;

в) разрядности (после запятой) всех регистров умножителей и сумматоров ЦФ равны s_d ;

г) при квантовании используется округление.

3.9.2. Детерминированные оценки

Детерминированные оценки определяют абсолютные границы (диапазон изменения) ошибок квантования выходного сигнала в ЦФ и получаются с использованием линейной модели ЦФ (см. 3.8) на основе оценок ошибок квантования сигналов при выполнении элементарных операций, определяемых (3.18) — (3.20).

Ошибка квантования входного сигнала

$$E_0 = \max_{n \geq 0} |e_0(nT)| \leq 2^{-s_{вх}-1} = 0,5 Q_{вх}. \quad (3.18)$$

Ошибка квантования сигнала на выходах умножителей

$$E_{j,k} = \max_{n \geq 0} |e_{j,k}(nT)| \leq 2^{-s_k-1} = 0,5 Q. \quad (3.19)$$

$$\Gamma_j = \max_{n \geq 0} |\gamma_j(nT)| \leq 0,5 r_j Q, \quad (3.20)$$

где r_j — число умножителей, подключенных к j -му сумматору.

Составляющая выходной ошибки квантования, обусловленная квантованием входного сигнала,

$$\begin{aligned} E_{0 \text{ Вых}} &= \max_{n \geq 0} |e_{0 \text{ Вых}}(nT)| \leq \max_{n \geq 0} |e_0(nT)| \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| \leq \\ &\leq 0,5 Q_{\text{ВХ}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Составляющая выходной ошибки квантования, обусловленная квантованием сигналов на выходах умножителей, подключенных к j -му сумматору,

$$\begin{aligned} E_{j \text{ Вых}} &= \max_{n \geq 0} |e_{j \text{ Вых}}(nT)| \leq \max_{n \geq 0} |\gamma_j(nT)| \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)| \leq 0,5 Q r_j \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ошибка квантования выходного сигнала (с учетом (3.18)–(3.22))

$$\begin{aligned} E_{\text{Вых}} &= \max_{n \geq 0} |e_{\text{Вых}}(nT)| \leq \max_{n \geq 0} |e_{0 \text{ Вых}}(nT)| + \sum_j \max_{n \geq 0} |e_{j \text{ Вых}}(nT)| \leq \\ &\leq 0,5 Q_{\text{ВХ}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| + 0,5 Q \cdot \sum_j r_j \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)|. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Пример 3.20. Рассматривается каскадная структура РЦФ восьмого порядка с передаточной функцией $H(z) = \prod_{j=1}^4 B_j(z)/A_j(z) = \prod_{j=1}^4 (b_{0j} - b_{2j}z^{-2}) / (1 + a_{1j}z^{-1} + a_{2j}z^{-2})$ при прямой форме реализации элементарных звеньев второго порядка (см. рис. 3.5, в), где $b_{0j} = b_{2j} = 0,25$; $a_{11} = -0,7037048$; $a_{21} = 0,6843968$; $a_{12} = -1,1553955$; $a_{22} = 0,7416381$; $a_{13} = -0,3789978$; $a_{23} = 0,8601989$; $a_{14} = -1,4794922$; $a_{24} = 0,9075622$.

Шумовой сигнал $e_0(nT)$ проходит на выход через весь фильтр с передаточной функцией $H(z)$, а сигналы $\gamma_j(nT)$ ($j=1, 2, 3, 4$) — через части фильтра с передаточными функциями: $G_1(z) = \frac{1}{A_1(z)} \prod_{j=2}^4 \frac{B_j(z)}{A_j(z)}$; $G_2(z) = \frac{1}{A_2(z)} \prod_{j=3}^4 \frac{B_j(z)}{A_j(z)}$; $G_3(z) = \frac{1}{A_3(z)} \frac{B_4(z)}{A_4(z)}$; $G_4(z) = \frac{1}{A_4(z)}$ соответственно (см. рис. 3.5, в и 3.8). Для получения оценки ошибки квантования на ЭВМ рассчитываются величины $H^* \approx \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|$ и $G^*_j \approx \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)|$. Эти величины равны: $H^* \approx 2,268$; $G^*_1 \approx 1,520$; $G^*_2 \approx 2,271$; $G^*_3 \approx 1,820$; $G^*_4 \approx 5,363$. Тогда из (3.21) и (3.22) получаем оценки составляющих выходного шума: $E_{0 \text{ Вых}} \leq 0,5 Q_{\text{ВХ}} \cdot 2,268$; $E_{1 \text{ Вых}} \leq 0,5 Q \times 4 \cdot 1,520$; $E_{2 \text{ Вых}} \leq 0,5 Q \cdot 4 \cdot 2,271$; $E_{3 \text{ Вых}} \leq 0,5 Q \cdot 4 \cdot 1,820$; $E_{4 \text{ Вых}} \leq 0,5 Q \cdot 4 \cdot 5,363$.

Оценка ошибки квантования выходного сигнала определяется из (3.23) с учетом (3.18) и (3.19):

$$E_{\text{Вых}} \leq 2,268 \cdot 2^{-s_{\text{ВХ}}-1} + 21,948 \cdot 2^{-s_{\text{П}}-1}.$$

3.3.3. Вероятностные оценки

Вероятностные оценки шума квантования выходного сигнала основаны на представлении ошибок квантования сигналов при выполнении элементарных операций как случайных шумоподобных процессов типа «белый шум» (см. 3.6) причем считается, что любые два источника шума создают некоррелированные шумы [3.3]. При получении оценок используется линейная модель ЦФ (см 3.8).

Дисперсия шума квантования входного сигнала

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = 2^{-2s} \sigma_{\text{вх}}^2 / 12 = Q_{\text{вх}}^2 / 12. \quad (3.24)$$

Дисперсия шума квантования сигнала на выходах умножителей

$$\sigma_{j,k}^2 = 2^{-2s} \sigma_{j,k}^2 / 12 = Q^2 / 12. \quad (3.25)$$

Дисперсия эквивалентного шума квантования на выходе сумматора ЦФ

$$\sigma_j^2 = \sum_k \sigma_{j,k}^2 = r_j \frac{Q^2}{12}, \quad (3.26)$$

где r_j — число умножителей, подключенных к j -му сумматору.

Дисперсия составляющей выходного шума, обусловленной квантованием входного сигнала,

$$\sigma_{0\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (h(nT))^2. \quad (3.27)$$

Дисперсия составляющей выходного шума, обусловленной квантованием сигналов на выходах умножителей, подключенных к j -му сумматору,

$$\sigma_{j\text{вых}}^2 = r_j \sigma_{j,k}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (g_j(nT))^2. \quad (3.28)$$

Дисперсия выходного шума квантования [с учетом (3.24) — (3.28)]

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2 &= \sigma_{0\text{вых}}^2 + \sum_j \sigma_{j\text{вых}}^2 = \frac{Q_{\text{вх}}^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} (h(nT))^2 + \\ &+ \frac{Q^2}{12} \sum_j r_j \sum_{n=0}^{\infty} (g_j(nT))^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

В ряде случаев (как правило, для РЦФ) вычисления по (3.27) — (3.29) можно упростить, применив для вычисления бесконечных сумм квадратов отсчетов импульсных характеристик формулы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (h(nT))^2 = \begin{cases} \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |H(e^{i\omega T})|^2 d\omega; & (3.30') \\ \frac{1}{2\pi i} \oint H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz; & (3.30'') \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (g_j(nT))^2 = \begin{cases} \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |G_j(e^{i\omega T})|^2 d\omega; & (3.31') \\ \frac{1}{2\pi i} \oint G_j(z) G_j(z^{-1}) z^{-1} dz. & (3.31'') \end{cases}$$

Вычисления по (3.30') и (3.31') можно выполнить численными методами на ЭВМ или оценить по графику функции квадрата АЧХ. Вычисления по (3.30'') и (3.31'') выполняются с помощью теоремы о вычетах [3.4].

При произвольной спектральной плотности мощности $S_{\text{вх}}(e^{i\omega T})$ входного шума дисперсия составляющей выходного шума, обусловленная квантованием входного сигнала, может быть вычислена по формулам:

$$S_{\text{вых}}(e^{i\omega T}) = S_{\text{вх}}(e^{i\omega T}) |H(e^{i\omega T})|^2; \quad (3.32)$$

$$\sigma_{0 \text{ вых}}^2 = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |S_{\text{вых}}(e^{i\omega T})| d\omega, \quad (3.33)$$

где $S_{\text{вых}}(e^{i\omega T})$ — спектральная плотность мощности выходного шума.

Пример 3.21. Рассматривается РЦФ первого порядка с передаточной функцией $H(z) = b_0/(1-a_0z^{-1}) = B(z)/A(z)$. Шумовой сигнал $e_0(nT)$ проходит на выход через весь фильтр с передаточной функцией $H(z)$ и импульсной характеристикой $h(nT) = b_0 a_0^n$, а сигнал $\gamma_1(nT)$, определяемый шумами двух умножителей, подключенных к сумматору, — через часть фильтра с передаточной функцией $G_1(z) = 1/(1-a_0z^{-1})$ и импульсной характеристикой $g_1(nT) = a_0^n$.

Используя (3.29), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2 &= \frac{2^{-2s_{\text{вх}}}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} b_0^2 a_0^{2n} + \frac{2^{-2s_{\text{д}}}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{2n} = \\ &= \frac{1}{1-a_0^2} \left[\frac{2^{-2s_{\text{вх}}}}{12} b_0^2 + \frac{2^{-2s_{\text{д}}}}{12} \right]. \end{aligned}$$

Аналогичный результат получается при использовании формул (3.30'') и (3.31'') (см. пример 2.16).

Пример 3.22. Рассматривается равнополосный НЦФ с передаточной функцией $H(z) = \sum_{l=0}^{14} b_l z^{-l}$, где $b_0 = b_{14} = -0,0037370$; $b_1 = b_{13} = 0$; $b_2 = b_{12} = 0,0205680$; $b_3 = b_{11} = 0$; $b_4 = b_{10} = -0,0723199$; $b_5 = b_9 = 0$; $b_6 = b_8 = 0,3053691$; $b_7 = 0,5$ (см. пример 4.9). Линейная модель НЦФ показана на рис. 3.7.

Амплитудно-частотная характеристика фильтра $A(\omega)$ аппроксимирует характеристику, показанную на рис. 3.9 (кривая 1). Здесь же показан вид квадрата аппроксимируемой АЧХ (кривая 2).

Для оценки суммы квадратов отсчетов импульсной характеристики воспользуемся (3.30') и рис. 3.9 (т. е. вычислим площадь под кривой 2). Оценка составляющей $\sigma_{0 \text{ вых}}^2$

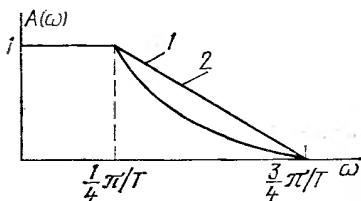


Рис. 3.9

$$\hat{\sigma}_{0 \text{ вых}}^2 = \frac{T}{\pi} \sigma_{\text{вх}}^2 \left[\int_0^{\pi/4T} 1 d\omega + \int_{\pi/4T}^{3\pi/4T} \left(1,5 - \omega \frac{2T}{\pi}\right)^2 d\omega \right] = \sigma_{\text{вх}}^2 \cdot 0,417.$$

Отметим, что полученная оценка близка к значению дисперсии, рассчитанной по заданным коэффициентам b_l с помощью формулы (3.27):

$$\sigma_{0 \text{ вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \cdot 0,349.$$

Учитывая, что только девять коэффициентов b_l отличны от 0 (т. е. шум округ-

ления образуется на выходах девяти умножителей), по формуле (3.29) получаем оценку дисперсии выходного шума

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{2^{-2s_{\text{вх}}}}{12} \cdot 0,417 + 9 \frac{2^{-2s_{\text{д}}}}{12}.$$

3.10. ОЦЕНКИ ДИАПАЗОНА ИЗМЕНЕНИЯ СИГНАЛА В ЦИФРОВОМ ФИЛЬТРЕ

3.10.1. Ограничение максимума амплитуды входного сигнала

Допускается, что входной сигнал $x(nT)$ нормирован в соответствии с условием

$$\max_{n \geq 0} |x(nT)| \leq 1. \quad (3.34)$$

Диапазон изменения сигнала на выходе j -го сумматора ЦФ ($j=0, 1, 2, \dots, L$; вход фильтра можно считать выходом нулевого ($j=0$) сумматора) определяется формулой

$$V_j = \max_{n \geq 0} |v_j(nT)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_j(nT)|, \quad (3.35)$$

причем $V_0=1$.

Диапазон изменения сигнала в произвольной точке ЦФ

$$V_{j,k} = \max_{n \geq 0} |v_{j,k}(nT)| \leq \alpha_{j,k} V_j, \quad (3.36')$$

где $v_{j,k}(nT)$ — сигнал на выходе j -го сумматора (при $k=0$) или k -го умножителя, подключенного к выходу j -го сумматора ($k=1, 2, \dots, r_j$), а $\alpha_{j,k}$ — коэффициент k -го умножителя ($\alpha_{j,0}=1$).

Диапазон изменения сигналов в ЦФ

$$V = \max_{j,k} \max_{n \geq 0} |v_{j,k}(nT)| \leq \max_{j,k} \left(\alpha_{j,k} \sum_{n=0}^{\infty} |f_j(nT)| \right). \quad (3.36'')$$

3.10.2. Ограничение максимума модуля спектра входного сигнала

Допускается, что максимум модуля спектра входного сигнала известен и ограничен величиной C , т. е.

$$\max_{0 \leq \omega \leq \pi/T} |X(e^{i\omega T})| = \|X\|_{\infty} \leq C,$$

где $\|R\|_p$ — норма преобразования Фурье $R(e^{i\omega T})$ детерминированной последовательности $r(nT)$ в пространстве L_p :

$$\|R\|_p = \left[\frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |R(e^{i\omega T})|^p d\omega \right]^{1/p},$$

причем $\|R\|_{\infty}$ фактически есть норма $R(e^{i\omega T})$ в пространстве C . Тогда

$$V_j \leq \|F_j\|_1 \|X\|_{\infty} = C \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |F_j(e^{i\omega T})| d\omega. \quad (3.37)$$

Диапазон изменения сигнала в произвольной точке ЦФ определяется формулой (3.36), где V_j определяется (3.37).

3.10.3. Ограничение энергии входного сигнала

Допускается, что известна норма $X(e^{i\omega T})$ в пространстве L_2 :

$$\|X\|_2 = \sqrt{\frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |X(e^{i\omega T})|^2 d\omega} \leq C.$$

Тогда

$$V_j \leq \|F_j\|_2 \|X\|_2 = C \sqrt{\frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |F_j(e^{i\omega T})|^2 d\omega}. \quad (3.38)$$

Диапазон изменения сигнала в произвольной точке ЦФ определяется формулой (3.36), где V_j определяется (3.38).

3.10.4. Обобщенное ограничение

В общем случае справедливо [1.6, 3.5]

$$V_j = \max_{n \geq 0} |v_j(nT)| \leq \|F_j\|_p \|X\|_q, \quad (3.39)$$

причем $1/p + 1/q = 1$; $p, q \geq 1$.

3.11. ОЦЕНКИ ОШИБОК (ШУМОВ) КВАНТОВАНИЯ И ДИАПАЗОНА ИЗМЕНЕНИЯ СИГНАЛОВ В ВОСХОДЯЩИХ И НИСХОДЯЩИХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ

3.11.1. Общие сведения

Оценки ошибок (шумов) квантования выходного сигнала и диапазона изменения сигналов в восходящих и нисходящих цифровых системах (ВЦС и НЦС) получаются на основе линейной модели цифровой системы (см. 3.8) с использованием уравнений и эквивалентных схем дискретных восходящих и нисходящих систем (см. 2.5). В данном параграфе предполагается, что:

входной сигнал системы нормирован в соответствии с условием

$$\max_{n \geq 0} |x(nT)| \leq 1; \quad (3.40)$$

разрядность входного сигнала (АЦП) после запятой равна $s_{вх}$; для представления целой и дробной частей кодов в ЦФ отводится соответственно s_n и s_d разрядов;

при квантовании используется округление;

относительно шумов квантования делаются предположения, приведенные в 3.6.

Параметры шумов квантования входного сигнала, сигналов на выходах умножителей и эквивалентного шума квантования на выходах сумматоров ЦФ определяются соотношениями (3.18) — (3.20) и (3.24) — (3.26).

3.11.2. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в ПВЦС

Рассматривается простейшая восходящая цифровая система (ПВЦС), содержащая экспандер частоты дискретизации (см. 2.5.2), увеличивающий частоту дискретизации входного сигнала $x(vT) = x(vmT)$ в m раз, и ЦФ с передаточной функцией $H(z)$ и импульсной характеристикой $h(nT) = h_n$, $n=0, 1, 2, \dots$ Структурная схема ПВЦС показана на рис. 3.10,а.

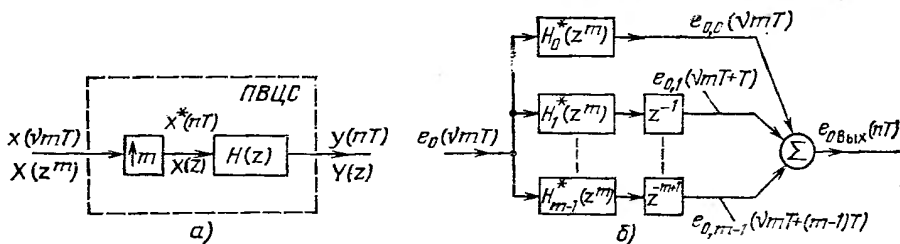


Рис. 3.10

Составляющая выходного шума квантования, обусловленная квантованием входного сигнала ($e_{0, \text{вых}}(nT)$). Для получения оценок абсолютной величины и дисперсии данной составляющей используется линейная модель ПВЦС, представляющая собой совокупность эквивалентной схемы ПВДС (ЭС ПВДС) и источника шума, учитывающего квантование входного сигнала (рис. 3.10,б).

Абсолютное значение составляющей шума квантования $E_{0, \text{вых}}$. Поскольку

$$\max_{v \geq 0} |e_{0,k}(vmT + kT)| \leq \max_{v \geq 0} |(e_{0,nmT})| \sum_{v=0}^{\infty} |h_k^*(vmT)|,$$

где

$$h_k^*(vmT) = k_{k,j}^*, \quad v = j = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

— импульсная характеристика дискретной системы (ДС) с передаточной функцией $H_k^*(z^m)$, определяемой (2.47) и находящейся в k -й ветви ЭС ПВДС,

$$E_{0, \text{вых}} = \max_k \max_{v \geq 0} |e_{0,k}(vmT + kT)| \leq 0,5 Q_{\text{вх}} \max_k \sum_{v=0}^{\infty} |h_k^*(vmT)|, \quad (3.41)$$

где $Q_{\text{вх}}$ — шаг квантования входного сигнала ПВЦС.

Дисперсия составляющей шума квантования $\sigma_{0, \text{вых}}^2$. Поскольку последовательность $e_0(vmT)$ рассматривается как дискретный белый шум с дисперсией $\sigma_{\text{вх}}^2 = Q_{\text{вх}}^2/12$, последовательности $e_{0,k}(vmT + kT)$ представляют собой дискретные стационарные случайные процессы с дисперсиями

$$\sigma_{0,k}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{v=0}^{\infty} (h_k^*(vmT))^2, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Процесс $e_{0, \text{вых}}(nT)$, являющийся суммой сдвинутых относительно друг друга m дискретных стационарных случайных процессов с дисперсиями $\sigma_{0,k}^2$, является

нестационарным (относится к классу периодически стационарных дискретных случайных процессов) с дисперсией

$$\sigma_{0 \text{ Вых}}^2(nT) = \sigma_{0 \text{ Вых}}^2(n \pmod{m}) = \sigma_{\text{Вх}}^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (h_k^*(\nu m T))^2, \\ k = n \pmod{m} = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.42)$$

где $A \pmod{B}$ означает число A по модулю B .

Составляющие выходного шума, обусловленные квантованием сигналов на выходах умножителей ($e_{j \text{ Вых}}(nT)$). Квантование сигналов на выходах умножителей осуществляется в ЦФ, работающем с интервалом дискретизации T и находящемся после ЭЧД. Оценки максимального значения $E_{j \text{ Вых}}$ и дисперсии $\sigma_{j \text{ Вых}}^2$ составляющей $e_{j \text{ Вых}}(nT)$ аналогичны (3.22) и (3.28):

$$E_{j \text{ Вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{j \text{ Вых}}(nT)| \leq 0,5 Q r_j^* \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)|; \quad (3.43)$$

$$\sigma_{j \text{ Вых}}^2 = r_j^* \sigma_{j,k}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (g_j(nT))^2. \quad (3.44)$$

Значения r_j^* (число умножителей, подключенных к j -му сумматору и создающих шум) могут отличаться от значений в (3.22) и (3.28), а в ряде случаев и зависеть от времени, поскольку во входном сигнале $x^*(nT)$ ЦФ (см. рис. 3.10,а) между каждой парой информационных отсчетов имеется $m-1$ нулевых отсчетов, а умножение на нуль не приводит к появлению шума квантования.

Шум квантования выходного сигнала. Оценка максимального значения $E_{\text{Вых}}$ шума квантования имеет вид

$$E_{\text{Вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{\text{Вых}}(nT)| \leq 0,5 Q_{\text{Вх}} \max_k \sum_{\nu=0}^{\infty} |h_k^*(\nu m T)| + \\ + 0,5 Q \sum_j r_j^* \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)|. \quad (3.45)$$

Дисперсия $\sigma_{\text{Вых}}^2(nT)$ шума квантования

$$\sigma_{\text{Вых}}^2(nT) = \sigma_{\text{Вых}}^2(n \pmod{m}) = \frac{Q_{\text{Вх}}^2}{12} \sum_{\nu=0}^{\infty} (h_k^*(\nu m T))^2 + \\ + \frac{Q^2}{12} \sum_j r_j^* \sum_{n=0}^{\infty} (g_j(nT))^2. \quad (3.46)$$

Формулы (3.45) и (3.46) получены с учетом (3.18) — (3.20), (3.24) — (3.26) и (3.41) — (3.44).

Диапазон изменения сигналов. При оценке диапазона изменения сигнала $v_j(nT)$ на выходе j -го сумматора ЦФ необходимо часть ПВЦС от ее входа до выхода j -го сумматора заменить эквивалентной схемой ЭСПВДС. Тогда

$$V_j = \max_{n \geq 0} |v_j(nT)| \leq \max_k |v_{j,k}(\nu m T + kT)| \leq \max_k \sum_{\nu=0}^{\infty} |f_{j,k}^*(\nu m T)|, \\ k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.47)$$

где $v_{j,k}(vmT+kT)$ — сигнал на выходе k -й ветви ЭСИПВДС, а $f_{j,k}^*(vmT)$ — импульсная характеристика ДС с передаточной функцией $F_{j,k}^*(z^m)$, определяемой по известной передаточной функции $F_j(z)$ ЦФ от его входа до выхода j -го сумматора с помощью (2.47).

Диапазон изменения сигнала в произвольной точке ЦФ ПВЦС с учетом (3.47) определяется формулой

$$V_{j,l} = \max_{n \geq 0} |v_{j,l}(nT)| \leq \alpha_{j,l} V_j, \quad (3.48')$$

где $v_{j,l}(nT)$ — сигнал на выходе j -го сумматора (при $l=0$) или l -го умножителя, подключенного к выходу j -го сумматора ($l=1, 2, \dots, r_j$); $\alpha_{j,l}$ — коэффициент l -го умножителя ($\alpha_{j,0}=1$).

Диапазон изменения сигналов в ЦФ с учетом (3.47), (3.48')

$$V = \max_{j,l} \left[\alpha_{j,l} \left(\max_k \sum_{v=0}^{\infty} |f_{j,k}^*(vmT)| \right) \right]. \quad (3.48'')$$

Пример 3.23. Рассматривается ПВЦС (см. рис. 3.10,а), содержащая РЦФ, реализованный в виде каскадной структуры с передаточной функцией

$$H_-(z) = \prod_{j=1}^2 H_j(z) = \prod_{j=1}^2 \frac{B_j(z)}{A_j(z)} = \prod_{j=1}^2 \frac{b_{0j} + b_{1j}z^{-1} + b_{2j}z^{-2}}{1 + a_{1j}z^{-1} + a_{2j}z^{-2}}, \quad (3.49)$$

алгоритм работы которого описывается разностными уравнениями:

$$u(nT) = \sum_{l=0}^2 b_{l1} x^*(nT-lT) - \sum_{l=1}^2 a_{l1} u(nT-lT);$$

$$y(nT) = \sum_{l=0}^2 b_{l2} u(nT-lT) - \sum_{l=1}^2 a_{l2} y(nT-lT).$$

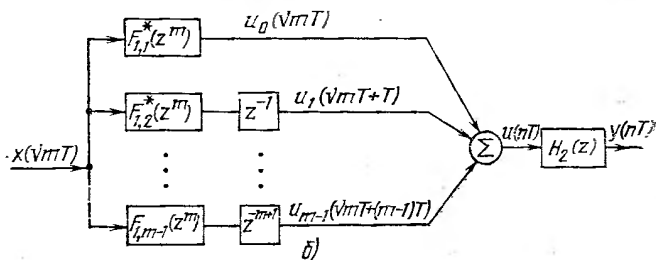
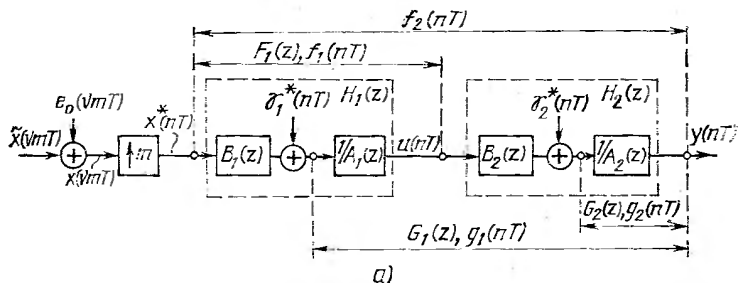


Рис. 3.11

На рис. 3.11,а изображена линейная модель ПВДС, где $e_0(vmT)$ и $\gamma_{*j}^*(nT)$ — воздействия, учитывающие соответственно шумы квантования входного сигнала и сигналов на выходах умножителей, подключенных к j -му сумматору ($j=1, 2$).

Оценки составляющей $e_{0\text{ вых}}(nT)$ ошибки квантования выходного сигнала определяются из (3.41) и (3.42) после замены ПВДС (см. рис. 3.10,а) ЭС ПВДС (см. рис. 3.10,б).

Оценки составляющих $e_{j\text{ вых}}(nT)$ ошибки квантования выходного сигнала определяются из (3.43) и (3.44), причем $g_1(nT)$ и $g_2(nT)$ — импульсные характеристики частей ЦФ с передаточными функциями $G_1(z) = (1/A_1(z))H_2(z)$ и $G_2(z) = 1/A_2(z)$ (см. (3.49) и рис. 3.11,а), а $r^*_1=3$, $r^*_2=5$ (m принято равным 3).

Оценка диапазона изменения сигналов в ПВДС определяется из (3.48''), причем оценка максимального значения сигнала $v_j(nT)$ на выходе j -го сумматора определяется из (3.47) после замены части ПВДС от ее входа до выхода j -го сумматора ЭС ПВДС. На рис. 3.11,б показана соответствующая эквивалентная схема при оценке сигнала $v_1(nT) = u(nT)$ на выходе первого сумматора ($j=1$). Передаточные функции $F^*_{1,k}(z^m)$ фильтров в k -й ветви ЭС ПВДС ($k=0, 1, \dots, m-1$) определяются по передаточной функции $F_1(z) = H_1(z)$ (см. рис. 3.11,а) с помощью формулы (2.47), а импульсные характеристики $f^*_{1,k}(vmT)$ можно определить по импульсной характеристике $f_1(nT)$.

3.11.3. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в МВЦС

Рассматривается МВЦС, состоящая из p подсистем (см. 2.5.5 и рис. 2.27). Каждая κ -я ($\kappa=1, 2, \dots, p$) подсистема содержит ЭЧД, увеличивающий частоту дискретизации входного сигнала κ -й подсистемы в m_κ раз, и цифровой фильтр с передаточной функцией $H_\kappa(z^{m/\omega_\kappa})$ и импульсной характеристикой $h_\kappa\left(n\frac{m}{\omega_\kappa}T\right)$,

$$\text{где } m = \prod_{l=1}^p m_l, \quad \omega_\kappa = \prod_{l=1}^{\kappa} m_l.$$

Составляющая выходного шума квантования, обусловленная квантованием входного сигнала ($e_{0\text{ вых}}(nT)$). Для получения оценок абсолютного значения и дисперсии данной составляющей в МВЦС необходимо соответствующую МВДС, используемую в линейной модели, привести к эквивалентной ПВДС, заменив эквивалентной схемой ЭСИ (см. 2.5.5), и использовать методику, рассмотренную в 3.11.1 (ЭСИ заменить на ЭСИ).

Абсолютное значение и дисперсия составляющей $e_{0\text{ вых}}(nT)$ определяются соответственно формулами:

$$E_{0\text{ вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{0\text{ вых}}(nT)| \leq 0,5 Q_{\text{вых}} \max_k \sum_{v=0}^{\infty} |h_k^*(vmT)|; \quad (3.50)$$

$$\sigma_{0\text{ вых}}^2(nT) = \sigma_{0\text{ вых}}^2(n \pmod{m}) = \frac{Q_{\text{вых}}^2}{12} \sum_{v=0}^{\infty} (h_k^*(vmT))^2, \quad (3.51)$$

где $h_k^*(vmT)$ — импульсная характеристика ДС с передаточной функцией $H^*_{\kappa,k}(z^m)$, находящейся в k -й ветви ЭСИ, заменившей ЭСИ МВДС.

Составляющие выходного шума квантования, обусловленные квантованием сигналов на выходах умножителей ($e_{\kappa,j\text{ вых}}(nT)$). Для оценки составляющей $e_{\kappa,j\text{ вых}}(nT)$, определяемой квантованием сигналов на выходах умножителей κ -й ($\kappa=1, 2, \dots, p$) подсистемы, подключенных к j -му ($j=1, 2, \dots, r^*_{\kappa,j}$) сумматору, т. е. воздействием $\gamma_{\kappa,j}^*\left(n\frac{m}{\omega_\kappa}T\right)$, необходимо часть МВЦС от выхода κ -й

подсистемы до выхода МВЦС заменить эквивалентной схемой ЭСІ, которую, в свою очередь, заменить эквивалентной схемой ЭСІІ.

Абсолютное значение и дисперсия составляющей $e_{\kappa, j \text{ Вых}}(nT)$ определяется соответственно формулами:

$$E_{\kappa, j \text{ Вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{\kappa, j \text{ Вых}}(nT)| \leq 0,5 r_{\kappa, j}^* Q \max_{k_{\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| g_{\kappa, j}^{k_{\kappa}} \left(n \frac{m}{w_{\kappa}} T \right) \right|; \quad (3.52)$$

$$\sigma_{\kappa, j \text{ Вых}}^2(nT) = \sigma_{\kappa, j \text{ Вых}}^2 \left(n \left(\text{mod} \frac{m}{w_{\kappa}} \right) \right) = r_{\kappa, j}^* \frac{Q^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_{\kappa, j}^{k_{\kappa}} \left(n \frac{m}{w_{\kappa}} T \right) \right)^2, \\ k_{\kappa} = n \left(\text{mod} \frac{m}{w_{\kappa}} \right) = 0, 1, \dots, \frac{m}{w_{\kappa}} - 1, \quad (3.53)$$

где $r_{\kappa, j}^*$ — число умножителей, подключенных к j -му сумматору κ -й подсистемы;

$g_{\kappa, j}^{k_{\kappa}} \left(n \frac{m}{w_{\kappa}} T \right)$ — импульсная характеристика последовательного соединения части ЦФ κ -й подсистемы от точки приложения воздействия $\gamma_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{w_{\kappa}} T \right)$ до выхода

κ -й подсистемы и системы с передаточной функцией $H_{\kappa+1}^* \left(z \frac{m}{w_{\kappa}} \right)$, находящейся в k_{κ} -й ($k_{\kappa} = 0, 1, \dots, m/w_{\kappa} - 1$) параллельной ветви эквивалентной системы ЭСІІ, заменившей последовательное соединение p -х подсистем, находящихся между выходом κ -й подсистемы и выходом МВЦС. Процесс $e_{\kappa, j \text{ Вых}}(nT)$ является периодически стационарным дискретным случайным процессом, причем период повторения его статистических характеристик зависит от номера κ подсистемы, в которой находится источник соответствующего воздействия $\gamma_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{w_{\kappa}} T \right)$.

Шум квантования выходного сигнала. Абсолютное значение $E_{\text{Вых}}$ и дисперсия $\sigma_{\text{Вых}}^2(nT)$ шума квантования выходного сигнала с учетом (3.18)–(3.20), (3.24)–(3.26) и (3.50)–(3.53) определяются соответственно формулами:

$$E_{\text{Вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{\text{Вых}}(nT)| \leq 0,5 Q_{\text{Вх}} \max_k \sum_{v=0}^{\infty} |h_k^*(v m T)| + \\ + 0,5 Q \sum_{\kappa} \sum_j r_{\kappa, j}^* \max_{k_{\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| g_{\kappa, j}^{k_{\kappa}} \left(n \frac{m}{w_{\kappa}} T \right) \right|; \quad (3.54)$$

$$\sigma_{\text{Вых}}^2(nT) = \sigma_{\text{Вых}}^2 \left(n \left(\text{mod} m \right) \right) = \frac{Q_{\text{Вх}}^2}{12} \sum_{v=0}^{\infty} (h_k^*(v m T))^2 + \\ + \frac{Q^2}{12} \sum_{\kappa} \sum_j r_{\kappa, j}^* \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_{\kappa, j}^{k_{\kappa}} \left(n \frac{m}{w_{\kappa}} T \right) \right)^2, \quad (3.55)$$

где

$$k = n \left(\text{mod} m \right) = 0, 1, \dots, m - 1; k_{\kappa} = n \left(\text{mod} \frac{m}{w_{\kappa}} \right) = \\ = 0, 1, \dots, \frac{m}{w_{\kappa}} - 1; \kappa = 1, 2, \dots, p, m = \prod_{l=1}^p m_l;$$

$$\omega_{\kappa} = \prod_{l=1}^{\kappa} m_l.$$

Диапазон изменения сигналов. При оценке диапазона изменения сигнала $v_{\kappa,j}^* \left(n \frac{m}{\omega_{\kappa}} T \right)$ на выходе j -го сумматора ЦФ κ -й подсистемы необходимо часть МВЦС от ее входа до выхода j -го сумматора заменить ЭСИ, которую, в свою очередь, заменить ЭСИ, как это делается для ПВЦС (см. 3.11.1). Тогда

$$V_{\kappa,j} = \max_{n \geq 0} \left| v_{\kappa,j}^* \left(n \frac{m}{\omega_{\kappa}} T \right) \right| \leq \max_{k_{\kappa}} \left| v_{\kappa,j}^{k_{\kappa}} (v m T + k_{\kappa} T) \right| \leq \max_{k_{\kappa}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| f_{\kappa,j}^{k_{\kappa}} (v m T) \right|, \quad (3.56)$$

где $v_{\kappa,j}^{k_{\kappa}} (v m T + k_{\kappa} T)$ — сигнал на выходе k_{κ} -й ($k_{\kappa} = 0, 1, \dots, \omega_{\kappa} - 1$) ветви ЭСИ, а $f_{\kappa,j}^{k_{\kappa}} (v m T)$ — импульсная характеристика ДС, находящейся в k_{κ} -й ветви ЭСИ.

Диапазон изменения сигнала в произвольной точке ЦФ κ -й подсистемы с учетом (3.56) определяется формулой

$$V_{\kappa,j}^l = \max_{n \geq 0} \left| v_{\kappa,j}^l \left(n \frac{m}{\omega_{\kappa}} T \right) \right| \leq \alpha_{\kappa,j}^l V_{\kappa,j}, \quad (3.57')$$

где $v_{\kappa,j}^l \left(n \frac{m}{\omega_{\kappa}} T \right)$ — сигнал на выходе j -го сумматора κ -й подсистемы (при $l=0$) или l -го умножителя, подключенного к выходу j -го сумматора ($l=1, 2, \dots, r_{\kappa,j}$), а $\alpha_{\kappa,j}^l$ — коэффициент l -го умножителя ($\alpha_{\kappa,j}^0 = 1$).

Диапазон изменения сигналов в МВЦС с учетом (3.56), (3.57) определяется формулой

$$V = \max_{\kappa, j, l} \alpha_{\kappa,j}^l \max_{k_{\kappa}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| f_{\kappa,j}^{k_{\kappa}} (v m T) \right|. \quad (3.57'')$$

3.11.4. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в ПНЦС

Оценки абсолютного значения $E_{\text{вых}}$ и дисперсии $\sigma_{\text{вых}}^2$ шума квантования выходного сигнала, а также диапазона изменения сигналов в простейшей нисходящей цифровой системе (ПНЦС), содержащей ЦФ с передаточной функцией $H(z)$ и компрессор частоты дискретизации (КЧД), уменьшающий частоту дискретизации в m раз (m — целое), аналогичны соответствующим оценкам для систем с постоянной частотой дискретизации и определяются (3.23), (3.29), и (3.36), поскольку изменение частоты дискретизации с помощью КЧД осуществляется после обработки сигнала в ЦФ. Это видно из уравнения (2.54), описывающего ПНЦС во временной области.

3.11.5. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в МНЦС

Рассматривается МНЦС, состоящая из p подсистем (см. 2.5.7 и рис. 2.33). Каждая κ -я подсистема ($\kappa = 1, 2, \dots, p$) содержит ЦФ с передаточной функцией $H_{\kappa}(z^{m/\mu_{\kappa}})$ и импульсной характеристикой $h_{\kappa} \left(n \frac{m}{\mu_{\kappa}} T \right)$ и КЧД, уменьша-

ющий частоту дискретизации выходного сигнала фильтра κ -й подсистемы в m_κ раз ($m = \prod_{k=1}^p m_k$; $\mu_\kappa = \prod_{k=\kappa}^p m_k$).

Составляющая выходного шума квантования, обусловленная квантованием входного сигнала ($e_{0 \text{ Вых}}(v m T)$). Для получения оценок абсолютного значения и дисперсии данной составляющей в МНЦС необходимо соответствующую МНДС, используемую в линейной модели, привести к эквивалентной ПНДС, заменив эквивалентной схемой ЭСИ (см 2.5.7).

Абсолютное значение и дисперсия составляющей $e_{0 \text{ Вых}}(v m T)$ определяются по передаточной функции и импульсной характеристике эквивалентного фильтра ЭСИ с помощью формул:

$$E_{0 \text{ Вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{0 \text{ Вых}}(v m T)| \leq 0,5 Q_{\text{ВХ}} \sum_{n=0}^{\infty} |h^*(n T)|; \quad (3.58)$$

$$\sigma_{0 \text{ Вых}}^2 = \frac{Q_{\text{ВХ}}^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} (h^*(n T))^2, \quad (3.59)$$

где $h^*(n T)$ — импульсная характеристика эквивалентного фильтра в ЭСИ.

Составляющие выходного шума квантования, обусловленные квантованием сигналов на выходах умножителей ($e_{\kappa, j \text{ Вых}}(v m T)$). Для оценки составляющей $e_{\kappa, j \text{ Вых}}(v m T)$, обусловленной квантованием сигналов на выходах умножителей κ -й подсистемы ($\kappa=1, 2, \dots, p$), подключенных к j -му сумматору ($j=1, 2, \dots, r_{\kappa, j}$), т. е. воздействием $v_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{\mu_\kappa} T \right)$, необходимо часть МНЦС от выхода j -го сумматора κ -й подсистемы до выхода МНЦС заменить эквивалентной схемой ЭСИ.

Абсолютное значение и дисперсия составляющей $e_{\kappa, j \text{ Вых}}$ определяется соответственно формулами:

$$E_{\kappa, j \text{ Вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{\kappa, j \text{ Вых}}(v m T)| \leq 0,5 r_{\kappa, j} Q \sum_{n=0}^{\infty} \left| g_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{\mu_\kappa} T \right) \right|; \quad (3.60)$$

$$\sigma_{\kappa, j \text{ Вых}}^2 = r_{\kappa, j} \frac{Q^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{\mu_\kappa} T \right) \right)^2, \quad (3.61)$$

где $g_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{\mu_\kappa} T \right)$ — импульсная характеристика эквивалентного фильтра ЭСИ, а $r_{\kappa, j}$ — число умножителей, подключенных к j -му сумматору κ -й подсистемы.

Шум квантования выходного сигнала. Абсолютное значение $E_{\text{Вых}}$ и дисперсия $\sigma_{\text{Вых}}^2$ шума квантования выходного сигнала с учетом (3.18)—(3.20), (3.24)—(3.26) и (3.58)—(3.61) определяются соответственно формулами:

$$E_{\text{Вых}} = \max_{n \geq 0} |e_{\text{Вых}}(v m T)| \leq 0,5 Q_{\text{ВХ}} \sum_{n=0}^{\infty} |h^*(n T)| + \\ + 0,5 Q \sum_{\kappa} \sum_j r_{\kappa, j} \sum_{n=0}^{\infty} \left| g_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{\mu_\kappa} T \right) \right|; \quad (3.62)$$

$$= \frac{Q_{\text{ВХ}}^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} (h^*(n T))^2 + \frac{Q^2}{12} \sum_{\kappa} \sum_j r_{\kappa, j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_{\kappa, j}^* \left(n \frac{m}{\mu_\kappa} T \right) \right)^2. \quad (3.63)$$

Диапазон изменения сигналов. При оценке диапазона изменения сигнала $v_{\kappa,j}^* \left(n \frac{m}{\mu_{\kappa}} T \right)$ на выходе j -го сумматора ЦФ κ -й подсистемы необходимо часть МНЦС от ее входа до выхода j -го сумматора заменить эквивалентной схемой ЭСИ. Тогда

$$V_{\kappa,j} = \max_{n \geq 0} \left| v_{\kappa,j}^* \left(n \frac{m}{\mu_{\kappa}} T \right) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_{\kappa,j}^*(nT)|, \quad (3.64)$$

где $f_{\kappa,j}^*(nT)$ — импульсная характеристика системы, входящей в соответствующую ЭСИ.

Диапазон изменения сигнала в произвольной точке ЦФ κ -й подсистемы с учетом (3.64) определяется формулой

$$V_{\kappa,j}^l = \max_{n \geq 0} \left| v_{\kappa,j}^l \left(n \frac{m}{\mu_{\kappa}} T \right) \right| \leq \alpha_{\kappa,j}^l V_{\kappa,j}, \quad (3.65')$$

где $v_{\kappa,j}^l \left(n \frac{m}{\mu_{\kappa}} T \right)$ — сигнал на выходе j -го сумматора κ -й подсистемы (при $l=0$) или l -го умножителя, подключенного к выходу j -го сумматора ($l=1, 2, \dots, r_{\kappa,j}$), а $\alpha_{\kappa,j}^l$ — коэффициент l -го умножителя ($\alpha_{\kappa,j}^0 = 1$).

Диапазон изменения сигналов в МНЦС с учетом (3.64) и (3.65') определяется формулой

$$V = \max_{\kappa,j,l} \alpha_{\kappa,j}^l \sum_{n=0}^{\infty} |f_{\kappa,j}^*(nT)|. \quad (3.65'')$$

4. ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ. АЛГОРИТМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

4.1.1. Нерекурсивные фильтры с линейной ФЧХ

Существуют [1.6] четыре вида фильтров (рис. 4.1) с точно линейной фазочастотной характеристикой (ФЧХ) и передаточной функцией (2.4):

а) фильтр вида 1: N — нечетное, $b_l = b_{N-l-1}$ (симметричные коэффициенты);
 б) фильтр вида 2: N — четное, $b_l = b_{N-l-1}$ (симметричные коэффициенты);
 в) фильтр вида 3: N — нечетное, $b_l = -b_{N-l-1}$ (антисимметричные коэффициенты);
 г) фильтр вида 4: N — четное, $b_l = -b_{N-l-1}$ (антисимметричные коэффициенты). Для фильтра вида 1 справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} H_{\text{НП}}(e^{i\omega T}) &= e^{-iK\omega T} \sum_{l=0}^K c_l \cos l\omega T; \\ A_{\text{НП}}(\omega) &= \left| \sum_{l=0}^K c_l \cos l\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где $K = (N-1)/2$; $c_0 = b_K$; $c_l = 2b_{K-l}$, $l = 1, 2, \dots, K$.

Для фильтра вида 2 справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} H_{Н2} (e^{i\omega T}) &= e^{-i(K+0,5)\omega T} \sum_{l=0}^K c_l \cos(l+0,5)\omega T; \\ A_{Н2}(\omega) &= \left| \sum_{l=0}^K c_l \cos(l+0,5)\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где $K=(N-1)/2$, $c_l=2b_{K-l}$, $l=0, 1, \dots, K$.

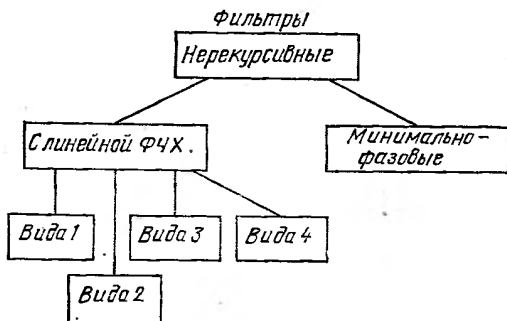


Рис. 4.1

Для фильтра вида 3 справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} H_{Н3} (e^{i\omega T}) &= e^{-iK\omega T} \sum_{l=1}^K c_l \sin l\omega T; \\ A_{Н3}(\omega) &= \left| \sum_{l=1}^K c_l \sin l\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где $K=(N-1)/2$; $c_0=b_K=0$; $c_l=2b_{K-l}$, $l=1, 2, \dots, K$.

Для фильтра вида 4 справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} H_{Н4} (e^{i\omega T}) &= e^{-i(K+0,5)\omega T} \sum_{l=0}^K c_l \sin(l+0,5)\omega T; \\ A_{Н4}(\omega) &= \left| \sum_{l=0}^K c_l \sin(l+0,5)\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

где $K=(N-2)/2$; $c_l=2b_{K-l}$, $l=0, 1, \dots, K$.

Передаточные функции $H(z)$ фильтров всех четырех видов могут иметь нули, расположенные внутри, на и вне единичной окружности на z -плоскости. На рис. 4.2,а показано возможное расположение нулей, причем $z_1^{(1)}$ и $z_2^{(1)}$, $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$, $z_1^{(3)}$ и $z_2^{(3)}$ представляют собой комплексно-сопряженные величины и

$$|z_1^{(1)}| = 1/|z_2^{(1)}|; \quad |z_1^{(2)}| = 1/|z_2^{(2)}|; \quad |z_1^{(3)}| = |z_2^{(3)}| = |z_4| = |z_5| = 1.$$

Пример 4.1. Фильтр вида 1: $H_{Н1}(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$, $N=3$, нули $z_1=z_2=-1$; Фильтр вида 2: $H_{Н2}(z) = 1 - 0,2z^{-1} - 0,2z^{-2} + z^{-3}$, $N=4$, нули $z_1=-1$, $z_{2,3} = -0,6 \pm i0,8$;

фильтр вида 3: $H_{\text{нз}}(z) = 2 - 2z^{-2}$, $N=3$, нули $z_{1,2} = \pm 1$;
 фильтр вида 4: $H_{\text{нз}}(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$, $N=4$, нули $z_1=1$, $z_{2,3} = -0,6 \pm i0,8$.

Основное свойство $H_{\text{нр}}(z)$:

$$\left. \begin{aligned} H_{\text{нр}}(z) &= H_1(z) H_2(z) H_3(z); \\ |H_1(e^{i\omega T})| &= |H_2(e^{i\omega T})|, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где нули $H_1(z)$ совпадают или с нулями $H_{\text{нр}}(z)$, расположенными внутри единичной окружности, или с нулями $H_{\text{нр}}(z)$, расположенными на единичной окружности и имеющими четную кратность; нули $H_2(z)$ совпадают с нулями $H_{\text{нр}}(z)$, расположенными вне единичной окружности, или с нулями $H_{\text{нр}}(z)$, расположенными на единичной окружности и имеющими четную кратность; $H_3(z) = \text{const}$ или нули $H_3(z)$ совпадают с нулями $H_{\text{нр}}(z)$, расположенными на единичной окружности и имеющими нечетную кратность.

Фильтры всех четырех видов реализуют с учетом симметричности или антисимметричности ко-

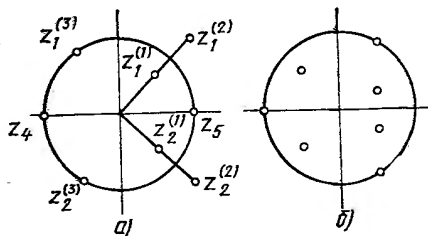


Рис. 4.2

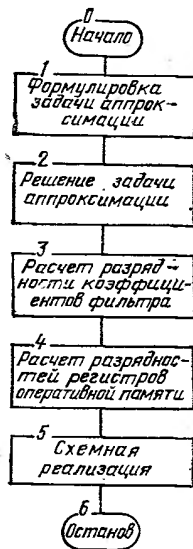


Рис. 4.3

эффициентов (см. рис. 2.7). При этом реализационные характеристики (см. 2.2.4), например, для фильтра вида 1 имеют значения:

$$L_0 = N - 1; \quad L_{\Pi} = (N + 1)/2; \quad V_y = (N + 1)/2; \quad V_c = N - 1.$$

Рассмотренные фильтры применяются в качестве избирательных фильтров, преобразователей Гильберта, дифференциаторов и корректоров АЧХ.

4.1.2. Минимально-фазовые нерекурсивные фильтры

Это фильтры (см. рис. 4.1), нули передаточных функций которых находятся внутри и на единичной окружности на z -плоскости (рис. 4.2.б).

Пример 4.2. Если $H(z) = -0,244z^{-3} + 1,01z^{-2} - 1,4z^{-1} + 1$, то нули $H(z)$ имеют значения: $z_{1,2} = 0,5 \pm i0,6$; $z_3 = 0,4$; $|z_{1,2}| < 1$; $|z_3| < 1$, поэтому соответствующий фильтр является минимально-фазовым.

Минимально-фазовые фильтры применяются в качестве избирательных в тех случаях, когда групповое время замедления должно быть малым.

При реализации фильтра в прямой форме (см. рис. 2.6) реализационные характеристики (см. 2.2.4) имеют значения:

$$L_0 = L_{\Pi} = N; \quad V_y = N; \quad V_c = N - 1.$$

4.1.3. Основные этапы проектирования: нерекурсивных фильтров

На рис. 4.3 показана схема, поясняющая основные этапы проектирования нерекурсивных фильтров. Первый этап — формулировка задачи аппроксимации — включает в себя следующие шаги:

выбор типа фильтра (с линейной ФЧХ определенного вида или минимально-фазового);

выбор аппроксимирующей функции $\Phi(\omega, \mathbf{c})$, значения которой определяют требуемую характеристику фильтра, например АЧХ. Здесь ω — нормированная частота (см. 2.3.2); \mathbf{c} — вектор коэффициентов, совпадающий с вектором коэффициентов фильтра \mathbf{b} или достаточно просто связанный с ним;

определение аппроксимируемой функции $B(\omega)$, задающей требования к заданной характеристике;

выбор критерия аппроксимации, т. е. уточнение смысла приближенного равенства,

$$\Phi(\omega, \mathbf{c}) \approx B(\omega) \quad (4.6)$$

при заданных значениях ω ;

определение весовой функции аппроксимации $q(\omega)$, задающей требования к точности приближенного равенства (4.6). Целью первого этапа является математическая формулировка задачи вычисления вектора \mathbf{c} по заданным требованиям к характеристикам фильтра.

Второй этап — решение задачи аппроксимации — включает в себя следующие шаги:

оценку необходимого порядка фильтра N ;

расчет вектора коэффициентов \mathbf{c} ;

проверку критерия получения решения (выполнение заданных требований к характеристикам фильтра).

Если требования к характеристикам выполняются, то по вектору коэффициентов \mathbf{c} определяется вектор \mathbf{b} и второй этап заканчивается. Если требования не выполняются, необходимо вернуться ко второму шагу и рассчитать вектор \mathbf{c} при большем значении N .

Целью второго этапа является определение вектора коэффициентов фильтра \mathbf{b} .

Третий этап — расчет разрядности s_n коэффициентов (или разрядности регистров ПЗУ) — зависит от выбранной элементной базы. При реализации фильтра на специализированном микропроцессоре типа DSP [4.1] значение s_n задано и на третьем этапе остается проверить, выполняются ли заданные требования к характеристикам фильтра. Если требования выполняются, то следует перейти к четвертому этапу, если нет — то вернуться ко второму этапу, повторить решение аппроксимационной задачи при большем N и снова перейти к третьему этапу. Если фильтр реализуется на БИС общего применения или универсальных микропроцессорах, то необходимо минимизировать значение s_n , уменьшая его до тех пор, пока заданные требования к характеристикам перестанут выполняться.

На четвертом этапе рассчитываются разрядности регистров оперативной памяти таким образом, чтобы мощность собственных шумов фильтра была меньше, чем мощность шума на входе. На пятом этапе осуществляется схемная реализация фильтра на выбранной элементной базе [2.11].

4.1.4. Сравнение нерекурсивных и рекурсивных фильтров

Преимущества нерекурсивных фильтров по сравнению с рекурсивными сводятся к следующему.

Нерекурсивные фильтры могут иметь точно линейную ФЧХ.

Мощность собственных шумов НФ, как правило, гораздо меньше, чем у РФ. Она равна нулю, т. е. у НФ отсутствуют собственные шумы в том случае, если операции сложения и умножения выполняются точно. У РФ мощность собственных шумов не может быть сделана равной нулю, поскольку в цепи обратной связи этих фильтров всегда должно выполняться округление при вычислении произведений отсчетов на коэффициенты. Исключение составляет довольно ограниченный класс РФ с конечными импульсными характеристиками, например однородные и треугольные (см. разд. 7).

Для НФ проще вычисление коэффициентов. Это объясняется тем, что аппроксимирующая функция $\Phi(\omega, c)$ [см. ф-лу (4.7)] линейно зависит от коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_K .

В системах с изменением частоты дискретизации (см. разд. 7) применение НФ сокращает необходимое число арифметических операций.

Недостаток нерекурсивных фильтров по сравнению с рекурсивными состоит в том, что при одинаковых требованиях к АЧХ, отсутствии требований к линейности ФЧХ и постоянной частоте дискретизации они требуют выполнения существенно большего числа операций. Поэтому схемная реализация их оказывается намного сложнее.

4.2. ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ

4.2.1. Требования к аппроксимируемой функции.

Критерии аппроксимации

Целью решения аппроксимационной задачи является определение коэффициентов b_l передаточной функции фильтра. Аппроксимирующая функция $\Phi(\omega, c)$ должна удовлетворять следующим требованиям:

вектор c должен быть связан простой зависимостью с вектором коэффициентов b ;

функция $\Phi(\omega, c)$ должна достаточно просто зависеть от вектора c ;

при заданных значениях ω должно выполняться (4.6).

Наиболее простой и удобной для решения задачи аппроксимации является линейная зависимость функции $\Phi(\omega, c)$ от вектора c :

$$\Phi(\omega, c) = c \Phi(\omega) = \sum_{l=0}^K c_l \varphi_l(\omega). \quad (4.7)$$

Существуют два основных критерия аппроксимации, уточняющие смысл (4.6): среднеквадратический критерий

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(\omega) [B(\omega) - \Phi(\omega, c)]^2 d\omega \rightarrow \min \quad (4.8)$$

и наилучший равномерный (чебышевский) критерий

$$\max_{\alpha_1 \leq \omega \leq \alpha_2} q(\omega) |B(\omega) - \Phi(\omega, c)| \rightarrow \min. \quad (4.9)$$

Критерии (4.8) и (4.9) могут применяться совместно — каждый для определенной области частот. Выбор критерия аппроксимации определяется физическим смыслом задачи.

Общий принцип определения значений весовой функции $q(\omega)$ состоит в следующем: чем точнее должно выполняться (4.6) при $\omega = \omega_j$, тем больше должно быть значение $q(\omega_j)$. При использовании критерия (4.9) для отдельных подынтервалов частот $\alpha_{1j} \leq \omega \leq \alpha_{2j}$ задаются значения ϵ_j такие, чтобы на этих подынтервалах выполнялось неравенство

$$|B(\omega) - \Phi(\omega, c)| \leq \epsilon_j. \quad (4.10)$$

Тогда для j -го подынтервала

$$q(\omega) = R/\epsilon_j. \quad (4.11)$$

где R — произвольная константа (нормирующий множитель), общая для всех подынтервалов.

Пример 4.3. Пусть при использовании критерия (4.9) $\epsilon_1 = 0,1$; $\epsilon_2 = 0,01$; $\epsilon_3 = 0,001$. Примем $R = 0,1$, тогда

$$q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_{11} \leq \omega \leq \alpha_{21}; \\ 10 & \text{при } \alpha_{12} \leq \omega \leq \alpha_{22}; \\ 100 & \text{при } \alpha_{13} \leq \omega \leq \alpha_{23}. \end{cases}$$

В соответствии с (4.9) и (4.11) определяется оптимальная функция $\Phi(\omega, c) = \Phi^{(0)}(\omega, c)$, удовлетворяющая (4.10).

Критерий оптимальности формулируется следующим образом [4.2]: пусть в соответствии с (4.9) и (4.11) построены функции $\Phi_{K-1}(\omega, c)$ порядка $K-1$ и $\Phi_K(\omega, c)$ порядка K [см. (4.7)], при этом $\Phi_K(\omega, c)$ удовлетворяет (4.10), а $\Phi_{K-1}(\omega, c)$ — нет. Тогда не существует функции $\Phi(\omega, c)$ порядка, меньшего K , удовлетворяющей (4.10), т. е. построенная функция $\Phi_K(\omega, c)$ среди всех функций $\Phi(\omega, c)$, удовлетворяющих (4.10), имеет наименьший порядок и $\Phi^{(0)}(\omega, c) = \Phi_K(\omega, c)$.

Соотношение (4.11) можно использовать совместно с (4.8). Однако в этом случае (4.11) следует рассматривать лишь как эвристическую рекомендацию.

Иногда требования к функции $\Phi(\omega, c)$ задаются в следующей форме:

$$\xi_{1j} \leq \Phi(\omega, c) \leq \xi_{2j}.$$

В этом случае [2.11] следует принять:

$$\left. \begin{aligned} B(\omega) &= (\xi_{1j} + \xi_{2j})/2; \\ q(\omega) &= R/(\xi_{2j} - \xi_{1j}) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

и определять оптимальную функцию $\Phi^{(0)}(\omega, c)$ в соответствии со сформулированным выше критерием оптимальности.

4.2.2. Избирательные фильтры с линейной ФЧХ

Для этих фильтров аппроксимируемые функции имеют вид: в полосах пропускания $B(\omega) = 1$; в полосах задерживания $B(\omega) = 0$; в промежуточных полосах значение $B(\omega)$ не задано и может быть принято любым в пределах от 0 до 1.

Пример 4.4. Для ФНЧ (рис. 4.4)

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п} \text{ (полоса пропускания);} \\ 0 & \text{при } \omega_{г.з} \leq \omega \leq 0,5 \text{ (полоса задерживания).} \end{cases}$$

Аппроксимирующие функции имеют вид:
при нечетном N

$$\Phi(\omega, c) = \sum_{l=0}^K c_l \cos l 2\pi \omega, \quad (4.13)'$$

причем $K = (N-1)/2$, $b_l = c_{K-l}/2$, $l=0, 1, \dots, K-1$, $b_K = c_0$ [см. формулу (4.1)];
при четном N

$$\Phi(\omega, c) = \sum_{l=0}^K c_l \cos (2l+1) \pi \omega, \quad (4.13'')$$

причем $K = (N-2)/2$; $b_l = c_{K-l}/2$, $l=0, 1, \dots, K$ [см. формулу (4.2)].

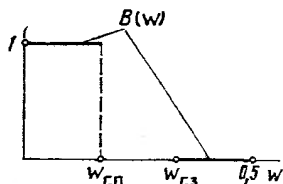


Рис. 4.4

4.2.3. Равнополосные фильтры с линейной ФЧХ

Если для ФНЧ $\omega_{г.п} + \omega_{г.з} = 0,5$ (см. пример 4.4), $q(\omega) = q(0,5 - \omega)$ (требования к точности аппроксимации в полосах пропускания и задерживания одинаковы) и N — нечетное, то при решении задачи аппроксимации в соответствии с критерием (4.8) или (4.9) часть коэффициентов c_l оказывается известной заранее [2.10]:

$$c_0 = 0,5; \quad c_{2l} = 0 \quad \text{при } 2 \leq 2l \leq K. \quad (4.14)$$

Такие фильтры называют равнополосными или полуполосными [2.11], у этих фильтров $N = 3 + 4l$, $l=0, 1, 2, \dots$, и реализационные характеристики лучше, чем у обычных избирательных фильтров с линейной ФЧХ:

$$L_0 = N - 1; \quad L_{п} = (N - 3)/4 + 1; \quad V_{y} = (N - 3)/4 + 1; \quad V_c = (N + 1)/2$$

(умножение на $c_0 = 0,5$ эквивалентно одному сдвигу и не учитывалось при определении значения V_y).

4.2.4. Преобразователи Гильберта

Преобразователь Гильберта (ПР) [1.6] используется для получения комплексного сигнала

$$v(nT) = x(nT) + i \hat{x}(nT), \quad (4.15)$$

спектр которого $V(e^{i2\pi\omega})$ удовлетворяет условию

$$V(e^{i2\pi\omega}) = \begin{cases} 2X(e^{i2\pi\omega}) & \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,5 \\ 0 & \text{при } 0,5 < \omega < 1, \end{cases} \quad (4.16)$$

где $X(e^{i2\pi\omega})$ — спектр заданного сигнала $x(nT)$. Из (4.15) и (4.16) следует, что спектр сигнала $\hat{x}(nT)$ равен

$$\hat{X}(e^{i2\pi\omega}) = \begin{cases} -iX(e^{i2\pi\omega}) & \text{при } 0 \leq \omega < 0,5; \\ iX(e^{i2\pi\omega}) & \text{при } 0,5 < \omega < 1, \end{cases}$$

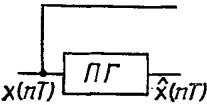
т. е. для получения сигнала $\hat{x}(nT)$ [и тем самым сигнала $u(nT)$] достаточно пропустить сигнал $x(nT)$ через идеальный ПГ (рис. 4.5) с комплексной частотной характеристикой:

$$H_{\text{и}}(e^{i2\pi\omega}) = \begin{cases} -i & \text{при } 0 \leq \omega < 0,5; \\ i & \text{при } 0,5 < \omega < 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Для идеального ПГ

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} [H_{\text{и}}(e^{i2\pi\omega})] &= 0; \\ \operatorname{Im} [H_{\text{и}}(e^{i2\pi\omega})] &= \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \omega < 0,5; \\ 1 & \text{при } 0,5 < \omega < 1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Очевидно, что идеальный ПГ нереализуем. Для того чтобы определить передаточную функцию $H_{\text{р}}(z)$ реального ПГ, необходимо аппроксимировать характеристики (4.18). Возможно построение реального ПГ в виде как рекурсивного, так и нерекурсивного фильтров. При построении ПГ в виде нерекурсивного фильтра целесообразно использовать фильтр вида 3 (см. 4.1), причем аппроксимирующая и аппроксимируемая функции имеют вид:



$$\left. \begin{aligned} \Phi(\omega c) &= \sum_{l=1}^K c_l \sin l 2\pi\omega; \\ B(\omega) &= -1 \text{ при } \alpha_1 \leq \omega \leq \alpha_2 < 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Рис. 4.5

При $\alpha_1 + \alpha_2 = 0,5$ и выборе весовой функции $q(\omega)$, удовлетворяющей условию $q(\omega) = \text{const}$, ПГ реализуется в виде равнополосного нерекурсивного фильтра (см. 4.2.3), причем $c_0 = 0$, $c_{2l} = 0$ при $2 \leq 2l \leq K$.

4.2.5. Минимально-фазовые фильтры

Для минимально-фазовых фильтров формулируются две основные задачи аппроксимации. В первой задаче заданы АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ фильтра; требуется определить $H(z)$ так, чтобы выполнялись приближенные равенства [4.3]:

$$\left. \begin{aligned} |H(e^{i2\pi\omega})| &\approx A(\omega); \\ \arg [H(e^{i2\pi\omega})] &\approx \varphi(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

При этом вводятся аппроксимируемые функции:

$$B_1(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad B_2(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

и аппроксимирующие функции:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\omega, \mathbf{b}) &= \sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l 2\pi\omega; \\ \Phi_2(\omega, \mathbf{b}) &= \sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l 2\pi\omega, \end{aligned}$$

так что вместо (4.20) рассматриваются эквивалентные им приближенные равенства:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\omega, \mathbf{b}) &\approx B_1(\omega); \\ \Phi_2(\omega, \mathbf{b}) &\approx B_2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Во второй задаче задана лишь АЧХ $A(\omega)$, а ФЧХ может быть произвольной. В этом случае аппроксимируемая и аппроксимирующая функции имеют вид:

$$B(\omega) \approx A^2(\omega);$$

$$\Phi(\omega, c) = \sum_{l=0}^K c_l \cos l 2\pi \omega,$$

причем функция $\Phi(\omega, c)$ не должна иметь вещественных корней нечетной кратности. Тогда, используя (4.1), можно построить функцию

$$H'(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l^* z^{-l} \quad (4.22)$$

(N — нечетное), вычислить корни $H'(z)$ и построить передаточную функцию $H(z)$ искомого минимально-фазового фильтра так, что корни $H(z)$ совпадают с корнями $H'(z)$, лежащими внутри и на единичной окружности в комплексной z -плоскости. Тогда из (4.5) следует, что

$$|H(e^{i 2\pi \omega})| \approx A(\omega).$$

4.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ

4.3.1. Классификация методов

Методы решения тесно связаны с принятыми критериями аппроксимации. В зависимости от использованного критерия их можно разбить на три группы. Первая группа соответствует среднеквадратическому критерию, вторая — наилучшему равномерному (чебышевскому) критерию и третья — иным критериям аппроксимации. Первая группа включает методы разложения в ряд Фурье и наименьших квадратов, вторая — алгоритм Ремеза и некоторые другие сравнительно редко используемые алгоритмы. Методы последней группы [1.6, 4.4] относительно редко используются при проектировании фильтров и поэтому ниже не рассматриваются.

4.3.2. Разложение в ряд Фурье аппроксимируемой функции

Этот метод применим для расчета коэффициентов фильтров с линейной ФЧХ и решения второй задачи для минимально-фазовых фильтров. Если аппроксимирующая функция имеет вид (4.7), причем $\varphi_l(\omega) = \cos l 2\pi \omega$ или $\varphi_l(\omega) = \sin l 2\pi \omega$, то можно принять

$$c_l = D \int_0^{0.5} B(\omega) \varphi_l(\omega) d\omega, \quad (4.23)$$

где $D = 2$ при $l = 0$; $D = 4$ при $l > 0$. Функция $B(\omega)$ должна быть определена при всех значениях ω , т. е. доопределена в промежуточной полосе от $\omega_{г.п}$ до $\omega_{г.з}$. Для того чтобы исключить явление Гиббса [4.5], обуславливающее неустранимую погрешность аппроксимации, достаточно, чтобы после доопределения функция $B(\omega)$ была непрерывна при всех значениях ω .

Пример 4.5. Рассчитать коэффициенты двух ФНЧ с линейной ФЧХ (см. пример 4.4): $N = 11$; $N = 15$ при $\omega_{г.п} = 0,125$; $\omega_{г.з} = 0,375$ (равнополосные фильтры). Рассчитать АЧХ каждого из фильтров для 5 равноотстоящих значений ω , начиная с $\omega = 0$ при шаге $\Delta\omega = 0,125$.

Доопределяя $B(\omega)$ в промежуточной полосе:

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ \frac{\omega - \omega_{г.з}}{\omega_{г.п} - \omega_{г.з}} & \text{при } \omega_{г.п} \leq \omega \leq \omega_{г.з}; \\ 0 & \text{при } \omega_{г.з} \leq \omega \leq 0,5 \end{cases}$$

и учитывая, что $\varphi_l(\omega) = \cos 2\pi l \omega$, из (4.23) получаем:

$$c_l = \frac{2 \sin 2\pi l \omega_{г.п}}{l \pi} - \frac{2 \omega_{г.з} (\sin 2\pi l \omega_{г.з} - \sin 2\pi l \omega_{г.п})}{(\omega_{г.п} - \omega_{г.з}) l \pi} + \\ + \frac{1}{\omega_{г.п} - \omega_{г.з}} \left(\frac{\cos 2\pi l \omega_{г.з} - \cos 2\pi l \omega_{г.п}}{l^2 \pi^2} + \right. \\ \left. + \frac{2 \omega_{г.з} \sin 2\pi l \omega_{г.з} - 2 \omega_{г.п} \sin 2\pi l \omega_{г.п}}{l \pi} \right)$$

при $l > 0$.

В табл. 4.1 приведены значения коэффициентов b_l фильтров, в табл. 4.2 — значения АЧХ фильтров.

Таблица 4.1

l	$b_l = b_{N-1-l}$	
	$N=11$	$N=15$
0	-0,0114632	0,0058486
1	0,0000000	0,0000000
2	-0,0318422	-0,0114632
3	0,0000000	0,0000000
4	0,2865796	-0,0318522
5	0,5000000	0,0000000
6	—	0,2865796
7	—	0,5000000

Таблица 4.2

ω	Значение $A(\omega)$ при N , равном	
	11	15
0,000	0,9865485	0,9982456
0,125	0,9665278	0,9747989
0,250	0,5000000	0,5000000
0,375	0,0334722	0,0252012
0,500	0,0134514	0,0017544

4.3.3. Метод наименьших квадратов

Этот метод точно соответствует критерию (4.8) — при заданных величинах α_1 , α_2 и функциях $q(\omega)$, $\Phi(\omega, c)$ и $B(\omega)$ требуется определить вектор c , минимизирующий целевую функцию

$$G(c) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(\omega) [B(\omega) - \Phi(\omega, c)]^2 d\omega. \quad (4.24)$$

Необходимые и достаточные условия минимума (4.24) [4.4] имеют вид

$$\frac{\partial G(c)}{\partial c_m} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, K \quad (4.25)$$

и с учетом (4.7) сводятся к системе линейных алгебраических уравнений относительно c_0, c_1, \dots, c_K :

$$\sum_{l=0}^K d_{m,l} c_l = d_{m,K+1}, \quad (4.26)$$

где $d_{m,l} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(\omega) \varphi_m(\omega) \varphi_l(\omega) d\omega$; $l = 0, 1, \dots, K$;

$$d_{m,K+1} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(\omega) B(\omega) \varphi_m(\omega) d\omega.$$

Пример 4.6. Пусть $\alpha_1=0$; $\alpha_2=0,5$;

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ 0 & \text{при } \omega_{г.с} \leq \omega \leq 0,5; \end{cases}$$

$$\Phi(\omega, c) = \sum_{l=0}^K c_l \cos l 2\pi \omega, \quad q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ 0 & \text{при } \omega_{г.п} < \omega < \omega_{г.с}; \\ g & \text{при } \omega_{г.с} \leq \omega \leq 0,5, \end{cases}$$

где $g = \text{const}$. Тогда

$$d_{m,K+1} = \begin{cases} \omega_{г.п} & \text{при } m=0; \\ \sin(m 2\pi \omega_{г.п}) / (2m\pi) & \text{при } m \neq 0; \\ \omega_{г.п} + g/2 - g \omega_{г.с} & \text{при } m=l=0; \end{cases}$$

$$d_{ml} = \begin{cases} \left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \frac{\omega_{г.п}}{2} + \frac{\sin(m+l) 2\pi \omega_{г.п}}{4(m+l)\pi} + \frac{g}{4} - \\ & - \frac{g \omega_{г.с}}{2} - \frac{g \sin(m+l) 2\pi \omega_{г.с}}{4(m+l)\pi} \end{aligned} \right\} & \text{при } m=l \neq 0; \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} & \frac{\sin(m-l) 2\pi \omega_{г.п}}{4(m-l)\pi} + \frac{\sin(m+l) 2\pi \omega_{г.п}}{4(m+l)\pi} + \\ & + \frac{g \sin(m-l) 2\pi \omega_{г.с}}{4(m-l)\pi} - \frac{g \sin(m+l) 2\pi \omega_{г.с}}{4(m+l)\pi} \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} & \text{при } m \neq l; \\ & m=0, 1, \dots, K; \\ & l=0, 1, \dots, K. \end{aligned} \end{cases}$$

Пример 4.7. Для условия примера 4.6 при $\omega_{г.п}=0,125$; $\omega_{г.с}=0,375$; $g=1$ рассчитать коэффициенты равнополосных ФНЧ при $N=11$ и $N=15$ и значения АЧХ для 5 равноотстоящих значений ω , начиная с $\omega=0$ с шагом $\Delta\omega=0,125$.

Коэффициенты фильтров b_l и значения АЧХ $A(\omega)$ приведены в табл. 4.3 и 4.4.

Таблица 4.3

l	$b_l = b_{N-1-l}$	
	$N=11$	$N=15$
0	0,0118785	-0,0033884
1	-0,0000003	0,0000021
2	-0,0621937	0,0197280
3	0,0000008	-0,0000073
4	0,3007862	-0,0713280
5	0,4999990	0,0000137
6		0,3049177
7		0,4999840

Таблица 4.4

ω	Значение $A(\omega)$ при N , равном	
	11	15
0,000	1,0009418	0,9998589
0,125	0,9965320	0,9993988
0,250	0,4999968	0,4999387
0,375	0,0034674	0,0005983
0,500	0,0009420	0,0001417

Погрешность аппроксимации по методу наименьших квадратов существенно меньше, чем погрешность аппроксимации по методу разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции. Отклонение значений коэффициентов, приведенных в табл. 4.3, от значений, определяемых по формуле (4.14), для равнополосных фильтров определяются погрешностями решения линейной системы на малой ЭВМ.

4.3.4. Метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации. Алгоритм Ремеза

Пусть заданы совокупность (класс) Γ функций $\Phi_K(\omega, c) = \sum_{l=0}^K c_l \varphi_l(\omega)$, где $\varphi_l(\omega)$ — известные функции, например $\varphi_l = \cos l 2\pi\omega$ или $\varphi_l = \omega^l$, аппроксимируемая функция $B(\omega)$, весовая функция $q(\omega)$ и замкнутый интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$. Тогда функцией наилучшего равномерного (чебышевского) приближения в классе Γ называют функцию $\Phi_K(\omega, c)$ с такими значениями коэффициентов c_l , которые соответствуют минимальному значению

$$\varepsilon(c) = \max |\Delta(\omega, c)|, \quad \alpha_1 \leq \omega \leq \alpha_2, \quad (4.27)$$

где $\Delta(\omega, c) = q(\omega)[B(\omega) - \Phi_K(\omega, c)]$, $\varepsilon(c)$ — максимальная погрешность аппроксимации на интервале $[\alpha_1, \alpha_2]$ для определенного набора значений коэффициентов аппроксимирующей функции.

Очевидно, что функция наилучшего равномерного приближения точно соответствует критерию (4.9). Для некоторых классов функций $\Phi_K(\omega, c)$ [к ним, в частности, относятся функции (4.13) и (4.19)] непрерывной на интервале $[\alpha_1, \alpha_2]$ функции $B(\omega)$ и кусочно-непрерывной положительной на том же интервале функции $q(\omega)$ обобщенная теорема Чебышева [1.6, 4.6] устанавливает признак, выделяющий функцию наилучшего равномерного приближения среди всех функций данного класса; для того чтобы функция $\Phi_K(\omega, c)$ была функцией наилучшего равномерного приближения к функции $B(\omega)$ с весовой функцией $q(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Delta(\omega, c)$ принимала наибольшие и равные друг другу по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения в $K+2$ последовательно расположенных точках (точках альтернанса) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{K+2}$ интервала $[\alpha_1, \alpha_2]$, т. е.

$$\Delta(\omega_1, c) = -\Delta(\omega_2, c) = \dots = (-1)^{K+1} \Delta(\omega_{K+2}, c); \quad (4.28)$$

$$\alpha_1 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{K+2} \leq \alpha_2;$$

$$|\Delta(\omega_j, c)| \geq |\Delta(\omega, c)|, \quad j = 1, 2, \dots, K+2.$$

Последнее отношение истинно при любом значении ω , принадлежащему интервалу $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Теорема (4.28) справедлива и для аппроксимируемых функций, заданных на отдельных интервалах, не имеющих общих точек. В этом случае функция должна быть доопределена на промежуточных интервалах так, чтобы в целом получилась непрерывная функция на замкнутом интервале, включающем все заданные интервалы. Все точки альтернанса должны располагаться только на заданных интервалах.

Пример 4.8. Пусть

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,1063; \\ 0 & \text{при } 0,3937 \leq \omega \leq 0,5; \end{cases}$$

$$q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,1063; \\ 1 & \text{при } 0,3937 \leq \omega \leq 0,5; \end{cases}$$

$$\Phi_5(\omega, c) = \sum_{l=0}^5 c_l \cos l 2 \pi \omega.$$

Тогда коэффициенты функции наилучшего равномерного приближения имеют значения: $c_0=0,4999999$; $c_1=0,5986008$; $c_2=0,0000000$; $c_3=-0,1188343$; $c_4=-0,0000000$; $c_5=0,0207811$ при следующих точках альтернанса: $\omega_1=0,0512220$; $\omega_2=0,0908867$; $\omega_3=0,1062999$; $\omega_4=0,3937000$; $\omega_5=0,4091255$; $\omega_6=0,4487495$; $\omega_7=0,5000000$ и $\Delta(\omega, c) = -0,0005476$.

На рис. 4.6 показаны графики $B(\omega)$ и $\Phi_5(\omega, c)$. Как правило, аналитически функцию наилучшего равномерного приближения определить невозможно. Одним из наиболее эффективных методов численного определения функций чебышевского приближения является алгоритм Ремеза [1.6, 2. 11, 4.7]. Суть этого алгоритма, реализуемого на ЭВМ, сводится к последовательной модификации коэффициентов аппроксимирующей функции до тех пор, пока с заданной степенью точности не оказываются выполненными условия обобщенной теоремы Чебышева, т. е. не получено чебышевское приближение. В приложении 5 приводится описание программы, реализующей алгоритм Ремеза.

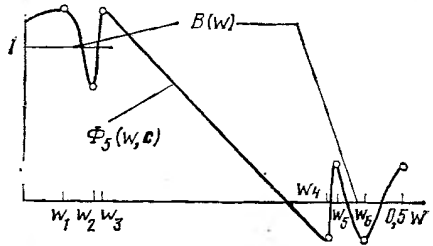


Рис. 4.6

4.3.5. Решение чебышевской аппроксимационной задачи для фильтра с линейной ФЧХ с помощью алгоритма Ремеза

Пусть требуется определить коэффициенты ФНЧ с линейной ФЧХ минимального порядка $N = N_{min}$, АЧХ которого удовлетворяет условию типа (4.10). Для того чтобы уменьшить объем вычислений на ЭВМ, можно ориентировочно определить значение $N_1 \approx N_{min}$ по следующей эмпирической формуле, справедливой для ФНЧ [1.6]:

$$N_1 = \frac{D_1(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_{\Phi})}{\omega_{r.з} - \omega_{r.п}} - D_2(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_{\Phi})(\omega_{r.з} - \omega_{r.п}) + 1, \quad (4.29)$$

где $D_1(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_{\Phi}) = [5,309 \cdot 10^{-3} (\lg \varepsilon_{\Pi})^2 + 7,114 \cdot 10^{-2} \lg \varepsilon_{\Pi} - 4,761 \cdot 10^{-1}] \lg \varepsilon_{\Phi} +$
 $+ [-2,66 \cdot 10^{-3} (\lg \varepsilon_{\Pi})^2 - 5,941 \cdot 10^{-1} \lg \varepsilon_{\Pi} - 4,278 \cdot 10^{-1}]$; $D_2(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_{\Phi}) =$
 $= 11,01217 + 0,51244 (\lg \varepsilon_{\Pi} - \lg \varepsilon_{\Phi})$;

ε_{Π} и ε_{Φ} — максимально допустимые отклонения АЧХ от аппроксимируемой функции $B(\omega)$ соответственно в полосах пропускания и задержания. Очевидно, что фильтру наименьшего порядка $N \approx N_{min}$ (оптимальному фильтру) соответствует оптимальная функция $\Phi^{(0)}(\omega, c)$ (см. 4.2.1). Для того чтобы определить функцию $\Phi^{(0)}(\omega, c)$, нужно построить несколько функций наилучшего равномерного приближения к функции $B(\omega)$ с весом, определяемым (4.11), различных порядков начиная с $K = K_{\Pi} = (N_1 - 1)/2$ (для нечетных N_1) или с $K = K_{\Phi} = (N_1 - 2)/2$ (для четных N_1). Если при $K = K_{\Pi}$ условия (4.10) не выполняются хотя бы для одного j , необходимо увеличить K . Если (4.10) выполняется,

необходимо уменьшить K . Процесс вычислений заканчивается тогда, когда $\Phi_K(\omega, c)$ удовлетворяет (4.10), а $\Phi_{K-1}(\omega, c)$ (или $\Phi_{K-2}(\omega, c)$ для равнополосных фильтров) не удовлетворяет, причем $\Phi^{(0)}(\omega, c) = \Phi_K(\omega, c)$.

Пример 4.9. Пусть $\omega_{г.п} = 0,125$; $\omega_{г.з} = 0,375$; $\epsilon_{п} = \epsilon_{з} = 3 \cdot 10^{-4}$. Тогда из (4.29) $N_1 = 14$. Поскольку проектируемый фильтр — равнополосный, с учетом (4.14) $K_{н} = 8$. С помощью алгоритма Ремеза

Таблица 4.5

i	$b_i = b_{N-1-i}$	
	$N=11$	$N=15$
0	0,0130539	-0,0037370
1	0,0000000	0,0000000
2	-0,0638686	0,0205680
3	0,0000000	0,0000000
4	0,3016116	-0,0723199
5	0,5000000	0,0000000
6		0,3053691
7		0,5000000
$\epsilon_{м.п} = \epsilon_{м.з}$	0,0015943	0,0002395

строится функции наилучшего равномерного приближения $\Phi_8(\omega, c)$ и $\Phi_6(\omega, c)$, аппроксимирующие функцию

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,125; \\ 0 & \text{при } 0,375 \leq \omega \leq 0,5 \end{cases}$$

с весовой функцией

$$q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,125, \\ 1 & \text{при } 0,125 \leq \omega \leq 0,5 \end{cases}$$

(в (4.11) полагается $R = 3 \cdot 10^{-4}$). При $K = K_{н} = 8$ требования к АЧХ выполняются: $|1 - \Phi_8(\omega, c)| \leq 3 \cdot 10^{-4}$ при $0 \leq \omega \leq 0,125$ и $|\Phi_8(\omega, c)| \leq 3 \cdot 10^{-4}$ при $0,375 \leq \omega \leq 0,5$; при $K = 6$ требования к АЧХ не выполняются, т. е. $N_{min} = 15$. В табл. 4.5 приведены значения коэффициентов фильтров с $N = 11$ и $N = 15$ и

максимальных погрешностей аппроксимации $\epsilon_{м.п} = \epsilon_{м.з} = \max |B(\omega) - \Phi(\omega, c)|$ при $0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}$ и $\omega_{г.з} \leq \omega \leq 0,5$ [см. (4.2.7)].

Для полосовых фильтров ориентировочно N_{min} определяется по формулам, приведенным в [4.8].

4.3.6. Решение чебышевской аппроксимационной задачи для минимально-фазового фильтра

Пусть требуется построить минимально-фазовый ФНЧ минимального порядка N по заданной АЧХ (см. 4.2.5, задача 2), причем заданы условия типа (4.10):

$$\left. \begin{aligned} |1 - A(\omega)| &\leq \epsilon_{п1} && \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ |A(\omega)| &\leq \epsilon_{з1} && \text{при } \omega_{г.з} \leq \omega \leq 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Точный алгоритм решения сводится к следующему:

1. Необходимо построить оптимальную функцию $\Phi^{(0)}(\omega, c)$ удовлетворяющую отношениям:

$$\left. \begin{aligned} |1 + \epsilon_{п1}^2 - \epsilon_{з1}^2/2 - \Phi_K(\omega, c)| &\leq 2 \epsilon_{п1} && \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}, \\ |\Phi_K(\omega, c)| &\leq \frac{\epsilon_{з1}^2}{2} && \text{при } \omega_{г.з} \leq \omega \leq 0,5, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{где } \Phi_K(\omega, c) = \sum_{l=0}^K c_l \cos 2l\omega.$$

Каждая функция последовательности, которую следует построить для определения $\Phi^{(0)}(\omega, c)$ (см. 4.3.5), строится как функция наилучшего равномерного приближения к аппроксимируемой функции

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 + \epsilon_{п1}^2 - \epsilon_{з1}^2/2 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ 0 & \text{при } \omega_{г.з} \leq \omega \leq 0,5 \end{cases} \quad (4.31)$$

с весовой функцией

$$q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ 4 \epsilon_{п1} / \epsilon_{з1}^2 & \text{при } \omega_{г.в} \leq \omega \leq 0,5. \end{cases} \quad (4.32)$$

Ориентировочная оценка величины начального порядка K_N функции $\Phi_K(\omega, c)$ (см. пример 4.9) может быть получена с помощью (4.29), причем $K_N = (N_1 - 1)/2$ и

$$\epsilon_{п} = 2 \epsilon_{п1}; \quad \epsilon_{в} = \epsilon_{з1}^2 / 2. \quad (4.33)$$

2. Строится функция $\tilde{\Phi}^{(0)}(\omega, c) = \Phi^{(0)}(\omega, c) + M + \epsilon_M$, не имеющая вещественных корней. Величина $M = \max |\Phi(\omega, c)|$ при $\omega_{г.в} \leq \omega \leq 0,5$; $\epsilon_M = (10^{-2} \dots 10^{-3}) M$.

3. По коэффициентам $\tilde{\Phi}^{(0)}(\omega, c)$ строится функция $H'(z) = \sum_{l=0}^{2K} b'_l z^{-l}$ [см. (4.22)].

4. Вычисляются корни функции $H'(z)$.

5. Строится функция $H''(z) = \sum_{l=0}^{K-1} b''_l z^{-l} + z^{-K}$, корни которой совпадают с корнями $H'(z)$, лежащими внутри и на единичной окружности.

6. Строится передаточная функция искомого минимально-фазового фильтра $H(z) = b_K H''(z) = \sum_{l=0}^K b_l z^{-l}$, $b_l = b''_l b_K$. Коэффициент b_K определяется из условия

$|H(e^{i\omega T})| = \sqrt{|H'(e^{i\omega T})|}$, эквивалентного равенству $\sum_{l=0}^K b_l = \sqrt{\sum_{l=0}^{2K} b'_l}$. Из последнего равенства и выражений для $H''(z)$ и $H(z)$ следует, что

$$b_K = \sqrt{\sum_{l=0}^{2K} b'_l} / \left(\sum_{l=0}^{K-1} b''_l + 1 \right).$$

Пример 4.10. Пусть требуется построить минимально-фазовый ФНЧ наименьшего порядка N , АЧХ которого удовлетворяет (4.30) при $\omega_{г.п} = 0,125$; $\omega_{г.в} = 0,375$; $\epsilon_{п1} = 0,02$ и $\epsilon_{з1} = 0,0003$. По формулам (4.33) находим: $\epsilon_{п} = 0,04$; $\epsilon_{в} = 4,5 \cdot 10^{-8}$. По формуле (4.29) определяем $K_N = 6$. По формуле (4.31) определяем аппроксимируемую функцию:

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 + 3,99995 \cdot 10^{-4} \approx 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,125, \\ 0 & \text{при } 0,375 \leq \omega \leq 0,5. \end{cases}$$

По формуле (4.32) определяем весовую функцию

$$q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,125; \\ 888889 & \text{при } 0,375 \leq \omega \leq 0,5. \end{cases}$$

С помощью алгоритма Ремеза определяется $\Phi^{(0)}(\omega, c)$. Для этого на ЭВМ ЕС 1022 были построены функции $\Phi_6(\omega, c)$, $\Phi_7(\omega, c)$, $\Phi_8(\omega, c)$ и $\Phi_9(\omega, c)$. В табл. 4.6 приведены значения коэффициентов функций $\Phi_8(\omega, c)$ и $\Phi_9(\omega, c)$, представленные по способу с «плавающей запятой» с округлением мантиссы до девяти разрядов (все вычисления в рассматриваемом примере выполнялись с удвоенной точностью [4.9]), и максимальных погрешностей аппроксимации $\epsilon_{м.п}$ и $\epsilon_{м.в}$ (определение этих понятий см. в примере 4.9).

Из сравнения $\epsilon_{п}$ и $\epsilon_{м.п}$, $\epsilon_{в}$ и $\epsilon_{м.в}$ следует, что функция $\Phi_8(\omega, c)$ не удовлетворяет заданным требованиям, а функция $\Phi_9(\omega, c)$ удовлетворяет, т. е.

Таблица 4.6

l	Значение коэффициента c_l	
	K=8	K=9
0	0,361345846·10 ⁰	0,385157132·10 ⁰
1	0,559327544·10 ⁰	0,576508110·10 ⁰
2	0,218077829·10 ⁰	0,184717808·10 ⁰
3	-0,356403466·10 ⁻¹	-0,755718326·10 ⁻¹
4	-0,100121651·10 ⁰	-0,100282529·10 ⁰
5	-0,599301846·10 ⁻¹	-0,236332114·10 ⁻¹
6	-0,178345217·10 ⁻¹	0,211268721·10 ⁻¹
7	-0,230165022·10 ⁻²	0,188939744·10 ⁻¹
8	-0,120324751·10 ⁻⁴	0,631090512·10 ⁻²
9		0,823166338·10 ⁻³
$\epsilon_{м.п}$	0,77089·10 ⁻¹	0,16499·10 ⁻¹
$\epsilon_{м.з}$	0,86725·10 ⁻⁷	0,18561·10 ⁻⁷

Таблица 4.7

l	b_l
0	0,390416447·10 ⁻¹
1	0,189554705·10 ⁰
2	0,388034893·10 ⁰
3	0,395527617·10 ⁰
4	0,144282330·10 ⁰
5	-0,923004871·10 ⁻¹
6	-0,101840731·10 ⁰
7	-0,496114741·10 ⁻²
8	0,290167349·10 ⁻¹
9	0,106702259·10 ⁻¹
$\epsilon_{м.п}$	0,82824·10 ⁻²
$\epsilon_{м.з}$	0,19769·10 ⁻³

$\Phi^{(0)}(\omega, c) = \Phi_0(\omega, c)$. Затем определяется функция $\tilde{\Phi}^{(0)}(\omega, c) = \Phi^{(0)}(\omega, c) + 0,19 \cdot 10^{-7}$. По коэффициентам $\tilde{\Phi}^{(0)}(\omega, c)$ строится функция

$$H'(z) = \sum_{l=0}^{18} b'_l z^{-l}.$$

На ЭВМ вычисляются корни функции $H'(z)$. Строится передаточная функция

$$H(z) = \sum_{l=0}^9 b_l z^{-l},$$

корни которой совпадают с корнями $H'(z)$, лежащими внутри единичной окружности (корни, лежащие на единичной окружности, в данном примере отсутствуют), причем $\sum_{l=0}^9 b_l = \sqrt{\sum_{l=0}^{18} b'_l}$. Коэффициенты b_l этого фильтра и максимальные погрешности аппроксимации

$$\epsilon_{м.п} = \max |1 - |H(e^{i2\pi\omega})|| \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq 0,125,$$

$$\epsilon_{м.з} = \max |H(e^{i2\pi\omega})| \quad \text{при } 0,375 \leq \omega \leq 0,5$$

приведены в табл. 4.7.

Из сравнения величин $\epsilon_{п1}$ и $\epsilon_{м.п}$, $\epsilon_{в1}$ и $\epsilon_{м.з}$ следует, что синтезированный минимально-фазовый фильтр удовлетворяет всем условиям задачи.

4.3.7. Решение аппроксимационной задачи для амплитудно-фазового корректора по методу наименьших квадратов

Амплитудно-фазовый корректор, т. е. фильтр, у которого АЧХ и ФЧХ близки к заданным функциям $A^*(\omega)$ и $\varphi^*(\omega)$, можно построить в виде нерекурсивного фильтра, используя метод наименьших квадратов [4.3].

При этом коэффициенты b_0, b_1, \dots, b_{N-1} определяются из условия минимума величины

$$G(\mathbf{b}) = \int_0^{0,5} q(\omega) [\Theta_1^2(\omega) + \Theta_2^2(\omega)] d\omega.$$

Здесь

$$\Theta_1(\omega) = A^*(\omega) \cos \varphi^*(\omega) - \sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l 2\pi \omega;$$

$$\Theta_2(\omega) = A^*(\omega) \sin \varphi^*(\omega) + \sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l 2\pi \omega,$$

где $A^*(\omega), \varphi^*(\omega)$ — заданные функции; $q(\omega)$ — весовая функция.

Необходимые и достаточные условия минимума $G(\mathbf{b})$

$$\frac{\partial G(\mathbf{b})}{\partial b_l} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, N-1,$$

представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_{N-1}

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N-1} b_l \int_0^{0,5} q(\omega) \cos[(l-j) 2\pi \omega] d\omega = \\ & = \int_0^{0,5} q(\omega) A^*(\omega) \cos[\varphi^*(\omega) + j 2\pi \omega] d\omega, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Решив эту систему на ЭВМ, можно определить коэффициенты нерекурсивного фазового корректора. В частном случае при $q(\omega) = 1$ система может быть решена в общем виде и коэффициенты определяются по формуле

$$b_l = 2 \int_0^{0,5} A^*(\omega) \cos[\varphi^*(\omega) + l 2\pi \omega] d\omega.$$

4.3.8. Оценка погрешности аппроксимации

Как правило, погрешностью аппроксимации АЧХ в j -й полосе пропускания или задерживания фильтра с граничными частотами α_{1j} и α_{2j} называют величину

$$\varepsilon_j = \max |B(\omega) - |H(e^{i2\pi\omega})|| \quad (4.34)$$

при $\alpha_{1j} \leq \omega \leq \alpha_{2j}$.

Для наилучшей равномерной аппроксимации

$$\varepsilon_j = \frac{\max |\Delta(\omega, \mathbf{c})|}{q(\omega)} \quad \text{при } \alpha_{1j} \leq \omega \leq \alpha_{2j},$$

где функция $\Delta(\omega, \mathbf{c})$ определена в (4.27); величина $\max |\Delta(\omega, \mathbf{c})|$ всегда известна после решения задачи аппроксимации; $q(\omega) = \text{const}$.

Для иных методов аппроксимации значение ε_j рассчитывается на ЭВМ методом перебора значений функции $|B(\omega) - |H(e^{i2\pi\omega})||$ с шагом $\Delta\omega$ на интервале $[\alpha_{1j}, \alpha_{2j}]$. Максимально допустимое значение $\Delta\omega$, при котором ε_j еще рассчитывается достаточно точно, определяется выражением [4.10]

$$\Delta\omega = 0,5/(16N), \quad (4.35)$$

где N — порядок фильтра.

4.3.9. Сравнение возможностей фильтров с линейной ФЧХ и минимально-фазовых фильтров

Избирательные минимально-фазовые нерекурсивные фильтры необходимо использовать тогда, когда фильтр должен иметь минимальное абсолютное значение ГВЗ на всех частотах в полосе пропускания фильтра. Требования такого типа накладываются, например, на фильтры трансмультиплексоров (см. гл. 9). В том случае, если требуется точно линейная ФЧХ, необходимо, разумеется, использовать фильтры с линейной ФЧХ.

Если требования предъявляются лишь к АЧХ фильтра и фильтр не может быть равнополосным, то целесообразно использовать минимально-фазовый фильтр, поскольку он имеет лучшие реализационные характеристики (см. 2.2.4). При одинаковых требованиях к АЧХ значения L_{Π} и V_{γ} оказываются примерно одинаковыми для фильтров обоих типов, а L_0 и V_c оказываются примерно вдвое меньше для минимально-фазовых фильтров. Если фильтр может быть равнополосным, то при выборе минимально-фазового фильтра или равнополосного фильтра с линейной ФЧХ необходимо учесть следующее. При одинаковых требованиях к АЧХ значения L_{Π} и V_{γ} оказываются примерно вдвое меньше для равнополосного фильтра, V_c — примерно одинаковой для фильтров обоих типов, L_0 — примерно вдвое меньше для минимально-фазового фильтра.

Приведенные выше общие правила сопоставления минимально-фазовых фильтров и фильтров с линейной ФЧХ подтверждаются данными примеров 4.9 и 4.10. При примерно одинаковых требованиях к АЧХ реализационные характеристики равнополосного фильтра с $N=15$ (см. пример 4.9) имеют значения $L_0=14$, $L_{\Pi}=4$ (коэффициент 0,5 не фиксируется в ПЗУ), $V_{\gamma}=4$, $V_c=8$, а реализационные характеристики минимально-фазового фильтра с $N=9$ (см. пример 4.10) — значения $L_0=8$, $L_{\Pi}=9$, $V_{\gamma}=9$, $V_c=8$.

Точные условия, приводящие к равнополосному фильтру, указаны в 4.2.3. Отметим, что при выполнении этих условий и метод разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции (см. пример 4.5), и метод наименьших квадратов (см. пример 4.7), и метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации (см. примеры 4.8 и 4.9) автоматически приводят к равнополосным фильтрам.

В некоторых случаях целесообразно изменять условия так, чтобы в итоге решения аппроксимационной задачи был определен равнополосный фильтр. Пусть, например, $\omega_{r,\Pi}=0,14$ и $\omega_{r,\Sigma}=0,35$, т. е. $\omega_{r,\Pi}+\omega_{r,\Sigma}\neq 0,5$, но требования и точности аппроксимации одинаковы в полосах пропускания и задерживания (для методов наименьших квадратов и наилучшей равномерной аппроксимации это означает, что $q(\omega)=q(0,5-\omega)$, см. 4.2.3). В этом случае, безусловно, следует увеличить значение граничной частоты полосы пропускания и принять $\omega'_{r,\Pi}=\omega_{r,\Pi}+\omega_{r,\Sigma}=0,15$. Порядок фильтра остается прежним, однако фильтр становится равнополосным и значения L_{Π} , V_{γ} и V_c (см. 2.2.4) уменьшаются примерно вдвое. Даже если условия, определяющие АЧХ синтезируемого фильтра, резко отличаются от требований, приводящих к равнополосному фильтру, имеет смысл, преобразовав эти условия, синтезировать оба варианта фильтра и сопоставить их реализационные характеристики. Пусть, например, $\omega_{r,\Pi}=0,2125$, $\omega_{r,\Sigma}=0,2875$ и АЧХ $\bar{A}(\omega)$ должна удовлетворять условиям $|1-A(\omega)|\leq 0,0428$ при $0\leq\omega\leq\omega_{r,\Pi}$ и $|A(\omega)|\leq 0,0004$ при $\omega_{r,\Sigma}\leq\omega\leq 0,5$, т. е. требования к точности аппроксимации в полосах пропускания и задерживания резко (примерно в 100 раз) отличаются друг от друга. Фильтр с линейной ФЧХ наименьшего по-

рядка $N=33$, АЧХ которого удовлетворяет сформулированным требованиям, был определен с помощью алгоритма Ремеза (см. 4.3.4). Его реализационные характеристики (см. 2.2.4) имеют значения $L_0=32$, $L_{\pi}=16$, $V_y=16$, $V_c=32$.

Единственный путь преобразования условий задачи с целью получения равнополосного фильтра состоит в увеличении требуемой точности аппроксимации в полосе пропускания, т. е. во введении условия $|1-A(\omega)| \leq 0,0004$ при $0 \leq \omega \leq \omega_{г.п.}$ Равнополосный фильтр наименьшего порядка $N=51$ был определен с помощью алгоритма Ремеза, причем его реализационные характеристики имеют значения $L_0=50$, $L_{\pi}=13$, $V_y=13$, $V_c=26$. В данном случае первый вариант окажется, по-видимому предпочтительнее ввиду существенно меньшего значения L_0 . В иных случаях разница в значениях L_0 может оказаться малой и меньшие значения L_{π} , V_y и V_c сделают предпочтительной реализацию в виде равнополосного фильтра.

4.3.10. Сравнение методов решения аппроксимационных задач

Метод разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции имеет следующие преимущества:

- а) он проще остальных методов, поскольку для его реализации при определении N требуется наименьший объем вычислений;
- б) если при некотором N точность аппроксимации оказывается недостаточной, то можно увеличить порядок фильтра, рассчитав лишь дополнительные коэффициенты, причем ранее рассчитанные коэффициенты изменяют свои номера, по-прежнему являясь коэффициентами фильтра (см. пример 4.5, в котором рассчитаны фильтры с $N=11$ и $N=15$ — в качестве коэффициентов фильтра с $N=15$ используются все коэффициенты фильтра с $N=11$);
- в) это единственный метод, позволяющий получить аналитические выражения (формулы) для коэффициентов фильтра, что очень удобно при теоретических исследованиях его характеристик (см. (4.23) и пример 4.5).

Основной недостаток метода заключается в том, что точность аппроксимации оказывается низкой. Из сравнения данных табл. 4.2, 4.4 и 4.5 видно, что при одних и тех же значениях N максимальная погрешность аппроксимации в полосах пропускания и задерживания оказывается примерно в 40 раз больше, чем для метода наименьших квадратов, и примерно в 100 раз большей, чем для метода наилучшей равномерной аппроксимации.

Метод разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье целесообразно использовать тогда, когда порядок проектируемого фильтра настолько велик ($N=5000 \dots 10\,000$), что невозможно применить иные методы аппроксимаций. Фильтры такого высокого порядка представляют собой почти идеальные избирательные фильтры, которые используются при моделировании сложных систем на ЭВМ.

Основное преимущество метода наименьших квадратов по сравнению с иными методами состоит в возможности учета дополнительных ограничений на коэффициенты фильтра, имеющих характер линейных неравенств или равенств (см. [2.11]), а также в возможности построения сложной целевой функции, минимум которой соответствует искомому решению (см. 4.3.7, функция $G(\mathbf{b})$). По точности аппроксимации метод занимает промежуточное положение между методами разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье и наилучшей равномерной аппроксимации.

Метод наименьших квадратов требует значительного объема вычислений, так как для решения задачи необходимо определять коэффициенты и правые части системы линейных алгебраических уравнений и решить эту систему [см. (4.26)]. Этот метод целесообразно использовать в следующих случаях:

когда необходимо учесть дополнительные ограничения на коэффициенты фильтра или построить сложную целевую функцию;

когда минимизация функции типа (4.24) соответствует физическому смыслу задачи (см., например, [4.11, 4.12]).

Метод наилучшего равномерного (чебышевского) приближения реализуется, как правило, в виде эффективного алгоритма Ремеза (см. 4.3.4 и [1.6]). Он позволяет:

рассчитать фильтр заданного порядка N , для которого максимальная абсолютная погрешность аппроксимации в полосах пропускания и задерживания будет минимальна (см. 4.3.4 и пример 4.8);

по заданной максимальной абсолютной погрешности аппроксимации в полосах пропускания и задерживания рассчитать фильтр наименьшего порядка N_{min} , АЧХ которого удовлетворяет поставленным требованиям;

точно задать отношения между абсолютными погрешностями аппроксимации в различных полосах с помощью весовой функции (см. (4.9), (4.11) и пример 4.3).

Алгоритм Ремеза целесообразно использовать для расчета нерекурсивных фильтров всегда, за исключением тех случаев, когда следует использовать методы разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье или наименьших квадратов.

4.4. РАСЧЕТ РАЗРЯДНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФИЛЬТРОВ И РЕГИСТРОВ ОПЕРАТИВНОЙ ПАМЯТИ

4.4.1. Расчет разрядности коэффициентов фильтров

После решения аппроксимационной задачи на ЭВМ коэффициенты фильтра определяются весьма точно, как правило, с 7—14 десятичными разрядами. При реализации фильтра в виде специализированной микро-ЭВМ каждый коэффициент должен быть представлен в виде двоичного кода \bar{b}_l , состоящего из s_k цифр (помимо знакового разряда).

Пример 4.11. Пусть $b_1=0,3$; $s_k=15$. Тогда, округляя до 15 двоичных разрядов, получают $\bar{b}_1=0,010011001100110$.

Использование округленных двоичных кодов коэффициентов приводит к изменению характеристик фильтров. На практике часто используют следующий критерий для расчета разрядности s_k .

Пусть требования к АЧХ $|H(e^{i2\pi\omega})|$ фильтра имеют вид

$$|B(\omega) - |H(e^{i2\pi\omega})|| \leq \varepsilon_j, \quad (4.36)$$

где $B(\omega)$ — аппроксимируемая функция; ε_j — допустимая погрешность на j -м подынтервале аппроксимации. Тогда разрядность s_k считается выбранной правильно, если АЧХ фильтра с передаточной функцией $H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} \bar{b}_l z^{-l}$ (\bar{b}_l — округленные до s_k разрядов коэффициенты) удовлетворяет условию (4.36). Для проверки условия (4.36) используется метод перебора с шагом $\Delta\omega$, определяемым (4.35).

Существуют два метода определения величины s_K . Первый метод состоит в расчете минимально возможного значения s_K на стадии решения аппроксимационной задачи. При этом изменяется постановка этой задачи — теперь должна быть определена аппроксимирующая функция $\Phi_K(\omega, c)$ заданного порядка K , удовлетворяющая поставленным требованиям [например, условию (4.10)] при минимальной двоичной разрядности s_K коэффициентов c_i . Подобные задачи решаются методом целочисленного программирования [4.13]. Второй метод состоит в расчете величины s_K путем округления коэффициентов, полученных в результате решения аппроксимационной задачи.

Заметим, что второй метод расчета разрядности гораздо проще первого. При значениях s_K , удовлетворяющих условию $s_K \geq 10 \dots 12$, оба метода дают практически одинаковые результаты [4.14].

4.4.2. Основные предположения при расчете разрядностей регистров оперативной памяти

Значения разрядностей регистров оперативной памяти фильтра зависят в общем случае от формы реализации фильтра и способа представления чисел. Ниже приводятся расчетные соотношения для следующих величин: разрядности $s_{вх}$ регистра входного сигнала $x(nT)$ (считается, что $|x(nT)| < 1$), разрядностей $s_{ц}$ и $s_{д}$ тех частей регистра выходного сигнала $y(nT)$, в которых фиксируются целая и дробная части кода $y(nT)$ в предположении, что фильтр реализуется в прямой форме и числа представлены с фиксированной запятой в прямом или дополнительном кодах, причем каждое произведение округляется.

4.4.3. Расчет величины $s_{ц}$

Условие [1.10]

$$s_{ц} = \text{int} \log_2 \sum_{i=0}^{N-1} |b_i| \quad (4.37)$$

гарантирует отсутствие переполнения регистра выходного сигнала.

Пример 4.12. Для фильтра с $N=15$ (см. табл. 4.5) по формуле (4.37) определяем $s_{ц}=1$.

4.4.4. Расчет величин $s_{вх}$ и $s_{д}$ (вероятностный подход)

Пусть задана величина $\sigma^2_{вх}$ — допустимая дисперсия (средняя мощность) шума на выходе фильтра, причем этот шум обусловлен шумами округления отсчетов выходного сигнала фильтра и, возможно, каждого произведения, получаемого при вычислении выходного сигнала фильтра. Шумы округления представляют собой стационарные случайные последовательности с некоррелированными между собой отсчетами, причем шумы, создаваемые различными источниками, не коррелированы друг с другом и с сигналом, обрабатываемым фильтром.

Если произведения вычисляются точно, т. е. отсутствуют шумы округления, то согласно (2.27) $\sigma^2_{вх} \leq \sigma^2_{вх} / \sum_{i=0}^{N-1} b_i^2$, где $\sigma^2_{вх} = \frac{2^{-2s_{вх}}}{12}$ — дисперсия шума округления отсчетов входного сигнала и

$$s_{\text{ВХ}} = \text{int} \left[\frac{1}{2} \log_2 \left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l^2 / 12 \sigma_{\text{ВЫХ}}^2 \right) \right]; \quad (4.38)$$

$$s_{\text{Д}} = s_{\text{ВХ}} + s_{\text{К}}.$$

Если произведения вычисляются с округлением, т. е. присутствуют шумы округления произведений, то

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{\text{ВХ}}^2 \sum_{l=0}^{N-1} b_l^2 + \sigma_{\text{П}}^2 N, \quad (4.39)$$

где $\sigma_{\text{П}}^2 = 2^{-2s_{\text{Д}}}/12$ — дисперсия шума округления произведения.

Мощность собственных шумов фильтра (шумов округления произведений) должна быть мала по сравнению с мощностью внешнего по отношению к фильтру шума округления отсчетов входного сигнала. Можно принять

$$\sigma_{\text{П}}^2 N = 0,1 \sigma_{\text{ВХ}}^2 \sum_{l=0}^{N-1} b_l^2. \quad (4.40)$$

Из (4.39) и (4.40) следует расчетные формулы для $s_{\text{ВХ}}$ и $s_{\text{Д}}$:

$$s_{\text{ВХ}} = \text{int} \left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{1,1 \sum_{l=0}^{N-1} b_l^2}{12 \sigma_{\text{ВЫХ}}^2} \right]; \quad (4.41)$$

$$s_{\text{Д}} = \text{int} \left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{12 N}{12 \sigma_{\text{ВЫХ}}^2 - 2^{-2s_{\text{ВХ}}} \sum_{l=0}^{N-1} b_l^2} \right]. \quad (4.42)$$

Пример 4.13. Пусть $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = 10^{-8}$, т. е. для отсчетов выходного сигнала $\sigma_{\text{ВЫХ}} = 10^{-4}$. Для фильтра с $N=15$ (см. табл. 4.5) при точном вычислении произведений находим $s_{\text{ВХ}}=11$ (см. (4.38)). Для того же фильтра при округлении произведений по формулам (4.41) и (4.42) определяем соответственно $s_{\text{ВХ}}=12$ и $s_{\text{Д}}=16$.

4.4.5 Расчет величин $s_{\text{ВХ}}$ и $s_{\text{Д}}$ «на худший случай»

Пусть задана максимально допустимая абсолютная погрешность $\Delta_{\text{ВЫХ}}$ отсчетов выходного сигнала фильтра:

$$\Delta_{\text{ВЫХ}} \geq |y(nT) - y_{\text{П}}(nT)|, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.43)$$

где $y(nT)$ — отсчеты выходного сигнала «точного» фильтра, в котором все операции выполняются точно и на вход которого подается «точный» входной сигнал; $y_{\text{П}}(nT)$ — отсчеты выходного сигнала фильтра с теми же коэффициентами, на вход которого подается округленный до $s_{\text{ВХ}}$ разрядов входной сигнал и, возможно, все произведения вычисляются с округлением до $s_{\text{Д}}$ разрядов.

Если произведения вычисляются точно и $|x(nT) - x_{\text{П}}(nT)| \leq 2^{-s_{\text{ВХ}}-1}$ где $x(nT)$ — точные отсчеты входного сигнала; $x_{\text{П}}(nT)$ — отсчеты входного сигнала, округленные до $s_{\text{ВХ}}$ разрядов, то из (4.43) и (2.19) следует, что

$$s_{\text{вх}} = \text{int} \log_2 \left(\sum_{l=0}^{N-1} |b_l| / 2 \Delta_{\text{вх}} \right); \quad (4.44)$$

$$s_{\text{д}} = s_{\text{вх}} + s_{\text{к}}.$$

Если произведения вычисляются с округлением, то

$$\Delta_{\text{вх}} = \Delta_{\text{вх}} \sum_{l=0}^{N-1} |b_l| + \Delta_{\text{п}} N,$$

где $\Delta_{\text{вх}} = 2^{-s_{\text{вх}}-1}$ — погрешность отсчетов входного сигнала, определяемая округлением этих отсчетов до $s_{\text{вх}}$ разрядов; $\Delta_{\text{п}} N$ — погрешность выходного сигнала, определяемая округлением произведений: $\Delta_{\text{п}} = 2^{-s_{\text{д}}-1}$.

Для того чтобы фильтр не вносил значительных дополнительных погрешностей в значение отсчета выходного сигнала, можно принять [по аналогии с (4.40)]

$$\Delta_{\text{п}} N = 0,1 \Delta_{\text{вх}} \sum_{l=0}^{N-1} |b_l|. \quad (4.45)$$

Из (4.43), (4.45) и (2.19) следуют расчетные формулы для $s_{\text{вх}}$ и $s_{\text{д}}$:

$$s_{\text{вх}} = \text{int} \log_2 \left(1,1 \sum_{l=0}^{N-1} |b_l| / 2 \Delta_{\text{вх}} \right); \quad (4.46)$$

$$s_{\text{д}} = \text{int} \log_2 \frac{N}{2 \left(\Delta_{\text{вх}} - 2^{-s_{\text{вх}}-1} \sum_{l=0}^{N-1} |b_l| \right)}. \quad (4.47)$$

Пример 4.14. Пусть $\Delta_{\text{вх}} = 5 \cdot 10^{-4}$. Для фильтра с $N=15$ (см. табл. 4.5) при точном вычислении произведений из (4.44) $s_{\text{вх}}=11$. Для того же фильтра при округлении произведений $s_{\text{вх}}=11$; $s_{\text{д}}=16$.

4.4.6. Алгоритм расчета разрядности коэффициентов фильтра, реализуемого на специализированном микропроцессоре

Если фильтр реализуется на специализированном микропроцессоре типа DSP (см. [4.1]), то коэффициенты фиксируются в виде двоичных кодов с заранее определенным числом $s_{\text{км}}$ двоичных разрядов (для DSP $s_{\text{км}}=16$). Таким образом, необходимо определить, существует ли фильтр, удовлетворяющий условиям задачи, и если он существует, рассчитать округленные коэффициенты этого фильтра.

На рис. 4.7 показана схема алгоритма расчета округленных до $s_{\text{км}}$ двоичных разрядов коэффициентов фильтра. На первом этапе (символ 1) решается аппроксимационная задача и определяется фильтр минимального порядка $N=N_{\text{мин}}$, удовлетворяющий условиям задачи (эти условия имеют вид (4.10), см. пример 4.9). На втором этапе (символ 2) рассчитанные коэффициенты округляются до $s_{\text{км}}$ двоичных разрядов. На третьем этапе (символ 3) рассчитываются максимальные погрешности аппроксимации ϵ_1 и ϵ_2 соответственно (в полосах пропускания задерживания [см. (4.34)]. Для многополосного фильтра рассчитываются величины ϵ_j для каждой полосы пропускания и задерживания. Расчет выполняется методом перебора с шагом $\Delta\omega$, определяемым (4.35), значений функ-

ции $|B(\omega) - |H(e^{i2\pi\omega})||$ (см. 4.3.8), причем $|H(e^{i2\pi\omega})| = \left| \sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{i2\pi l\omega} \right|$ и b_l — округленный коэффициент фильтра.

На четвертом этапе (символ 4) проверяется условие получения решения. Если рассчитанные погрешности ϵ_1 и ϵ_2 одновременно не больше заданных допустимых погрешностей ϵ_n и ϵ_3 (см. 4.3.5, пример 4.9), т. е. если истинно логическое выражение $\epsilon_1 \leq \epsilon_n \wedge \epsilon_2 \leq \epsilon_3$, то решение определено (символ 7), округленные коэффициенты можно использовать для реализации фильтра и вычисления преобразований (символ 8). Если логическое выражение $\epsilon_1 \leq \epsilon_n \wedge \epsilon_2 \leq \epsilon_3$ ложно, т. е. если рассчитанная погрешность превышает допустимую хотя бы в одной полосе, то осуществляется переход к пятому этапу (символ 5). На этом этапе проверяется условие $|b_{N-1}| < 2^{-s_{км}}$, где b_{N-1} — неокругленный старший коэффициент фильтра [см. (2.4)]. Если условие не выполняется, то можно попытаться увеличить порядок фильтра и тем самым уменьшить погрешности аппроксимации ϵ_1 и ϵ_2 . Символ 6 соответствует увеличению порядка фильтра, после чего осуществляется переход к символу 1 для нового решения аппроксимационной задачи. Если условие $|b_{N-1}| < 2^{-s_{км}}$ выполняется, то решения нет (символ 9), т. е. по заданным условиям нельзя построить нерекурсивный фильтр с разрядностью коэффициентов $s_{км}$. Отметим, что описанный алгоритм реализует один из вариантов второго метода расчета величины $s_{км}$ (см. 4.4.1), т. е. округление производится после решения аппроксимационной задачи.

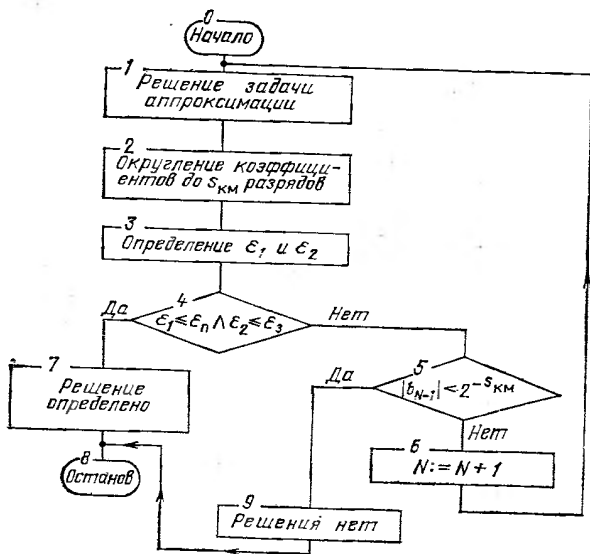


Рис. 4.7

4.4.7. Алгоритм расчета минимальной разрядности коэффициентов фильтра

Минимизировать число двоичных разрядов s_k целесообразно в тех случаях, когда фильтр реализуется на БИС общего назначения или универсальных микропроцессорах. Возможны два типа задач минимизации s_k .

В задачах первого типа требуется определить фильтр минимального порядка N , АЧХ которого удовлетворяет условиям задачи при наименьшем значении $s_k = s_{k \min}$, удовлетворяющем условию $s_{k \min} \leq s_{kM}$, где s_{kM} — заданное значение. Схема решения задач первого типа изображена на рис. 4.8. Все обозначения на рисунке такие же, как на рис. 4.7 (см. 4.4.6), поэтому ниже отмечаются лишь некоторые особенности этого алгоритма. Символ 1 соответствует начальному присваиванию $s_k = s_{kM}$ — большие значения s_k недопустимы по условиям задачи. Решение отсутствует (символ 9) лишь в том случае, если при $s_k = s_{kM}$ невозможно, увеличивая порядок фильтра, обеспечить заданную точность решения.

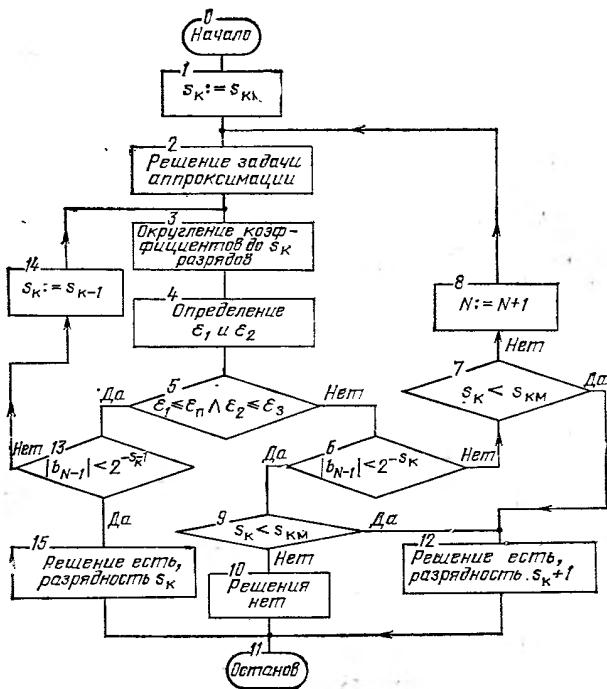


Рис. 4.8

В задачах второго типа требуется определить фильтр минимального порядка N , АЧХ которого удовлетворяет условиям задачи при наименьшем значении $s_k = s_{k \min}$, однако значение $s_{k \min}$ не ограничивается сверху. Схема алгоритма решения задач второго типа изображена на рис. 4.9. Все обозначения на рисунке такие же, как на рис. 4.7 и 4.8 (см. 4.4.6), поэтому ниже отмечаются лишь некоторые особенности алгоритма. Начальное значение $s_k = 16$ (символ 1) выбрано «средним» — по принципу «не слишком большое и не слишком малое». Задача аппроксимации (символ 2) решается для определения минимального порядка фильтра $N = N_{\min}$, и в дальнейшем этот порядок не меняется. Значение s_k может как увеличиваться (символ 7), так и уменьшаться (символ 12). Задача всегда имеет решение, поскольку для s_k не задается наибольшее значение.

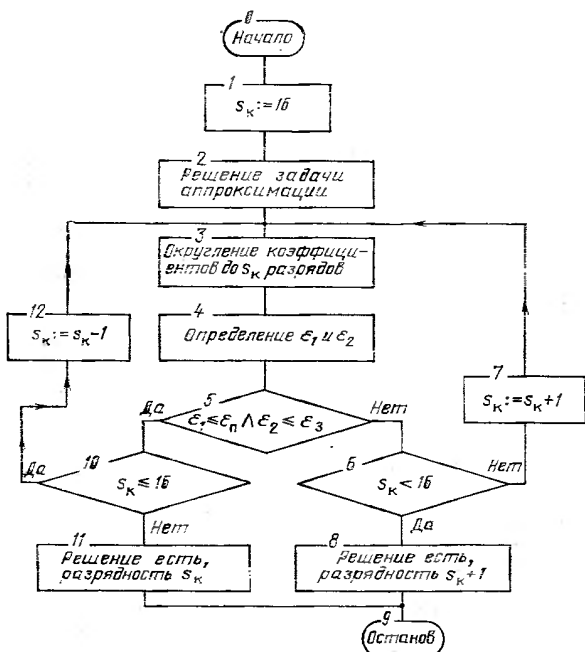


Рис. 4.9

4.4.8. Расчет разрядностей регистров оперативной памяти по заданному динамическому диапазону и отношению сигнал-шум

Обычно задаются значение D динамического диапазона входного сигнала и отношение сигнал-шум на выходе фильтра $R_{\text{ш}}$ при входном сигнале, соответствующем нижней границе динамического диапазона. Значение D в децибелах определяется как

$$D = 20 \lg (a_{D \max} / a_{D \min}), \quad (4.48)$$

где $a_{D \max}$ — максимальный уровень входного синусоидального сигнала; $a_{D \min}$ — минимальный уровень входного синусоидального сигнала, соответствующий нижней границе динамического диапазона. Значение $R_{\text{ш}}$ в децибелах определяется как

$$R_{\text{ш}} = 10 \lg (P_c / P_{\text{ш}}), \quad (4.49)$$

где $P_c = a_{D \min}^2 / 2$ — мощность на выходе фильтра синусоидального сигнала с уровнем на входе $a_{D \min}$ и с частотой, на которой АЧХ фильтра имеет значение 1; $P_{\text{ш}} = \sigma_{\text{вых}}^2$ — средняя мощность шума на выходе фильтра. Из (4.48) и (4.49), полагая $a_{D \max} = 1$, по заданным значениям D и $R_{\text{ш}}$ можно определить

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = 0,5 \cdot 10^{-(D+R_{\text{ш}})/10}. \quad (4.50)$$

Пусть $D=30$ дБ; $R_{\text{ш}}=30$ дБ. Тогда согласно (4.50) $\sigma_{\text{вых}}^2 = 0,5 \cdot 10^{-6}$.

Определяя значение $\sigma_{\text{вых}}^2$ и используя (4.41) и (4.42), можно рассчитать разрядности регистров оперативной памяти.

4.4.9. Априорная оценка разрядности входного сигнала фильтра

До решения аппроксимационной задачи можно оценить лишь разряд входного сигнала $s_{вх}$. Поскольку коэффициенты b_l нерекурсивного фильтра зависят от отсчетов его импульсной характеристики (см. 2.3.3), из (2.22) следует равенство

$$\sum_{l=0}^{N-1} b_l^2 = 2 \int_0^{0,5} A^2(\omega) d\omega,$$

где $A(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика фильтра.

До решения аппроксимационной задачи функция $A(\omega)$ неизвестна. Ее можно по заданным требованиям к АЧХ определить функцию $A^*(\omega)$ так, что $A(\omega) \approx A^*(\omega)$. Тогда из (4.51) следует приближенное равенство

$$\sum_{l=0}^{N-1} b_l^2 \approx 2 \int_0^{0,5} [A^*(\omega)]^2 d\omega.$$

Используя (4.41), (4.50) и (4.52), можно по заданным значениям D и A найти величину $s_{вх}$.

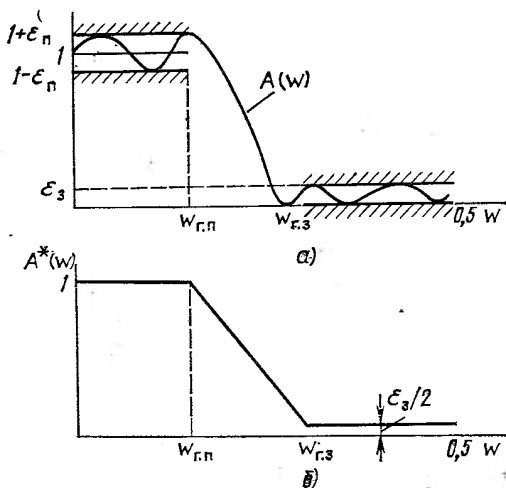


Рис. 4.10

Пусть, например, АЧХ фильтра $A(\omega)$ должна удовлетворять условиям 4.10,а):

$$\left. \begin{aligned} 1 - \epsilon_{\Pi} \leq A(\omega) \leq 1 + \epsilon_{\Pi} & \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ |A(\omega)| \leq \epsilon_{\Sigma} & \text{ при } \omega_{г.з} \leq \omega \leq 0,5, \end{aligned} \right\}$$

где $\omega_{г.п} = 0,125$; $\omega_{г.з} = 0,375$; $\epsilon_{\Pi} = \epsilon_{\Sigma} = 0,0003$. На рис. 4.10,а показан возмозный график неизвестной заранее АЧХ фильтра, рассчитываемого с помощью ритма Ремеза. По заданным требованиям к АЧХ функцию $A^*(\omega)$ можно выбрать следующим образом (рис. 4.10,б):

$$A^*(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{г.п}; \\ \frac{(\epsilon_3 - 2)\omega + 2\omega_{г.с} - \epsilon_3\omega_{г.п}}{2(\omega_{г.с} - \omega_{г.п})} & \text{при } \omega_{г.п} < \omega < \omega_{г.с}; \\ \epsilon_3/2 & \text{при } \omega_{г.с} \leq \omega \leq 0,5. \end{cases} \quad (4.54)$$

В полосе пропускания положительные и отрицательные отклонения АЧХ $A(\omega)$ от единицы примерно компенсируют друг друга; в полосе задерживания отклонения АЧХ от нуля только положительные (см. рис. 4.10,а), и максимум отклонения равен ϵ_3 , т. е. «в среднем» в этой полосе можно принять $A^*(\omega) = \epsilon_3/2$; для промежуточной полосы принято, что АЧХ изменяется по линейному закону.

Из (4.52) и (4.54) следует, что $\sum_{l=0}^{N-1} b^2_l \approx 0,5$. Для сравнения отметим, что для фильтра, рассчитанного в соответствии с условиями (4.53) (см. пример 4, 9, табл. 4.5), расчет по вычисленным коэффициентам дает значение $\sum_{l=0}^{N-1} b^2_l = 0,44$ при $N=15$.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

5.1. АППРОКСИМАЦИЯ В ПРОЦЕССЕ СИНТЕЗА РЦФ

5.1.1. Общие сведения

Известны три класса методов расчета передаточных функций рекурсивных цифровых фильтров (РЦФ): методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые (методы билинейного преобразования, инвариантности импульсной характеристики, согласованного Z -преобразования), прямые методы расчета РЦФ в Z -плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации.

Для расчета частотно-избирательных РЦФ (ФНЧ, ФВЧ, полосовых, режекторных) наиболее подходящим простым и широко используемым является метод билинейного преобразования передаточной функции $T(s)$ аналогового фильтра-прототипа в соответствующую передаточную функцию $H(z)$ РЦФ [2.3; 1.6]. Билинейное преобразование может быть выполнено как без ЭВМ (см. 5.1.5, 5.1.6 и примеры 5.3—5.6), так и на ЭВМ с помощью соответствующей программы (см. 5.1.8 и приложение 1).

Методы инвариантности импульсной характеристики и согласованного Z -преобразования рассмотрены в [1.6, 3.5]. Прямые методы расчета РЦФ в z -плоскости (используемые, в частности, при расчете избирательных фильтров с частотными характеристиками, отличающимися от характеристик фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных) рассмотрены в [1.6]. Методы оптимизации при расчете РЦФ (в частности, фильтров с нестандартными характеристиками) рассмотрены в [1.6].

5.1.2. Типы аналоговых фильтров

Наиболее подробно табулированы [5.1—5.4] фильтры: Баттерворта с монотонно убывающей АЧХ при $\omega > 0$ (тип В);

Чебышева с равноволновой в полосе пропускания и монотонно убывающей в полосе задерживания АЧХ (тип Т);
 инверсные Чебышева с монотонно убывающей в полосе пропускания и равноволновой в полосе задерживания АЧХ (тип I).
 Золотарева — Кауэра (эллиптические) с равноволновой в полосах пропускания и задерживания АЧХ (тип С).
 Вид амплитудно-частотных характеристик $A(\Omega)$ нормированных (с частотой

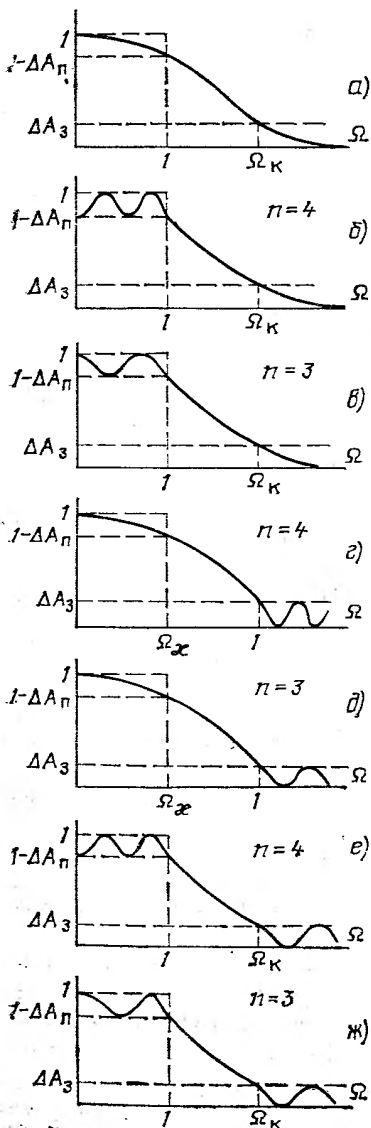


Рис. 5.1

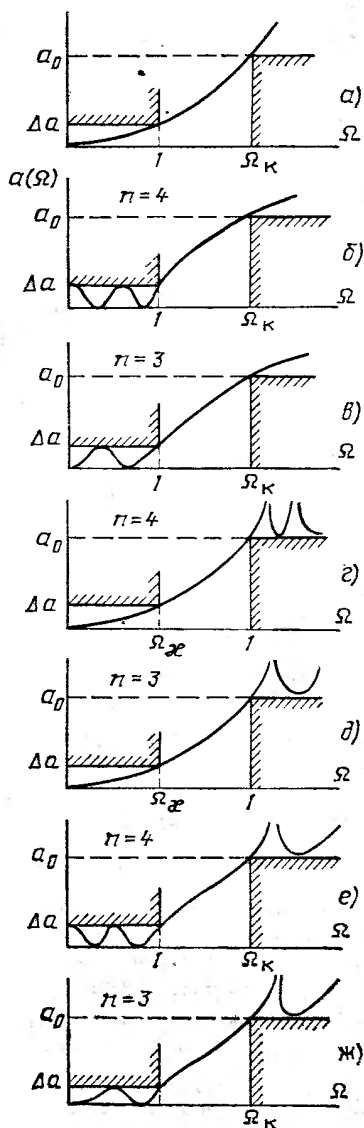


Рис. 5.2

среза $\Omega_c = 1$) передаточных функций фильтров данных типов приведен на рис. 5.1 (фильтров Баттерворта — на рис. 5.1,а; фильтров Чебышева при четном и нечетном порядке фильтра n — на рис. 5.1,б,в; инверсных фильтров Чебышева при четном и нечетном n — на рис. 5.1,г,д; фильтров Золотарева — Кауэра при четном и нечетном n — на рис. 5.1,е,ж), где ΔA_n — неравномерность АЧХ в полосе пропускания; ΔA_s — отклонение АЧХ от нуля в полосе задерживания.

На рис. 5.2,а—ж приведены характеристики затухания $a(\Omega)$ соответствующих фильтров с обозначениями, используемыми в [5.1], где Δa — верхняя граница рабочего затухания в полосе пропускания, а a_0 — гарантированное затухание в полосе задерживания. Очевидно, что

$$\Delta a = -20 \lg(1 - \Delta A_n); \quad (5.1')$$

$$a_0 = -20 \lg \Delta A_s. \quad (5.1'')$$

5.1.3. Билинейное преобразование

Билинейное преобразование представляет собой *конформное отображение* точек s -плоскости в точки z -плоскости и использует замену переменной вида

$$s \rightarrow \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \gamma \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (5.2)$$

где γ — постоянный множитель, значение которого не меняет форму преобразования (о выборе величины γ см. 5.1.4).

Использование (5.2) обеспечивает однозначное преобразование передаточной функции $T(s)$ аналогового фильтра-прототипа (АФ-прототипа) в передаточную функцию $H(z)$ рекурсивного цифрового фильтра:

$$H(z) = T(s) \Big|_{s=\gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (5.3)$$

Каждой точке комплексной s -плоскости ($s = \sigma + i\Omega$) ставится в соответствие определенная точка z -плоскости ($z = \exp((\sigma + i\Omega)T)$).

Мнимая ось s -плоскости ($s = i\Omega$ для $-\infty < \Omega < \infty$) отображается в единичную окружность z -плоскости ($z = \exp(i\omega T)$).

Левая половина s -плоскости ($\text{Re}(s) < 0$) отображается в часть z -плоскости внутри единичного круга ($|z| < 1$), т. е. устойчивый аналоговый фильтр приводит к устойчивому линейному рекурсивному фильтру.

Соотношение между «аналоговыми» частотами Ω и «цифровыми» частотами ω определяется уравнением

$$\Omega = \gamma \operatorname{tg}(\omega T/2) = \gamma \operatorname{tg} \pi \omega, \quad (5.4)$$

где $\omega = \omega/\omega_d$ — нормированная «цифровая» частота. На рис. 5.3 показана зависимость (5.4) для случая $\gamma = 1$.

Для частотно-избирательных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, полосовых, режекторных), аппроксимируемая АЧХ которых имеет вид кусочно-постоянной функции, нелинейная (но монотонная) зависимость (5.4) между частотами Ω и ω не приводит к нарушению избирательных свойств фильтра при преобразовании (5.3).

Пример 5.1. Пусть заданы требования к АЧХ цифрового ФНЧ: неравномерность АЧХ в полосе пропускания ΔA_n , отклонение от нуля в полосе задерживания ΔA_s , а также граничные нормированные частоты полос пропускания $\omega_{г.п}$ и задерживания $\omega_{г.з}$ (рис. 5.4). Используя нелинейное соотношение

(5.4), определяем соответствующие граничные частоты полосы пропускания и полосы задерживания Ω_K аналогового фильтра (см. рис. 5.4). Если определить передаточную функцию $T(s)$ аналогового фильтра-прототипа равномерностью АЧХ в полосе пропускания $[0, \Omega_c]$, равно ΔA_n , и отклонением от нуля в полосе задерживания $[\Omega_K, \infty]$, равным ΔA_z , а затем выполнить билинейное преобразование (5.3), получим РЦФ, удовлетворяющий поставленным требованиям. На рис. 5.4 хорошо видна деформация амплитудно-частотной характеристики РЦФ вдоль частотной оси (особенно в полосе задерживания).

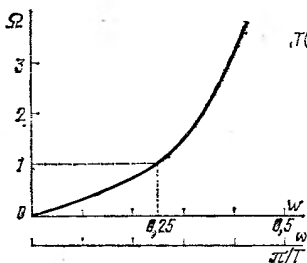


Рис. 5.3

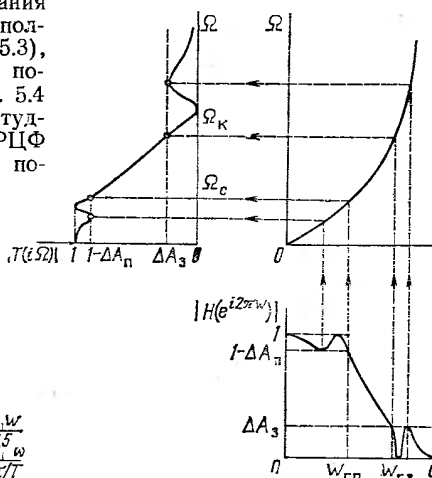


Рис. 5.4

Выбор параметра

$$\gamma = \operatorname{ctg}(\omega_{г.п} T/2) = \operatorname{ctg} \pi \omega_{г.п}$$

приводит к нормированному АФ-прототипу ($\Omega_c = 1$), что удобно при вании справочников по аналоговым фильтрам.

5.1.4. Обобщенное билинейное преобразование

Обобщенное билинейное преобразование [1.6, 2.3] обеспечивает получение передаточной функции $T(s)$ нормированного АФ-прототипа ($\Omega_c = 1$) передаточную функцию $H(z)$ рекурсивного цифрового фильтра определенной структуры (ФНЧ, ФВЧ, полосового, режекторного). Формулы соответствующих преобразований приведены в табл. 5.1. На рис. 5.5 и 5.6 приведены соответствующие схемы допусков на АЧХ $A(\omega)$ и затухание $a(\omega)$ фильтров нижних частот (б), полосовых (в) и режекторных (г).

Пример 5.2. Рассчитаем параметры преобразования и граничные частоты «высшей» частоты нормированного АФ-прототипа нижних частот ($\Omega_c = 1$) четырех видов РЦФ, приведенных в табл. 5.1 (при конкретных значениях «цифровых» частот). Результаты расчета приведены в табл. 5.2, следует рассматривать вместе с рис. 5.6.

5.1.5. Определение передаточной функции цифрового ФНЧ (ФВЧ) по справочнику [5.1]

Постановка задачи. Определить передаточную функцию цифрового фильтра (ФВЧ) заданного типа (B, T, I, C).

Исходные данные: частота дискретизации f_d ; граничная частота полосы пропускания $f_{г.п}$; граничная частота полосы задерживания $f_{г.з}$; верхняя

Цифровой фильтр	Граничные «цифровые» частоты	Формула замены	Параметр	Связь «аналоговых» частот с «цифровыми» частотами	Граничные «аналоговые» частоты	
Нижних частот	$\omega_{г.н}, \omega_{г.в}$	$s \rightarrow \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi \omega_{г.п}$	$\Omega = \gamma \operatorname{tg} \pi \omega$	$\Omega_K = \gamma \operatorname{tg} \pi \omega_{г.с}$	
Верхних частот	$\omega_{г.п}, \omega_{г.в}$	$s \rightarrow \gamma \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$\gamma = \operatorname{tg} \pi \omega_{г.п}$	$\Omega = \gamma \operatorname{ctg} \pi \omega$	$\Omega_K = \gamma \operatorname{ctg} \pi \omega_{г.с}$	
Голосовой	$\omega_{г.н1}, \omega_{г.н2}, \omega_{г.в1}, \omega_{г.в2}$	$s \rightarrow \gamma \frac{1-2\alpha z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi (\omega_{г.п2} - \omega_{г.п1})$	$\Omega = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \omega}{\sin 2\pi \omega}$	$\Omega_K = \min (\Omega'_K , \Omega''_K)$, где	
			$\alpha = \frac{\cos \pi (\omega_{г.п2} + \omega_{г.п1})}{\cos \pi (\omega_{г.п2} - \omega_{г.п1})}$			$\Omega'_K = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \omega_{г.с1}}{\sin 2\pi \omega_{г.с1}}$;
						$\Omega''_K = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \omega_{г.с2}}{\sin 2\pi \omega_{г.с2}}$
Режекторный	$\omega_{г.н1}, \omega_{г.в1}, \omega_{г.н2}, \omega_{г.в2}$	$s \rightarrow \gamma \frac{1-z^{-2}}{1-2\alpha z^{-1}+z^{-2}}$	$\gamma = \operatorname{tg} \pi (\omega_{г.п2} - \omega_{г.п1})$ $\alpha = \frac{\cos \pi (\omega_{г.п2} + \omega_{г.п1})}{\cos \pi (\omega_{г.п2} - \omega_{г.п1})}$	$\Omega = \gamma \frac{\sin 2\pi \omega}{\alpha - \cos 2\pi \omega}$	$\Omega_K = \min (\Omega'_K , \Omega''_K)$, где $\Omega'_K = \gamma \frac{\sin 2\pi \omega_{г.с1}}{\alpha - \cos 2\pi \omega_{г.с1}}$; $\Omega''_K = \gamma \frac{\sin 2\pi \omega_{г.с2}}{\alpha - \cos 2\pi \omega_{г.с2}}$	

Цифровой фильтр	Граничные «цифровые» частоты	Параметр	Граничные «аналоговые» частоты
Нижних частот	$\omega_{г.п} = 0,125;$ $\omega_{г.з} = 0,375$	$\gamma \approx 2,41$	$\Omega_R \approx 5,82$
Верхних частот	$\omega_{г.п} = 0,375;$ $\omega_{г.з} = 0,125$	$\gamma \approx 2,41$	$\Omega_R \approx 5,82$
Полосовой	$\omega_{г.з1} = 0,05;$ $\omega_{г.п1} = 0,1;$ $\omega_{г.п2} = 0,2;$ $\omega_{г.з2} = 0,4$	$\gamma \approx 3,08;$ $\alpha \approx 0,618$	$\Omega'_R \approx -3,32;$ $\Omega''_R \approx 7,49;$ $\Omega_R \approx 3,32$
Режекторный	$\omega_{г.п1} = 0,05;$ $\omega_{г.з1} = 0,1;$ $\omega_{г.з2} = 0,2;$ $\omega_{г.п2} = 0,4$	$\gamma \approx 1,96;$ $\alpha \approx 0,346$	$\Omega'_R \approx -2,48;$ $\Omega''_R \approx 50,3;$ $\Omega_R \approx 2,48$

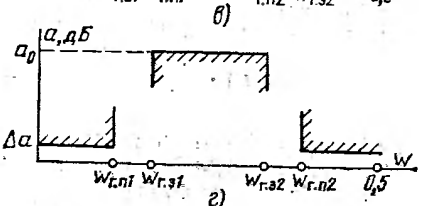
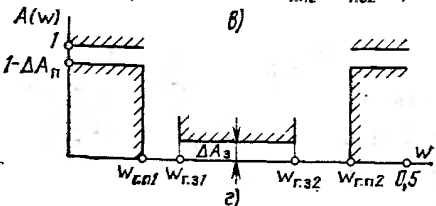
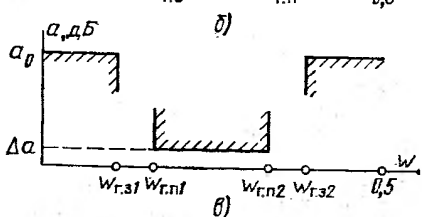
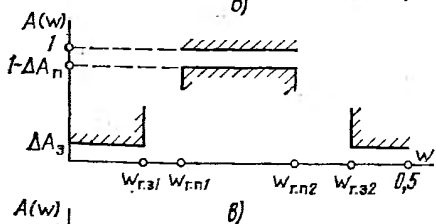
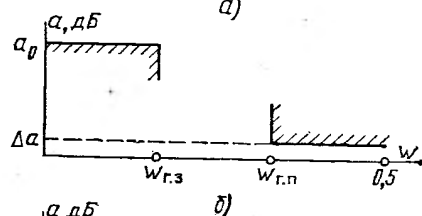
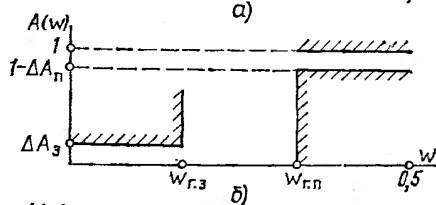
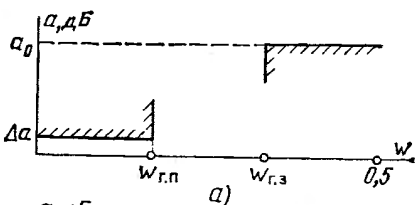
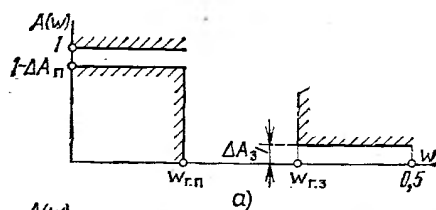


Рис. 5.5

Рис. 5.6

рабочего затухания в полосе пропускания Δa ; гарантированное затухание в полосе задерживания a_0 .

Алгоритм определения передаточной функции. Алгоритм включает следующие этапы:

1. Расчет нормированных «цифровых» граничных частот $\omega_{г.п} = f_{г.п}/f_d$ и $\omega_{г.з} = f_{г.з}/f_d$.

2. Расчет параметра преобразования γ (см. табл. 5.1 и пример 5.2).

3. Нахождение граничной аналоговой частоты Ω_k полосы задерживания АФ-прототипа (см. табл. 5.1 и пример 5.2).

4. Определение передаточной функции АФ-прототипа нижних частот требуемого типа (B , T , I или C):

а) определение модуля коэффициента отражения $|p|$ (см. [5.1], табл. 3, с. 23) по заданной верхней границе рабочего затухания Δa в полосе пропускания;

б) определение порядка фильтра по номограммам [5.1] (пояснения к использованию номограмм приведены в [5.1], с. 23), при этом вначале находится вспомогательный параметр L по общей номограмме ([5.1], рис. 2.21, с. 408), а затем порядок фильтра n по полученным значениям L и Ω_k ;

в) запись передаточной функции $T(s)$ АФ данного типа и порядка в общем виде;

г) определение численных значений коэффициентов передаточной функции с учетом модуля коэффициента отражения $|p|$ по таблицам, приведенным в [5.1, с. 44—387];

д) запись передаточной функции $T(s)$ АФ с численными значениями коэффициентов.

5. Определение передаточной функции $H(z)$ цифрового ФНЧ (ФВЧ) с помощью билинейного преобразования (см. табл. 5.1).

6. Контрольный расчет АЧХ (затухания) полученного ЦФ.

Пример 5.3. Найти передаточную функцию цифрового ФНЧ с монотонно убывающей АЧХ (типа B). Параметры фильтра: $f_d = 8$ кГц; $f_{г.п} = 1$ кГц; $f_{г.з} = 3$ кГц; $\Delta a = 1,4$ дБ; $a_0 = 40$ дБ.

Определяем:

1. $\omega_{г.п} = 1 \cdot 10^3 / (8 \cdot 10^3) = 0,125$ и $\omega_{г.з} = 3 \cdot 10^3 / (8 \cdot 10^3) = 0,375$.

2. $\gamma = \text{ctg } \pi \cdot 0,125 = 2,414214$ (см. табл. 5.1).

3. $\Omega_k = 2,414214 \cdot \text{tg } \pi \cdot 0,375 \approx 5,82$ (см. табл. 5.1).

4. Передаточную функцию АФ типа B :

а) модуль коэффициента отражения (см. [5.1], табл. 3). Для $\Delta a = 1,4$ дБ следует выбрать $|p| = 50\%$, что соответствует $\Delta a^* = 1,25$ дБ (дальнейшая работа по справочнику ведется с величиной Δa^*);

б) порядок фильтра n , для чего по номограмме ([5.1], рис. 2.21) для $\Delta a^* = 1,25$ дБ ($|p| = 50\%$) и $a_0 = 40$ дБ находим вспомогательный параметр $L \approx 9,5 \cdot 10^{-2}$, а затем по номограмме ([5.1], рис. 2.2) для $\Omega_k = 5,82$ и $L = 9,5 \cdot 10^{-2}$ находим, что $n = 3$;

в) общий вид $T(s)$ ([5.1], с. 58):

$$T(s) = \frac{1}{S(s)} = \frac{1}{c} \frac{1}{(s - a_0) [s^2 - 2a_1s + (a_1^2 + b_1^2)]};$$

г) коэффициенты $T(s)$ ([5.1], с. 57, таблица для фильтров $B03$): $c = 0,577350$; $a_0 = -1,200937$; $a_1 = -0,600468$; $a_2 = 1,040042$;

д) передаточную функцию

$$T(s) = 1,732052 \frac{1}{(s + 1,200937)(s^2 + 1,200936s + 1,442249)}$$

5. Передаточную функцию $H(z)$, используя подстановку (см. табл. 5.1)

$$s \rightarrow \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 2,414214 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}};$$

$$H(z) = 1,732052 \frac{1}{\left(\gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1,200937 \right) \left(\gamma^2 \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + 1,200936 \times \right.}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\times \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1,442249)} = 1,732052 \frac{1+z^{-1}}{3,615151 - 1,213278 z^{-1}} \times$$

$$\times \frac{(1+z^{-1})^2}{10,169994 - 8,772360 z^{-1} + 4,371362 z^{-2}}.$$

6. Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ цифрового ФНЧ приведена на рис. 5.7 (кривая 1).

Пример 5.4. Найти передаточную функцию цифрового ФВЧ с монотонно возрастающей АЧХ (типа В). Параметры фильтра: $f_{д.п} = 8$ кГц; $f_{г.с} = 1$ кГц; $f_{г.п} = 3$ кГц; $\Delta\alpha = 1,4$ дБ; $\alpha_0 = 40$ дБ.

Определяем:

1. $\omega_{г.п} = 3 \cdot 10^3 / (8 \cdot 10^3) = 0,375$ и $\omega_{г.с} = 1 \cdot 10^3 / (8 \cdot 10^3) = 0,125$.

2. $\gamma = \operatorname{tg} \pi \cdot 0,375 = 2,414214$ (см. табл. 5.1).

3. $\Omega_{к} = 2,414214 \cdot \operatorname{ctg} \pi \cdot 0,125 \approx 5,82$ (см. табл. 5.1).

4. Передаточную функцию $T(s)$, которая имеет тот же вид, что и в примере 5.3, поскольку значения $\Delta\alpha$, α_0 , γ и $\Omega_{к}$ в данных примерах совпадают:

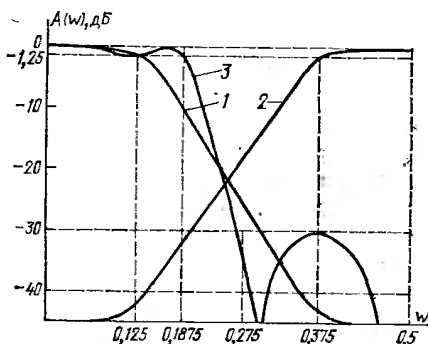


Рис. 5.7

$$T(s) = 1,732052 \frac{1}{(s + 1,200937) (s^2 + 1,200936 s + 1,442249)}$$

Порядок определения $T(s)$ см. в примере 5.3.

5. Передаточную функцию ЦФ, используя подстановку $s \rightarrow \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$:

$$H(z) = 0,04711 \frac{1-z^{-1}}{1+0,335609 z^{-1}} \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+0,862573 z^{-1}+0,429829 z^{-2}}.$$

6. Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ цифрового ФВЧ приведена на рис. 5.7 (кривая 2).

Пример 5.5. Найти передаточную функцию цифрового ФНЧ с АЧХ, равноволюйной в полосах пропускания и задерживания (фильтр типа С). Параметры фильтра: $f_{д} = 32$ кГц; $f_{г.п} = 6$ кГц; $f_{г.с} = 8,8$ кГц; $\Delta\alpha = 1,5$ дБ; $\alpha_0 = 30$ дБ.

Определяем:

1. $\omega_{г.п} = 6 \cdot 10^3 / (32 \cdot 10^3) = 0,1875$ и $\omega_{г.с} = 8,8 \cdot 10^3 / (32 \cdot 10^3) = 0,275$.

2. $\gamma = \operatorname{ctg} \pi \cdot 0,1875 = 1,496606$ (см. табл. 5.1).

3. $\Omega = 1,496606 \operatorname{tg} \pi \cdot 0,275 = 1,752300$ (см. табл. 5.1).

4. Передаточную функцию $T(s)$:

а) $|p| = 50\%$ (см. [5.1], табл. 3); $\Delta\alpha^* = 1,25$ дБ;

б) $L = 1,7 \cdot 10^{-1}$ (см. [5.1], рис. 2.21) и $n = 3$ (см. [5.1], рис. 2.16);

в) общий вид передаточной функции ([5.1], с. 58)

$$T(s) = \frac{1}{S(s)} = \frac{1}{c} \frac{s^2 + \Omega_{\infty 1}^2}{(s^2 - 2a_1 s + (a_1^2 + b_1^2))};$$

г) коэффициенты $T(s)$ ([5.1], с. 77, таблица для фильтров С03 с $\Omega_R \approx 1.74$): $c=7,733830$; $a_0=-0,510162$; $a_1=-0,190430$; $b_1=0,971581$, $\Omega_{\infty 1}=1,966001$;

д) передаточную функцию

$$T(s) = 0,129302 \frac{s^2 + 3,865161}{(s + 0,510162)(s^2 + 0,380860s + 0,980233)}$$

5. Передаточную функцию ЦФ, используя подстановку

$$s \rightarrow 1,496606 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}};$$

$$\begin{aligned} H(z) &= 0,129302 \frac{1+z^{-1}}{2,006768 - 0,986444 z^{-1}} \times \\ &\times \frac{6,104990 + 3,250664 z^{-1} + 6,104990 z^{-2}}{3,790059 - 2,519184 z^{-1} + 2,650065 z^{-2}} = \\ &= 0,103788 \frac{1+z^{-1}}{1-0,491558 z^{-1}} \frac{1+0,532460 z^{-1} + z^{-2}}{1-0,664682 z^{-1} + 0,699215 z^{-2}}. \end{aligned}$$

6. Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ цифрового ФНЧ приведена на рис. 5.7 (кривая 3).

5.1.6. Определение передаточной функции цифрового полосового (режекторного) фильтра по справочнику [5.1]

Постановка задачи. Определить передаточную функцию цифрового полосового (режекторного) фильтра с АЧХ заданного типа (B, T, I, C).

Исходные данные: частота дискретизации f_D ; граничные частоты $f_{г.п.1}$, $f_{г.п.2}$, $f_{г.з.1}$, $f_{г.з.2}$ (см. рис. 5.6); верхняя граница рабочего затухания в полосе пропускания $\Delta\alpha$; гарантированное затухание в полосе задерживания a_0 .

Алгоритм определения передаточной функции $H(z)$. Алгоритм определения $H(z)$ для полосового (режекторного) фильтра почти полностью совпадает с соответствующим алгоритмом для ФНЧ (см. 5.1.5). Однако имеются два дополнения. Первое — на этапе 2 определяются два параметра преобразования: γ и α (см. табл. 5.1 и пример 5.2). Второе — на этапе 5 (определение $H(z)$) по $T(s)$ с помощью билинейного преобразования) замена переменной s в полиномах первого порядка по s приводит к полиному второго порядка по z^{-1} , а в полиномах второго порядка по s — к полиномам четвертого порядка по z^{-1} . При получении окончательного вида $H(z)$ следует полиномы четвертого порядка разложить на множители (полиномы второго порядка по z^{-1}).

Пример 5.6. Определить передаточную функцию цифрового полосового фильтра типа С со следующими параметрами: $f_D=140$ Гц; $f_{г.п.1}=15,5$ Гц; $f_{г.п.2}=30$ Гц; $f_{г.з.1}=7,75$ Гц; $f_{г.з.2}=60$ Гц; $\Delta\alpha=0,5$ дБ; $a_0=40$ дБ (см. рис. 5.6).

Определяем:

$$1. \omega_{г.п.1} = 15,5/140 = 0,110714; \quad \omega_{г.п.2} = 30/140 = 0,214286; \quad \omega_{г.з.1} = 7,75/140 = 0,055357; \quad \omega_{г.з.2} = 60/140 = 0,428571.$$

$$2. \gamma = \text{ctg} [\pi(0,214286 - 0,110714)] = 2,964087 \text{ (см. табл. 5.1),}$$

$$\alpha = \frac{\cos [\pi(0,214286 + 0,110714)]}{\cos [\pi(0,214286 - 0,110714)]} = 0,551433 \text{ (см. табл. 5.1).}$$

3. Ω_K (см. табл. 5.1):

$$\Omega_K^* = 2,964087 \frac{0,551433 - \cos 2\pi \cdot 0,055357}{\sin 2\pi \cdot 0,055357} \approx -3,38;$$

$$\Omega_K'' = 2,964087 \frac{0,551433 - \cos 2\pi \cdot 0,428571}{\sin 2\pi \cdot 0,428571} \approx 9,92;$$

$$\Omega_K = \min(3,38; 9,92) = 3,38.$$

4. Передаточную функцию $T(s)$:

а) $|p| = 25\%$ (см. [5.1], табл. 3), $\Delta\alpha^* = 0,28$ дБ;

б) $L = 5 \cdot 10^{-2}$ (см. [5.1], рис. 2.21) и $n=4$ (см. [5.1], рис. 2.6);

в) общий вид передаточной функции (см. [5.1], с. 80)

$$T(s) = \frac{1}{c} \frac{1}{\prod_{j=1}^2 [s^2 - 2a_j s + (a_j^2 + b_j^2)]};$$

г) коэффициенты $T(s)$ ([5.1], с. 81, таблица для фильтров Т03): $c = -2,065591$; $a_1 = -0,206284$; $b_1 = 1,049557$; $a_2 = -0,498012$; $b_2 = 0,434741$;

д) передаточную функцию

$$T(s) = 0,484123 \frac{1}{s^2 + 0,412569s + 1,144123} \frac{1}{s^2 + 0,996024s + 0,437016}.$$

5. Передаточную функцию ЦФ, используя подстановку $s = 2,964087 \cdot (1 - 2 \cdot 0,551433z^{-1} + z^{-2}) / (1 - z^{-2})$ и разлагая каждый из двух полиномов четвертой степени (в знаменателе $H(z)$) на множители (полиномы второй степени):

$$H(z) = 0,0035652 \prod_{j=1}^4 \frac{1 - z^{-2}}{1 + a_{1j}z^{-1} + a_{2j}z^{-2}},$$

где $a_{11} = -0,703705$; $a_{21} = 0,684397$; $a_{12} = -1,155395$; $a_{22} = 0,741638$; $a_{13} = -0,378998$; $a_{23} = 0,860199$; $a_{14} = -1,479492$; $a_{24} = 0,907562$.

6. Выполняем контрольный расчет АЧХ.

5.1.7. Определение передаточной функции параллельной структуры РЦФ

Рассмотренные в 5.1.5, 5.1.6 методы определения передаточной функции РЦФ $H(z)$ позволяют получить последнюю в виде каскадной структуры. Для получения $H(z)$ в виде параллельной структуры необходимо:

выполнить все действия, предусмотренные алгоритмом определения $H(z)$ с использованием справочника по аналоговым фильтрам (см. 5.1.5, 5.1.6);

разложить полученную дробно-рациональную функцию $H(z)$ на элементарные дроби, т. е. привести ее к виду

$$H(z) = c + \sum_{i=1}^M H_i(z),$$

где

$$H_i(z) = \frac{b_{0i}}{1 + a_{1i}z^{-1}}, \text{ или } H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}.$$

Пример 5.7. Найти передаточную функцию ФНЧ (в параллельной структуре) с АЧХ, равноволновой в полосах пропускания и задерживания (фильтр типа С) при следующих параметрах: $f_{\text{д}} = 32$ кГц; $f_{\text{г.п}} = 6$ кГц; $f_{\text{г.з}} = 8,8$ кГц; $\Delta\alpha = 1,5$ дБ; $a_0 = 30$ дБ;

1. Определяем $H(z)$ для каскадной структуры. Поскольку исходные данные

Для расчета совпадают с данными примера 5.5, то после выполнения всех этапов алгоритма (см. пример 5.5), получаем

$$H(z) = 0,103788 \frac{1+z^{-1}}{1-0,491558z^{-1}} \frac{1+0,532460z^{-1}+z^{-2}}{1-0,664682z^{-1}+0,699215z^{-2}}$$

2. Определяем $H(z)$ для параллельной структуры. Разлагая $H(z)$ на элементарные дроби (см. [3.4], с. 42), получаем передаточную функцию РЦФ в виде

$$H(z) = c + \frac{b_{01}}{1+a_{11}z^{-1}} + \frac{b_{02} + b_{12}z^{-1}}{1+a_{12}z^{-1}+a_{22}z^{-2}}$$

где $c = -0,301968$; $b_{01} = 0,770950$; $b_{02} = -0,365194$; $b_{12} = 0,142826$; $a_{11} = -0,491558$; $a_{12} = -0,664682$; $a_{22} = 0,699215$.

5.1.8. Определение передаточной функции РЦФ с помощью билинейного преобразования на ЭВМ

Коэффициенты передаточной функции $H(z)$ цифрового фильтра с характеристиками Баттерворта, Чебышева и Золотарева—Кауэра могут быть определены на ЭВМ по программе, описанной в приложении 1. Там же приведены примеры машинного расчета РЦФ с характеристиками, удовлетворяющими требованиям, рассмотренным в примерах 5.3 и 5.5.

5.2. РАСЧЕТ РАЗРЯДНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФИЛЬТРА И РЕГИСТРОВ ОПЕРАТИВНОЙ ПАМЯТИ

5.2.1. Общие сведения

В результате решения аппроксимационной задачи (см. 5.1) определяется передаточная функция линейного рекурсивного дискретного фильтра (ЛРДФ) с фактически неограниченной разрядностью регистров.

В цифровом фильтре хранение и обработка чисел осуществляется в устройствах (элементах памяти, умножителях, сумматорах) с конечным числом разрядов. В процессе проектирования РЦФ необходимо выполнить квантование коэффициентов ЛРДФ и определить разрядность входного регистра (разрядность АЦП при входном аналоговом сигнале) и разрядности регистров оперативной памяти (умножителей, сумматоров).

Квантование коэффициентов (представление с конечным числом разрядов) приводит к изменению положения нулей и полюсов передаточной функции, т. е. к искажению частотных характеристик фильтра. Вместе с тем представление коэффициентов с конечным числом разрядов не приводит к появлению собственных шумов РЦФ. Ограниченная разрядность входного сигнала и регистров оперативной памяти приводит к возникновению выходного шума фильтра.

В данном параграфе используются следующие обозначения: s_k — разрядность коэффициентов РЦФ; $s_{вх}$ — разрядность входного сигнала (АЦП); s — разрядность регистров оперативной памяти, причем $s_k = s_{к.ц} + s_{к.д}$, $s_{вх} = s_{вх.ц} + s_{вх.д}$, $s = s_ц + s_д$, где индексы «ц» и «д» соответствуют разрядностям представления целой и дробной частей соответствующих кодов.

5.2.2. Определение разрядности коэффициентов

Детерминированный метод. Определение разрядности коэффициентов осуществляется в процессе расчета АЧХ $A^*(\omega)$ или рабочего затухания $a^*(\omega)$ фильтра с квантованными коэффициентами при разрядностях $s^*_{к}$, $s^*_{к}-1$, $s^*_{к}-$

—2, ..., начиная с достаточно большого значения s^*_k (например, $s^*_k=20$) с одновременной проверкой условий

$$A^k_{max}(w) - A^k_{min}(w) \leq \Delta A_{\Pi} \quad (5.6')$$

для полосы пропускания,

$$A^k_{max} \leq \Delta A_3 \quad (5.6'')$$

для полосы задерживания,

$$a^k_{max} - a^k_{min} \leq \Delta a \quad (5.7')$$

для полосы пропускания,

$$a^k_{min} \geq a_0 \quad (5.7'')$$

для полосы задерживания, где A^k_{max} , ΔA^k_{max} (A^k_{min} , ΔA^k_{min}) — максимальные (минимальные) значения АЧХ и рабочего затухания фильтра с квантованными коэффициентами; ΔA_{Π} , ΔA_3 (Δa , a_0) — заданные допуски на проектируемый РЦФ.

Квантование коэффициентов при удовлетворении заданных требований к частотным характеристикам возможно только в том случае, когда при решении аппроксимационной задачи (см. 5.1) величины рабочего затухания в полосе пропускания Δa^* и гарантированного затухания в полосе задерживания a^*_0 выбраны с запасом, т. е. $\Delta a^* < \Delta a$; $a^*_0 > a_0$. Чем больше допуски на искажения характеристики затухания $\Delta a - \Delta a^*$, $a^*_0 - a_0$, тем меньше требуемая точность (разрядность) представления коэффициентов.

На рис. 5.8 показаны характеристики затухания исходного фильтра нижних частот (сплошная линия) и фильтра с квантованными коэффициентами (штриховая линия).

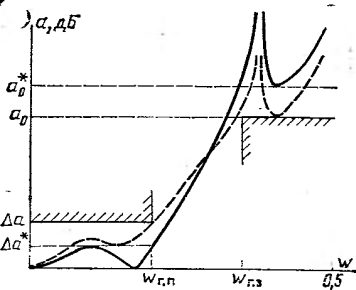


Рис. 5.8

Статистический метод. Этот метод, основанный на использовании функций чувствительности $B_{c_i} = \partial A(w) / \partial c_i$ амплитудно-частотной характеристики фильтра по отношению к коэффициентам c_i , описан в [3.5].

5.2.3. Определение разрядностей входного сигнала и регистров оперативной памяти по вероятностной модели ошибок квантования

Постановка задачи. В результате решения аппроксимационной задачи (см. 5.1) и квантования коэффициентов (см. 5.2.2) определена передаточная функция $H(z)$ линейного рекурсивного дискретного фильтра (ЛРДФ). Требуется рассчитать разрядности входного сигнала (АЦП) и регистров оперативной памяти (умножителей, сумматоров).

Исходные данные: коэффициенты передаточной функции ЛРДФ; структура фильтра и форма реализации элементарных звеньев; динамический диапазон входного сигнала D ; отношение сигнал-шум на выходе фильтра $R_{\text{ш}}$.

Определения и расчетные формулы. Под **динамическим диапазоном** D (дБ) входного сигнала понимается отношение максимальной амплитуды входного сиг-

нала $a_{D \max}$ к минимальной амплитуде $a_{D \min}$, при которой обеспечивается заданное отношение мощности сигнала к мощности шума на выходе фильтра:

$$D = 20 \lg (a_{D \max}/a_{D \min}). \quad (5.6)$$

Под отношением сигнал-шум $R_{\text{ш}}$ (дБ) понимается отношение мощности выходного сигнала P_c к мощности шума $P_{\text{ш}}$ на выходе фильтра:

$$R_{\text{ш}} = 10 \lg (P_c/P_{\text{ш}}). \quad (5.7)$$

При синусоидальном входном сигнале

$$R_{\text{ш}} = 10 \lg [a^2/(2 P_{\text{ш}})], \quad (5.8)$$

где a — амплитуда синусоидального выходного сигнала. Если АЧХ фильтра $A(\omega) \approx 1$ в полосе пропускания, то $a = a_D$ (амплитуды выходного и входного синусоидальных сигналов равны).

Минимальная амплитуда входного сигнала $a_{D \min}$ определяется по заданному значению D из (5.6):

$$a_{D \min} = a_{D \max} \cdot 10^{-D/20}. \quad (5.9)$$

Допустимая величина мощности шума квантования $P_{\text{ш.доп}}$ определяется из (5.8) и (5.9) при заданном значении $R_{\text{ш}}$ и минимальной амплитуде входного сигнала ($a = a_{D \min}$):

$$P_{\text{ш.доп}} = \frac{a_{D \max}^2}{2} \cdot 10^{-(D+R_{\text{ш}})/10}. \quad (5.10)$$

Разрядности входного сигнала $s_{\text{вх}}$ и регистров s цифрового фильтра определяются на основе оценок составляющих шума квантования выходного сигнала, обусловленных квантованием входного сигнала («внешнего» шума) и квантованием сигналов в регистрах ЦФ («собственного» шума) (см. 3.5—3.10), а также оценок диапазона изменения сигналов в фильтре.

При определении величин $s_{\text{вх}}$ и s рассчитанная по формуле (5.10) мощность $P_{\text{ш.доп}}$ распределяется на допуски $P_{\text{ш.в}}$ и $P_{\text{ш.с}}$, отводимые на составляющие выходного шума (внешний и собственные шумы). Можно принять, что

$$P_{\text{ш.в}} = \beta_{\text{в}} P_{\text{ш.доп}}; \quad P_{\text{ш.с}} = P_{\text{ш.доп}} - P_{\text{ш.в}}, \quad (5.11)$$

где $\beta_{\text{в}} = 0,8 \dots 0,9$ (см. 4.4).

В дальнейших формулах принимается, что входной сигнал нормирован к единичному уровню, т. е. $\max_{n \geq 0} |x(nT)| = a_{D \max} = 1$.

Разрядность входного сигнала $s_{\text{вх}} = s_{\text{вх.д}}$ определяется [см. (3.27)] по формуле

$$s_{\text{вх}} = \text{int} \left[0,5 \log_2 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (h(nT))^2}{12 \beta_{\text{в}} P_{\text{ш.доп}}} \right], \quad (5.12)$$

где $h(nT)$ — импульсная характеристика фильтра, а $P_{\text{ш.доп}}$ определяется по формуле (5.10).

Разрядность $s_{\text{д}}$ регистров оперативной памяти для представления дробной части кодов определяется [см. (3.29), (3.28)] по формуле

$$s_{\text{д}} = \text{int} \left[0,5 \log_2 \frac{\sum_j r_j \sum_{n=0}^{\infty} (g_j(nT))^2}{12 P_{\text{ш.доп}} - 2^{-2s_{\text{вх}}} \sum_{n=0}^{\infty} (h(nT))^2} \right], \quad (5.13)$$

где r_j — число умножителей, подключенных к j -му сумматору; $g_j(nT)$ — импульсная характеристика части фильтра от выхода j -го сумматора до выхода фильтра.

Разрядность $s_{\text{д}}$ регистров оперативной памяти для представления целой части кодов определяется на основе оценки диапазона изменения сигналов в фильтре [см. (3.35), (3.36)] по формуле

$$s_{\text{д}} = \text{int} \log_2 (\max_{j,l} \alpha_{j,l} V_j), \quad (5.14)$$

где $V_j = \sum_{n=0}^{\infty} |f_j(nT)|$; $f_j(nT)$ — импульсная характеристика части фильтра от входа до выхода j -го сумматора ($j=0, 1, \dots, V_0=1$), а $\alpha_{j,l}$ — коэффициент l -го умножителя, подключенного к выходу j -го сумматора ($\alpha_{j,0}=1$).

Расчет $s_{\text{д}}$ по (5.14) гарантирует отсутствие переполнений регистров при нулевых начальных условиях.

Общая разрядность s регистров оперативной памяти определяется по формуле

$$s = s_{\text{ц}} + s_{\text{д}}. \quad (5.15)$$

Алгоритм расчета разрядностей. Расчет разрядностей регистров производится в указанной ниже последовательности:

1. Изображается линейная модель РЦФ с учетом шумов квантования (см. 3.7, 3.8).
2. Определяются величины $G^*_j = \sum_{n=0}^{\infty} (g_j(nT))^2$.
3. Определяются величины $F^*_j = \sum_{n=0}^{\infty} |f_j(nT)|$.
4. Определяется разрядность входного сигнала $s_{\text{вх}}$ по формуле (5.12).
5. Определяется разрядность регистров оперативной памяти по формулам (5.13) — (5.15).

Пример 5.8. Рассчитать разрядности входного сигнала и регистров оперативной памяти РЦФ с передаточной функцией, определенной в примере 5.5.

Исходные данные: передаточная функция РЦФ

$$\begin{aligned} H(z) &= c H_1(z) H_2(z) = c \frac{B_1(z) B_2(z)}{A_1(z) A_2(z)} = \\ &= c \frac{1+z^{-1}}{1+a_{11}z^{-1}} \cdot \frac{1+b_{12}z^{-1}+z^{-2}}{1+a_{12}z^{-1}+a_{22}z^{-2}}, \end{aligned}$$

где $c=0,103788$; $b_{12}=0,532460$; $a_{11}=-0,491558$; $a_{12}=-0,664682$; $a_{22}=0,699215$; рекурсивный цифровой фильтр реализован в виде каскадной структуры при канонической форме реализации элементарных звеньев (см. 2.2.3); динамический диапазон входного сигнала $D=30$ дБ; отношение сигнал-шум на выходе фильтра $R_{\text{ш}} \geq 30$ дБ; входной сигнал $x(nT)$ ограничен по амплитуде в соответствии с (3.34).

1. Линейная модель РЦФ с учетом шумов квантования изображена на рис. 5.9. Шумовой сигнал $e_0(nT)$, учитывающий шум квантования входного сигнала, проходит через весь фильтр с передаточной функцией $H(z) = F_4(z)$. Шумовой сигнал $\gamma_1(nT)$ учитывает квантование сигналов в умножителях на коэффициенты c и $-a_{11}$ (число умножителей, подключенных к первому сумматору $r_1=2$), сигнал $\gamma_3(nT)$ — в умножителях на коэффициенты $-a_{12}$ и $-a_{22}$ ($r_3=2$), а сигнал $\gamma_4(nT)$ — в умножителе на коэффициент b_{12} ($r_4=1$).

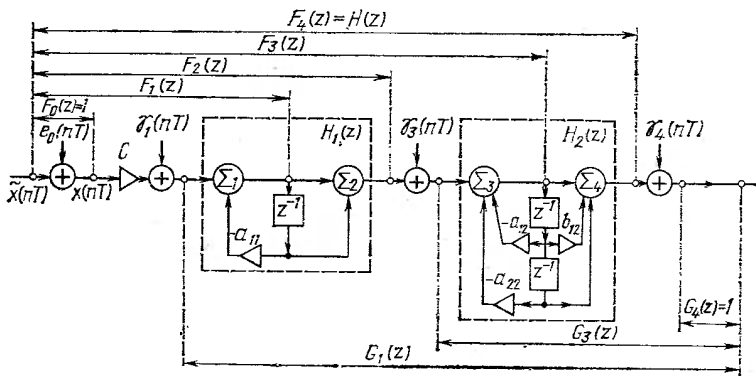


Рис. 5.9

Сигналы $\gamma_1(nT)$, $\gamma_3(nT)$ и $\gamma_4(nT)$ проходят на выход через части фильтра с передаточными функциями $G_1(z)$, $G_3(z)$ и $G_4(z)$ соответственно, причем

$$G_1(z) = H_1(z) H_2(z); \quad G_3(z) = H_2(z); \quad G_4(z) = 1.$$

Входной сигнал $x(nT)$ проходит до выхода j -го сумматора ($j=1, 2, 3, 4$) через части фильтра с передаточными функциями $F_j(z)$, причем

$$F_1(z) = c \frac{1}{A_1(z)}; \quad F_2(z) = c H_1(z);$$

$$F_3(z) = c H_1(z) \frac{1}{A_2(z)}; \quad F_4(z) = H(z).$$

2. Определяем G^* , используя в данном примере формулы (3.30") и (3.31"). Подробные пояснения приведены при вычислении G^*_3 :

$$\begin{aligned} G &= \sum_{n=0}^{\infty} (g_3(nT))^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint H_2(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 + b_{12} z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_{12} z^{-1} + a_{22} z^{-2}} \frac{1 + b_{12} z + z^2}{1 + a_{12} z + a_{22} z^2} z^{-1} dz. \end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральное выражение, избавившись от отрицательных степеней z (умножив числитель и знаменатель на z^3):

$$\begin{aligned} G^*_3 &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^2 + b_{12} z + 1}{z(z^2 + a_{12} z + a_{22})} \frac{1 + b_{12} z + z^2}{1 + a_{12} z + a_{22} z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint H^*_2(z) dz. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция $H^*_2(z)$ имеет три простых полюса внутри единичной окружности: в точках $z_1=0$, $z_2=c+id$ и $z_3=c-id$, где $c=-a_{12}/2=-0,332341$; $d=0,5 \sqrt{4a_{22}-a_{12}^2}=0,767297$.

Величина G_3^* равна сумме вычетов подынтегральной функции z_2 и z_3 :

$$G_3^* = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} H_2^*(z_k) = \sum_{k=1}^3 \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) H_2^*(z),$$

где

$$\operatorname{Res} H_2^*(z_1) = \frac{z^2 + b_{12}z + 1}{z^2 + a_{12}z + a_{22}} \frac{1 + b_{12}z + z^2}{1 + a_{12}z + a_{22}z^2} \Big|_{z=0} = \frac{1}{a_{22}} =$$

$$\operatorname{Res} H_2^*(z_2) = \frac{z^2 + b_{12}z + 1}{z[z - (c - id)]} \frac{1 + b_{12}z + z^2}{1 + a_{12}z + a_{22}z^2} \Big|_{z=c} =$$

$$= \frac{-0,3556 + i1,2835}{-0,4454 + i0,4074};$$

$$\operatorname{Res} H_2^*(z_3) = \frac{z^2 + b_{12}z + 1}{z[z - (c + id)]} \times$$

$$\times \frac{1 + b_{12}z + z^2}{1 + a_{12}z + a_{22}z^2} \Big|_{z=c-id} = \frac{-0,3556 - i1,2835}{-0,4454 - i0,4074}$$

Таким образом

$$G_3^* = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} H_2^*(z_k) \approx 5,19.$$

Аналогично вычисляем:

$$G_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} (g_1(nT))^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint H_1(z) H_2(z) H_1(z^{-1}) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz$$

$$H^* = \sum_{n=0}^{\infty} (h(nT))^2 = G_1^* c^2 \approx 0,35.$$

Примечание. Другие методы вычисления G_j^* см. 3.9.

3. Величины $F_j^* = \sum_{n=0}^{\infty} |f_j(nT)|$ определяются на ЭВМ: $F_1^* \approx 1,69$; $F_2^* \approx 0,94$; $F_3^* \approx 1,69$.

4. Разрядность входного сигнала $s_{вх}$ определяем, приняв $\beta_{в} = 10$ получаем

$$P_{ш доп} = 0,5 \cdot 10^{-(30+30)/10} = 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

Из (5.12) получаем

$$s_{вх} = \operatorname{int} \left[0,5 \log_2 \frac{0,35}{12 \cdot 0,8 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} \right] = 8.$$

5. Разрядности регистров оперативной памяти определяем (5.13) и (5.14):

$$s_{д} = \operatorname{int} \left[0,5 \log_2 \frac{2 \cdot 32,56 + 2 \cdot 5,19 + 1}{12 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} - 2^{-16} \cdot 0,35} \right] = 14;$$

$s_{п} = \operatorname{int} \log_2 [\max(0,103788 V_0; V_1; 0,491558 V_1; V_2; V_3; 0,664682 V_3; 0,53246 V_3; V_4)] = 1$, поскольку $V_0 = 1$ [см. 3.10 и (5.14)]; $V_1 = F_1^* = 1,69$; $V_2 = F_2^* = 0,41$; $V_3 = F_3^* = 0,94$; $V_4 = F_4^* = 1,69$.

Окончательно из (5.15) определяем $s = 14 + 1 = 15$.

5.2.4. Определение разрядностей входного сигнала и регистров оперативной памяти по детерминированной модели ошибок квантования

Постановка задачи. В результате решения аппроксимационной задачи (см. 5.1) и квантования коэффициентов (см. 5.2.2) определена передаточная функция $H(z)$ линейного рекурсивного дискретного фильтра. Требуется рассчитать разрядность входного сигнала (АЦП) и регистров оперативной памяти (умножителей, сумматоров).

Исходные данные: коэффициенты передаточной функции ЛРДФ; структура фильтра и форма реализации элементарных звеньев; допустимая величина ошибки квантования выходного сигнала $E_{\text{вых.доп}}$.

Расчетные формулы. Принимается, что входной сигнал нормирован к единичному уровню, т. е. $\max_{n \geq 0} |x(nT)| \leq 1$.

Разрядности входного сигнала $s_{\text{вх}}$ и регистров с РЦФ определяются на основе оценок составляющих ошибки квантования выходного сигнала, обусловленных квантованием входного сигнала [см. (3.21)] и квантованием сигналов в регистрах РЦФ [см. (3.22), (3.23)].

Заданная величина $E_{\text{вых.доп}}$ распределяется на допуски $E_{\text{вых.в}}$ и $E_{\text{вых.с}}$, отводимые на указанные составляющие. Можно принять, что

$$E_{\text{вых.в}} = \beta_{\text{в}} E_{\text{вых.доп}}; E_{\text{вых.с}} = E_{\text{вых.доп}} - E_{\text{вых.в}}, \quad (5.16)$$

где $\beta_{\text{в}} = 0,8 \dots 0,9$.

Разрядность входного сигнала $s_{\text{вх}} = s_{\text{вх.д}}$ определяется [см. (3.21)] по формуле

$$s_{\text{вх}} = \text{int} \log_2 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|}{2 \beta_{\text{в}} E_{\text{вых.доп}}}. \quad (5.17)$$

где $h(nT)$ — импульсная характеристика фильтра.

Разрядность $s_{\text{д}}$ регистров оперативной памяти для представления дробной части кода определяется [см. (3.22), (3.23)] по формуле

$$s_{\text{д}} = \text{int} \log_2 \frac{\sum_j r_j \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)|}{2 E_{\text{вых.доп}} - 2^{-s_{\text{вх}}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|}. \quad (5.18)$$

Разрядности $s_{\text{ц}}$ и s определяются по формулам (5.14) и (5.15).

Алгоритм расчета разрядностей. Расчет разрядностей регистров производится в указанной ниже последовательности.

1. Изображается линейная модель РЦФ с учетом ошибок квантования (см. 3.7, 3.8).

2. Определяются величины $G^*_j = \sum_{n=0}^{\infty} |g_j(nT)|$.

3. Определяются величины $F^*_j = \sum_{n=0}^{\infty} |f_j(nT)|$.

4. Определяется разрядность $s_{\text{вх}}$ входного сигнала по формуле (5.17).

5. Определяется разрядность регистров оперативной памяти по формулам (5.18), (5.14) и (5.15).

Пример 5.9. Рассчитать разрядности входного сигнала и регистров оперативной памяти РЦФ с передаточной функцией, определенной в примере 5.5, используя детерминированную модель ошибок квантования.

Исходные данные: передаточная функция РЦФ (приведена в примере 5.8); рекурсивный цифровой фильтр реализован в виде каскадной структуры при канонической форме реализации элементарных звеньев; допустимая величина квантования $E_{\text{вых.доп}} = 0,004$.

1. Линейная модель РЦФ изображена на рис. 5.9 (см. пояснения к примеру 5.8).

2. Величины G^*_j рассчитываются на ЭВМ: $G^*_1 \approx 16,27$; $G^*_2 \approx 7,08$; $G^*_4 = 1$.

3. Величины F^*_j рассчитываются на ЭВМ: $F^*_1 \approx 0,20$; $F^*_2 \approx 0,41$; $F^*_3 \approx 0,94$; $F^*_4 \approx 1,69$.

4. Определяем разрядность входного сигнала $s_{\text{вх}}$. Приняв $\beta_{\text{в}} = 0,8$, из (5.17) получаем

$$s_{\text{вх}} = \text{int} \log_2 \frac{1,69}{2 \cdot 0,8 \cdot 0,004} = 8.$$

5. Определяем разрядности регистров оперативной памяти s . Из (5.18) получаем

$$s_{\text{д}} = \text{int} \log_2 \frac{2 \cdot 16,27 + 2 \cdot 7,08 + 1}{2 \cdot 0,004 - 2^{-8} \cdot 1,69} = 16.$$

Из (5.14) получаем (см. пример 5.8) $s_{\text{д}} = 1$. Из (5.15) получаем $s = 17$.

5.3. РАСЧЕТ МАСШТАБНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Масштабные множители вводятся в схему фильтра для улучшения шумовых характеристик (уменьшения требуемой разрядности оперативной памяти) и нормирования сигнала в любой точке фильтра к значению $\bar{V} = 2^{\bar{s}_{\text{д}}}$, где $\bar{s}_{\text{д}}$ рассчитывается по выходу фильтра [1.6, 2.11]. Например, при ограничении максимума амплитуды входного сигнала (см. 3.10.1)

$$\bar{s}_{\text{д}} = \text{int} \log_2 \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|. \quad (5.19)$$

Каскадная и параллельная структуры РЦФ с введенными масштабными множителями показаны на рис. 5.10,а и б соответственно.

Выбор масштабных множителей. Масштабный множитель на входе элемен-

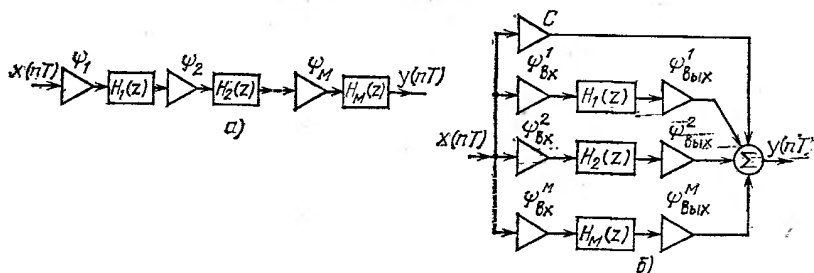


Рис. 5.10

гарного звена (см. рис. 5.10) выбирается таким образом, чтобы сигнал в произвольной точке данного звена не превышал уровня \tilde{V} :

$$\Psi < \tilde{V}/V_{j,l}^*$$

где $V_{j,l}^*$ — максимально возможное значение сигнала в данном звене без введения масштабного множителя.

Величина $V_{j,l}^*$ определяется по формулам, приведенным в 3.10, в зависимости от принятого допущения о классе входных сигналов.

Масштабный множитель на входе последнего звена фильтра (для каскадной структуры) или выходе произвольного звена (для параллельной структуры) выбирается так, чтобы АЧХ фильтра (произвольного звена) осталась неизменной:

$$\Psi_M = 1 / \prod_{j=1}^{M-1} \Psi_j \text{ для каскадной структуры,}$$

$$\Psi_{\text{вых}}^j = 1 / \Psi_{\text{вх}}^j \text{ для параллельной структуры.}$$

Примечания: 1. Масштабные множители Ψ_j ($j=1, 2, \dots, M-1$) в каскадной структуре и $\Psi_{\text{вх}}^j$ ($j=1, 2, \dots, M$) в параллельной структуре целесообразно выбирать равными 2^k ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) для упрощения схемной реализации.

2. Масштабные множители Ψ_j ($j=2, 3, \dots, M$) и $\Psi_{\text{вых}}^j$ ($j=1, 2, \dots, M$) могут быть учтены изменением коэффициентов числителей передаточных функций соответствующих звеньев [1.6].

Пример 5.10. Ввести масштабные множители в схему РЦФ (на входах и выходах элементарных звеньев) с передаточной функцией, рассчитанной в примере 5.5. Рассчитать разрядности регистров по исходным данным примера 5.8.

Выбор масштабных множителей 1. Линейная модель исходного фильтра приведена на рис. 5.9. Для определения масштабных множителей рассчитываются на ЭВМ величины $F_{j=2}^* = \sum_{n=0}^{\infty} |f_j(nT)|$; $F_2^* \approx 0,20$; $F_3^* \approx 0,41$; $F_4^* \approx 0,94$; $F_5^* \approx 1,69$.

2. Величина \tilde{V} определяется с помощью формулы (5.19):

$$\tilde{S}_{\text{ц}} = \text{int} \log_2 1,69 = 1, \text{ тогда } \tilde{V} = 2.$$

3. Рассчитываем масштабный множитель Ψ_1 на входе фильтра (первого звена). Максимальное значение сигнала в первом звене получается на выходе Σ_2 , причем $F_2^* = \sum_{n=0}^{\infty} |f_2(nT)| = c \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}_2(nT)| = 0,41$, где $\hat{f}_2(nT)$ — импульсная характеристика первого звена. Поскольку [см. (3.36), (3.35)] должно выполняться условие $\Psi_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_2(nT)| < 2$, то

$$\Psi_1 < 2 / \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}_2(nT)| = 2c/F_2^* < 0,506283.$$

Выбираем $\Psi_1 = 0,5$.

4. Рассчитываем масштабный множитель Ψ_2 на входе второго звена. При введенном масштабном множителе Ψ_1 величины F_j^* имеют новые значения. В частности,

$$\hat{F}_3 = 0,94 \frac{\Psi_1}{c} = 4,528462;$$

$$\hat{F}_4^* = 1,69 \frac{\Psi_1}{c} = 8,141596.$$

Максимальный сигнал достигается на выходе Σ_4 , причем $F^*_4=8,141596$, а исходное значение $F^*_4=1,69$. Тогда

$$\Psi_2 = F_4 / \hat{F}_4 = 0,207576.$$

Проверка: $\Psi_1 \Psi_2 = 0,5 \cdot 0,207576 = 0,103788 = c$.

Далее проводим расчет разрядностей регистров по алгоритму, изложенному в 5.2.3. В данном примере используются результаты примера 5.8.

Расчет разрядностей регистров. 1. Линейная модель фильтра с масштабными множителями приведена на рис. 5.11 (без учета входного шумового сигнала $e_0(nT)$). Шумовой сигнал $\gamma_1(nT)$ учитывает квантование сигналов в умножителях на коэффициенты Ψ_1 и $-a_{11}$ (число умножителей, подключенных к первому сумматору $r_1=2$), сигнал $\gamma_3(nT)$ — в умножителях на коэффициенты Ψ_2 , $-a_{12}$, $-a_{22}$ ($r_3=3$), сигнал $\gamma_4(nT)$ — в умножителе на коэффициент b_{12} ($r_4=1$) (см. также пояснения к этапу 1 в примере 5.8).

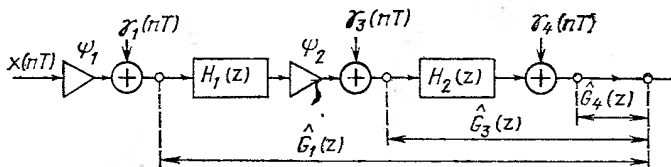


Рис. 5.11

2. Определяем $G^*_{j\wedge}$ (символ \wedge введен для отличия от соответствующих величин в примере 5.8): $G^*_{4\wedge}=1$; $G^*_{3\wedge}=G^*_{3\wedge}=5,19$; $G^*_{1\wedge}=\Psi_2^2 G^*_{1\wedge}=0,207576^2 \cdot 32,56 \approx 1,40$; $H^*=H^*=0,35$.

3. Определяем $F^*_{j\wedge}$: $F^*_{1\wedge}=F^*_{1\wedge} \Psi_1 / c \approx 0,96$; $F^*_{2\wedge}=F^*_{2\wedge} \Psi_1 / c \approx 1,97$; $F^*_{3\wedge}=F^*_{3\wedge} \Psi_1 \Psi_2 / c \approx 0,94$; $F^*_{4\wedge}=F^*_{4\wedge} \Psi_1 \Psi_2 / c = F^*_{4\wedge} = 1,69$.

4. Определяем разрядность входного сигнала $s_{вх}$. Поскольку введение масштабных множителей не изменяет значения $\sum_{n=0}^{\infty} (h(nT))^2$, из (5.12) получаем (см. пример 5.8) $s_{вх}=8$.

5. Определяем разрядность регистров оперативной памяти s . Из (5.13) получаем:

$$s_{д} = \text{int} \left[0,5 \log_2 \frac{2 \cdot 140 + 3 \cdot 5,19 + 1}{12 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} - 2^{-16} \cdot 0,35} \right] = 13;$$

$$s_{ц} = \hat{s}_{ц} = 1;$$

$$s = 14.$$

Введение масштабных множителей позволило уменьшить разрядность регистров оперативной памяти (сравните с примером 5.8).

5.4. РАССТАНОВКА ЗВЕНЬЕВ В КАСКАДНЫХ СТРУКТУРАХ РЦФ

Оценки выходного шума (и, следовательно, разрядность регистров оперативной памяти) в РЦФ с передаточной функцией

$$H(z) = \prod_{j=1}^M H_j(z) = \prod_{j=1}^M \frac{B_j(z)}{A_j(z)}$$

зависят от попарного подбора числителей $B_j(z)$ и знаменателей $A_j(z)$ передаточных функций элементарных звеньев и их расстановки. Известны следующие правила по подбору $B_j(z)$ и $A_j(z)$ и расстановке звеньев:

1) согласно [2.11]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1(nT)| > \sum_{n=0}^{\infty} |h_2(nT)| > \dots > \sum_{n=0}^{\infty} |h_M(nT)|; \quad (5.20')$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1(nT)| < \sum_{n=0}^{\infty} |h_2(nT)| < \dots < \sum_{n=0}^{\infty} |h_M(nT)|, \quad (5.20'')$$

где $h_j(nT)$ — импульсная характеристика j -го элементарного звена ($j=1, 2, \dots, M$). Выбирается та из расстановок, для которой рассчитанная по формулам (5.18), (5.14), (5.15) разрядность регистров s минимальна;

2) согласно [1.6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (h_1(nT))^2 > \sum_{n=0}^{\infty} (h_2(nT))^2 > \dots > \sum_{n=0}^{\infty} (h_M(nT))^2; \quad (5.21')$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (h_1(nT))^2 < \sum_{n=0}^{\infty} (h_2(nT))^2 < \dots < \sum_{n=0}^{\infty} (h_M(nT))^2. \quad (5.21'')$$

Выбирается та из расстановок, для которой рассчитанная по формулам (5.13) — (5.15) разрядность регистров s минимальна;

3) согласно [1.6]:

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_M; \quad (5.22')$$

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_M, \quad (5.22'')$$

где $\rho_j = \|H_j(e^{i\omega T})\|_{\infty} / \|H_j(e^{i\omega T})\|_2$ ($\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве L_p) и выбирается та из расстановок, для которой значение s минимально.

Оптимальные подбор $B_j(z)$ и $A_j(z)$ и расстановку звеньев для фильтров небольших порядков можно выполнить на ЭВМ в процессе расчета величины $s = s_{\text{д}} + s_{\text{н}}$ по формулам (5.13) — (5.15) или (5.18), (5.14), (5.15) для всех возможных вариантов расстановок [2.11].

Пример 5.11. Задан РЦФ (реализуемый в каскадной структуре при прямой форме реализации элементарных звеньев) с передаточной функцией

$$H(z) = \prod_{j=1}^3 \frac{B_j(z)}{A_j(z)} = \prod_{j=1}^3 \frac{b_{0j} + b_{1j}z^{-1} + b_{2j}z^{-2}}{1 + a_{1j}z^{-1} + a_{2j}z^{-2}},$$

где $b_{01}=0,036133$; $b_{02}=b_{03}=1$; $b_{11}=0$; $b_{12}=1,896484$; $b_{13}=-1,038086$; $b_{21}=0,036133$; $b_{22}=b_{23}=1$; $a_{11}=0,874023$; $a_{12}=1,446289$; $a_{13}=0,334961$; $a_{21}=0,585937$; $a_{22}=0,850586$; $a_{23}=0,774414$.

При расчете на ЭВМ разрядностей регистров по формулам (5.18), (5.14), (5.15) (допуск $E_{\text{вых.с}}=0,006$) для всех 36 возможных расстановок $B_j(z)$ и $A_j(z)$ были получены следующие оптимальные структуры, обеспечивающие минимальную разрядность регистров ($s=15$):

$$\text{а) } H^1(z) = \frac{B_2(z)}{A_2(z)} \frac{B_3(z)}{A_3(z)} \frac{B_1(z)}{A_1(z)}; \quad s_{\text{д}}^1 = 11; \quad s_{\text{н}}^1 = 4;$$

$$\text{б) } H^2(z) = \frac{B_1(z)}{A_2(z)} \frac{B_3(z)}{A_3(z)} \frac{B_2(z)}{A_1(z)}; \quad s_{\text{д}}^2 = 14; \quad s_{\text{н}}^2 = 1$$

$$\text{в) } H^3(z) = \frac{B_3(z)}{A_3(z)} \frac{B_2(z)}{A_2(z)} \frac{B_1(z)}{A_1(z)}; \quad s_{\text{д}} = 11; \quad s_{\text{н}} = 4.$$

Примечания: 1. Оптимальная структура $H(z)=H^3(z)$ соответствует расстановке звеньев согласно правилу (5.21'):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1(nT)| \approx 9,22; \quad \sum_{n=0}^{\infty} |h_2(nT)| \approx 5,65; \quad \sum_{n=0}^{\infty} |h_3(nT)| \approx 0,23.$$

2. Расположение нулей и полюсов фильтра в z -плоскости показано на рис. 5.12, причем попарная их группировка для вариантов а) и в) показана на рис. 5.12,а, для варианта б) — на рис. 5.12,б. Из рисунка видно, что при оптимальных расстановках звеньев в пары объединяются полюса с ближайшими к ним нулями.

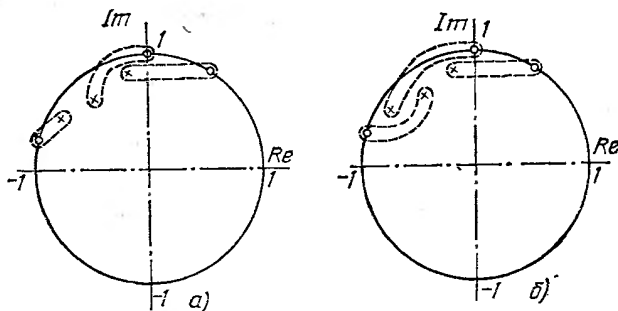


Рис. 5.12

Для фильтров высоких порядков можно использовать эвристические алгоритмы, основанные на случайном поиске сочетаний нулей и полюсов и расстановки звеньев, минимизирующих выходной шум фильтра [1.6].

5.5. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

5.5.1. Устойчивость линейных рекурсивных дискретных фильтров

Линейный рекурсивный дискретный фильтр ЛРДФ описывается разностным уравнением

$$y(nT) = \sum_{j=0}^N b_j x(nT - jT) - \sum_{i=1}^M a_i y(nT - iT)$$

и имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}}. \quad (5.23)$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости фильтра (5.23) является [5.5, 5.6] устойчивость «базового» ЛРДФ с передаточной функцией

$$H_0(z) = \frac{1}{1 + A(z)}, \quad (5.24)$$

описываемого разностным уравнением

$$\xi(nT) = x(nT) - \sum_{j=1}^M a_j \xi(nT - jT). \quad (5.25)$$

Состояние ЛРДФ (5.24) в момент времени, предшествующий n -му такту, описывается вектором

$$\Lambda(n) = \{\xi(nT - T), \xi(nT - 2T), \dots, \xi(nT - MT)\},$$

где $\xi(nT)$ определяется уравнением (5.25).

Определение устойчивости: ЛРДФ является устойчивым, если для ограниченного входного воздействия $x(nT)$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1(nT) - \xi_2(nT)) = 0, \quad (5.26)$$

где $\xi_1(nT)$ и $\xi_2(nT)$ — процессы, протекающие в фильтре (5.25) при входном воздействии $x(nT)$ и произвольных начальных условиях $\Lambda_1(0)$ и $\Lambda_2(0)$ соответственно.

Критерии устойчивости ЛРДФ:

ЛРДФ устойчив, если полюсы передаточной функции (5.24) находятся внутри единичного круга z -плоскости;

ЛРДФ устойчив, если годограф частотной характеристики $A(e^{i\omega T}) = A(z)|_{z=e^{i\omega T}} = \sum_{l=1}^M a_l e^{i\omega l T}$ (амплитудно-фазовая характеристика) в комплексной плоскости не охватывает точку $(-1, i 0)$ (критерий Найквиста).

5.5.2. Определение устойчивости и класса входных сигналов РЦФ

Рекурсивный цифровой фильтр с ограниченной разрядностью регистров является нелинейной системой. Нелинейности обусловлены округлениями результатов арифметических операций в регистрах умножителей и возможными переполнениями регистров сумматоров.

Особенности анализа устойчивости РЦФ [5.5]:

1. Для РЦФ, как и для всех нелинейных систем, существуют различные понятия устойчивости.

2. Из устойчивости положения равновесия (при $x(nT) \equiv 0$ для всех $n \geq 0$) не следует устойчивость процессов (при $x(nT) \neq 0$ для $n \geq 0$). Критерии устойчивости положения равновесия и процессов имеют различную форму.

3. Устойчивость процессов в РЦФ зависит от класса входных сигналов. Процесс, вызванный одним воздействием, может быть устойчив, а другим воздействием — неустойчив.

Определение класса входных сигналов X_0 : принимается, что входной сигнал $x(nT) \in X_0$ только в том случае, если существуют по меньшей мере одни начальные условия $\Lambda_l(0)$ такие, что процесс $\xi_l(nT)$ при входном сигнале $x(nT)$ протекает без переполнений регистра сумматора, т. е. удовлетворяет условию $\max |\xi_l(nT)| < 1$ для всех $n \geq 0$ (при нормировке сигналов в любой точке фильтра к единичному уровню) [5.7].

При выборе s_n (числа разрядов в регистрах фильтра, отводимых для хранения целой части кода) в соответствии с (5.14) или (5.19) класс сигналов X_0 включает в себя все входные сигналы, для которых $\max |x(nT)| < 1$ для всех $n \geq 0$. Начальные условия $\Lambda_l(0) = (0, 0)$.

Условия устойчивости:

РЦФ считается устойчивым, если для любого ограниченного воздействия $x(nT) \in X_0$ выполняется неравенство

$$\max_{n \geq 0} |\xi(nT) - \xi_l(nT)| < \mu, \quad (5.27)$$

где $\xi(nT)$ и $\xi_l(nT)$ — процессы, протекающие в РЦФ при ограниченном входном воздействии $x(nT)$ и начальных условиях $\Lambda(0)$ и $\Lambda_l(0)$ соответственно, а μ — достаточно малая положительная константа, значение которой уточняется в (5.31);

РЦФ считается асимптотически устойчивым, если для любого ограниченного воздействия $x(nT) \in X_0$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \xi(nT) - \xi_l(nT) \} = 0 \quad (5.28)$$

для произвольных начальных условий $\Lambda(0)$.

Если $x(nT) \equiv 0$ для всех $n \geq 0$, условия (5.27) и (5.28) определяют устойчивость положения равновесия. Если $x(nT) \neq 0$ для $n \geq 0$, условия (5.27) и (5.28) определяют устойчивость процессов.

5.5.3. Устойчивость положения равновесия

При анализе устойчивости РЦФ рассматриваются, как правило, звенья первого и второго порядков, на основе которых строятся структуры РЦФ.

Асимптотическая устойчивость положения равновесия. Критерием асимптотической устойчивости положения равновесия (критерием Я. З. Цыпкина) является выполнение неравенства

$$\operatorname{Re} A(e^{i\omega T}) > -\frac{1}{k}, \quad (5.29)$$

где $k=1$ для фильтра первого порядка и $k=1/(\eta-2s_q-s_d)$ для фильтра второго порядка (s_q и s_d — разрядности после запятой регистров сумматора и умножителей соответственно, а $\eta=1$ для усечения и $\eta=0,5$ для округления). Смысл формулы (5.29) состоит в том, что амплитудно-фазовая характеристика $A(e^{i\omega T})$ фильтра должна располагаться в комплексной плоскости справа от вертикальной прямой, проходящей через точку $(-1/k, i 0)$.

Из (5.29) следует, что РЦФ первого порядка асимптотически устойчив. Для РЦФ второго порядка достаточные условия устойчивости (5.29) при $s_q=s_d$ не выполняются (т. е. необходимо, чтобы $s_d > s_q$).

При невыполнении условия (5.29) выходной сигнал РЦФ (при произвольных начальных условиях $\Lambda(0)$ и $x(nT) \equiv 0$) по истечении определенного времени либо становится равным нулю, либо имеет вид периодической последовательности, именуемой «предельным циклом при нулевом входе» (zero-input limit cycle). Методы определения границы предельных циклов описаны в [3.5, 5.8].

Устойчивость положения равновесия. Рекурсивный цифровой фильтр второго порядка устойчив в смысле (5.27) при выполнении следующих условий:

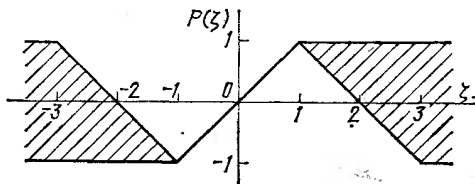


Рис. 5.18

1. Эквивалентный линейный фильтр устойчив (т. е. полюсы передаточной функции находятся внутри единичного круга z -плоскости).

2. В фильтре используется сумматор с характеристикой (нелинейностью переполнения) $P(\xi)$, расположенной в заштрихованной области (рис. 5.13),

3. Величина μ в (5.27) достаточно мала (сравнима с допустимым уровнем шумов).

К требуемому виду характеристики $P(\xi)$ относится и часто используемая характеристика типа «ограничения»:

$$P(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{при } |\xi| \leq 1; \\ \text{sign } \xi & \text{при } |\xi| > 1, \end{cases} \quad (5.30)$$

обеспечивающая отсутствие колебаний переполнения (Overflow oscillations), т. е. предельных циклов с амплитудой уровня переполнения.

Величина μ в (5.27) оценивается точно так же, как оценивалась ошибка квантования в 3.9.1 [см. (3.19)–(3.21)]:

$$\mu \leq Q \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|, \quad (5.31)$$

где $Q=2^{-s_d}$; $h(nT)$ — импульсная характеристика фильтра. Очевидно, что (5.31) является простой оценкой сверху для предельных циклов.

Увеличивая разрядность регистра s_d , можно получить сколь угодно малое значение μ .

5.5.4. Устойчивость процессов

Условия устойчивости:

1. Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости процессов в РЦФ второго порядка для входных сигналов $x(nT) \in X_0$ при характеристике нелинейности сумматора (5.30), т. е. при неограниченной разрядности регистров после запятой, является

$$\max_{n \geq 0} |q(nT)| < 1, \quad (5.32)$$

где $q(nT) = -v^{n+2} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$; $v = \sqrt{a_2}$; $\varphi = \arccos(-a_1/2v)$; a_1 и a_2 — коэффициенты полинома $A(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$ в знаменателе передаточной функции $H_0(z)$.

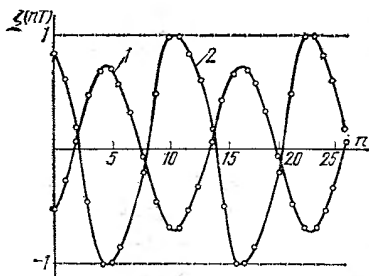


Рис. 5.14

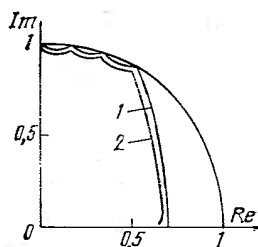


Рис. 5.15

Пример 5.12. Исследуется фильтр с передаточной функцией $H(z) = 1/(1 - 1,911z^{-1} + 0,940z^{-2})$, алгоритм работы которого описывается разностным уравнением $\xi(nT) = P\{x(nT) + 1,911\xi(nT-T) - 0,940\xi(nT-2T)\}$, где $P(\cdot)$ — характеристика вида (5.30). При начальных условиях $\Lambda_1(0) = \{-0,7286; -0,6770\}$ процесс $\xi_1(nT)$ не превосходит уровня переполнения регистра сумматора (рис. 5.14, кривая 1), т. е. можно считать, что $\Lambda_1(0) = \Lambda_1(0)$ и $\xi_1(nT) = \xi_1(nT)$. Для начальных условий $\Lambda_2(0) = \{1, 1\}$ процесс $\xi_2(nT)$ периодически превосходит уровень переполнения (рис. 5.14, кривая 2), т. е. фильтр неустойчив в смысле (5.27).

2. При ограниченной разрядности регистров после запятой s_d необходимым и достаточным условием устойчивости процессов в смысле (5.27) для входных сигналов $x(nT) \in X_0$ является [5.9]

$$\max_{n \geq 0} |q(nT)| < 1 - 2Q \sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|, \quad (5.33)$$

где $Q = 2^{-s_d}$.

Условия (5.32) и (5.33) соответствуют условию нахождения полюсов передаточной функции $H(z)$ внутри определенной зоны единичного круга z -плоскости. На рис. 5.15 показаны зоны устойчивости РЦФ второго порядка при неограниченной разрядности регистров после запятой (кривая 1) и $s_d = 12$ (кривая 2).

Методы устранения переполнений. Если полюса передаточной функции $H(z)$ находятся вне зоны устойчивости единичного круга z -плоскости, т. е. условие (5.33) не выполняется, при входном сигнале $x(nT) \in X_0$ возможен неустойчивый процесс, т. е. периодические переполнения регистра сумматора. Простейшим методом устранения переполнений является сброс всех регистров в нулевое состояние при регистрации переполнения регистра сумматора. Метод применим в том случае, если начальные условия $(0,0)$ являются условиями $\Lambda_1(0)$, что справедливо при выборе s_d в соответствии с (5.14) и (5.19).

Другие методы устранения переполнений описаны в [5.8, 5.9].

6. АДАПТИВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

6.1.1. Определение и некоторые примеры

«Адаптацией называют процесс изменения параметров и структуры системы, а возможно, и управляющих воздействий на основе текущей информации с целью достижения определенного, обычно оптимального, состояния системы при начальной неопределенности и изменяющихся условиях работы» [6.1]. Ниже рассматриваются примеры адаптивных систем.

Пример 6.1. Пусть известны входной $x(nT)$ и выходной $y(nT)$ сигналы некоторой дискретной системы S (рис. 6.1) при $n = 0, 1, \dots, N-1$. Требуется оп-

ределить коэффициенты b_l нерекурсивного фильтра заданного порядка Q так, чтобы величина

$$E_Q(b) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[y(nT) - \sum_{l=0}^Q b_l x((n-l)T) \right]^2,$$

представляющая собой некоторую оценку близости выходного сигнала к заданной последовательности $y(nT)$, имела бы наименьшее значение.

На рис. 6.1 буквами РУ обозначено решающее устройство, определяющее величины b_l . Задачи, подобные рассмотренной, называются задачами идентификации параметров систем.

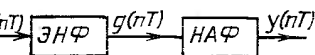
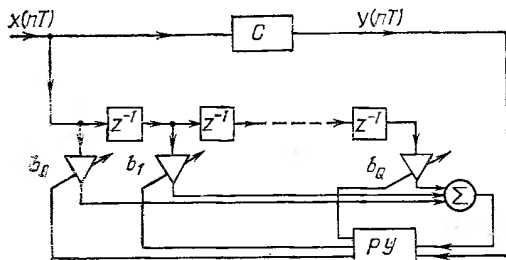


Рис. 6.2

Рис. 6.1

Пример 6.2. При передаче дискретных неквантованных сигналов по каналам связи возникают частотные искажения, вынуждающие существенно снижать скорость передачи. Характер частотных искажений относительно медленно изменяется за счет как изменений условий работы каналов связи (температуры, влажности и т. д.), так и коммутации отдельных участков каналов связи при смене абонентов. Для того чтобы компенсировать частотные искажения канала связи и, следовательно, увеличить скорость передачи, используют адаптивные цифровые корректоры частотных искажений [6.1, 6.2].

В качестве адаптивного цифрового корректора применяется нерекурсивный адаптивный фильтр (НАФ), настройка которого выполняется на специально выделенном временном интервале. Примем, что во время настройки в канал связи поступает обучающий сигнал, представляющий собой дискретную дельта-функцию $\delta(nT)$ (см. 1.1.4). При этом выходной сигнал канала связи представляет собой импульсную характеристику канала с конечным числом отсчетов v_0, v_1, \dots, v_{N-1} .

При анализе канал связи может быть заменен эквивалентным нерекурсивным фильтром (ЭНФ) с коэффициентами v_0, v_1, \dots, v_{N-1} . Очевидно, что для идеального канала связи, в котором отсутствуют частотные искажения, должны иметь место равенства $v_0=1, v_1=v_2=\dots=v_{N-1}=0$.

Нерекурсивный адаптивный фильтр включается в канал связи последовательно, так что при анализе фильтры ЭНФ и НАФ следует считать включенными последовательно (рис. 6.2).

На рис. 6.2 приняты следующие обозначения:

$x(nT)$ — входной сигнал ЭНФ (канала связи);

$g(nT)$ — выходной сигнал ЭНФ (на выходе канала связи без корректора);

$y(nT)$ — выходной сигнал НАФ (на выходе канала связи с корректором).

Принцип адаптивной коррекции частотных искажений заключается в том, что коэффициенты НАФ b_0, b_1, \dots, b_Q определяются так, чтобы результирующая импульсная характеристика канала с последовательно включенным корректором была бы близка к импульсной характеристике идеального канала.

Пусть на вход схемы (см. рис. 6.2) подается сигнал $\delta(nT)$, т. е. $x(nT) = \delta(nT)$. Считая $N-1 > Q$, выражаем значения выходного сигнала $y(nT)$ через коэффициенты $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, b_0, b_1, \dots, b_Q$ при $0 < n < N+Q-1$ (при $n > N+Q-1$ $y(nT) = 0$):

$$y(nT) = \begin{cases} v_0 b_0 & \text{при } n = 0; \\ \sum_{l=0}^n v_{n-l} b_l & \text{при } 0 < n < Q; \\ \sum_{l=0}^Q v_{n-l} b_l & \text{при } Q \leq n \leq N-1; \\ \sum_{l=0}^{Q+N-n-1} v_{N-1-l} b_{n-N+1+l} & \text{при } N-1 < n < N+Q-1. \end{cases}$$

Очевидно, что значения $y(nT)$ представляет собой отсчеты результирующей импульсной характеристики канала связи с последовательно включенным корректором. Правило определения коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_Q по известным (измеренным) коэффициентам v_0, v_1, \dots, v_{N-1} реального канала связи имеет вид:

$$b_0 = 1/v_0;$$

$$E_Q(\mathbf{b}) = \sum_{n=1}^{N+Q-1} [y(nT)]^2 \rightarrow \min,$$

т. е. коэффициент b_0 может быть определен сразу, а коэффициенты b_1, b_2, \dots, b_Q — из условия минимума функции $E_Q(\mathbf{b})$.

Иные примеры важных адаптивных систем и методов расчета их параметров приводятся в следующих разделах.

6.1.2. Критерии настройки адаптивных фильтров и методы определения значений их параметров

Одной из важнейших характеристик адаптивных фильтров (АФ) является E_Q — погрешность адаптации (погрешность, или ошибка предсказания). [6.3]. Чем меньше значение E_Q , тем выше качество адаптации. Значение E_Q зависит от трех факторов: структуры фильтра, числа его коэффициентов (порядка Q) и значений этих коэффициентов α_l (значений элементов вектора α). Как правило, структура АФ заранее задана и не изменяется за время работы фильтра. Поэтому величина E_Q определяется лишь значениями Q и α . Ниже формулируется ряд критериев настройки АФ, т. е. критериев правильности его работы:

1. Задано значение Q . Адаптивный фильтр считается настроенным, если

$$E_Q(\alpha) \rightarrow \min, \quad (6.1)$$

т. е. вектор α определен таким образом, чтобы значение $E_Q(\alpha)$ было минимальным.

В примерах 6.1 и 6.2 используется критерий (6.1).

2. Адаптивный фильтр считается настроенным, если

$$Q = Q_{\text{опт}} \text{ и } E_Q(\alpha) \rightarrow \min, \quad (6.2)$$

т. е. определен оптимальный порядок адаптивного фильтра $Q = Q_{\text{опт}}$ (для конкретных задач см. 6.2) и для АФ оптимального порядка — вектор α , при котором значение $E_Q(\alpha)$ минимально.

Критерии (6.1) и (6.2) могут использоваться как «статически», так и «динамически». Статически эти критерии используются в том случае, если вычисления коэффициентов α_l выполняются один раз и в дальнейшем фильтр не перестраивается. Именно такой случай рассмотрен в примере 6.1. Однако, как

правило, указанные критерии используются динамически, т. е. коэффициенты α_i вычисляются неоднократно по мере поступления данных. Говорят, что коэффициенты α_i обновляются в ходе работы АФ. Именно такая ситуация имеет место при коррекции частотных искажений в канале связи (см. пример 6.2). Очевидно, что настройка корректора производится неоднократно, причем каждый раз измеряются отсчеты импульсной характеристики канала v_0, v_1, \dots, v_{N-1} .

Почти всегда математическая запись критериев (6.1) и (6.2) соответствует методу наименьших квадратов [6.3, см. также разд. 4], т. е. представляет собой выражения для $E_Q(\mathbf{a})$ типа рассмотренных в примерах 6.1 и 6.2 выражений $E_Q(\mathbf{b})$. Поэтому основным математическим аппаратом, используемым для настройки АФ, являются различные варианты оптимизации по методу наименьших квадратов, позволяющие выполнять обновление коэффициентов в реальном масштабе времени.

6.2. АДАПТИВНЫЙ ФИЛЬТР-КОМПЕНСАТОР ПОМЕХ

6.2.1. Принцип адаптивной компенсации помех

На рис. 6.3 изображена структурная схема, поясняющая принцип адаптивной компенсации помех [6.4]. На этом рисунке приняты следующие обозначения: 1 — основной вход компенсатора помех; 2 — опорный вход компенсатора помех; s — сигнал, поступающий от источника сигнала на основной вход;

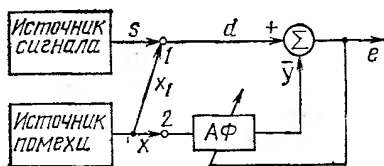


Рис. 6.3

Из рис. 6.3 видно, что $e = d - y = s + x_1 - y$ и $e^2 = s^2 + (x_1 - y)^2 + 2s(x_1 - y)$. Следовательно,

$$E[e^2] = E[s^2] + E[(x_1 - y)^2], \quad (6.3)$$

где $E[\cdot]$ означает математическое ожидание величины, заключенной в квадратные скобки.

Величина $E[s^2]$ представляет собой среднюю мощность сигнала. Если $E[s^2] = \text{const}$, то

$$\min E[e^2] = E[s^2] + \min E[(x_1 - y)^2], \quad (6.4)$$

т. е. минимизация полной выходной мощности $E[e^2]$ соответствует полной компенсации помехи на выходе компенсатора или максимальному (теоретически бесконечному) отношению сигнал-помеха.

Соотношение (6.4) является критерием адаптации по минимуму среднего квадрата ошибки (СКО). Это один из вариантов критерия (6.1).

6.2.2. Точный алгоритм настройки нерекурсивного адаптивного фильтра по минимуму СКО

На рис. 6.4 изображены нерекурсивный адаптивный фильтр и сумма позволяющий вычислять текущую погрешность адаптации $e(nT) = d(nT) - y(nT)$. На этом рисунке приняты следующие обозначения (см. также рис. 6.3):

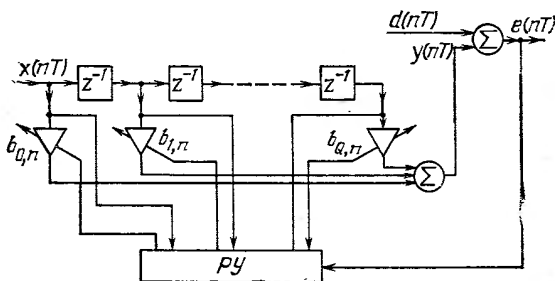


Рис. 6.4

$x(nT)$ — помеха, поступающая на вход НАФ (опорный вход компенсатора); $y(nT)$ — выходной сигнал НАФ; $d(nT)$ — сумма сигнала $s(nT)$ и помехи $x_1(nT)$, не коррелированной с $s(nT)$, но коррелированной с $x(nT)$; $e(nT)$ — выходной сигнал компенсатора и одновременно текущая погрешность адаптации; $b_{0,n}, b_{1,n}, \dots, b_{Q,n}$ — значения коэффициентов НАФ на n -м интервале дискретизации; РУ — решающее устройство, реализующее алгоритм настройки НАФ.

Для НАФ вместо (6.3) можно записать

$$E [e^2(nT)] = E[d^2(nT)] - 2 \mathbf{P}_n^T \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{B}_n, \quad (6.4)$$

где

$$\mathbf{P}_n = E[d(nT) \mathbf{X}_n] = E \begin{bmatrix} (nT) x(nT) \\ d(nT) x((n-1)T) \\ \dots \\ d(nT) x((n-Q)T) \end{bmatrix}$$

— вектор взаимной корреляции между скаляром $d(nT)$ и вектором

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x(nT) \\ x((n-1)T) \\ \dots \\ x((n-Q)T) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} b_{0,n} \\ b_{1,n} \\ \dots \\ b_{Q,n} \end{bmatrix} \quad \text{— вектор коэффициентов НАФ на } n\text{-м интервале дискретизации;}$$

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T] = E \begin{bmatrix} x(nT)x(nT) & x(nT)x((n-1)T) & \dots \\ x((n-1)T)x(nT) & x((n-1)T)x((n-1)T) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x((n-Q)T)x(nT) & x((n-Q)T)x((n-1)T) & \dots \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dots x(nT) x((n-Q)T) \\ \dots x((n-1)T) x((n-Q)T) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots x((n-Q)T) x((n-Q)T) \end{array} \right\}$$

— автокорреляционная матрица входного сигнала НАФ $x(nT)$. Для настройки НАФ, т. е. для полной компенсации помехи, необходимо определить вектор коэффициентов \mathbf{V}_n^* (вектор Винера), соответствующий минимуму правой части (6.5):

$$\mathbf{V}_n^* = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{P}_n. \quad (6.6)$$

Выражение (6.6) представляет собой точный алгоритм настройки НАФ по минимуму СКО. Однако практически использовать этот алгоритм для обновления коэффициентов чрезвычайно трудно ввиду очень большого объема вычислений.

6.2.3. Настройка нерекурсивного адаптивного фильтра по минимуму СКО с помощью градиентного метода

Для вычисления минимума функции (6.5) можно использовать градиентный метод [6.5]. В соответствии с этим методом

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n - \mu \nabla_n, \quad (6.7)$$

где ∇_n — градиент функции (6.5) на n -м интервале дискретизации; μ — константа (или несколько раз изменяемая за время установления режима адаптации величина), определяющая устойчивость и сходимость процесса адаптации.

Можно изменить (6.7) так, что для вычисления \mathbf{V}_{n+1} не потребуются численное дифференцирование. Для этого квадрат одного отсчета ошибки $e^2(nT)$ принимается за оценочное значение среднего квадрата, т. е. принимается, что $e^2(nT) \approx E[e^2(nT)]$. Вместо градиента ∇_n используется приближенный градиент $\hat{\nabla}_n$:

$$\nabla_n \approx \hat{\nabla}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial e^2(nT)}{\partial b_{0,n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial e^2(nT)}{\partial b_{Q,n}} \end{bmatrix} = 2e(nT) \begin{bmatrix} \frac{\partial e(nT)}{\partial b_{0n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial e(nT)}{\partial b_{Q,n}} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Так как (см. рис. 6.4)

$$e(nT) = d(nT) - y(nT) = d(nT) - \sum_{l=0}^Q b_{l,n} x((n-l)T) = d(nT) - \mathbf{X}_n^T \mathbf{V}_n, \quad (6.9)$$

то $\hat{\nabla}_n = -2e(nT) \mathbf{X}_n$.

Из (6.7) и (6.9) получаем алгоритм рекуррентного вычисления коэффициентов НАФ в процессе адаптации

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + 2\mu e(nT) \mathbf{X}_n. \quad (6.10)$$

Пример 6.3. Пусть $Q=20$, тогда с целью обновления коэффициентов за время T в решающем устройстве (см. рис. 6.4) должны быть выполнены 22 операции умножения для вычисления величин $c_n = 2\mu e(nT)$, $c_n x(nT)$, $c_n x((n-1)T)$, ..., $c_n x((n-20)T)$ и 21 операция сложения для определения коэффициентов

$$b_{0,n+1} = b_{0,n} + c_n x(nT), b_{1,n+1} = b_{1,n} + c_n x((n-1)T), \dots, \\ b_{20,n+1} = b_{20,n} + c_n x((n-20)T).$$

Алгоритм (6.10) обеспечивает сходимость процесса адаптации при любых начальных значениях коэффициентов НАФ, если выполнено условие

$$1/(Sp(R_n)) > \mu > 0, \quad (6.11)$$

где $Sp(R_n)$ — след матрицы R_n [сумма элементов, расположенных на главной диагонали, см. (6.5)]. Эта величина всегда может быть оценена как полная мощность входного воздействия НАФ. Выбор числа отводов НАФ $(Q+1)$ зависит от конкретного применения компенсатора. Общей рекомендацией по определению минимального значения Q является

$$Q_{min} = 2 \Delta f / (\Delta f_1) - 1, \quad (6.12)$$

где Δf — полоса частот, занимаемая спектром входного аналогового сигнала; Δf_1 — необходимое частотное разрешение НАФ.

Формула для оценки времени установления режима адаптации имеет вид:

$$t_{уст} = 3(Q+1)/[4\mu Sp(R_n)]. \quad (6.13)$$

Формулы (6.10)–(6.13) в сочетании с алгоритмом работы НАФ

$$y(nT) = \sum_{l=0}^Q b_{l,n} x((n-l)T)$$

позволяют рассчитать основные параметры компенсатора. Применения НАФ и компенсатора помех в целом описаны в [6.4, 6.6].

Условие (6.11) позволяет исключить все, кроме одной, операции умножения, выполняемые в решающем устройстве, и заменить их операциями сдвига. Для этого произведение $2\mu e(nT)$ усекается до значения 2^{-s} , определяемого отношением

$$2^{-s+1} > 2\mu e(nT) > 2^{-s}. \quad (6.14)$$

При этом условие сходимости (6.11) остается в силе, однако время установления (6.13) увеличивается.

Пример 6.4. Пусть $\mu = 1/\max Sp(R_n) = 0,1$; $e(nT) = 0,037$. Тогда из (6.14) $s = 9$, т. е. при вычислении в соответствии с (6.10) вместо умножения надо выполнить сдвиг каждой из величин $x(nT)$, $x((n-1)T)$, ..., $x((n-9)T)$ на девять разрядов.

6.3. АДАПТИВНЫЙ ФИЛЬТР — ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСКАЗЫВАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО

6.3.1. Метод линейного предсказания

Метод линейного предсказания используется для решения задач анализа и синтеза речи и для спектрального анализа [6.3, см. также разд. 8]. Суть метода состоит в следующем. Обрабатываемая последовательность разбивается на части, каждая из которых представляет собой конечную последовательность из N отсчетов $x(nT)$, $x((n-1)T)$, ..., $x((n-N+1)T)$. Этой конечной последовательности ставится в соответствие Q величин a_{Q1} , a_{Q2} , ..., a_{QQ} . Эти величины определяются так, чтобы погрешность $E_Q(a_{Q1}, a_{Q2}, \dots, a_{QQ})$ была минимальной,

т. е. в соответствии с критериями типа (6.1) и (6.2). Существуют три варианта критериев метода линейного предсказания.

Первый критерий соответствует линейному предсказанию «вперед». При этом оценка $\hat{x}(nT)$ очередного отсчета $x(nT)$ рассчитывается как линейная комбинация предыдущих отсчетов последовательности:

$$\hat{x}(nT) = - \sum_{j=1}^Q a_{Qj}^B x((n-j)T),$$

а текущая ошибка имеет вид

$$e_{QВ}(nT) = x(nT) - \hat{x}(nT) = x(nT) + \sum_{j=1}^Q a_{Qj}^B x((n-j)T). \quad (6.15)$$

Коэффициенты $a_{Q1}^B, a_{Q2}^B, \dots, a_{QQ}^B$ определяются из условия минимума общей ошибки предсказания «вперед»

$$E_{QВ} = \sum_n e_{QВ}^2(nT) = \sum_n \left(x(nT) + \sum_{j=1}^Q a_{Qj}^B x((n-j)T) \right)^2. \quad (6.16)$$

Второй критерий соответствует линейному предсказанию «назад». При этом оценка $\hat{x}((n-Q)T)$ отсчета $x((n-Q)T)$ рассчитывается как линейная комбинация последующих отсчетов последовательности:

$$\hat{x}((n-Q)T) = - \sum_{j=1}^Q a_{Qj}^H x((n-Q+j)T),$$

а текущая ошибка имеет вид

$$e_{QH}(nT) = x((n-Q)T) + \sum_{j=1}^Q a_{Qj}^H x((n-Q+j)T). \quad (6.17)$$

Величины $a_{Q1}^H, a_{Q2}^H, \dots, a_{QQ}^H$ определяются из условия минимума общей ошибки предсказания «назад»

$$E_{QH} = \sum_n e_{QH}^2(nT) = \sum_n \left(x((n-Q)T) + \sum_{j=1}^Q a_{Qj}^H x((n-Q+j)T) \right)^2. \quad (6.18)$$

Третий критерий соответствует линейному предсказанию «вперед» и «назад». При этом неизвестные параметры определяются из условия минимума общей ошибки предсказания

$$E_{QВ,Н} = E_{QВ} + E_{QH}, \quad (6.19)$$

где $E_{QВ}$ и E_{QH} рассчитываются соответственно по формулам (6.16) и (6.18).

Любой из описанных критериев может использоваться, например, для реализации адаптивных фильтров в системах анализа и синтеза речи. Рассмотрим принцип построения такой системы на основе линейного предсказания «вперед». Для анализа речи отсчеты речевого сигнала $x(nT)$ подаются на нерекурсивный адаптивный фильтр (рис. 6.5,а), так называемый обратный или отбеливающий [6.7] фильтр, описываемый разностным уравнением (6.15). Коэффициенты $a_{Q1}^B, a_{Q2}^B, \dots, a_{QQ}^B$ изменяются только после обработки очередных N отсчетов $x(nT)$. Поэтому можно принять, что

$$E_{QВ}(z) = H(z) X(z), \quad (6.20)$$

где $E_{QВ}(z)$ — z -образ текущей ошибки $e_{QВ}(nT)$; $H(z) = 1 + a^B_{Q1}z^{-1} + \dots + a^B_{Qq}z^{-q}$ — передаточная функция НАФ до очередного обновления коэффициентов; $X(z)$ — z -образ обрабатываемой части речевого сигнала. Результатом анализа N отсчетов речевого сигнала являются значения коэффициентов $a^B_{Q1}, a^B_{Q2}, \dots, a^B_{Qq}$, текущая ошибка $e_{QВ}(nT)$ и значение общей ошибки $E_{QВ}$, определяемое (6.16).

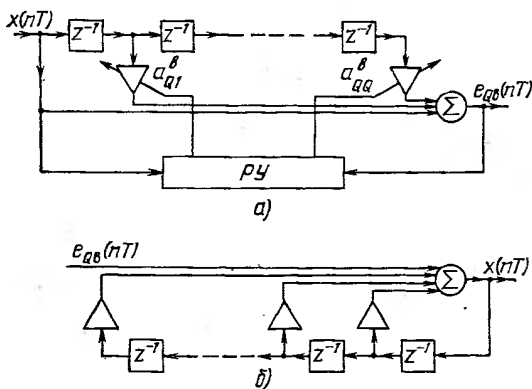


Рис. 6.5

Эти данные могут быть использованы для синтеза (восстановления) речевого сигнала. Для точного восстановления достаточно [см. (6.20)] подать сигнал $e_{QВ}(nT)$ на фильтр с передаточной функцией

$$H_1(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 + a^B_{Q1}z^{-1} + \dots + a^B_{Qq}z^{-q}}. \quad (6.21)$$

Схема восстанавливающего рекурсивного фильтра, соответствующая (6.21), изображена на рис. 6.5,б. Практически при передаче данных об анализируемом речевом сигнале по каналу связи с целью его восстановления на приемном конце передают лишь значения коэффициентов и некоторую информацию о текущей ошибке $e_{QВ}(nT)$. Эта информация позволяет генерировать функцию возбуждения восстанавливающего фильтра на приемном конце. Очевидно, что восстанавливающий фильтр должен быть устойчивым, т. е. полюсы передаточной функции (6.21) должны находиться внутри единичной окружности на комплексной z -плоскости.

Существуют различные алгоритмы определения параметров фильтров по методу линейного предсказания, которые отличаются друг от друга как выбранным критерием [см. (6.16), (6.18), (6.19)], так и областью значений переменной n , по которой выполняется суммирование в (6.16), (6.18), (6.19) [6.8, 6.9].

6.3.2. Решетчатые фильтры

Решетчатые фильтры представляют собой весьма удобную форму реализации адаптивных фильтров [6.7, 6.9]. На рис. 6.6,а изображен отбеливающий (обратный) фильтр, выполненный в виде простейшего решетчатого фильтра, а

на рис. 6.6,б — соответствующий восстанавливающий фильтр. Коэффициенты K_j , определяющие характеристики фильтра, называются *коэффициентами отражения*. Существуют различные способы вычисления этих коэффициентов [6.7].

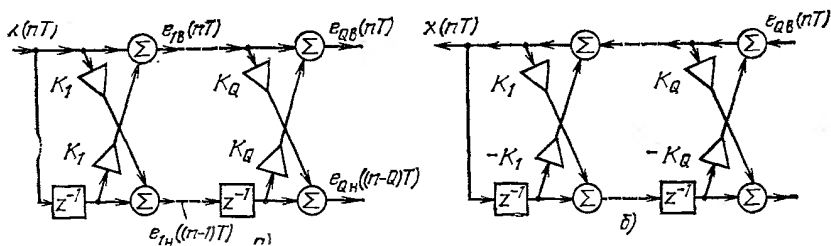


Рис. 6.6

Одним из наиболее эффективных является способ, следующий из алгоритма Берга (см. разд. 8);

$$K_j = \frac{-2 \sum_{n=j}^{N-1} e_{j-1, \text{H}}((n-1)T) e_{j-1, \text{B}}(nT)}{\sum_{n=j}^{N-1} (|e_{j-1, \text{H}}((n-1)T)|^2 + |e_{j-1, \text{B}}(nT)|^2)}, \quad (6.22)$$

причем

$$\begin{aligned} e_{OB}(nT) &= e_{OH}(nT) = x(nT); \\ e_{IB}(nT) &= e_{I-1, \text{B}}(nT) + K_I e_{I-1, \text{H}}((n-1)T); \\ e_{IH}(nT) &= K_I e_{I-1, \text{B}}(nT) + e_{I-1, \text{H}}((n-1)T). \end{aligned}$$

Реализация фильтров в виде решетчатых структур имеет следующие преимущества [6.9]:

шум округления результатов арифметических операций (собственный шум фильтра) почти не зависит от полосы пропускания и мощность шума меньше, чем при других формах реализации;

округление коэффициентов меньше влияет на характеристики фильтра, чем при других формах реализации;

в отличие от других форм реализации, при увеличении порядка решетчатого фильтра достаточно рассчитать коэффициенты отражения дополнительных «старших» звеньев;

коэффициенты отражения ранее рассчитанных «младших» звеньев остаются прежними;

алгоритмы вычисления коэффициентов отражения, в частности алгоритм (6.22), гарантируют выполнение условия $|K_j| < 1$, необходимого и достаточного для устойчивости восстанавливающего фильтра. В отличие от условий устойчивости для других форм реализации фильтров, это условие легко проверяется как при увеличении порядка фильтра, так и при обновлении коэффициентов отражения.

7.1. ПЕРЕНОС И ИНВЕРСИЯ СПЕКТРА

7.1.1. Перенос и инверсия спектра вещественного сигнала

Рассматривается дискретный вещественный сигнал $x(nT)$ с частотой дискретизации $f_d=1/T$, спектр $X(e^{i2\pi\omega})$, которого в основной полосе нормированных частот $\omega \in [0; 0,5]$ занимает полосу $[\omega_1, \omega_2]$. Модуль спектра сигнала $x(nT)$ условно показана на рис. 7.1,а.

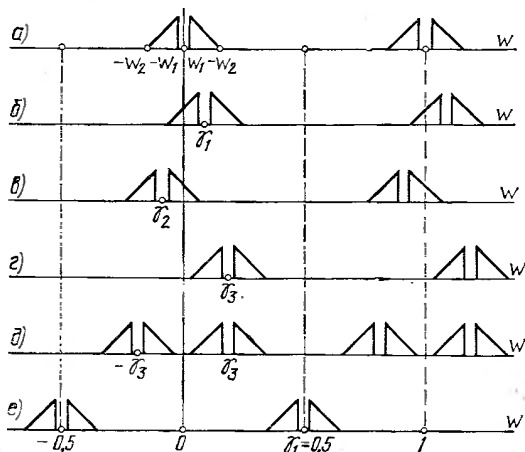


Рис. 7.1

Перенос спектра $X(e^{i2\pi\omega})$ по оси частот на величину γ осуществляется путем умножения отсчетов сигнала $x(nT)$ на отсчеты дискретной экспоненты $e^{i2\pi\omega\gamma}$ (рис. 7.2,а), причем $0 < |\gamma| \leq 0,5$. Спектр сигнала $y(nT) = x(nT) \times \text{Хexp}(i2\pi\omega\gamma)$ равен

$$Y(e^{i2\pi\omega}) = X(e^{i2\pi(\omega-\gamma)}). \quad (7.1)$$

Сигнал $y(nT)$ в общем случае является комплексным. Операция умножения вещественного сигнала $x(nT)$ на $\text{exp}(i2\pi\omega\gamma)$ выполняется схемой, показанной на рис. 7.2,б, где $y_1(nT)$ и $y_2(nT)$ — соответственно вещественная и мнимая составляющие выходного сигнала $y(nT)$ схемы рис. 7.2,а.

Если $\gamma = \gamma_1 > 0$, спектр сдвигается по оси частот вправо. На рис. 7.1,б показан модуль спектра $Y(e^{i2\pi\omega})$ при $\gamma_1 = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Нижняя боковая полоса ($\omega < 0$, $\omega \in [-\omega_2, -\omega_1]$) основного спектра расположена на оси частот симметрично относительно частоты $\omega = 0$ и занимает полосу частот

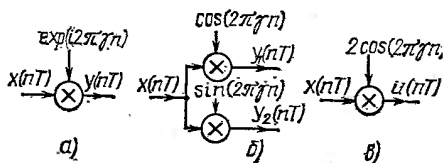


Рис. 7.2

$[-(\omega_2 - \omega_1)/2, (\omega_2 - \omega_1)/2]$, а верхняя боковая полоса ($\omega > 0, \omega \in [\omega_1, \omega_2]$) занимает полосу частот $[(3\omega_1 + \omega_2)/2, (\omega_1 + 3\omega_2)/2]$.

Если $\gamma = \gamma_2 < 0$, спектр сдвигается по оси частот влево. На рис. 7.1,в показан модуль спектра $Y(e^{i2\pi\omega})$ при $\gamma_2 = -(\omega_1 + \omega_2)/2$. В этом случае симметрично относительно частоты $\omega = 0$ располагается верхняя боковая полоса спектра.

Если $\gamma = \gamma_3$, причем $\omega_2 \leq |\gamma_3| \leq 0,5 - \omega_2$, при сдвиге спектра обе боковые полосы спектра $X(e^{i2\pi\omega})$ располагаются в основной полосе частот ($[0; 0,5]$, когда $\gamma_3 > 0$, и $[-0,5; 0]$, когда $\gamma_3 < 0$). На рис. 7.2,а показан модуль спектра $Y(e^{i2\pi\omega})$ при $\gamma_3 > 0$.

Для получения вещественного сигнала $u(n, T)$, спектр $U(e^{i2\pi\omega})$ которого представляет собой спектр исходного сигнала $x(nT)$ с боковыми полосами, расположенными симметрично относительно определенной частоты γ_3 ($\omega_2 \leq |\gamma_3| \leq 0,5 - \omega_2$), необходимо умножить отсчеты сигнала $x(nT)$ на отсчеты дискретной косинусоиды $2 \cos 2\pi n \gamma_3$ (рис. 7.1,в). Действительно,

$$u(nT) = x(nT) 2 \cos 2\pi n \gamma_3 = x(nT) e^{i2\pi n \gamma_3} + x(nT) e^{-i2\pi n \gamma_3} = u_1(nT) + u_2(nT).$$

Спектр $U_1(e^{i2\pi\omega})$ сигнала $u_1(nT)$ равен спектру входного сигнала, сдвинутому по оси частот на величину γ_3 вправо, а спектр $U_2(e^{i2\pi\omega})$ сигнала $u_2(nT)$ равен спектру входного сигнала, сдвинутому на величину γ_3 влево. Поскольку $U(e^{i2\pi\omega}) = U_1(e^{i2\pi\omega}) + U_2(e^{i2\pi\omega})$, сигнал $u(nT)$ имеет требуемый спектр (рис. 7.1,д).

Инверсия спектра вещественного сигнала $x(nT)$, т. е. получение сигнала $y(nT)$ со спектром

$$Y(e^{i2\pi\omega}) = X(e^{i2\pi(0,5-\omega)}), \quad (7.2)$$

осуществляется путем простого изменения знака каждого второго отсчета сигнала $x(nT)$:

$$y(nT) = (-1)^n x(nT), \quad n = 0, 1, \dots \quad (7.3)$$

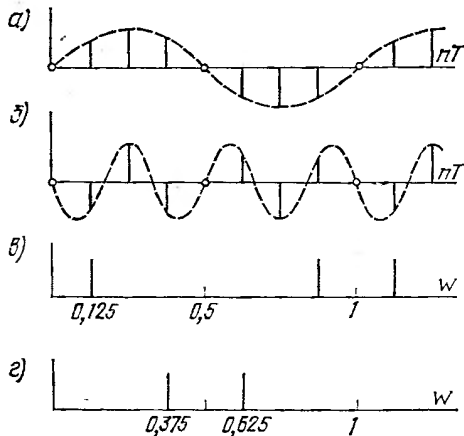


Рис. 7.3

Действительно, сигнал $y(nT)$ со спектром (7.2) получается путем умножения отсчетов сигнала $x(nT)$ на отсчеты дискретной экспоненты $e^{i2\pi n\gamma}$, где $|\gamma_k|=0,5$, а $\exp(i2\pi n\gamma_k)=\exp(i\pi n)=(-1)^n$.

Пример 7.1. Рассмотрим входной сигнал $x(nT)=\sin 2\pi n\omega_x$ при $\omega_x=0,125$ (например, $f_x=1$ кГц; $f_d=8$ кГц). На рис. 7.3,а показаны отсчеты сигнала $x(nT)$ и для наглядности (штриховая линия) огибающая этого сигнала. На рис. 7.3,б показан модуль спектра $X(e^{i2\pi\omega})$ входного сигнала, содержащий одну гармонику на частоте $\omega_x=0,125$. Если изменить знак каждого второго отсчета сигнала $x(nT)$ по правилу (7.3), получим сигнал $y(nT)$, отсчеты которого и огибающая (штриховая линия) показаны на рис. 7.3,б. Из рис. 7.3,б видно, что сигнал $y(nT)$ есть дискретная синусоида с частотой $\omega_y=0,5-\omega_x=0,375$ ($f_y=3$ кГц). Спектр $Y(e^{i2\pi\omega})$ в соответствии с (7.2) представляет собой инверсный спектр входного сигнала и показан на рис. 7.3,в.

7.1.2. Перенос спектра комплексного сигнала

Рассматривается дискретный комплексный сигнал $x(nT)=x_1(nT)+ix_2(nT)$ с частотой дискретизации $f_d=1/T$.

Перенос спектра $X(e^{i2\pi\omega})$ по оси частот на величину γ осуществляется (как и в случае вещественного сигнала) умножением отсчетов сигнала $x(nT)$ на отсчеты дискретной экспоненты $e^{i2\pi n\gamma}$. Соответствующая схема показана на рис. 7.4, где $y_1(nT)$ и $y_2(nT)$ — соответственно вещественная и мнимая составляющие выходного сигнала $y(nT)$.

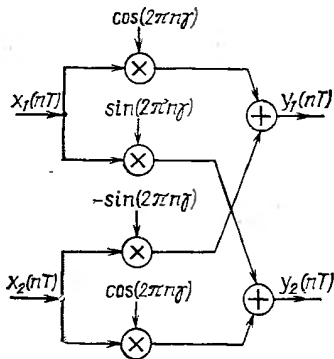


Рис. 7.4

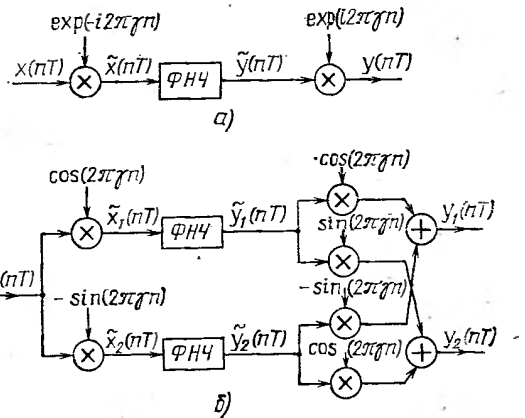


Рис. 7.5

7.2. ФОРМИРОВАНИЕ СИГНАЛА С ОДНОЙ БОКОВОЙ ПОЛОСКОЙ (ОБП)

7.2.1. Формирование сигнала с ОБП с использованием ФНЧ

Рассматривается дискретный вещественный сигнал $x(nT)$, спектр которого в основной полосе нормированных частот $\omega \in [0; 0,5]$ занимает полосу $[\omega_1, \omega_2]$, причем $\omega_1 < \omega_2 < 0,5$. Схема формирования комплексного сигнала $y(nT)$ с ОБП показана на рис. 7.5,а, а модуль спектра исходного сигнала — на рис. 7.6,а.

Принцип работы схемы. Сигнал $x(nT)$ умножается на дискретную экспоненту $e^{i2\pi n\gamma}$. Допустим, что $\gamma = -(\omega_1 + \omega_2)/2$ (о выборе величины γ см. ниже). При этом (см. 7.1.1) спектр сигнала сдвигается на величину γ влево, верхняя

боковая полоса спектра располагается симметрично относительно $\omega=0$ и занимает полосу от $-(\omega_2-\omega_1)/2$ до $(\omega_2-\omega_1)/2$. Модуль спектра сигнала $\bar{x}(nT) = x(nT)\exp(i2\pi n\gamma)$ показан на рис. 7.6,б. Далее правая боковая полоса выделяется фильтром нижних частот, ширина нормированной полосы пропускания $\Delta_{\text{п}}$ которого равна $(\omega_2-\omega_1)/2$, а ширина нормированной промежуточной полосы $\Delta_{\text{пр}}$ равна $\min(2\omega_1, 1-2\omega_2)$. Идеализированная амплитудно-частотная характеристика ФНЧ показана на рис. 7.6,в (при $2\omega_1 < 1-2\omega_2$), а модуль спектра сигнала $y(nT)$ на выходе ФНЧ — на рис. 7.6,г. Обратный сдвиг верхней боковой полосы спектра в область частот $\omega \in [0; 0,5]$ осуществляется умножением сигнала $\bar{y}(nT)$ на дискретную экспоненту $e^{-i2\pi n\gamma}$ (рис. 7.6,д).

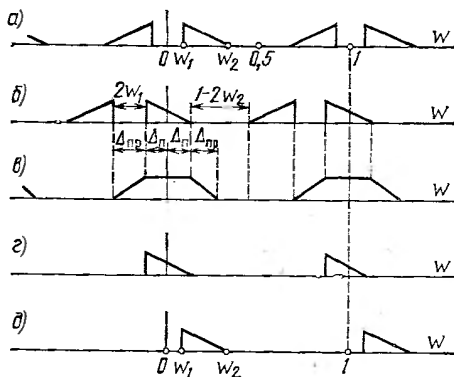


Рис. 7.6

Поскольку сигналы $\bar{x}(nT)$, $\bar{y}(nT)$ и $y(nT)$ являются комплексными, их обработка осуществляется «комплексной» схемой (см. рис. 7.5,б), в которой существуют отдельные ветви для обработки вещественной $\bar{x}_1(nT)$ и мнимой $\bar{x}_2(nT)$ составляющих сигнала $\bar{x}(nT)$.

Выбор величины γ . Коэффициент γ определяет сдвиг спектра и, следовательно, параметры ФНЧ, формирующего сигнал с ОБП. Поскольку АЧХ вещественного ФНЧ симметрична относительно частоты $\omega=0$ (см. рис. 7.6,в), граничные частоты полосы пропускания $\omega_{\text{г.п}}$ и полосы задерживания $\omega_{\text{г.з}}$ должны удовлетворять условиям:

$$\omega_{\text{г.п}} \geq \max(\gamma - \omega_1, \omega_2 - \gamma); \quad (7.4)$$

$$\omega_{\text{г.з}} \leq \min(\gamma + \omega_1, 1 - \omega_2 - \gamma). \quad (7.5)$$

Графики функций $\omega_{\text{г.п}}(\gamma)$ и $\omega_{\text{г.з}}(\gamma)$ изображены на рис. 7.7,а и б (для случая $\omega_1 + \omega_2 < 0,5$) и на рис. 7.8,а и б (для случая $\omega_1 + \omega_2 > 0,5$). Для того чтобы ФНЧ был возможно проще, промежуточная полоса $\Delta_{\text{пр}} = \omega_{\text{г.з}} - \omega_{\text{г.п}}$ должна быть как можно больше. На рис. 7.7,в и 7.8,в изображены графики функции $\Delta_{\text{пр}}(\gamma)$, построенные как разность графиков функций $\omega_{\text{г.з}}(\gamma)$ и $\omega_{\text{г.п}}(\gamma)$ (при $\omega_{\text{г.з}} \geq \omega_{\text{г.п}}$). Из рис. 7.7,в и 7.8,в видно, что:

при $\omega_1 + \omega_2 < 0,5$ величина $\Delta_{\text{пр}}$ имеет максимальное значение $\Delta_{\text{пр.макс}} = 2\omega_1$, если,

$$(\omega_1 + \omega_2)/2 \leq \gamma \leq (1 - \omega_1 - \omega_2)/2; \quad (7.6)$$

при $\omega_1 + \omega_2 > 0,5$ величина $\Delta_{\text{пр. max}} = 1 - 2\omega_2$, если

$$(1 - \omega_1 - \omega_2)/2 \leq \gamma \leq (\omega_1 + \omega_2)/2; \quad (7.7)$$

при $\omega_1 + \omega_2 = 0,5$ величина $\Delta_{\text{пр. max}} = 2\omega_1 = 1 - 2\omega_2$, если $\gamma = 0,25$.

Формулы (7.4)–(7.7) определяют граничные частоты ФНЧ и диапазон возможных значений γ при наиболее широко промежуточной полосе используемого ФНЧ.

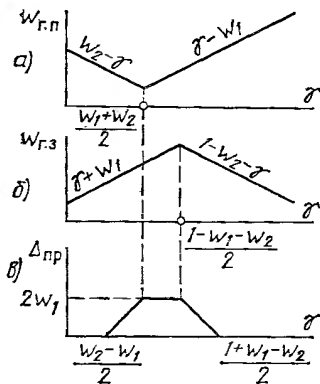


Рис. 7.7

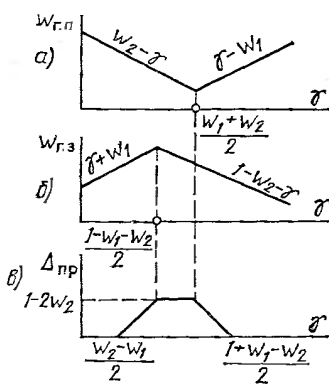


Рис. 7.8

7.2.2. Формирование сигнала канала ТЧ с ОБП с использованием ФНЧ

Спектр сигнала стандартного канала ТЧ расположен в диапазоне частот 0,3 ... 3,4 кГц, частота дискретизации $f_d = 8$ кГц. Нормированные граничные частоты спектра сигнала ТЧ $\omega_1 = 0,3/8 = 0,0375$ и $\omega_2 = 3,4/8 = 0,425$.

Формирование прямого спектра. В этом случае $\omega_1 = 0,0375$; $\omega_2 = 0,425$ и $\omega_1 + \omega_2 < 0,5$. Частоты $\omega_{г.п}$ и $\omega_{г.з}$ определяются из (7.4) и (7.5) соответственно, а величина γ из (7.6): $0,23125 \leq \gamma \leq 0,26875$. Однако помимо условия (7.6) при выборе значения γ необходимо учитывать сложность реализации умножителей в схеме (см. рис. 7.5,б). Операция умножения оказывается наиболее простой при $\gamma = 0,25$, поскольку функции $\cos(2\pi\gamma\omega)$ и $\sin(2\pi\gamma\omega)$ принимают в этом случае значения $\{1, 0, -1\}$. Поэтому целесообразно выбрать $\gamma = 0,25$ и $\omega_{г.п} = \max(0,25 - 0,0375; 0,425 - 0,25) = 0,2125$ и $\omega_{г.з} = \min(0,25 + 0,0375; 1 - 0,425 - 0,25) = 0,2875$.

Формирование инверсного спектра. В этом случае перед обработкой сигнала с помощью схемы (см. рис. 7.5,б) осуществляется инверсия спектра сигнала ТЧ по правилу (7.3). Следовательно, спектр сигнала располагается в диапазоне от $\omega_1 = 0,6/8 = 0,075$ до $\omega_2 = 3,7/8 = 0,4625$ и $\omega_1 + \omega_2 > 0,5$. Значение γ определяется из (7.7): $0,23125 \leq \gamma \leq 0,26875$. Целесообразно выбрать $\gamma = 0,25$; $\omega_{г.п} = \max(0,25 - 0,075; 0,4625 - 0,25) = 0,2125$ и $\omega_{г.з} = \min(0,25 + 0,075; 1 - 0,4625 - 0,25) = 0,2875$. Таким образом, при формировании инверсного спектра сигнала ТЧ с ОБП можно использовать ФНЧ с теми же параметрами, что и при формировании прямого спектра: $\omega_{г.п} = 0,2125$; $\omega_{г.з} = 0,2875$ при $\gamma = 0,25$.

Ниже приводятся таблицы коэффициентов цифровых фильтров, используемых в схеме формирования сигнала ТЧ с ОБП (см. рис. 7.5,б).

В табл. 7.1 приведены значения гарантированного затухания в полосе за-

a_0 , дБ	Δa , дБ	РЦФ типа			
		Т		С	
		№	Номер таблицы	№	Номер таблицы
40	0,6	6	7.2	4	7.16
	0,1	7	7.3	5	7.17
	0,05	8	7.4	5	7.18
50	1,0	7	7.5	5	7.19
	0,1	8	7.6	6	7.20
	0,05	9	7.7	6	7.21
60	1,0	8	7.8	6	7.22
	0,1	9	7.9	6	7.23
	0,05	10	7.10	7	7.24
70	1,0	9	7.11	6	7.25
	0,2	10	7.12	7	7.26
	0,05	11	7.13	7	7.27
75	0,4	10	7.14	7	7.28
	0,05	11	7.15	8	7.29

держивания a_0 , рабочего затухания в полосе пропускания Δa и порядка фильтра N .

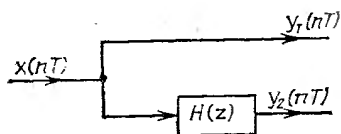
В табл. 7.2—7.15 приведены коэффициенты РЦФ типа T (см. гл. 5) для различных значений a_0 при минимальном значении Δa , обеспечиваемым фильтром определенного порядка N (например, РЦФ типа T порядка $N=7$ при $a_0=40$ дБ может обеспечить значение Δa в диапазоне от 0,5 до 0,1 дБ. В табл. 7.3 приведены коэффициенты РЦФ типа T только для $\Delta a=0,1$ дБ).

Расчет фильтров выполнен на ЭВМ ЕС-1033 по программе, приведенной в приложении 1.

В табл. 7.16—7.29 приведены коэффициенты РЦФ типа C для соответствующих значений a_0 и Δa (см. табл. 7.1).

7.2.3. Формирование сигнала с ОБП с использованием преобразователя Гильберта

Схема формирования сигнала с ОБП с помощью преобразователя Гильберта (см. 4.2.4) приведена на рис. 7.9. Вещественная составляющая $y_1(nT)$ выходного комплексного сигнала $y(nT)$ представляет собой входной сигнал $y_1(nT)=x(nT)$, а мнимая составляющая $y_2(nT)$ вычисляется с помощью фильтра, идеализированная частотная характеристика которого определяется соотношением



$$H(e^{i2\pi\omega}) = \begin{cases} -i & \text{при } \omega \in [0; 0,5]; \\ i & \text{при } \omega \in [0,5; 1]. \end{cases}$$

Рис. 7.9

Таблица 7.2

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.559404810E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.704164368E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.076205807E-01
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-4.237719708E-01	8.671557517E-01	
I.000000000E-00	-7.617966650E-01	6.223021639E-01	
I.000000000E-00	-1.191320258E-00	4.322343489E-01	

Таблица 7.3

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.431455686E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.380356004E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.570792303E-01
I.000000000E-00	1.000000000E-00	0.000000000E-00	6.078038723E-01
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-3.545521836E-01	8.540240752E-01	
I.000000000E-00	-5.786118448E-01	5.970752981E-01	
I.000000000E-00	-9.133014813E-01	3.849555350E-01	
I.000000000E-00	-5.419861217E-01	0.000000000E-00	

Таблица 7.4

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.453251159E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.370255247E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.513535196E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.680308056E-01
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-3.504027794E-01	8.722016264E-01	
I.000000000E-00	25.243780453E-01	6.448079817E-01	
I.000000000E-00	-8.155848468E-01	4.458186832E-01	
I.000000000E-00	-1.053474588E-00	3.152696892E-01	

Таблица 7.5

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.679570223E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.864820342E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.330803823E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	6.784702037E-01
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-4.536079239E-01	9.146614586E-01	
I.000000000E-00	-7.386529459E-01	7.488483463E-01	
I.000000000E-00	-1.194103385E-00	5.933172842E-01	
I.000000000E-00	-7.212651742E-01	0.000000000E-00	

Таблица 7.6

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.520042645E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.484080185E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.680442673E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.889994209E-01
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-3.798652285E-01	8.857279562E-01	
I.000000000E-00	-5.645413968E-01	6.779053913E-01	
I.000000000E-00	-8.780477884E-01	4.907831262E-01	
I.000000000E-00	-1.138565734E-00	3.651381298E-01	

Таблица 7.7

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.528510534E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.462503101E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.604222350E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.810902371E-01
I.000000000E-00	1.000000000E-00	0.000000000E-00	6.252831109E-01
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-3.738817460E-01	8.971615980E-01	
I.000000000E-00	-5.191312133E-01	7.094279890E-01	
I.000000000E-00	-7.831768548E-01	5.365966300E-01	
I.000000000E-00	-1.053843700E-00	3.989545496E-01	
I.000000000E-00	-5.86335963E-00	0.000000000E-00	

Таблица 7.8

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.714679220E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.867673736E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.294695657E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.704040931E-01
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-4.568504469E-01	9.340160209E-01	
I.000000000E-00	-6.849834911E-01	8.043543211E-01	
I.000000000E-00	-1.089312882E-00	6.748676097E-01	
I.000000000E-00	-1.447720683E-00	5.799253287E-01	

Таблица 7.9

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.582635973E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.556337837E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.743770533E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.995429562E-01
I.000000000E-00	1.000000000E-00	0.000000000E-00	6.414569619E-01

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-3.975669570E-01	9.083129604E-01
I.000000000E-00	-5.510181106E-01	7.379356263E-01
I.000000000E-00	-8.322572746E-01	5.777331370E-01
I.000000000E-00	-1.124887195E-00	4.466712330E-01
I.000000000E-00	-6.273633289E-01	0.000000000E-00

Таблица 7.10

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.730925723E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.807614567E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.096663584E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.492339684E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.794203161E-01

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-4.514000604E-01	9.499230893E-00
I.000000000E-00	-5.989981956E-01	8.516839361E-01
I.000000000E-00	-8.852660808E-01	7.514556957E-01
I.000000000E-00	-1.234822546E-00	6.565670348E-01
I.000000000E-00	-1.491956291E-00	5.937205327E-01

Таблица 7.11

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.739029460E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.866135935E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.242181243E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.692034841E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	7.003682247E-01

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-4.590287288E-01	9.475102015E-01
I.000000000E-00	-6.446242438E-01	8.437237990E-01
I.000000000E-00	-9.930982845E-01	7.372825325E-01
I.000000000E-00	-1.376363827E-01	6.435547458E-01
I.000000000E-00	-7.768200102E-01	0.000000000E-00

Таблица 7.12

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.670291680E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.686159001E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	3.900931557E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.211224447E-01
I.000000000E-00	2.000000000E-00	I.000000000E-00	4.448048612E-01

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-4.278676927E-01	9.344297724E-01
I.000000000E-00	-5.636249577E-01	8.088851375E-01
I.000000000E-00	-8.257553826E-01	6.849880489E-01

I.00000000E-00 -I.138968158E-01 5.714880403E-01
 I.00000000E-00 -I.364604546E-01 4.982779923E-01

Таблица 7.13

AO	AI	A2	
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.625330128E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.581038307E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.704154004E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.924572062E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	4.139336948E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	6.503764344E-01

BO	BI	B2	
I.00000000E-00	-4.038004285E-01	9.29558584I-01	
I.00000000E-00	-5.079570207E-01	7.968945964E-01	
I.00000000E-00	-7.152753465E-01	6.688168122E-01	
I.00000000E-00	-1.206441692E-01	4.577457984E-01	
I.00000000E-00	-67499918500E-01	0.00000000E-00	

Таблица 7.14

AO	AI	A2	
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.709397143E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.763059154E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	4.032616640E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	4.386097107E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	4.662392586E-01

BO	BI	B2	
I.00000000E-00	-4.433158752E-01	9.441509072E-00	
I.00000000E-00	-5.864301842E-01	8.355748976E-01	
I.00000000E-00	-6.635374151E-01	7.261694030E-01	
I.00000000E-00	-1.199140203E-01	6.238686965E-01	
I.00000000E-00	-1.444049612E-01	5.567904154E-01	

Таблица 7.15

AO	AI	A2	
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.625330128E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.581038307E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.704154004E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	3.924572062E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	4.139336948E-01
I.00000000E-00	2.00000000E-00	I.00000000E-00	6.503764344E-01

BO	BI	B2	
I.00000000E-00	-4.038004285E-01	9.29558584IE-01	
I.00000000E-00	-5.079570207E-01	7.968945964E-01	
I.00000000E-00	-7.152753465E-01	6.688168122E-01	

I.000000000E-00	-9.762234413E-01	5.492356491E-01
I.000000000E-00	-1.206441692E-01	4.577457984E-01
I.000000000E-00	-6.499918500E-01	0.000000000E-00

Таблица 7.16

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	I.599808071E-00	I.000000000E-00	5.155700032E-00
I.000000000E-00	5.836926860E-01	I.000000000E-00	I.526137951E-00

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-7.616132476E-01	3.016562912E-01
I.000000000E-00	-3.802467549E-01	7.812335870E-01

Таблица 7.17

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	I.200437389E-00	I.000000000E-00	2.346300377E-00
I.000000000E-00	5.408818387E-00	I.000000000E-00	I.434386066E-00
I.000000000E-00	I.000000000E-00	0.000000000E-00	5.268223913E-01

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-4.995158724E-01	3.764981833E-01
I.000000000E-00	-2.941139887E-01	7.988247699E-01
I.000000000E-00	-3.365377435E-01	0.000000000E-00

Таблица 7.18

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	I.200437389E-00	I.000000000E-00	2.179229510E-00
I.000000000E-00	5.408818387E-01	I.000000000E-00	I.387418402E-00
I.000000000E-00	I.000000000E-00	0.000000000E-00	4.998329167E-00

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-4.023257925E-01	3.401046444E-01
I.000000000E-00	-2.412077255E-01	7.831996616E-01
I.000000000E-00	-2.680659928E-01	0.000000000E-00

Таблица 7.19

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	I.200437389E-00	I.000000000E-00	2.986831438E-00
I.000000000E-00	5.408818387E-01	I.000000000E-00	I.586212976E-00
I.000000000E-00	I.000000000E-00	0.000000000E-00	6.258506904E-01

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-8.215436997E-01	5.666150435E-01
I.000000000E-00	-4.423427939E-01	8.721293666E-01
I.000000000E-00	-5.877705339E-01	0.000000000E-00

Таблица 7.20

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	I.802766742E-00	I.000000000E-00	I.031668180E-01
I.000000000E-00	9.663305989E-01	I.000000000E-00	2.003605407E-00
I.000000000E-00	5.179800412E-01	I.000000000E-00	I.482643322E-00

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-8.010424709E-01	2.377502875E-01
I.000000000E-00	-5.346944450E-01	5.363711562E-01
I.000000000E-00	-3.454576319E-01	8.518492185E-01

Таблица 7.21

AO	AI	A2
I.000000000E-00	I.802766742E-00	I.000000000E-00
I.000000000E-00	9.663305989E-01	I.000000000E-00
I.000000000E-00	5.179800412E-01	I.000000000E-00

9.514864489E-00
I.909834280E-00
I.447078245E-00

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-6.895023167E-01	I.871454024E-01
I.000000000E-00	-4.672115731E-01	5.007326673E-01
I.000000000E-00	-3.066999257E-01	8.378989157E-01

Таблица 7.22

AO	AI	A2
I.000000000E-00	I.802766742E-00	I.000000000E-00
I.000000000E-00	9.663305989E-01	I.000000000E-00
I.000000000E-00	5.179800412E-01	I.000000000E-00

I.350875094E-01
2.364875218E-00
I.592773267E-00

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-1.201966010E-00	4.624089439E-01
I.000000000E-00	-7.475900468E-01	6.969091033E-01
I.000000000E-00	-4.509440820E-01	9.095776901E-01

Таблица 7.23

AO	AI	A2
I.000000000E-00	I.802766742E-00	I.000000000E-00
I.000000000E-00	9.663305989E-01	I.000000000E-00
I.000000000E-00	5.179800412E-01	I.000000000E-00

I.031668180E-01
2.003605407E-00
I.428643224E-00

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-8.010424709E-01	2.337502875E-01
I.000000000E-00	-5.346944450E-01	5.363711562E-01
I.000000000E-00	-3.454576319E-01	8.518492185E-01

Таблица 7.24

AO	AI	A2
I.000000000E-00	I.504340051E-00	I.000000000E-00
I.000000000E-00	8.267998138E-01	I.000000000E-00
I.000000000E-00	5.042961905E-01	I.000000000E-00
I.000000000E-00	I.000000000E-00	0.000000000E-00

4.180941312E-00
I.795507121E-00
I.486203489E-00
5.668089869E-01

BO	BI	B2
I.000000000E-00	-7.377730402E-01	3.345520738E-01
I.000000000E-00	-4.908777628E-01	6.156115204E-01
I.000000000E-00	-3.475398809E-01	8.753803389E-01
I.000000000E-00	-4.379829272E-01	0.000000000E-00

Таблица 7.25

AO	AI	A2	
I.00000000E-00	I.802766724E-00	I.00000000E-00	I.350875094E-01
I.00000000E-00	9.663305989E-01	I.00000000E-00	2.364875218E-00
I.00000000E-00	5.179800412E-01	I.00000000E-00	I.592773267E-00
BO	BI	B2	
I.00000000E-00	-I.201966010E-00	4.624089439E-01	
I.00000000E-00	-7.475900468E-01	6.969091033E-01	
I.00000000E-00	-4.509440820E-01	9.095776901E-01	

Таблица 7.26

AO	AI	A2	
I.00000000E-00	I.504340061E-00	I.00000000E-00	4.726006130E-00
I.00000000E-00	8.267998138E-01	I.00000000E-00	I.934160849E-00
I.00000000E-00	5.024961905E-01	I.00000000E-00	I.540312727E-00
I.00000000E-00	I.00000000E-00	0.00000000E-00	6.103350232E-01
BO	BI	B2	
I.00000000E-00	-9.091085975E-01	4.333833308E-01	
I.00000000E-00	-5.865306869E-01	6.826271813E-01	
I.00000000E-00	-4.039389698E-01	8.999126436E-01	
I.00000000E-00	-5.484076003E-01	0.00000000E-00	

Таблица 7.27

AO	AI	A2	
I.00000000E-00	I.504340061E-00	I.00000000E-00	4.180941312E-00
I.00000000E-00	8.267998138E-01	I.00000000E-00	I.795507121E-00
I.00000000E-00	5.042961905E-01	I.00000000E-00	I.486203489E-00
I.00000000E-00	I.00000000E-00	0.00000000E-00	5.668089869E-01
BO	BI	B2	
I.00000000E-00	-7.377730402E-01	3.345520738E-01	
I.00000000E-00	-4.908777682E-01	6.156115204E-01	
I.00000000E-00	-3.475398809E-01	8.753803389E-01	
I.00000000E-00	-4.379829272E-01	0.00000000E-00	

Таблица 7.28

AO	AI	A2	
I.00000000E-00	I.504340061E-00	I.00000000E-00	5.025054482E-00
I.00000000E-00	8.267998138E-01	I.00000000E-00	2.005731057E-00
I.00000000E-00	5.042961905E-01	I.00000000E-00	I.565637163E-00
I.00000000E-00	I.00000000E-00	0.00000000E-00	6.335974844E-01
BO	BI	B2	
I.00000000E-00	-9.970241780E-01	4.936940178E-01	
I.00000000E-00	-6.315622511E-01	7.215617986E-01	
I.00000000E-00	-4.281689491E-01	9.135605192E-01	
I.00000000E-00	-6.074239934E-01	0.00000000E-01	

AO	AI	A2	
I.000000000E-00	I.88469I428E-00	I.000000000E-00	I.9336239I9E-0I
I.000000000E-00	I.264800I25E-00	I.000000000E-00	2.99203530IE-00
I.000000000E-00	7.382947026E-0I	I.000000000E-00	I.740230320E-00
I.000000000E-00	4.9546434I8E-0I	I.000000000E-00	I.5I29922I8E-00
BO	BI	B2	
I.000000000E-00	-9.5I227I90E-0I	2.745070II7E-0I	
I.000000000E-00	-7.360959236E-0I	4.636480554E-0I	
I.000000000E-00	-4.98285072IE-0I	6.973727408E-0I	
I.000000000E-00	-3.746460I42E-0I	9.0I7047287E-0I	

Данная характеристика достаточно просто аппроксимируется частотной характеристикой нерекурсивного фильтра вида 3 (см. 4.1.1).

7.3. УВЕЛИЧЕНИЕ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ (ИНТЕРПОЛЯЦИЯ) СИГНАЛА

7.3.1. Основные понятия

В математике задачей интерполирования решетчатой функции является задача построения решетчатой функции $y(nT)$ с интервалом дискретизации T по конечному множеству $\{x(0), x(mT), x(2mT), \dots, x(kmT)\}$ известных значений решетчатой функции $x(vT) = x(vmT)$ такой, что в заданных точках $y(mnT) = x(nmT)$ ($n=0, 1, \dots, k$), а в остальных точках ($nT \neq 0, mT, \dots, kmT$) функция $y(nT)$ приблизительно равна функции $x(t)$, из которой образована исходная решетчатая функция $x(vmT)$.

В цифровой обработке сигналов под интерполяцией понимается процесс цифровой обработки сигналов (ЦОС), приводящий к формированию сигнала с повышенной частотой дискретизации $y(nT)$ из сигнала $x(vT) = x(vmT)$ при определенных ограничениях на временные и спектральные изменения исходного сигнала.

Существуют три разновидности процесса интерполяции при ЦОС.

Вариант 1. Увеличение частоты дискретизации осуществляется в соответствии с математическим понятием интерполяции.

Вариант 2. При увеличении частоты дискретизации исходные отсчеты дискретного сигнала $x(vmT)$ оказываются утерянными, однако отсчеты выходного сигнала $y(nT)$ могут рассматриваться как отсчеты исходного аналогового сигнала $x(t)$, т. е. форма огибающей сигналов $x(vmT)$ и $y(nT)$ (и спектр) не меняется.

Вариант 3. Увеличение частоты дискретизации приводит к изменению формы интерполируемого сигнала при сохранении модуля его спектра.

Пример 7.2. Схема, иллюстрирующая разновидности процесса интерполяции, показана на рис. 7.10. Входной аналоговый сигнал $x(t)$ поступает на дискретизатор D , работающий с интервалом дискретизации $T' = mT$ (m — целое число). Выходной сигнал дискретизатора $x(vT') = x(vmT)$ ($v=0, 1, 2, \dots$) поступает на идеальный интерполатор $ИИ$, увеличивающий частоту дискретизации в m раз. Выходной сигнал схемы $y(nT)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) получается в результате преоб-

разования выходного сигнала ИИ $\tilde{y}(nT)$ линейной дискретной системой H_Φ с частотной характеристикой $H_\Phi(e^{j2\pi\omega}) = e^{-L_1 2\pi\omega}$ ($\omega = \omega/\omega_d = \omega T/2\pi$ — нормированная частота).

Допустим $x(t) = \sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t$ ($f_1 = 1$ Гц, $f_2 = 2$ Гц); интервал дискретизации $T' = 2T = 1/8$ с ($f_d = 8$ Гц); $m = 2$.

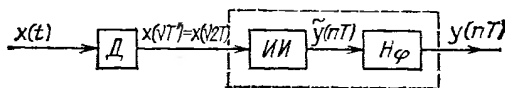


Рис. 7.10

На рис. 7.11, а и б показаны аналоговый сигнал $x(t)$ и его спектр $|X(f)|$, на рис. 7.11, в — дискретный сигнал $x(nT) = \sin(\pi n/4) + \sin(\pi n/2)$ с интервалом дискретизации $T' = 1/8$ с, на рис. 7.10, г — выходной дискретный сигнал ИИ $\tilde{y}(nT) = \sin(\pi n/8) + \sin(\pi n/4)$ с интервалом дискретизации $T = 1/16$ с.

Вариант 1. Дискретная система H_Φ обладает линейной фазочастотной характеристикой $\varphi_1(\omega) = -L_1 2\pi\omega$, причем $L_1 = \text{const}$ — целое число (допустим, $L_1 = 4$). Выходной сигнал $y(nT) = \sin(\pi n/8 - \pi/2) + \sin(\pi n/4 - \pi)$ представляет собой сумму входных составляющих, сдвинутых по фазе на величины $-L_1 2\pi\omega_1$ и $-L_1 2\pi\omega_2$ (рис. 7.11, д). При L_1 целом фазовый сдвиг соответствует задержке

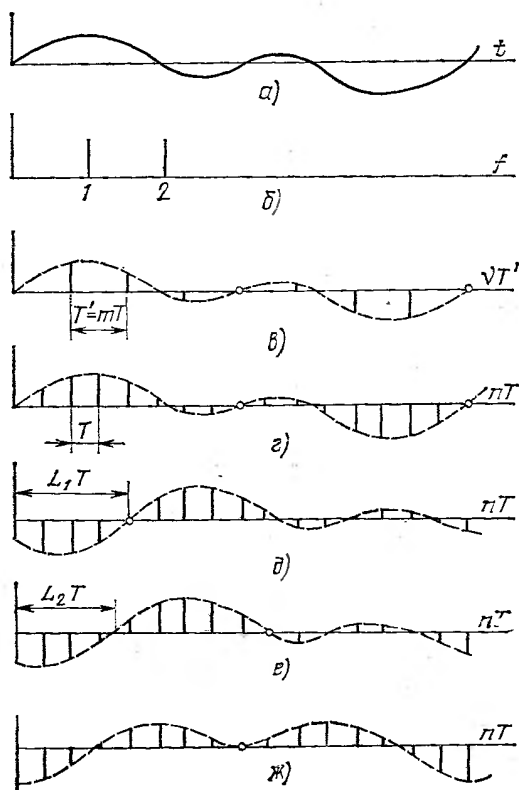


Рис. 7.11

сигнала во временной области на целое число интервалов дискретизации, равное L_1 (см. 4.1.1). Отсчеты сигнала $y(nT)$ равны отсчетам сигнала $\tilde{y}(nT)$, задержанным на интервал L_1T , т. е. $y(nT) = \tilde{y}(nT - L_1T) = x(t)$ при $t = nT - L_1T$.

Таким образом, совокупность ИИ и дискретной системы с частотной характеристикой $H_\Phi(e^{i2\pi\omega}) = e^{iL_12\pi\omega}$ и линейной ФЧХ $\varphi_1(\omega) = -L_12\pi\omega$ ($L_1 = 0, 1, 2, \dots$) также можно рассматривать как идеальный интерполятор, увеличивающий частоту дискретизации в соответствии с математическим определением процесса интерполяции.

Вариант 2. Дискретная система H_Φ обладает линейной фазочастотной характеристикой $\varphi_2(\omega) = -L_22\pi\omega$, причем $L_2 = \text{const}$ — нецелое число. Допустим, $L_2 = 3,5$. Тогда $y(nT) = \sin(\pi n/8 - 7\pi/16) + \sin(\pi n/4 - 7\pi/8)$ (рис. 7.71, е). Фазовый сдвиг гармонических составляющих на $-L_22\pi\omega$ (L_2 — неправильная дробь) соответствует задержке сигнала во временной области на нецелое число интервалов дискретизации. Следовательно, отсчеты сигнала $y(nT)$ в этом случае не равны отсчетам сигнала $\tilde{y}(nT)$, т. е. исходные отсчеты сигнала $x(mT)$, поступившего на вход интерполятора, оказались утерянными. Вместе с тем отсчеты сигнала $y(nT)$ есть отсчеты исходного сигнала $x(t)$, взятого с задержкой $t_2 = -L_2T$: $y(nT) = x(t)$ при $t = nT - L_2T$. Это хорошо видно из рис. 7.11, е: показанная штриховой линией огибающая сигнала $y(nT)$ совпадает по форме с исходным сигналом $x(t)$. Следовательно, если наличие исходных значений интерполируемого сигнала $x(mT)$ не обязательно в выходном сигнале $y(nT)$, можно принять, что совокупность ИИ и дискретной системы с частотной характеристикой $H_\Phi(e^{i2\pi\omega}) = e^{-iL_22\pi\omega}$ и линейной ФЧХ $\varphi_2(\omega) = -L_22\pi\omega$ ($L_2 = \text{const}$ — неправильная дробь) также решает задачу интерполяции дискретного сигнала. Как и в варианте 1, модуль спектра сигнала $y(nT)$ в основной полосе частот совпадает с модулем спектра входного сигнала $x(t)$ (см. рис. 7.11, б).

Вариант 3. Дискретная система H_Φ обладает нелинейной ФЧХ $\varphi_3(\omega) = -L(\omega)2\pi\omega$. Допустим, $L_3(\omega_1) = 4$, а $L_3(\omega_2) = 2$. В этом случае выходной сигнал $y(nT) = \sin(\pi n/8 - \pi/2) + \sin(\pi n/4 - \pi/2)$ (рис. 7.11, ж). Отсчеты сигнала $y(nT)$ не равны отсчетам сигнала $\tilde{y}(nT)$, равно как не являются отсчетами входного сигнала $x(t)$.

Вместе с тем модуль спектра сигнала $y(nT)$ в основной полосе частот попрежнему имеет тот же вид, что и модуль спектра входного сигнала $x(t)$ (см. рис. 7.11, б). По дискретному сигналу $y(nT)$ может быть восстановлен аналоговый сигнал $\tilde{x}(t)$, модуль спектра которого совпадает с модулем спектра исходного сигнала $x(t)$.

Следовательно, для определенного класса сигналов в технике связи, в котором фазовые соотношения между гармоническими составляющими на входе и выходе устройств обработки не играют роли, можно принять, что совокупность ИИ и дискретной системы с частотной характеристикой $H_\Phi(e^{i2\pi\omega}) = e^{-iL(\omega)2\pi\omega}$ также обеспечивает интерполяцию дискретного сигнала в смысле увеличения частоты дискретизации сигнала при сохранении вида модуля его спектра.

7.3.2. Интерполяция сигнала с помощью ИВДС

Система увеличения частоты дискретизации (интерполяции) сигнала относится к классу восходящих дискретных систем (см. 2.5). Схема, поясняющая принцип увеличения частоты дискретизации сигнала $x(vT')$ в m раз (m — целое) показана на рис. 7.12, а. Предполагается, что сигнал $x(vT')$ получен в результате дискретизации аналогового сигнала $x(t)$ с финитным спектром $X(i\omega)$, занимающим полосу частот $\omega \in [0, \omega_{max}]$. Частота дискретизации $f'_d = 1/T' = \omega_{max}/\pi$. Модули спектров сигналов $x(t)$ и $x(nT')$ на нормированной оси частот ($\omega = \omega/\omega_d$) показаны на рис. 7.12, б (позиции 1 и 2) для случая $m = 3$ ($\omega_d = 3\omega'_d = 6\omega_{max}$).

Принцип работы схемы. Рассматриваемая схема представляет собой простейшую восходящую систему (см. 2.5.4). Входной сигнал $x(vT') = x(vmT)$ с

частотой дискретизации $f'_д = 1/T'$ поступает на экспандер частоты дискретизации ЭЧД (см. 2.5.2), увеличивающий частоту дискретизации до $f_д = 1/T = mf'_д$ по алгоритму (2.30). Спектры выходного и входного сигналов ЭЧД равны, периодичны с частотой $\omega'_д = 1/m$ и связаны со спектром $X(i\omega)$ исходного аналогового сигнала $x(t)$ соотношением

$$X(e^{i2\pi\omega m}) = X^*(e^{i2\pi\omega}) = \frac{1}{mT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(i\omega + ik\frac{1}{m}\right). \quad (7.8)$$

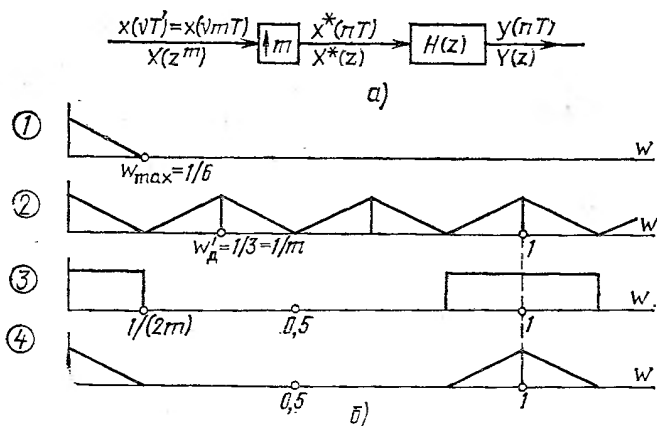


Рис. 7.12

Модуль спектров $X(e^{i2\pi m\omega})$ и $X^*(e^{i2\pi\omega})$ показан на рис. 7.12,б (позиция 2).

Выходной сигнал ЭЧД обрабатывается «идеальным» ФНЧ с передаточной функцией $H(z)$, задачей которого является подавление «лишних» частотных составляющих спектра $X^*(e^{i2\pi\omega})$, занимающих область частот $\omega \in [1/(2m); 0,5]$, т. е. получение сигнала $\tilde{y}(nT)$ со спектром

$$\tilde{Y}(e^{i2\pi\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(i\omega + ik\right), \quad (7.9)$$

периодичным с частотой $\omega_д = 1$.

Амплитудно-частотная характеристика «идеального» фильтра нижних частот ПВДС должна удовлетворять требованиям [2,8, 2.11]

$$|H(e^{i2\pi\omega})| = \begin{cases} m & \text{при } \omega \in [0; 1/(2m)]; \\ 0 & \text{при } \omega \in [1/(2m); 0,5]. \end{cases} \quad (7.10)$$

Фильтр ПВДС должен иметь коэффициент усиления m в полосе пропускания, определяемой шириной спектра исходного интерполируемого сигнала, и подавлять частотные составляющие спектра, лежащие в диапазоне $[1/(2m); 0,5]$.

На рис. 7.12,б приведены АЧХ фильтра и модуль спектра выходного сигнала ПВДС (позиции 3 и 4) для случая $m=3$.

Спектр сигнала на выходе ПВДС в основной полосе частот $[0, 0,5]$ в рас-

смаатриваемом идеализированном случае [при АЧХ фильтра, определяемой (7.10)],

$$Y(e^{i2\pi\omega}) = X^*(e^{i2\pi\omega}) H(e^{i2\pi\omega}) = X^*(e^{i2\pi\omega}) |H(e^{i2\pi\omega})| e^{i\Phi(\omega)} = \\ = \frac{1}{T} X(e^{i2\pi\omega}) e^{i\Phi(\omega)}. \quad (7.11)$$

и связан со спектром сигнала $\tilde{y}(nT)$, получаемого путем непосредственной дискретизации сигнала $x(t)$ с частотой f_d и определяемого (7.9), соотношением

$$Y(e^{i2\pi\omega}) = \tilde{Y}(e^{i2\pi\omega}) e^{i\Phi(\omega)}, \quad (7.12)$$

где $e^{i\Phi(\omega)}$ — ФЧХ фильтра ПВДС.

Из (7.11) и (7.12) видно, что:

а) ПВДС, содержащую ЭЧД и фильтр с АЧХ, определяемой (7.10), можно рассматривать как совокупность идеального интерполятора ИИ и линейной системы с частотной характеристикой $H_\Phi(e^{i2\pi\omega}) = e^{i\Phi(\omega)}$ (см. 7.3.1);

б) форма и спектр выходного сигнала ПВДС при интерполяции сигнала существенно зависят от типа используемого фильтра и его ФЧХ.

7.3.3. Особенности использования НФ и РФ при интерполяции

Нерекурсивные фильтры НФ с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l} \quad (7.13)$$

и линейной ФЧХ $\varphi(\omega) = -L2\pi\omega$ могут иметь нечетное (НФ вида 1) и четное (НФ вида 2) число отсчетов импульсной характеристики (см. 4.1.1).

Для НФ вида 1 (N — нечетное) $L = (N-1)/2$ — целое число и задержка сигнала во временной области равна целому числу $(N-1)/2$ интервалов дискретизации. При интерполяции сигнала ПВДС, содержащая НФ вида 1, сохраняет как модуль спектра, так и форму входного сигнала (см. 7.3.1, вариант 1).

Для НФ вида 2 (N — четное) $L = (N-1)/2$ — нецелое число. При интерполяции сигнала ПВДС, содержащая НФ вида 2, сохраняет как модуль спектра, так и форму входного сигнала, однако отсчеты последнего не сохраняются (см. 7.3.1, вариант 2).

Минимально-фазовые НФ обладают нелинейной ФЧХ $\varphi(\omega) = -L(\omega)2\pi\omega$. При интерполяции сигнала ПВДС, содержащая НФ с нелинейной ФЧХ, сохраняет модуль спектра, но не сохраняет формы входного сигнала (см. 7.3.1, вариант 3).

Рекурсивные фильтры РФ обладают, как правило, нелинейной ФЧХ. При интерполяции сигнала ПВДС, содержащая РФ, сохраняет модуль спектра, но не сохраняет формы входного сигнала (см. 7.3.1, вариант 3).

7.3.4. Характеристики фильтров реальных ПВДС

В реальных случаях интерполяции подвергается сигнал $x(vT')$, спектр которого в основной полосе занимает частотный диапазон $[0, \omega_{max}]$, а частота дискретизации $f'_d > \omega_{max}/\pi$.

Фильтр ПВДС должен подавить «лишние» повторения спектра $X(i\omega)$ около

частот $r \frac{1}{m}$, где $r=1, 2, \dots, (m-1)$ [см. (7.8)]. Его АЧХ должна удовлетворять требованиям

$$A(\omega) = |H(e^{i2\pi\omega})| \approx \begin{cases} m & \text{при } \omega \in [0, \omega_{max}]; \\ 0 & \text{при } \omega \in \left[r \frac{1}{m} - \omega_{max}, r \frac{1}{m} + \omega_{max} \right], \\ & r=1, 2, \dots, [m/2], \end{cases} \quad (7.14)$$

где $\omega_{max} = \omega_{max}/\omega_d$, а $[b]$ — целая часть числа b .

Для четных m последний частотный диапазон, в котором $A(\omega) \approx 0$, равен $[0,5 - \omega_{max}; 0,5]$. На рис. 7.13 показаны модуль спектра интерполируемого сиг-

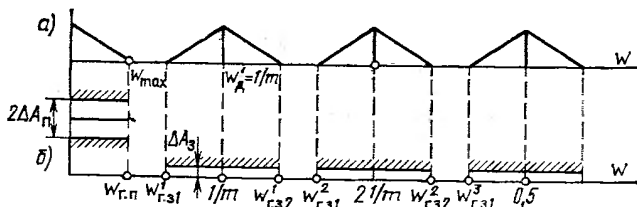


Рис. 7.13

нала (а) и схема допусков на АЧХ фильтра (б) в соответствии с (7.14) при $m=6$. Граничная частота полосы пропускания $\omega_{г.п} = \omega_{max}$. В основной полосе $[0; 0,5]$ имеется $[m/2]$ полос с граничными частотами $\omega_{г.31}^r$ и $\omega_{г.32}^r$, в которых необходимо обеспечить подавление «лишних» составляющих спектра. Остальные части диапазона $[0; 0,5]$ — это «безразличные полосы», в которых частотная характеристика фильтра практически не ограничена (усиление не должно, естественно, быть очень большим).

Вид АЧХ в полосе пропускания (и соответствующая неравномерность АЧХ ΔA_{Π}) определяет искажения модуля спектра полезного сигнала в требуемой полосе частот, а вид АЧХ в полосах задерживания (и соответственно отклонение АЧХ от нуля ΔA_{3}) определяет степень подавления «лишних» частотных составляющих спектра интерполируемого сигнала.

Выбор значений ΔA_{Π} и ΔA_{3} при решении аппроксимационной задачи основывается на требованиях конкретной проектируемой системы. Так, при использовании ПВДС с целью повышения частоты дискретизации канальных сигналов ТЧ для формирования группового сигнала с частотным разделением каналов (ЧРК) (см. гл. 9) ΔA_{Π} определяется допустимыми искажениями модуля спектра канального сигнала, а ΔA_{3} — допустимым уровнем внятных переходов, регламентируемых нормами МККТТ.

7.3.5. Структуры ПВДС при интерполяции

Важной особенностью (и достоинством) использования нерекурсивного фильтра в ПВДС является то, что НФ, частотная характеристика которого определяется «высокой» (выходной) частотой дискретизации, работает фактически на «низкой» (входной) частоте. При этом имеется в виду, что в НФ с передаточной функцией (7.13), импульсная характеристика которого содержит N отсчетов, необходимо выполнить N операций умножения за интервал времени,

равный интервалу дискретизации T' входного сигнала. Это объясняется тем, что в последовательности $x^*(nT)$ на выходе ЭЧД (см. рис. 7.12,а) между каждой парой информационных отсчетов находится $m-1$ нулевой отсчет, умножать на которые нет необходимости.

Пример 7.3. На рис. 7.14 показана ПВДС, используемая для увеличения частоты дискретизации в $m=3$ раза. Входной сигнал $x(vT')$ поступает на ЭЧД. Выходной сигнал ЭЧД $x^*(nT)$ обрабатывается НФ с передаточной функцией $H(z) = \sum_{l=0}^6 b_l z^{-l}$, реализованным в прямой форме (порядок фильтра выбран малым для простоты). Состояние регистров умножителей НФ на трех тактах (в моменты времени nT ,

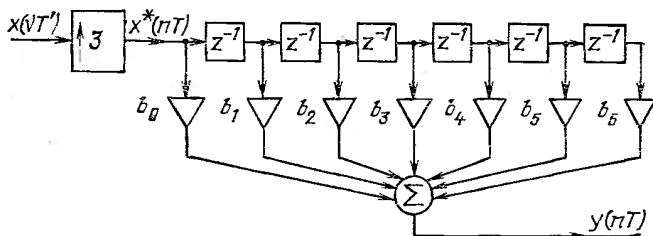


Рис. 7.14

$(n+1)T$ и $(n+2)T$ приведены в табл. 7.30. На n -м такте необходимо выполнить три операции умножения (на коэффициенты b_0 , b_3 и b_6), на $(n+1)$ - и $(n+2)$ -м тактах — по два умножения. Таким образом, за интервал времени $3T = T'$ необходимо выполнить семь операций умножения, что равно числу отсчетов импульсной характеристики НФ. Однако на операцию умножения отводится интервал времени T (умножители работают на «высокой» частоте дискретизации).

Таблица 7.30

Такт	Регистры умножителей							Число операций умножений за интервал	
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	T	T'
n	$x(vT')$	0	0	$x((v-1)T')$	0	0	$x((v-2)T')$	3	7
$n+1$	0	$x(vT')$	0	0	$x((v-1)T')$	0	0	2	
$n+2$	0	0	$x(vT')$	0	0	$x((v-1)T')$	0	2	

Структура 1. Структурная схема реализации ПВДС (см. рис. 7.12,а), использующей НФ с передаточной функцией (7.13), в которой умножители работают на «низкой» (входной) частоте дискретизации, приведена на рис. 7.15. Поскольку выходной сигнал умножителя k -й ветви ($k=0, 1, \dots, N-1$) поступает на выход схемы через k элементов задержки на интервал T , выходной сигнал $y(nT)$ на каждом n -м такте является суммой $[(N-1)/m]$ или $[(N-1)/m]-1$ сла-

гаемых. Так, при $m=3$ и $N=7$ на n -м такте при $n=vr$ (r — целое) $y(nT) = b_0x(vT') + b_3x(vT'-T') + b_6x(vT'-2T')$, на $(n+1)$ -м такте $y(nT) = b_1x(vT') + b_4x(vT'-T')$ и т. д. Таким образом, схема рис. 7.15 соответствует схеме, показанной на рис. 7.14.

Структура 2 (полифазная) [2.8, 2.12]. Структура основана на представлении ПВДС в виде эквивалентной схемы (ЭС) (см. 2.5.4). Структура содержит m параллельных ветвей обработки, в каждой из которых находится фильтр, работающий на «низкой» (входной) частоте дискретизации (см. рис. 2.20,б). Фильтр-прототип для расчета параметров фильтров ЭС ПВДС является фильтром нижних частот, АЧХ которого удовлетворяет условиям (7.14). Передаточные функции фильтров в ветвях ЭС ПВДС определяются по передаточной функции фильтра-прототипа с помощью (2.47).

При использовании нерекурсивных фильтров порядок N передаточной функции фильтра-прототипа целесообразно выбирать из условия $N=rm$ (r — целое число). При этом все фильтры ветвей ЭС ПВДС будут содержать равное число коэффициентов (r).

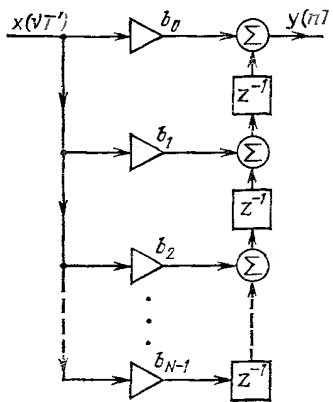


Рис. 7.15

7.3.6. Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции

Классические методы полиномиальной интерполяции построены на интерпретации значений функции многочленом определенной степени [2.10, 3.4].

Интерполяция нулевого порядка. При вычислении очередного отсчета выходного сигнала $y(nT)$ с интервалом дискретизации T используется только один отсчет входного интерполируемого сигнала $x(vT')$ с интервалом дискретизации T' . При увеличении частоты дискретизации в m раз отсчет сигнала $x(vT')$ повторяется m раз на тактах

$$y(nT) = x(vT'), \quad n = vm, vm+1, \dots, vm+m-1; \quad v=0,1,2, \dots \quad (7.1)$$

Процесс интерполяции нулевого порядка (7.15) при $m=6$ показан на рис. 7.16, где T_3 — задержка, вносимая фильтром.

Интерполяционному процессу (7.15) соответствует обработка сигнала ПВДС (см. рис. 7.12,а), в которой используется нерекурсивный однородный

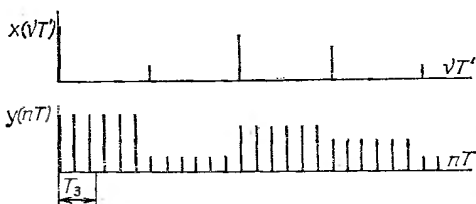


Рис. 7.16

фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{l=0}^{m-1} z^{-l}, \quad (7.16)$$

все m коэффициентов которого равны 1, а коэффициент усиления (значение АЧХ) на частоте $\omega=0$ равен m .

Амплитудно-частотная характеристика однородного фильтра

$$A(\omega) = |H(e^{i2\pi\omega})| = \sin \pi m \omega / (\sin \pi \omega). \quad (7.17)$$

На рис. 7.17 показана нормированная АЧХ $A^H(\omega) = A(\omega)/A(0) = A(\omega)/m$ для случая $m=6$ (кривая 1). Однородный фильтр обеспечивает существенное подавление ($\Delta A_{в.о}^H$) лишь в незначительном удалении от частот $\omega = r(1/m)$ ($r=1, 2, \dots$), имеет достаточно большую неравномерность ($\Delta A_{п.о}^H$) в полосе пропускания (максимум $\Delta A_{п.о}^H$ достигается при ω_{max}) и,

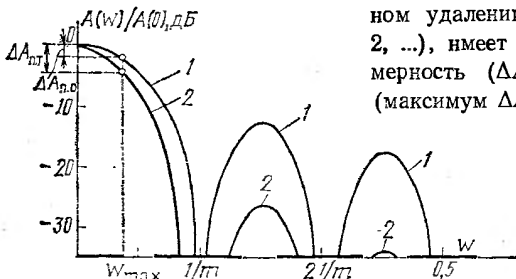


Рис. 7.17

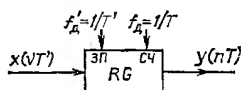


Рис. 7.18

следовательно, может использоваться для интерполяции сигнала, если $\omega'_{д} = 1/m \gg \omega_{max}$ (см. рис. 7.13). В табл. 7.31 приведены значения нормированных величин $\Delta A_{п.о}^H$ и $\max \Delta A_{в.о}^H$ однородного фильтра для каждого частотного диапазона $r(1/m) \pm \omega_{max}$ (см. рис. 7.17) при $m=6$ ($r=1, 2, 3$).

Таблица 7.31

$\omega_{max} m$	Однородный фильтр				Триангулярный фильтр			
	$\Delta A_{п.о.}^H$, дБ	$\max \Delta A_{в.о.}^H$, дБ			$\Delta A_{п.т.}^H$, дБ	$\max \Delta A_{в.т.}^H$, дБ		
		$r=1$	$r=2$	$r=3$		$r=1$	$r=2$	$r=3$
0,1	-0,139	-18,9	-24,2	-25,7	-0,278	-37,8	-48,4	-51,4
0,2	-0,563	-12,3	-18,3	-20,1	-1,12	-24,6	-36,6	-40,2
0,3	-1,29	-8,50	-15,2	-17,3	-2,58	-17,0	-30,4	-34,6
0,4	-2,35	-5,80	-13,4	-15,8	-4,71	-11,6	-26,8	-31,6
0,425	-2,68	-5,25	-13,1	-15,6	-5,36	-10,5	-26,2	-31,2

Передаточной функции (7.16) эквивалентна передаточная функция рекурсивного фильтра

$$H(z) = (1 - z^{-m}) / (1 - z^{-1}). \quad (7.18)$$

Структура реализации ПВДС (см. рис. 7.12,а) при интерполяции нулевого порядка приведена на рис. 7.18. Входной сигнал $x(nT')$ записывается в регистр RG с частотой $f'_к = 1/T'$, а считывание сигнала $y(nT)$ производится с частотой $f_к = m f'_к = 1/T$.

Интерполяция первого порядка (линейная). При вычислении очередного отсчета выходного сигнала $y(nT)$ с интервалом дискретизации T используются два отсчета входного интерполируемого сигнала $x(vT')$ с интервалом дискретизации T' . Интерполированные отсчеты лежат на прямой, соединяющей два используемых при интерполяции отсчета $x(vT')$ и $x(vT'-T')$ [2.10]:

$$y(nT) = y((vm+k-1)T) = \frac{k}{m} x(vT') + \frac{m-k}{m} x(vT'-T') = \\ = x(vT'-T') + \frac{k}{m} (x(vT') - x(vT'-T')), \quad (7.19)$$

где $v=0, 1, 2, \dots$; $k=1, 2, \dots, m$; $y((vm+m-1)T) = x(vT')$.

Интерполяционному процессу (7.19) соответствует обработка сигнала в ПВДС, в которой используется нерекурсивный треугольный фильтр (ТФ) с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{m} \left(\sum_{l=0}^{m-1} z^{-l} \right)^2 = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{2m-2} b_l z^{-l}. \quad (7.20)$$

Треугольному фильтру (7.20) эквивалентно последовательное соединение двух однородных фильтров с передаточной функцией (7.16). Импульсная характеристика ТФ содержит $2m-1$ отсчет и определяется сверткой импульсных характеристик однородных фильтров (без учета масштабного коэффициента)

$$b_l = \begin{cases} l+1, & l=0, 1, \dots, m-1; \\ 2m-l-1, & l=m, m+1, \dots, 2m-2, \end{cases}$$

т. е. $b_l = \{1, 2, \dots, m-1, m, m-1, \dots, 2, 1\}$.

Амплитудно-частотная характеристика треугольного фильтра

$$A(\omega) = \frac{1}{m} \left(\frac{\sin \pi m \omega}{\sin \pi \omega} \right)^2. \quad (7.21)$$

На рис. 7.17 показана нормированная АЧХ $A^H(\omega) = A(\omega)/m$ при $m=6$ (кривая 2). В табл. 7.31 приведены значения нормированных величин $\Delta A^H_{\text{н.т}}$ и

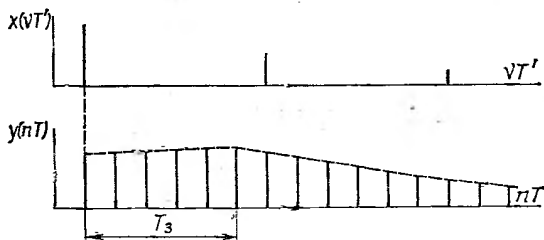


Рис. 7.19

$\max \Delta A^H_{\text{н.т}}$ треугольного фильтра для частотных диапазонов $r \frac{1}{m} \pm \omega_{\max}$ (см. рис. 7.17) при $m=6$ и $r=1, 2, 3$.

На рис. 7.19 показаны процесс линейной интерполяции и временная задержка T_s , вносимая фильтром.

Передаточной функции (7.20) эквивалентна передаточная функция рекурсивного фильтра

$$H(z) = \frac{1}{m} \left(\frac{1-z^{-m}}{1-z^{-1}} \right)^2, \quad (7.22)$$

а уравнению (7.19) — рекурсивное разностное уравнение

$$y(nT) = y(vm+r)T = y(nT-T) + \frac{1}{m} (x(vT') - x(vT'-T)), \quad (7.23)$$

где $v=0, 1, 2, \dots$; $n=vm+r$; $r=0, 1, \dots, m-1$.

Непосредственная реализация (7.23) нецелесообразна, поскольку процесс неустойчив [7.1]. Эквивалентное разностное уравнение ПВДС, приводящее к устойчивой структуре, имеет вид

$$y(nT) = y(nT-T) + \frac{1}{m} (x(vT') - y((vm-1)T)), \quad (7.24)$$

где $v=0, 1, 2, \dots$; $n=vm+r$; $r=0, 1, \dots, m-1$.

Возникновение ошибки δ в сигнале $y(nT)$ на n -м такте ($n=vm+r$) при вычислениях по (7.24) приводит к ее исчезновению к $(v+2)$ -му такту.

Структура реализации ПВДС при линейной интерполяции по алгоритму (7.24) приведена на рис. 7.20. В сумматоре Σ_1 формируется разностный сигнал $x(vT') - y(vmT-T)$, используемый для вычисления по (7.24) m отсчетов сигнала $y(nT)$ на тактах $n=vm+r$, $r=0, 1, \dots, m-1$. Выходной сигнал $y(nT)$ формируется в сумматоре Σ_2 .

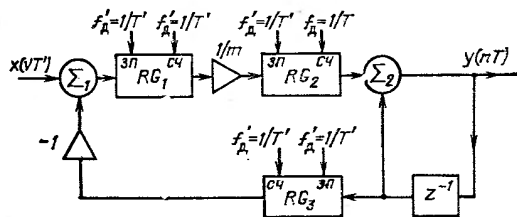


Рис. 7.20

Интерполяция высших порядков (полиномами степеней $Q \geq 2$) при цифровой обработке сигналов применяется редко. Подробно построение ПВДС при использовании фильтров, реализованных на основе интерполяционных формул Лагранжа, рассмотрено в [2.10].

7.3.7. Простейшие ВДС с оптимальными фильтрами

Достоинством ПВДС при интерполяции нулевого и первого порядков является простота реализации, при которой не требуется выполнять операции умножения. Однако точность интерполяции часто оказывается недостаточной из-за относительно большой неравномерности АЧХ используемого фильтра в полосе пропускания и малого подавления в полосе задерживания. Наилучшие результаты при интерполяции достигаются при использовании в ПВДС фильтров, оптимальным образом удовлетворяющих условиям (7.14).

Пример 7.4. Рассмотрим построение ПВДС при интерполяции сигнала, спектр которого занимает полосу частот от 0 до 1,7 кГц, а частота дискретизации $f'_д = 8$ кГц должна быть увеличена в 14 раз, т. е. до 112 кГц ($\omega_{max} = 0,0151785$; $m = 14$; $\omega'_д = 1/m = 0,0714282$). Требования к спектру интерполированного сигнала, определяющие требования (7.14) к АЧХ фильтра, следующие:

Таблица 7.32

r	ω	A^H_0 , дБ	A^H_T , дБ
0	0,0151785	-0,65	-1,30
1	0,0562497	-11,98	-23,97
	0,0866067	-15,60	-31,35
2	0,1276779	-18,92	-37,84
	0,1580349	-20,65	-41,30
3	0,1991061	-22,44	-44,87
	0,2294361	-23,48	-46,97
4	0,2705343	-24,60	-49,20
	0,3008913	-25,26	-50,52
5	0,3419625	-25,97	-51,94
	0,3723195	-26,37	-52,73
6	0,4133967	-26,76	-53,52
	0,4437477	-26,95	-53,90
7	0,4848215	-27,20	-54,40

щие: составляющие спектра в полосе (0, ω_{max}) должны быть искажены не более чем на $\pm 0,2$ дБ ($\Delta A^H_0 \approx \pm 0,023$), а «лишние» составляющие должны быть подавлены не менее чем на -50 дБ ($\Delta A^H_0 = 0,03162$) (см. рис. 7.13).

Однородный и треугольный фильтры. В табл. 7.32 приведены значения АЧХ однородного (A^H_0) и треугольного (A^H_T) фильтров на частотах $\omega = r(1/m) \pm \omega_{max}$ при $m = 14$. Из таблицы видно, что использование данных фильтров в ПВДС при заданных условиях невозможно.

Оптимальный фильтр. Нерекурсивный фильтр синтезируется по алгоритму Ремеза (см. 4.3.4). При предварительной оценке порядка N передаточной функции (7.13) по условиям

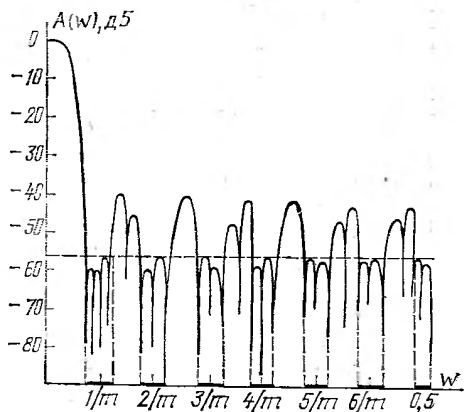


Рис. 7.21

$b_f \cdot 10^6, b^*_{k,j} \cdot 10^6$

№	$b_0 = b^*_{0,0} = -2,858048$	$b_{14} = b^*_{0,1} = 7,716989$	$b_{28} = b^*_{0,2} = 65,56632$	$b_{42} = b^*_{0,3} = 1,955160$
1	$b_1 = b^*_{1,0} = -2,287126$	$b_{15} = b^*_{1,1} = 10,47495$	$b_{29} = b^*_{1,2} = 65,48253$	$b_{43} = b^*_{1,3} = -1,106867$
2	$b_2 = b^*_{2,0} = -2,953845$	$b_{16} = b^*_{2,1} = 15,51824$	$b_{30} = b^*_{2,2} = 62,81881$	$b_{44} = b^*_{2,3} = -2,930062$
3	$b_6 = b^*_{3,0} = -3,711665$	$b_{17} = b^*_{3,1} = 21,08302$	$b_{31} = b^*_{3,2} = 59,19142$	$b_{45} = b^*_{3,3} = -4,220101$
4	$b_4 = b^*_{4,0} = -4,421111$	$b_{18} = b^*_{4,1} = 26,90940$	$b_{32} = b^*_{4,2} = 54,83138$	$b_{46} = b^*_{4,3} = -5,064035$
5	$b_5 = b^*_{5,0} = -5,014009$	$b_{19} = b^*_{5,1} = 32,84395$	$b_{33} = b^*_{5,2} = 49,87966$	$b_{47} = b^*_{5,3} = -5,512682$
6	$b_6 = b^*_{6,0} = -5,431860$	$b_{20} = b^*_{6,1} = 38,74525$	$b_{34} = b^*_{6,2} = 44,47121$	$b_{48} = b^*_{6,3} = -5,617070$
7	$b_7 = b^*_{7,0} = -5,617070$	$b_{21} = b^*_{7,1} = 44,47121$	$b_{35} = b^*_{7,2} = 38,74525$	$b_{49} = b^*_{7,3} = -5,431860$
8	$b_8 = b^*_{8,0} = -5,512682$	$b_{22} = b^*_{8,1} = 49,87966$	$b_{36} = b^*_{8,2} = 32,84395$	$b_{50} = b^*_{8,3} = -5,014009$
9	$b_9 = b^*_{9,0} = -5,064035$	$b_{23} = b^*_{9,1} = 54,83138$	$b_{37} = b^*_{9,2} = 26,90940$	$b_{51} = b^*_{9,3} = -4,421111$
10	$b_{10} = b^*_{10,0} = -4,220101$	$b_{24} = b^*_{10,1} = 59,19142$	$b_{38} = b^*_{10,2} = 21,08302$	$b_{52} = b^*_{10,3} = -3,711665$
11	$b_{11} = b^*_{11,0} = -2,930062$	$b_{25} = b^*_{11,1} = 62,81811$	$b_{39} = b^*_{11,2} = 15,51824$	$b_{53} = b^*_{11,3} = -2,953845$
12	$b_{12} = b^*_{12,0} = -1,106867$	$b_{26} = b^*_{12,1} = 65,48253$	$b_{40} = b^*_{12,2} = 10,47495$	$b_{54} = b^*_{12,3} = -2,287126$
13	$b_{13} = b^*_{13,0} = 1,955160$	$b_{27} = b^*_{13,1} = 65,56632$	$b_{41} = b^*_{13,2} = 7,716989$	$b_{55} = b^*_{13,3} = -2,858048$

(7.14) оказывается, что $41 < N < 56$. Целесообразно выбрать $N=56$, что удобно при реализации ПВДС в виде ЭСН (полифазной структуры).

Коэффициенты b_l , $l=0, 1, \dots, 55$, передаточной функции $H(z)$ фильтра приведены в табл. 7.33 (без учета масштабного множителя m), а АЧХ фильтра показана на рис. 7.21. Неравномерность АЧХ в полосе пропускания $[0, \omega_{max}]$ составляет не более $\pm 0,15$ дБ, а подавление в полосах задерживания $\left[r \frac{1}{m} - \omega_{max}, r \frac{1}{m} + \omega_{max} \right]$, $r=1, 2, \dots, 7$, не менее -56 дБ.

Структура ЭС ПВДС (полифазная). При представлении ПВДС в виде эквивалентной схемы (см. 2.5.4, 7.3.5, рис. 2.20) структура последней содержит $m=14$ параллельных ветвей обработки, в каждой из которых находится фильтр с передаточной функцией

$$H_k(z^m) = \sum_{j=0}^3 b_{k,j}^* z^{-mj} = \sum_{j=0}^3 b_{k+14j} z^{-14j}, \quad k=0, 1, \dots, 13.$$

Коэффициенты передаточной функции $H_k(z^m)$ фильтра в k -й ветви $b_{k,j}^*$, $k=0, 1, \dots, 13$; $j=0, 1, 2, 3$, представляют собой коэффициенты передаточной функции исходного фильтра-прототипа, взятые через $m=14$ коэффициентов. Значения в каждой строке табл. 7.33 представляют собой коэффициенты фильтра в k -й ветви ЭС ПВДС.

7.3.8. Перенос спектра при интерполяции

Рассматривается сигнал $x(vT')$, основной спектр которого занимает полосу нормированных частот $[\omega_1, \omega_2]$ (нормировка ведется к частоте $f_n = m/T'$), а частота дискретизации $\omega'_d = 1/m$. Процесс увеличения частоты дискретизации сигнала $x(vT')$ в m раз можно совместить с переносом его спектра на величину $\beta = -l \frac{1}{2m}$, $l=1, 2, \dots, m-1$, т. е. в частотный диапазон $\left[l \frac{1}{2m}, (l+1) \frac{1}{2m} \right]$. Для этого необходимо в ПВДС (см. рис. 7.12,а) использовать полосовой фильтр, идеализированная АЧХ которого в основной полосе частот удовлетворяет условиям:

$$|H(e^{i2\pi\omega})| = \begin{cases} m & \text{при } \omega \in \left[l \frac{1}{2m} + \omega_1, l \frac{1}{2m} + \omega_2 \right]; \\ 0 & \text{при } \omega \notin \left[l \frac{1}{2m} - \omega_1, (l+2) \frac{1}{2m} - \omega_2 \right], \\ & l=2, 4, \dots, 2 \left[\frac{m-1}{2} \right]; \end{cases} \quad (7.25')$$

$$|H(e^{i2\pi\omega})| = \begin{cases} m & \text{при } \omega \in \left[(l+1) \frac{1}{2m} - \omega_2, (l+1) \frac{1}{2m} - \omega_1 \right]; \\ 0 & \text{при } \omega \notin \left[(l-1) \frac{1}{2m} + \omega_2, (l+1) \frac{1}{2m} + \omega_1 \right], \\ & l=1, 3, \dots, 2 \left[\frac{m-1}{2} \right] + 1, \end{cases} \quad (7.25'')$$

где $[B]$ означает наибольшее целое число, не большее, чем число B .

На рис. 7.22 показаны модуль спектра сигнала $x(vT')$ (рис. 7.22,а), АЧХ фильтра и модуль спектра интерполированного сигнала $y(nT)$ при $l=2$ (рис. 7.22,б и в) и $l=1$ (рис. 7.22,г и д) для $m=4$.

Отметим, что для нечетных значений l в полосу $\left[l \frac{1}{2m}, (l+1) \frac{1}{2m} \right]$ попадает

инверсный спектр интерполируемого сигнала (см. рис. 7.22, д). Если необходимо в данной полосе иметь прямой спектр, то перед интерполяцией необходимо выполнить инверсию спектра сигнала $x(vT')$ по правилу (7.3), а в ПВДС использовать фильтр с АЧХ, удовлетворяющей условиям (7.25').

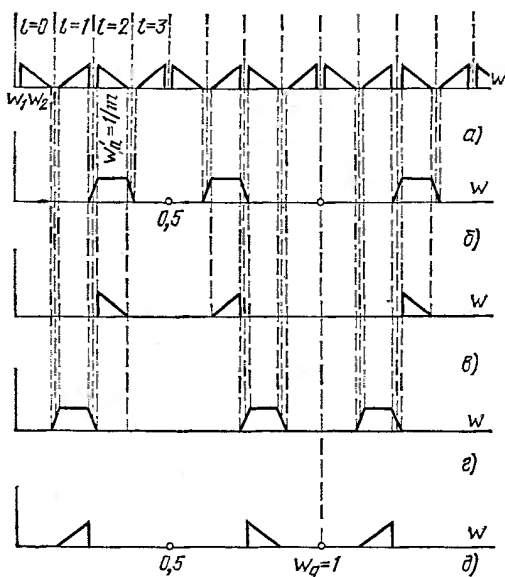


Рис. 7.22

7.3.9. Перенос спектра при интерполяции комплексного сигнала

Рассматривается вещественный сигнал $x(vT')$ с частотой дискретизации $f'_d = 1/T'$, спектр которого в основной полосе нормированных частот занимает полосу $[\omega_1, \omega_2]$ (нормировка ведется к частоте $f_d = mf'_d$).

Схема, осуществляющая увеличение частоты дискретизации сигнала в m раз с одновременным переносом спектра, показана на рис. 7.23, а, а модуль спектра сигнала $x(vT')$ — на рис. 7.24, а (для $m=4$).

Принцип работы схемы. Сигнал $x(vT')$ умножается на дискретную экспоненту $e^{j2\pi\gamma v}$ (о выборе значения γ см. 7.2.1). При $\gamma = -m(\omega_1 + \omega_2)/2$ верхняя боковая полоса спектра сигнала $\tilde{p}(vT')$ занимает частотный диапазон $[-(\omega_2 - \omega_1)/2, (\omega_2 - \omega_1)/2]$ (рис. 7.24, б).

Сигнал $\tilde{p}(vT')$ подвергается интерполяции с помощью ПВДС, содержащей ЭЧД и интерполирующий фильтр (ФИ), АЧХ которого показана на рис. 7.24, в (для $m=4$). В результате формируется сигнал $\tilde{d}(nT)$ с частотой дискретизации $f_d = mf'_d$, модуль спектра которого показан на рис. 7.24, г. Для переноса спектра на требуемую величину β сигнал $\tilde{d}(nT)$ умножается на дискретную экспоненту $e^{j2\pi\beta n}$. Модуль спектра сигнала $d(nT)$ показан на рис. 7.24, д. Вещественный сигнал $y(nT)$ со спектром, содержащим обе боковые полосы, получается выделением вещественной части сигнала $d(nT)$ (элемент Ре на рис. 7.23, а). Модуль спектра сигнала $y(nT)$ показан на рис. 7.24, е.

В общем случае сигналы $\tilde{p}(vT')$, $p^*(nT)$, $\tilde{d}(nT)$ и $d(nT)$ являются комп-

лексными. На рис. 7.23,б приведена «комплексная» схема, соответствующая схеме рис. 7.23,а. В схеме нет сигнала $d(nT)$, поскольку не нужно вычислять его мнимую составляющую.

Отметим, что при $\gamma = 0,25$ каждый второй отсчет последовательностей $\tilde{p}_1(vT')$ и $\tilde{p}_2(vT')$ равен нулю и процесс интерполяции соответствует процессу увеличения частоты дискретизации вещественных сигналов $s_1(kT^*) = \tilde{p}_1(v2T)$ и $s_2(kT^*) = \tilde{p}_2(v2T)$ с частотой дискретизации $f'_{\pi}/2$ в $2m$ раз.

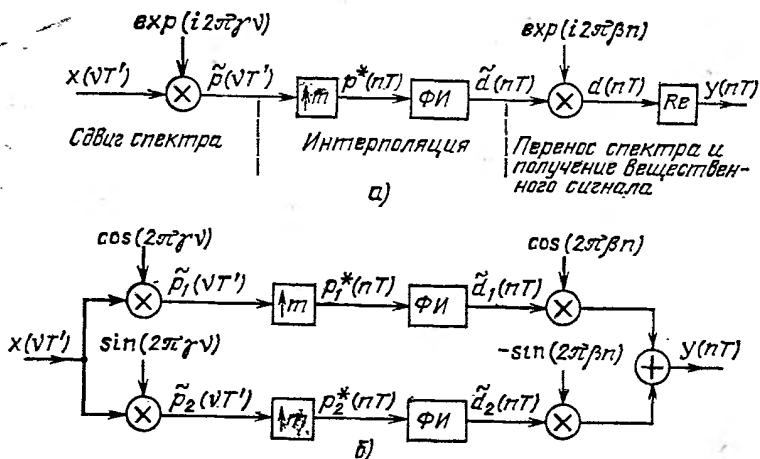


Рис. 7.23

Достоинствами схемы (см. рис. 7.23) по сравнению с ПВДС, описанной в 7.3.8, являются отсутствие ограничений на параметр β и использование одного и того же $\Phi И$ при переносе спектра на любую величину β .

Вариант схемы увеличения частоты дискретизации с предварительным формированием сигнала с ОБП показан на рис. 7.25. Данная схема обладает до-

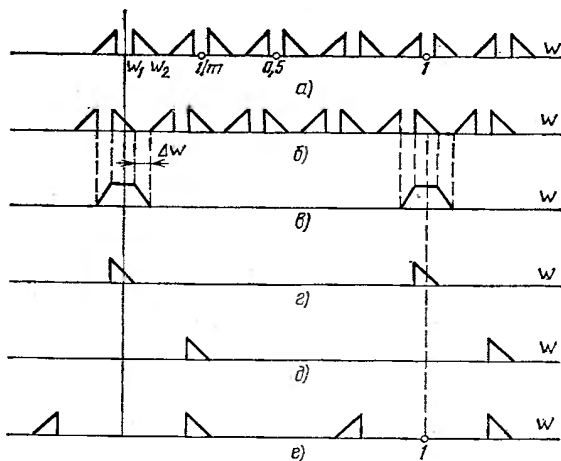


Рис. 7.24

стоинствами схемы рис. 7.23 и имеет, как правило, лучшие показатели по таким параметрам, как емкость оперативной памяти и объем оборудования [2.11]. Действительно, ФНЧ работает (и рассчитывается) на «низкой» частоте дискретизации $f'_д$, а АЧХ ФИ может иметь широкую промежуточную полосу (определяющую порядок фильтра), поскольку одна боковая полоса спектра интерполируемого сигнала уже подавлена в ФНЧ.

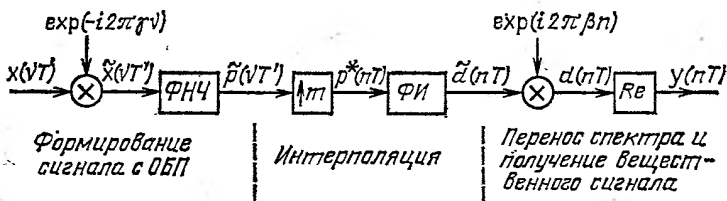


Рис. 7.25

7.3.10. Интерполяция сигнала с помощью МВДС

При увеличении частоты дискретизации сигнала в m раз (если число m разлагается на простые множители) можно использовать многократные восходящие дискретные системы (МВДС) (см. 2.5.5). При этом увеличение частоты дискретизации осуществляется не в один прием, как в ПВДС, а постепенно. При

$$m = \prod_{k=1}^p m_k, \quad (7.26)$$

где каждый множитель m_k — целое число, МВДС состоит из p подсистем, причем частота дискретизации на выходе k -й ($k=1, 2, \dots, p$) подсистемы в m_k раз выше частоты дискретизации на ее входе (см. рис. 2.27).

Достоинствами МВДС по сравнению с ПВДС являются:

уменьшение числа арифметических операций в единицу времени;

уменьшение емкости оперативной памяти;

упрощение задачи расчета фильтров;

уменьшение эффектов, обусловленных ограниченной разрядностью регистров (ошибок квантования, чувствительности коэффициентов) при цифровой реализации.

Наибольший выигрыш при переходе к многократной системе достигается при большом значении m .

Выбор структуры МВДС существенно зависит от конкретного приложения. Существует несколько подходов к определению структуры многократной системы [2.8]:

1. В каждой подсистеме МВДС используется фильтр с равновеликими пульсациями. Значения m_k выбираются с помощью процедуры оптимизации, минимизирующей число арифметических операций (объем оперативной памяти) и подсистем.

На практике часто оказывается возможным рассмотреть несколько вариантов многократной системы [с разными m_k в (7.26)], руководствуясь изложенными ниже рекомендациями.

2. Многократная система строится из p подсистем, причем $m_k=2, k=1, 2, \dots, p-1$, и $m_p = m / \prod_{k=1}^{p-1} m_k$. При этом фильтры, используемые во всех подсистемах, кроме последней, являются равнополосными.

3. В последних подсистемах МВДС применяются фильтры специального семейства [7.2].

Основными рекомендациями при синтезе МВДС, состоящей из p подсистем, являются следующие [2.8]:

коэффициенты интерполяции $m_k, k=1, 2, \dots, p$, должны удовлетворять условию $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_p$;

допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания фильтра k -й подсистемы $\Delta A_k = \Delta A_{\Sigma} / p$, где ΔA_{Σ} — допустимое искажение спектра интерполируемого сигнала.

Отметим, что в ряде случаев оптимальным может оказаться другое распределение величины ΔA_{Σ} между фильтрами подсистем (см. пример 7.5);

допустимое отклонение от нуля АЧХ фильтра k -й подсистемы в полосах задерживания $\Delta A_k = \Delta A_{\Sigma}$, где ΔA_{Σ} — требуемая величина подавления «лишних» составляющих спектра интерполируемого сигнала;

АЧХ фильтров каждой подсистемы (как правило, начиная со второй) имеют «безразличные полосы» (см. 7.3.4), в которых значения ΔA_{Σ} выдерживать не требуется (см. рис. 7.13) и пример 7.5);

каждая подсистема строится по любой из структур ПВДС.

Пример 7.5. Рассмотрим построение схемы интерполяции сигнала, спектр которого занимает полосу частот от 0 до 1,7 кГц, а частота дискретизации f_{Σ} должна быть увеличена в $m=28$ раз до $f_{\Sigma}=112$ кГц. Требования к спектру интерполированного сигнала: составляющие спектра в полосе $[0; \omega_{\max}]$ должны быть искажены не более чем на $\pm 0,13$ дБ ($\Delta A_{\Sigma} = \pm 0,015$); «лишние» составляющие в полосах $[r_1/m \pm \omega_{\max}]$ должны быть подавлены не менее чем на $-76,5$ дБ ($\Delta A_{\Sigma} = 0,0015$).

Отметим, что данная схема есть схема интерполяции вещественной (мнимой) составляющей комплексного сигнала ТЧ в ветвях схемы рис. 7.23,б.

Ниже рассматриваются четыре варианта построения схемы, соответствующие различным разложениям коэффициента интерполяции m на множители: $m=28=4 \times 7=2 \times 14=2 \times 2 \times 7$. При построении схемы используются ПФ с передаточной функцией (7.13), синтезированные по программе [1.6] с предварительной оценкой порядка фильтра N по формуле (4.29). Во всех случаях порядок синтезированного фильтра k -й подсистемы выбирался кратным коэффициенту интерполяции m_k данной подсистемы (см. 7.3.5).

Основные параметры системы интерполяции для всех вариантов приведены в табл. 7.34. Число операций умножения R_k , выполняемых в 1 с k -й подсистемой со входной частотой дискретизации f_{Σ} вх и выходной частотой f_{Σ} вых $= m_k f_{\Sigma}$ вх определяется по формуле $R_k = N f_{\Sigma}$ вх.

Вариант 1 (однократная система интерполяции). Схема представляет собой ПВДС (см. 7.3.5) и содержит одну подсистему, увеличивающую частоту дискретизации в $m=28$ раз. Вид огибающей импульсной характеристики $\{b_i\}$ фильтра приведен на рис. 7.26. Значения коэффициентов b_i передаточной функ-

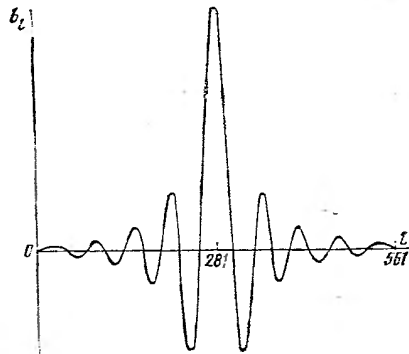


Рис. 7.26

Вариант	Подсистема	Частота дискретизации f_d , кГц	Оценка порядка фильтра N	Порядок фильтра N	Граничная нормированная частота полосы пропускания $\omega_{г.п}$	Неравномерность АЧХ в полосе пропускания $\Delta A_{п}$
1	1	112	540	560	0,0151785	0,014311
2	1	16	84	84	0,10625	0,013480
	2	112	28	28	0,0151785	0,002009
3	1	8	42	44	0,2125	0,007026
	2	112	84	84	0,0151785	0,005939
4	1	8	44	46	0,2125	0,004549
	2	16	12	12	0,10625	0,003315
	3	112	28	28	0,0151785	0,001348

ции имеют значительный разброс (от $\sim 0,14 \cdot 10^{-4}$ до $0,34 \cdot 10^{-1}$), что усложняет реализацию фильтра.

Вариант 2 (двухкратная система интерполяции при $m_1=4$, $m_2=7$). Схема представляет собой МВДС (см. 2.5.2) и содержит две подсистемы. Первая подсистема увеличивает частоту дискретизации в $m_1=4$ раза (до 16 кГц), а вторая подсистема — в $m_2=7$ раз (до 112 кГц). В табл. 7.35 приведены коэффициенты $b_l=H(l)$ передаточной функции фильтра первой подсистемы, а в табл. 7.36 — второй подсистемы.

Вариант 3 (двухкратная система интерполяции при $m_1=2$, $m_2=14$). Схема содержит две подсистемы, из которых первая увеличивает частоту дискретизации в $m_1=2$ раза (до 8 кГц), а вторая — в $m_2=14$ раз (до 112 кГц). В табл. 7.37 приведены коэффициенты $b_l=H(l)$ передаточной функции фильтра первой подсистемы, а в табл. 7.38 — второй подсистемы.

Вариант 4 (трехкратная система интерполяции при $m_1=2$, $m_2=2$, $m_3=7$). Схема содержит три подсистемы, увеличивающие частоту дискретизации соответственно в $m_1=2$ раза (до 8 кГц), в $m_2=2$ раза (до 16 кГц) и $m_3=7$ раз (до 112 кГц). В табл. 7.39—7.41 приведены коэффициенты $b_l=H(l)$ передаточных функций фильтров первой, второй и третьей подсистем соответственно.

Анализ данных табл. 7.33—7.41 показывает, что при построении схемы в виде трехкратной системы используются наиболее простые фильтры, а общий объем оперативной памяти и число операций умножения в единицу времени оказываются минимальными.

Таблица 7.34

Граничные нормированные частоты полос задерживания		$\omega_{r,32}^r$	Отклонение АЧХ от нуля в полосах задерживания $\Delta A, \cdot 10^4$	Число операций умножения $R \cdot 10^{-6}$	Общее число опер. умножений $R \cdot 10^{-6}$
$\omega_{r,31}^r$	$\omega_{r,32}^r$				
0,0205356	0,5	1,43111	2,24	2,24	
0,14375	0,5	1,34799	0,336	0,784	
$r \cdot 0,142857 - 0,0151785$ ($r = 1, 2, 3$)	$r \cdot 0,142857 + 0,0151785$ ($r = 1, 2, 3$)	0,40183	0,448		
0,2875	0,5	1,40515	0,176	0,848	
$r \cdot 0,0714285 - 0,0151785$ ($r = 1, 2, \dots, 7$)	$r \cdot 0,0714285 + 0,0151785$ ($r = 1, 2, \dots, 7$) $\omega_{r,32}^r = 0,5$	1,18788	0,672		
0,2875	0,5	1,37839	0,184	0,728	
0,39375	0,5	1,00450	0,096		
$r \cdot 0,142857 - 0,0151785$ ($r = 1, 2, 3$)	$r \cdot 0,142857 + 0,0151785$ ($r = 1, 2, 3$)	0,40837	0,448		

В табл. 7.35—7.41 приведены: порядок фильтра (RESPONSE LENGTH), коэффициенты передаточной функции $H(I)$ ($I=1, 2, \dots$), а также нижние и верхние границы диапазонов аппроксимации (LOWER BAND EDGE, UPPER BAND EDGE), уровни аппроксимации (DESIRED VALUE), весовые коэффициенты (WEIGHTING) и девиация АЧХ (DEVIATION) для всех диапазонов аппроксимации (BAND $k, k=1, 2, \dots$).

7.4. УМЕНЬШЕНИЕ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ (ДЕЦИМАЦИЯ) СИГНАЛА

7.4.1. Децимация сигнала с помощью ПНДС

Системы уменьшения частоты дискретизации (децимации) сигнала относятся к классу нисходящих дискретных систем (см. 2.5). Уменьшение частоты дискретизации сигнала $x(nT)$ в m раз (m — коэффициент децимации) осуществляется компрессором частоты дискретизации (КЧД) (см. 2.5.3), формирующим сигнал $y^*(vT')$ путем взятия только каждого m -го отсчета из последовательности $x(nT)$, т. е. $y^*(vT') = x(mvT)$, $v=1, 2, \dots$ Для предотвращения явления наложения

RESPONSE LENGTH = 64

***** IMPULSE RESPONSE *****

H(1) = -0.94353863E-04 = H(64)
 H(2) = 0.44159533E-04 = H(63)
 H(3) = 0.39885263E-03 = H(62)
 H(4) = 0.10545105E-02 = H(61)
 H(5) = 0.10678688E-02 = H(60)
 H(6) = 0.24916651E-02 = H(59)
 H(7) = 0.24912711E-02 = H(58)
 H(8) = 0.15863655E-02 = H(57)
 H(9) = -0.97910350E-04 = H(56)
 H(10) = -0.19410625E-02 = H(55)
 H(11) = -0.30213697E-02 = H(54)
 H(12) = -0.25739642E-02 = H(53)
 H(13) = -0.50316541E-03 = H(52)
 H(14) = 0.23614233E-02 = H(51)
 H(15) = 0.45090578E-02 = H(50)
 H(16) = 0.44816732E-02 = H(49)
 H(17) = 0.17732596E-02 = H(48)
 H(18) = -0.26246300E-02 = H(47)
 H(19) = -0.64618774E-02 = H(46)
 H(20) = -0.72999075E-02 = H(45)
 H(21) = -0.39515309E-02 = H(44)
 H(22) = 0.25894124E-02 = H(43)
 H(23) = 0.68859461E-02 = H(42)
 H(24) = 0.11317566E-01 = H(41)
 H(25) = 0.74656941E-02 = H(40)
 H(26) = -0.17396733E-02 = H(39)
 H(27) = -0.11938201E-01 = H(38)
 H(28) = -0.17196327E-01 = H(37)
 H(29) = -0.13203409E-01 = H(36)
 H(30) = -0.20433962E-03 = H(35)
 H(31) = 0.16104147E-01 = H(34)
 H(32) = 0.26654512E-01 = H(33)
 H(33) = 0.23497656E-01 = H(32)
 H(34) = 0.46798512E-02 = H(31)
 H(35) = -0.23082972E-01 = H(30)
 H(36) = -0.45770526E-01 = H(29)
 H(37) = -0.47456115E-01 = H(28)
 H(38) = -0.17646059E-01 = H(27)
 H(39) = 0.42783618E-01 = H(26)
 H(40) = 0.12008423E+00 = H(25)
 H(41) = 0.19173849E+00 = H(24)
 H(42) = 0.23176595E+00 = H(23)

	BAND 1	BAND 2	BAND
LOWER BAND EDGE	0.0	0.143750012	
UPPER BAND EDGE	0.106249088	0.500000000	
DESIRED VALUE	1.00000000	0.0	
WEIGHTING	1.00000000	100.000000	
DEVIATION	0.013479862	0.000134799	
ATTENUATION DB	-37.4062805	-77.4062805	

Таблица 7.36

RESPONSE LENGTH = 28

***** IMPULSE RESPONSE *****

H(1) = -0.92452988E-02 = H(28)
 H(2) = 0.48678741E-02 = H(27)
 H(3) = -0.19012168E-01 = H(26)
 H(4) = -0.29299855E-02 = H(25)
 H(5) = 0.24765730E-03 = H(24)
 H(6) = -0.38960695E-01 = H(23)
 H(7) = 0.54496542E-01 = H(22)
 H(8) = -0.30758068E-01 = H(21)
 H(9) = 0.56787610E-01 = H(20)

H(10) = 0.81694543E-01 = H(19)
 H(11) = 0.60567111E-02 = H(18)
 H(12) = 0.20352691E+00 = H(17)
 H(13) = 0.35124004E-01 = H(16)
 H(14) = 0.15918864E+00 = H(15)

	BAND 1	BAND 2	BAND 3	
LOWER BAND EDGE	0.0	0.127677977	0.278534992	0.
UPPER BAND EDGE	0.015178598	0.158035994	0.308893089	0.
DESIRED VALUE	1.00000000	0.0	0.0	0.
WEIGHTING	1.00000000	50.0000000	50.0000000	50.
DEVIATION	0.002009142	0.000840183	0.000840183	0.
ATTENUATION DB	-53.9397736	-87.9191895	-87.9191895	-87.

Таблица

RESPONSE LENGTH = 44

***** IMPULSE RESPONSE *****

H(1) = -0.61250315E-03 = H(44)
 H(2) = -0.23818109E-02 = H(43)
 H(3) = -0.25331313E-02 = H(42)
 H(4) = 0.12059398E-02 = H(41)
 H(5) = 0.38706940E-02 = H(40)
 H(6) = -0.10447204E-02 = H(39)
 H(7) = -0.64153373E-02 = H(38)
 H(8) = 0.31558424E-03 = H(37)
 H(9) = 0.10009665E-01 = H(36)
 H(10) = 0.13063392E-02 = H(35)
 H(11) = -0.14838643E-01 = H(34)
 H(12) = -0.42699017E-02 = H(33)
 H(13) = 0.21312147E-01 = H(32)
 H(14) = 0.93307272E-02 = H(31)
 H(15) = -0.30314639E-01 = H(30)
 H(16) = -0.18044442E-01 = H(29)
 H(17) = 0.44116110E-01 = H(28)
 H(18) = 0.34575820E-01 = H(27)
 H(19) = -0.70442736E-01 = H(26)
 H(20) = -0.76286614E-01 = H(25)
 H(21) = 0.15902549E+00 = H(24)
 H(22) = 0.43860304E+00 = H(23)

	BAND 1	BAND 2	BAND
LOWER BAND EDGE	0.0	0.287500024	
UPPER BAND EDGE	0.212499976	0.500000000	
DESIRED VALUE	1.00000000	0.0	
WEIGHTING	1.00000000	50.0000000	
DEVIATION	0.007025771	0.000140515	
ATTENUATION DB	-43.0661163	-77.0455170	

Таблица

RESPONSE LENGTH = 84

***** IMPULSE RESPONSE *****

H(1) = 0.54814364E-03 = H(84)
 H(2) = 0.39943377E-03 = H(83)
 H(3) = 0.49127018E-03 = H(82)
 H(4) = 0.59117679E-03 = H(81)
 H(5) = 0.66805957E-03 = H(80)
 H(6) = 0.70870458E-03 = H(79)
 H(7) = 0.69941813E-03 = H(78)
 H(8) = 0.63890259E-03 = H(77)
 H(9) = 0.49355952E-03 = H(76)

H(10) = 0.20270351E-03 = H(75)
 H(11) = -0.11676573E-04 = H(74)
 H(12) = -0.38700388E-03 = H(73)
 H(13) = -0.85024117E-03 = H(72)
 H(14) = -0.15355423E-02 = H(71)
 H(15) = -0.33493489E-02 = H(70)
 H(16) = -0.36153720E-02 = H(69)
 H(17) = -0.45470111E-02 = H(68)
 H(18) = -0.54745004E-02 = H(67)
 H(19) = -0.62829107E-02 = H(66)
 H(20) = -0.68986875E-02 = H(65)
 H(21) = -0.72499737E-02 = H(64)
 H(22) = -0.72731972E-02 = H(63)
 H(23) = -0.69045871E-02 = H(62)
 H(24) = -0.60899667E-02 = H(61)
 H(25) = -0.47796406E-02 = H(60)
 H(26) = -0.29296150E-02 = H(59)
 H(27) = -0.48162206E-03 = H(58)
 H(28) = 0.30636629E-02 = H(57)
 H(29) = 0.78942142E-02 = H(56)
 H(30) = 0.11548072E-01 = H(55)
 H(31) = 0.16642496E-01 = H(54)
 H(32) = 0.22149101E-01 = H(53)
 H(33) = 0.27869627E-01 = H(52)
 H(34) = 0.33657551E-01 = H(51)
 H(35) = 0.39363459E-01 = H(50)
 H(36) = 0.44846222E-01 = H(49)
 H(37) = 0.49958289E-01 = H(48)
 H(38) = 0.54564103E-01 = H(47)
 H(39) = 0.58528915E-01 = H(46)
 H(40) = 0.61724737E-01 = H(45)
 H(41) = 0.63987255E-01 = H(44)
 H(42) = 0.64382076E-01 = H(43)

	BAND 1	BAND 2	BAND 3	BAND 4
LOWER BAND EDGE	0.0	0.056249999	0.127677977	0.199106991
UPPER BAND EDGE	0.015178590	0.006607210	0.150035597	0.229463995
DESIRED VALUE	1.00000000	0.0	0.0	0.0
WEIGHTING	1.00000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000
DEVIATION	0.005939238	0.000118785	0.000118785	0.000118785
ATTENUATION DB	-44.5253754	-78.5047913	-78.5047913	-78.5047913

	BAND 5	BAND 6	BAND 7	BAND 8
LOWER BAND EDGE	0.270536005	0.341964006	0.413397014	0.484821022
UPPER BAND EDGE	0.300893009	0.372321010	0.443750024	0.500000000
DESIRED VALUE	0.0	0.0	0.0	0.0
WEIGHTING	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000
DEVIATION	0.000118785	0.000118785	0.000118785	0.000118785
ATTENUATION DB	-78.5047913	-78.5047913	-78.5047913	-78.5047913

Таблица 7.39

RESPONSE LENGTH = 46

***** IMPULSE RESPONSE *****

H(1) = 0.50796894E-03 = H(46)
 H(2) = 0.42066909E-03 = H(45)
 H(3) = -0.15705507E-02 = H(44)
 H(4) = -0.29075558E-02 = H(43)
 H(5) = 0.32557268E-03 = H(42)
 H(6) = 0.39434619E-02 = H(41)
 H(7) = -0.26806723E-03 = H(40)
 H(8) = -0.66645553E-02 = H(39)
 H(9) = -0.84405951E-03 = H(38)
 H(10) = 0.10078181E-01 = H(37)
 H(11) = 0.27101645E-02 = H(36)
 H(12) = -0.14720429E-01 = H(35)
 H(13) = -0.59145801E-02 = H(34)
 H(14) = 0.20937234E-01 = H(33)

H(15) = 0.11154700E-01 = H(32)
 H(16) = -0.29650077E-01 = H(31)
 H(17) = -0.19980609E-01 = H(30)
 H(18) = 0.43141469E-01 = H(29)
 H(19) = 0.36538005E-01 = H(28)
 H(20) = -0.69167614E-01 = H(27)
 H(21) = -0.78188300E-01 = H(26)
 H(22) = 0.15748203E+00 = H(25)
 H(23) = 0.44036251E+00 = H(24)

	BAND 1	BAND 2	BAND
LOWER BAND EDGE	0.0	0.287500024	
UPPER BAND EDGE	0.212499976	0.500000000	
DESIRED VALUE	1.00000000	0.0	
WEIGHTING	1.00000000	33.0000000	
DEVIATION	0.00454860	0.000137039	
ATTENUATION DB	-46.8422852	-77.2125549	

Таблица 7.40

RESPONSE LENGTH = 12

***** IMPULSE RESPONSE *****

H(1) = 0.56107417E-02 = H(12)
 H(2) = -0.35361307E-02 = H(11)
 H(3) = -0.38353920E-01 = H(10)
 H(4) = -0.41065052E-01 = H(9)
 H(5) = 0.15074360E+00 = H(8)
 H(6) = 0.41787100E+00 = H(7)

	BAND 1	BAND 2	BAND
LOWER BAND EDGE	0.0	0.393750012	
UPPER BAND EDGE	0.106249988	0.500000000	
DESIRED VALUE	1.00000000	0.0	
WEIGHTING	1.00000000	33.0000000	
DEVIATION	0.003314852	0.000100450	
ATTENUATION DB	-49.5906982	-79.9609833	

Таблица 7.41

RESPONSE LENGTH = 20

***** IMPULSE RESPONSE *****

H(1) = -0.94028041E-02 = H(20)
 H(2) = 0.49263090E-02 = H(19)
 H(3) = -0.19364983E-01 = H(18)
 H(4) = -0.30722767E-02 = H(17)
 H(5) = 0.97438693E-04 = H(16)
 H(6) = -0.39059429E-01 = H(15)
 H(7) = 0.54989964E-01 = H(14)
 H(8) = -0.31812027E-01 = H(13)
 H(9) = 0.56963563E-01 = H(12)
 H(10) = 0.02095206E-01 = H(11)
 H(11) = 0.50220490E-02 = H(10)
 H(12) = 0.20555270E+00 = H(9)
 H(13) = 0.34281835E-01 = H(8)
 H(14) = 0.16022402E+00 = H(7)

	BAND 1	BAND 2	BAND 3	BAND 4
LOWER BAND EDGE	0.0	0.127678990	0.270536005	0.484021975
UPPER BAND EDGE	0.015178398	0.158048907	0.300893009	0.500000000
DESIRED VALUE	1.00000000	0.0	0.0	0.0
WEIGHTING	1.00000000	33.0000000	33.0000000	33.0000000
DEVIATION	0.001347625	0.000040037	0.000040037	0.000040037
ATTENUATION DB	-57.4086151	-87.7786849	-87.7786849	-87.7786849

спектров уменьшению частоты дискретизации предшествует, как правило, фильтрация децимируемого сигнала $x(nT)$.

Схема, поясняющая принцип децимации сигнала $x(nT)$ с коэффициентом децимации m (m — целое), показана на рис. 7.27,а. Предполагается, что спектр входного сигнала занимает полосу нормированных частот $\omega \in [0; 0,5]$. Задачей схемы является уменьшение частоты дискретизации сигнала в m раз с сохранением спектра, расположенного в полосе $[0, \omega_{max}]$.

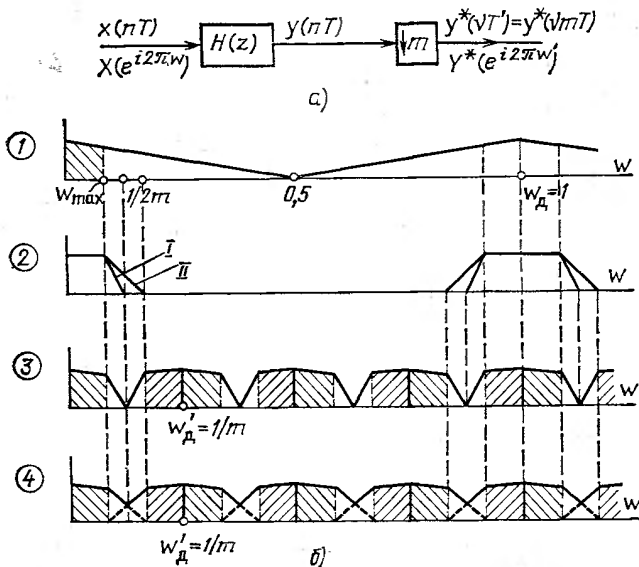


Рис. 7.27

Коэффициент децимации m ограничивается сверху условием

$$\omega_{max} < 1/(2m). \quad (7.27)$$

На рис. 7.27,б (позиция 1) условно показан модуль спектра входного сигнала. Заштрихованная область соответствует части спектра, подлежащей выделению.

Принцип работы схемы. Рассматриваемая схема представляет собой ПНДС (см. 2.5.6). Входной сигнал $x(nT)$ обрабатывается фильтром, назначение которого состоит в подавлении составляющих спектра в частотных диапазонах $\left[l \frac{1}{2m}, (l+1) \frac{1}{2m} \right]$ ($l=1, 2, \dots, m-1$), которые при последующем уменьшении частоты дискретизации в m раз попадут в частотный диапазон $[0, 1/(2m)]$. Идеализированная АЧХ фильтра нижних частот ПНДС должна удовлетворять требованиям

$$A(\omega) = |H(e^{i2\pi\omega})| = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in [0, \omega_{max}]; \\ 0 & \text{при } \omega \in [\Theta, 0,5], \end{cases} \quad (7.28)$$

где $\omega_{max} < \Theta \leq 1/(2m) + \omega_{max}$; $\Theta = \omega_{г.з}$ — граничная частота полосы задерживания фильтра. Амплитудно-частотная характеристика фильтра показана на рис.

7.27,б (позиция 2) для двух случаев: I— $\Theta=1/(2m)$; II— $\Theta=1/(2m)+\omega_{max}$ ($0,1 < \omega_{max} < 0,125$; $m=4$).

Спектр $Y^*(e^{i2\pi w'}) = Y^*(e^{i2\pi m w})$ выходного сигнала схемы в основной полосе частот $|w'| \in [0; 0,5]$, что соответствует частотному диапазону $|w| \in [0; 1/(2m)]$, определяется (2.53). В полосе частот $|w| \in [0, \omega_{max}]$ с учетом (7.28) он равен спектру исходного сигнала, а в полосе $|w| \in [\omega_{max}, 1/(2m)]$ — либо спектру исходного сигнала, измененному в соответствии с АЧХ фильтра (при $\Theta \leq 1/(2m)$), либо сумме двух составляющих

$$Y^*(e^{i2\pi m w}) = \frac{1}{m} \left\{ X(e^{i2\pi w}) H(e^{i2\pi w}) + X(e^{i2\pi(\omega+1/m)}) H(e^{i2\pi(\omega+1/m)}) \right\}$$

(при $1/(2m) \leq \Theta \leq 1/(2m) + \omega_{max}$). На рис. 7.27,б (позиции 3 и 4) условно изображен модуль спектра выходного сигнала в случаях $\Theta=1/(2m)$ и $\Theta=1/(2m) + \omega_{max}$ соответственно ($m=4$).

В реальных условиях, используемых в ПНДС, амплитудно-частотная характеристика аппроксимирует (7.28) с определенной степенью точности. В полосе пропускания АЧХ имеет неравномерность $\Delta A_{\text{п}}$, а в полосе задерживания — отклонение от нуля $\Delta A_{\text{з}}$. При уменьшении частоты дискретизации происходит наложение спектров. Спектр выходного сигнала определяется выражением

$$Y^*(e^{i2\pi m w}) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} X(e^{i2\pi(\omega+l/m)}) H(e^{i2\pi(\omega+l/m)}), \quad |w| \in [0, 1/(2m)]. \quad (7.29)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения при $l=0$ и $|w| \in [0, \omega_{max}]$ можно рассматривать как спектр полезного сигнала, равный спектру входного сигнала в данной полосе, измененного в соответствии с АЧХ фильтра в полосе пропускания. Слагаемые при $l=1, 2, \dots, m-1$ и $|w| \in [0, \omega_{max}]$ следует рассматривать как спектры помех, искажающие спектр полезного сигнала в полосе $[0, \omega_{max}]$ (см. пример 2.20, где в качестве АЧХ фильтра ПНДС следует рассматривать АЧХ эквивалентного фильтра МНДС).

Выбор значений $\Delta A_{\text{п}}$ и $\Delta A_{\text{з}}$ при решении аппроксимационной задачи основывается на требованиях конкретной проектируемой системы и аналогичен выбору соответствующих значений в ПВДС (см. 7.3.4).

Требования к АЧХ, определяемой (7.28), могут быть заметно облегчены, если $\omega_{max} \ll 1/(2m)$:

$$A(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } w \in [0, \omega_{max}]; \\ 0 & \text{при } w \in \left[r \frac{1}{m} - \omega_{max}; r \frac{1}{m} + \omega_{max} \right]. \end{cases} \quad (7.30)$$

Условия (7.30) аналогичны условиям (7.14) при синтезе фильтров ПВДС (см. 7.3.4 и рис. 7.13).

7.4.2. Особенности использования НФ и РФ при децимации

Нерекурсивный фильтр, используемый в ПНДС, частотная характеристика которого определяется «высокой» (входной) частотой дискретизации, работает практически на «низкой» (выходной) частоте, поскольку нет необходимости рас-

считать $m-1$ отсчет выходной последовательности $y(nT)$ фильтра (см. рис. 7.27,а), которые будут отброшены КЧД.

Рекурсивный фильтр в ПНДС работает на «высокой» (входной) частоте дискретизации, поскольку при вычислении любого отсчета последовательности $y(nT)$ необходимо иметь значения всех предыдущих отсчетов (и тех, которые далее будут отброшены КЧД). Использование рекурсивного фильтра может оказаться более предпочтительным при минимизации емкости оперативной памяти или объема оборудования.

Число операций умножения в единицу времени для рекурсивного и нерекурсивного фильтров соответственно равно

$$V_p = (N_p + M_p - 1) f_d \quad \text{и} \quad V_n = N_n \frac{f_d}{m},$$

где N_p и M_p — число коэффициентов в числителе и знаменателе передаточной функции рекурсивного фильтра; N_n — число коэффициентов передаточной функции нерекурсивного фильтра; f_d — частота дискретизации входного сигнала.

Применение нерекурсивного фильтра оказывается предпочтительным (по критерию минимума операций умножения в единицу времени) при условии $N_n < m(N_p + M_p - 1)$.

При требовании сохранения фазовых соотношений между составляющими спектра входного сигнала в полосе частот $[0, \omega_{max}]$ в ПНДС целесообразно использовать нерекурсивный фильтр с линейной фазовой характеристикой.

7.4.3. Структуры ПНДС при децимации сигнала

Простейшая нисходящая дискретная система (см. рис. 7.27,а), использующая нерекурсивный фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l}, \quad (7.31)$$

описывается уравнением, получаемым из (2.54) с учетом (7.31):

$$y^*(vT') = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x(vmT - jT), \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (7.32)$$

Структура I. Уравнению (7.32) соответствует схема, в которой множители работают на выходной частоте дискретизации (рис. 7.28).

Структура II (полифазная). Структура основана на преобразовании уравнений (2.54) и (2.55) и представлении ПНДС в виде эквивалентной схемы (см. 2.5.6). Структура содержит m параллельных ветвей обработки, в каждой из которых находится фильтр, работающий на выходной частоте дискретизации (см. рис. 2.28,б). Фильтр-прототип ПНДС для расчета параметров фильтров в ЭС ПНДС является фильтром нижних частот, АЧХ которого удовлетворяет условию (7.28) или (7.30).

При использовании нерекурсивных фильтров порядок N передаточной функции фильтра-прототипа целесообразно выбирать из условия $N = rm$ (r — целое число). При этом все фильтры ветвей ЭС ПНДС будут содержать равное число коэффициентов.

7.4.4. Однородный и треугольный фильтры при децимации

Однородный фильтр, используемый в ПНДС, имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l}. \quad (7.33)$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра с передаточной функцией (7.33) определяется формулой

$$A(\omega) = |H(e^{j2\pi\omega})| = \frac{1}{N} \frac{\sin \pi N \omega}{\sin \pi \omega} \quad (7.34)$$

и приведена на рис. 7.29 (кривая 1) для $N=8$.

Порядок N передаточной функции однородного фильтра и коэффициент децимации m целесообразно (но не обязательно) выбирать из условия

$$N = km, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7.35)$$

поскольку однородный фильтр обеспечивает существенное подавление лишь в незначительном удалении от частот $\omega = r(1/N)$, $r = 1, 2, \dots$

После уменьшения частоты дискретизации при выполнении (7.35) в полосу $[0, \omega_{max}]$ согласно (2.36) и (7.29) попадают инверсные составляющие спектра

исходного сигнала частотных диапазонов $[lk(1/N) - \omega_{max}, lk(1/N)]$ и составляющие частотных диапазонов $[lk(1/N), lk(1/N) + \omega_{max}]$, $l = 1, 2, \dots$, измененные в соответствии с АЧХ фильт-

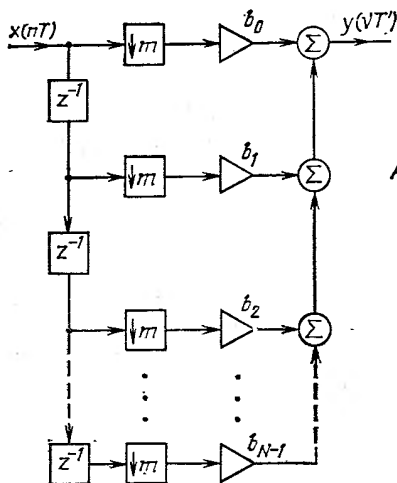


Рис. 7.28

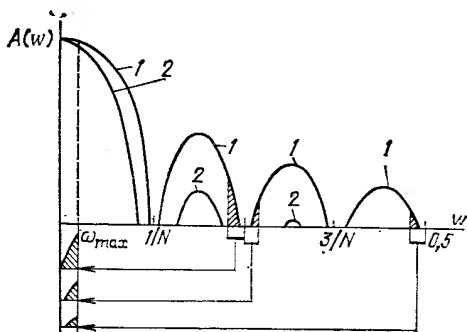


Рис. 7.29

ра. Наименее подавленными являются составляющие на границах диапазонов, т. е. на частотах $lk(1/N) \pm \omega_{max}$.

Пример 7.6. Рассмотрим ПНДС с однородным фильтром (7.33) при $N=8$. В табл. 7.42 приведены значения ΔA_{Π} и ΔA_{Σ} на границах частотных диапазонов $r(1/N) \pm \omega_{max}$ ($r = 1, 2, 3, 4$).

Если $m=N=8$ ($k=1$), в диапазон $[0, \omega_{max}]$ после уменьшения частоты дискретизации попадают составляющие всех диапазонов $r(1/N) \pm \omega_{max}$ (для диапазонов $[r(1/N) - \omega_{max}, r(1/N)]$ — инверсные составляющие).

Если $m=4$ ($k=2$), в диапазон $[0, \omega_{max}]$ попадают составляющие диапазонов $r(1/N) \pm \omega_{max}$ только для $r=2$ и 4 ($r=lk$), причем для диапазонов $[2/N - \omega_{max}]$ и $[0,5 - \omega_{max}]$ — инверсные составляющие.

На рис. 7.29 условно показаны модули составляющих спектров, попадающих в диапазон $[0, \omega_{max}]$ при $m=4$.

Передаточной функции (7.33) эквивалентна передаточная функция рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}. \quad (7.36)$$

Структура реализации ПНДС (см. рис. 7.27,а) при использовании однородного фильтра (7.33) с $N=m$ приведена на рис. 7.30. В схеме N отсчетов входного сигнала $x(nT)$ складываются в накапливающем сумматоре (состоящем из комбинационного сумматора Σ и регистра RG).

На N -м такте содержимое регистра считывается на выход, а регистр обнуляется.

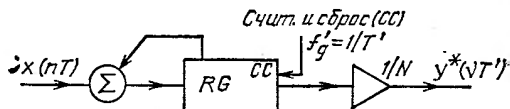


Рис. 7.30

Триангулярный фильтр, используемый в ПНДС, имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} \right)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{2N-2} b_l z^{-l}. \quad (7.37)$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра (7.37) определяется формулой

$$A(\omega) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin \pi N \omega}{\sin \pi \omega} \right)^2 \quad (7.38)$$

и приведена на рис. 7.29 (кривая 2) для $N=8$.

Коэффициент m и порядок фильтра N целесообразно выбирать из условия (7.35).

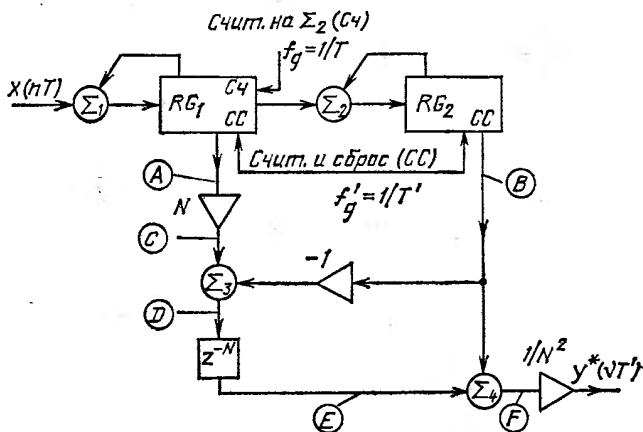


Рис. 7.31

w_{max}	Тип фильтра	ΔA_{II} , дБ	max ΔA_{Σ} , дБ							
			$r=1$		$r=2$		$r=3$		$r=4$	
			$r \frac{1}{N} - w_{max}$	$r \frac{1}{N} + w_{max}$	$r \frac{1}{N} - w_{max}$	$r \frac{1}{N} + w_{max}$	$r \frac{1}{N} - w_{max}$	$r \frac{1}{N} + w_{max}$	$r \frac{1}{N} - w_{max}$	$r \frac{1}{N} + w_{max}$
0,0125	Однородный	-0,325	-43,8	-47,7	-57,3	-58,9	-63,1	-63,8	-65,0	
	Триангулярный	-0,650	-87,7	-95,3	-114,6	-117,8	-126,3	-127,6	-130,1	
0,025	Однородный	-1,313	-28,7	-36,4	-43,6	-46,7	-49,9	-51,2	-52,1	
	Триангулярный	-2,626	-57,5	-72,8	-87,2	-93,4	-99,8	-102,4	-104,3	
0,0375	Однородный	-3,007	-19,7	-31,5	-36,2	-41,0	-43,1	-45,1	-45,7	
	Триангулярный	-6,015	-39,5	-63,0	-72,5	-82,0	-86,2	-90,1	-91,4	
0,040	Однородный	-5,490	-13,5	-29,6	-31,9	-38,3	-39,4	-42,0	-42,3	
	Триангулярный	-10,980	-27,0	-59,2	-63,9	-76,7	-78,8	-84,0	-84,7	

В табл. 7.42 приведены значения ΔA_{π} и A_{Σ} на границах частотных диапазонов $r \frac{1}{N} \pm \omega_{max}$, $r=1, 2, 3, 4$, для $N=8$.

Передаточной функции (7.37) эквивалентна передаточная функция рекурсивного фильтра

$$H(z) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right)^2. \quad (7.39)$$

Структура реализации МНДС (см. рис. 7.27,а) при использовании триангулярного фильтра с $N=m$ приведена на рис. 7.31 [7.1].

Пример 7.7. Рассмотрим работу схемы (см. рис. 7.31) при $N=m=4$. Передаточная функция триангулярного фильтра (7.37) содержит семь коэффициентов: {1, 2, 3, 4, 3, 2, 1}. Перед тактами $n=kN+1$, $k=0, 1, 2, \dots$, содержимое всех регистров схемы обнулено (считывание содержимого регистров RG_1 и RG_2 и сброс осуществляются на тактах $n=kN$). В табл. 7.43 приведены содержимое регистров RG_1 и RG_2 и значения сигналов в точках $A-F$ схемы при входном сигнале $x(nT) = x_n$.

7.4.5. Простейшая НДС с оптимальными фильтрами

Простейшая нисходящая дискретная система с однородным (триангулярным) фильтром часто вносит значительные искажения в спектр децимированного сигнала в полосе $[0, \omega_{max}]$ из-за относительно большой неравномерности АЧХ фильтра в полосе пропускания и малого подавления в полосе задерживания [особенно при ω_{max} , близкой к $1/(2m)$]. Наилучшие результаты при децимации (так же, как и при интерполяции) достигаются при использовании в ПНДС фильтров, оптимальным образом удовлетворяющих условиям (7.30).

Пример 7.8. Рассмотрим ПНДС, задачей которой является уменьшение частоты дискретизации $f_{\pi}=112$ кГц в $m=14$ раз (до $f'_{\pi}=8$ кГц) при заданных значениях: $\Delta A_{\pi} \approx \pm 0,023 (\pm 0,2$ дБ), определяющей искажения составляющих спектра в выделяемой полосе от 0 до 1,7 кГц ($\omega_{max}=0,0151785$), и $\Delta A_{\Sigma} = -0,03162$ (-50 дБ), определяющей величину составляющих спектров, появившихся после уменьшения частоты дискретизации в полосе $[0, \omega_{max}]$.

При решении аппроксимационной задачи требования к АЧХ фильтра должны быть заданы на основе (7.30). Эти требования совпадают с требованиями к фильтру ПВДС, предназначенному для увеличения частоты дискретизации $f'_{\pi}=8$ кГц сигнала, спектр которого занимает полосу частот от 0 до 1,7 кГц, в $m=14$ раз, т. е. до частоты $f_{\pi}=112$ кГц (см. пример 7.4). Поэтому оптимальный фильтр ПНДС будет таким же, как и фильтр ПВДС. Значения коэффициентов передаточной функции фильтра приведены в табл. 7.33.

Структура ЭС ПНДС (полифазная). Простейшая НДС может быть представлена в виде структуры (см. 2.5.6, 7.4.3 и рис. 2.28,б), содержащей $m=14$ параллельных ветвей обработки сигнала. Фильтр k -й ветви ЭС ПНДС есть фильтр такой же ветви ЭС ПВДС (см. пример 7.4).

7.4.6. Перенос спектра при полосовой фильтрации с уменьшением частоты дискретизации

Рассматривается уменьшение частоты дискретизации в m раз с помощью ПНДС (см. рис. 7.27,а), содержащей полосовой фильтр с передаточной функцией $H(z)$. Предполагается, что спектр $X(e^{i2\pi\nu})$ входного сигнала $x(nT)$ можно разбить на m составляющих $X_l(e^{i2\pi\nu})$, $l=0, 1, \dots, m-1$, каждая из которых занимает часть частотного диапазона $|\omega| \in \left[l \frac{1}{2m}, (l+1) \frac{1}{2m} \right]$:

$$X(e^{i2\pi w}) = \sum_{l=0}^{m-1} X_l(e^{i2\pi w}) = \sum_{l=0}^{m-1} \{X_l^+(e^{i2\pi w}) + X_l^-(e^{i2\pi w})\}, \quad (7.40)$$

где

$$X_l(e^{i2\pi w}) = \begin{cases} X(e^{i2\pi w}) & \text{при } w \in [w_1^l, w_2^l]; \\ 0 & \text{при } w \notin [w_1^l, w_2^l]; \end{cases}$$

$X^+_l(\cdot)$ и $X^-_l(\cdot)$ соответствуют верхней ($w > 0$) и нижней ($w < 0$) полосам l -й составляющей спектра; $w_1^l = l \frac{1}{2m} + w_1$; $w_2^l = l \frac{1}{2m} + w_2$, где w_1 и w_2 — фиксированные значения.

Полосовой фильтр ПНДС выделяет l -ю составляющую спектра $X_l(e^{i2\pi w})$. Амплитудно-частотная характеристика фильтра должна удовлетворять требованиям

$$A(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } w \in \left[l \frac{1}{2m} + w_1, l \frac{1}{2m} + w_2 \right]; \\ 0 & \text{при } w \notin \left[(l-1) \frac{1}{2m} + w_2, (l+1) \frac{1}{2m} + w_1 \right]. \end{cases} \quad (7.41)$$

Перенос спектра выделенного сигнала в область нижних частот $[0; 1/(2m)]$ осуществляется при уменьшении частоты дискретизации с помощью КЧД. При этом в полосе $[0; 1/(2m)]$ располагается либо прямой спектр $X^+_l(e^{i2\pi w})$ l -й составляющей спектра входного сигнала (при $l=0, 2, 4, \dots$), либо инверсный спектр (при $l=1, 3, 5, \dots$) (см. 2.5.3).

Амплитудно-частотная характеристика полосового фильтра ПНДС должна удовлетворять практически тем же требованиям, что и АЧХ полосового фильтра

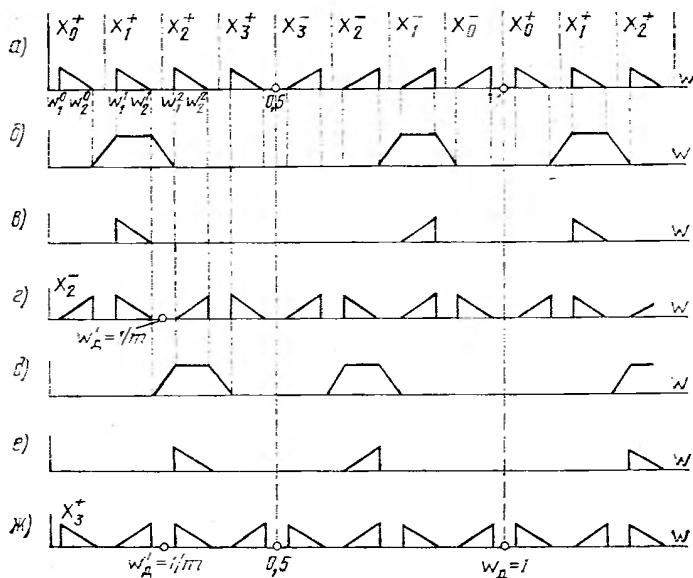


Рис. 7.32

Номер такта n	RG_1	RG_2	A	B	C	D	E	F
9	x_9	x_9						
10	$x_9 + x_{10}$	$2x_9 + x_{10}$						
11	$x_9 + x_{10} + x_{11}$	$3x_9 + 2x_{10} + x_{11}$						
12	$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$	$4x_9 + 3x_{10} + 2x_{11} + x_{12}$	$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$	$4x_9 + 3x_{10} + 2x_{11} + x_{12}$	$4(x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12})$	$x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12}$	$x_9 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 3x_{10} + 2x_{11} + x_{12}$	
13	x_{13}	x_{13}						
14	$x_{13} + x_{14}$	$2x_{13} + x_{14}$						
15	$x_{13} + x_{14} + x_{15}$	$3x_{13} + 2x_{14} + x_{15}$						
16	$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$	$4x_{13} + 3x_{14} + 2x_{15} + x_{16}$	$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$	$4x_{13} + 3x_{14} + 2x_{15} + x_{16}$	$4(x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16})$	$x_{14} + 2x_{15} + 3x_{16}$	$x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + 2x_{15} + x_{16}$	

ПВДС для интерполяции сигнала с переносом спектра в область частот $\left[\frac{l}{2m}, (l+1) \frac{1}{2m} \right]$ [см. (7.41) и (7.25)]. Отличие состоит в наличии постоянного множителя, равного m , у фильтра ПВДС и в границах полос пропускания и задерживания (при $\omega_1 \neq \omega_2$).

Пример 7.9. Рассматривается ПНДС (см. рис. 7.27,а) при децимации в $m=4$ раза сигнала, спектр которого можно представить в виде (7.40), т. е. разбить на четыре составляющих, каждая из которых занимает часть частотного диапазона $\left[l \frac{1}{2m}, (l+1) \frac{1}{2m} \right]$, $l=0, 1, 2, 3$.

Модуль спектра входного сигнала показан на рис. 7.32,а. Составляющая спектра $X_1(e^{i2\pi\omega})$ занимает часть частотного диапазона $|\omega| \in [1/2m, 2 \cdot 1/2m]$, располагаясь в полосе частот $|\omega| \in [1/2m + \omega_1, 1/2m + \omega_2]$. Составляющая $X_2(e^{i2\pi\omega})$ занимает часть частотного диапазона $[2 \cdot 1/2m, 3 \cdot 1/2m]$ и т. д.

Сигнал $x(nT)$ можно рассматривать как групповой четырехканальный сигнал с частотным разделением каналов.

Если АЧХ идеализированного фильтра удовлетворяет условиям (7.41), выходной сигнал $y(nT)$ фильтра (входной сигнал КЧД) будет иметь спектр, содержащий гармонические составляющие с амплитудой, отличной от нуля, только в одном из диапазонов частот $\left[l \frac{1}{2m}, (l+1) \frac{1}{2m} \right]$ и операция децимации, выполняемая КЧД, не сопровождается наложением спектров.

На рис. 7.32, б—ж последовательно изображены АЧХ полосового фильтра, модуль спектра сигналов $y(nT)$ на выходе фильтра и $y^*(vT')$ на выходе КЧД при выделении составляющих $X_1(e^{i2\pi\omega})$ (при $l=1$) и $X_2(e^{i2\pi\omega})$ (при $l=2$) соответственно. Из рис. 7.32, г, ж видно, что в низкочастотном диапазоне $[0; 1/(2m)]$ после децимации располагаются инверсный $X^{-1}(\cdot)$ и прямой $X_2(\cdot)$ спектры.

7.4.7. Перенос спектра при децимации комплексного сигнала

Рассматривается задача уменьшения частоты дискретизации вещественного сигнала $x(nT)$ в m раз с помощью ПНДС, содержащей фильтр нижних частот. Схема, осуществляющая децимацию сигнала с переносом выделенной части спектра в низкочастотную область, показана на рис. 7.33,а. Она аналогична схеме интерполяции (см. рис. 7.23,а).

Принцип работы схемы. Входной сигнал $x(nT)$ со спектром (7.40) умножается на дискретную экспоненту $e^{i2\pi\gamma l^n}$ (о выборе значения γ см. 7.2.1). При $\gamma_1 = -(\omega_1' + \omega_1'')/2$ верхняя боковая полоса составляющей спектра $X^{+1}_l(e^{i2\pi\omega})$ занимает частотный диапазон $[-(\omega_2 - \omega_1)/2, (\omega_2 - \omega_1)/2]$. Далее l -я составляющая выделяется ФНЧ и осуществляется децимация выходного сигнала фильтра $p(nT)$. Последующее умножение сигнала $p^*(vT')$ на дискретную экспоненту $e^{i2\pi\beta v}$, где $m(\omega_2 - \omega_1)/2 \leq \beta \leq 0,5 - m(\omega_2 - \omega_1)/2$, осуществляет сдвиг составляющей $X^{+1}_l(\cdot)$ в произвольную область диапазона $[0; 1/(2m)]$. Вещественный сигнал $y^*(vT')$ с требуемым спектром получается выделением вещественной части сигнала $y(vT')$ с помощью элемента Re.

На рис. 7.33,б для $m=4$ показаны модули спектра сигналов $x(nT)$ (позиция 1) и $x(nT)$ (позиция 2), АЧХ ФНЧ (позиция 3), модули спектров сигналов $p(nT)$ (позиция 4), $p^*(vT')$ (позиция 5), $y(vT')$ (позиция 6) и $y^*(vT')$ (позиция 7).

7.4.8. Децимация сигнала с помощью МНДС

При уменьшении частоты дискретизации сигнала в m раз (если число m разлагается на простые множители) можно использовать многократные НДС (см.

2.5.7). При коэффициенте децимации $m = \prod_{k=1}^p m_k$, где каждый множитель m_k — целое число, МНДС состоит из p подсистем, причем частота дискретизации на выходе k -й, $k=1, 2, \dots, p$ подсистемы, в m_k раз ниже частоты дискретизации на ее входе (см. рис. 2.33).

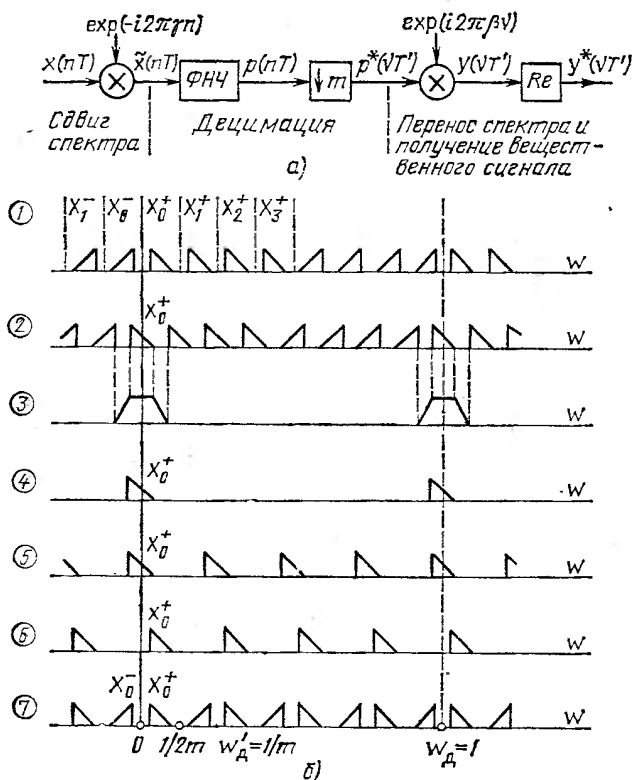


Рис. 7.33

Выбор структуры МНДС зависит от конкретного приложения. Принципы определения структуры МНДС и МВДС аналогичны (см. 7.3.10). Основными рекомендациями при синтезе МНДС, состоящей из p подсистем, являются следующие [2.8]:

коэффициенты децимации m_k , $k=1, 2, \dots, p$, должны удовлетворять условию $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_p$;

допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания фильтра k -й подсистемы $\Delta A_{\text{п}} = \Delta A_{\text{п}}/p$, где $\Delta A_{\text{п}}$ — допустимое искажение спектра децимируемого сигнала;

допустимое отклонение от нуля АЧХ в полосах задерживания фильтра k -й подсистемы $\Delta A_{\text{з}}^k = \Delta A_{\text{з}}$, где $\Delta A_{\text{з}}$ — допустимое подавление составляющих спек-

ра децимируемого сигнала, вносимых при децимации в низкочастотный выделяемый диапазон;

АЧХ фильтров каждой подсистемы (как правило, кончая предпоследней) имеют «безразличные» полосы (см. 7.4.1), в которых величину ΔA_3 выдерживать не требуется;

каждая подсистема строится по любой из структур ПНДС.

Пример 7.10. Рассмотрим построение схемы децимации сигнала в $m=28$ раз (с частоты $f_d=112$ кГц до $f'_d=4$ кГц) с сохранением спектра, расположенного в диапазоне от 0 до 1,7 кГц ($\omega_{max}=0,0151785$). Требования к спектру децимированного сигнала: составляющие исходного спектра в полосе $[0, \omega_{max}]$ должны быть искажены не более чем на $\pm 0,13$ дБ ($\Delta A_{\text{д}} \approx \pm 0,015$); составляющие в полосах, попадающих при децимации в полосу $[0, \omega_{max}]$, должны быть подавлены не менее чем на $-76,5$ дБ ($\Delta A_{\text{в}}=0,00015$).

Возможны четыре варианта построения схемы, соответствующие различным разложениям коэффициента децимации m на множители: $m=28=7 \times 4=14 \times 2=7 \times 2 \times 2$. Граничные частоты полос пропускания ($\omega_{\text{г.п}}$) и задерживания ($\omega_{\text{г.з.1}}, \omega_{\text{г.з.2}}$) фильтров подсистем, а также значения $\Delta A_{\text{д}}$ и $\Delta A_{\text{в}}$ для данных вариантов оказываются такими же, как для соответствующих вариантов построения схемы интерполяции, рассмотренной в примере 7.5. Следовательно, при решении данной задачи значения основных параметров подсистем децимации можно взять из табл. 7.33, а коэффициентов b_i передаточных функций нерекурсивных фильтров подсистем для различных вариантов — из табл. 7.34—7.41.

Число операций умножения и объем оперативной памяти оказываются минимальными при построении схемы в виде трехкратной системы с $m_1=7$, $m_2=2$ и $m_3=2$.

8. ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

8.1. ЦЕЛИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ

8.1.1. Цели спектрального анализа

Основной целью спектрального анализа являются оценивание спектральной плотности мощности (СПМ) дискретизированного процесса и обнаружение присутствия в течение определенного интервала времени периодического сигнала с определенными параметрами [8.1]. Обработка дискретизированного процесса производится последовательно во времени, причем одновременно обрабатывается N отсчетов. Интервал $\theta=NT$ называют *длиной реализации*, или *интервалом наблюдения* [8.2].

Основные факторы, определяющие точность спектрального анализа: интервал наблюдения θ и априорная информация о дискретизированном процессе.

8.1.2. Классификация методов спектрального анализа

Все методы можно разбить на две группы:

методы, в той или иной форме реализующие Фурье-анализ дискретизированного процесса;

методы, в которых априорно выбирается линейная модель, представляющая собой дискретный фильтр, и определяются параметры этой модели, соответствующие анализируемому дискретизированному процессу.

К первой группе относятся методы Блекмана — Тьюки (корреляционный метод) и периодограмм [1.6], ко второй группе — методы оценивания СПМ на основе авторегрессии и скользящего среднего, Писаренко и ряд других [6.8].

8.2. МЕТОД ПЕРИОДОГРАММ

8.2.1. Алгоритм метода периодограмм

Пусть заданы интервал дискретизации анализируемого процесса T и необходимая разрешающая способность Δf спектрального анализа. Тогда интервал наблюдения Θ и число N обрабатываемых на этом интервале отсчетов определяются как [8.1]:

$$\Theta = K_0 / \Delta f; \quad N = \text{int} [\Theta / T], \quad (8.1)$$

где K_0 — коэффициент, определяемый видом оконной функции [см. формулу (8.10)].

Алгоритм метода периодограмм состоит из двух этапов:

обработки сигнала на интервале наблюдения Θ ;

усреднения результатов, полученных для нескольких интервалов наблюдения с целью уменьшения дисперсии оценки.

Первый этап включает следующие шаги:

1. Определение величины N с помощью (8.1): если $N \neq 2^m$, то последовательность отсчетов дополняется нулями так, чтобы выполнялось равенство $N = 2^m$, — это облегчает применение стандартной процедуры БПФ.

2. Выбор оконной функции p_n (см. 8.2.3) и вычисление по алгоритму БПФ, сглаженной с помощью оконной функции, последовательности $x_r(nT)$ на r -м интервале наблюдения Θ :

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(nT) p_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.2)$$

3. Расчет величины $I_r(k)$, называемой периодограммой:

$$I_r(k) = |X_r(k)|^2 / \sum_{n=0}^{N-1} p_n. \quad (8.3)$$

4. Если в задаче обнаружения принятие решения по величинам $I_r(k)$ оказывается невозможным, следует повторить шаги 2 и 3, дополнив последовательность отсчетов нулями и увеличив N в 2, 4 или 8 раз (это позволяет устранить неопределенности в периодограммах [6.8]). В этом случае вместо формулы (8.2) на втором шаге необходимо пользоваться модифицированной формулой

$$X_r^s(k) = \sum_{n=0}^{N \cdot 2^l - 1} x_r'(nT) p_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N \cdot 2^l}}, \quad k = 0, 1, \dots, N \cdot 2^l, \quad (8.4)$$

где

$$x_r'(nT) = \begin{cases} x_r(nT) & \text{при } 0 \leq n \leq N-1; \\ 0 & \text{при } n > N-1. \end{cases}$$

Из сравнения (8.2) и (8.4) видно, что $X_r(k) = X_r^s(s)$, где $s = k \cdot 2^l$, т. е. добавление нулевых отсчетов не изменяет основных составляющих спектра $X_r(k)$, определяемого (8.3), лишь появляются промежуточные составляющие.

Второй этап включает следующие шаги:

1. Выбор коэффициента D перекрытия соседних интервалов наблюдения; как правило, $D=0,5$ (рис. 8.1,а) или $D=0,75$ (рис. 8.1,б).

2. Расчет числа V интервалов наблюдения

$$V = E_{\pi} [(L - DN)/(N - DN)]^*,$$

где L — общее количество отсчетов анализируемого процесса, доступное обработке.

3. Расчет усредненной оценки СПМ:

$$S_{x(k)} = \frac{1}{V} \sum_{r=1}^V I_r(k). \quad (8.5)$$

4. Расчет коэффициента M , показывающего, во сколько раз уменьшается дисперсия оценки СПМ за счет усреднения по отдельным интервалам наблюдения:

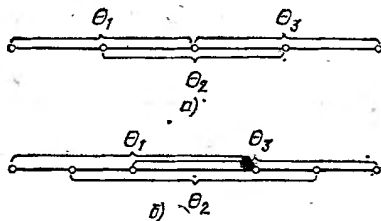


Рис. 8.1

$$M = \frac{1}{\frac{1}{V} [1 + 2c^2(0,5)] - \frac{2}{V^2} c^2(0,5)} \quad (\text{для } D=0,5);$$

$$M = \frac{1}{\frac{1}{V} [1 + 2c^2(0,75) + 2c^2(0,5)] - \frac{2}{V^2} [c^2(0,75) + 2c^2(0,5)]} \quad (\text{для } D=0,75).$$

Здесь величины $c(0,5)$ и $c(0,75)$ определяются видом оконной функции p_n (табл. 8.1, а также см. табл. 1 в [8.2]); общая формула для расчета M при произвольном значении p_n приведена в [1.6].

8.2.2. Основные свойства оконных функций

Умножение отсчетов анализируемого процесса на значения p_n эквивалентно свертке соответствующих спектров [см. (1.11)]. Рисунок 8.2 иллюстрирует действия оконной функции. На рисунке приняты следующие обозначения: ω — нормированная частота (условие нормировки $T=1$ с, т. е. $\omega_d = 2\pi$ с⁻¹); $|P(e^{i\omega})|$, $|X(e^{i\omega})|$ и $|X_p(e^{i\omega})|$ — модули спектров оконной функции, анализируемого сигнала и дискретного сигнала, полученного после умножения отсчетов анализируе-

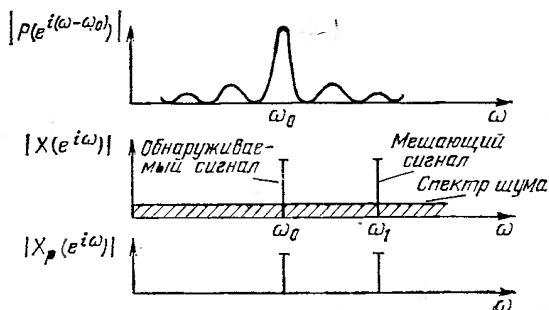


Рис. 8.2

* Символ $E_{\pi}[\]$ означает «целая часть числа, заключенного в квадратные скобки».

Таблица 8.1

Окная функция	Модуль фурье-преобразования окной функции	$\Delta F_{ш}$, бин	K_F	$c(0,5)$, %	$c(0,75)$, %	$A_{ш}$, дБ	$M_{ш}$, дБ	σ	$\Delta F_{ГФ}$, бин		V_6 , дБ/ок- тава
									$W=3$	$W=6$	
Прямоугольная $p_n=1$	$ P(e^{i\omega T}) = e^{-\frac{N-1}{2}\omega T} \times \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}$	1	1	50	75	-3,92	-13	0,12	0,89	1,21	-6
Треугольная $p_n = \begin{cases} \frac{n}{N/2} & \text{при } n=0, 1, \dots, \\ N/2; \\ \frac{N-n}{N/2} & \text{при } n=N/2, \dots, \\ N-1 \end{cases}$	$ P(e^{i\omega T}) = \frac{2}{N} \times e^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)\omega T} \times \left(\frac{\sin(N\omega T/4)}{\sin(\omega T/2)} \right)^2$	1,33	0,5	25	71,9	-1,82	-27	0,039	1,28	1,78	-12
Хэмминга $p_n = 0,54 - 0,46 \cos 2\pi n/N$	$ P(e^{i\omega T}) = 0,54 D(\omega T) + 0,23 [D(\omega T - 2\pi/N) + D(\omega T + 2\pi/N)]$, $D(\omega T) = e^{\frac{\omega T}{2}} \times \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}$	1,36	0,54	23,5	70,7	-1,78	-43	0,046	1,30	1,81	-6

Окная функция	Модуль Фурье-преобразования оконной функции	$\Delta F_{ш}$, бин	K_n	$c(0,5)$, %	$c(0,75)$, %	A_n , дБ	M_n , дБ	ρ	$\Delta F_{г.ш.}$, бин		V_0 , дБ/ок-тава
									$W=3$	$W=6$	
Кайзера — Бессели $p_n = \frac{I_0 \left[\pi \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{n}{N/2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\pi \alpha \right]}$ при $0 \leq n \leq N/2$; $p_n = \frac{I_0 \left[\pi \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{N-n}{N/2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\pi \alpha \right]}$ при $N/2 < n \leq N-1$, где $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$	$ P(e^{i\omega T}) \approx \frac{N}{I_0(\alpha\pi)} \times$ $\times \frac{\text{sh} \left[\sqrt{\alpha^2 \pi^2 - (N\omega T/2)^2} \right]}{\sqrt{\alpha^2 \pi^2 - (N\omega T/2)^2}}$	$\alpha=2$	0,49	16,9	65,7	-1,46	-46	0,049	1,43	1,99	-6
		$\alpha=2,5$	0,44	11,2	59,5	-1,20	-57	0,051	1,57	2,20	-6
		$\alpha=3$	0,40	7,4	53,9	-1,02	-69	0,053	1,71	2,39	-6
		$\alpha=3,5$	0,37	4,8	48,8	-0,89	-82	0,055	1,83	2,57	-6

мого сигнала на отсчеты оконной функции. Значения функции $|X_p(e^{i\omega})|$ показаны лишь для $\omega = \omega_0$ (частота обнаруживаемого сигнала) и $\omega = \omega_1$ (частота мешающего сигнала). Вычисляя эти значения, можно обнаружить сигнал.

Ниже отмечаются основные свойства и характеристики оконных функций, позволяющие выбрать конкретную p_n и использовать ее для обработки анализируемого сигнала:

1. Отсчеты p_n симметричны, за исключением p_0

$$p_n = p_{N-n}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (8.6)$$

Пример 8.1. Отсчеты треугольной оконной функции (см. табл. 8.1) при $N=6$ имеют значения: $p_0=0$; $p_1=p_5=1/3$; $p_2=p_4=2/3$; $p_3=1$.

2. Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции с N отсчетами $\Delta F_{шN}$ определяется в бинах как

$$\Delta F_{шN} = \frac{N \sum_{n=0}^{N-1} p_n^2}{\left[\sum_{n=0}^{N-1} p_n \right]^2}. \quad (8.7)$$

Меньшей величине $\Delta F_{шN}$ соответствует меньшее влияние мощности шума в анализируемом процессе на величину $I_r(k)$ [см. (8.3)].

Пример 8.2. Для треугольной оконной функции $N=2K$; $p_0=0$;

$$p_l = \begin{cases} l/K & \text{при } l=1, 2, \dots, K; \\ (2K-l)/K & \text{при } l=K+1, \dots, 2K-1; \end{cases}$$

$$\Delta F_{шN} = 2(2K^2 + 1)/(3K^2).$$

Как правило, $N \gg 1$ и вместо $\Delta F_{шN}$, определяемой (8.7), используют предельную эквивалентную шумовую полосу $\Delta F_{ш}$ (см. табл. 8.1), измеряемую в бинах:

$$\Delta F_{ш} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta F_{шN}. \quad (8.8)$$

Пример 8.3. Для треугольной оконной функции $\Delta F_{ш} = 1,33$.

Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции — это удвоенная ширина полосы пропускания идеального ФНЧ, у которого максимальное значение АЧХ равно максимальному значению модуля Фурье-преобразования оконной функции, а мощность шума, пропускаемая фильтром, равна мощности шума после обработки его оконной функцией (рис. 8.3). Пусть обрабатываемая последовательность представляет собой сумму гармонического сигнала с частотой $\omega_l = 2\pi/(NT)$, совпадающей с бином ДПФ, и белого шума. Тогда значение $\Delta F_{ш}$ показывает, во сколько раз уменьшается отношение сигнал-помеха после обработки входной последовательности оконной функцией.

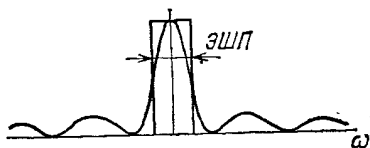


Рис. 8.3

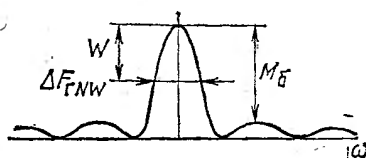


Рис. 8.4

3. Ширина главного лепестка (рис. 8.4) $\Delta F_{rN\omega}$ модуля Фурье-преобразования $|P_N(e^{i\omega})|$ оконной функции с N отсчетами, которая определяется по уровню W , дБ, относительно $\max |P_N(e^{i\omega})|$ и измеряется в бинах, $\Delta F_{rN\omega} = \omega_N N / \pi$, где ω_N — наименьший по абсолютному значению положительный корень уравнения

$$|P_N^{\omega}(e^{i\omega})| = \max |P_N(e^{i\omega})| / 10^{W/20}.$$

Пример 8.4. Для прямоугольной оконной функции при $W=3$ дБ $\Delta F_{r23} \approx 0,127$.

Ширина главного лепестка модуля Фурье-преобразования, отсчитываемая по уровню W , дБ, и измеряемая в бинах,

$$\Delta F_{rW} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\omega_N N / \pi). \quad (8.9)$$

В табл. 8.1 приведены значения ΔF_{rW} при $W=3$ дБ и $W=6$ дБ для некоторых оконных функций. Величина ΔF_{r6} характеризует разрешающую способность ДПФ с учетом выбранной оконной функции [8.2]. Можно считать (см. 8.1), что

$$K_0 = \Delta F_{r6}. \quad (8.10)$$

4. Качество оконной функции [8.2] зависит, в частности, от значения δ :

$$\delta = (\Delta F_{r3} - \Delta F_{r3}) / \Delta F_{r3}. \quad (8.11)$$

Параметр δ определяет эффективность оконной функции в том случае, когда обрабатываемая последовательность представляет собой сумму гармонических сигналов с частотами, не кратными $2\pi/(NT)$, т. е. не совпадающими с бинами ДПФ, и белого шума. Для эффективных в этом случае оконных функций [8.2] справедливо соотношение (см. табл. 8.1)

$$0,04 \leq \delta \leq 0,055. \quad (8.12)$$

5. Когерентное усиление оконной функции с N отсчетами выражается формулой

$$K_{KN} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} P_n}{\max |P_N(e^{i\omega T})|}.$$

В табл. 8.1 приведены значения когерентного усиления, определяемого как

$$K_K = \lim_{N \rightarrow \infty} K_{KN}. \quad (8.13)$$

Величина K_K характеризует относительное усиление гармонического сигнала, частота которого совпадает с одной из частот базисного множества ДПФ.

6. Максимальный уровень M_6 боковых лепестков модуля Фурье-преобразования оконной функции, измеренный в децибелах по отношению к уровню главного лепестка (см. рис. 8.4), и асимптотическая скорость V_6 спада боковых лепестков, измеренная в децибелах на октаву, характеризуют степень «просачивания» «лишних» спектральных составляющих, соответствующих боковым лепесткам. Чем меньше M_6 и выше V_6 при одинаковых максимальных уровнях, тем меньше «просачивание» лишних спектральных составляющих.

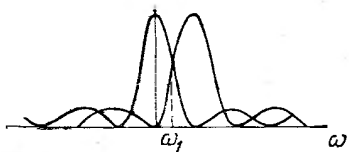


Рис. 8.5

7. Паразитная амплитудная модуляция A_{Π} (см. табл. 8.1) характеризует относительную амплитуду гармонического сигнала после обработки с помощью оконной функции и вычисления ДПФ в самом неблагоприятном случае — когда частота этого сигнала находится точно посередине между базисными частотами ДПФ (рис. 8.5). Величина A_{Π} , измеряемая в децибелах, определяется как

$$A_{\Pi} = 20 \lg \{ |P(e^{i\omega_1 T})| / \max |P(e^{i\omega T})| \}, \quad (8.14)$$

где $\omega_1 = \pi/(NT)$.

8.2.3. Принципы выбора оконной функции

Выбор оконной функции определяется двумя факторами:

характером решаемой задачи;

требованиями к характеру используемых вычислительных средств и допустимому времени решения задачи.

Ниже в соответствии с характером решаемой задачи рассматриваются лишь некоторые примеры выбора оконной функции из числа приведенных в табл. 8.1.

Пример 8.5. Пусть обрабатываемая последовательность

$$x(nT) = \sum_k A_k \sin \left(nk \frac{2\pi}{NT} + \varphi_k \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где A_k и φ_k — неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; k — неизвестные заранее целые числа, определяющие частоты гармонических составляющих, совпадающих с бинами ДПФ. В данном случае для определения A_k и φ_k достаточно использовать прямоугольную оконную функцию. Вычисление A_k и φ_k выполняется согласно (8.2), причем

$$A_k = |X(k)|; \quad \varphi_k = \arg [X(k)]$$

и нет необходимости в усреднении в соответствии с (8.5).

Пример 8.6. Пусть обрабатываемая последовательность

$$x_1(nT) = x(nT) + q(nT),$$

где $x(nT)$ определено в примере 8.5; $q(nT)$ — последовательность отсчетов белого шума.

В данном случае для определения неизвестных величин A_k и φ_k (или A_k^2) целесообразно обработать последовательность оконной функцией, которой соответствует наименьшее значение $\Delta F_{\text{ш}}$, т. е. прямоугольной оконной функцией, и произвести усреднение в соответствии с (8.5).

Пример 8.7. Пусть обрабатываемая последовательность представляет собой сумму двух гармонических сигналов с неизвестными заранее частотами и фазами:

$$x_2(nT) = A_1 \sin(n\omega_1 T + \varphi_1) + A_2 \sin(n\omega_2 T + \varphi_2),$$

где $\omega_{11} \leq \omega_1 \leq \omega_{12}$; $\omega_{21} \leq \omega_2 \leq \omega_{22}$; ω_{11} , ω_{12} , ω_{21} , ω_{22} — заданные частоты; $\omega_{21} > \omega_{12}$. Требуется определить ω_1 , ω_2 и A_1^2 , A_2^2 , причем заранее известно, что $A_1^2 \approx A_2^2$. В данном случае для обработки можно использовать прямоугольную оконную функцию. Полагая в (8.1) $\Delta f = (\omega_{21} - \omega_{12}) / (2\pi)$ и $K_0 = \Delta F_{\text{ГБ}}$ [см. (8.10) и табл. 8.1], можно определить интервал наблюдения θ , а по известному значению T — число обрабатываемых отсчетов N . При вычислении спектра в соответствии с (8.2) и (8.3) для $k=0, 1, \dots, N-1$ может иметь место неопределенность [6.8], т. е. принятие решения оказывается невозможным из-за наличия нескольких одинаковых значений $I(k)$. Для того чтобы исключить неопределенность, необходимо к последовательности $x_2(nT)$ добавить $N(2^l - 1)$ нулевых отсчетов и использовать для вычисления $X(k)$ формулу (8.4). При этом сначала принимается $l=1$, т. е. добавляется N нулевых отсчетов и вычисляются $I(k)$.

Если неопределенность сохраняется, то принимается $l=2$ и т. д. до тех пор, пока не устраняется неопределенность, мешающая принятию решения.

Поскольку обрабатываемая последовательность не содержит шумовой составляющей, целесообразно проводить усреднение в соответствии с (8.5).

Пример 8.8. Пусть обрабатываемая последовательность такая же, как в примере 8.7. Требуется определить ω_1 , ω_2 и A_1^2 , A_2^2 , причем заранее известно, что $A_1 \gg A_2$, и $20 \lg(A_2/A_1) \geq M_1$, где $M_1 = -40$ дБ.

В данном случае для обработки необходимо использовать оконную функцию, у которой максимальный уровень боковых лепестков M_6 удовлетворяет условию $M_6 \leq M_1 - M_2$, где $M_2 > 0$ — запас по уровню боковых лепестков в децибелах. Запас M_2 необходим ввиду того, что ω_1 и ω_2 не обязательно кратны бинам ДПФ (см. пример 8.7). Как правило, принимают $M_2 = 7 \dots 10$ дБ [8.2].

Пусть $M_1 = -40$ дБ; $M_2 = 10$ дБ. Тогда по данным табл. 8.1 следует выбрать оконную функцию среди тех функций, для которых $M_6 \leq -50$ дБ. Критерий, позволяющий однозначно определить оконную функцию, формулируется следующим образом: среди всех функций, удовлетворяющих условию $M_6 \leq -50$ дБ, следует выбрать ту, для которой $K_0 = \Delta F_{г6}$ имеет наименьшее значение [см. (8.1) и (8.10)] — последнее обеспечивает наименьший интервал наблюдения θ при заданной разрешающей способности Δf . По данным табл. 8.1 оказывается выбранной оконная функция Кайзера—Бесселя с параметром $\alpha = 2,5$ и $K_0 = \Delta F_{г6} = 2,2$. Так же, как в примере (8.7), определяются $\Delta f = (\omega_{21} - \omega_{12}) / (2\pi)$, а затем с помощью (8.1) — θ и N . Неопределенность, которая может иметь место при вычислении $I(k)$ в соответствии с (8.3), исключается введением дополнительных нулевых отсчетов [см. пример 8.7 и формулу (8.4)]. Поскольку обрабатываемая последовательность не содержит шумовой составляющей, целесообразно усреднение в соответствии с (8.5).

8.3. МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА, ОСНОВАННЫЕ НА ЛИНЕЙНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

8.3.1. Линейные модели и расчет СПМ

Многие последовательности $x(nT)$, представляющие собой сумму детерминированных и случайных последовательностей, могут быть достаточно хорошо аппроксимированы выходным сигналом $y(nT)$ линейного дискретного фильтра, описываемого разностным уравнением [см. (2.1)]:

$$y(nT) = - \sum_{j=1}^Q a_j y((n-j)T) + \sum_{l=0}^{Q_1} b_l v((n-l)T), \quad (8.15)$$

где $v(nT)$ — выбранный входной сигнал.

Модель, описываемую (8.15), называют АРСС-моделью (моделью процесса авторегрессии со скользящим средним). Как правило, в задачах спектрального анализа сигнал $v(nT)$ представляет собой отсчеты белого шума с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 . Если коэффициенты a_j и b_l определены так, что достаточно точно выполняется равенство

$$y(nT) \approx x(nT) \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, \quad (8.16)$$

то СПМ $S(\omega)$ можно рассчитать следующим образом:

$$S(\omega) = \sigma^2 [B^2(\omega) / C^2(\omega)], \quad (8.17)$$

$$\text{где } B(\omega) = \sqrt{\left(\sum_{l=0}^{Q_1} b_l \cos l \omega T \right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{Q_1} b_l \sin l \omega T \right)^2};$$

$$c(\omega) = \sqrt{\left(1 + \sum_{j=1}^Q a_j \cos j \omega T \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^Q a_j \sin j \omega T \right)^2}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/T$$

Если в (8.15) $a_j=0$ при $j=1, 2, \dots, Q$, то соответствующая модель

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{Q-1} b_l v((n-l)T) \quad (8.18)$$

называется СС-моделью (моделью процесса скользящего среднего), или чисто нулевой моделью, поскольку передаточная функция соответствующего дискретного фильтра имеет лишь нули, т. е. фильтр является нерекурсивным. При выполнении (8.16) для вычисления СПМ $S(\omega)$ можно использовать (8.17), положив $C(\omega)=1$.

Если в (8.15) $b_0=1$ и $b_l=0$ при $l>0$, то соответствующая модель

$$y(nT) = - \sum_{j=1}^Q a_j y((n-j)T) + v(nT) \quad (8.19)$$

называется АР-моделью (моделью процесса авторегрессии), или чисто полюсной моделью. Для этой модели при выполнении (8.16) для вычисления СПМ $S(\omega)$ можно использовать (8.17), положив $B(\omega)=1$.

Принципиально все три модели применимы в одинаковой степени, поскольку существует теорема декомпозиции [6.8], утверждающая, что стационарный процесс с конечной дисперсией, описываемый с помощью одной модели, можно представить любой из двух других моделей достаточно большого порядка. Для АР-модели процесс вычисления параметров модели оказывается наиболее простым — он сводится к решению тем или иным способом систем линейных алгебраических уравнений. Поэтому ниже рассматривается определение параметров только АР-модели при различных условиях.

8.3.2. Определение параметров АР-модели по известной автокорреляционной функции последовательности

Если известна автокорреляционная функция $R(m)$ анализируемой стационарной последовательности $x(nT)$, то для точного равенства $y(nT)=x(nT)$ при $n=0, 1, \dots$ достаточно, чтобы параметры АР-модели — коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_Q и дисперсия σ^2 — удовлетворяли линейным уравнениям Юла — Уокера [6.8]:

$$R(m) = \begin{cases} - \sum_{j=1}^Q a_j R(m-j) & \text{при } m > 0; \\ - \sum_{j=1}^Q a_j R(-j) + \sigma^2 & \text{при } m = 0. \end{cases} \quad (8.20)$$

Выбирая $Q+1$ уравнение из (8.20), можно получить систему линейных алгебраических уравнений, в которой число неизвестных равно числу уравнений:

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(-1) & \dots & R(-Q) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(-Q+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(Q) & R(Q-1) & \dots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.21)$$

Решение системы (8.21) позволяет определить значения параметров модели, обеспечивающие выполнение приближенного равенства (8.16). Поскольку матри-

ца в правой части (8.21) симметрическая и теплицева, существует эффективный алгоритм решения системы (8.21) — алгоритм Левинсона [6.8, 6.9].

Пусть $\{a_{Q1}, a_{Q2}, \dots, a_{QQ}, \sigma_{Q}^2\}$ — набор параметров соответствующей АР-модели порядка Q , т. е. для модели первого порядка ($Q=1$) $y(nT) = -a_{11}y((n-1)T) + v_1(nT)$, причем дисперсия шума $v_1(nT)$ равна σ_1^2 , для модели второго порядка ($Q=2$) $y(nT) = -a_{21}y((n-1)T) - a_{22}y((n-2)T) + v_2(nT)$, причем дисперсия шума $v_2(nT)$ равна σ_2^2 , и т. д. Тогда алгоритм Левинсона может быть записан так:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -R(1)/R(0); \\ \sigma_1^2 &= (1 - |a_{11}|^2) R(0); \\ a_{QQ} &= - \left[R(Q) + \sum_{j=1}^{Q-1} a_{Q-1,j} R(Q-j) \right] / \sigma_{Q-1}^2; \\ a_{Ql} &= a_{Q-1,l} + a_{QQ} \bar{a}_{Q-1,Q-l}, \quad l = 1, 2, \dots, Q-1; \\ \sigma_Q^2 &= (1 - |a_{QQ}|^2) \sigma_{Q-1}^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

где \bar{a}_{Q-1} — величина, комплексно-сопряженная с a_{Q-1} . Алгоритм Левинсона имеет следующие преимущества по сравнению с иными методами решения системы (8.21):

1. Поскольку параметры вычисляются по рекуррентным формулам (8.22), до определения параметров АР-модели порядка Q рассчитываются параметры АР-моделей более низких порядков. Это обстоятельство весьма существенно в тех случаях, когда заранее значение Q неизвестно.

2. В ходе вычислений легко контролировать необходимое и достаточное условие устойчивости АР-модели порядка Q :

$$|a_{ll}| < 1, \quad l = 1, 2, \dots, Q. \quad (8.23)$$

3. Для параметров АР-модели порядка Q с помощью алгоритма Левинсона требуется выполнить примерно Q^2 арифметических операций, в то время как при решении системы (8.21) методом Гаусса необходимо выполнить примерно Q^3 арифметических операций.

8.3.3. Определение параметров АР-модели по анализируемым данным

Часто при спектральном анализе значения автокорреляционной функции неизвестны. В этом случае определение параметров АР-модели необходимо выполнить, располагая лишь отсчетами $x(nT)$ анализируемого процесса. Если число отсчетов N , доступное для анализа, относительно мало («короткая» последовательность — N не более чем в 2—3 раза превышает максимальный порядок АР-модели), то параметры модели определяются один раз.

Для однократного нахождения параметров АР-модели по короткой последовательности обычно используются те или иные варианты методов линейного предсказания ([6.3] и разд. 6). Ниже рассматриваются лишь два варианта — автокорреляционный метод и алгоритм Берга.

Для любого метода линейного предсказания «вперед» выходной сигнал АР-модели

$$y(nT) = \hat{x}(nT) = - \sum_{j=1}^Q a_{Qj} x((n-j)T) \quad (8.24)$$

рассматривается как линейная оценка $\hat{x}(nT)$ очередного отсчета $x(nT)$ анализируемой последовательности. Текущая ошибка линейного предсказания «вперед»

$$e_{QВ}(nT) = x(nT) - \hat{x}(nT). \quad (8.25)$$

Из (8.24) и (3.25) следует, что для линейного предсказания «вперед»

$$e_{QВ}(nT) = \sum_{j=0}^Q a_{Qj} x((n-j)T), \quad (8.26)$$

где $a_{Q0} = 1$.

В методах линейного предсказания «вперед» минимизируется общая или суммарная ошибка предсказания

$$E_Q = \sum_n e_{QВ}^2(nT), \quad (8.27)$$

т. е. для определения коэффициентов a_{Qj} используется метод наименьших квадратов. Различные варианты методов линейного предсказания отличаются выбором области допустимых значений n в (8.27). При использовании автокорреляционного метода n принимает значения от 0 до $N+Q-1$, причем считается, что $x(nT) = 0$ при $n < 0$ и $n > N-1$. Из (8.26) и (8.27) получается выражение для суммарной ошибки предсказания автокорреляционного метода

$$E_Q^{(A)} = \sum_{n=0}^{N+Q-1} \left[\sum_{j=0}^Q a_{Qj} x((n-j)T) \right]^2. \quad (8.28)$$

Необходимые и достаточные условия минимума (8.28) ([6.3], а также разд. 4 и 6)

$$\frac{\partial E_Q^{(A)}}{\partial a_{Qk}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, Q, \quad (8.29)$$

представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров $a_{Q1}, a_{Q2}, \dots, a_{QQ}$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^Q a_{Qj} \sum_{n=0}^{N+Q-1} x((n-j)T) x((n-k)T) &= 0 \\ \text{или} \quad \sum_{j=1}^Q d_{k,j} a_{Qj} &= d_{k,Q+1}, \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

где $d_{k,j} = \sum_{n=0}^{N+Q-1} x((n-j)T) x((n-k)T)$;

$$d_{k,Q+1} = - \sum_{n=0}^{N+Q-1} x((n-Q-1)T) x((n-k)T), \quad k = 1, 2, \dots, Q.$$

Для вычисления коэффициентов и решения системы (8.30) разработаны эффективные алгоритмы и соответствующие ФОРТРАН-программы [6.3]. Эти алгоритмы позволяют в 6 раз уменьшить объем вычислений по сравнению с прямыми методами вычисления коэффициентов и решения системы (8.30).

После решения системы (8.30) величина $\sigma^2 = \sigma_{Q}^2$, необходимая для вычисления $S(\omega)$ [см. (8.17)], может быть определена из (8.28):

$$\sigma_Q^2 = E_Q^{(A)}/N. \quad (8.31)$$

Алгоритм Берга [6.8] предусматривает определение параметров АР-модели из условия минимума величины

$$E_Q^{(B)} = \sum_{n=Q}^{N-1} e_{Qв}^2(nT) + \sum_{n=Q}^{N-1} e_{Qн}^2(nT) \quad (8.32)$$

при ограничении [см. (8.22)] Левинсона

$$a_{Ql} = a_{Q-1, l} + a_{QQ} \bar{a}_{Q-1, Q-l}, \quad l = 1, 2, \dots, Q-1,$$

где a_{Ql} — l -й параметр АР-модели; $e_{Qв}(nT) = \sum_{j=0}^Q a_{Qj} x((n-j)T)$ — ошибка предсказания «вперед»; $e_{Qн}(nT) = \sum_{j=0}^Q \bar{a}_{Qj} x((n-Q+j)T)$ — ошибка предсказания «назад».

Величина σ_{Q}^2 , необходимая для расчета $S(\omega)$, определяется как

$$\sigma_Q^2 = \sum_{n=Q}^{N-1} e_{Qв}^2(nT)/(N-Q). \quad (8.33)$$

Из (8.32) следует расчетная формула для параметра АР-модели:

$$a_{QQ} = \frac{-2 \sum_{n=Q}^{N-1} \bar{e}_{Q-1, н}((n-1)T) e_{Q-1, в}(nT)}{\sum_{n=Q}^{N-1} (|e_{Q-1, н}((n-1)T)|^2 + |e_{Q-1, в}(nT)|^2)}. \quad (8.34)$$

Параметры a_{Ql} АР-модели рассчитываются с помощью ограничения Левинсона [см. (8.32)].

Пример 8.9 [6.8]. В соответствии с алгоритмом Берга был выполнен спектральный анализ сигнала $x(nT)$, представляющего собой сумму двух синусоидальных сигналов с амплитудами, равными 1, и нормированными частотами $\omega_1 = 0,143$ и $\omega_2 = 0,2$ (по условию нормировки интервал дискретизации $T = 2\pi$) и белого шума. Отношение сигнал-шум (под сигналом понималась средняя мощность одного синусоидального сигнала, а под шумом — средняя мощность шума) было равно 0 дБ. Число отсчетов анализируемого сигнала составляло $N = 100$. На рис. 8.6 показаны графики СПМ $S(\omega)$, иллюстрирующие зависимость результатов спектрального анализа от выбранного порядка АР-модели Q . Ри-

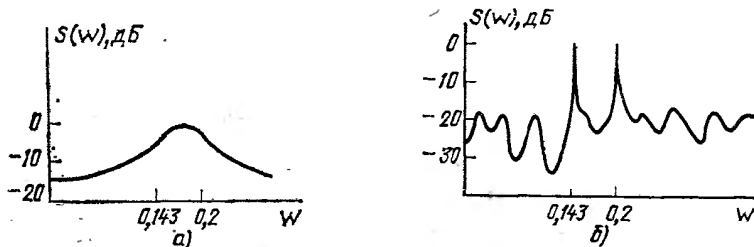


Рис. 8.6

сунок 8.6,а соответствует случаю $Q=4$. Видно, что по результатам спектрального анализа нельзя определить не только частоту синусоидальных сигналов, входящих в $x(nT)$, но и их число. Рисунок 8.6,б соответствует случаю $Q=32$. Видно, что по результатам спектрального анализа можно определить как число синусоидальных сигналов, входящих в сигнал $x(nT)$, так и их частоты.

8.3.4. Определение порядка АР-модели

Для определения необходимого порядка АР-модели в случае «длинных» последовательностей отсчетов $x(nT)$, когда $N > 200 \dots 300$, используются критерии Акаике [6.8]. Первый критерий Акаике формулируется следующим образом: величина Q соответствует минимуму функции

$$E_{Q0} = E_Q [(N + Q + 1)/(N - Q - 1)]. \quad (8.35)$$

Второй (информационный) критерий Акаике формулируется так: величина Q соответствует минимуму функции

$$E_{Qн} = \ln E_Q + 2Q/N. \quad (8.36)$$

В (8.35) и (8.36) величина E_Q определяется (8.27). Оба критерия дают близкие результаты. Любой из этих критериев применяется в ходе последовательного определения порядка АР-модели, например, с помощью алгоритмов Левинсона [см. (8.22)] или Берга [см. (8.32)]. Параметры модели вычисляются при $Q = 1, 2, \dots$, и для каждого значения Q определяется E_{Q0} или $E_{Qн}$. За искомое Q принимается наименьшее значение Q , для которого одновременно верны отношения $E_{Q0} < E_{Q-1,0}$ и $E_{Q+1,0} > E_{Q0}$ при использовании первого критерия или $E_{Qн} < E_{Q-1,н}$ и $E_{Q+1,н} > E_{Qн}$ при использовании второго критерия.

Для «коротких» последовательностей отсчетов $x(nT)$, когда $N < 200 \dots 300$, величину Q выбирают из условия $N/3 < Q < N/2$.

9. ТРАНСМУЛЬТИПЛЕКСОРЫ

9.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТРАНСМУЛЬТИПЛЕКСОРАХ. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ИХ СХЕМ

9.1.1. Назначение трансмультиплексоров

Трансмуптиплексоры (ТМ) выполняют следующие основные задачи (рис. 9.1):

1. Выделение канальных сигналов $y_i(nmT)$ из группового сигнала $x(nT)$ с частотным разделением каналов (ЧРК) и переносом спектров выделенных канальных сигналов в область нижних частот, т. е. прямое преобразование. Это преобразование может быть дополнено по входу преобразованием аналогового группового сигнала $x(t)$ в сигнал $x(nT)$ и по выходу преобразованием канальных сигналов в аналоговую форму [аналоговые канальные сигналы $y_0(t), y_1(t), \dots, y_{K-1}(t)$] или формированием с помощью дополнительного коммутатора группового сигнала $y(nT)$ с временным разделением каналов (ВРК).

2. Формирование группового сигнала $x(nT)$ с ЧРК из отдельных канальных сигналов $y_i(nmT)$, т. е. обратное преобразование. Это преобразование может быть дополнено по входам преобразованием аналоговых канальных сигналов

$y_0(t), y_1(t), \dots, y_{K-1}(t)$ либо группового сигнала $Y(nT')$ с ВРК в каналные сигналы $y_0(nmT), y_1(nmT), \dots, y_{K-1}(nmT)$ и по выходу — преобразованием сигнала $x(nT)$ в аналоговый групповой сигнал $x(t)$ с ЧРК.

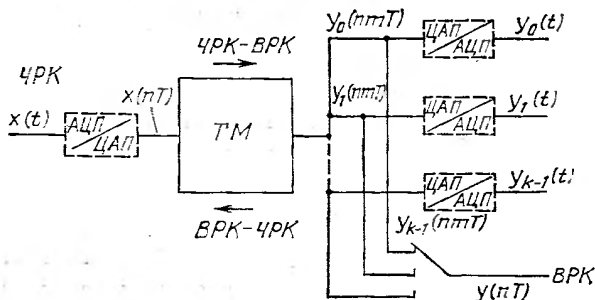


Рис. 9.1

9.1.2. Классификация трансмультиплексоров

Трансмультиплексоры классифицируются по двум признакам: количеству уровней в схеме ТМ и наличию или отсутствию дополнительного преобразования.

По количеству уровней в схеме все ТМ можно разделить на одно- и многоуровневые структуры. *Одноуровневые структуры* отличаются тем, что при прямом преобразовании сигналы отдельных каналов непосредственно выделяются из группового сигнала с ЧРК, а при обратном преобразовании сигналы отдельных каналов сразу же объединяются в групповой сигнал с ЧРК. В *многоуровневых структурах* выделение и объединение канальных сигналов происходят поэтапно: при прямом преобразовании на каждом уровне сигналы, полученные от схем предыдущего уровня, разделяются, причем сигналы отдельных каналов получают лишь на выходах последнего уровня; при обратном преобразовании на каждом уровне объединяются сигналы, полученные от схем предыдущего уровня, причем групповой сигнал с ЧРК получается лишь на выходе последнего уровня.

По наличию или отсутствию дополнительного преобразования все ТМ можно разделить на структуры с дополнительным преобразованием сигналов (типа ДПФ) и структуры, в которых дополнительное преобразование не используется.

9.1.3. Основные параметры и критерии качества трансмультиплексоров

Требования к основным параметрам 60-канального ТМ, соответствующие рекомендациям МККТТ G.792 и G.793, приведены ниже [9.2].

Амплитудно-частотная характеристика $A(f)$ в полосе частот от 600 до 2400 Гц должна удовлетворять условиям: $a_1 < 20 \lg A(f) < a_2$.

Максимально допустимые отклонения на краях полосы частот:

300 Гц	$a_1 < -20 \lg A(f) < a_3$
3400 Гц	$a_1 < -20 \lg A(f) < a_4$
	(где $a_1 = -0,6$ дБ, $a_2 = 0,6$ дБ, $a_3 = 17$ дБ, $a_4 = 24$ дБ)

Во всей полосе частот величина ГВЗ должна удовлетворять условию $\tau \ll 3$ мс

Неравномерность ГВЗ должна удовлетворять условиям:

от 1000 до 2600 Гц	$\Delta\tau \leq 0,5$ мс
от 600 до 1000 Гц	$\Delta\tau \leq 1,5$ мс
от 500 до 600 Гц и от 2600 до 2800 Гц	$\Delta\tau \leq 2$ мс

Минимальное ослабление переходного разговора между двумя любыми каналами:

внятный переходный разговор	65 дБ
невнятный переходный разговор	58 дБ
Максимальный уровень шумов свободных каналов при загрузке всех каналов, за исключением измеряемого, взятый относительно точки пика сигнала	-80 дБ
Максимальный уровень действующего значения внутрисполосных искажений, взятый относительно точки пика сигнала	-40 дБ
Внеполосная сигнализация на частоте	3825 Гц
Частота управляющих сигналов	3920 Гц

Примечание. Измерения многоканального аналогового сигнала производятся в условиях замкнутого контура на зажимах цифрового сигнала.

Помимо указанных выше в качестве критериев качества, позволяющих сравнивать различные варианты трансмультиплексоров, используются [9.2]: гарантированная устойчивость в условиях замкнутого контура, сложность управления и вычислений, наличие или отсутствие дополнительного аналогового преобразования частоты, степень модульности трансмультиплексора. Кроме того, по аналогии с реализационными характеристиками цифровых фильтров (см. 2.2.4) для сопоставления вариантов ТМ используются: количественные показатели сложности вычислений и реализации; $V_{\text{ут}}$ — число операций умножения, которое необходимо выполнить в 1 с на один преобразуемый канал; L — общее число ячеек памяти, необходимое для реализации ТМ.

9.1.4. Принципы дуальности схем прямого и обратного преобразований трансмультиплексоров

Схемы ТМ могут содержать следующие элементы:

- узлы, для которых справедливо соотношение (2.26);
- сумматоры;
- устройства умножения сигнала на множители, зависящие от n типа $e^{\pm i n \omega T}$;
- цифровые фильтры;
- компрессоры частоты дискретизации, понижающие частоту дискретизации в m раз (обозначение операции — $\downarrow m$);
- экспандеры частоты дискретизации, повышающие частоту дискретизации в m раз (обозначение операции — $\uparrow m$);
- элементы, формирующие вещественный сигнал из комплексного (обозначение этих элементов на схеме Re).

Любой ТМ состоит из двух частей — схемы, реализующей прямое преобразование (ЧРК-ВРК), и схемы, реализующей обратное преобразование. Операции, выполняемые определенными элементами этих схем, дуальны, так что можно считать дуальными соответствующие пары элементов, перечисленные в табл. 9.1. Поэтому если каким-то способом построена одна из схем прямого или обратного преобразования, то вторая схема может быть построена как дуальная первой. При построении дуальной схемы каждый элемент, указанный в табл. 9.1, заме-

Схема прямого преобразования	Схема обратного преобразования
Узел (разветвление)	Сумматор
Устройство умножения на $e^{\pm 1n\omega T}$	Устройство умножения на $e^{\mp 1n\omega T}$
Цифровой фильтр с передаточной функцией $H(z)$	Цифровой фильтр с передаточной функцией $H(z)$
Компрессор частоты дискретизации $\downarrow m$	Экспандер частоты дискретизации $\uparrow m$

няется дуальным, причем меняются местами входы и выходы каждого элемента. Отметим, что элементы Re, формирующие вещественный сигнал из комплексного, не имеют дуальных и вводятся в схему дополнительного.

9.2. ОДНОУРОВНЕВЫЕ СТРУКТУРЫ ТМ БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

9.2.1. Структура ТМ с вещественными сигналами

Ниже рассматривается пример двухканального ТМ ($K=m=2$). Схема прямого преобразования (рис. 9.2,а) строится очевидным способом и включает следующие элементы: полосовые фильтры Φ_0 , Φ_1 , каждый из которых выделит сигнал соответствующего канала; компрессоры частоты дискретизации $\downarrow 2$, обеспечивающие формирование спектра сигнала каждого канала в области низких частот; схему умножения на $(-1)^n$, позволяющую получить прямой спектр сигнала первого канала.

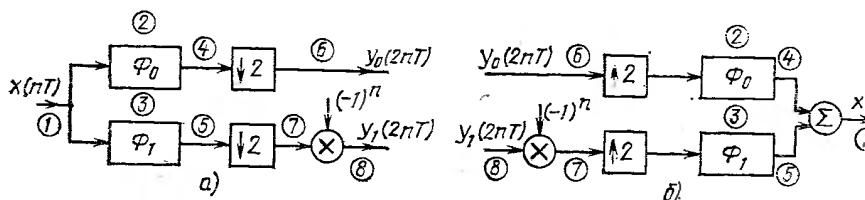


Рис. 9.2

На рис. 9.2,б изображена схема обратного преобразования, построенная по принципу дуальности (см. 9.1.4). Узлу 1, фильтрам Φ_0 , Φ_1 и компрессорам частоты дискретизации $\downarrow 2$ (на рис. 9.2,а) соответствуют сумматор 1, фильтры Φ_1 с точно такими же характеристиками и экспандеры частоты дискретизации $\uparrow 2$ на рис. 9.2,б, а схема умножения на $(-1)^n$ (рис. 9.2,а) — такая же схема умножения на $(-1)^n$, поскольку $(-1)^n = e^{j1n\pi} = e^{-j1n\pi}$.

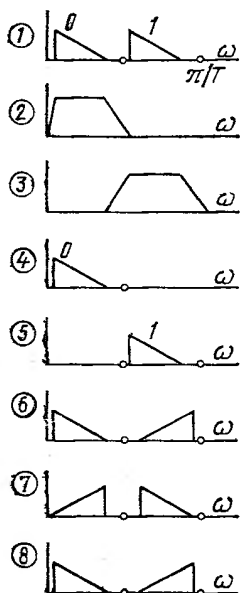


Рисунок 9.3 поясняет принцип действия схем, изображенных на рис. 9.2, причем номера позиций на рис. 9.3 совпадают с номерами соответствующих точек на рис. 9.2. На рис. 9.3 изображены: 1 — модуль спектра двухканального группового сигнала $x(nT)$ с ЧРК; 2 и 3 — идеализированные АЧХ фильтров Φ_0 и Φ_1 ; 4 и 5 — модули спектров сигналов на выходах фильтров Φ_0 и Φ_1 (каналы 0 и 1); на рис. 9.2,а — до компрессии частоты дискретизации; 6 и 7 — модули спектров сигналов каналов 0 и 1 после компрессии частоты дискретизации (рис. 9.2,а) или до экспандирования частоты дискретизации (рис. 9.2,б); 8 — модуль спектра сигнала канала 1. Рассмотренная схема ТМ имеет весьма существенные недостатки: а) характеристики фильтров зависят от номера каналов; б) при увеличении числа каналов K схемы всех фильтров усложняются и уже при $K=12$ оказываются весьма сложными.

Рис. 9.3

9.2.2. Структура ТМ с комплексными сигналами и однократным изменением частоты дискретизации

Ниже рассматривается пример четырехканального ТМ. Основное отличие схемы прямого преобразования от схемы на рис. 9.2,а заключается в том, что с целью унификации всех фильтров ТМ спектр сигнала каждого канала смещается в область нижних частот, так что все фильтры оказываются низкочастотными с одинаковыми характеристиками.

Схема прямого преобразования (рис. 9.4,а) состоит из следующих элементов: схем умножения на $e^{in(l+0,5)\Delta\omega T} = e^{-in(l+0,5)\pi}$ (где l — номер канала; $\Delta\omega = \pi/T$), обеспечивающих перенос спектра l -го канала в область нижних частот; ФНЧ; компрессоров частоты дискретизации $\downarrow 4$ и схем умножения на $(-1)^n$ для каналов с нечетными номерами, назначение которых совпадает с назначением соответствующих элементов в схеме прямого преобразования ТМ с вещественными сигналами (см. рис. 9.2,а); схем умножения на $e^{in0,5\Delta\omega T} = e^{in0,5\pi}$, обеспечивающих перенос спектра для последующего формирования вещественного сигнала, и элементов Re, формирующих выходные вещественные сигналы ТМ.

Отметим, что каждая из схем комплексного умножения на $e^{\pm in\omega T}$ сводится к двум схемам вещественного умножения на $\cos n\omega T$ и $\pm \sin n\omega T$ (см. разд. 7), каждое обозначение ФНЧ на рис. 9.4,а соответствует двум идентичным ФНЧ, один из которых обрабатывает вещественную часть сигнала, а другой — мнимую (см. разд. 7). То же самое относится к компрессорам частоты дискретизации $\downarrow 4$. Аналогично изображаются элементы всех последующих схем ТМ с комплексными сигналами.

На рис. 9.4,б изображена схема обратного преобразования, построенная по принципу дуальности (см. 9.1.4 и 9.2.1) с добавлением элемента Re для получения вещественного сигнала $x(nT)$.

Рисунки 9.5,а,б иллюстрируют работу соответственно схем прямого и обратного преобразований (см. рис. 9.4,а,б). На рис. 9.5 изображены модули ров сигналов каналов и АЧХ ФНЧ, причем номера позиций совпадают с теми же соответствующими точками, указанными на рис. 9.4. Рассмотренный вариант выполнен на основе модулятора Уивера (см. разд. 7, [1.16]).

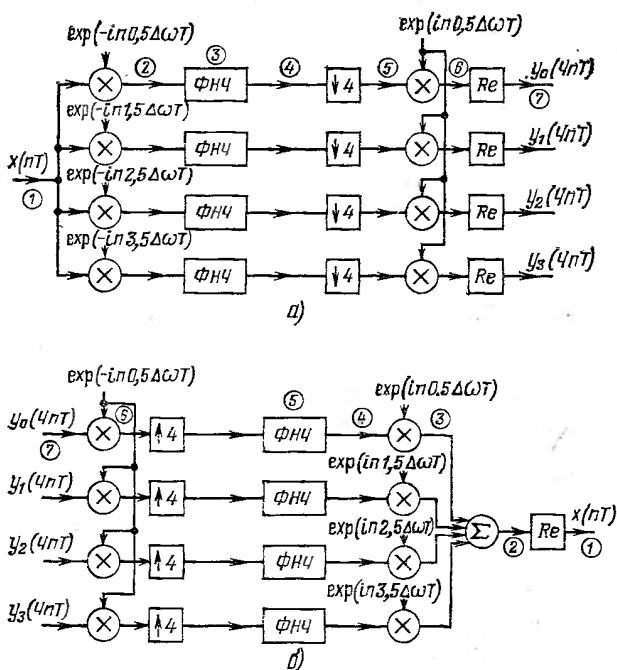


Рис. 9.4

Основной недостаток рассмотренного ТМ заключается в том, что при больших значениях K (равных 12 или 60) характеристики ФНЧ становятся непригодными для реализации. Это приводит к слишком большим величинам L (см. 9.1.2).

9.2.3. Структура ТМ с комплексными сигналами, однократным изменением частоты дискретизации и дополнительными ФНЧ₁

Для того чтобы упростить характеристики ФНЧ ТМ (см. рис. 9.4) и следовательно, и реализацию ТМ в целом, вводятся дополнительные ФНЧ₁ (см. 9.3) (рис. 9.6). Рисунки 9.7,а,б иллюстрируют работу схем прямого и обратного преобразований (см. рис. 9.6). Номера позиций на рис. 9.7 соответствуют номерам, указанным на рис. 9.6. На этих рисунках пунктиром обозначены дополнительные промежуточные полосы АЧХ ФНЧ (рис. 9.7,а, по позиции 5), в которых она может принимать любые значения от 0 до 1. На позициях 4 и 5 (рис. 9.7,а) штриховкой отмечены модули спектров подавленных (или частично подавленных) сигналов, которые не должны выделяться в канал с номером 0 . Из сравнения требуемого вида АЧХ в схемах ТМ, рассмотренных в 9.2.2 (см. рис. 9.5,а, позиция 5),

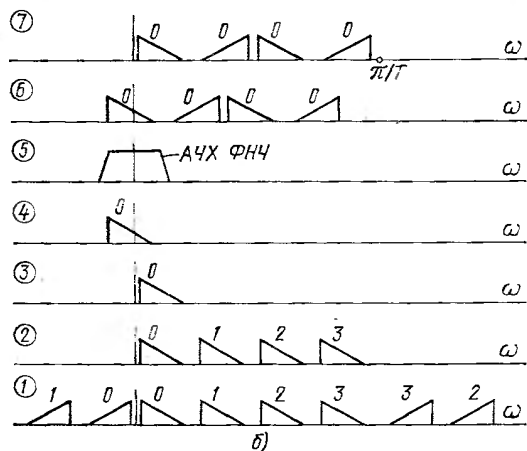
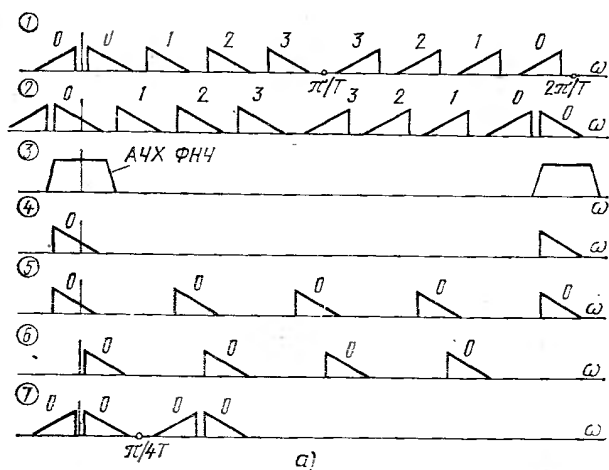


Рис. 9.5

рис. 9.5,б, позиция 5) и в схемах ТМ, рассматриваемых в настоящем пункте (см. рис. 9.7,а, позиция 3, и рис. 9.7,б, позиция 5), следует, что реализация ФНЧ в последнем случае при прочих равных условиях оказывается существенно проще за счет как резкого увеличения основной промежуточной полосы, так и появления дополнительных промежуточных полос.

9.2.4. Структура ТМ с комплексными сигналами и двукратным (многократным) изменением частоты дискретизации

С целью упрощения реализации фильтров в схемах ТМ (см. рис. 9.4 и рис. 9.6) используется двукратное (многократное) изменение частоты дискретизации (см. 2.5, [2.11]). Соответствующие схемы прямого и обратного преобразований представляют собой очевидную модификацию схем, рассмотренных в 9.2.2 и 9.2.3, и поэтому не приводятся.

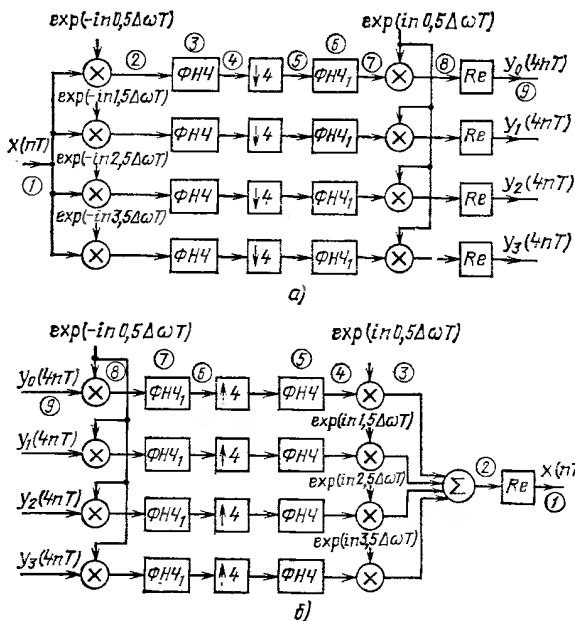


Рис. 9.6

9.3. МНОГОУРОВНЕВЫЕ СТРУКТУРЫ ТМ БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

9.3.1. Общая структура многоуровневого ТМ

На рис. 9.8 изображена общая структура многоуровневого ТМ. Схема состоит из более или менее однотипных блоков $B_{s,p}$, где s означает номер уровня, а p — порядковый номер блока в пределах одного уровня. Непосредственно схема соответствует прямому преобразованию группового сигнала с ЧРК $x(nT)$ в сигналы отдельных каналов. Схема обратного преобразования строится по принципу дуальности (см. 9.1.4), причем каждый узел (см. рис. 9.8) должен быть заменен сумматором, каждый блок $B_{s,p}$ — блоком $B'_{s,p}$, составленным из элементов, дуальных элементам блока $B_{s,p}$, причем входы и выходы каждого элемента и блока в целом меняются местами.

Каждый блок многоуровневого ТМ может быть реализован точно так же, как и одна из ветвей одноуровневого ТМ без дополнительных преобразований. Известно несколько вариантов схем многоуровневых ТМ [9.2]. Ниже рассматривается лишь один из наиболее перспективных вариантов многоуровневых ТМ с комплексными сигналами [9.4, 9.5].

9.3.2. Многоуровневый ТМ с комплексными сигналами

На рис. 9.9,а и б изображены схемы прямого и обратного преобразований для $K=m=4$. Блоки первого уровня содержат: $\Phi\text{НЧ}_{10}$ и $\Phi\text{НЧ}_{11}$, схемы умножения на $e^{-in\pi/4}$ или $e^{-in3\pi/4}$ и КЧД $\downarrow 2$ в схеме прямого преобразования, $\Phi\text{НЧ}_{10}$ и $\Phi\text{НЧ}_{11}$, схемы умножения на $e^{in\pi/4}$ или $e^{in3\pi/4}$ и ЭЧД $\uparrow 2$ в схеме обратного

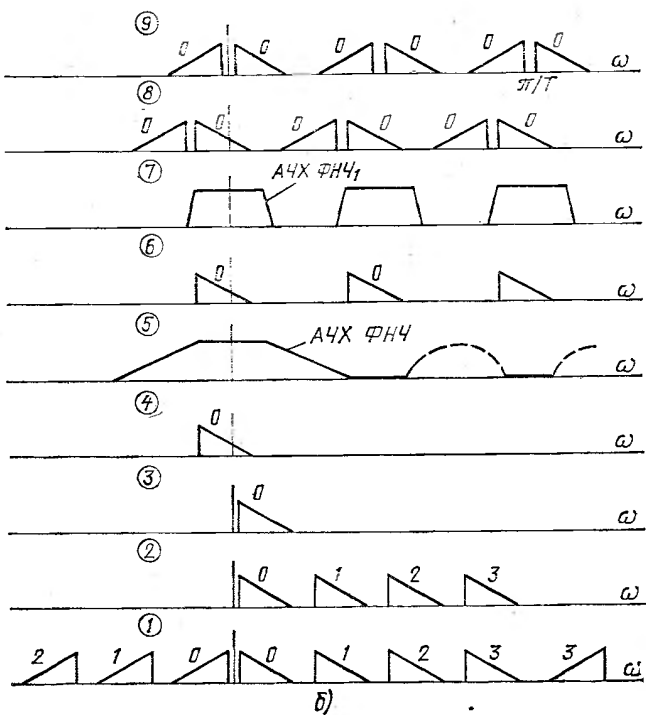
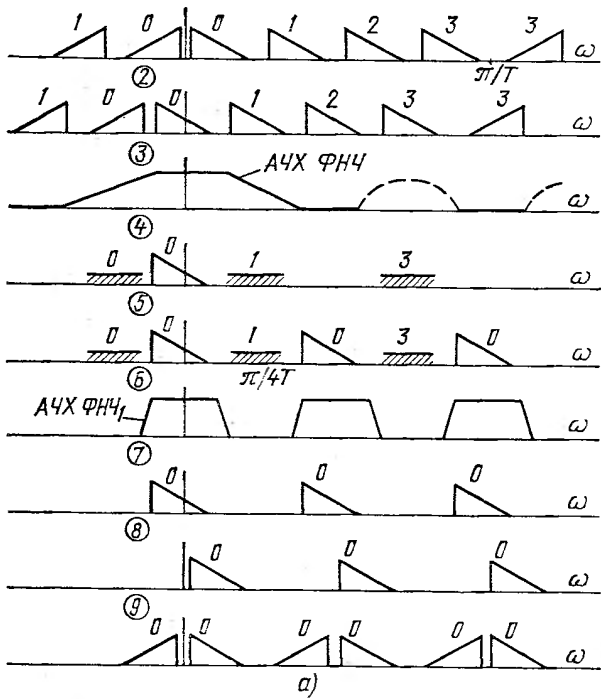


Рис. 9.7

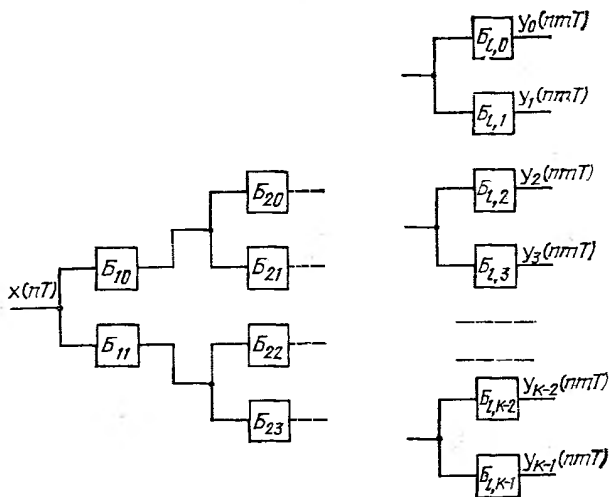


Рис. 9.8

преобразования. Каждый блок второго уровня содержит по одному ФНЧ₂₀ — ФНЧ₂₃ и ФНЧ₃₀ — ФНЧ₃₃, схемы умножения на $e^{-in\pi/4}$ и $e^{in\pi/2}$, КЧД $\downarrow 2$ в схеме прямого преобразования, те же фильтры, схемы на $e^{in\pi/4}$ или $e^{-in\pi/4}$ и $e^{-in\pi/2}$, ЭЧД $\uparrow 2$ в схеме обратного преобразования. Рисунки 9.10, а и б иллюстрируют работу схем прямого и обратного преобразования соответственно. Номера позиций на рис. 9.10 соответствуют отмеченным на рис. 9.9. В рассматриваемом варианте каждый блок второго преобразования выделяет половину из общего числа каналов, поступающих на его вход. На выходе каждого сумматора, объединяющего выходы схемы обратного преобразования, число каналов удваивается по сравнению с числом каналов, поданных на вход каждого из этих блоков. Частота дискретизации на каждом уровне изменяется в 2 раза, так что схема может использоваться лишь в тех случаях, когда $m=2^l$. При $f_d=1/(mT)=8$ кГц для преобразования 12 каналов частота дискретизации группового сигнала должна быть равна 128 кГц, а для преобразования 60 каналов — 512 кГц (переносимый для изменения частоты дискретизации со 112 на 128 кГц, может быть выполнен аналоговыми средствами до 576 на 512 кГц).

Многоуровневый ТМ с комплексными сигналами имеет следующие преимущества перед другими вариантами ТМ:

1. Вне зависимости от числа каналов в ТМ используются фильтры двух типов, причем все фильтры каждого типа совершенно идентичны: в первом примере (см. рис. 9.9) идентичны друг другу ФНЧ₁₀, ФНЧ₁₁, ФНЧ₂₃ (первый тип фильтров) и ФНЧ₂₃ — ФНЧ₂₆ (второй тип). Фильтры второго типа используются лишь на последнем уровне.

2. Все фильтры первого типа могут быть равнополосными (см. рис. 9.9), что позволяет резко уменьшить число операций и упростить реализацию.

3. Операции умножения сигналов на множители вида $e^{in\pi/4}$, обеспечивающие перенос спектра, могут быть реализованы косвенно — изменением ко-

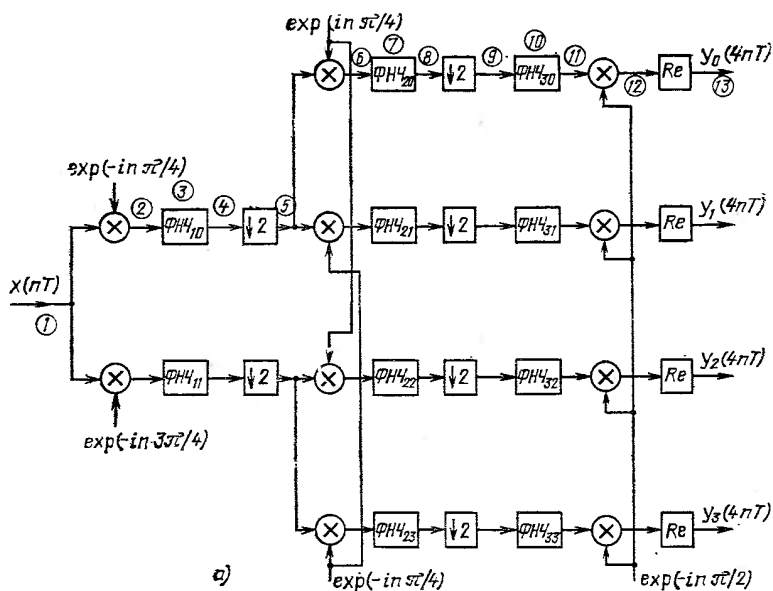


Рис. 9.9

фильтров, расположенных в схемах рис. 9.9, непосредственно после устройств умножения на $e^{i\pi n\beta T}$ [9.4]. Это позволяет уменьшить число операций умножения, выполняемых в ТМ.

Отметим, что возможна реализация многоуровневого ТМ и в том случае, когда $m \neq 2^l$ [9.2]. При этом число блоков на каждом уровне схем прямого и обратного преобразований не равно двум (см. рис. 9.8) и зависит от номера уровня.

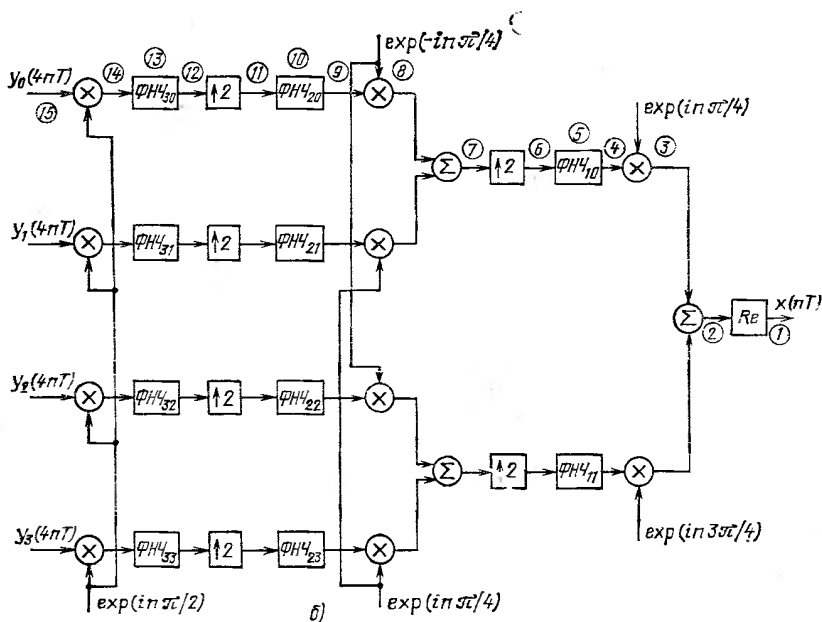
9.4. ТРАНСМУЛЬТИПЛЕКСОРЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

9.4.1. Общая структура ТМ с дополнительными преобразованиями

На рис. 9.11,а,б показаны структурные схемы прямого и обратного преобразований ТМ с дополнительными преобразованиями. Каждая из этих схем содержит полифазную цепь, позволяющую выполнять практически всю обработку сигналов на относительно низкой частоте дискретизации $f_d = 1/(mT)$, и процессор, реализующий дополнительное преобразование. Процессор и полифазная цепь могут быть дополнены элементами, обеспечивающими переход от вещественных сигналов к комплексным или, наоборот, от комплексных — к вещественным.

9.4.2. Пример ТМ с дополнительным преобразованием

Рассмотрение этого варианта удобно начать со схемы обратного преобразования. Для схемы, изображенной на рис. 9.2,б и состоящей из K полосовых фильтров и экспандеров частоты дискретизации, справедливо [9.2] соотношение



$$X(z) = \sum_{r=0}^{K-1} H_r(z) Y_r(z^K), \quad (9.1)$$

где $H_r(z)$ — передаточная функция фильтра r -го канала; $Y_r(z^K)$ — Z -образ сигнала r -го канала до увеличения частоты дискретизации в K раз; $X(z)$ — Z -образ группового сигнала с ЧРК. Как известно ([2.11], см. также 2.5), любой ФНЧ и последовательно включенный ЭЧД в K раз могут быть реализованы в виде так называемой полифазной цепи. При этом

$$H'_r(z) = \sum_{p=0}^{K-1} z^{-p} H_{rp}(z^K), \quad (9.2)$$

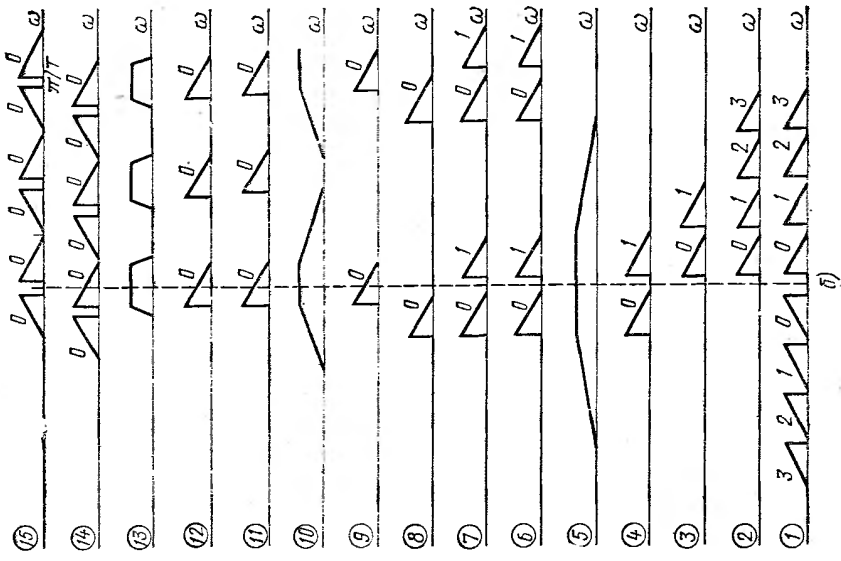
где $H'_r(z)$ — передаточная функция полифазной цепи; $H_{rp}(z^K)$ — передаточная функция фильтра p -й ветви полифазной цепи.

Пусть каждый полосовой фильтр схемы типа изображенной на рис. 9.2,б реализуется в виде ФНЧ с передаточной функцией $H(z)$ и однополосного модулятора, обеспечивающего перенос спектра. Тогда передаточная функция одной ветви схемы обратного преобразования имеет вид

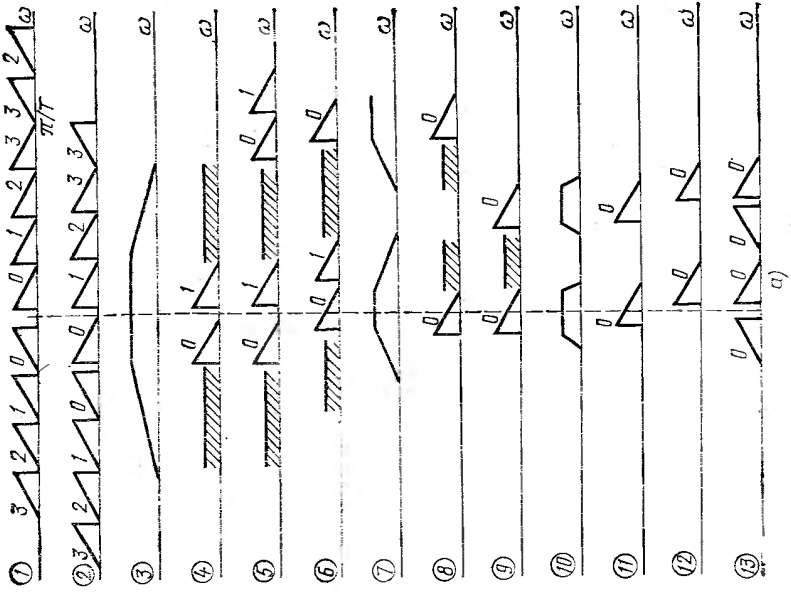
$$H_r(z) = H(z e^{-i(2\pi/K)r}). \quad (9.3)$$

Если ФНЧ ЭЧД реализуются в виде полифазной цепи, то из (9.2) и (9.3) можно записать

$$H_r(z) = \sum_{p=0}^{K-1} (z e^{-i(2\pi/K)r})^{-p} H_{rp}(z^K). \quad (9.4)$$



b)



a)

Поскольку ФНЧ во всех ветвях имеют одинаковые характеристики, очевидно, что $H_{rp}(z^K)$ не зависит от индекса r , т. е.

$$H_{rp}(z^K) \equiv H_p(z^K). \quad (9.5)$$

Из (9.1), (9.4) и (9.5) получается выражение для z -образа комплексного группового сигнала с ЧРК

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{r=0}^{K-1} \sum_{p=0}^{K-1} z^{-p} e^{i(2\pi/K)rp} H_p(z^K) Y_r(z^K) = \\ &= \sum_{p=0}^{K-1} z^{-p} H_p(z^K) \sum_{r=0}^{K-1} Y_r(z^K) e^{i(2\pi/K)rp}. \end{aligned}$$

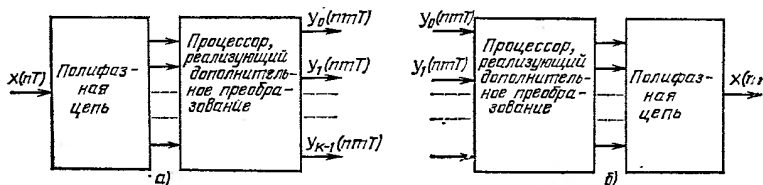


Рис. 9.11

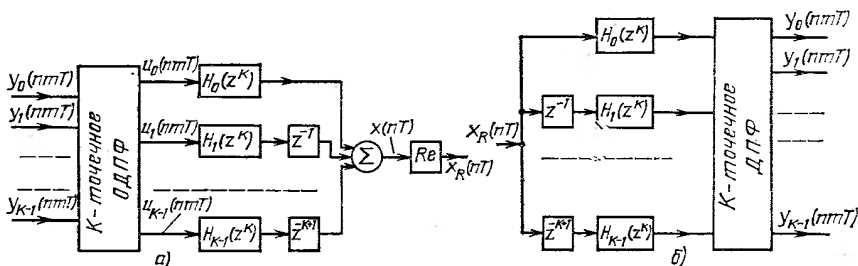


Рис. 9.12

Выражение (9.6) соответствует следующему алгоритму вычисления отсчетов вещественного группового сигнала с ЧРК $\text{Re}\{x(nT)\}$ (схема, реализующая этот алгоритм, изображена на рис. 9.12,а):

1. Выполняется ОДПФ в реальном масштабе времени над отсчетами входных сигналов, причем организуется следующая последовательность вычислений ОДПФ: первый раз вычисляется ОДПФ конечной последовательности $y_0(0)$, $y_1(0)$, ..., $y_{K-1}(0)$, второй раз — конечной последовательности $y_0(mT)$, $y_1(mT)$, ..., $y_{K-1}(mT)$ и т. д. В результате каждого вычисления ОДПФ получаются K комплексных величин $u_0(nmT)$, $u_1(nmT)$, ..., $u_{K-1}(nmT)$. Очевидно, что одно вычисление ОДПФ должно быть выполнено за время mT .

2. Величины $u_0(nmT)$, $u_1(nmT)$, ..., $u_{K-1}(nmT)$ подаются на фильтры с передаточными функциями $H_p(z^K)$ (фильтры полифазной цепи), работающие на низкой частоте дискретизации $f_d = 1/(mT)$, причем $u_0(0)$, $u_0(mT)$, ..., подаются на

фильтр с передаточной функцией $H_0(z^K)$, величины $u_1(0), u_1(mT), \dots$ — на фильтр с передаточной функцией $H_1(z^K)$ и т. д. Каждый из этих фильтров состоит из двух фильтров, один из которых обрабатывает вещественную часть сигнала, а другой — мнимую.

3. Выходные сигналы фильтров подаются на элементы, обеспечивающие задержку на время $0, T, \dots, (K-1)T$.

4. Сигналы с выходов элементов задержки суммируются, причем выходной сигнал сумматора $x(nT)$ представляет собой комплексный групповой сигнал с ЧРК.

5. Для получения вещественного группового сигнала с ЧРК вида $x_R(nT) = \text{Re}\{x(nT)\}$ вычисляется вещественная часть сигнала $x(nT)$ (элемент Re на рис. 9.12,а).

Можно несколько упростить схему, изображенную на рис. 9.12,а, если выполнить операцию формирования вещественных сигналов на выходах фильтров, т. е. включить элементы Re между выходами фильтров и входами элементов задержки.

На рис. 9.12,б изображена схема прямого преобразования, построенная по принципу дуальности. Из обозначений сигналов и элементов видно, что на входе каждого фильтра имеется компрессор частоты дискретизации, уменьшающий частоту в K раз ($m=K$).

9.4.3. Преимущества и недостатки схем ТМ с дополнительными преобразованиями

Основное достоинство схем ТМ с дополнительными преобразованиями заключается в том, что все арифметические операции выполняются на низкой частоте дискретизации $f_d = 1/(mT)$ сигнала одного канала. Это позволяет использовать для реализации ТМ элементы с относительно низким быстродействием.

Недостатком ТМ с дополнительными преобразованиями является относительно низкая модульность соответствующих схем, поскольку наряду с процессором, реализующим преобразования того или иного типа (например, ОДПФ и ДПФ, см. рис. 9.12), они содержат K цифровых фильтров, АЧХ которых отличаются друг от друга.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

- Адаптация 161
- Адаптации погрешность 163
- Алгоритм Агарвала — Кули 31
- Берга 231
- БПФ с произвольным основанием 17
- взаимно-простых делителей 19
- Винограда 33
- Левинсона 229
- метода периодограмм 220
- Ремеза 120, 121, 123
- с множителями поворота 17
- с прореживанием по времени 14
- — — — частоте 14
- АЧХ нормированная 192

Б

- Блок биквадратный 53

В

- Вес 82
- Время замедления групповое 56, 57

Г

- Гильберта преобразование 176
- Граф сигнальный 60, 61

Д

- Дельта-функция дискретная 7
- Дисперсия шума квантования 98, 103
- — — эквивалентная 98

И

- Инверсия спектра вещественного сигнала 172, 173, 175
- Интерполяция 184
- нулевого порядка 191
- первого порядка (линейная) 193
- полиномиальная 191
- решетчатой функции 184
- сигнала 184, 186, 200

К

- Квантование сигнала 91
- числа 90
- Код дополнительный 86, 87
- — модифицированный 87
- обратный 86
- прямой 86, 87
- Компенсация помех адаптивная 164
- Компрессор частоты дискретизации 64, 65
- КОРДИК 38
- оптимальный 38
- полный 38
- Коэффициент децимации 208
- отражения 170

- Критерий устойчивости положения равновесия 159

М

- Матрица входного сигнала автокорреляционная 166
- циклическая 32, 33
- Метод билинейного преобразования 136
- быстрой свертки 25
- градиентный 166
- детерминированный 146
- линейного предсказания 230
- модульный арифметики в конце полиномов 26
- наименьших квадратов 118, 124, 127
- перекрытия с суммированием 25
- — с накоплением 25
- периодограмм 22
- устранения переполнения 161
- цифровой спектрального анализа 219
- Множитель масштабный 153—155
- Модель линейная 91, 92, 94, 95
- нелинейная 91, 92
- процесса авторегрессии 228—232
- — — со скользящим средним 227

О

- Ограничение Левинсона 231
- Округление 90
- Операция восстановления 6
- дискретизации 6
- квантования 6
- цифро-аналогового преобразования 6
- Основание позиционной системы счисления 82
- Отклонение среднее квадратическое 45
- стандартное 45
- Отображение конформное 138
- Оценка детерминированная 96
- ошибок квантования 10
- Ошибка квантования сигнала 96, 97
- округления 90
- усечения 91

П

- Перенос спектра вещественного сигнала 171
- Переполнение разрядной сетки 85
- Погрешность адаптации АФ 163
- — — текущая 165
- Последовательность случайная 44
- прореженная 65
- Преобразование билинейное 138
- — обобщенное 139
- Гильберта 176

- теоретико-числовое Мерсенна 29
- — обратное 27
- — прямое 25—27
- — Ферма 28
- Фурье дискретное 11—13
- — — многомерное 14, 20
- — — обратное 11, 14
- — — прямое 11, 14
- Преобразователь аналого-цифровой 7
- цифро-аналоговые 7
- Принцип дуальности трансмультиплектора 234

С

- Сигнал аналоговый 4
- вещественный 4
- дискретный 4
- комплексный 4
- цифровой 5
- Свертка дискретная 22
- линейная 23, 24
- круговая 13, 21, 22, 25, 33
- Система дискретная восходящая 63
- — — многократная 64, 72, 74
- — — простейшая 63, 68, 102
- — — многократная 63
- — — нисходящая 63, 210—217
- — — многократная 64, 75, 77, 81, 217, 218
- — — простейшая 63
- интерполяции двухкратная 202
- — однократная 201
- — трехкратная 202
- счисления 82
- — позиционная 82

- Соединение каскадное 51
- параллельное 51

Спектр:

- основной инверсный 10
- прямой 11
- последовательности 9, 12
- сдвинутый инверсный 11
- прямой 11

Структура:

- многоуровневая 233
- одноуровневая 233
- полифазная 191

Т

- Теорема Парсеваля 59, 62
- Трансмультимплексор (ТМ):
- классификация 233
- критерий качества 234
- назначение 232
- основные параметры 233, 234
- — многоуровневый с комплексными сигналами 239—242
- — четырехканальный 236

У

- Усечение 90

- Условие устойчивости ЛРДФ 157, 158
- — РЦФ 158, 159
- Устойчивость РЦФ линейных 157, 158
- — положения равновесия 159
- — — асимптотическая 159
- процессов 160
- Устройство линейное предсказывающее 167
- цифровой обработки сигналов 50, 56

Ф

- Фильтр адаптивный (АФ) 163
- — нерекursивный (НАФ) 165, 192
- комплексный 47
- линейный аналоговый 46
- — дискретный 46, 58
- — — с переменными параметрами 46, 47
- — — с постоянными параметрами 46
- нерекursивный 48, 50, 209
- минимально-фазовый 111
- — с линейной ФЧХ 110
- неустойчивый 54
- однородный 192, 195, 211
- оптимальный 195
- полосовой 125, 215
- рекурсивный 48, 49, 211
- решетчатый 169
- треугольный 195, 211, 213, 214
- устойчивый 54
- цифровой 48, 49, 58
- Форма каноническая 52
- каскадная 52
- параллельная 53
- прямая 52
- Фортран 17
- Функция автокорреляционная 45
- оконная:
- — принцип выбора 226
- — свойства 221
- передаточная 50, 51, 69—82, 136—146
- — НЦФ 287, 288
- — РЦФ Баттерворта, Золотарева, Чебышева 246—248
- решетчатая 4, 14
- — квантованная 5

Ц

- Цепь линейная цифровая с постоянными параметрами 60

Ч

- Число нормализованное 85

Ш

- Шаг квантования 90
- Шум квантования 92, 102, 103, 105—108
- округления 129—131

Э

- Экспандер частоты дискретизации 64

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
1. Свойства и преобразования дискретных сигналов	4
1.1. Типы сигналов. Связь между сигналами различных типов	4
1.1.1. Классификация сигналов	4
1.1.2. Связь между аналоговыми и дискретными сигналами	6
1.1.3. Связь между дискретными и цифровыми сигналами	6
1.1.4. Дискретная дельта-функция	7
1.2. Z-преобразование и преобразование Фурье	7
1.2.1. Прямое Z-преобразование	7
1.2.2. Основные свойства прямого Z-преобразования	8
1.2.3. Обратное Z-преобразование	9
1.2.4. Преобразование Фурье	9
1.3. Дискретное преобразование Фурье. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье	11
1.3.1. Общие сведения	11
1.3.2. Свойства дискретного преобразования Фурье	12
1.3.3. Многомерное дискретное преобразование Фурье	14
1.3.4. Алгоритмы БПФ с основанием 2	14
1.3.5. Алгоритмы БПФ для произвольного составного N	17
1.4. Дискретная свертка и ее вычисление	21
1.4.1. Круговая свертка	21
1.4.2. Использование ДПФ для вычисления круговой свертки	22
1.4.3. Линейная свертка	23
1.4.4. Секционированные свертки	24
1.4.5. Методы быстрого вычисления круговой свертки	25
1.4.6. Использование теоретико-числовых преобразований	26
1.4.7. Использование модульной арифметики в кольце полиномов	29
1.5. Некоторые перспективные алгоритмы вычисления ДПФ	33
1.5.1. Алгоритм Винограда	33
1.5.2. Алгоритм Винограда с использованием ТЧП	38
1.5.3. Использование эффективных методов поворота вектора (КОР-ДИК)	38
1.5.4. Специальные виды ДПФ	40
1.6. Случайные последовательности и их характеристики	44
1.6.1. Случайная последовательность	44
1.6.2. Математическое ожидание и выборочное среднее	44
1.6.3. Дисперсия и выборочная дисперсия	44
1.6.4. Автокорреляционная функция стационарной случайной последовательности	45
1.6.5. Спектральная плотность мощности стационарной случайной последовательности	45
2. Дискретные системы	46
2.1. Дискретные и цифровые фильтры. Устройства цифровой обработки сигналов	46
2.1.1. Линейные аналоговые фильтры	46
2.1.2. Линейные дискретные фильтры	46
2.1.3. Переход от разностного уравнения к структурной схеме фильтра	48

2.1.4.	Цифровые фильтры	49
2.1.5.	Устройства цифровой обработки сигналов	50
2.2.	Передаточные функции. Различные формы реализации фильтров. Первый критерий устойчивости	50
2.2.1.	Передаточные функции	50
2.2.2.	Соединение фильтров	51
2.2.3.	Некоторые формы реализации фильтров	52
2.2.4.	Реализационные характеристики фильтров	53
2.2.5.	Устойчивость фильтров. Первый критерий устойчивости	54
2.3.	Частотные и временные характеристики фильтров	55
2.3.1.	Частотные характеристики	55
2.3.2.	Основные свойства частотных характеристик. Нормировка частоты	57
2.3.3.	Импульсная характеристика	58
2.3.4.	Второй критерий устойчивости фильтров	59
2.3.5.	Теорема Парсеваля	59
2.4.	Анализ линейных цифровых цепей с постоянными параметрами	60
2.4.1.	Цели анализа линейных цифровых цепей с постоянными параметрами	60
2.4.2.	Определение Z-образа сигнала по сигнальному графу цепи	60
2.4.3.	Определение характеристик цепи и параметров детерминированных и случайных сигналов на выходе цепи	62
2.5.	Восходящие и нисходящие дискретные системы	63
2.5.1.	Общие сведения	63
2.5.2.	Экспандер частоты дискретизации	64
2.5.3.	Компрессор частоты дискретизации	65
2.5.4.	Простейшие восходящие дискретные системы	68
2.5.5.	Многократные восходящие дискретные системы	72
2.5.6.	Простейшие нисходящие дискретные системы	75
2.5.7.	Многократные нисходящие дискретные системы	77
3.	Эффекты квантования сигналов в цифровых фильтрах	82
3.1.	Позиционные системы счисления	82
3.1.1.	Основные определения	82
3.1.2.	Перевод чисел из одной ПСС в другую	83
3.2.	Формы представления чисел в цифровых фильтрах	84
3.2.1.	Фиксированная запятая	84
3.2.2.	Плавающая запятая	85
3.3.	Кодирование чисел в цифровых фильтрах	86
3.3.1.	Прямой код	86
3.3.2.	Дополнительный код	86
3.3.3.	Обратный код	87
3.4.	Арифметические операции в цифровых фильтрах, использующих арифметику с фиксированной запятой	87
3.4.1.	Алгебраическое сложение в дополнительном коде	87
3.4.2.	Алгебраическое сложение в обратном коде	88
3.4.3.	Переполнение разрядной сетки при сложении	88
3.4.4.	Умножение в прямом коде	88
3.4.5.	Умножение в дополнительном коде	89
3.5.	Квантование чисел в цифровых фильтрах, использующих арифметику с фиксированной запятой	90
3.5.1.	Общие сведения	90
3.5.2.	Округление	90
3.5.3.	Усечение	91
3.6.	Квантование сигналов в цифровых фильтрах	91
3.6.1.	Модели процесса квантования	91
3.6.2.	Детерминированные оценки ошибок квантования	91
3.6.3.	Вероятностные оценки ошибок квантования	92
3.7.	Учет квантования сигналов в структурных схемах цифровых фильтров	92
3.8.	Обобщенная линейная модель цифрового фильтра	94

3.9. Оценки ошибок (шумов) квантования выходного сигнала в цифровом фильтре	96
3.9.1. Общие сведения	96
3.9.2. Детерминированные оценки	96
3.9.3. Вероятностные оценки	98
3.10. Оценки диапазона изменения сигнала в цифровом фильтре	100
3.10.1. Ограничение максимума амплитуды входного сигнала	100
3.10.2. Ограничение максимума модуля спектра входного сигнала	100
3.10.3. Ограничение энергии входного сигнала	101
3.10.4. Обобщенное ограничение	101
3.11. Оценки ошибок (шумов) квантования и диапазона изменения сигналов в восходящих и нисходящих цифровых системах	101
3.11.1. Общие сведения	101
3.11.2. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в ПВЦС	102
3.11.3. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в МВЦС	105
3.11.4. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в ПНЦС	107
3.11.5. Оценки шумов квантования и диапазона изменения сигналов в МНЦС	107
4. Элементы проектирования нерекурсивных фильтров	109
4.1. Классификация нерекурсивных фильтров. Алгоритм проектирования	109
4.1.1. Нерекурсивные фильтры с линейной ФЧХ	109
4.1.2. Минимально-фазовые нерекурсивные фильтры	111
4.1.3. Основные этапы проектирования нерекурсивных фильтров	112
4.1.4. Сравнение нерекурсивных и рекурсивных фильтров	113
4.2. Формулировка задач аппроксимации	113
4.2.1. Требования к аппроксимируемой функции. Критерии аппроксимации	113
4.2.2. Избирательные фильтры с линейной ФЧХ	114
4.2.3. Равнополосные фильтры с линейной ФЧХ	115
4.2.4. Преобразование Гильберта	115
4.2.5. Минимально-фазовые фильтры	116
4.3. Методы решения задач аппроксимации	117
4.3.1. Классификация методов	117
4.3.2. Разложение в ряд Фурье аппроксимируемой функции	117
4.3.3. Метод наименьших квадратов	118
4.3.4. Метод наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации. Алгоритм Ремеза	120
4.3.5. Решение чебышевской аппроксимационной задачи для фильтра с линейной ФЧХ с помощью алгоритма Ремеза	121
4.3.6. Решение чебышевской аппроксимационной задачи для минимально-фазового фильтра	122
4.3.7. Решение аппроксимационной задачи для амплитудно-фазового корректора по методу наименьших квадратов	124
4.3.8. Оценка погрешности аппроксимации	125
4.3.9. Сравнение возможностей фильтров с линейной ФЧХ и минимально-фазовых фильтров	126
4.3.10. Сравнение методов решения аппроксимационных задач	127
4.4. Расчет разрядностей коэффициентов фильтров и регистров оперативной памяти	128
4.4.1. Расчет разрядности коэффициентов фильтров	128
4.4.2. Основные предположения при расчете разрядностей регистров оперативной памяти	129
4.4.3. Расчет величины s_d	129
4.4.4. Расчет величин $s_{\text{вх}}$ и s_d (вероятностный подход)	129
4.4.5. Расчет величин $s_{\text{вх}}$ и s_d «на худший случай»	130

4.4.6.	Алгоритм расчета разрядности коэффициентов фильтра, реализуемого на специализированном микропроцессоре	131
4.4.7.	Алгоритм расчета минимальной разрядности коэффициентов фильтра	132
4.4.8.	Расчет разрядностей регистров оперативной памяти по заданному динамическому диапазону и отношению сигнал-шум	134
4.4.9.	Априорная оценка разрядности входного сигнала фильтра	135
5.	Элементы проектирования рекурсивных цифровых фильтров	136
5.1.	Аппроксимация в процессе синтеза РЦФ	136
5.1.1.	Общие сведения	136
5.1.2.	Типы аналоговых фильтров	136
5.1.3.	Билинейное преобразование	138
5.1.4.	Обобщенное билинейное преобразование	139
5.1.5.	Определение передаточной функции цифрового ФНЧ (ФВЧ) по справочнику [5.1]	139
5.1.6.	Определение передаточной функции цифрового полосового (режекторного) фильтра по справочнику [5.1]	144
5.1.7.	Определение передаточной функции параллельной структуры РЦФ	145
5.1.8.	Определение передаточной функции РЦФ с помощью билинейного преобразования на ЭВМ	146
5.2.	Расчет разрядностей коэффициентов фильтра и регистров оперативной памяти	146
5.2.1.	Общие сведения	146
5.2.2.	Определение разрядности коэффициентов	146
5.2.3.	Определение разрядностей входного сигнала и регистров оперативной памяти по вероятностной модели ошибок квантования	147
5.2.4.	Определение разрядностей входного сигнала и регистров оперативной памяти по детерминированной модели ошибок квантования	152
5.3.	Расчет масштабных множителей	153
5.4.	Расстановка звеньев в каскадных структурах РЦФ	155
5.5.	Устойчивость рекурсивных цифровых фильтров	157
5.5.1.	Устойчивость линейных рекурсивных дискретных фильтров	157
5.5.2.	Определения устойчивости и класса входных сигналов РЦФ	158
5.5.3.	Устойчивость положения равновесия	159
5.5.4.	Устойчивость процессов	160
6.	Адаптивные дискретные и цифровые фильтры	161
6.1.	Общие сведения	161
6.1.1.	Определение и некоторые примеры	161
6.1.2.	Критерии настройки адаптивных фильтров и методы определения значений их параметров	163
6.2.	Адаптивный фильтр-компенсатор помех	164
6.2.1.	Принцип адаптивной компенсации помех	164
6.2.2.	Точный алгоритм настройки нерекурсивного адаптивного фильтра по минимуму СКО	165
6.2.3.	Настройка нерекурсивного адаптивного фильтра по минимуму СКО с помощью градиентного метода	166
6.3.	Адаптивный фильтр — линейное предсказывающее устройство	167
6.3.1.	Метод линейного предсказания	167
6.3.2.	Решетчатые фильтры	169
7.	Некоторые методы ЦОС в системах связи	171
7.1.	Перенос и инверсия спектра	171
7.1.1.	Перенос и инверсия спектра вещественного сигнала	171
7.1.2.	Перенос спектра комплексного сигнала	173
7.2.	Формирование сигнала с одной боковой полосой (ОБП)	173
7.2.1.	Формирование сигнала с ОБП с использованием ФНЧ	173

7.2.2.	Формирование сигнала канала ТЧ с ОБП с использованием ФНЧ	175
7.2.3.	Формирование сигнала с ОБП с использованием преобразователя Гильберта	176
7.3.	Увеличение частоты дискретизации (интерполяция) сигнала	184
7.3.1.	Основные понятия	184
7.3.2.	Интерполяция сигнала с помощью ПВДС	186
7.3.3.	Особенности использования НФ и РФ при интерполяции	188
7.3.4.	Характеристики фильтров реальных ПВДС	188
7.3.5.	Структуры ПВДС при интерполяции	189
7.3.6.	Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции	191
7.3.7.	Простейшие ВДС с оптимальными фильтрами	194
7.3.8.	Перенос спектра при интерполяции	197
7.3.9.	Перенос спектра при интерполяции комплексного сигнала	198
7.3.10.	Интерполяция сигнала с помощью МВДС	200
7.4.	Уменьшение частоты дискретизации (децимация) сигнала	203
7.4.1.	Децимация сигнала с помощью ПНДС	203
7.4.2.	Особенности использования НФ и РФ при децимации	209
7.4.3.	Структуры ПНДС при децимации сигнала	210
7.4.4.	Однородный и триангулярный фильтры при децимации	211
7.4.5.	Простейшая НДС с оптимальными фильтрами	214
7.4.6.	Перенос спектра при полосовой фильтрации с уменьшением частоты дискретизации	214
7.4.7.	Перенос спектра при децимации комплексного сигнала	217
7.4.8.	Децимация сигнала с помощью МНДС	218
8.	Цифровые методы спектрального анализа	219
8.1.	Цели спектрального анализа. Классификация методов	219
8.1.1.	Цели спектрального анализа	219
8.1.2.	Классификация методов спектрального анализа	219
8.2.	Метод периодограмм	220
8.2.1.	Алгоритм метода периодограмм	220
8.2.2.	Основные свойства оконных функций	221
8.2.3.	Принципы выбора оконной функции	226
8.3.	Методы спектрального анализа, основанные на линейном моделировании	227
8.3.1.	Линейные модели и расчет СПМ	227
8.3.2.	Определение параметров АР-модели по известной автокорреляционной функции последовательности	228
8.3.3.	Определение параметров АР-модели по анализируемым данным	229
8.3.4.	Определение порядка АР-модели	232
9.	Трансмультимплексы	232
9.1.	Общие сведения о трансмультимплексах. Принципы построения их схем	232
9.1.1.	Назначение трансмультимплексов	232
9.1.2.	Классификация трансмультимплексов	233
9.1.3.	Основные параметры и критерии качества трансмультимплексов	233
9.1.4.	Принципы дуальности схем прямого и обратного преобразований трансмультимплексов	234
9.2.	Одноуровневые структуры ТМ без дополнительных преобразований	235
9.2.1.	Структура ТМ с вещественными сигналами	235
9.2.2.	Структура ТМ с комплексными сигналами и однократным изменением частоты дискретизации	236
9.2.3.	Структура ТМ с комплексными сигналами, однократным изменением частоты дискретизации и дополнительными ФНЧ ₁	237
9.2.4.	Структура ТМ с комплексными сигналами и двукратным (многократным) изменением частоты дискретизации	238
9.3.	Многоуровневые структуры ТМ без дополнительных преобразований	239
9.3.1.	Общая структура многоуровневого ТМ	239
9.3.2.	Многоуровневый ТМ с комплексными сигналами	239

9.4. Трансмультимплексоры с дополнительными преобразованиями	242
9.4.1. Общая структура ТМ с дополнительными преобразованиями	242
9.4.2. Пример ТМ с дополнительным преобразованием	242
9.4.3. Преимущества и недостатки схем ТМ с дополнительными преобразованиями	246
<i>Приложение 1.</i> Определенные передаточные функции РЦФ Баттерворта, Чебышева, Золотарева	246
<i>Приложение 2.</i> Расчет масштабирующих коэффициентов РЦФ	256
<i>Приложение 3.</i> Анализ частотных характеристик и чувствительности линейных ЦФ произвольной топологии	265
<i>Приложение 4.</i> Анализ временных и шумовых характеристик линейных ЦФ произвольной топологии	278
<i>Приложение 5.</i> Определенные передаточные функции НЦФ	287
Список литературы	301
Предметный указатель	305