

# INTRODUCTION TO DIGITAL FILTERING

Edited by  
**R. E. Bogner**

Department of Electrical Engineering  
University of Adelaide, Australia

and

**A. G. Constantinides**

Department of Electrical Engineering  
Imperial College of Science and Technology, London

A Wiley — Interscience Publication

John Wiley and Sons  
London · New York · Sydney · Toronto  
1975

# ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ФИЛЬТРАЦИЮ

Под редакцией  
**Р. БОГНЕРА**  
и **А. КОНСТАНТИНИДИСА**

Перевод с английского

Под редакцией  
**Л. И. Филиппова**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
МОСКВА 1976

Книга написана на основе лекций, прочитанных в Лондонском имперском колледже специалистами в области цифровой обработки сигналов. В доступной форме изложены основы математического аппарата, используемого при работе с дискретными сигналами, описаны методы синтеза цифровых фильтров, проанализированы основные ограничения, связанные с дискретным представлением данных.

Книга рассчитана прежде всего на студентов и аспирантов электротехнических специальностей, но также весьма полезна инженерам и научным работникам, применяющим цифровые методы обработки данных, и всем, кто желает ознакомиться с указанными методами.

*Редакция литературы по новой технике*

Copyright © 1975, by John Wiley and Sons, Ltd. All Rights Reserved. Authorised translation from the English language edition published by John Wiley and Sons Ltd.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1977.

## ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ФИЛЬТРАЦИЮ

Редактор Л. Якименко

Художник Н. Алексеев. Художественный редактор В. Бисенгалиев

Технический редактор Н. Иовлева

Сдано в набор 19/V 1976 г. Подписано к печати 27/VIII 1976 г. Бумага тип. № 2  
60×90<sup>1/16</sup>—6,75 бум. л. 13,50 печ. л. Уч.-изд. л. 12,16. Изд. № 20/8907. Зак. 550. Цена 1 р. 0,5 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 11 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств полиграфии и книжной торговли. Москва, 113105, Нагатинская, 1.

В 30401—162  
041(01)—76 162—77

Многочисленные высказывания читателей по вопросу о назначении предисловий сходятся на том, что последние служат для оправдания предпринятого труда. В оригинале этой книги, написанной коллективом английских авторов, под редакцией Р. Богнера и А. Константиноидиса предисловие по существу отсутствует. И это естественно: практическая важность сравнительно новой области исследований и техники — цифровой фильтрации — очевидна для всех, кто работает в этом или смежных научных направлениях. Даже обычно пессимистически настроенные исследователи, столкнувшись на практике с цифровой фильтрацией, признают ее целесообразность не только в тех случаях, когда используется цифровая вычислительная машина, но часто и тогда, когда для цифровой обработки сигналов приходится разрабатывать специальное устройство, затратив на это дополнительные время и энергию. По наиболее оптимистическим прогнозам малогабаритные цифровые устройства в ближайшем будущем полностью вытеснят аналоговые фильтры.

Согласно исследованиям некоторых фирм, цифровые фильтры вскоре окажется целесообразным применять даже в тех случаях, когда не только входные сигналы поступают в аналоговом виде (что чаще всего и бывает), но и выходные колебания необходимо иметь в непрерывной форме (как, например, в радиовещании или телевидении). В этом случае необходимо лишь добавить аналого-цифровой и цифро-аналоговый преобразователи.

Техника интегральных схем позволяет разместить все необходимые операторы в объеме нескольких кубических сантиметров. Эта техника, освоение которой удачно «подоспело» ко времени достаточного полного развития теории цифровой фильтрации, практически избавила последнюю от длительных традиционных этапов «эмоционального оптимизма», рационального осмысливания выводов теории и поисков ее целесообразного применения.

В нашей стране издано несколько книг по теории цифровой фильтрации. Целесообразность настоящего издания диктуется рядом обстоятельств. Во-первых, эта книга написана коллективом авторов, каждый из которых специализировался в соответствующих разделах теории. Во-вторых, книга задумана авторами как введение в теорию: она написана на достаточно высоком (и современном) уровне, доступном инженерам и студентам старших курсов. Наконец, в-третьих, книга буквально изобилует практически примерами. Более того, изложение почти каждого нового вопроса начинается с примера, что делает книгу особенно полезной для тех, кто впервые приступает к изучению цифровой фильтрации. Для понимания рассматриваемых вопросов достаточно знать основы теории преобразований Фурье и Лапласа.

Перевод выполнен Ю. Н. Александровым (гл. 4, 5, 9—11) и Э. Г. Назаренко (гл. 1—3, 6—8).

*Л. Филиппов*

## ВВЕДЕНИЕ

Р. Богнер

Первоначально цифровая фильтрация и цифровая обработка сигналов использовались в основном при моделировании аналоговых схем обработки сигналов на цифровых вычислительных машинах. Теперь эти вопросы представляют самостоятельную область исследований. Методы цифровой обработки сигналов и цифровой фильтрации имеют важное значение прежде всего потому, что они непосредственно применяются в ЦВМ и специализированных цифровых устройствах, предназначенных для работы в реальном времени, а также для обработки данных.

Стремительное развитие цифровых методов привело к необходимости организации курсов для их изучения. Такие курсы были созданы при Имперском колледже в Лондоне; прочитанные там лекции положены в основу этой книги. Материал излагается в следующем порядке.

Глава 1 дает общее представление о предпосылках и достижениях в области цифровой фильтрации. Основные идеи методов дискретизации и  $z$ -преобразования изложены в гл. 2. Они составляют математическую основу всех остальных глав книги. В гл. 3 рассматриваются общие характеристики цифровых фильтров во временной и частотной областях. В гл. 4 показано, как использовать для построения цифровых фильтров имеющиеся данные по аналоговым фильтрам, а в гл. 5 описаны некоторые методы прямого синтеза рекурсивных цифровых фильтров. Нерекурсивные цифровые фильтры рассмотрены в гл. 6, методы фурье-преобразований изложены в гл. 7. В гл. 8 описан весьма полезный метод синтеза на основе частотной выборки, а в гл. 9 этот метод рассмотрен для случая целых коэффициентов фильтра. Влияние эффектов квантования и округления на работу различных фильтров проанализировано в гл. 10. Наконец, в гл. 11 описаны некоторые методы оптимизации процедуры синтеза фильтров.

Мы выражаем благодарность нашим соавторам и коллегам за помощь и поддержку.

Р. Богнер<sup>1)</sup>

А. Константидис

Имперский колледж, Лондон

<sup>1)</sup> Р. Богнер в настоящее время работает в Университете Аделаиды (Австралия).

Назначение этой главы состоит в том, чтобы рассмотреть в общих чертах современное состояние обсуждаемых в книге вопросов и показать перспективы на будущее.

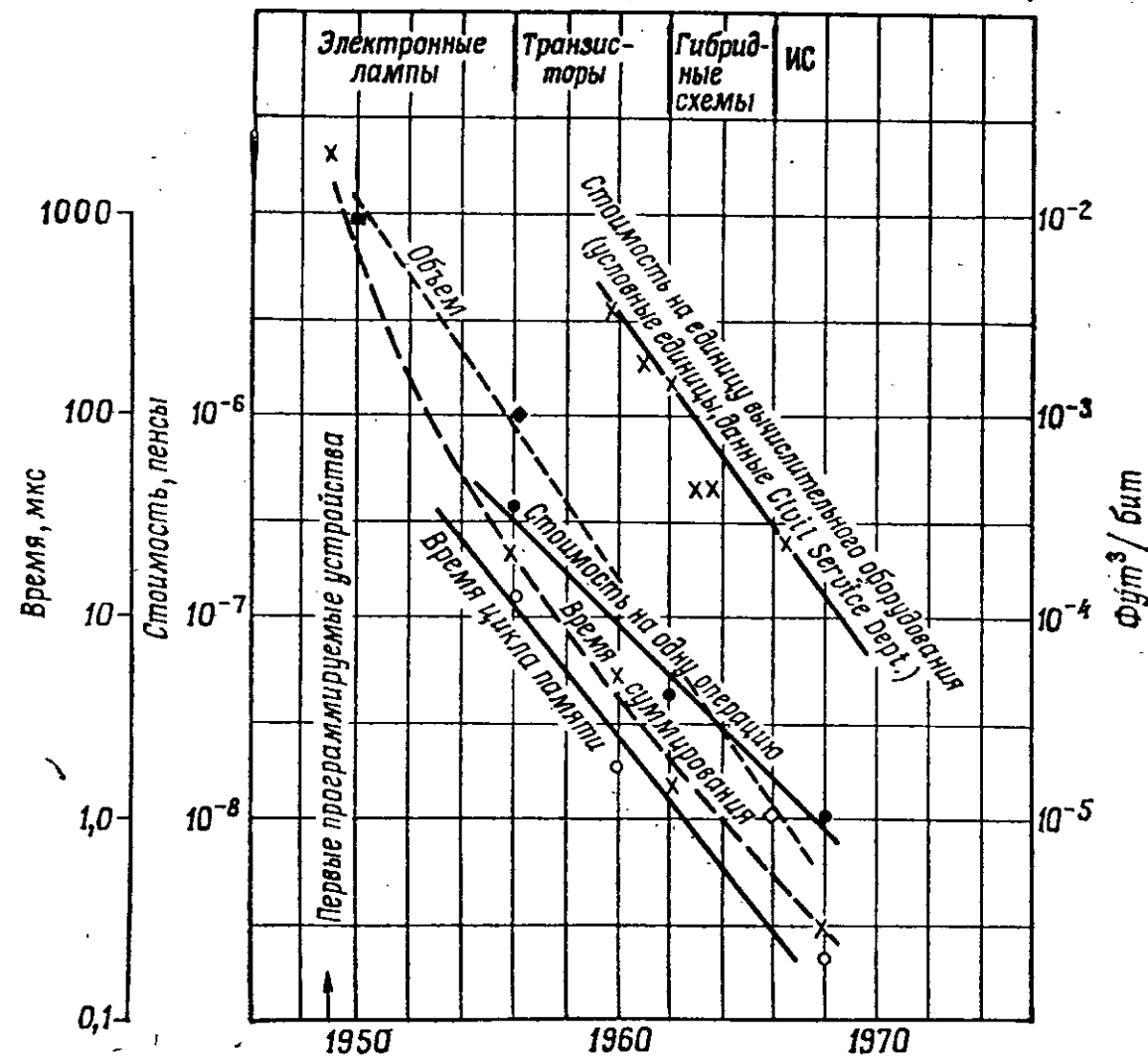
Существуют различные мнения по поводу того, что следует включать в понятие «цифровая фильтрация». По-видимому, целесообразно отнести сюда все системы обработки, где сигналы представлены последовательностями величин, получаемых в дискретные моменты времени. Такой подход позволяет рассматривать системы, в которых отсчеты сигналов в аналоговом виде запоминаются на емкостях, или системы, состоящие из отрезков линии передачи, используя в основном тот же математический аппарат, как и при описании чисто цифрового фильтра, построенного на элементах цифровой техники.

## 1.1. История и тенденции развития

Ускоряющееся развитие цифровой вычислительной техники приводит к созданию все более надежного, быстродействующего, миниатюрного и качественного оборудования [1—6] (фиг. 1.1).

Еще до появления автоматических цифровых вычислительных машин (ЦВМ) существовала примитивная техника вычислений, которая использовалась, например, при выполнении: гармонического фурье-анализа с определением амплитуд и фаз отдельных составляющих и суммы составляющих; сглаживания временных рядов с помощью окон, т. е. свертки; корреляции, или регрессионного анализа; анализа периодограмм, эквивалентного обработке гребенчатым фильтром; авторегрессионного анализа, эквивалентного рекурсивной фильтрации [8].

Эти виды обработки легко выполняются на ЦВМ. Они обычно использовались при анализе кратковременных сигналов, например сейсмических записей, записей приливов, волн, теплового режима



Фиг. 1.1. Прогресс в развитии вычислительной техники.

строений, экономических циклов. Автоматические ЦВМ позволили проводить анализ более детально, а также вычислять цифровую свертку длинных временных рядов, что эквивалентно моделированию аналоговой обработки сигналов. Выигрыш в скорости и стоимости, естественно, привел к моделированию систем связи, в которых сигналы могли быть представлены соответствующими выборками. Сложность экспериментов по обработке речевых сигналов и необходимость гибкости при их проведении послужили причиной того, что исследователи в области звука и электроакустики стали одними из наиболее приверженных сторонников цифровой обработки сигналов [9], преимуществами которой перед аналоговыми методами являются гибкость, надежность, точность и экономичность.

Существуют самые разнообразные вычислительные машины, включая большие универсальные вычислительные машины, малые универсальные программируемые ЦВМ, предназначенные для обработки сигналов, и специализированные устройства, способные

решать специфические задачи эффективнее или быстрее. Универсальная ЦВМ имеет дорогостоящий центральный процессор, пригодный для решения многих задач. Он выполняет все операции сложения и умножения (при необходимости сразу для нескольких фильтров), но это может ограничивать быстродействие системы. Существует тенденция к созданию очень гибких, полуспециализированных процессоров, которые могут быть запрограммированы на выполнение десятков арифметических операций одновременно [10–12].

В настоящее время имеется эффективная, малогабаритная и экономичная цифровая техника. Современная технология позволяет размещать многие тысячи схемных элементов на одном квадратном сантиметре, и можно ожидать, что вскоре появятся специализированные интегральные схемы, выполняющие функции цифровых фильтров [13].

Цифровые системы обладают рядом преимуществ по сравнению с аналоговыми. Они абсолютно стабильны и воспроизводимы, хорошо приспособлены для реализации на интегральных микросхемах, имеют большую гибкость и совместимы с цифровой аппаратурой для передачи данных. Однако почти очевидно, что быстродействие ЦВМ всегда будет недостаточным для некоторых задач. Достигнутый в настоящее время предел — около одного мегагерца, постоянно увеличивается.

## 1.2. Сравнение аналоговых и цифровых фильтров

Аналоговые системы с сосредоточенными параметрами состоят из элементов, выполняющих интегрирование и дифференцирование:

$$v(t) = \frac{\int i(t) dt}{C}, \quad i(t) = \frac{\int v(t) dt}{L},$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

и, кроме того, содержат масштабирующие устройства — усилители, резисторы, трансформаторы, для которых

$$v = Ri, \quad v_2 = Av_1, \quad v_2 = Nv_1.$$

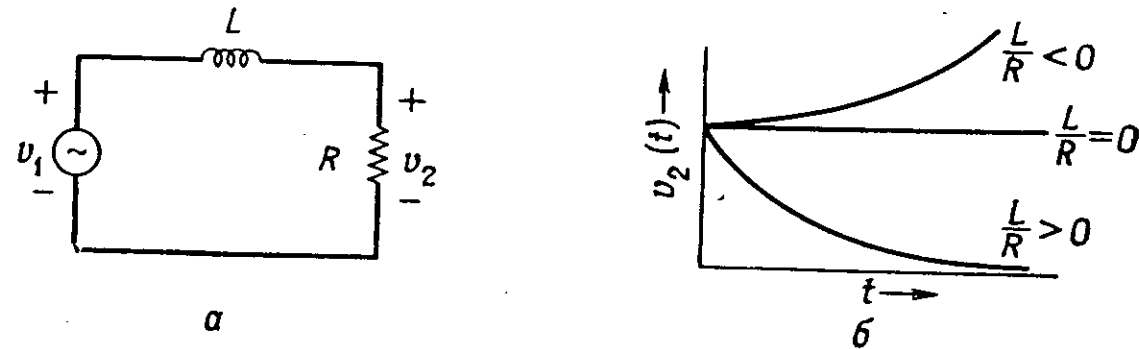
Уравнения, описывающие такие системы, являются линейными, интегродифференциальными. Например, система первого порядка на фиг. 1.2, а описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{L}{R} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = v_1; \quad (1.1)$$

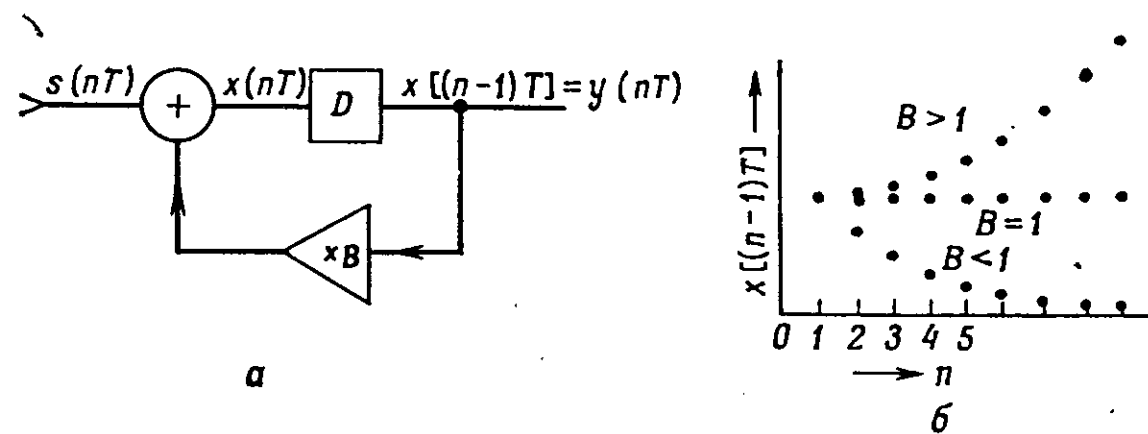
на фиг. 1.2, б представлена импульсная характеристика этой системы. Решения уравнений имеют вид суммы членов, соответствующих собственным затухающим либо возрастающим по экспоненте

синусоидальным или косинусоидальным колебаниям системы и вынужденным колебаниям от входного воздействия.

Если элементы системы линейны, то для нее применим принцип суперпозиции. Переменные в аналоговых системах определены в любой момент времени.



Фиг. 1.2. Непрерывная, или аналоговая, система первого порядка.  
а — цепь; б — импульсная характеристика.



Фиг. 1.3. Цифровая система первого порядка.  
а — блок-схема; б — импульсная характеристика.

В цифровых системах переменные известны лишь в дискретные моменты времени. В этих системах используются операции сложения и умножения, а также задержка, кратная интервалу времени, равному  $T$  секунд, между отсчетами, т. е. интервалу дискретизации, или периоду синхронизации. Возможность задержки обеспечивается путем хранения значений сигнала сколь угодно долго.

Простейшим примером является система первого порядка (фиг. 1.3, а). Здесь значение на выходе  $y(nT)$  равно  $x(nT)$ , задержанному на один интервал дискретизации, т. е. предыдущее значение  $x$  берется в качестве последующего значения  $y$ . Эта система описывается уравнением

$$x(nT) = s(nT) + Bx[(n-1)T], \quad (1.2)$$

откуда

$$x[(n-1)T] = \frac{x(nT)}{B} - \frac{s(nT)}{B},$$

$$x(nT) - x[(n-1)T] = x(nT) - \frac{x(nT)}{B} + \frac{s(nT)}{B},$$

$$B\Delta_1 x(nT) + (1-B)x(nT) = s(nT), \quad (1.3)$$

где  $\Delta_1$  — оператор первых разностей, определяемый следующим образом:

$$\Delta_1 x(nT) = x(nT) - x[(n-1)T].$$

Уравнение (1.3) является *разностным*, как, следовательно, и уравнение (1.2). Аналогично разностными являются уравнения, описывающие дискретные системы с задержкой. Эти уравнения играют здесь ту же роль, что и дифференциальные уравнения в аналоговых системах. В обоих случаях уравнения, к счастью, являются линейными, что позволяет применять принцип суперпозиции.

Приведенная система обладает импульсной характеристикой в виде экспоненты (фиг. 1.3, б), подобной той, которую имеет  $RL$ -цепь, но дискретизованной. В данном простом случае этот результат может быть легко получен. Пусть на вход подается единичный импульс  $s(0) = 1$  (с последующими нулями), а  $y$  в этот момент равен нулю. В последовательные моменты отсчетов имеем

$n$	$s(nT)$	$y(nT) = x[(n-1)T]$	$x(nT) = s(nT) + By(nT)$
0	1	0	1
1	0	1	$0 + B$
2	0	$B$	$0 + B^2$
...	...	...	...
$n$	0	$B^{n-1}$	$B^n$

Как и в случае аналоговых фильтров, здесь наблюдаются соответствующие затухающие синусоидальные колебания, являющиеся элементарными откликами систем высших порядков.

### 1.3. Время и частота

Цифровые фильтры, так же как и аналоговые, обычно описывают во временной либо в частотной области. Во временной области задается импульсная характеристика в виде последовательности чисел (обычно конечной). Эти числа могут быть использованы

непосредственно с помощью свертки (поскольку система подчиняется принципу суперпозиции), так что

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda,$$

$$y(nt) = \sum_r x(rT) h[(n-r)T],$$

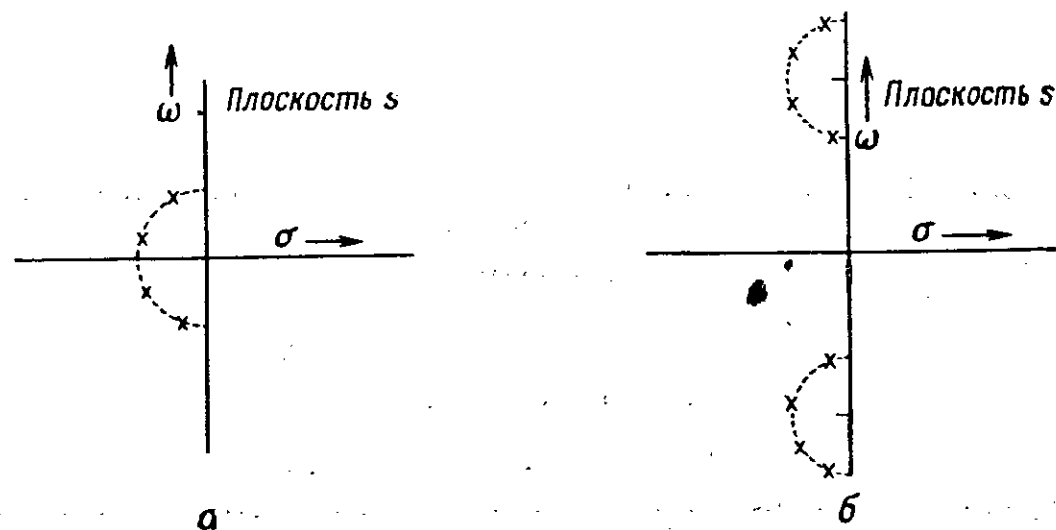
либо после их предварительного преобразования. Описание в частотной области (амплитуд и фаз) — по-видимому, наиболее общий вид описания фильтров, как аналоговых, так и цифровых. В случае цифровых фильтров дискретное преобразование Фурье (ДПФ) позволяет непосредственно находить частотную характеристику, а алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) нередко делают методы преобразования в частотную область предпочтительными. Поэтому часто, когда заданы временные характеристики, целесообразно переходить в частотную область и использовать преобразования Фурье:

$$y(nT) = x(nT) * h(nT)$$

Обратное ↑ ДПФ      ↓ ДПФ      ↓ ДПФ

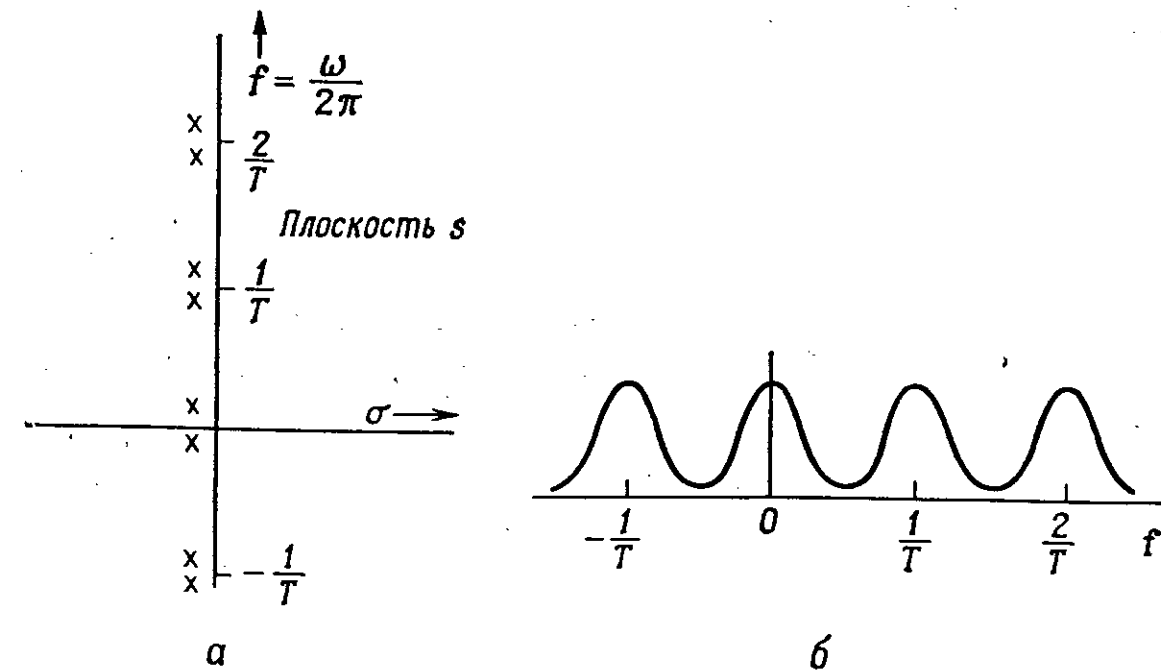
$$Y(mF) = X(mF) \times H(mF)$$

При теоретических исследованиях бывает полезно описывать передаточную функцию ее полюсами и нулями — частотами (обычно комплексными), при которых передаточная функция становится равной бесконечности или нулю. Пример такого представления показан на фиг. 1.4 для аналогового, максимально плоского, т. е. баттервортовского, фильтра (4-го порядка). Все физически реа-



Фиг. 1.4. Расположение полюсов максимально плоского аналогового фильтра. а — фильтр нижних частот; б — полосовой фильтр.

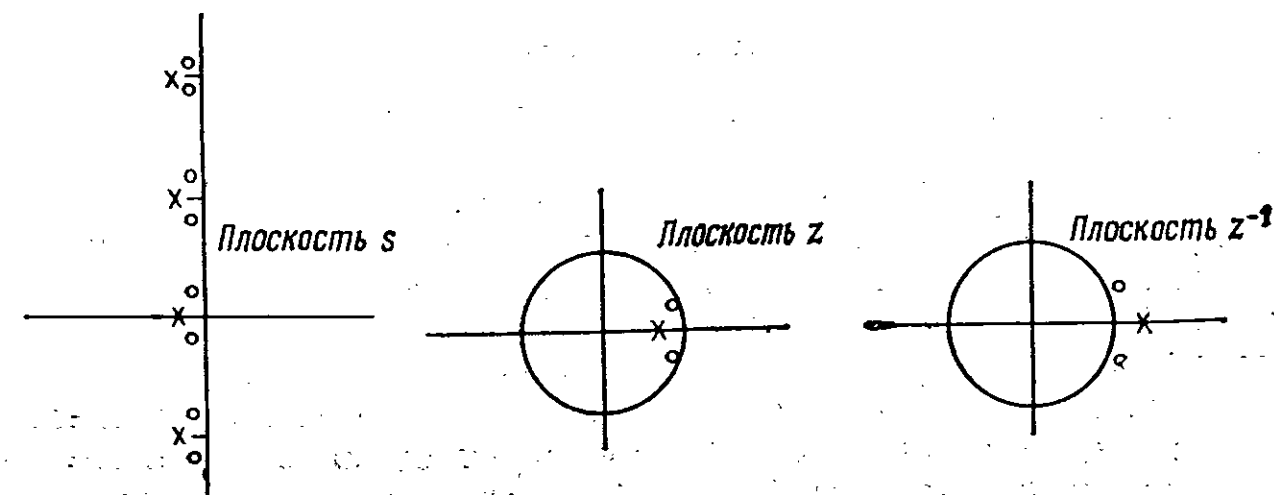
лизуемые линейные системы описываются подобным образом. Если принять, что определенное расположение полюсов и нулей обеспечивает приемлемую характеристику, то задача сводится к синтезу системы с заданным расположением полюсов и нулей.



Фиг. 1.5. Периодичность по частоте. а — повторение полюсов и нулей; б — частотная характеристика.

Одно из существенных различий между аналоговыми и цифровыми системами состоит в том, что последние имеют периодическую по частоте  $\omega$  конфигурацию полюсов и нулей (фиг. 1.5). Повторяемость с интервалом  $1/T$  Гц ( $T$  — период дискретизации) является результатом принципиально дискретного представления сигналов. Удобно представить эту циклическую структуру, отображая  $s$ -плоскость с помощью преобразования

$$z = e^{sT},$$



Фиг. 1.6. Отображение плоскости  $s$  в плоскость  $z$ .



при котором ось  $\omega$  отображается в окружность единичного радиуса и каждый оборот по окружности соответствует одному периоду на оси  $\omega$  (фиг. 1.6). Оказывается, что  $z$  является переменной, которая имеет такое же значение для цифровых фильтров, как  $s$  для аналоговых систем, а  $z$ -преобразование соответствует преобразованию Лапласа.

#### 1.4. Ограничения

На практике как для аналоговых, так и для цифровых фильтров существуют свои проблемы. Для первых — это проблемы стабильности и точности элементов; вторые имеют абсолютно точные элементы, но значения величин в этих фильтрах могут быть только квантованными. Последнее обстоятельство может оказаться несущественным при использовании больших вычислительных машин, оперирующих с многоразрядными числами с плавающей запятой, но это может быть очень важным при использовании специализированных машин, работающих с числами с фиксированной запятой. Переменные величины в аналоговых системах заданы с неограниченной точностью, в цифровых же системах они квантованы, и каждое сложение и умножение может стать источником ошибок округления, т. е. шума. Эти факторы оказывают влияние на структуру систем.

#### 1.5. Гибридные системы

Большинство идей, касающихся цифровых фильтров, применимо и к другим дискретным фильтрам; это дает возможность создавать различные гибридные системы, например для экономного использования центрального процессора. Так, можно применять цифровую память и аналоговые устройства сложения и умножения или задержку в дискретном виде и аналоговую память на емкостях.

#### 1.6. Методика синтеза

Основная идея синтеза как аналоговых, так и цифровых фильтров состоит в аппроксимации искомой характеристики реализуемой математической функцией. Фильтр может быть определен либо во временной области, либо в частотной, либо...? Вследствие значительного объема данных по характеристикам аналоговых фильтров (баттервортовских, чебышевских, эллиптических, бesselевских) иногда имеет смысл использовать эти данные для отыскания подходящих разностных уравнений с помощью соответствующих преобразований. В противоположность аналоговым фильтрам цифровые фильтры часто реализуются очень просто после того, как получены подходящие разностные уравнения. Прак-

тические соображения, такие, как стоимость или шумы, влияют скорее лишь на выбор конкретной реализации среди многих возможных.

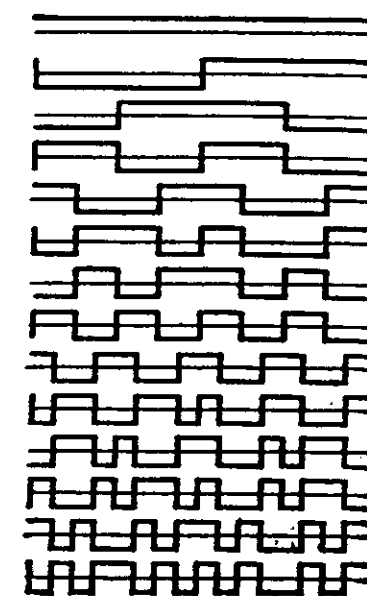
Как и во многих других областях техники, на синтез цифровых фильтров оказывают влияние методы машинного проектирования [14]. Это вполне естественно, поскольку разработчики цифровых фильтров знакомы с программированием на вычислительных машинах и, кроме того, аналитические методы проектирования цифровых фильтров пока недостаточно разработаны. И вряд ли они когда-нибудь понадобятся! При автоматической оптимизации могут учитываться одновременно многие факторы, такие, например, как неаналитические критерии синтеза, эффекты квантования, стоимость.

#### 1.7. Почему именно время и частота?

Вполне понятно, что система, поведение которой зависит от времени, может быть определена или описана временными функциями. Но какое отношение имеют частота и синусоиды к тригграмм, сдвиговым регистрам и им подобным? Давно известны аналоговые системы с сосредоточенными параметрами, которые описываются дифференциальными уравнениями, имеющими решения в виде синусоиды, косинусоиды и экспоненты. Разностные уравнения описывают дискретные по времени системы с непрерывными по уровню величинами и имеют решения в виде аналогичных функций, но дискретизованных.

Но здесь речь идет о системах с дискретизованными по уровню величинами (в частности, если необходимо «сэкономить» на битах, т. е. при работе с малым разрешением по амплитуде). А в этом случае целесообразно рассмотреть функции, которые хорошо подходят для описания дискретных систем, например функции Уолша [15, 16] (фиг. 1.7). Они ортогональны на интервале  $—1/2, 1/2$  и имеют много общих свойств с синусом и косинусом (например, существуют преобразования Уолша, которые соответствуют преобразованиям Фурье). До самого последнего времени системы связи, основанные на этих принципах, вряд ли превосходили другие виды систем. В этом смысле задача еще не решена, ибо традиционные методы описания систем необязательно являются и наиболее подходящими.

Что по существу требуется от фильтра? Действительно ли необходим критерий «плоская характеристика до  $x$  Гц и затем срез не



Фиг. 1.7. Некоторые функции Уолша.

менее чем на  $-60$  дБ на частоте  $\gamma$  Гц? Следовало бы рассматривать систему для обработки сигналов в целом, например как устройство, которое принимает решения, анализируя форму сигнала. Действительно, каждый выходной отсчет является результатом некоторого числа вычислений над предшествующими входными отсчетами. И эти вычисления можно сделать максимально эффективными. В цифровых системах можно вводить переменные параметры, т. е. адаптивный режим работы, без особых усилий и затрат.

Таблица основных характеристик фильтров

	Аналоговый фильтр	Цифровой фильтр
Переменные	Непрерывные по времени	Отсчеты в дискретные моменты времени
	Непрерывные по амплитуде	Обычно квантованные по амплитуде
Математические операции	$d/dt, dt, \times k, \pm$	Задержка, $\times k, \pm$
Описывающие уравнения	Линейные, дифференциальные	«Линейные», разностные (иногда «логически разностные»)
Характерные отклики	Затухающие синусоиды, косинусоиды	Отсчеты затухающих синусоид, косинусоид
Суперпозиция, свертка	Да	Да
Преобразование	Фурье Лапласа	Дискретное Фурье $z$
Частотная область	Плоскость $s$ $-\infty \leq \omega \leq \infty$	Плоскость $z, z = e^{sT}$ . Циклическое поведение по $\omega$ соответствует вращению по единичной окружности
Ограничения		
стоимость	Установившаяся	Быстро уменьшающаяся
быстродействие	До оптических частот	До мегагерц
«компоненты»	Исходные допуски Тепловой дрейф Нелинейность и перегрузка	Округление коэффициентов Абсолютно устойчивый Квантование и переполнение
Шумы	Тепловой, дробовой и т. д.	Квантования, наложения, предельные циклы низкого уровня

## ЛИТЕРАТУРА

1. Klerer M., Korn G. A., Digital Computer Users' Handbook, McGraw-Hill, 1967.
2. Grabbe E. M., Ramo S., Wooldridge D. E., Handbook of Automation, Computation and Control, Vol. 2, 1959.
3. Wilkes M. V., Automatic Digital Computer, Methuen, 1956.
4. IEE Convention, 1956, IEE Publications.
5. Rösen S., Electronic Computers — a Historical Survey, Computing Survey, 1, № 1 (March 1969).
6. Automatic Data Processing — The Next Ten Years (Internal Report), Civil Service Dept.
7. Whitaker E. T., Robinson G., The Calculus of Observations, Blackie, 1924.
8. Yule, 1927, Quoted in Bartlett, An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge Univ. Press, 1961.
9. См., например, специальные выпуски *Trans. IEEE on Audio and Electroacoustics*, посвященные цифровой фильтрации, сентябрь 1968 и июнь 1970.
10. Rayner P. J. W., A Hardware Digital Filter with Programming Facilities, Symposium on Digital Filtering, Imperial College, July 1970.
11. Programmable Digital Filters (a New Product Bulletin), Rockland Systems Corporation, 1970.
12. Bergland G. D., Fast Fourier Transform Hardware Implementation — an Overview, *Trans. IEEE on Audio and Electroacoustics*, AU-17, № 2, 104—108 (June 1969).
13. Heath F. G., Large-Scale Integration in Electronics, *Sci. Am.*, 222, № 2, 22—31 (Feb. 1970).
14. Rabiner L. R., Gold B., McGonegal C. A., The Approximation Problem for Non-recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-18, 83—106 (June 1970).
15. Harmuth H. F., A Generalized Concept of Frequency and Application, *Trans. IEEE on Information Theory*, IT-14, № 3, 375—382 (1968).
16. Gibbs J. E., Millard M. J., Walsh Functions as Solutions of a Logical Differential Equation, DES Report № 1, Nat. Phys. Lab., Ministry of Technology, 1969.



# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И z-ПРЕОБРАЗОВАНИИ

П. Блэкмен

## 2.1. Введение

Нередко в системах связи, управления или обработки данных необходимо передавать информацию, заданную в аналоговом виде, с помощью серии импульсов. Это требуется, например, при необходимости использования одной линии для передачи информации от нескольких отдельных источников. Отсчеты могут передаваться как аналоговые числа или же преобразовываться в двоичную форму с последующим обратным преобразованием в приемнике. Другая возможность состоит в обработке двоичных чисел непосредственно в цифровом виде. Отсюда возникает необходимость анализа систем, в которых сигналы дискретизованы.

Использование преобразования Лапласа, которое отображает сигналы из временной области в область  $s$ , при исследовании систем с аналоговыми сигналами существенно упрощает анализ. Аналогично использование  $z$ -преобразования, которое отображает дискретизованные сигналы из временной области в их алгебраическое представление в области  $z$ , значительно упрощает анализ систем с дискретизованными сигналами.

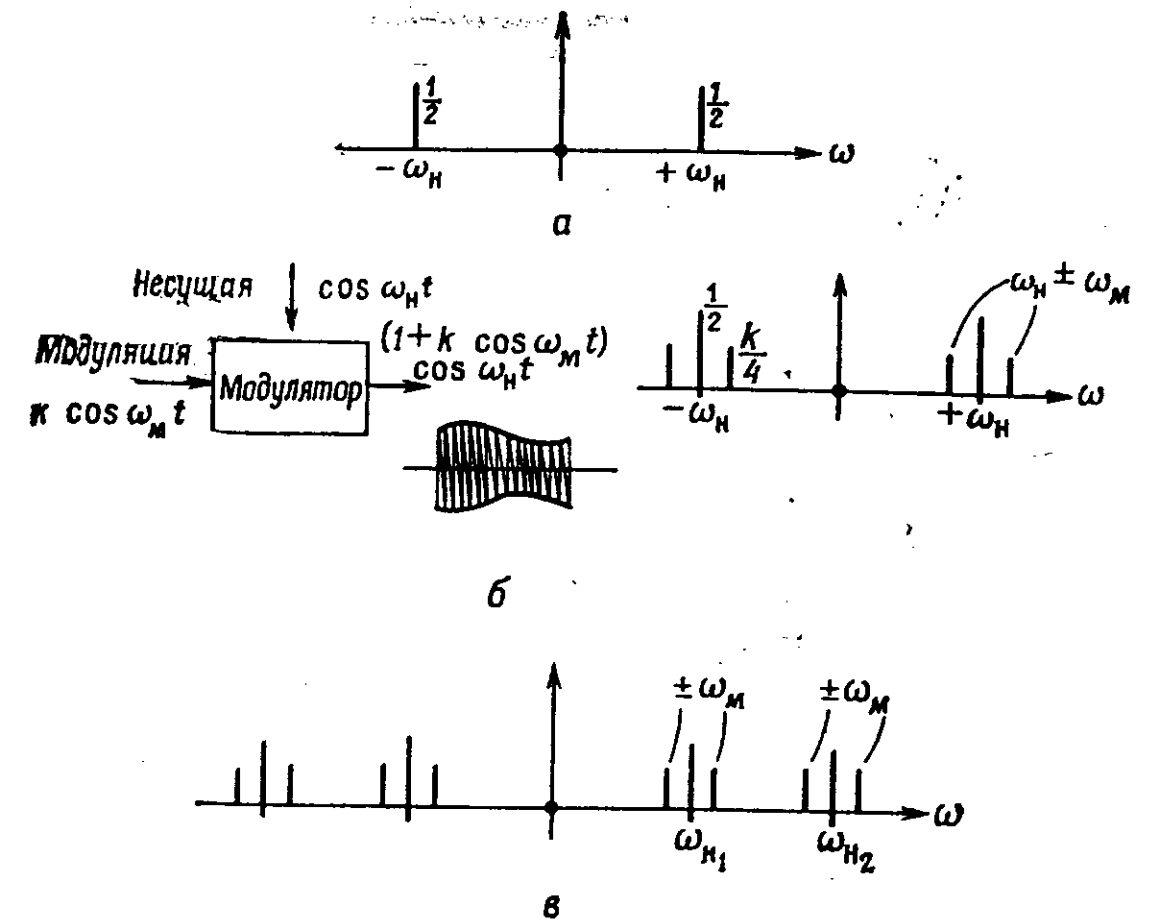
В этой главе кратко рассмотрены основы теории  $z$ -преобразования и ее применение при анализе систем с дискретизованными данными.

## 2.2. Модуляция

Несущий сигнал  $\cos \omega_n t$  можно представить в экспоненциальной форме как

$$\cos \omega_n t = \frac{e^{+j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}}{2}$$

и изобразить на оси частот в виде двух спектральных составляющих (фиг. 2.1, а). Если несущая модулирована по амплитуде сигналом  $k \cos \omega_m t$  (обычная амплитудная модуляция, фиг. 2.1, б), опе-



Фиг. 2.1. Амплитудная модуляция.

а — составляющие колебания  $\cos \omega_n t = 1/2(e^{+j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t})$ ; б — амплитудная модуляция; в — амплитудная модуляция с несколькими несущими.

рация модуляции может быть описана в экспоненциальной форме следующим образом:

$$(1 + k \cos \omega_m t) \cos \omega_n t = \left[ 1 + \frac{k}{2} (e^{+j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}) \right] \frac{e^{+j\omega_n t}}{2} + \left[ 1 + \frac{k}{2} (e^{+j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}) \right] \frac{e^{-j\omega_n t}}{2}; \quad (2.1)$$

при этом образуется шесть спектральных составляющих на частотах

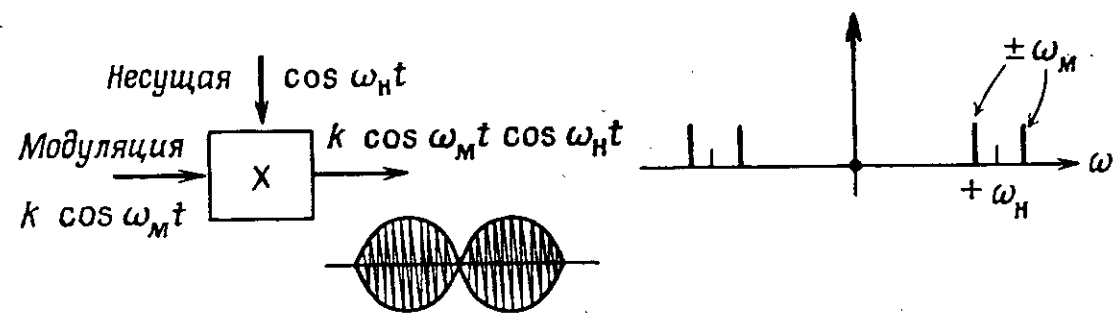
$$\pm \omega_n, \quad \pm \omega_n \pm \omega_m,$$

среди которых благодаря модуляции есть составляющие, расположенные около несущих и образующие боковые сигналы. Если несущая содержит несколько составляющих  $\cos \omega_{n1} t, \cos \omega_{n2} t, \dots$ , спектр модулированной несущей будет содержать боковые частоты, повторяющиеся около каждой составляющей несущей (фиг. 2.1, в).

При использовании модуляции с подавлением несущей процесс модуляции записывается в виде произведения

$$k \cos \omega_m t \cos \omega_n t.$$

Модулированный выходной сигнал содержит те же боковые частоты, но несущая отсутствует (фиг. 2.2). Как и прежде, если несущая состоит из нескольких составляющих, боковые частоты будут расположены около отсутствующих составляющих несущей.



Фиг. 2.2. Модуляция с подавлением несущей.

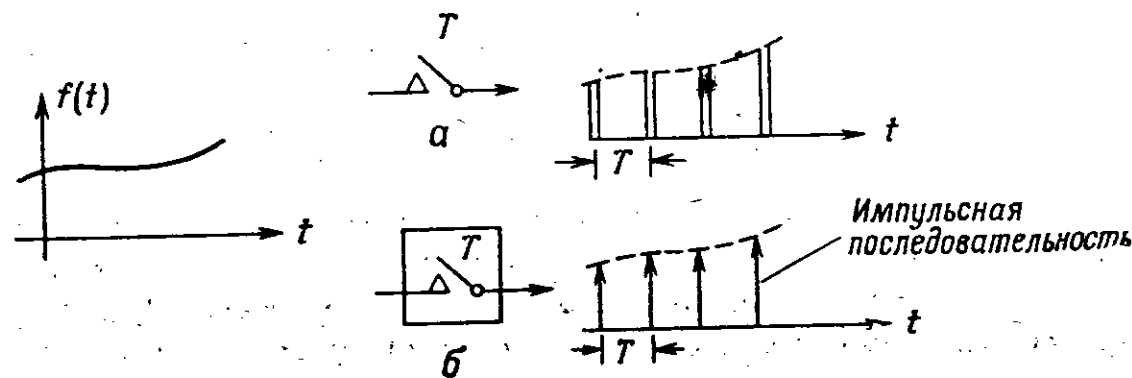
Таким образом, общими свойствами модуляции с подавлением несущей являются следующие:

- 1) при отсутствии модуляции отсутствует и выходное колебание;
- 2) чтобы получить несущую на выходе, необходимо подать на вход постоянную составляющую.

При обоих описанных видах модуляции на выходе нет составляющих на частоте модуляции  $\pm \omega_m$ .

### 2.3. Дискретизация

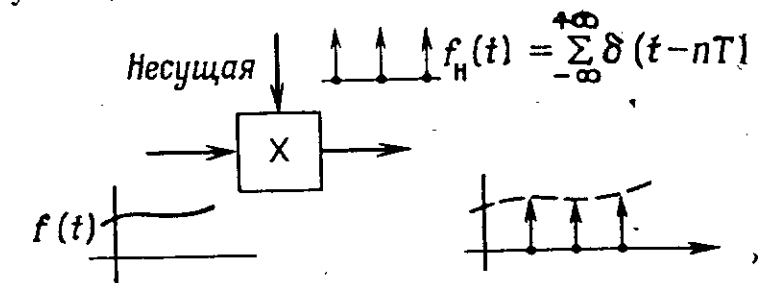
Если сигнал  $f(t)$  дискретизируется с помощью переключателя, который периодически с интервалом  $T$  замыкается на короткое время (фиг. 2.3, а), на выходе такого дискретизатора образуется последовательность импульсов конечной ширины. Однако для



Фиг. 2.3. Реальная (а) и идеальная (б) дискретизация.

многих математических приложений удобнее рассматривать *идеальный дискретизатор*, на выходе которого образуется последовательность импульсов (фиг. 2.3, б), имеющих площадь  $f(nT)$ , равную значению сигнала  $f(t)$  в моменты отсчетов  $t=0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ . Этот процесс часто называют *импульсной дискретизацией*.

Идеальную дискретизацию можно сравнить с модуляцией с подавлением несущей, когда «несущей» является непрерывная последовательность



Фиг. 2.4. Импульсная дискретизация как модуляция с подавлением несущей.

довательность единичных импульсов (фиг. 2.4), которую можно записать в виде

$$f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT), \quad (2.2)$$

а выходной сигнал будет равен произведению входного сигнала  $f(t)$  и несущей, т. е.

$$f(t) f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-nT) = f^*(t), \quad (2.3)$$

где звездочкой обозначен дискретизованный сигнал. Если  $f(t) = 0$ , то модуляции нет и отсутствует выходной сигнал; если же  $f(t)$  — постоянная, на выходе будет только несущая. Таким образом, импульсная дискретизация имеет те же свойства, что и модуляция с подавлением несущей.

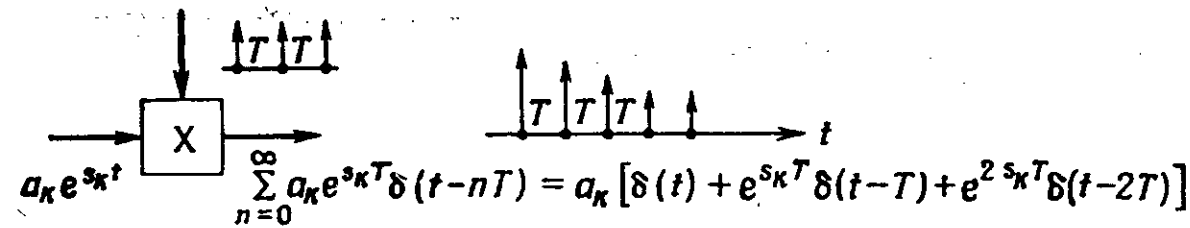
### 2.4. Преобразование Лапласа дискретизованного сигнала

В линейных, непрерывных (т. е. не дискретизованных) системах с сосредоточенными параметрами временные функции часто имеют вид суммы экспоненциальных составляющих:

$$f(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \dots = \sum_{k=1}^{k=m} a_k e^{s_k t}, \quad t > 0, \quad (2.4)$$

$$f(t) = 0, \quad t < 0,$$

где  $s_k$  — полюсы преобразованного в комплексную плоскость сигнала, которые могут быть либо действительными, либо представлять собой комплексно-сопряженные пары, а  $e^{s_k t}$  — обычная форма этих составляющих.



Фиг. 2.5. Импульсная дискретизация одиночного экспоненциального сигнала.

Рассмотрим импульсную дискретизацию одной составляющей  $f_k(t) = a_k e^{s_k t}$  (фиг. 2.5). Дискретизованный сигнал будет описываться выражением

$$f_k^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k e^{s_k n T} \delta(t - nT) = a_k [\delta(t) + e^{s_k T} \delta(t - T) + e^{2 s_k T} \delta(t - 2T) \dots], \quad (2.5)$$

которое представляет собой сумму задержанных (запаздывающих) импульсов с комплексными коэффициентами  $a_k e^{s_k T}$ ,  $a_k e^{2 s_k T}$ , ....

Поскольку преобразование Лапласа запаздывающего импульса выражается как

$$\mathcal{L}\delta(t - nt) = e^{-snT},$$

то преобразование дискретизованной экспоненты можно записать в виде

$$\mathcal{L}f_k^*(t) = F_k^*(s) = a_k [1 + e^{s_k T} e^{-sT} + e^{2 s_k T} e^{-2sT} + \dots], \quad (2.6)$$

или как

$$F_k^*(s) = \frac{a_k}{(1 - e^{s_k T} e^{-sT})} = \frac{a_k}{1 - e^{(s_k - s) T}} \quad (2.7)$$

при  $|e^{(s_k - s) T}| < 1$ . Полученный результат можно сравнить с преобразованием соответствующего аналогового сигнала

$$\mathcal{L}a_k e^{s_k t} = \frac{a_k}{(s - s_k)}. \quad (2.8)$$

### 2.5. Представление дискретизованных сигналов в комплексной плоскости

Для преобразования Лапласа обычной дискретизованной экспоненты

$$F_k^*(s) = \frac{a_k}{1 - e^{(s_k - s) T}} \quad (2.9)$$

полюсы находятся из условия

$$e^{(s_k - s) T} = 1, \quad (2.10)$$

что эквивалентно

$$(s_k - s) T = 0, \quad \text{т. е. } s = s_k, \quad (2.11)$$

или

$$(s_k - s) T = \pm jn2\pi, \quad \text{т. е. } s = s_k \mp \frac{jn2\pi}{T}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.12)$$

Эти результаты изображаются на плоскости  $s$  (фиг. 2.6) полюсом  $s_k$ , который соответствует непрерывному сигналу, и множеством дополнительных полюсов, расположенных на одной линии через интервал  $2\pi/T$ . Этот интервал соответствует частоте дискретизации  $\Omega$ , заданной соотношением

$$\Omega T = 2\pi. \quad (2.13)$$

Поскольку функция  $F_k^*$  содержит бесконечное число полюсов, ее можно записать в общем виде с помощью суммы

$$F_k^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b_n}{(s - s_n)}, \quad (2.14)$$

где  $s_n$  — полюсы, а коэффициенты  $b_n$  являются вычетами в полюсах. В случае когда  $F(s)$  представляется отношением полиномов

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (2.15)$$

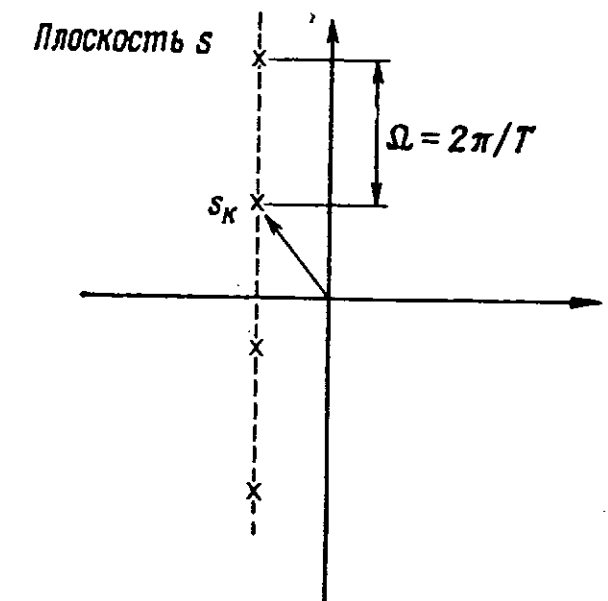
вычет в простом полюсе  $s_j$  определяется выражением

$$\text{Вычет} = \frac{N(s_j)}{\frac{d}{ds} D(s) |_{s=s_j}}. \quad (2.16)$$

Применяя это соотношение к  $F_k^*$ , получим

$$\text{Вычет} = \frac{a_k}{T e^{(s_k - s) T}} |_{s=s_k + jn2\pi/T = s_k + jn\Omega}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.17)$$

Отсюда вычет  $= a_k/T$  для всех  $n$ .



Фиг. 2.6. Расположение полюсов для дискретизованной экспоненты.

Следовательно,

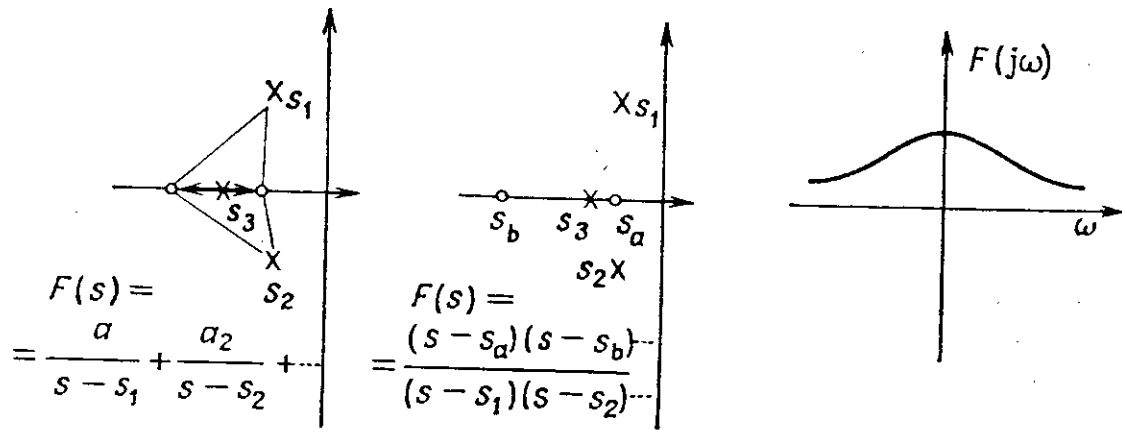
$$F_k^*(s) = \frac{a_k}{T} \left[ \dots \frac{1}{s - (s_k - jn\Omega)} \dots + \frac{1}{s - (s_k - j\Omega)} + \frac{1}{s - s_k} + \frac{1}{s - (s_k + j\Omega)} \dots \frac{1}{s - (s_k + jn\Omega)} \dots \right]. \quad (2.18)$$

Для полного непрерывного сигнала

$$f(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \dots + a_k e^{s_k t} \quad (2.19)$$

преобразование Лапласа записывается в виде

$$F(s) = \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + \dots + \frac{a_k}{s - s_k}. \quad (2.20)$$



Фиг. 2. 7. Расположение нулей и полюсов и частотный спектр непрерывного сигнала.

После приведения к общему знаменателю получим

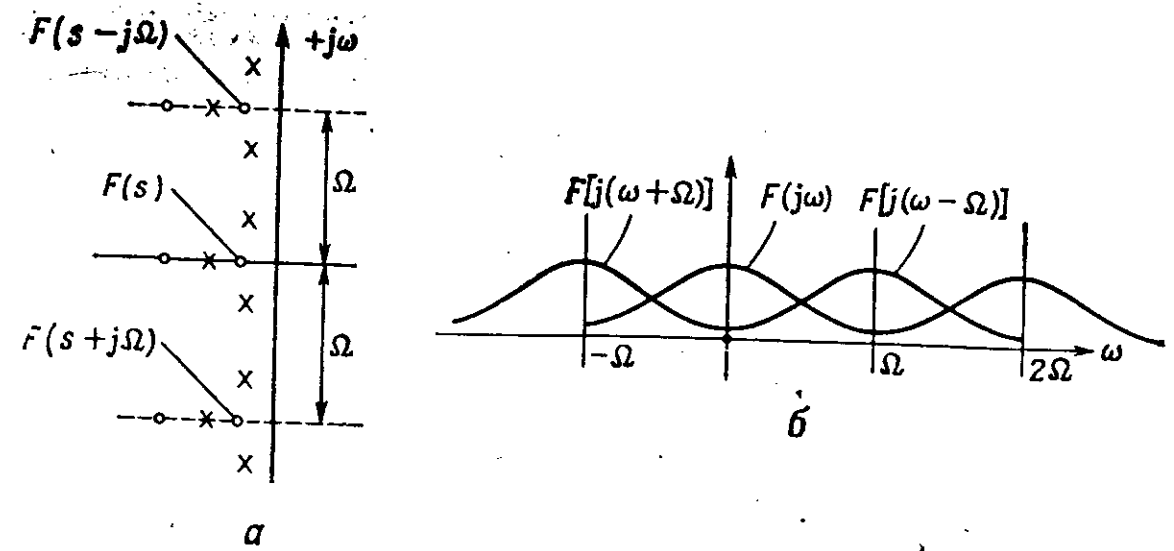
$$F(s) = \frac{c(s - s_a)(s - s_b) \dots}{(s - s_1)(s - s_2) \dots}, \quad (2.21)$$

где числитель дает нули  $F(s)$ ,  $s = s_a, s_b, \dots$ , показанные на фиг. 2.7. Нули — это такие значения  $s$ , при которых сумма составляющих превращается в нуль. Отметим, что частотный спектр  $F(j\omega)$  можно получить, вычисляя  $F(s)$  в виде суммы или произведения на мнимой оси в плоскости  $s$ .

Если теперь дискретизовать сигнал  $f(t)$ , то соответствующее ему преобразование Лапласа будет иметь вид

$$F^*(s) = \frac{a_1}{1 - e^{(s_1 - s)T}} + \frac{a_2}{1 - e^{(s_2 - s)T}} + \dots + \frac{a_k}{1 - e^{(s_k - s)T}}. \quad (2.22)$$

В плоскости  $s$  каждая составляющая сигнала представляется множеством полюсов, расположенных на одной линии через интервалы  $j\Omega$ . Следовательно, полюсы  $F^*(s)$  расположены так же, как и полюсы  $F(s)$ , но повторяются с интервалом  $j\Omega$  (фиг. 2.8, а).



Фиг. 2.8. Расположение нулей и полюсов и частотный спектр дискретизованного сигнала.

а — расположение нулей и полюсов; б — частотный спектр, получаемый на мнимой оси.

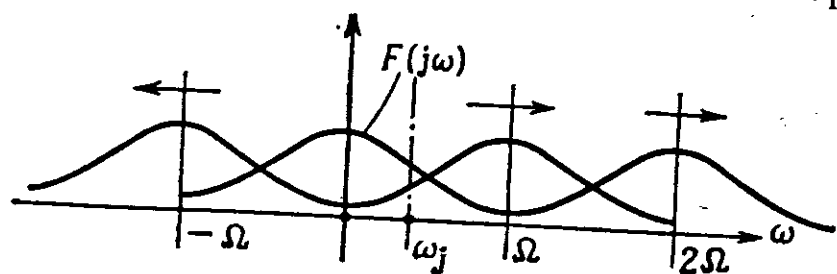
Каждый член суммы (2.22) можно представить в виде ряда, что дает

$$F^*(s) = \frac{a_1}{T} \left[ \dots \frac{1}{s - (s_1 - j\Omega)} + \frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s - (s_1 + j\Omega)} + \dots \right] + \frac{a_2}{T} \left[ \dots \frac{1}{s - (s_2 - j\Omega)} + \frac{1}{s - s_2} + \frac{1}{s - (s_2 + j\Omega)} + \dots \right] + \frac{a_k}{T} \left[ \dots \frac{1}{s - (s_k - j\Omega)} + \frac{1}{s - s_k} + \frac{1}{s - (s_k + j\Omega)} + \dots \right] = \frac{1}{T} [ \dots F(s - j\Omega) + F(s) + F(s + j\Omega) \dots ] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(s + jn\Omega). \quad (2.23)$$

Таким образом, эффект дискретизации состоит в том, что конфигурация нулей и полюсов дискретизованного сигнала является суммой конфигураций нулей и полюсов исходного сигнала, повторяющихся в плоскости  $s$  через интервалы  $j\Omega$ . Следовательно, частотный спектр, оцениваемый на мнимой оси, является суммой исходных спектров  $F(j\omega)$ , расположенных через интервалы  $j\Omega$  (фиг. 2.8, б). Когда повторяющиеся конфигурации нулей и полюсов складываются, полюсы оказываются в тех же точках, где они были в конфигурации исходного сигнала, а нули занимают другие положения: они оказываются в точках, в которых сумма повторяющихся конфигураций равна нулю.

## 2.6. Восстановление сигналов. Теорема отсчетов

Поскольку при дискретизации сигнала в общем случае происходит перекрытие спектров, результирующий сигнал на произвольной частоте  $\omega_j$  (фиг. 2.9) представляет собой сумму многих составляющих, складывать которые необходимо с учетом их фаз, что приводит к громоздким вычислениям. Если же для упрощения учитывать лишь несколько перекрывающихся спектров, то точ-



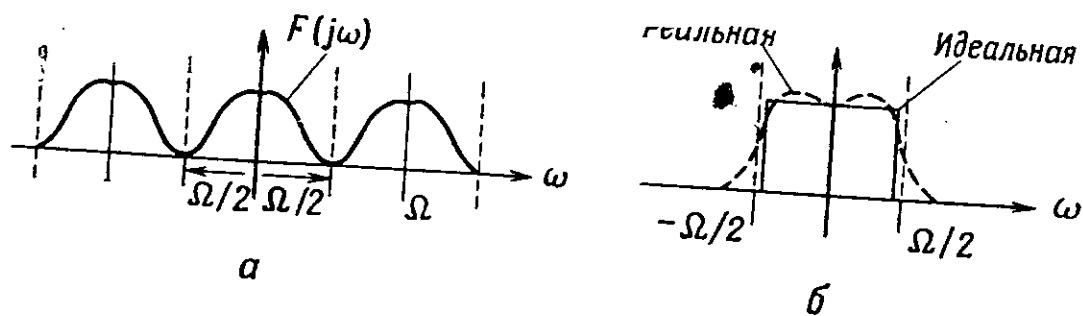
Фиг. 2.9. Представление сигнала на произвольной частоте.

ность результатов может быть сомнительной. По этой причине в дискретных системах частотные методы не нашли такого широкого применения, какое они имеют в аналоговых системах. Увеличение частоты дискретизации  $\Omega$  раздвигает спектры и уменьшает их перекрытие.

Как видно из фиг. 2.9, спектр дискретизованного сигнала содержит спектр исходного сигнала  $F(j\omega)$ . В этом состоит отличие от процессов модуляции, при которых спектр исходного сигнала на выходе отсутствует. Таким образом, исходный сигнал в принципе можно восстановить с помощью фильтрации. Это, очевидно, можно сделать идеально лишь при выполнении следующих условий:

- 1) спектры не перекрываются;
- 2) фильтр имеет идеальную прямоугольную характеристику, поэтому полностью пропускает  $F(j\omega)$  и подавляет все другие спектральные составляющие.

Условие 1 требует, чтобы в спектре  $F(j\omega)$  не было составляющих на частотах выше  $\Omega/2$ , и тогда спектры не перекрываются



Фиг. 2.10. Восстановление сигнала и теорема отсчетов. а — условие, необходимое для восстановления сигнала; б — требуемая характеристика фильтра.

(фиг. 2.10). Условие 2 не может быть полностью выполнено, поскольку любой реальный фильтр не имеет идеальной характеристики типа показанной на фиг. 2.10, б и всегда несколько видоизменяет  $F(j\omega)$ .

Эти рассуждения показывают, что теоретически можно идеально восстановить сигнал с ограниченным спектром по его выборкам, если частота дискретизации  $\Omega$  превышает  $2x$  ( $x$  — наивысшая спектральная составляющая сигнала). В этом состоит суть теоремы отсчетов. Эффектом дискретизации можно пренебречь в том случае, когда на вход низкочастотной системы поступают сигналы, дискретизованные с относительно высокой частотой.

## 2.7. Соотношение между плоскостью $s$ и плоскостью $z$ . z-преобразования

В разд. 2.3. установлено, что преобразование Лапласа дискретизованного экспоненциального сигнала  $e^{s_k T}$  имеет вид

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT} e^{s_k T}}, \quad (2.24)$$

где член  $e^{-sT}$  дает бесконечное множество полюсов в плоскости  $s$ . Чтобы облегчить анализ и трактовку результатов, удобно сделать замену

$$e^{sT} = z, \quad \text{или} \quad e^{-sT} = z^{-1}, \quad (2.25)$$

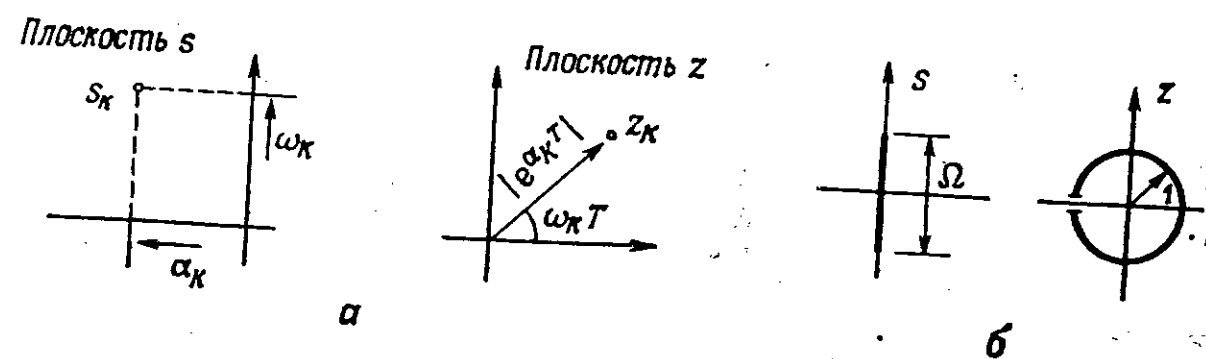
которая приводит к соответствующему  $z$ -преобразованию  $F(z)$ , рассматриваемому в плоскости  $z$ . Следует отметить, что  $e^{-sT}$  соответствует задержке на один интервал дискретизации  $T$  в плоскости  $s$ , тогда как  $z^{-1}$  означает такую же задержку в области  $z$ . Поскольку

$$z = e^{sT} = e^{(\alpha + j\omega)T}, \quad (2.26)$$

то

$$|z| = e^{\alpha T}, \quad \angle z = \omega T, \quad (2.27)$$

и тогда точка  $s_k$  в плоскости  $s$  отображается в точку  $z_k$  в плоскости  $z$  (фиг. 2.11, а).



Фиг. 2.11. Соотношение между плоскостью  $s$  и плоскостью  $z$ . а — соотношение между  $s_k$  и  $z_k$ ; б — единичная окружность в плоскости  $z$ .

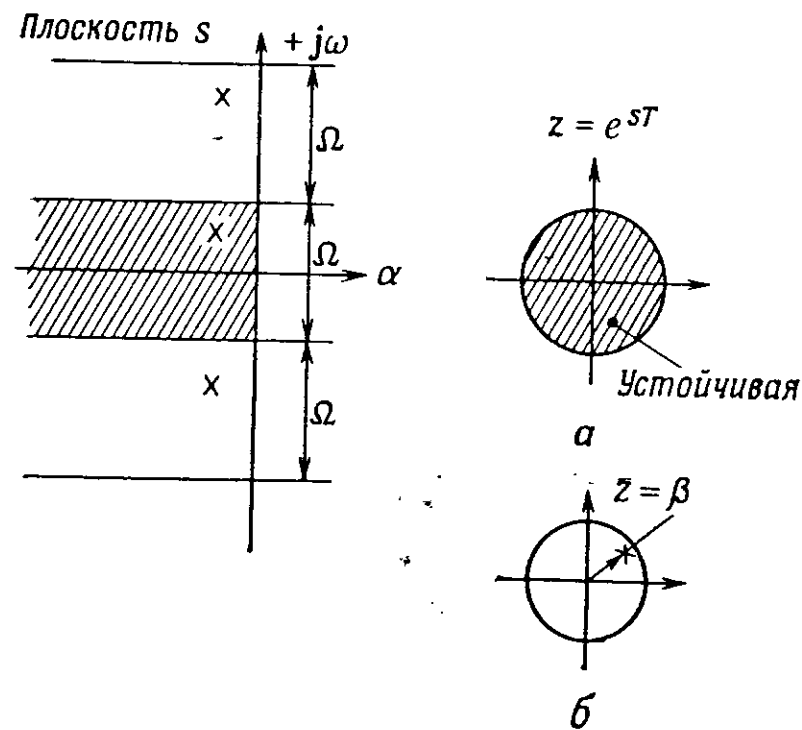
Рассматривая угол  $z_k$ , получим

$$-\pi < \angle z_k < +\pi \quad \text{при} \quad -\pi < \omega T < \pi \quad \text{или} \quad -\frac{\Omega}{2} < \omega < \frac{\Omega}{2}, \quad (2.28)$$

и так как

$$|z| = e^{\alpha k T}, \quad (2.29)$$

то путь вдоль мнимой оси в плоскости  $s$  на фиг. 2.11, б отображается в единичную окружность в плоскости  $z$ , так как  $\alpha$  равняется нулю на мнимой оси и, следовательно,  $|z| = 1$ . При этом полоса



Фиг. 2.12. Отображение плоскости  $s$  в плоскость  $z$ .  
а — преобразование  $z = e^{sT}$ ; б — полюс дискретизованной экспоненты.

шириной  $\Omega$  в плоскости  $s$  при отображении перекрывает всю плоскость  $z$ , и все последующие полосы из плоскости  $s$  отображаются в ту же плоскость  $z$ . Строго говоря, эти полосы отображаются в последовательность поверхностей Римана, которые накладываются в плоскости  $z$ . Общее соотношение плоскостей показано на фиг. 2.12, а, где полоса шириной  $\Omega$  из левой половины плоскости  $s$  (ее устойчивой области) отображается внутрь круга единичного радиуса в плоскости  $z$ .

Существенным свойством отображения является то, что все полюсы преобразования Лапласа в плоскости  $s$ , которые расположены по одной вертикали с интервалами  $j\Omega$ , отображаются в единственный полюс в плоскости  $z$ . Следовательно,  $z$ -преобразование дискретизованной экспоненты имеет только один полюс в плоскости  $z$ .

Преобразованию Лапласа дискретизованной экспоненты  $e^{s_k T}$ , записанному в виде

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - \beta e^{-sT}}, \quad (2.30)$$

где  $\beta = e^{s_k T}$ , соответствует  $z$ -преобразование

$$F(z) = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \beta} \quad (2.31)$$

с полюсом в точке  $z = \beta$  (фиг. 2.12, б). Этот полюс находится внутри круга единичного радиуса, если  $|e^{s_k T}| < 1$ , что соответствует затухающей экспоненте.

Для получения  $z$ -преобразования непрерывного экспоненциального сигнала, заданного выражением

$$f(t) = e^{s_k t}, \quad t > 0 \quad (f(t) = 0, \quad t < 0), \quad (2.32)$$

необходимы следующие операции:

1) дискретизация:

$$f^*(t) = \delta(t) + e^{s_k T} \delta(t - T) + e^{2s_k T} \delta(t - 2T) + \dots; \quad (2.33)$$

2) преобразование Лапласа:

$$F^*(s) = 1 + e^{s_k T} e^{-sT} + e^{2s_k T} e^{-2sT} + \dots; \quad (2.34)$$

3) подстановка  $z = e^{sT}$ :

$$F(z) = 1 + e^{s_k T} z^{-1} + e^{2s_k T} z^{-2} + \dots = \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{s_k T}} \quad (2.36)$$

с полюсом в точке  $z = e^{s_k T}$ . Следует отметить, что положение полюсов в плоскости  $z$  меняется с изменением интервала дискретизации  $T$ .

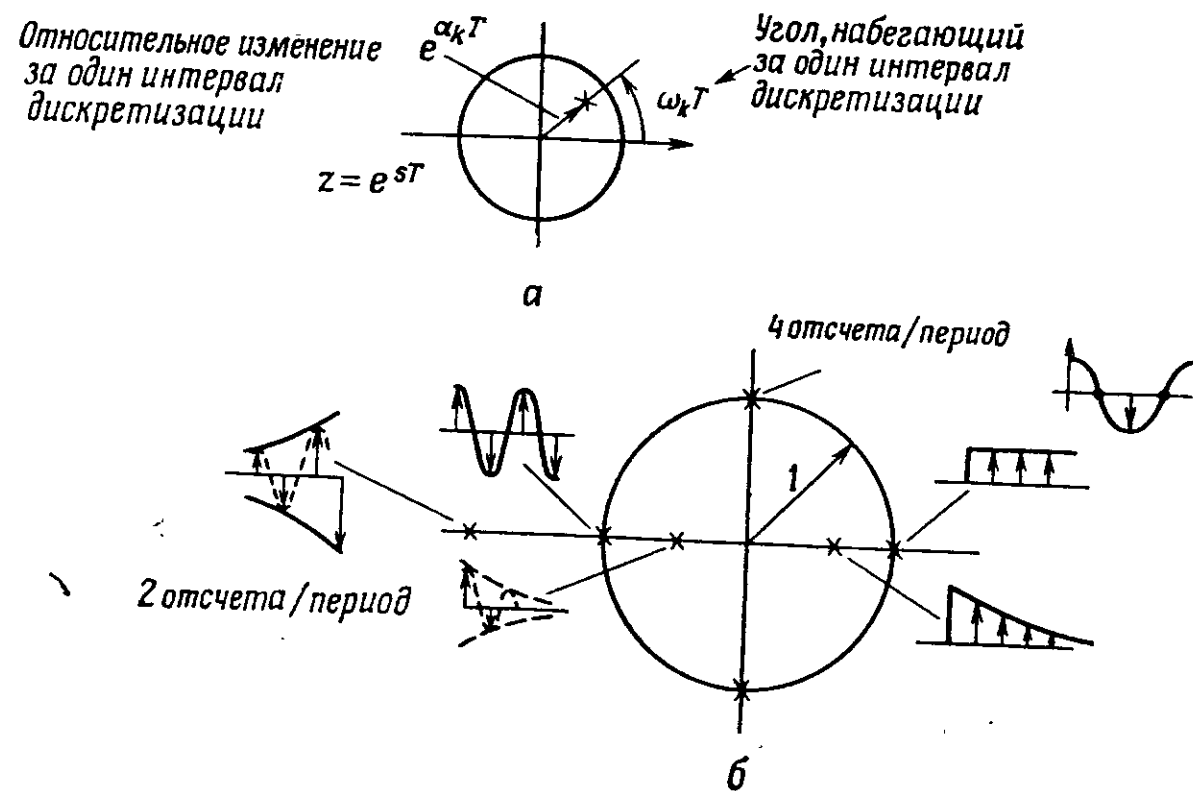
## 2.8. Общее соотношение между сигналами и положениями полюсов

Из рассмотрения экспоненциального сигнала  $e^{s_k T} = e^{(\alpha_k + j\omega_k)T}$  видно, что угол, набегающий за один интервал дискретизации, равен  $\omega_k T$ , что соответствует фазовому углу полюса в плоскости  $z$  (фиг. 2.11, а и фиг. 2.13, а). Модуль полюса, равный  $e^{\alpha_k T}$ , показывает, как меняется амплитуда экспоненты за интервал дискретизации.

Приведенные рассуждения позволяют легко установить связь положения полюсов в плоскости  $z$  с соответствующими экспонентами. Эти общие соотношения иллюстрируются на фиг. 2.13, б.



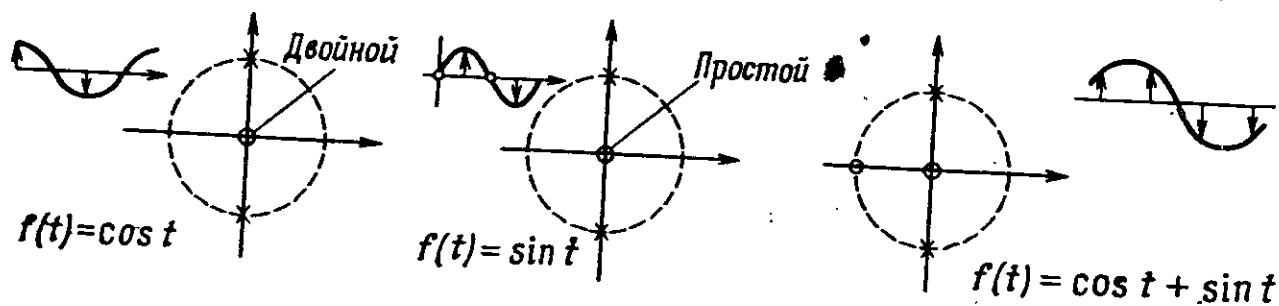
Полюсы внутри круга единичного радиуса, имеющие  $|z| < 1$ , соответствуют затухающим сигналам, и наоборот. Полюс на положительной действительной оси ( $\angle z = 0$ ) соответствует дискретизованной действительной экспоненте. Полюс на отрицательной действительной оси соответствует дискретизованному гармоническому



Фиг. 2.13. Взаимосвязь между положением полюсов и временными функциями. а — положение полюса и интервал дискретизации; б — положение полюсов и соответствующие им временные функции.

сигналу с двумя отсчетами на период. Сигнал с четырьмя интервалами дискретизации на период соответствует полюсу на мнимой оси. Для гармонических сигналов моменты дискретизации связаны со значением числителя, т. е. с нулями  $z$ -преобразования.

Ниже приведено несколько примеров, показывающих, как меняются нули с изменением моментов взятия выборок (на фиг. 2.14 показаны соответствующие конфигурации нулей и полюсов).



Фиг. 2.14. Положения нулей для различных временных функций.

1)  $f(t) = \cos t$  ( $\omega = 1$ ), 4 отсчета на период, т. е.  $T = \pi/2$ ,

$$f(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \longrightarrow F(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - e^{j\pi/2} z^{-1}} + \frac{1}{1 + e^{-j\pi/2} z^{-1}} \right] = \frac{z^2}{(z-j)(z+j)}. \quad (2.37)$$

$$2) f(t) = \sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \longrightarrow F(z) = \frac{z}{(z-j)(z+j)}. \quad (2.38)$$

$$3) f(t) = (\cos t + \sin t) \longrightarrow F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-j)(z+j)}. \quad (2.39)$$

При обратном  $z$ -преобразовании нули  $F(z)$  меняют вычеты в полюсах, а это приводит к изменению соотношения между моментами дискретизации и непрерывными временными сигналами.

## 2.9. Обратное $z$ -преобразование

Существует три метода обратного  $z$ -преобразования для получения соответствующих временных функций:

- 1) разложение на простые дроби;
- 2) деление;
- 3) контурное интегрирование.

1) *Разложение на простые дроби.* Если  $F(z)$  можно разложить на простые дроби, соответствующие преобразованиям обобщенной экспоненты, то временная функция может быть записана непосредственно. Так, если

$$F(z) = \sum_k \frac{a_k}{1 - \beta_k z^{-1}} = \sum_k \frac{a_k z}{z - \beta_k}, \quad (2.40)$$

то

$$f^*(t) = \sum_k a_k e^{s_k n T}, \quad \text{где } e^{s_k T} = \beta_k. \quad (2.41)$$

Например (фиг. 2.15, а), если

$$F(z) = \frac{0,5z}{z^2 - 1,5z + 0,5} = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}, \quad (2.42)$$

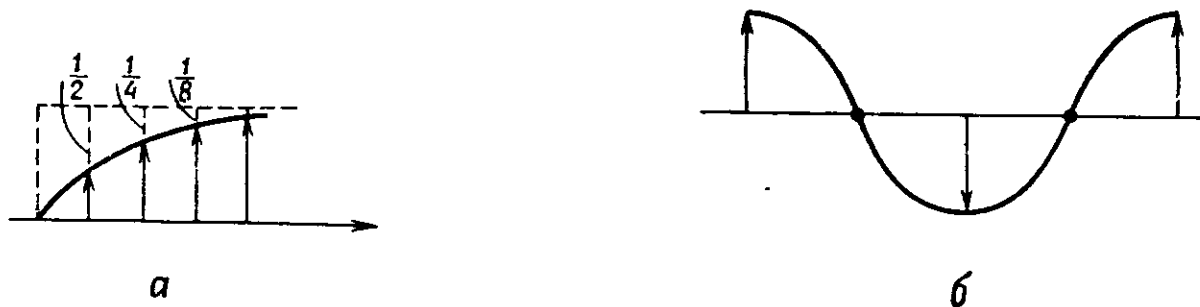
то

$$f^*(t) = \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (0,5)^n \right) \delta(t - nT) \quad (2.43)$$

или в экспоненциальной форме

$$f^*(t) = \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0,69n} \right) \delta(t - nT), \quad e^{-0,69} = 0,5. \quad (2.44)$$

Эта функция соответствует дискретизованному отклику на единичный скачок с такой постоянной времени, которая приводит к изменению величины отсчетов на 50% в течение каждого интервала дискретизации  $T$  (фиг. 2.15, а).



Фиг. 2.15. Обратное  $z$ -преобразование.

а — дискретизованная переходная характеристика,  $F(z) = z/[(z-1)(z-0,5)]$ ; б — дискретизованная косинусоида,  $F(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4} - \dots$ .

2) Деление. В методе разложения на простые дроби предполагается, что  $F(z)$  легко факторизуется, что не всегда возможно, особенно если  $F(z)$  является отношением полиномов высоких степеней. В последнем случае делением полином можно представить в виде обобщенного ряда, и тогда  $f^*(t)$  может быть также записана непосредственно в виде ряда

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots} = c_{m-n} z^{n-m} + c_{m+1-n} z^{n-(m+1)} + \dots, \quad (2.45)$$

$$f^*(t) = c_{m-n} \delta(t + (n-m)T) + c_{m+1-n} \delta(t + (n-m-1)T) + \dots \quad (2.46)$$

Для физически осуществимых сигналов степень  $z$  может быть только отрицательной или равной нулю и, следовательно, необходимо выполнение условия  $n \leq m$ , т. е. число нулей не должно превышать число полюсов. Разность  $n-m$  показывает число интервалов дискретизации, необходимых для вычисления выборки. Пусть, например (фиг. 2.15, б),

$$f(t) = \cos \frac{\pi t}{T}. \quad (2.47)$$

Тогда

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}. \quad (2.48)$$

откуда делением можно получить

$$F(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6} + \dots \quad (2.49)$$

Следовательно,

$$f^*(t) = \delta(t) - \delta(t-2T) + \delta(t-4T) - \delta(t-6T) + \dots \quad (2.50)$$

3) *Контурное интегрирование.* Как отмечено в предыдущем случае, делением  $F(z)$  можно разложить в ряд по отрицательным степеням  $z$ :

$$F(z) = c_0 z^0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots, \quad (2.51)$$

где коэффициенты  $c_n$  равны значениям  $f(nT)$ , а ряд является суммой полюсов всех порядков на плоскости  $z$  при  $z=0$ . Для определения произвольного коэффициента  $c_n$  следует умножить обе части (2.51) на  $z^{n-1}$ , что дает

$$z^{n-1} F(z) = c_0 z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \dots + c_n z^{-1} + c_{n+1} z^0 + \dots, \quad (2.52)$$

а затем взять интеграл по контуру, охватывающему все полюсы:

$$\oint z^{n-1} F(z) dz = \oint [c_0 z^{n-1} + \dots + c_n z^{-1} + \dots] dz. \quad (2.53)$$

Поскольку

$$\oint k z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi j k, & n = -1, \end{cases} \quad (2.54)$$

в правой части (2.53) остается единственный член  $c_n$ . Итак,

$$c_n = f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-1} F(z) dz. \quad (2.55)$$

Отсюда интегрированием по контуру при соответствующих значениях  $n$  можно получать значение  $c_n$ . Такое интегрирование, обычно выполняемое по методу вычетов, дает

$$f(nT) = \sum \text{Res} [z^{n-1} F(z)] \text{ для } n=0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

Для функции  $F(z)$  общего вида

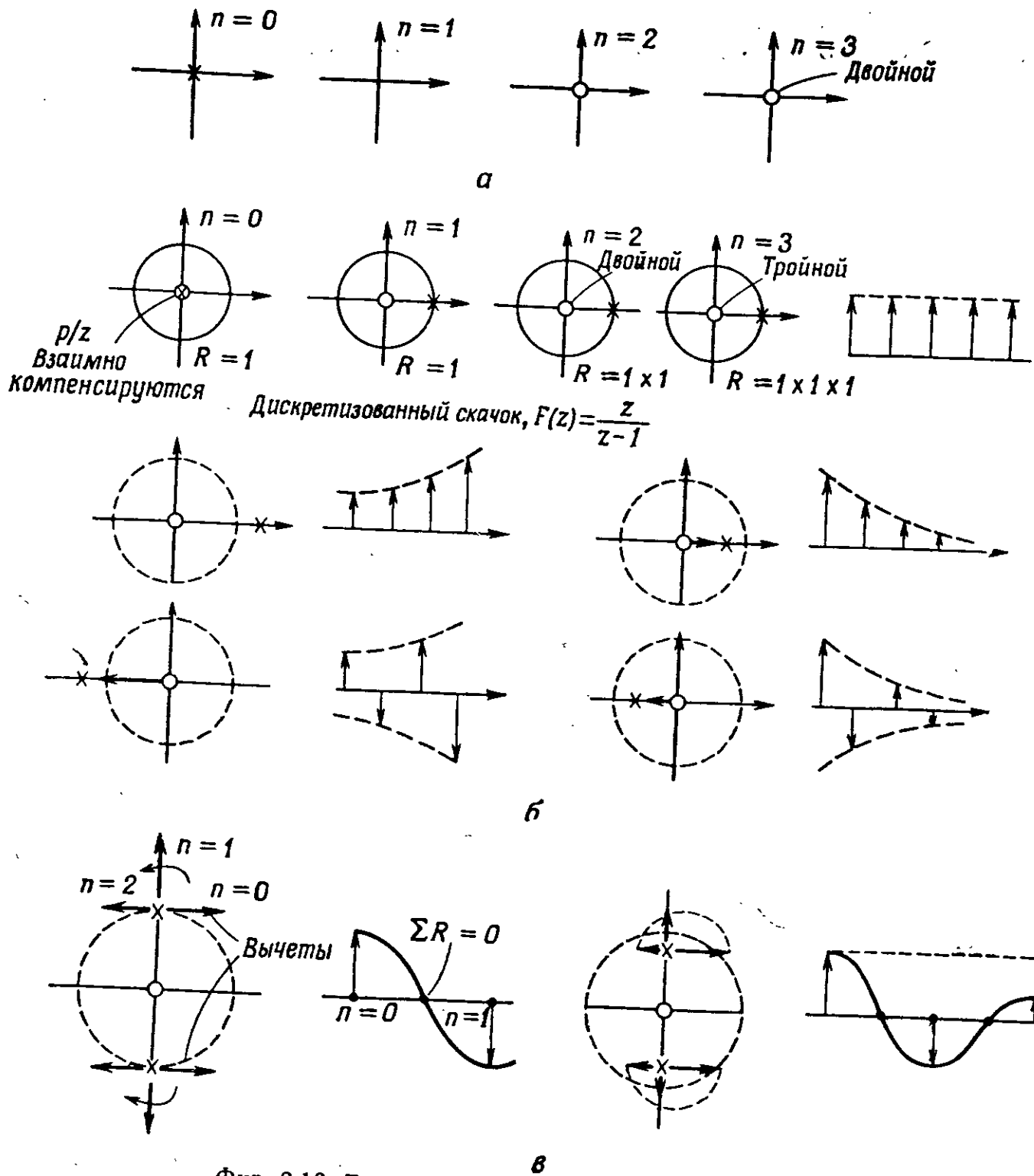
$$F(z) = \frac{(z-z_a)(z-z_b)\dots}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_k)}, \quad (2.57)$$

где  $z_a, z_b, \dots$  — нули и  $z_1, z_2, \dots$  — простые полюсы, вычет в полюсе  $z_k$  равен

$$R_k = (z-z_k) F(z) |_{z=z_k}.$$

Фактически  $R_k$  является значением остатка функции  $F(z)$  при  $z=z_k$ , когда полюс в точке  $z_k$  изъят.

Член  $z^{n-1}$  в формуле (2.55) для определения  $c_n$  соответствует введению дополнительного полюса в начале координат ( $n=0$ ), в результате чего с возрастанием  $n$  растет порядок у нулей (фиг. 2.16, а). Вычеты в полюсах функции  $F(z)$  могут быть получены расчетом либо непосредственным измерением на плоскости, причем из-за возрастания порядка нуля в начале координат вычеты умножают на  $z_k^{n-1}$ . Последнее позволяет ввести понятие *временных конфигураций*, полезное для иллюстрации многих качеств



Фиг. 2.16. Временные конфигурации и вычеты.

а — представление  $z^{n-1}$ ; б — примеры временных конфигураций; в — представление вычетов фазорами.

венных результатов. Поскольку вычет в полюсе умножается на  $z_k$ , т. е. на положение полюса для каждого интервала  $T$ , то любому полюсу вне круга единичного радиуса соответствует возрастающая (неустойчивая) составляющая, а любому полюсу внутри такого круга соответствует устойчивый затухающий сигнал. Несколько примеров приведено на фиг. 2.16, б.

Вычет может быть представлен графически в виде фазора (вектора), исходящего из местоположения полюса на плоскости, причем его угол после каждого интервала  $T$  изменяется на величину аргумента  $z_k$  из-за наличия дополнительного нуля в начале координат. Результирующая величина  $f(nT)$  равна сумме фазоров составляющие, поскольку мнимые исчезают. Несколько примеров приведено на фиг. 2.16, в.

### 2.10. Разностные уравнения, z-преобразования и передаточные функции

Непрерывные временные функции  $f(t)$  могут рассматриваться как решения дифференциальных уравнений, которым можно сопоставить аналоговые вычислительные блок-схемы. По аналогии импульсную последовательность  $f(nt)\delta(t-nT)$  можно рассматривать как решение соответствующего разностного уравнения, которому также можно сопоставить блок-схему.

При решении дифференциальных уравнений существенной операцией является интегрирование, описываемое в плоскости  $s$  оператором  $1/s$ . В разностных уравнениях существенной операцией является единичная задержка, описываемая оператором  $1/z$ , или  $z^{-1}$ . Анализ дифференциальных уравнений в плоскости  $z$  приводит к понятию передаточных функций и представлению временных функций в плоскости  $s$  с помощью преобразований Лапласа. Аналогично анализ разностных уравнений в плоскости  $z$  приводит к понятию передаточных функций с аргументом  $z$  и к z-преобразованиям.

Система, показанная на фиг. 2.17, а, включает элемент задержки ( $z^{-1}$ ) и цепь положительной обратной связи с коэффициентом  $\beta$ . Она имеет два выхода  $x_1$  и  $x_2$  и вход  $u$ . Импульсы могут свободно циркулировать в системе с временем задержки  $T$ . Если при  $t=kT$  импульс на выходе  $x_1$  равен  $x_1(kT)$ , то импульс до задержки равен  $x_1[(k+1)T]$ , поскольку он приходит на выход  $x_1$  в момент  $t=(k+1)T$ . Сигнал, который попадает на вход по цепи обратной связи, равен  $\beta x_1$ , и, следовательно, разностное уравнение может быть записано в виде

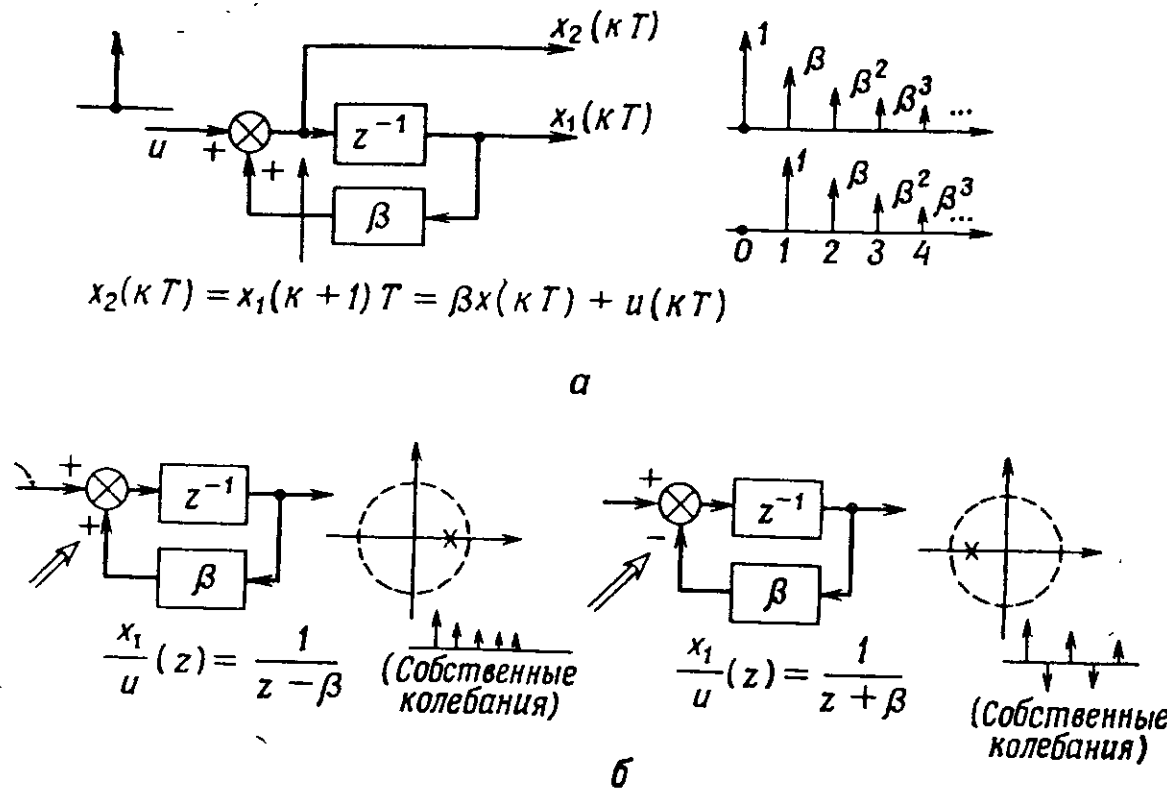
$$x_1(k+1)T = \beta x_1(kT) + u(kT). \quad (2.58)$$

Если на вход  $u$  подать единичный импульс в момент  $t=0$ , он появится на выходе  $x_2$  в момент  $t=0$  и на выходе  $x_1$  в момент  $t=T$ , в результате чего на выходе  $x_2$  будет сигнал  $x_2(T) = \beta$ . Далее импульс будет циркулировать по петле обратной связи, изменяясь при каждом обороте в  $\beta$  раз. На выходах  $x_1$  и  $x_2$  образуются им-

пульсные последовательности, показанные на фиг. 2.17,а. Эти последовательности в плоскости  $z$  могут быть представлены в виде

$$X_2(z) = 1 + \beta z^{-1} + \beta^2 z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \beta}, \quad (2.59)$$

$$X_1(z) = 0 + z^{-1} + \beta z^{-2} + \beta^2 z^{-3} + \dots = \frac{1}{z - \beta}. \quad (2.60)$$



Фиг. 2.17. Система с обратной связью в области  $z$ .

а — импульсная характеристика системы; б — влияние перемены знака обратной связи.

Исходное разностное уравнение в области  $z$  может быть записано следующим образом:

$$zX_1(z) = \beta X_1(z) + U(z), \quad (2.61)$$

или

$$(z - \beta) X_1(z) = U(z). \quad (2.62)$$

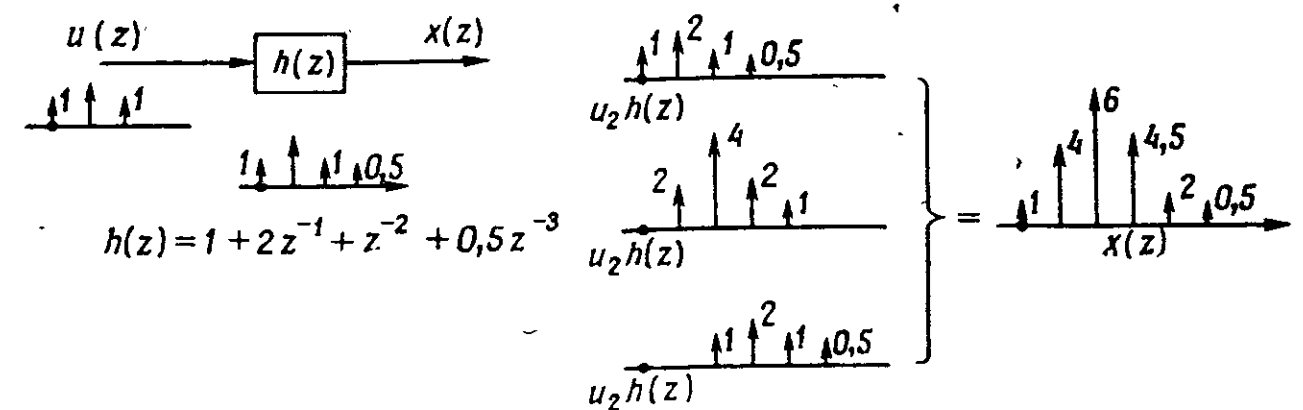
Эти уравнения позволяют получить соотношения, связывающие вход и выход системы (передаточные функции):

$$\frac{X_1(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - \beta} \quad \text{и} \quad \frac{X_2(z)}{U(z)} = \frac{z}{z - \beta}. \quad (2.63)$$

В обоих случаях передаточные функции имеют одинаковый знаменатель с полюсом в точке  $z = \beta$ , который соответствует дискретизованной затухающей экспоненте. Таким образом,  $z$ -преобразование импульсной характеристики представляет собой передаточ-

ную функцию. Следовательно, в области  $z$  наблюдается такое же соотношение между импульсной характеристикой и передаточной функцией, как и в области  $s$ . В обеих областях системы имеют свой характерный отклик на единичный импульс либо на любой другой входной сигнал.

Следует заметить, что изменение знака в цепи обратной связи, как показано на фиг. 2.17, б, не приводит к неустойчивости системы, а лишь сдвигает полюс в точку  $z = -\beta$ , в результате чего



Фиг. 2.18. Отклик системы на обобщенный входной сигнал.

импульсная характеристика имеет вид затухающих колебаний. Устойчивость системы определяется  $|\beta|$ ; при  $|\beta| > 1$  полюс расположен вне круга единичного радиуса и система является неустойчивой.

Если на вход подается сигнал общего вида

$$U(z) = u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + \dots, \quad (2.64)$$

каждому его члену соответствует свой отклик, так что если импульсная характеристика системы задана выражением (фиг. 2.18)

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots, \quad (2.65)$$

то на выходе получим

$$X(z) = u_0 (h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots) + u_1 z^{-1} (h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots) + u_2 z^{-2} (h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots) + \dots, \quad (2.66)$$

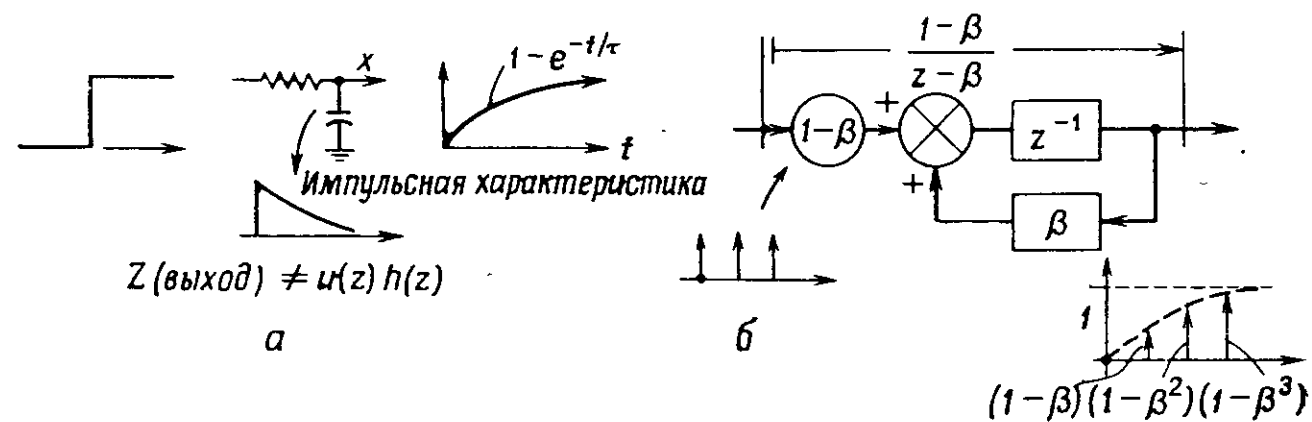
что можно представить в виде произведения  $z$ -преобразований входной последовательности и импульсной характеристики, т. е.

$$X(z) = U(z) H(z), \quad (2.67)$$

или

$$\frac{X(z)}{U(z)} = H(z). \quad (2.68)$$

Таким образом,  $z$ -преобразование импульсной характеристики является передаточной функцией системы. Итак, окончательный результат можно получить, перемножая непосредственно  $z$ -преобразования и передаточные функции. При этом следует соблюдать осторожность при переходе из области непрерывных сигналов, поскольку методы  $z$ -преобразования основаны на использовании не непрерывных, а только импульсных сигналов.



Фиг. 2.19. Аналоговые и дискретные системы.  
а — аналоговая система; б — соответствующая дискретная система.

В качестве примера на фиг. 2.19, а показан непрерывный отклик аналоговой  $RC$ -цепи на единичный скачок. Преобразование Лапласа отклика равно произведению преобразований скачка и импульсной характеристики:

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + s\tau}. \quad (2.69)$$

Однако ошибочным будет выражение для  $z$ -преобразования, полученное на основании  $X(s)$  в виде

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-\beta} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\beta)} \quad (\text{неверно}). \quad (2.70)$$

Чтобы получить корректное  $z$ -преобразование, необходимо передаточную функцию из  $s$ -области преобразовать во временную область, а затем каждый ее член выразить через  $z$ -преобразование. Следовательно, используя

$$x(t) = 1 - e^{-t/\tau}, \quad (2.71)$$

получим

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\beta} = \frac{z(1-\beta)}{(z-1)(z-\beta)} \quad (\text{верно}). \quad (2.72)$$

На фиг. 2.19, б показана блок-схема этой системы.

### Упражнения на $z$ -преобразования

1. а) Получите  $z$ -преобразование для  $f(t) = e^{-t}$  при интервале дискретизации  $T = 1, 0,5$  и  $0,2$  с и изобразите полюс преобразования на  $z$ -плоскости. Запишите первые три-четыре начальных члена разложения в ряд этих преобразований и представьте графически относительные величины членов разложения на одной шкале времени.

б) Найдите  $z$ -преобразование для  $f(t) = 1 - e^{-t}$  в виде произведения

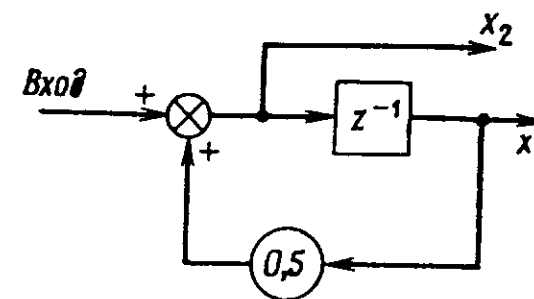
$$\frac{az^{-1}}{(1 - bz^{-1})(1 - cz^{-1})}$$

при интервале дискретизации  $T = 1$  с и нанесите на график нули и полюсы в  $z$ -плоскости.

2. Найдите  $z$ -преобразование для  $f(t) = e^{-0,2t} \cos t$  при интервале дискретизации  $T$ . (Примечание: выразите  $f(t)$  в экспоненциальном виде и затем скомбинируйте  $z$ -преобразования отдельных членов.)

Нанесите на график нули и полюсы в  $z$ -плоскости при  $T = \pi/4, \pi/2$ . Кроме того, покажите, как будут располагаться нули и полюсы при  $T \rightarrow \pi$  и  $T = \pi$ .

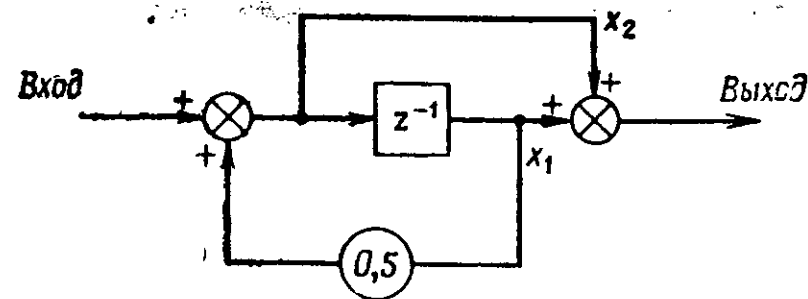
3. Для следующей системы



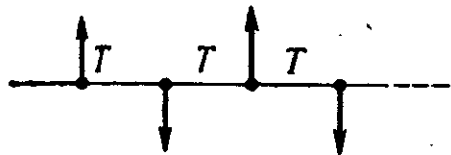
найдите передаточную функцию относительно выходов  $x_1$  и  $x_2$  и запишите несколько первых членов разложения передаточной функции в ряд. (Примечание:  $1/(1-a) = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ )

При условии, что на вход поступает одиночный импульс, найдите последовательные значения отсчетов в точках  $x_1$  и  $x_2$  сигналов, циркулирующих в системе, и сравните результат с полученным в первой части задачи.

4. При условии, что два выхода системы, рассмотренной в задаче 3, складываются, найдите результирующую импульсную характеристику, просуммировав импульсные характеристики в точках  $x_1$  и  $x_2$ . Запишите также выражение для результирующей передаточной функции и нанесите на график нули и полюсы в плоскости  $z$ .



Наконец, найдите последовательность импульсов на выходе системы, на вход которой поступают чередующиеся положительные и отрицательным импульсы.



Для этого с учетом соответствующей задержки просуммируйте импульсные характеристики, полученные в первой части задачи.

Сравните результат с тем, который был получен в упражнении 3, а также получите его независимо умножением передаточной функции на  $z$ -преобразование входной последовательности импульсов.

#### ЛИТЕРАТУРА

Книги, содержащие разделы по  $z$ -преобразованиям и дискретным системам:

1. Kuo B. C., Automatic Control Systems, Prentice-Hall, 1967.
2. Gupta S. C., Hasdorff L., Fundamentals of Automatic Control, Wiley, 1970.
3. Gabel R. A., Roberts R. A., Signals and Linear Systems, Wiley, 1973.

Более глубокое изложение можно найти в следующих книгах:

1. Lindorf D. P., Theory of Sampled Data Control Systems, Wiley, 1965.
2. Kuo B. C., Discrete Data Control Systems, Prentice-Hall, 1970.
3. Freeman H., Discrete Time Systems, Wiley, 1965.
4. Jury E. I., Theory and Application of the  $z$ -Transform Method, Wiley, 1964.

### Глава 3

## ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

А. Константи́дис

### 3.1. Общие замечания

В классической линейной теории цепей электрические свойства элементов схем описываются линейными математическими операциями над токами и напряжениями. Так, для резистора, индуктивности и емкости справедливы математические соотношения

$$v(t) = Ri(t), \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad i(t) = \frac{dv(t)}{dt},$$

где все символы имеют общепринятые значения. При использовании этих формул совместно с законами Кирхгофа получают систему *линейных дифференциальных уравнений* (или, в общем случае, уравнений, сводимых к дифференциальным), характеризующих конкретную линейную цепь. Однако элементы, которые используются в цифровых фильтрах, выполняют не такие функции, как резисторы, индуктивности и емкости. Они, как правило, характеризуются зависимостью между входом и выходом, а не соотношением между токами и напряжениями. Так,

$$\text{для умножителя} \quad v_k = \alpha_i u_k,$$

$$\text{для сумматора} \quad v_k = u_1(k) + u_2(k) + \dots + u_n(k),$$

$$\text{для элемента задержки} \quad v_k = u_{k-1}.$$

Приведенные здесь символы и указанные операции иллюстрируются на фиг. 3.1.

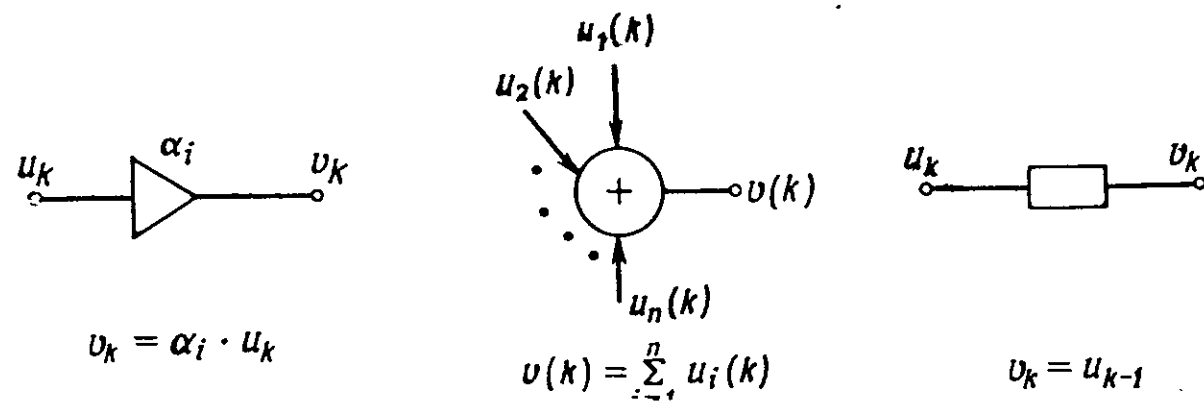
Пусть элементы цифрового фильтра соединены одним из желательных способов. Это соединение с учетом выполняемых элементами функций определяет действия над сигналами, которые либо изменяются по величине, либо складываются с другими сигналами, либо задерживаются. Это значит, что для системы, состоящей из таких элементов, с одним входом и одним выходом можно составить *линейное разностное уравнение*, описывающее ее поведение. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

**Пример 3.1.** Дискретная система работает таким образом, что каждый выходной отсчет сигнала получается в результате сложения



ния входного отсчета с частью  $\alpha$  предшествующего (по времени) выходного отсчета.

*Решение.* Уравнение, описывающее данную систему, выводится следующим образом. Обозначим  $k$ -й выходной отсчет через  $v_k$ ,



Фиг. 3.1. Элементы цифрового фильтра.

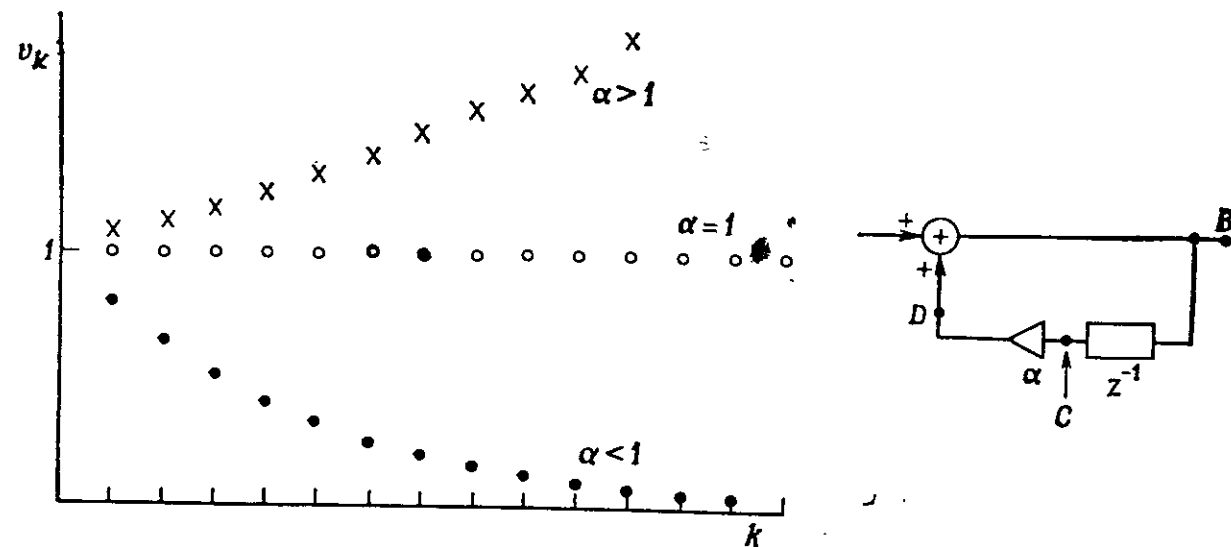
так что предшествующий выходной отсчет будет  $v_{k-1}$ . Пусть также  $u_k$  будет  $k$ -м входным отсчетом. Система описывается уравнением

$$v_k = u_k + \alpha v_{k-1}, \quad (3.1)$$

которое справедливо для положительных отсчетов времени (т. е. для всех положительных  $k$ ). Уравнение (3.1) является линейным разностным уравнением первого порядка. Поучительно рассмотреть работу этой системы во временной области. Для этого используем входной сигнал

$$u_k = \{1, 0, 0, 0, \dots\},$$

который имеет значение 1 при  $t=0$  и нуль при всех других  $t$ . Если предположить, что элемент задержки (фиг. 3.2) не содержал



Фиг. 3.2. Выходной сигнал  $v_k = u_k + \alpha v_{k-1}$  при  $u_k = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ .

отсчетов сигнала в начальный момент времени, то система будет работать следующим образом. При  $t=0$  сигнал на входе равен 1, и, так как элемент задержки содержит нуль, на выходе также будет нуль. На выходе сумматора, следовательно, появится первый выходной отсчет, равный 1. Он сразу же оказывается на входе элемента задержки и запоминается в нем. Система остается в таком состоянии до тех пор, пока через интервал  $T$  на ее входе не появится следующий отсчет. В этот момент времени на выходе элемента задержки в точке  $C$  мгновенно появляется хранящийся в нем отсчет, равный 1, который в точке  $D$  умножается на коэффициент  $\alpha$ . Таким образом, следующий выходной отсчет в точке  $B$  равен

$$v_1 = u_1 + \alpha v_0 = 0 + \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Эта величина снова запоминается в элементе задержки. Аналогично выходные отсчеты в следующие моменты времени будут равны

$$v_k = \alpha^k, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

На фиг. 3.2 изображен выходной сигнал для трех различных положительных значений  $\alpha$ . Из графиков, а также равенства (3.2) видно, что выходные отсчеты уменьшаются по величине с течением времени (т. е. при увеличении  $k$ ) только при условии, что модуль коэффициента  $\alpha$  меньше единицы. Следовательно, система устойчива тогда и только тогда, когда  $|\alpha| < 1$ .

Полученный выходной сигнал можно рассматривать как импульсную характеристику системы. Она имеет уже знакомый вид затухающей экспоненты, который характерен для изменения напряжения в  $RC$ -цепи.

### 3.2. Уравнение цифрового фильтра

Приведенные выше рассуждения и материал, изложенный в гл. 2, позволяют дать обобщенную характеристику цифровым фильтрам. Пусть  $u_k$  —  $k$ -й отсчет входного сигнала цифрового фильтра. Тогда  $u_{k-r}$  — отсчет того же сигнала в момент  $t = (k-r)T$ . Аналогично, если  $v_k$  —  $k$ -й отсчет выходного сигнала, то  $v_{k-r}$  — выходной сигнал в момент  $t = (k-r)T$ . Пусть требуется вычислить величину  $k$ -го выходного отсчета  $v_k$ . При этом расчете, т. е. в процессе обработки сигнала цифровым фильтром, используется линейная комбинация предшествующих выходных отсчетов с предшествующими и настоящими входными отсчетами. Как это делается, показано в примере 3.1. Таким образом, если в линейной комбинации используется  $(n+1)$  входных отсчетов с  $m$  предшествую-

щими выходными отсчетами,  $k$ -й отсчет выходного сигнала будет определяться выражением

$$v_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + \dots + a_n u_{k-n} - (b_1 v_{k-1} + \dots + b_m v_{k-m}), \quad (3.3)$$

где все коэффициенты являются действительными постоянными.

### 3.3. Передаточная функция цифрового фильтра

Из сказанного выше ясно, что линейное разностное уравнение (3.3) полностью описывает работу линейного цифрового фильтра. Для анализа передаточных функций дискретных систем используется рассмотренное ранее  $z$ -преобразование. Передаточная функция определяется как отношение  $z$ -преобразований выходного и входного сигналов. Для рассмотренного выше примера передаточная функция задается выражением

$$\frac{V(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

**Пример 3.2.** В некоторой системе отсчеты входного и выходного сигналов принимают значения

на входе: 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . . . ,

на выходе: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, . . . .

Найдем передаточную функцию системы. По определению  $z$ -преобразование входного сигнала равно

$$\begin{aligned} U(z) &= u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + \dots = \\ &= 1 + 0 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = \\ &= 1 + z^{-2} + z^{-4} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-2}} \quad \text{при } |z^{-1}| < 1. \end{aligned}$$

Аналогично  $z$ -преобразование выходного сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} V(z) &= v_0 + v_1 z^{-1} + v_2 z^{-2} + \dots = \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{при } |z^{-1}| < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, передаточная функция дискретной (по времени) системы будет равна

$$G(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{1/(1 - z^{-1})}{1/(1 - z^{-2})} = 1 + z^{-1}.$$

Таким образом, в общем случае передаточная функция, соответствующая соотношению (3.3), задается выражением

$$G(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}, \quad (3.4)$$

где  $V(z)$  и  $U(z)$  —  $z$ -преобразования выходного и входного сигналов соответственно. Выражение (3.4) описывает передаточную функцию линейного цифрового фильтра общего вида. Числитель и знаменатель передаточной функции в общем случае не равны нулю. По виду передаточной функции фильтры обычно классифицируют следующим образом.

*Рекурсивные цифровые фильтры* — фильтры с передаточной функцией типа (3.4), не содержащей общих множителей и имеющих ненулевые коэффициенты в знаменателе.

*Нерекурсивные цифровые фильтры* имеют передаточную функцию, которая принимает вид полинома по степеням  $z^{-1}$  после сокращения всех общих множителей в выражении (3.4):

$$G(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_n z^{-n}.$$

Как было отмечено в разд. 3.1 со ссылкой на фиг. 3.2, в зависимости от выбора значения  $\alpha$  в передаточной функции  $1/(1 - \alpha z^{-1})$  отклик системы на единичный импульс либо возрастает, либо затухает со временем. Это определяет диапазон недопустимых значений  $\alpha$ , при которых отклик возрастает до бесконечности. Обобщая, можно сказать, что коэффициенты в знаменателе выражения (3.4) необходимо выбирать таким образом, чтобы переходная характеристика не возрастала безгранично. Это утверждение тесно связано с положением *полюсов системы*.

### 3.4. Полюсы и нули передаточной функции

Числитель и знаменатель передаточной функции общего вида, заданной выражением (3.4), являются полиномами комплексной переменной  $z^{-1}$  с действительными коэффициентами и поэтому могут быть факторизованы следующим образом:

$$G(z) = A \frac{(z^{-1} - \alpha_1)(z^{-1} - \alpha_2) \dots (z^{-1} - \alpha_n)}{(1 - \beta_1 z^{-1})(1 - \beta_2 z^{-1}) \dots (1 - \beta_n z^{-1})},$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — действительные либо комплексные. В последнем случае они образуют сопряженные пары. Коэффициент  $A$  — действительная постоянная.

Величины  $\{\alpha_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , называют *нулями*, а  $\{\beta_r^{-1}\}$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots, m$ , — *полюсами* передаточной функции. Полюсы и нули расположены на плоскости  $z^{-1}$ .

### 3.5. Устойчивость

Цифровой фильтр называют устойчивым, когда модули полюсов его передаточной функции больше единицы, или, что эквивалентно, когда полюсы расположены *вне* окружности  $|z^{-1}| = 1$  (называемой *единичной окружностью*).

Например, цифровой фильтр с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 + 0,5z^{-1})(1 - 0,4z^{-1})}$$

является устойчивым. Он имеет два полюса: один в точке  $-1/0,5 = -2$ , второй в точке  $1/0,4 = 2,5$ , т. е. оба они расположены вне единичной окружности в плоскости  $z^{-1}$ . Однако фильтр с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 + 5z^{-1})(1 - 4z^{-1})}$$

является неустойчивым. Он имеет два полюса: один в точке  $-1/5 = -0,2$ , второй в точке  $1/4 = 0,25$ , т. е. оба они расположены внутри круга единичного радиуса в плоскости  $z^{-1}$ .

### 3.6. Частотная характеристика

Чтобы получить частотную характеристику системы, на ее вход подают синусоидальное колебание и затем исследуют сигнал на выходе. Если система линейна, то на выходе будет синусоидальное колебание той же частоты, но с другими амплитудой и фазой. Поскольку амплитуду и фазу можно объединить представив в комплексной форме, то в качестве входного сигнала обычно используют не действительную, а комплексную синусоиду, изменения которой в системе учитываются умножением на комплексный, зависящий от частоты сигнала коэффициент<sup>1)</sup>. С учетом вышесказанного найдем частотную характеристику цифрового фильтра, заданного соотношением (3.3).

Пусть на вход подается комплексный синусоидальный сигнал  $e^{j\omega kT}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ . Тогда, поскольку система линейна, сигнал на выходе может быть только вида  $H(\omega)e^{j\omega kT}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , где  $H(\omega)$  — комплексный коэффициент, который зависит лишь от  $\omega$ . Следовательно, в формулу (3.3) можно подставить  $u_k = e^{j\omega kT}$  и  $v_k = H(\omega)e^{j\omega kT}$ ; при этом разностное уравнение преобразуется к виду

$$H(\omega)e^{j\omega kT} = a_0e^{j\omega kT} + a_1e^{j\omega(k-1)T} + \dots + a_n e^{j\omega(k-n)T} - (b_1H(\omega)e^{j\omega kT} + \dots + b_m H(\omega)e^{j\omega(k-m)T}) \quad (3.5)$$

или

$$H(\omega)e^{j\omega kT} (1 + b_1e^{-j\omega T} + \dots + b_me^{-jm\omega T}) = e^{j\omega kT} (a_0 + a_1e^{-j\omega T} + \dots + a_n e^{-jn\omega T}).$$

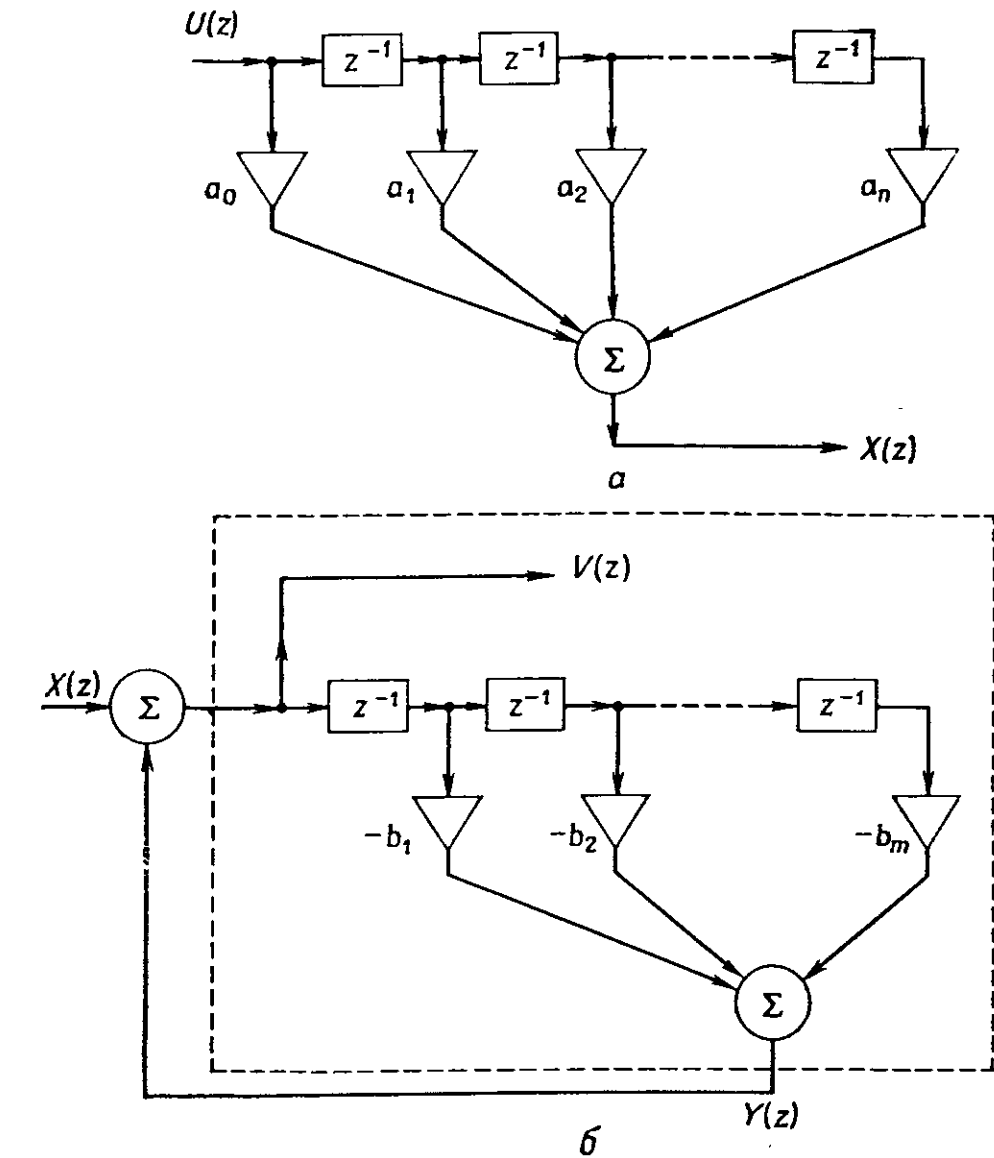
<sup>1)</sup> Автор имеет в виду комплексную форму представления гармонического колебания по формуле Эйлера. Ниже используется понятие комплексной амплитуды гармонического колебания. — Прим. ред.

Сократив общий член  $e^{j\omega kT}$  в обеих частях последнего равенства, получим выражение

$$H(\omega) = \frac{a_0 + a_1e^{-j\omega T} + \dots + a_n e^{-jn\omega T}}{1 + b_1e^{-j\omega T} + \dots + b_me^{-jm\omega T}} \quad (3.6)$$

которое представляет собой частотную характеристику системы в комплексной форме. Модуль  $H(\omega)$  является амплитудной характеристикой, а аргумент — фазовой характеристикой системы, заданной соотношением (3.3).

Заметим, что выражение (3.6) идентично выражению (3.4) для передаточной функции, если в него вместо  $z^{-1}$  подставить  $e^{-j\omega T}$ . Это иллюстрирует сущность оператора  $z^{-1}$  и полезность передаточной функции.



Фиг. 3.3.

а — реализация передаточной функции  $G_1(z) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$ ;  
б — реализация передаточной функции  $G_2(z) = 1/(1 + b_1z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})$ .

### 3.7. Формы реализации передаточных функций цифровых фильтров

В этом разделе приводятся блок-схемы реализации передаточных функций цифровых фильтров, составленных на основе их элементов — сумматора, умножителя и элемента задержки. Эти блок-схемы называют также формами реализации фильтров, поскольку для практического создания фильтра обычно используют одну из этих форм.

Простейшую форму реализации получают, используя выражение (3.4) для передаточной функции общего вида. Введение вспомогательного  $z$ -преобразования  $X(z)$  позволяет записать передаточную функцию  $G(z)$  в виде

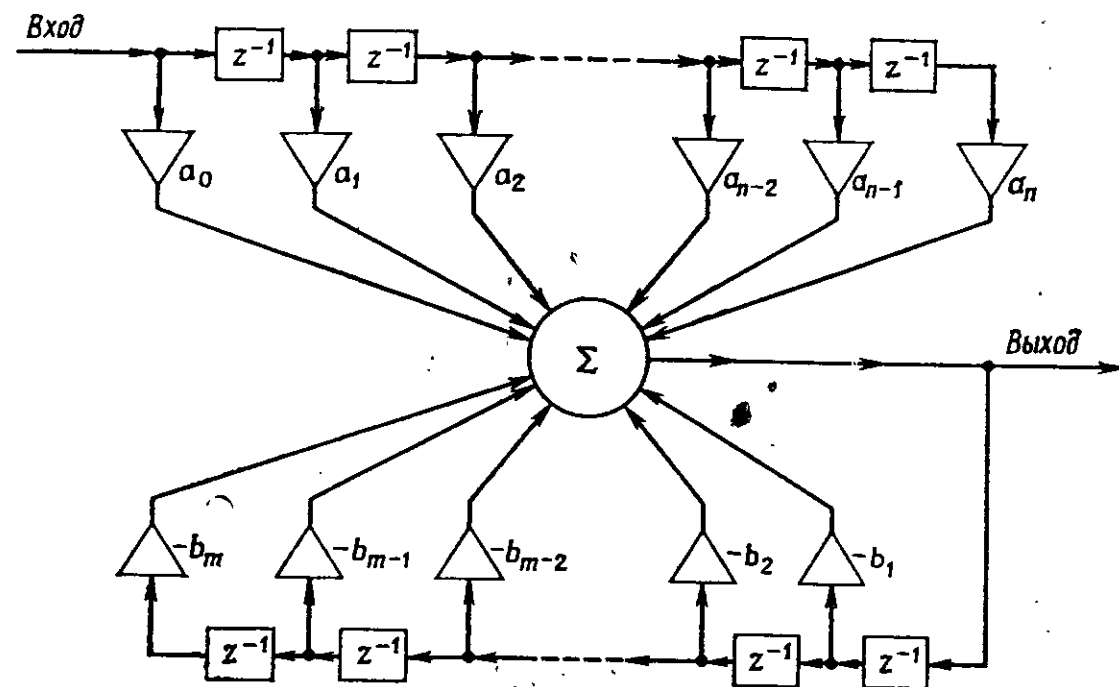
$$G(z) = \frac{V(z)}{X(z)} \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}). \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) теперь можно представить как произведение двух передаточных функций:

$$G_1(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = \frac{X(z)}{U(z)},$$

$$G_2(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} = \frac{V(z)}{X(z)}.$$

Результирующую передаточную функцию  $G(z)$  получают при каскадном соединении двух форм реализации, приведенных на фиг. 3.3, а и б, которые при объединении трех сумматоров в один дают блок-схему, показанную на фиг. 3.4. Эта реализация ни в



Фиг. 3.4. Результат соединения двух форм реализации, представленных на фиг. 3.3.

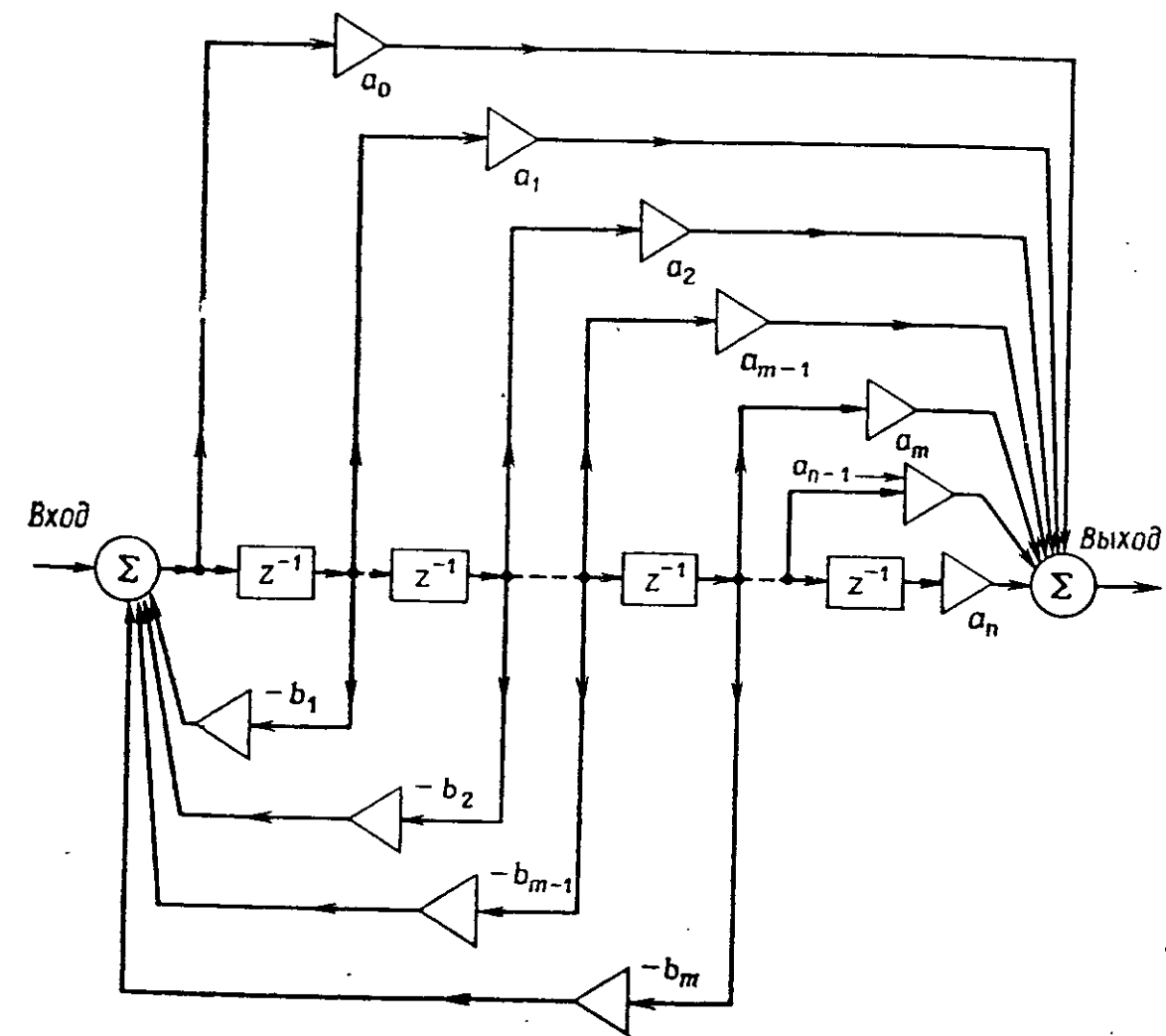
кчем случае не является единственной, поскольку можно получить и другие формы, которые приводят к той же передаточной функции. Различные формы реализации заданной передаточной функции подразделяют на *канонические* и *неканонические*. Под *канонической реализацией* подразумеваются формы, при которых *используемое число элементов задержки в точности равно порядку передаточной функции (т. е. наивысшей степени полиномов числителя и знаменателя)*.

В следующих подразделах описано несколько обычно используемых канонических форм реализации.

#### 3.7.1. Последовательная форма

Форма реализации, полученная выше и показанная на фиг. 3.4, требует  $(m+n)$  элементов задержки и, следовательно, согласно определению, не является канонической.

Однако эту форму можно преобразовать к виду, показанному на фиг. 3.5, где предполагается, что  $n > m$ . Можно показать, что



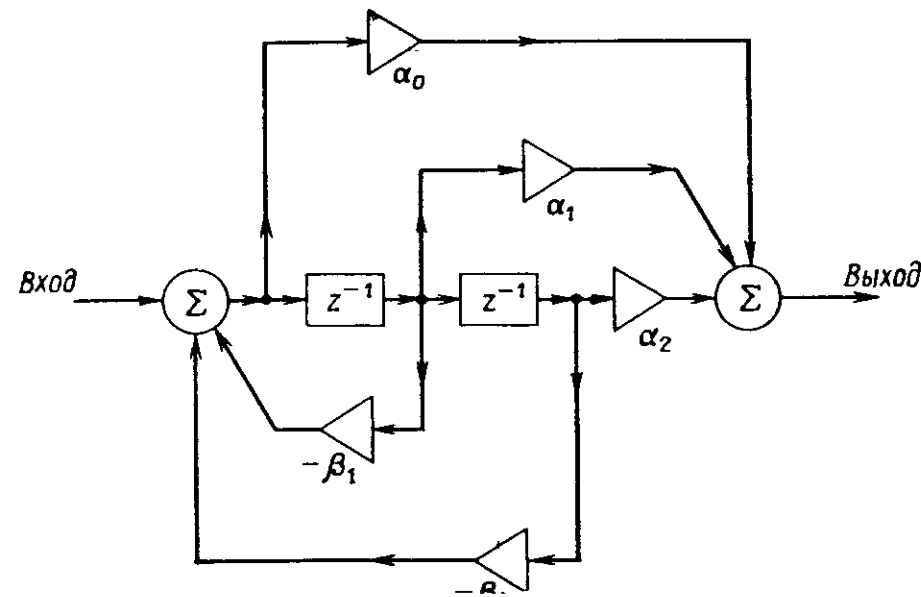
Фиг. 3.5. Каноническая форма реализации.

эта форма реализации приводит к требуемой передаточной функции.

Особенно полезной разновидностью формы является такая, для которой  $n=m=2$ . Она показана на фиг. 3.6 и обсуждается ниже.

### 3.7.2. Биквадратная форма

Показанная на фиг. 3.6 простая форма является основным блоком для построения более сложных канонических форм. Эта форма



Фиг. 3.6. Биквадратный блок.

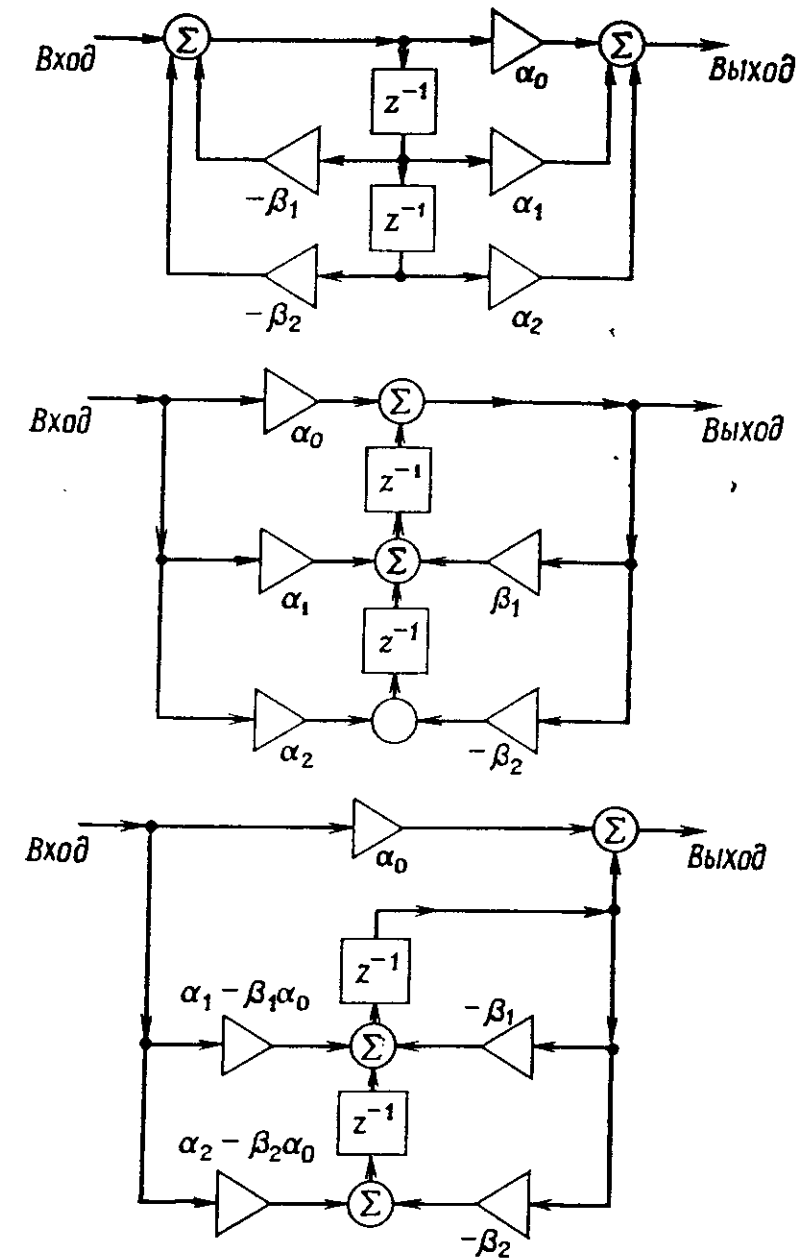
ма известна как *биквадратная*, и, поскольку знаменатель ее передаточной функции является квадратным многочленом, она, следовательно, дает два действительных или комплексно-сопряженных полюса. В последующих подразделах биквадратная форма используется для получения передаточных функций более высоких порядков в канонической форме.

Следует отметить, что каноническая форма реализации передаточной функции на основе биквадратного блока на фиг. 3.6 ни в коем случае не единственна. Например, на фиг. 3.7 показаны другие канонические формы, имеющие идентичные передаточные функции.

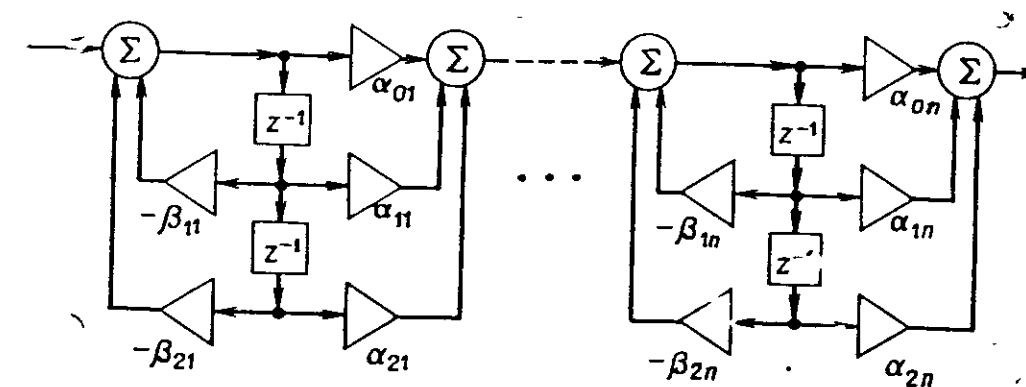
### 3.7.3. Каскадная реализация

Передаточная функция общего вида [выражение (3.4)] может быть факторизована следующим образом:

$$G(z) = \left[ \frac{\alpha_{01} + \alpha_{11}z^{-1} + \alpha_{21}z^{-2}}{1 + \beta_{11}z^{-1} + \beta_{21}z^{-2}} \right] \cdots \left[ \frac{\alpha_{0n} + \alpha_{1n}z^{-1} + \alpha_{2n}z^{-2}}{1 + \beta_{1n}z^{-1} + \beta_{2n}z^{-2}} \right], \quad (3.8)$$



Фиг. 3.7. Некоторые канонические формы, построенные на основе биквадратного блока.



Фиг. 3.8. Каскадная реализация.

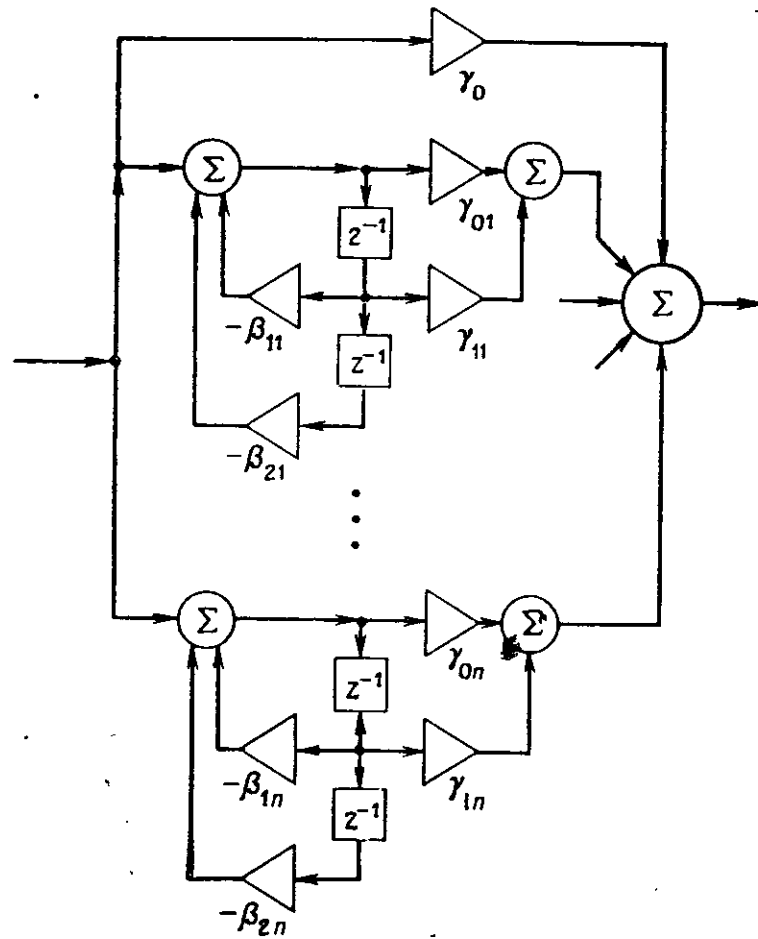
где все коэффициенты являются действительными и постоянными. Нуль или полюс первого порядка можно получить, приравняв нулю коэффициенты квадратичных членов в соответствующих дробях. Отбирая дроби с квадратичными числителем и знаменателем и рассматривая их как отдельные передаточные функции, исходную передаточную функцию [выражение (3.8)] можно реализовать путем каскадного соединения биквадратных форм. Это соединение показано на фиг. 3.8 и называется *каскадной канонической формой*.

3.7.4. Параллельная реализация

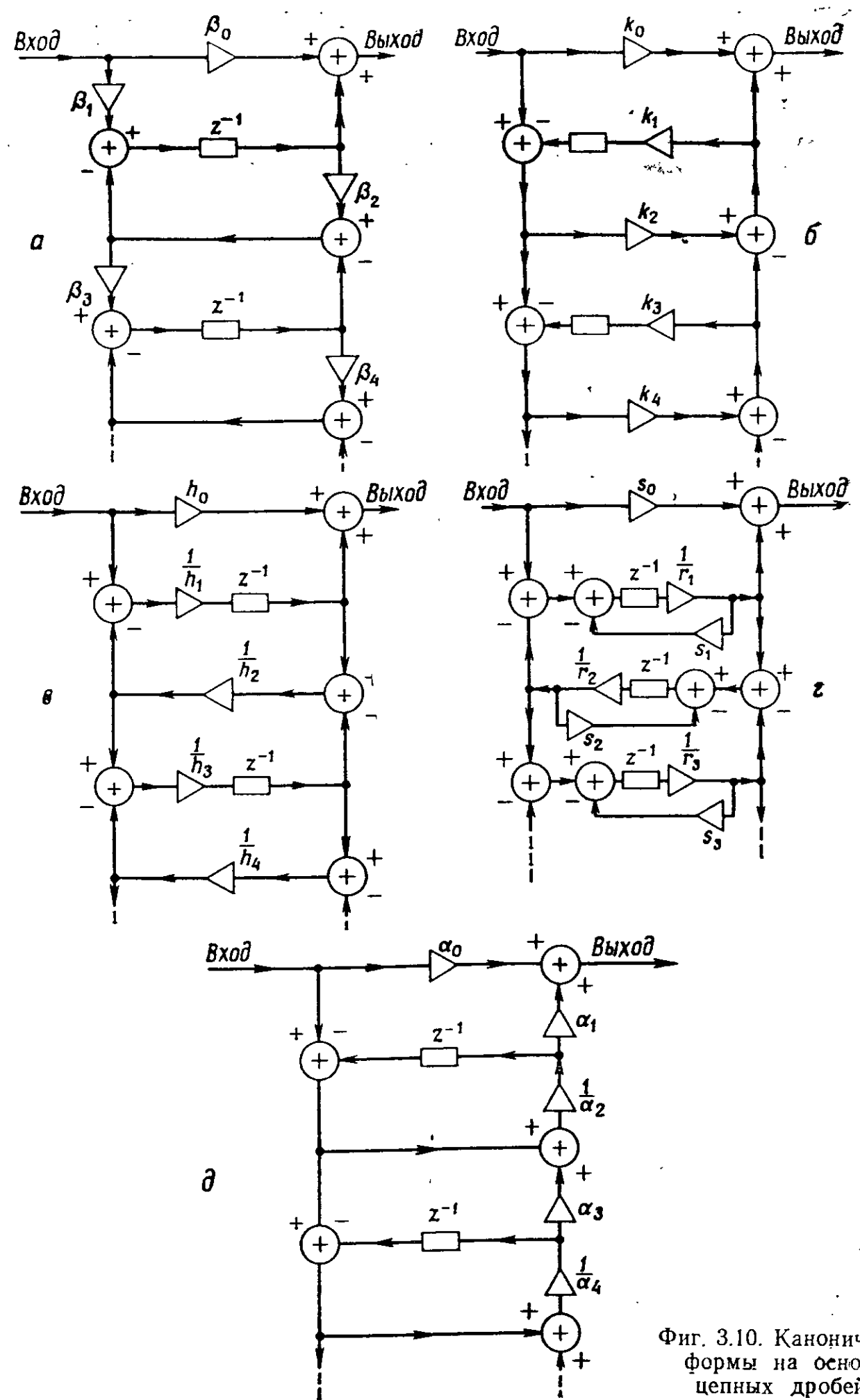
Другая каноническая реализация может быть получена в случае, если передаточную функцию вида (3.4) разложить на элементарные дроби следующим образом:

$$G(z) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i}z^{-1}}{1 + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2}},$$

где  $\gamma_0, \gamma_{0i}, \gamma_{1i}, i=1, 2, 3, \dots, n$ , являются постоянными коэффициентами. Реализация для этого случая показана на фиг. 3.9. Другие формы представлены на фиг. 3.10.



Фиг. 3.9. Параллельная реализация.



Фиг. 3.10. Канонические формы на основе цепных дробей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rader C. M., Gold B., Digital Processing of Signals, McGraw-Hill, 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.



# СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО ДАННЫМ АНАЛОГОВЫХ ФИЛЬТРОВ

А. Константи́нидис

Билинейное преобразование как метод синтеза цифровых фильтров описано многими авторами. Цель настоящей главы состоит в том, чтобы пересмотреть это преобразование, модифицировать его и предложить многополосное преобразование общего вида, из которого могут быть получены более простые преобразования. Будет показано, что преобразование Рэйдера и Голда является частным случаем предложенного общего преобразования.

Методика синтеза цифровых фильтров путем преобразования аналоговых фильтров в цифровые идентична стандартным методам синтеза аналоговых фильтров в плоскости  $s$  и поэтому знакома большинству инженеров. Однако главное преимущество предложенных методов заключается в том, что цифровые фильтры могут быть синтезированы по таблицам аналоговых фильтров, заданным в плоскости  $s$ .

## 4.1. Введение

Исторически разработка и применение аналоговых фильтров предшествовали появлению цифровых фильтров, поэтому при создании последних было вполне естественно обратиться к имевшейся обширной литературе по методам синтеза аналоговых фильтров. Один из подходов к синтезу цифровых фильтров заключался в замене (в передаточной функции выбранного аналогового фильтра) оператора интегрирования  $1/s$  разложением в ряд, а его степеней разложениями более высоких порядков.

В литературе по численному анализу можно найти много различных разложений. Эффективное разложение  $1/s$  достигается, например, при использовании формулы Грегори-Ньютона, правил Симпсона, трапецеидальной аппроксимации и т. д.

Применительно к цифровым фильтрам (т. е. фильтрам, оперирующим с дискретизованными сигналами) наиболее подходящей оказалась трапецеидальная аппроксимация, но не из-за «близости» аппроксимации, а благодаря присущим ей свойствам отображения.

Так, Кайзер [1] и Гоулден и Кайзер [2] полагают, что вместо аппроксимации оператора интегрирования  $1/s$  с помощью разложения, возможно, выгоднее синтезировать цифровые фильтры путем преобразования передаточной функции аналогового фильтра в плоскость  $z$ .

Метод билинейного преобразования в том виде, как его предложил Кайзер и использовали некоторые другие авторы [3], изложен в разд. 4.3. Он рассматривается как отображение плоскости  $s$  в плоскость  $z^{-1}$ , и на этой основе выводятся преобразования общего вида.

## 4.2. Косвенный метод синтеза цифровых фильтров

### Постановка задачи

По заданной передаточной функции аналогового фильтра (т. е. по действительной рациональной функции от  $s$ ), используя функциональное соотношение, найти передаточную функцию цифрового фильтра (т. е. действительную рациональную функцию от  $z^{-1}$ ) путем отображения комплексной переменной  $s$  в комплексную переменную цифрового фильтра  $z^{-1}$ .

Прежде чем перейти к билинейному преобразованию, нужно сделать некоторые пояснения. Для исключения путаницы, которая может возникнуть при работе с частотами на плоскости  $s$  или  $z$ , будем считать, что комплексные переменные имеют вид  $s = \Sigma + j\Omega$  и  $z = \exp(\sigma T + j\omega T)$ .

Таким образом,  $z = \exp(s_1 T)$ , где  $s_1 = \sigma T + j\omega T$ , так что  $\omega$  соответствует частотам на плоскости  $z$ , а  $\Omega$  — частотам на плоскости  $s$ .

## 4.3. Билинейное преобразование

Кайзер [1] и Гоулден и Кайзер [2] предлагают следующее соотношение между комплексными переменными  $s$  и  $s_1$ :

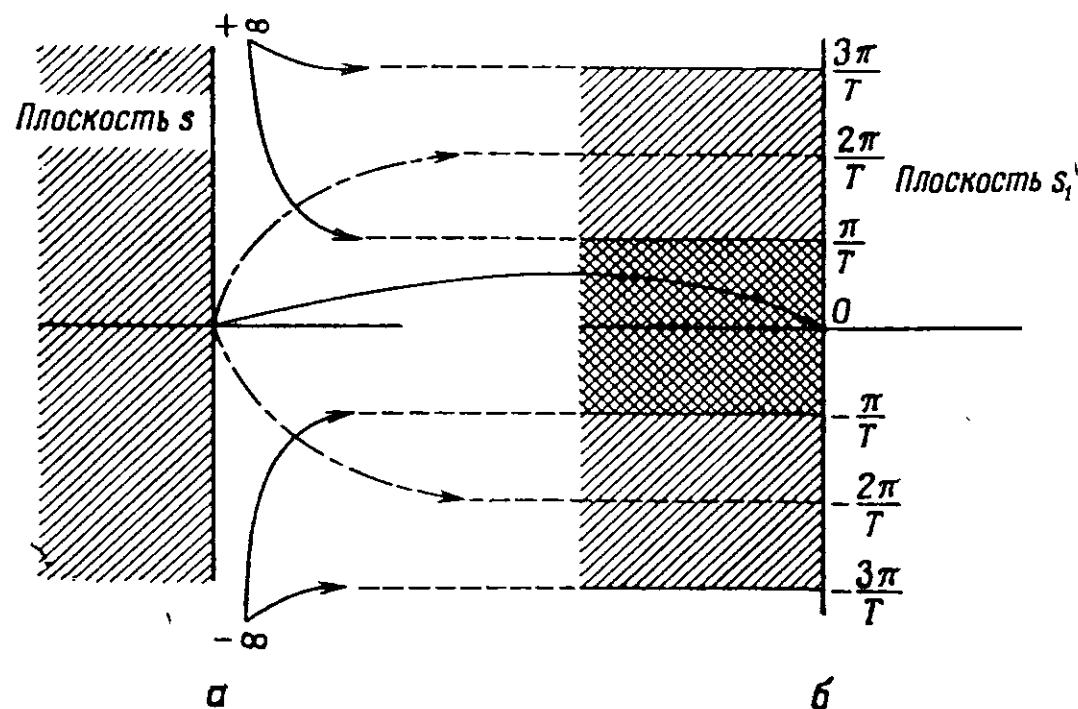
$$s = \frac{2}{T} \operatorname{th} \left( \frac{s_1 T}{2} \right). \tag{4.1}$$

Здесь  $T$  — период дискретизации.

Из соотношения (4.1) следует, что комплексную переменную  $s$  заданной передаточной функции аналогового фильтра можно заменить функцией гиперболического тангенса от  $s_1$ .

Поскольку функция гиперболического тангенса монотонна, правильный порядок следования значений  $s$  сохраняется, но вследствие периодичности соотношения плоскость  $s$  отображается на плоскость  $s_1$  в виде последовательности параллельных полос,

как это показано на фиг. 4.1, а и б. Область с двойной штриховкой на фиг. 4.1, б, расположенная вблизи начала координат, называется *областью главной полосы*. (Этот термин, в частности, соответствует диапазону частот на мнимой оси в пределах этой области.)



Фиг. 4.1. Отображение при билинейном преобразовании.

Из соотношения (4.1) следует, что

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left( \frac{\omega T}{2} \right), \quad (4.2)$$

т. е. вся ось  $\Omega$  монотонно отображается в совокупность областей вида

$$\frac{(2r-1)\pi}{T} < \omega < \frac{(2r+1)\pi}{T},$$

где  $r$  — любое целое. Далее величину  $s$  можно следующим образом выразить через комплексную переменную  $z^{-1}$ :

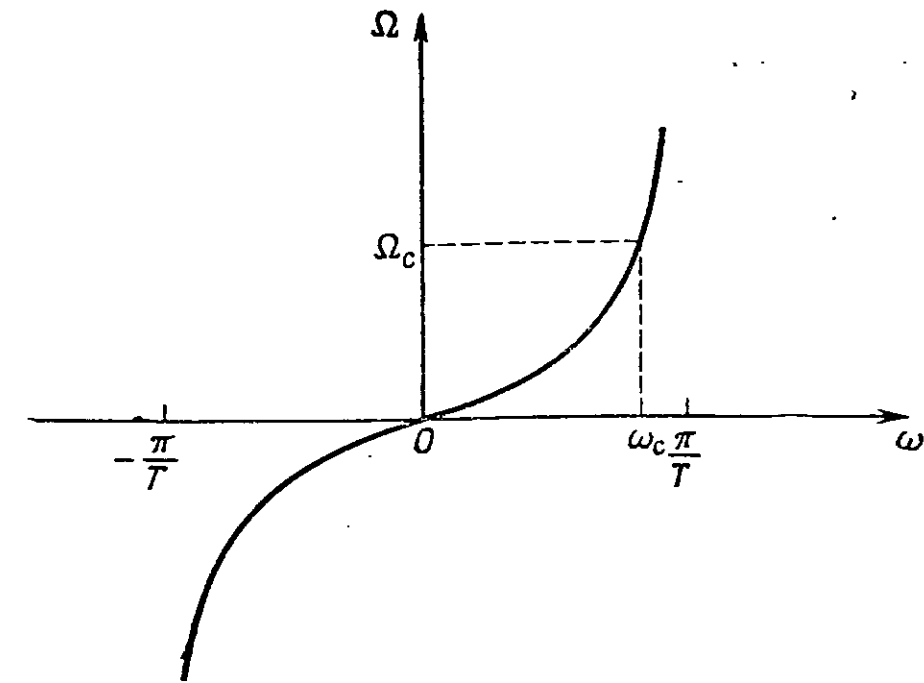
$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что при замене  $s$  в заданной действительной рациональной передаточной функции на выражение (4.3) получим действительную рациональную функцию от  $z^{-1}$ . Амплитудная характеристика аналогового фильтра воспроизводится во всех частотных полосах  $(2r-1)\pi/T < \omega < (2r+1)\pi/T$ . Из рассмотрения главной полосы  $-\pi/T < \omega < \pi/T$  видно, что если заданная передаточная функция аналогового фильтра соответствует фильтру ниж-

них частот с частотой среза  $\Omega_c$ , то результирующая функция от  $z^{-1}$ , соответствующая цифровому фильтру с частотой среза  $\omega_c$ , будет такой, что

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right). \quad (4.4)$$

В результате частота среза аналогового фильтра изменяется, и это обычно рассматривается как деформация шкалы частот. Соотношение (4.4) между двумя частотами среза представлено графически на фиг. 4.2. Из-за этой деформации для получения пере-



Фиг. 4.2. Билинейное преобразование действительных частот.

даточной функции цифрового фильтра с требуемой частотой среза  $\omega_c$  необходимо использовать передаточную функцию аналогового фильтра, имеющего специально подобранную частоту  $\Omega_c$ . Однако мы располагаем таблицами нормализованных передаточных функций аналоговых фильтров, т. е. имеющих  $\Omega_c = 1$  рад/с. Кайзер [1] и Кайзер и Гоулден [2] преодолевают эту трудность, используя преобразование нижних частот (т. е. заменяя нормализованную переменную  $s$  на  $s/\Omega_c$ ) перед выполнением преобразования (4.3).

Относительно билинейного преобразования (4.3) можно сделать два следующих замечания:

1) действительный постоянный множитель  $2/T$ , как отметили Рэйдер и Голд [3], можно опустить;

2) процесс двукратного преобразования (от нормализованного аналогового фильтра нижних частот к аналоговому фильтру нижних частот с частотой среза  $\Omega_c$  и затем билинейное преобразование) удваивает объем вычислений.

Рэйдер и Голд [3] учили, что константу  $2/T$  можно опустить, и использовали преобразование в виде

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (4.5)$$

для которого второе из сделанных выше замечаний также справедливо. Поскольку любой постоянный множитель не изменяет формы преобразования, можно использовать преобразование вида

$$s = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (4.6)$$

где  $k$  — действительная константа, определяемая из условия

$$\Omega_c = k \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right), \quad (4.7)$$

где в свою очередь  $\Omega_c$  — частота среза аналогового фильтра,  $\omega_c$  — требуемая частота среза цифрового фильтра. В частности, при использовании таблицы нормализованных аналоговых фильтров нижних частот  $\Omega_c = 1$  и

$$k = \operatorname{ctg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right). \quad (4.8)$$

Следовательно, преобразование (4.6) принимает форму

$$s = \Omega_c \operatorname{ctg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (4.9)$$

а при  $\Omega_c = 1$

$$s = \operatorname{ctg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (4.10)$$

Таким образом, введя в преобразование константу общего вида  $k$ , мы избавились от необходимости выполнять его дважды.

Итак, преобразование (4.9) дает возможность рассчитать цифровой фильтр нижних частот с заданной частотой среза по данным аналогового фильтра нижних частот.

При синтезе цифрового фильтра верхних частот, полосового или режекторного фильтров Кайзер [1] и ряд других авторов [2—4] предлагают до выполнения билинейного преобразования хорошо известными в аналоговой фильтрации методами преобразовать нормализованный аналоговый фильтр нижних частот. Эта методика потребует дополнительных вычислений, однако можно ввести новое преобразование, позволяющее рассчитывать цифровой фильтр непосредственно по передаточной функции аналогового фильтра нижних частот (по аналогии с рекомендацией Рэйдера и Голда [3] для случая синтеза цифровых полосовых фильтров).

Рассмотрим синтез фильтра верхних частот, для которого мож-

но непосредственно воспользоваться уже полученным преобразованием (4.5). При замене аргумента  $s$  передаточной функции данного аналогового фильтра нижних частот на  $1/s$  получим передаточную функцию фильтра верхних частот. С точки зрения преобразования (4.5) это означает, что если аргумент  $s$  для аналогового фильтра нижних частот заменить на  $(1 + z^{-1})/(1 - z^{-1})$ , то получим выражение для передаточной функции цифрового фильтра верхних частот.

Итак, в общем случае преобразование аналогового фильтра нижних частот в цифровой фильтр верхних частот описывается формулой

$$s = k \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}},$$

где  $k$  — действительная положительная константа, значение которой таково, что частоты среза аналогового фильтра нижних частот ( $\Omega_c$ ) и цифрового фильтра верхних частот ( $\omega_c$ ) связаны соотношением

$$k = \Omega_c \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right).$$

При этом преобразование принимает вид

$$s = \Omega_c \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Если аналоговый фильтр нижних частот нормализован, т. е. если  $\Omega_c = 1$ , то

$$s = \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

В каждом из двух рассмотренных случаев преобразования имеют форму, исключаяющую необходимость:

1) предварительной деформации (эта операция включена в действительную константу  $k$ );

2) преобразования передаточной функции аналогового фильтра нижних частот в передаточную функцию аналогового фильтра верхних частот.

Таким образом, преимущества этого преобразования с точки зрения минимизации вычислений очевидны.

Преобразование Рэйдера и Голда является частным случаем рассматриваемых в следующем разделе обобщенных многополосных преобразований, соответствующим одной полосе пропускания в главной полосе. При использовании этого преобразования в модифицированной форме операция предварительной деформации, предложенная Рэйдером и Голдом, становится ненужной. Обоб-

щенные преобразования и частные случаи синтеза цифровых полосовых и режекторных фильтров вместе с необходимыми расчетными формулами составляют содержание следующего раздела.

#### 4.4. Обобщенные преобразования аналогового фильтра нижних частот в многополосный фильтр

Пусть

$$\alpha_i = \cos \omega_{0i} T, \\ \beta_i = \cos \omega_{\infty i} T$$

и

$$0 < \omega_{00} < \omega_{\infty 0} < \omega_{01} < \omega_{\infty 1} \dots \omega_{0(n-1)} < \frac{\pi}{T},$$

где  $T$  — период дискретизации. Отсюда следует, что преобразование

$$s = k \frac{1}{1 - z^{-2}} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (z^{-2} - 2\alpha_i z^{-1} + 1)}{\prod_{i=0}^{n-2} (z^{-2} - 2\beta_i z^{-1} + 1)}, \quad n \geq 2, \quad (4.11)$$

где  $k$  — действительная положительная постоянная, преобразует передаточную функцию аналогового фильтра нижних частот в передаточную функцию многополосного полосового цифрового фильтра с числом полос пропускания, равным  $(n-1)$ .

Так, для одной полосы пропускания в главной полосе получается преобразование вида

$$s = k \frac{z^{-2} - 2\alpha z^{-1} + 1}{1 - z^{-2}}, \quad (4.12)$$

где

$$\alpha = \alpha_0 = \cos \omega_{00} T.$$

Преобразование (4.12) было получено Рэйдером и Голдом [3], но оно не содержало действительной постоянной  $k$ , и поэтому его применение требовало предварительной деформации. Включение в формулу константы  $k$ , как показано ниже, позволяет избежать этой операции.

Пусть аналоговый фильтр нижних частот имеет частоту среза  $\Omega_c$ , а заданные верхняя и нижняя частоты среза полосового цифрового фильтра будут  $\omega_2$  и  $\omega_1$  соответственно. Тогда, если  $z^{-1} = \exp(-j\omega T)$ , т. е. при условии, что  $z^{-1}$  меняется вдоль окружности единичного радиуса [5, 6], имеем

$$\Omega = k \frac{\alpha - \cos \omega T}{\sin \omega T}, \quad (4.13)$$

так что точка  $\Omega = 0$  соответствует точке

$$\omega = \frac{1}{T} \arccos \alpha = \omega_{00},$$

т. е.  $\omega_{00}$  является центральной частотой полосы.

Далее,

$$-\Omega_c = k \frac{\alpha - \cos \omega_1 T}{\sin \omega_1 T}, \quad (4.14)$$

$$\Omega_c = k \frac{\alpha - \cos \omega_2 T}{\sin \omega_2 T},$$

откуда после упрощений получаем

$$\alpha = \frac{\cos \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) T}{\cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) T} \quad (4.15)$$

и

$$k = \Omega_c \operatorname{ctg} \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) T. \quad (4.16)$$

Таким образом, по заданным верхней и нижней частотам среза полосового цифрового фильтра можно найти частоту среза аналогового фильтра нижних частот и постоянную  $k$ , удовлетворяющую уравнению (4.16). Поэтому нет необходимости предварительно деформировать передаточную функцию аналогового фильтра нижних частот.

Теперь, возвращаясь к преобразованию (4.11), можно сделать следующее заключение. Если не  $s$ , а  $1/s$  заменить на правую часть выражения (4.11), то получится многополосное режекторное преобразование. Это может быть сформулировано следующим образом. Преобразование

$$s = k (1 - z^{-2}) \frac{\prod_{i=0}^{n-2} (z^{-2} - 2\beta_i z^{-1} + 1)}{\prod_{i=0}^{n-1} (z^{-2} - 2\alpha_i z^{-1} + 1)}, \quad n \geq 2, \quad (4.17)$$

где  $k$  — действительная положительная постоянная и

$$\alpha_i = \cos \omega_{0i} T,$$

$$\beta_i = \cos \omega_{\infty i} T,$$

$$0 < \omega_{\infty 0} < \omega_{00} < \omega_{\infty 1} < \dots \omega_{\infty (n-1)} < \frac{\pi}{T},$$

преобразует передаточную функцию аналогового фильтра нижних частот в передаточную функцию многополосного режекторного цифрового фильтра с  $(n-1)$  полосами режекции. Для случая одной полосы режекции приведенное преобразование принимает вид

$$s = k \frac{1 - z^{-2}}{z^{-2} - 2\alpha z^{-1} + 1}, \quad (4.18)$$

где

$$\alpha = \alpha_0 = \cos \omega_{\infty 0} T.$$

Если  $z^{-1}$  находится на окружности единичного радиуса, то

$$\Omega = k \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - \alpha}. \quad (4.19)$$

Центр полосы режекции совпадает с частотой  $(1/T) \operatorname{arccos} \alpha$ , т. е. рассчитывается по формуле

$$\omega = \omega_{\infty 0} = \frac{1}{T} \operatorname{arccos} \alpha.$$

Пусть верхняя и нижняя частоты среза режекторного цифрового фильтра равны  $\omega_2$  и  $\omega_1$ , а  $\Omega_c$  — частота среза аналогового фильтра нижних частот. Тогда должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Omega_c &= k \frac{\sin \omega_1 T}{\cos \omega_1 T - \alpha}, \\ -\Omega_c &= k \frac{\sin \omega_2 T}{\cos \omega_2 T - \alpha}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Отсюда получаем формулу

$$\alpha = \frac{\cos \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) T}{\cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) T},$$

которая совпадает с выражением (4.15), а также формулу

$$k = \Omega_c \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) T. \quad (4.21)$$

Замечания, сделанные для случая полосового фильтра, в равной степени применимы и здесь. Так, нет необходимости в предварительной деформации, поскольку уравнение (4.21) имеет две степени свободы.

#### 4.5. Замечания

В разд. 4.3 был рассмотрен и модифицирован метод синтеза цифровых фильтров с применением билинейного преобразования. Затем в разд. 4.4 были предложены два многополосных преобра-

зования. Одно из них, соответствующее случаю многополосного пропускания, было использовано для получения обобщенной формы преобразования Рэйдера и Голда [3], не требующей предварительной деформации передаточной функции аналогового фильтра. Из другого преобразования общего вида, соответствующего многополосной режекции, была выведена формула для преобразования с однополосным подавлением.

Один частный вид преобразования (4.12) соответствует случаю  $\alpha = 0$  и  $k = 1$ , для которого

$$\omega_2 + \omega_1 = \frac{\pi}{T}$$

и

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \Omega_c.$$

При этом

$$s = \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

и

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{T} + \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \Omega_c \right],$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{T} - \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \Omega_c \right].$$

В этом случае получается математически симметричный полосовой цифровой фильтр.

Другой частный вид преобразования имеет место при  $k = 1$ , когда

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \Omega_c.$$

Этот вид преобразования соответствует преобразованию Рэйдера и Голда [3] и, как следует из приведенного уравнения, служит ограничением при выборе верхней и нижней частот среза цифрового фильтра или частоты среза аналогового фильтра — прототипа фильтра нижних частот. Последнее означает, что при выборе частот среза полосового фильтра необходимо использовать аналоговый фильтр нижних частот с частотой среза, удовлетворяющей приведенному условию. Учитывая также, что мы хотим воспользоваться таблицами фильтров (для которых  $\Omega_c = 1$ ), перед преобразованием типа Рэйдера и Голда следует предварительно преобразовать аналоговый фильтр нижних частот в другой аналоговый фильтр нижних частот.

Пусть в формулах (4.12) и (4.18)  $\omega=0$ . При этом выражение (4.12) принимает вид

$$s = k \left( \frac{1+z^{-2}}{1-z^{-2}} \right). \quad (4.22)$$

Из сопоставления формул (4.22) и (4.6) следует, что преобразование (4.22) может быть получено из (4.6) путем замены  $z^{-1}$  на  $(-z^{-2})$ . Этот результат очень важен, поскольку он приводит, как было показано в работах [6, 7], к частному случаю математически симметричного полосового фильтра. Аналогично от преобразования (4.18) при замене  $z^{-1}$  на  $z^{-2}$  можно перейти к случаю полосовой режекции:

$$s = k \left( \frac{1-z^{-2}}{1+z^{-2}} \right). \quad (4.23)$$

(Ясно, что в обоих преобразованиях константы  $k$  одинаковы.)

Итак, приведенные соотношения позволили получить два частных вида спектральных преобразований из плоскости  $s$  в плоскость  $z^{-1}$ .

Таблица 4.1

Преобразования передаточной функции аналогового фильтра нижних частот с частотой среза  $\Omega_c$  из плоскости  $s$  в плоскость  $z^{-1}$

Требуемый цифровой фильтр	Частота среза	Замена $s$ на	Пояснения
Нижних частот	$\omega_c$	$k \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$	$k = \Omega_c \operatorname{ctg} \frac{\omega_c T}{2}$
Верхних частот	$\omega_c$	$k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$k = \Omega_c \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}$
Полосовой	$\omega_1, \omega_2,$ центральная частота $\omega_0$	$k \frac{z^{-2} - 2\alpha z^{-1} + 1}{1-z^{-2}}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)T}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)T}$ $k = \Omega_c \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)T$ $\alpha = \cos \omega_0 T$
Режекторный	$\omega_1, \omega_2,$ центральная частота $\omega_0$	$k \frac{1-z^{-2}}{z^{-2} - 2\alpha z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)T}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)T}$ $k = \Omega_c \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)T$ $\alpha = \cos \omega_0 T$

#### 4.6. Сводные данные по преобразованиям

В табл. 4.1 приведены все случаи преобразований и соответствующие им расчетные формулы.

Эти преобразования, которые являются по своему характеру алгебраическими, могут быть использованы независимо от того, представлена ли передаточная функция аналогового фильтра в виде суммы элементарных дробей или равна отношению полиномов от  $s$ .

#### 4.7. Пример

Рассчитать цифровой фильтр нижних частот со следующими параметрами:

Частота среза	6 кГц
Переходная частота	8,8 кГц
Максимальное ослабление в полосе пропускания	1 дБ
Минимальное ослабление в полосе непропускания	30 дБ
Частота дискретизации	32 кГц

Допустимые границы характеристики ослабления цифрового фильтра изображены на фиг. 4.3, а. Для расчета соответствующих параметров аналогового фильтра воспользуемся соотношением (4.10).

Переходная частота  $\Omega_1$  равна

$$\Omega_1 = \operatorname{ctg} \left( \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 1}{32 \cdot 10^3 \cdot 2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi \cdot 8,8 \cdot 10^3 \cdot 1}{32 \cdot 10^3 \cdot 2} \right) \approx 1,75 \text{ рад/с.}$$

Поэтому допустимые границы характеристики ослабления аналогового фильтра принимают вид, представленный на фиг. 4.3, б. Отметим, что частотные оси на фиг. 4.3, а и б связаны нелинейным соотношением. Из фиг. 4.3, б и таблиц передаточных функций [8, 9] находим, что указанным границам удовлетворяет следующая передаточная функция:

$$H(s) = \frac{1+as}{(1+bs)(1+cs+ds^2)},$$

где

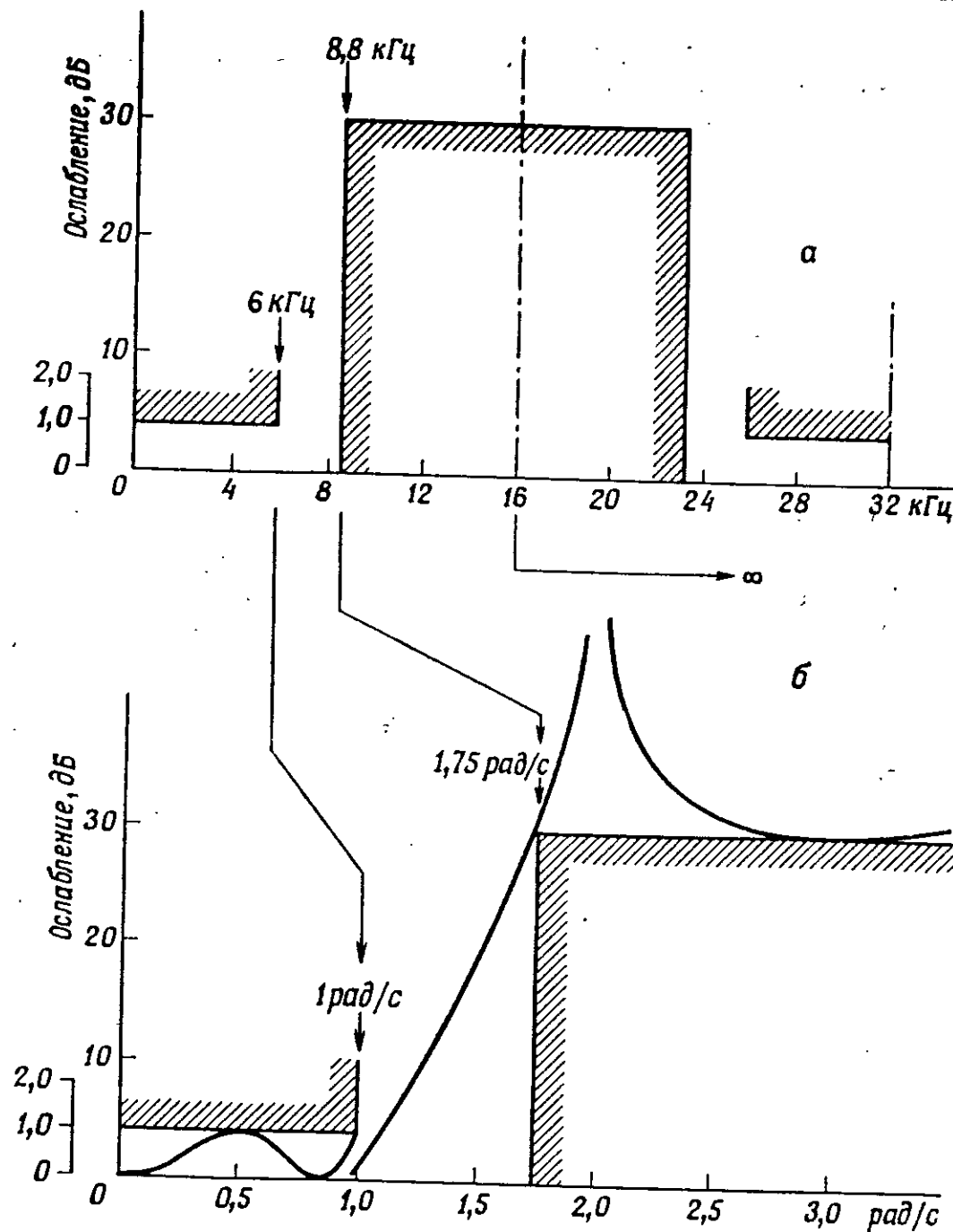
$$a=0,25517931, \quad b=1,793438, \quad c=0,4066687, \quad d=0,9845149.$$

Характеристика ослабления фильтра с такой передаточной функцией приведена на фиг. 4.3, б.

Теперь искомое преобразование (4.10) примет вид

$$s = \operatorname{ctg} \left( \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^3 \cdot 2} \right) \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}},$$





Фиг. 4.3.

а — заданные границы характеристики ослабления; б — характеристика ослабления реализованного фильтра.

или

$$s = 1,4966058 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

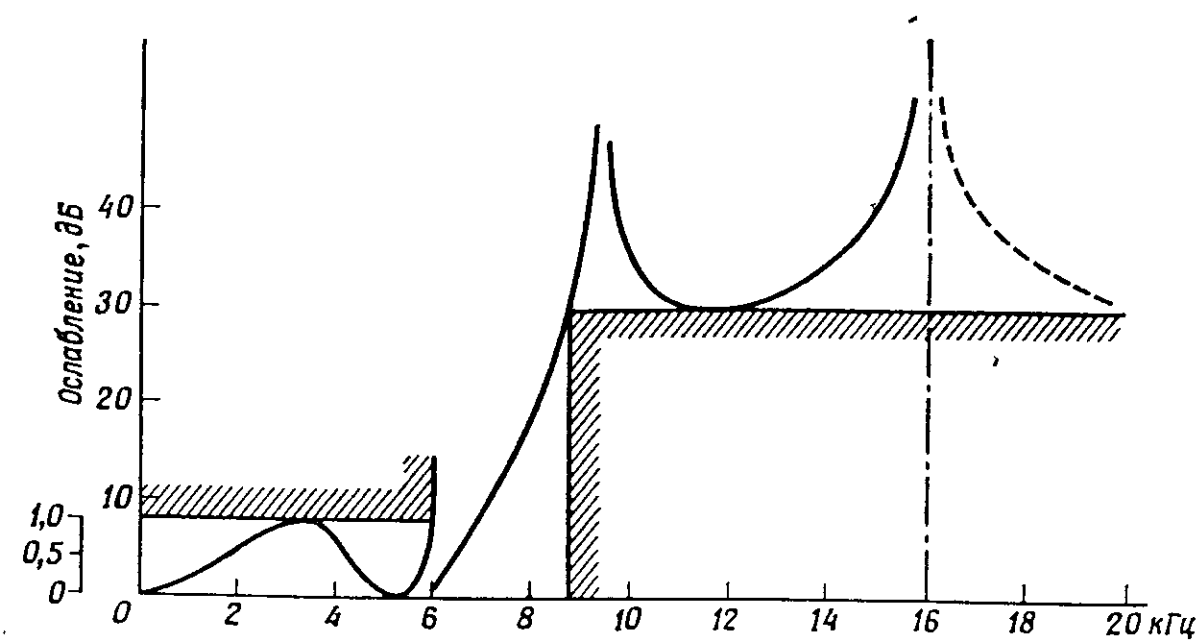
Таким образом, заменив переменную  $s$  в  $H(s)$  на полученное выражение, получим

$$G(z) = H(s) \Big|_{s=1,4966058 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

или

$$G(z) = \frac{(1 + z^{-1})(1,571558 + 0,856884z^{-1} + 1,571558z^{-2})}{(3,684070 - 1,684070z^{-1})(3,813767 - 2,410288z^{-1} + 2,596521z^{-2})}$$

Характеристика ослабления рассчитанного фильтра приведена на фиг. 4.4. Там же для сравнения нанесены заданные границы характеристики ослабления.



Фиг. 4.4. Характеристика ослабления цифрового фильтра.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kuo F. F., Kaiser J. F., Systems Analysis by Digital Computer, Wiley, 1966; есть русский перевод главы 7 Кайзера Д. «Цифровые фильтры» в книге Голда Б. и Рэйдера Ч. «Цифровая обработка сигналов», изд-во «Советское радио», 1973.
2. Golden R. M., Kaiser J. F., Design of Wideband Sampled Data Filters, *BSTJ*, Vol. 43, Part 2, 1533—1546 (1964).
3. Rader C. M., Gold B., Digital Methods for Sampled-Data Filters, Proceedings First Allerton Conference on Circuit and System Theory, 1963, pp. 221—236.
4. Gold B., Rader C. M., Digital Processing of Signals, McGraw-Hill, 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
5. Constantinides A. G., Frequency Transformations for Digital Filters, *Electron Letters*, 3, № 11, 487—489 (1967).
6. Constantinides A. G., Frequency Transformations for Digital Filters, *Electron Letters*, 4, № 7, 115—116 (1968).
7. Constantinides A. G., Digital Filters in Frequency Division Multiplex Telephone Systems, Research Report, The City Univ., London, June 1969.
8. Saal R., Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges Normierter Tiefpasse, Telefunken AG, 1967.
9. Christian E., Eisenmann E., Filter Design Tables and Graphs, Wiley, N. Y., 1966.

## Глава 5

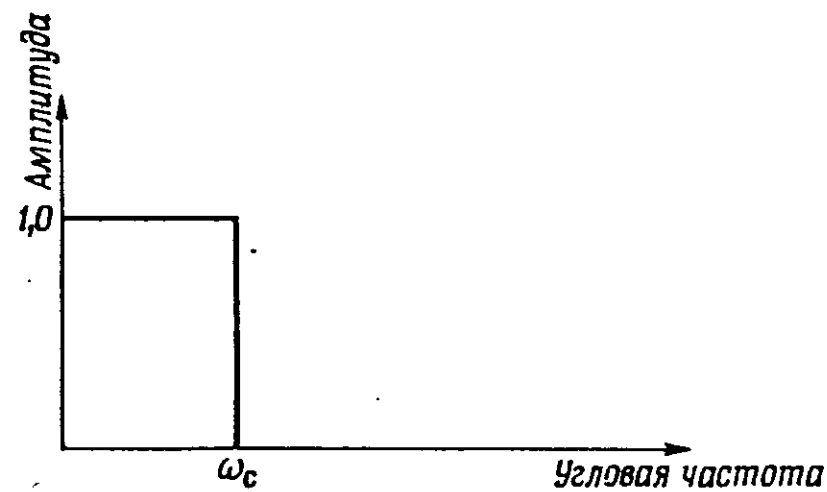
## ПРЯМОЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

А. Константи́дис

## 5.1. Введение

Как и при синтезе аналоговых фильтров, задачу прямого синтеза цифровых фильтров можно разделить на два этапа:

- 1) прямой синтез цифровых фильтров нижних частот;



Фиг. 5.1. Характеристика идеального фильтра нижних частот.

2) прямой синтез цифровых фильтров верхних частот, полосовых и режекторных фильтров по передаточным функциям фильтров нижних частот.

Это разделение значительно упрощает задачу синтеза, так как, если передаточные функции фильтров верхних частот, полосовых и режекторных фильтров можно получить из передаточных функций фильтров нижних частот, достаточно разработать методику синтеза фильтров нижних частот.

Идеальная амплитудная характеристика цифрового фильтра нижних частот имеет прямоугольную форму (фиг. 5.1). Однако квадрат амплитудной характеристики физически осуществимого фильтра, как будет показано ниже, является действительной рациональной функцией от  $\operatorname{tg}^2(\omega T/2)$ .

Таким образом, задача синтеза сводится к нахождению некоторой функции, аппроксимирующей идеальную амплитудную характеристику в заданном смысле. Такой подход к синтезу является прямым, поскольку, начиная с определения идеальной ам-

плитудной характеристики, используемые данные имеют отношение только к цифровым фильтрам.

В зависимости от способа аппроксимации этой идеальной характеристики искомые передаточные функции классифицируются следующим образом:

- 1) максимально гладкая, или аппроксимация Баттерворта;
- 2) чебышевская аппроксимация [2];
- 3) эллиптического типа [3];
- 4) обобщенная полиномиальная аппроксимация [5];
- 5) параметрического типа [6].

В настоящем разделе будут рассмотрены фильтры нижних частот, принадлежащие к 1-й группе, и предложены методы их синтеза.

Первый шаг к прямому синтезу цифрового фильтра состоит в том, чтобы показать возможность построения передаточной функции по заданной амплитудной характеристике фильтра.

Рассмотрим общий вид квадрата амплитудной характеристики цифрового фильтра.

Амплитудная характеристика. Передаточная функция цифрового фильтра, как было показано в гл. 3 [уравнение (3.4)], равна

$$G(z) = \frac{\sum_r a_r z^{-r}}{\sum_r b_r z^{-r}}. \quad (5.1)$$

При  $z^{-1} = \cos \omega T - j \sin \omega T$  она принимает вид

$$G(\omega T) = \frac{\sum_r a_r \cos r\omega T - j \sum_r a_r \sin r\omega T}{\sum_r b_r \cos r\omega T - j \sum_r b_r \sin r\omega T}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим выражение

$$y_n = \cos n\theta, \text{ где } n \text{ — целое.}$$

Отсюда

$$y_{n-1} = \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta$$

и

$$y_{n+1} = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta,$$

так что

$$y_{n+1} + y_{n-1} = 2 \cos \theta y_n$$

и, следовательно,

$$y_{n+1} = 2 \cos \theta y_n - y_{n-1}. \quad (5.3)$$

Учитывая рекуррентность соотношения (5.3), а также начальные условия  $y_0 = 1$  и  $y_1 = \cos \theta$ , приходим к выводу, что  $y_n$  является действительным полиномом от  $\cos \theta$ .

Рассмотрим также

$$u_n = \sin n\theta.$$

Тогда

$$u_{n+1} = \sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta,$$

$$u_{n-1} = \sin(n-1)\theta = \sin n\theta \cos \theta - \cos n\theta \sin \theta.$$

Поэтому

$$u_{n+1} - u_{n-1} = 2 \sin \theta \cos n\theta = 2 \sin \theta y_n,$$

и так как  $y_n$  — полином от  $\cos \theta$ , то  $u_n$  должно иметь вид  $\sin \theta \times$   
 $\times$  (полином от  $\cos \theta$ ).

С учетом этих результатов вернемся к выражению (5.2). Видно, что действительные части числителя и знаменателя являются суммами косинусов углов, кратных  $\omega T$ , и, следовательно, могут быть представлены в виде полиномов от  $\cos \omega T$ . Мнимые части равны суммам синусов углов, кратных  $\omega T$ , и поэтому они будут иметь одинаковый коэффициент  $\sin \omega T$ , который умножается на полиномы от  $\cos \omega T$ . В результате выражение (5.2) можно переписать следующим образом:

$$G(\omega T) = \frac{\sum_r c_r \cos^r \omega T - j \sin \omega T \sum_r d_r \cos^r \omega T}{\sum_r e_r \cos^r \omega T - j \sin \omega T \sum_r f_r \cos^r \omega T},$$

так что квадрат амплитудной характеристики имеет вид

$$\begin{aligned} |G(\omega T)|^2 &= \frac{\left(\sum_r c_r \cos^r \omega T\right)^2 + (1 - \cos^2 \omega T) \left(\sum_r d_r \cos^r \omega T\right)^2}{\left(\sum_r e_r \cos^r \omega T\right)^2 + (1 - \cos^2 \omega T) \left(\sum_r f_r \cos^r \omega T\right)^2} = \\ &= \frac{\sum_r g_r \cos^r \omega T}{\sum_r h_r \cos^r \omega T}. \end{aligned}$$

Подставив

$$\cos \omega T = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\omega T/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\omega T/2)},$$

получим

$$|G(\omega T)|^2 = \frac{\sum_r \alpha_r \operatorname{tg}^{2r}(\omega T/2)}{\sum_r \beta_r \operatorname{tg}^{2r}(\omega T/2)}, \quad (5.4)$$

где  $\alpha_r$  и  $\beta_r$  — действительные постоянные коэффициенты. Таким образом, квадрат амплитудной характеристики цифрового филь-

ра может быть выражен через действительную рациональную функцию от  $\operatorname{tg}^2(\omega T/2)$ .

Выражение (5.4) всегда можно записать следующим образом:

$$|G(\omega T)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P^2(\omega)}, \quad (5.5)$$

где  $\varepsilon$  — действительная константа, а  $P^2(\omega)$  — действительная рациональная функция от  $\operatorname{tg}^2(\omega T/2)$ . Эта форма записи особенно удобна для описания характеристик фильтра.

Ниже мы будем рассматривать только фильтры нижних частот, предполагая, что фильтры верхних частот, полосовые и режекторные фильтры можно получить из низкочастотного фильтра-прототипа.

Итак, числитель и знаменатель  $P^2(\omega)$  обязательно имеют степень  $2m$ , так что числитель и знаменатель  $G(z^{-1})$  являются функциями от  $z^{-1}$  одного и того же порядка, совпадающего с порядком передаточной функции фильтра.

## 5.2. Полиномиальные цифровые фильтры нижних частот

Выше было показано, что в общем случае квадрат амплитудной характеристики имеет вид

$$|G|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P^2(\omega)}. \quad (5.6)$$

Под «полиномиальными фильтрами» мы понимаем фильтры, для которых функция  $P^2(\omega)$  в формуле (5.6) выражается в общем виде как

$$P^2(\omega) = \sum_{r=0}^n a_r \operatorname{tg}^{2r} \left( \frac{\omega T}{2} \right), \quad (5.7)$$

где  $\operatorname{tg}(\omega T/2)$  — аргумент характеристики фильтров нижних частот,  $a_r$  — действительные постоянные коэффициенты.

Так как выражение (5.6) с функцией  $P^2(\omega)$ , имеющей вид (5.7), должно аппроксимировать идеальную амплитудную характеристику, то для обеспечения заданной формы  $|G|^2$  на выражение (5.7) могут быть наложены некоторые специфические ограничения способа аппроксимации. Прежде чем приступить к оценке различных видов  $P^2(\omega)$ , рассмотрим общую форму этого полинома, задаваемую выражением (5.7), и сформулируем его основные свойства.

Легко увидеть, что на всех частотах, равных  $(2n+1)(\Omega_d/2)$ , где  $\Omega_d$  — угловая частота дискретизации (и, следовательно, также на граничных частотах Найквиста), имеем

$$\operatorname{tg} \left[ \frac{T}{2} (2n+1) \frac{\Omega_d}{2} \right] = \pm \infty, \quad (5.8)$$

так что на этих частотах  $P^2(\omega)$  стремится к бесконечности, а амплитудная характеристика равна нулю.

Далее, когда  $\operatorname{tg}(\omega T/2) \gg 1$ , зависимость (5.7) имеет характер

$$P^2(\omega) = 0 \left( \operatorname{tg}^{2n} \left( \frac{\omega T}{2} \right) \right), \quad (5.9)$$

и, так как  $\operatorname{tg}(\omega T/2)$  — монотонная функция частоты  $\omega$ ,  $P^2(\omega)$  и, следовательно,  $|G|^2$  будут монотонными функциями  $\omega$ . Последнее означает, что  $P^2(\omega)$  будет монотонно неограниченно возрастать, а  $|G|^2$  — монотонно уменьшаться до нуля на частотах  $(2n+1)\Omega_d/2$ .

Очевидно, что  $|G|^2$ , определяемая выражением (5.6), периодична по  $\omega$  с периодом  $2\pi/T = \Omega_d$ . Ввиду этого можно ограничиться рассмотрением одного периода, например главной полосы  $(-\Omega_d/2, \Omega_d/2)$ , для которой можно отметить следующее.

Квадрат амплитудной характеристики  $|G|^2$ , описываемый формулой (5.6) с функцией  $P^2(\omega)$  в виде (5.7), монотонно уменьшается, начиная с некоторой частоты  $\omega_c$ , и равен нулю на  $\Omega_d/2$ .

Сформулированное свойство интересно сравнить с аналогичным свойством аналогового фильтра нижних частот, для которого  $P^2(\omega)$  является действительным полиномом от  $\omega^2$ , неограниченно возрастающим на бесконечности, начиная с некоторой определенной частоты. Последнее означает, что передаточная функция аналогового фильтра этого типа  $n$ -го порядка имеет нуль  $n$ -го порядка на бесконечности, тогда как передаточная функция цифрового фильтра  $n$ -го порядка имеет выполняющий ту же функцию нуль  $n$ -го порядка на частоте Найквиста.

Разделив главную полосу на полосы пропускания и непропускания, приходим к выводу, что выбор  $P^2(\omega)$  в виде суммы (5.7) приводит к монотонному изменению амплитудной характеристики цифровых фильтров нижних частот в полосе непропускания. Однако поведение в полосе пропускания должно быть оговорено в начальных условиях и может быть монотонным баттервортовского типа, чебышевским с равновеликими пульсациями и т. д.

В заключение отметим, что в пределе, когда число членов суммы (5.7) неограниченно возрастает, выражение (5.6) стремится к выражению для идеальной частотной характеристики.

### 5.3. Синтез монотонных цифровых фильтров Баттерворта нижних частот

Простейшей нетривиальной формой  $P^2(\omega)$  [см. (5.7)] является

$$P^2(\omega) = a \operatorname{tg}^{2n} \left( \frac{\omega T}{2} \right), \quad (5.10)$$

где  $a$  — действительный постоянный коэффициент. Эта функция монотонна и в полосе пропускания, и в полосе непропускания.

В этом случае амплитудная характеристика фильтра нижних частот описывается формулой

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{1 + a \operatorname{tg}^{2n} \left( \frac{\omega T}{2} \right)}},$$

причем постоянная  $a$ , определяемая из условия получения на частоте среза  $\omega_c$  ослабления в 3 дБ, равна

$$a = \left[ \operatorname{tg}^{2n} \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \right]^{-1}.$$

В результате квадрат амплитудной характеристики рассматриваемого фильтра принимает вид

$$|G(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\operatorname{tg}^2(\omega T/2)}{\operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)} \right]^{2n}}. \quad (5.11)$$

Для этого уравнения справедливы следующие соотношения:

- 1)  $|G(0)| = 1$ ,
- 2)  $|G(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,
- 3)  $G\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0$ .

Итак, в диапазоне частот главной полосы амплитудная характеристика (5.11) монотонно уменьшается от единицы до нуля, напоминая в этом смысле характеристику аналогового фильтра Баттерворта нижних частот.

Для того чтобы синтезировать цифровой фильтр нижних частот с рассматриваемой амплитудной характеристикой, необходимо найти положение его полюсов на плоскости  $z^{-1}$ . С этой целью введем вспомогательную переменную

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (5.12)$$

где  $p = u + jv$ . Так как  $z^{-1} = e^{-j\omega T}$  соответствует окружности  $|z^{-1}| = 1$ , то вспомогательная переменная  $p$  при условии, что  $z^{-1}$  лежит на этой единичной окружности, принимает вид

$$p = j \operatorname{tg} \left( \frac{\omega T}{2} \right),$$

т. е.

$$u = 0 \quad \text{и} \quad v = \operatorname{tg} \left( \frac{\omega T}{2} \right). \quad (5.13)$$

На плоскости  $p$  полюсы функции (5.11) будут совпадать с корнями уравнения

$$\left(\frac{p}{jv_c}\right)^{2n} + 1 = 0,$$

где  $v_c = \operatorname{tg}(\omega_c T/2)$ , а  $\omega_c$  — заданная частота среза. Отсюда

$$(-1)^n \left(\frac{p}{v_c}\right)^{2n} + 1 = 0.$$

Следовательно, для четных  $n$

$$p_r = v_c e^{j\pi(2r+1)/2n}, \quad r=0, 1, 2, \dots, (2n-1),$$

а для нечетных  $n$

$$p_r = v_c e^{j\pi r/n}, \quad r=0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Итак, для четных  $n$

$$\begin{aligned} u_r &= v_c \cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi\right), \\ v_r &= v_c \sin\left(\frac{2r+1}{2n}\pi\right), \\ r &= 0, 1, 2, \dots, (2n-1), \end{aligned} \quad (5.14)$$

а для нечетных  $n$  нужно в этих формулах заменить  $(2r+1)/2n$  на  $r/n$ .

Параметрические уравнения (5.14) описывают окружность на плоскости  $p$  радиусом  $v_c$  с центром в начале координат. Рассмотрим, в какую кривую эта окружность отображается на плоскости  $z^{-1}$  с помощью преобразования (5.12).

Пусть

$$z^{-1} = x + jy$$

и

$$p = u + jv,$$

так что

$$z^{-1} = x + jy = \frac{1 - (u + jv)}{1 + (u + jv)}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{1 - (u^2 + v^2)}{(1 + u)^2 + v^2},$$

$$y = \frac{-2v}{(1 + u)^2 + v^2}.$$

Но для отображаемой окружности

$$u^2 + v^2 = v_c^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - v_c^2}{1 + 2u + v_c^2}, \\ y &= \frac{-2v}{1 + 2u + v_c^2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

откуда соотношение между  $x$  и  $y$  принимает следующий вид:

$$y^2 + \left[x - \frac{1 + v_c^2}{1 - v_c^2}\right]^2 = \frac{4v_c^2}{(1 - v_c^2)^2}.$$

Оно также описывает окружность радиуса

$$\rho = \frac{2v_c}{1 - v_c^2}$$

с центром  $C$ , имеющим координаты

$$\left[\frac{1 + v_c^2}{1 - v_c^2}, 0\right].$$

Поскольку

$$v_c = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right),$$

радиус окружности и координаты ее центра оказываются равными

$$\rho = \operatorname{tg}(\omega_c T), \quad C(\sec \omega_c T, 0).$$

Используя формулы (5.14) и (5.15), определяем искомые положения полюсов фильтра Баттерворта нижних частот:

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)}{1 - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) \cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)}, \\ y_r &= \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) \sin\left(\frac{2r+1}{2n}\pi\right)}{1 - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) \cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)}, \\ r &= 0, 1, 2, \dots, (2n-1). \end{aligned}$$

Эти выражения справедливы для четных  $n$ ; при нечетных  $n$  в них следует  $(2r+1)/2n$  заменить на  $r/n$  и учесть, что  $r$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ .

Таким образом, синтез проводится в следующей последовательности:

1) По заданным характеристикам рассчитывается порядок фильтра  $n$ .

2) Находится положение полюсов на плоскости  $z^{-1}$  и выбираются те из них, которые лежат вне единичного круга.

3) Из равенства (5.8) следует, что точка  $z^{-1} = -1$  является нулем  $n$ -го порядка. С помощью этого нуля и найденных на предыдущем этапе полюсов формируется искомая передаточная функция.

Рассмотрим следующий пример.

**Пример.** Рассчитать цифровой фильтр нижних частот с максимально гладкой амплитудной характеристикой, имеющей частоту среза 4,5 кГц. Переходное отношение должно быть равно 0,9, ослабление на переходной частоте лучше 60 дБ. Частота дискретизации равна 18 кГц.

Расчет порядка фильтра  $n$ .

По переходному отношению и частоте среза вычисляем переходную частоту

$$f_1 = 4,5/0,9 = 5 \text{ кГц,}$$

откуда  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 10\pi$  рад/с. Далее,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{4,5\pi}{18}\right) = 1$$

и

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18}\right) = 1,18.$$

Следовательно, для переходной частоты получаем

$$10 \lg(1 + 1,18^{2n}) = 60,$$

откуда

$$n = \frac{6}{0,79 \cdot 2} = 3,8.$$

Берем ближайшее целое  $n = 4$ .

Равенство  $\operatorname{tg}(\omega_c T/2) = 1$  означает, что полюсы в плоскости  $p$  лежат на единичной окружности и в соответствии с (5.14) их координаты равны

$$u_r = \cos\left(\frac{2r+1}{8}\pi\right),$$

$$v_r = \sin\left(\frac{2r+1}{8}\pi\right),$$

$$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

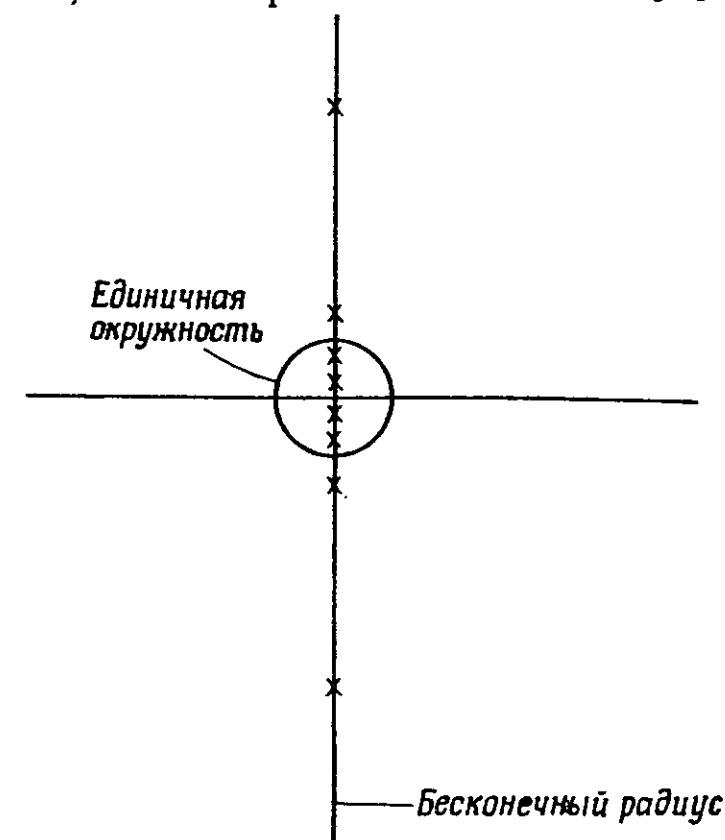
Они имеют следующие числовые значения:

$u_r$	$v_r$
$\pm 0,92388$	$\pm 0,38268$
$\pm 0,38268$	$\pm 0,92388$

В плоскости  $z^{-1}$  полюсы будут располагаться на мнимой оси и иметь координаты

$x_r$	$y_r$
0	$\pm 0,19891$
0	$\pm 5,02732$
0	$\pm 0,66818$
0	$\pm 1,49660$

Расположение полюсов в плоскости  $z^{-1}$  показано на фиг. 5.2. Сразу же отметим, что четыре из них лежат внутри круга единич-



Фиг. 5.2. Расположение полюсов фильтра Баттерворта с  $n = 4$ ,  $\omega_c T = \pi/2$ .

ного радиуса, а остальные четыре — вне его. Таким образом, устойчивость цифрового фильтра обеспечивается следующими полюсами:

$$0 \pm j5,02732,$$

$$0 \pm j1,49660.$$

Каждая пара этих полюсов образует квадратный трехчлен с нулевым коэффициентом при  $z^{-1}$ . Поэтому трехчлен от  $z^{-1}$ , соответствующий паре полюсов  $(-0,38268 \pm j0,92388)$  в плоскости  $p$ , будет равен

$$Q_1 = 1,23464z^{-2} + 2,76536,$$

а для другой пары полюсов  $(0,92388 \pm j0,38268)$  в этой же плоскости

$$Q_2 = 0,15224z^{-2} + 3,84776.$$

Необходимо также учесть, что фильтр 4-го порядка должен иметь нуль 4-го порядка в точке  $z^{-1} = -1$ . Итак, искомая передаточная функция равна

$$G_1(z^{-1}) = K \frac{(1 + z^{-1})^4}{Q_1 Q_2},$$

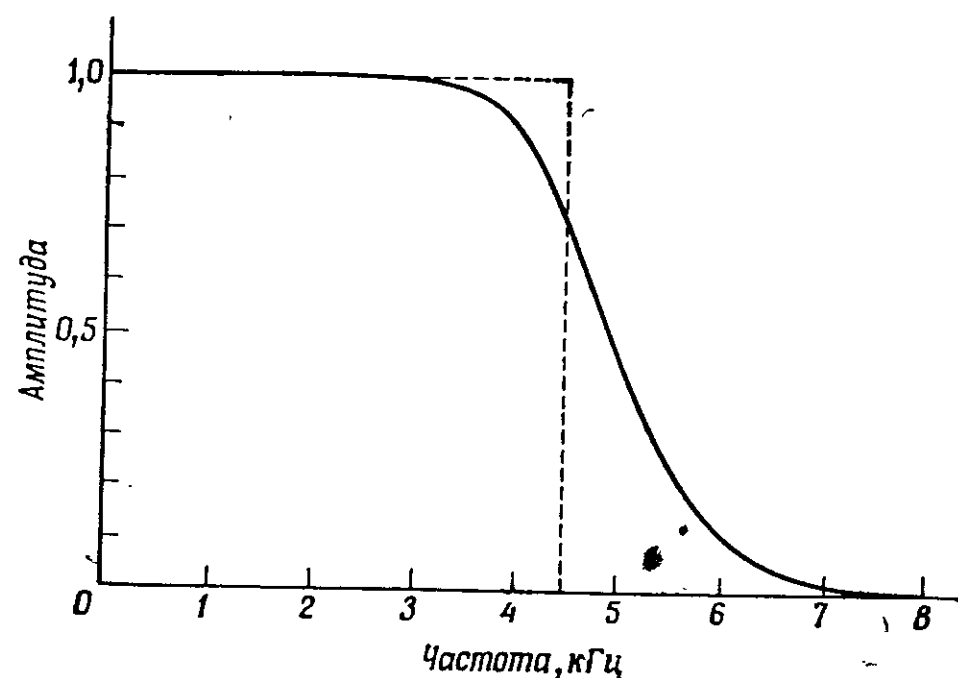
где  $K$  — константа нормализации.

Нормализуя на нулевой частоте  $\omega = 0$  (для нее  $z^{-1} = 1$ ), получаем

$$1 = K \frac{2^4}{4 \times 4},$$

откуда  $K = 1$ .

Амплитудная характеристика рассчитанного фильтра изображена на фиг. 5.3.



Фиг. 5.3. Амплитудная характеристика фильтра Баттерворта с  $n = 4$ ,  $\omega_c T = \pi/2$ .

Аналогично можно синтезировать цифровые фильтры Чебышева и эллиптические (фильтры Кауэра) [1—3].

## 5.4. Частотные преобразования [4]

Наиболее эффективный метод синтеза фильтров верхних частот, полосовых и режекторных фильтров по данным низкочастотного фильтра-прототипа состоит в использовании частотных преобразований. В табл. 5.1 приведены преобразования, необ-

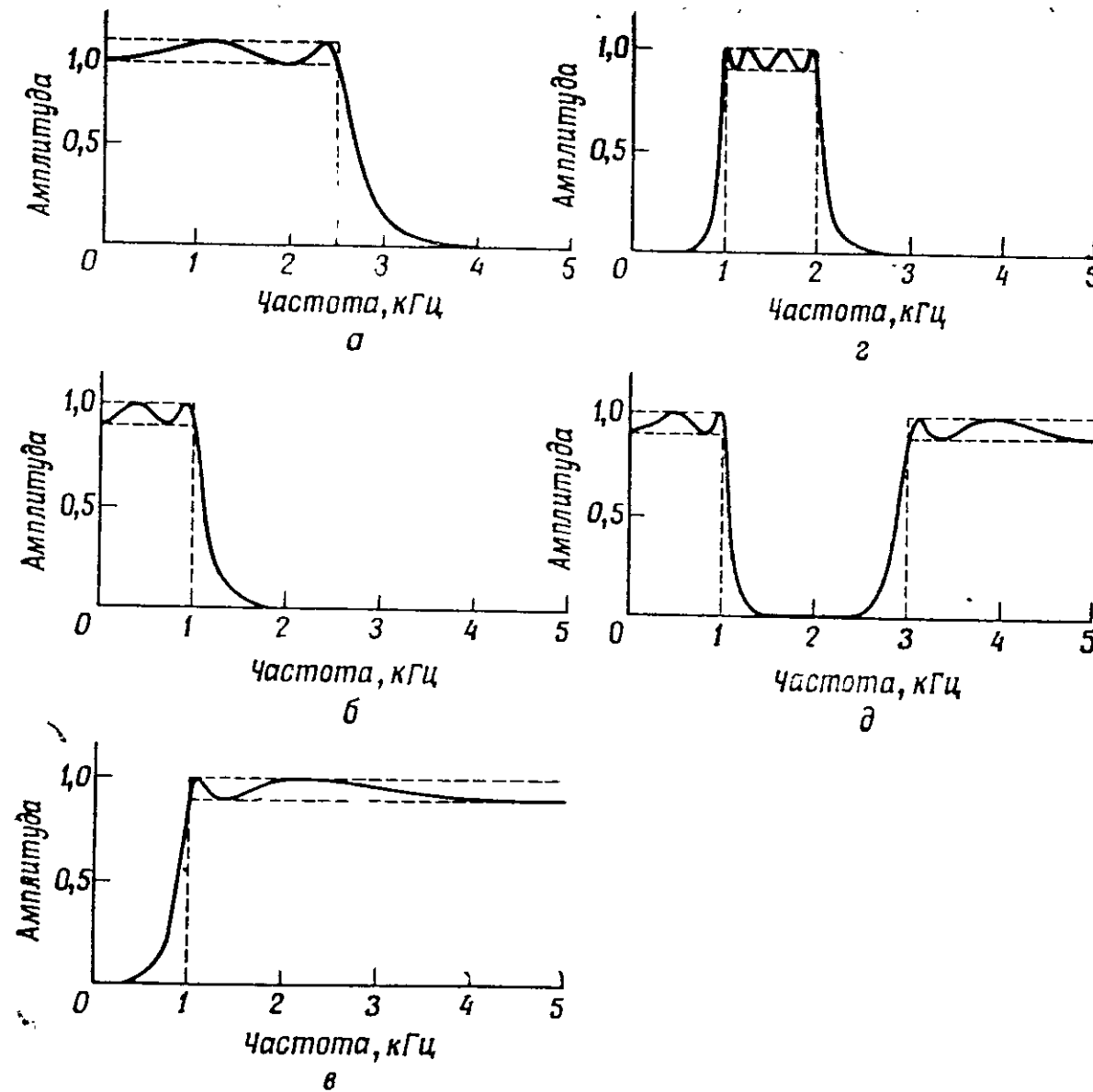
Таблица 5.1

Преобразования цифрового фильтра-прототипа нижних частот с частотой среза  $\beta$

Тип фильтра	Преобразование	Расчетные формулы
Нижних частот	$\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\beta - \omega_c}{2}\right)T}{\sin\left(\frac{\beta + \omega_c}{2}\right)T}$
Верхних частот	$\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\beta - \omega_c}{2}\right)T}{\cos\left(\frac{\beta + \omega_c}{2}\right)T}$
Полосовой	$\left( \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1} \right)$	$\alpha = \cos \omega_0 T = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}T\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}T\right)}$ $k = \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)T \operatorname{tg} \frac{\beta T}{2}$
Режекторный	$\left( \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + 1} \right)$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)T}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)T} = \cos \omega_0 T$ $k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)T \operatorname{tg} \frac{\beta T}{2}$

ходимые для перехода от заданного цифрового фильтра нижних частот к фильтрам других типов. Некоторые частотные преобразования иллюстрируются на фиг. 5.4.





Фиг. 5.4. Примеры частотных преобразований.

а — исходный фильтр-прототип нижних частот; б — преобразованный фильтр нижних частот; в — фильтр верхних частот; г — полосовой фильтр; д — режекторный фильтр.

#### Упражнения

1. Найдите каноническую форму фильтра с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

где  $\alpha$  — действительное число, по модулю меньше 1. Найдите амплитудную и фазовую характеристики и объясните их форму.

2. Передаточная функция имеет на плоскости  $z^{-1}$  пару комплексно-сопряженных полюсов в точках  $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$  и  $\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$  и нуль 2-го порядка в точке  $z^{-1} = -1$ . Найдите выражения для передаточной функции и амплитудной характеристики.

3. Требуется, чтобы при частоте дискретизации 16 кГц цифровой фильтр нижних частот имел частоту среза 3 кГц. Ослабление в полосе пропускания должно быть не более 1 дБ, а в полосе непропускания, начиная с частоты 4,4 кГц и выше, — не менее 30 дБ. Используя соответствующие таблицы для аналоговых фильтров и применяя билинейное  $z$ -преобразование, получите выражение для передаточной функции искомого цифрового фильтра.

4. Замените в передаточной функции, полученной в задаче 3, все элементы задержки  $z^{-1}$  на  $-z^{-1}$ . К какому изменению амплитудной характеристики это приведет?

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gold B., Rader C. M., Digital Processing of Signals, McGraw-Hill, 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
2. Constantinides A. G., Synthesis of Chebyshev Digital Filters, *Electron Letters*, 3, № 3 (March 1967).
3. Constantinides A. G., Elliptic Digital Filters, *Electron Letters*, 3, № 6 (June 1967).
4. Constantinides A. G., Spectral Transformations for Digital Filters, *Proc. IEEE*, 117, № 8 (Aug. 1970); есть русский перевод: Константи́нидис А., Спектральные преобразования для цифровых фильтров, *ТИИЭР*, 117, № 8 (1970).
5. Constantinides A. G., Family of Equiripple Lowpass Digital Filters, *Electron Letters*, 6, № 11 (May 1970).
6. Deczky A. G., Synthesis of Recursive Digital Filters Using the Minimum p-Error Criterion, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, № 4 (Oct. 1972).

## ФИЛЬТРЫ С ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ КОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Г. Локхат

### 6.1. Введение

Эта глава является первой из нескольких глав, посвященных фильтрам с импульсными характеристиками конечной длительности. К таким фильтрам относятся фильтры, реализуемые в нерекурсивной форме, а также фильтры на основе частотных выборок (гл. 9) и дискретного преобразования Фурье (гл. 8). Основные методы проектирования, которые будут рассмотрены, применимы во всех этих случаях.

Несмотря на то что фильтры с импульсными характеристиками конечной длительности реализуются при большем объеме памяти и часто при большем числе арифметических операций по сравнению с рекурсивными фильтрами определенных типов (гл. 3), они обладают рядом преимуществ. Эти фильтры всегда устойчивы и проектируются на основе заданной импульсной характеристики. Легко реализуются фильтры с симметричными импульсными характеристиками и, следовательно, со строго линейными фазовыми характеристиками. Наличие связи между импульсной характеристикой и частотной характеристикой через дискретное преобразование Фурье позволяет использовать некоторые процедуры оптимизации при проектировании этих фильтров в частотной области.

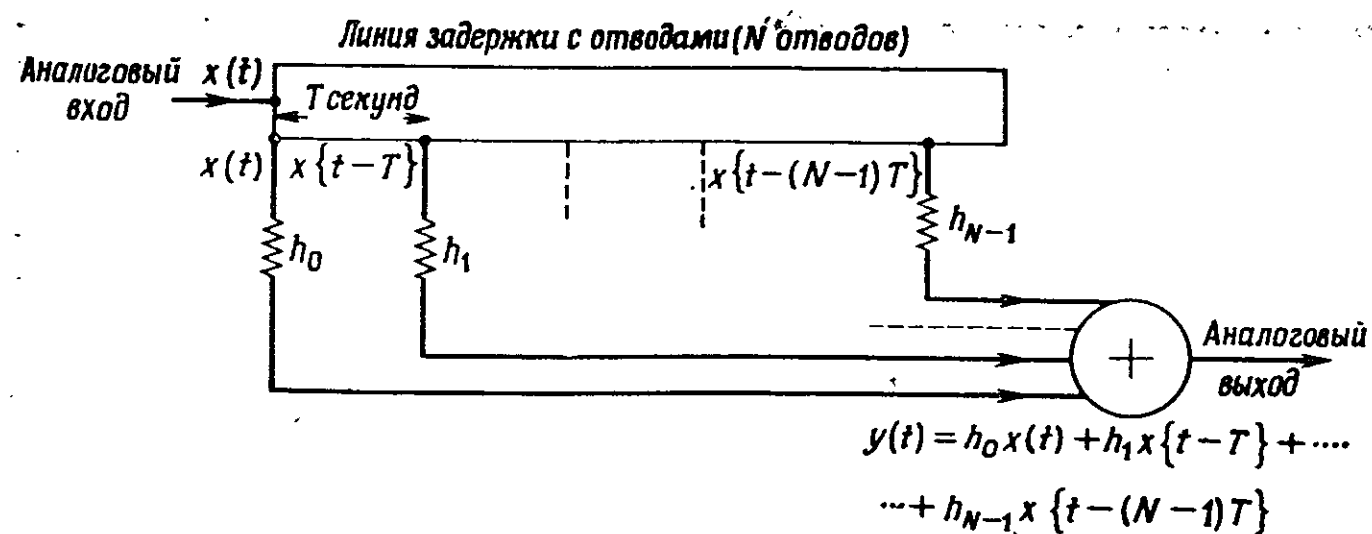
### 6.2. Аналоговый и цифровой трансверсальные фильтры

Как известно, аналоговый трансверсальный фильтр состоит из многоотводной линии задержки, ряда взвешивающих резисторов и сумматора (фиг. 6.1). Выходной сигнал получается в результате суммирования задержанных и взвешенных входных сигналов.

Так, если  $x(t)$  — сигнал на входе линии задержки с  $N$  отводами, то на выходе будет сигнал

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n x(t-nT), \quad (6.1)$$

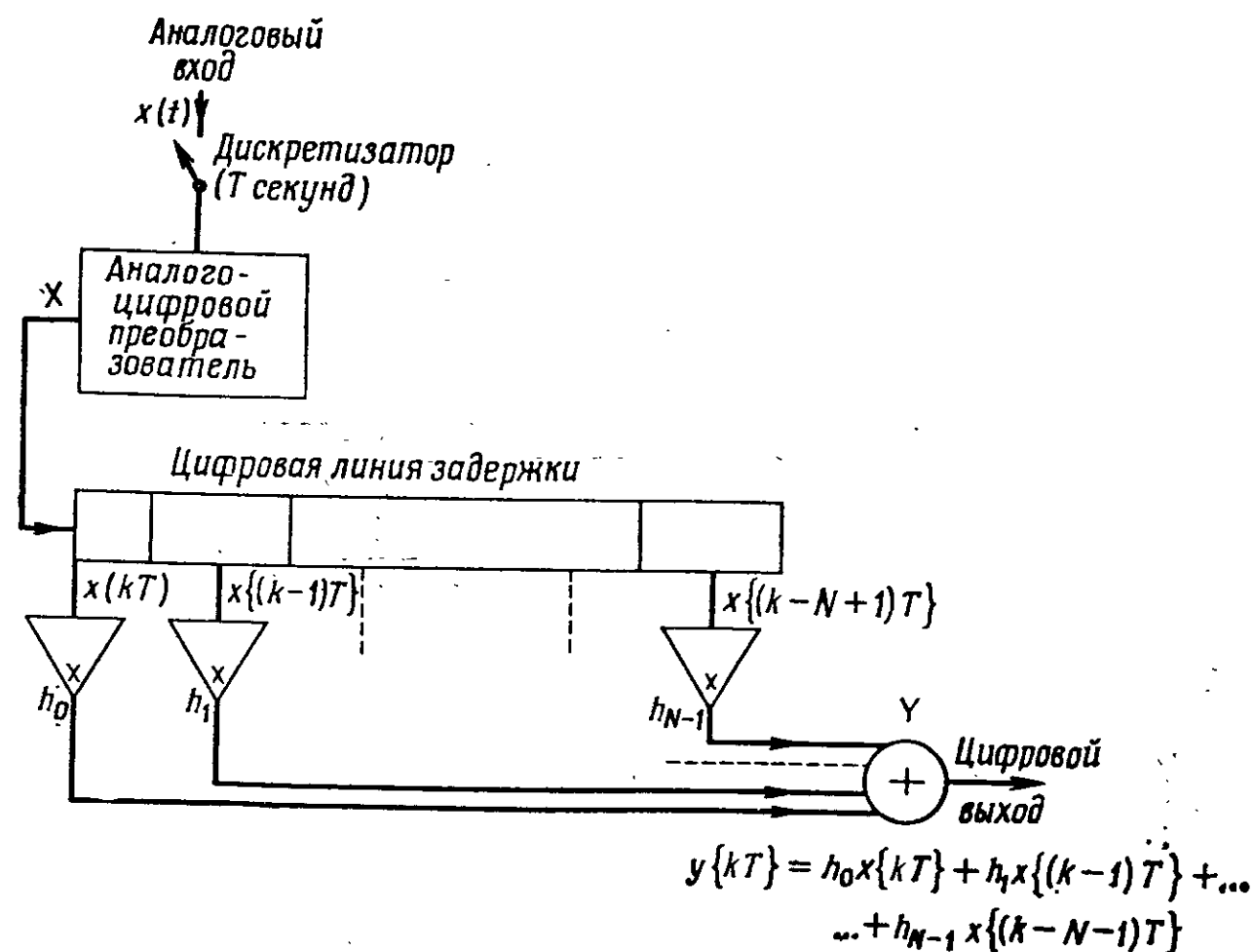
где  $T$  — время задержки между отводами в секундах и  $h_0, h_1, \dots, h_{N-1}$  — постоянные весовые коэффициенты, определяющие конкретную операцию фильтрации. Поскольку для получения  $y(t)$  из



Фиг. 6.1. Трансверсальный фильтр.

$x(t)$  используются лишь задержка, умножение на константу и суммирование, рассматриваемый фильтр является линейным и, подобно любой линейной цепи, может быть описан импульсной и частотной характеристиками.

Цифровая реализация линейного трансверсального фильтра возможна при условии, что входной сигнал предварительно дискретизируется по времени и квантуется по уровню (фиг. 6.2). После-



Фиг. 6.2. Цифровой трансверсальный фильтр.

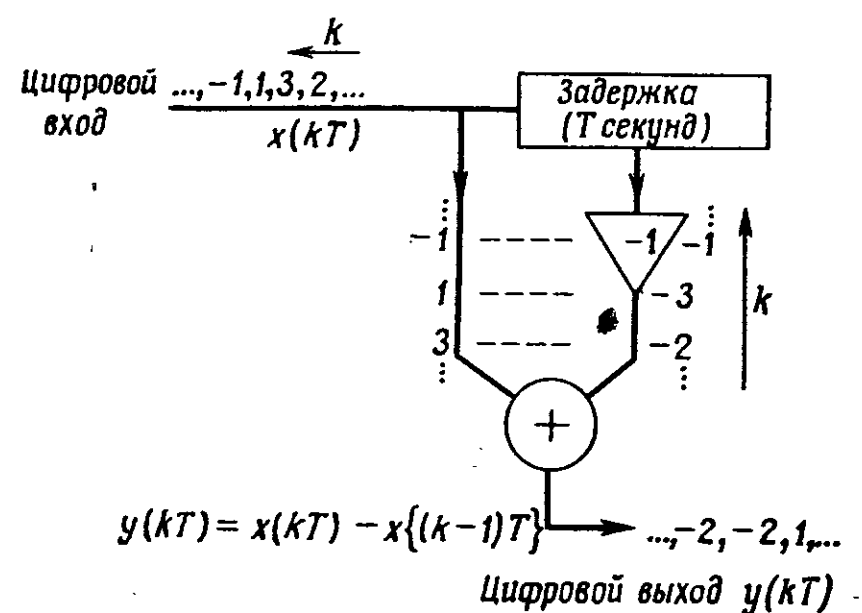
довательность чисел, вырабатываемая аналого-цифровым преобразователем (обычно в двоичном коде), поступает на  $N$ -каскадную линию задержки (сдвиговый регистр), где числа сдвигаются на один каскад каждые  $T$  секунд под воздействием тактового импульса. Часть схемы между  $X$  и  $Y$  (фиг. 6.2) — это чисто цифровой фильтр, поскольку все операции здесь выполняются в цифровом виде и как  $x(kT)$  на входе, так и  $y(kT)$  на выходе являются числовыми последовательностями ( $k = \dots -1, 0, +1, \dots$ ). Входная последовательность может рассматриваться как дискретизованный по времени и преобразованный в цифровую форму входной аналоговый сигнал, хотя в действительности она может иметь и другое происхождение.

Величина выходного отсчета  $y(kT)$  связана с входной последовательностью соотношением

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n x[(k-n)T]. \quad (6.2)$$

Это равенство эквивалентно соотношению (6.1), устанавливающему связь между входом и выходом аналогового трансверсального фильтра. Необходимо, однако, отметить, что при цифровой реализации точность весовых коэффициентов ограничена длиной слова и, кроме того, при умножении в дискретной форме возникают ошибки округления. (Ошибки округления могут интерпретироваться как шум; их совокупное воздействие на работу фильтра анализируется статистическими методами. Этот подход обсуждается в гл. 10.)

Цифровой вариант трансверсального фильтра (фиг. 6.2) называется нерекурсивным, поскольку каждый выходной отсчет [формула (6.2)] зависит только от входной последовательности и в от-



Фиг. 6.3. Простейший дифференциатор.

личие от рекурсивного цифрового фильтра не зависит от взвешенных сумм выходных последовательностей.

**Пример 1.** Пусть дан нерекурсивный цифровой фильтр, выходные отсчеты которого образуются как разность текущего и задержанного на  $T$  секунд входного отсчета (фиг. 6.3). Поскольку каждое число выходной последовательности пропорционально скорости изменения входной последовательности, этот фильтр можно рассматривать как простейший дифференциатор. Выходной сигнал этого фильтра

$$y(kT) = x(kT) - x[(k-1)T],$$

что при сравнении с формулой (6.2) дает

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= -1, \\ h_k &= 0, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Отклик фильтра на последовательность

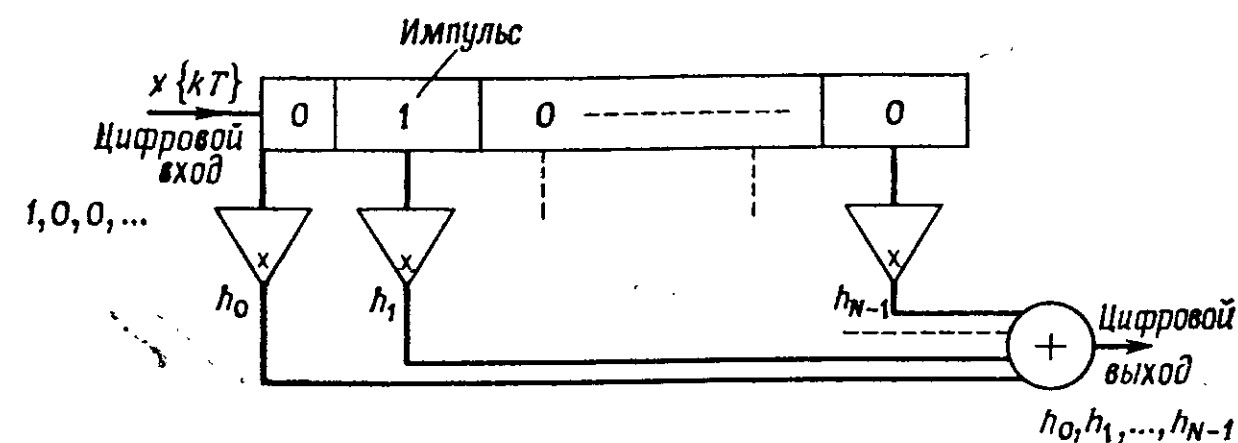
$$\dots, 2, 3, 1, -1, \dots$$

показан на фиг. 6.3.

### 6.3. Импульсная характеристика

Если на вход произвольного нерекурсивного цифрового фильтра (фиг. 6.4) подается единичный «импульс»

$$1, 0, 0, 0, \dots,$$



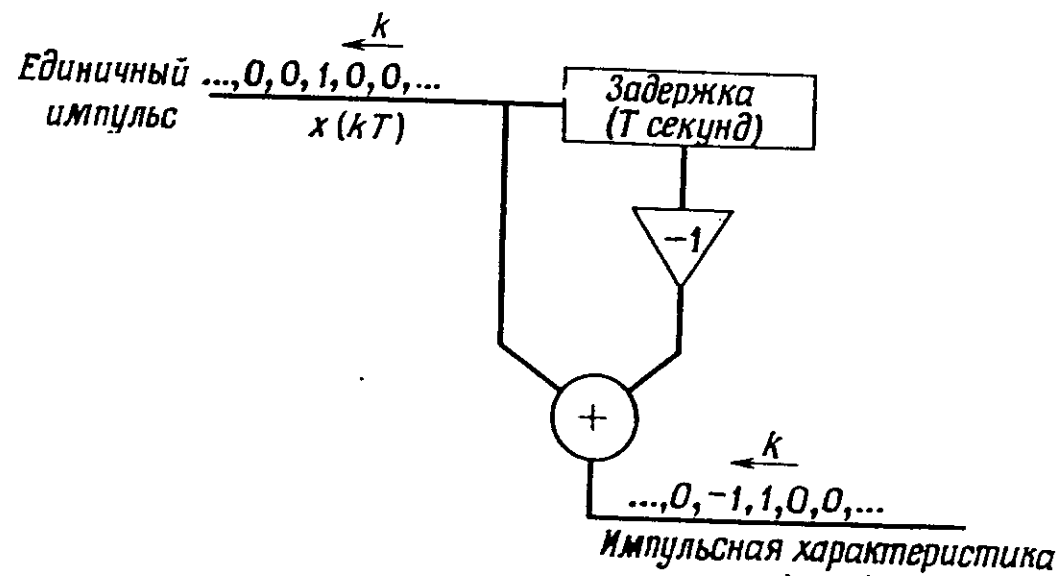
Фиг. 6.4. Отклик на единичный импульс.

то выходная последовательность будет иметь вид

$$h_0, h_1, h_2, \dots, h_{N-1}, 0, \dots$$

Таким образом, импульсная характеристика представляется совокупностью  $N$  весовых коэффициентов. Так как число элементов линии задержки может быть только конечным, то импульсная ха-

характеристика нерекурсивного цифрового фильтра будет всегда иметь ограниченную длительность (в отличие от теоретически бесконечной импульсной характеристики рекурсивного фильтра). Следовательно, любой цифровой фильтр с импульсной характеристикой конечной длительности может быть реализован в нерекурсивной форме, как показано на фиг. 6.4.



Фиг. 6.5. Единичный импульс в простом дифференциаторе.

**Пример 2.** Пусть дан простейший дифференциатор из первого примера (фиг. 6.5). Если на его вход подается единичный импульс, то на выходе будет последовательность

$$1, -1, 0, 0, \dots,$$

представляющая собой импульсную характеристику фильтра.

#### 6.4. Дискретная свертка

Любую последовательность на входе фильтра можно рассматривать как сумму единичных «импульсов», возникающих в различные моменты отсчета. Пусть, например, нерекурсивный фильтр имеет импульсную характеристику

$$2,00, 1,00, 0,50, 0,25, 0,00, 0,00, \dots,$$

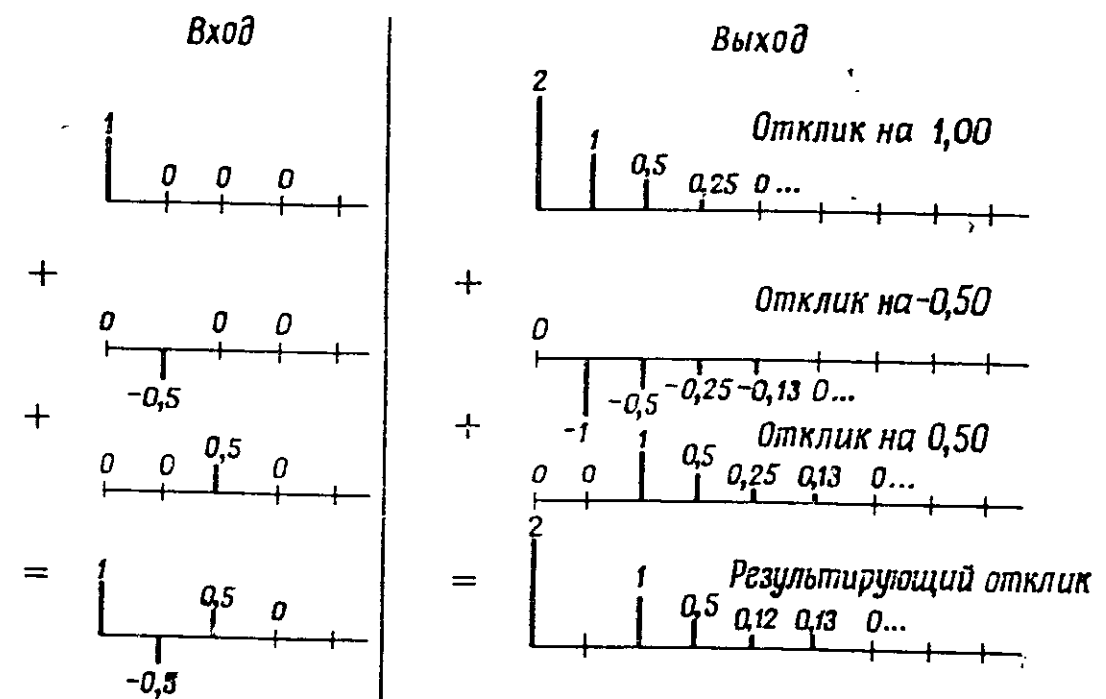
а на его вход подается последовательность

$$1,00, 0,50, 0,50, 0,00, 0,00, \dots.$$

Входная последовательность, как показано на фиг. 6.6, представлена суммой трех взвешенных единичных импульсов, поступающих последовательно на вход фильтра. Полный выходной сигнал фильтра складывается из трех соответствующих откликов. Следовательно, выходная последовательность может рассматри-

ваться как результат свертки входной последовательности и импульсной характеристики.

Соотношение (6.2) описывает дискретную свертку между входной последовательностью и импульсной характеристикой, тогда как соответствующее соотношение для обычного аналогового фильтра, в котором вместо суммы стоит интеграл, описывает непрерывную свертку. Как будет показано в следующем разделе для



Фиг. 6.6. Иллюстрация дискретной свертки.

дискретного случая, при использовании методов  $s$ - и  $z$ -преобразований операции свертки во временной области могут быть заменены умножением в частотной области.

#### 6.5. Частотная характеристика

Выходные отсчеты нерекурсивного фильтра получаются в результате свертки входной последовательности и импульсной характеристики [формула (6.2)], т. е.

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n x[(k-n)T]. \quad (6.3)$$

Пусть на вход подаются квантованные отсчеты косинусоиды постоянной частоты  $\omega$  рад/с:

$$x(kT) = \cos k\omega T, \quad k = \dots, -1, 0, +1, \dots$$

Выходная последовательность  $y_\omega(kT)$  определяется путем подстановки выражения для  $x(kT)$  в формулу (6.3). Таким образом,

$$y_\omega(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos[(k-n)\omega T] = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{j(k-n)\omega T},$$

где  $\operatorname{Re}$  обозначает действительную часть и  $j = \sqrt{-1}$ . Экспоненциальный множитель может быть вынесен за знак суммы, так что

$$y_\omega(kT) = \operatorname{Re} e^{jk\omega T} \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn\omega T} = \operatorname{Re} e^{jk\omega T} H(e^{j\omega T}),$$

где

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn\omega T}. \quad (6.4)$$

Следовательно,

$$y_\omega(kT) = \operatorname{Re} |H(e^{j\omega T})| e^{j[k\omega T + \theta(\omega)],}$$

где  $H(e^{j\omega T})$  представлено как

$$H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})| e^{j\theta(\omega)}.$$

Окончательно, взяв действительную часть, получим

$$y_\omega(kT) = |H(e^{j\omega T})| \cos[k\omega T + \theta(\omega)].$$

Таким образом, реакция фильтра на косинусоидальный сигнал частоты  $\omega$  представляет собой косинусоиду той же частоты, но со значениями амплитуды и фазы, определяемыми  $|H(e^{j\omega T})|$  и  $\theta(\omega)$  соответственно. Следовательно,  $H(e^{j\omega T})$  является частотной характеристикой фильтра. Из формулы (6.4) видно, что  $H(z)$  — это  $z$ -преобразование импульсной характеристики  $(h_0, h_1, h_2, \dots, h_{N-1})$ , т. е.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n z^{-n}. \quad (6.5)$$

Таким образом, частотную характеристику фильтра  $H(e^{j\omega T})$  можно получить, взяв  $z$ -преобразование от импульсной характеристики и полагая  $z = e^{j\omega T}$ . Здесь снова наблюдается прямая аналогия с обычным аналоговым фильтром, частотную характеристику которого получают путем подстановки  $s = j\omega$  в преобразование Лапласа  $H(s)$  от импульсной характеристики  $h(t)$ .

### 6.6. Полюсы и нули

Кроме импульсной и частотной характеристик, цифровые фильтры могут быть описаны положением нулей и полюсов  $z$ -преобразования  $H(z)$  импульсной характеристики. Правая часть

уравнения (6.5) является полиномом степени  $N$  от  $z^{-1}$  и, следовательно, может быть представлена как

$$H(z) = h_{N-1} (z^{-1} - \alpha_1) (z^{-1} - \alpha_2) \dots (z^{-1} - \alpha_{N-1}),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$  — нули функции  $H(z^{-1})$ . В общем случае они комплексные и определяются из уравнения

$$H(z^{-1}) = 0.$$

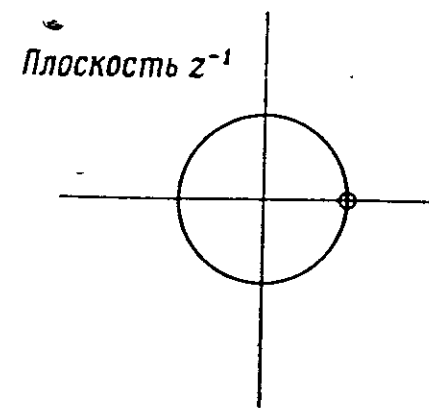
Поскольку импульсная характеристика  $(h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$  представлена действительными числами, нули являются либо действительными, либо образуют комплексно-сопряженные пары. Типичное расположение нулей в плоскости  $z^{-1}$  показано на фиг. 6.7. Так как



Фиг. 6.7. Конфигурация нулей, определяющая нерекурсивный фильтр.

$z$ -преобразование для нерекурсивного фильтра всегда является полиномом конечной степени [уравнение (6.5)], оно не имеет полюсов в конечных пределах плоскости  $z^{-1}$ . Отсюда следует, что нерекурсивный фильтр всегда устойчив. Это вполне совместимо с тем, что фильтр не имеет цепей обратной связи.

Пример 3. Как известно из примера 2, импульсной характери-



Фиг. 6.8. Конфигурация нулей простого дифференциатора.

стикой простого дифференциатора (фиг. 6.5) является последовательность  $1, -1, 0, \dots$ . Ее  $z$ -преобразование

$$H(z) = (1 - z^{-1}).$$

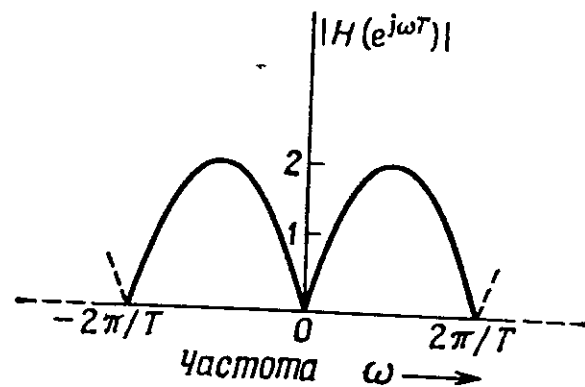
Поскольку  $H(1) = 0$ , плоскость  $z^{-1}$  содержит единственный нуль при  $z^{-1} = 1$  (фиг. 6.8). Подставляя  $z = e^{j\omega T}$ , получаем частотную характеристику

$$H(e^{j\omega T}) = (1 - e^{-j\omega T})$$

и

$$|H(e^{j\omega T})| = |1 - e^{-j\omega T}| = \sqrt{2(1 - \cos \omega T)} = 2 \left| \sin \left( \frac{\omega T}{2} \right) \right|.$$

Модуль частотной характеристики  $|H(e^{j\omega T})|$  показан на фиг. 6.9.



Фиг. 6.9. Частотная характеристика простого дифференциатора.

### 6.7. Сравнение аналогового и нерекурсивного цифрового фильтров

В табл. 6.1 сравниваются свойства нерекурсивного цифрового фильтра и обычного аналогового фильтра. Звездочкой отмечены свойства, которых нет у рекурсивного цифрового фильтра.

### 6.8. Квантование коэффициентов

При аппаратной реализации цифрового фильтра весовые коэффициенты не могут принимать произвольные значения, так как они представляются ограниченным числом двоичных цифр. Поэтому значения коэффициентов, определяемые при расчете фильтра, обычно округляются до ближайшего числа, которым они могут быть представлены. В результате полученный фильтр будет в некоторой степени отличаться от первоначально задуманного.

Пусть  $h_n$  является  $n$ -м коэффициентом импульсной характеристики нерекурсивного фильтра. Если квантованные коэффициенты

Таблица 6.1

Свойства	Аналоговый фильтр	Нерекурсивный фильтр
Тип входного и выходного сигналов	Непрерывный	Цифровые последовательности
Связь между входом и выходом ( $y$ означает выход, $x$ — вход, $h$ — импульсная характеристика)	$y(t) = \int_0^{\infty} h(T)x(t-T)dT$	$y(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n x[(k-n)T]$
Тип импульсной характеристики	Непрерывная, не усеченная	Усеченная цифровая последовательность
Частотная характеристика	$H(j\omega)$ , где $H(s)$ — преобразование Лапласа от $h(t)$	$H(e^{j\omega T})$ , где $H(z)$ есть $z$ -преобразование от $h(nT)$ , $n = 0, 1, \dots, N-1$
Тип передаточной функции	$H(s)$ , рациональная функция $s$	$H(z)$ , полином по степеням $z^{-1}$ *
Полюсы и нули	$H(s)$ имеет полюсы и нули в плоскости $s$	$H(z^{-1})$ имеет только нули в конечных пределах плоскости $z^{-1}$ *
Устойчивость	Устойчив при расположении полюсов в левой полуплоскости $s$	Всегда устойчив*

могут принимать лишь значения  $kE_0$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ), где  $E_0$  — константа, то  $n$ -й квантованный коэффициент может быть записан в виде

$$h_n + e_n,$$

где член  $e_n$  представляет величину ошибки, лежащую в пределах

$$-\frac{E_0}{2} < e_n < \frac{E_0}{2}.$$

Подстановка выражения для квантованных коэффициентов в уравнение (6.2) дает

$$\begin{aligned} y(kT) &= \sum_{n=0}^{N-1} (h_n + e_n) x[(k-n)T] = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h_n x[(k-n)T] + \sum_{n=0}^{N-1} e_n x[(k-n)T]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В частотной области

$$Y(e^{j\omega T}) = X(e^{j\omega T}) H(e^{j\omega T}) + X(e^{j\omega T}) E(e^{j\omega T}); \quad (6.7)$$

Последовательность отсчетов ошибки квантования в формуле (6.7) можно рассматривать как импульсную характеристику дополнительного фильтра, подключенного параллельно с идеальным. Из формулы (6.7) видно, что идеальная частотная характеристика  $H(e^{j\omega T})$  будет искажена наложением  $E(e^{j\omega T})$ .

Степень искажения идеальной характеристики на произвольной частоте может быть точно определена в каждом конкретном случае путем расчета  $E(e^{j\omega T})$  из последовательности отсчетов ошибки в формуле (6.6). Полезная оценка среднеквадратической ошибки  $|\overline{E(e^{j\omega T})}|^2$  может быть легко получена при статистическом анализе эффекта квантования [1]. Заметим, что

$$|E(e^{j\omega T})|^2 = E(e^{j\omega T}) E^*(e^{j\omega T}),$$

где \* означает комплексную сопряженность. Заменив  $E(e^{j\omega T})$  с учетом формулы (6.4), получим

$$\begin{aligned} |E(e^{j\omega T})|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} e_n e^{-nj\omega T} \sum_{n=0}^{N-1} e_n e^{nj\omega T} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e_n^2 + \text{Перекрестные члены.} \end{aligned}$$

Если сделать обычно принимаемое предположение о некоррелированности последовательных отсчетов ошибки, то среднее значение перекрестных членов будет равно нулю, и среднеквадратическая ошибка может быть аппроксимирована математическим ожиданием

$$|\overline{E(e^{j\omega T})}|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{e_n^2}.$$

Если, кроме того, предположить, что ошибка имеет равномерное распределение в пределах  $-E_0/2 < e_n < E_0/2$ , то

$$\overline{e_n^2} = \frac{E_0^2}{12}$$

и, следовательно,

$$|\overline{E(e^{j\omega T})}|^2 = \frac{NE_0^2}{12}.$$

Таким образом, результирующая частотная характеристика будет аппроксимировать идеальную со среднеквадратическим отклонением  $(E_0/2)\sqrt{N/3}$ . Следует подчеркнуть, что это отклонение имеет вероятностный смысл, и поэтому иногда действительное отклонение на некоторых частотах будет больше. Тем не менее это весьма полезная, легко рассчитываемая величина, дающая оценку

максимально достижимого затухания в полосе непропускания фильтра, т. е. там, где идеальная частотная характеристика достигает нулевых значений.

### 6.9. Проектирование нерекурсивных фильтров методом частотной выборки

Метод частотной выборки формулируется полностью в частотной области и поэтому весьма удобен для проектирования фильтров на основе их частотного представления. Частотная характеристика  $N$ -каскадного нерекурсивного фильтра задается выражением

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn\omega T}. \quad (6.4)$$

Пусть эта характеристика дискретизируется по частоте с интервалом  $1/NT$  Гц. Если обозначить отсчеты частотной характеристики через  $H_0, H_1, H_2, \dots, H_{N-1}$ , то

$$H_r = H(e^{j2\pi r/N}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn2\pi r/N}. \quad (6.8)$$

Это соотношение, связывающее импульсную характеристику с частотными отсчетами, является дискретным преобразованием Фурье. Импульсная характеристика может быть получена обратным дискретным преобразованием Фурье действительной и мнимой частей частотных выборок (т. е. их амплитуд и фаз):

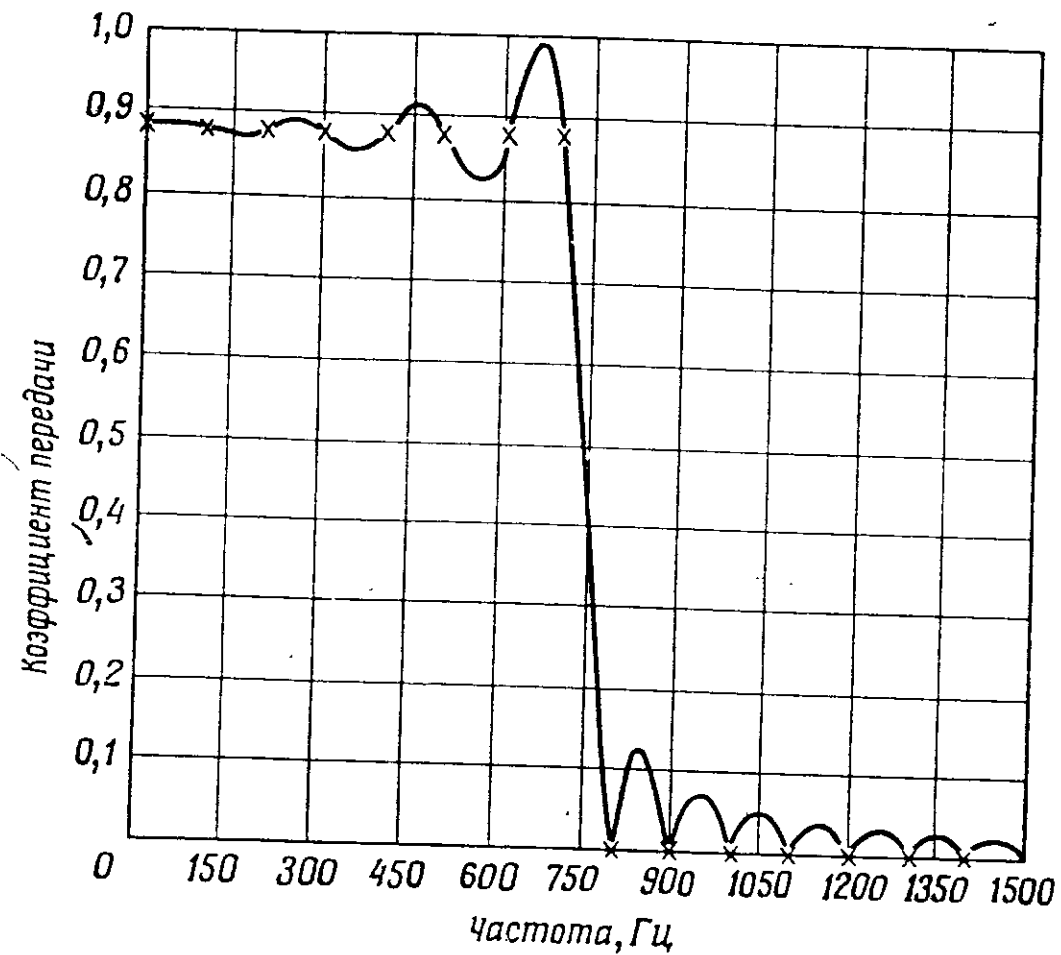
$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} H_r e^{jr2\pi n/N}.$$

Расчет импульсной характеристики может быть произведен с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). (Теория и применения дискретного преобразования Фурье и БПФ подробно обсуждаются в гл. 7.) Если нужно найти  $N$  действительных коэффициентов импульсной характеристики, как записано выше, то для этого, исходя из соображений симметрии спектра, достаточно взять  $N/2$  комплексных, независимых отсчетов частотной характеристики с интервалом  $1/NT$  Гц вплоть до частоты наложения  $1/2T$  Гц. Это позволяет однозначно задать импульсную характеристику нерекурсивного фильтра, а его частотная характеристика будет в точности равна заданным отсчетам в  $N/2$  точках.



**Пример 4.** Нерекурсивный фильтр имеет 30 отводов и частоту синхронизации 3 кГц. Необходимо получить частотную характеристику фильтра нижних частот с частотой среза 700 Гц.

При 30 отводах можно выбрать 15 точек частотной характеристики с интервалом  $1500/15=100$  Гц, не доходя 100 Гц до частоты

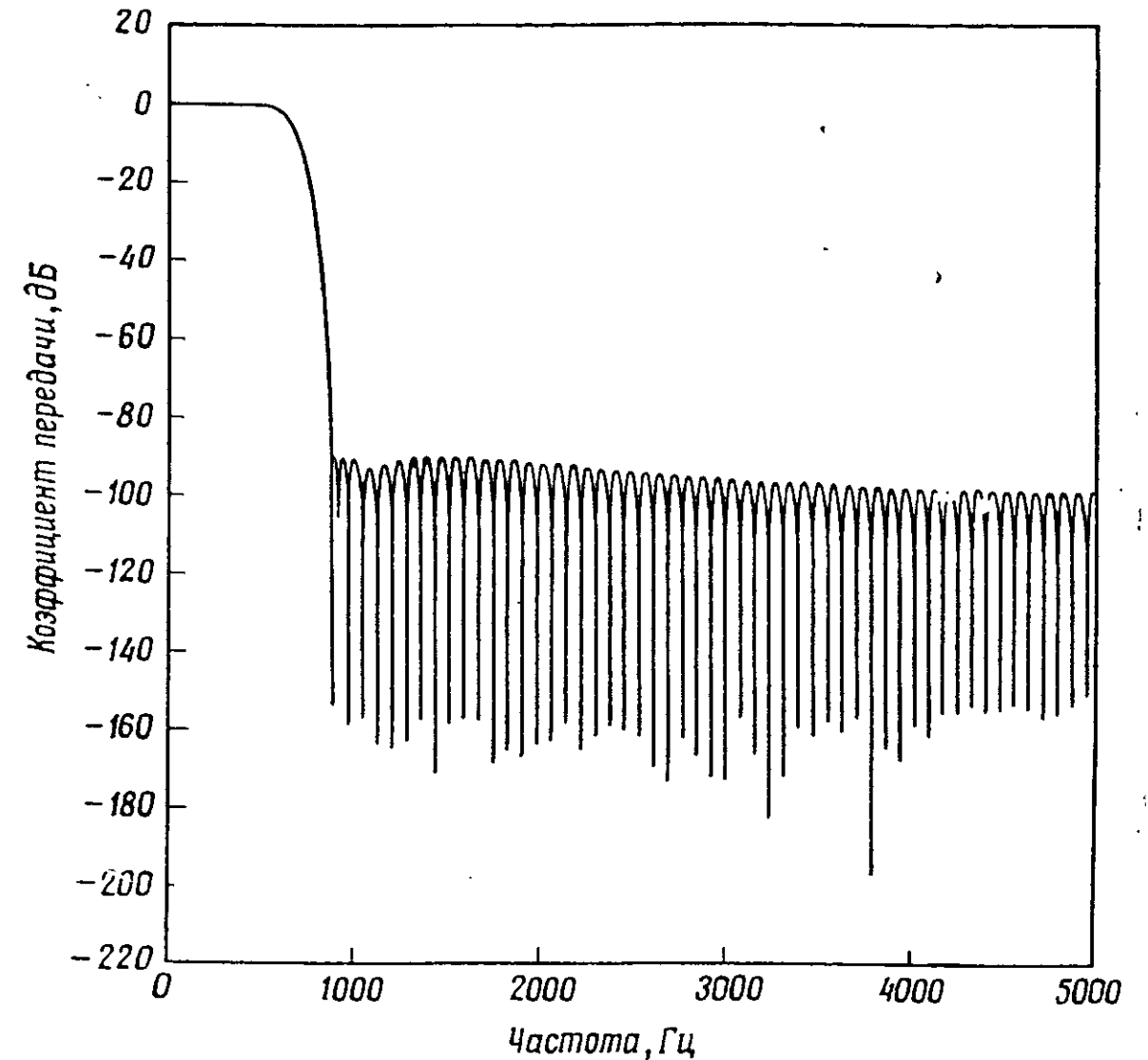


Фиг. 6.10. Частотная характеристика фильтра нижних частот, заданная 15 отсчетами.

наложения 1,5 кГц. Поскольку частота среза фильтра нижних частот должна быть 700 Гц, идеальная прямоугольная характеристика дискретизуется так, что все отсчеты вплоть до частоты 700 Гц имеют одинаковую величину, а все другие равны нулю (фиг. 6.10). Если с помощью обратного ДПФ этих отсчетов рассчитать соответствующие значения 30 весовых коэффициентов, то частотная характеристика полученного фильтра будет иметь вид, показанный на фиг. 6.10. Эта характеристика проходит через 15 заданных точек и имеет, как и требовалось, срез на частоте 700 Гц.

Хотя частотная характеристика фильтра, подобного рассмотренному выше, принимает заданные значения в точках отсчетов, между ними она может недопустимо отклоняться от идеальной ха-

рактеристики. Например, уровень боковых лепестков характеристики фильтра нижних частот на фиг. 6.10 может быть неприемлемым. Если достаточно взять меньше чем  $N$  «фиксированных» отсчетов частотной характеристики, то оставшиеся свободные отсчеты можно варьировать с целью поиска минимума какого-либо

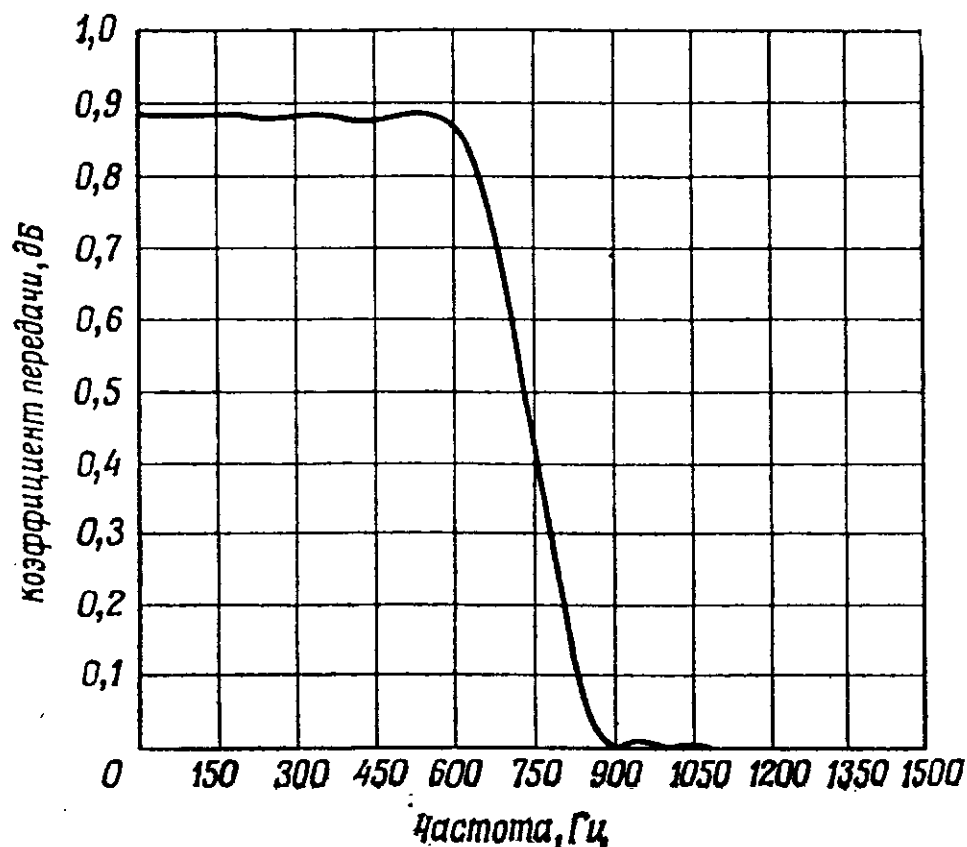


Фиг. 6.11. Фильтр нижних частот с импульсной характеристикой конечной длительности,  $N=128$  [2].

параметра фильтра. Эти свободные отсчеты берут обычно в переходных полосах и варьируют так, чтобы получить минимум боковых лепестков в полосе не пропускания. Наличие отсчетов в переходной полосе приводит, естественно, к ее расширению. Этим приходится расплачиваться за уменьшение боковых лепестков. Рэбинер и др. [2] использовали эффективный алгоритм минимизации для вычисления значений отсчетов в переходной полосе ряда фильтров нижних частот и полосовых фильтров; в результате были получены частотные характеристики типа показанной на фиг. 6.11.

## 6.10. Временные окна

Общепринятый подход к расчету нерекурсивных фильтров состоит в аппроксимации импульсной характеристики бесконечной длительности идеального фильтра импульсной характеристикой конечной длительности. Непосредственное усечение идеальной ха-



Фиг. 6.12. Частотная характеристика фильтра нижних частот со взвешенной импульсной характеристикой.

рактеристики эквивалентно умножению на прямоугольное временное окно, в результате чего в частной области имеет место явление Гиббса, проявляющееся в нежелательных выбросах в точках резких переходов идеальной частотной характеристики. Этот эффект типичен и для фильтров, синтезируемых методом частотных выборок (фиг. 6.10). Умножение импульсной характеристики на временное окно соответствует свертке частотной характеристики с преобразованием Фурье для окна. Тщательный выбор формы окна позволяет сгладить частотную характеристику и значительно уменьшить пульсации. В литературе рассмотрены свойства ряда временных окон [2—4].

**Пример.** Пусть дана частотная характеристика фильтра, показанная на фиг. 6.10. Воздействие простого временного окна на уровень боковых лепестков можно продемонстрировать умножением

ем импульсной характеристики на окно типа «косинус с пьедесталом»:

$$|1 + \cos(2\pi t/NT)| = \left[ \frac{1}{2} e^{-j2\pi t/NT} + 1 + \frac{1}{2} e^{j2\pi t/NT} \right].$$

Точка отсчета  $t=0$  соответствует здесь средней точке конечной импульсной характеристики, что предопределяет использование симметричного временного окна. В частотной области этому соответствует свертка частотной характеристики  $H(e^{j\omega T})$  (фиг. 6.10) с преобразованием Фурье для окна, причем это преобразование в рассматриваемом случае является простым линейным спектром из трех составляющих с весами  $1/2, 1, 1/2$  на частотах  $-1/NT, 0, +1/NT$  соответственно. Результирующая частотная характеристика  $|H_s(e^{j\omega T})|$  показана на фиг. 6.12. Она определяется выражением

$$H_s(e^{j\omega T}) = \frac{1}{2} H[e^{j(\omega-2\pi/NT)T}] + H(e^{j\omega T}) + \frac{1}{2} H[e^{j(\omega+2\pi/NT)T}].$$

Хорошо видно, что исходная характеристика (фиг. 6.10) оказалась сглаженной таким образом, что пульсации боковых лепестков значительно уменьшились, но одновременно вдвое расширилась переходная полоса.

## 6.11. Реализация фильтров

Существует три основных способа реализации фильтров с конечными импульсными характеристиками:

1. *Прямая свертка.* При этом определяют импульсную характеристику, и фильтр рассчитывается непосредственно по формуле (6.2).

2. *Быстрая свертка.* Свертку выполняют как обратное преобразование Фурье произведения ДПФ импульсной характеристики и ДПФ части входных данных. Для эффективного расчета ДПФ используют алгоритм БПФ (гл. 7).

3. *Способ частотных выборок.* Отсчеты частотной характеристики берут в качестве весовых коэффициентов на выходах ряда параллельных цифровых резонаторов (гл. 8).

В заключение следует подчеркнуть, что и основные характеристики, и возникающие при синтезе проблемы одинаковы для всех фильтров с импульсными характеристиками конечной длительности независимо от способа реализации фильтра.

## Упражнения

1. Выходные отсчеты нерекурсивного фильтра получаются путем усреднения текущего и предшествующего входных отсчетов. При условии, что период синхронизации равен 100 мкс, найдите:

- а) Выражение, связывающее выходной и входной сигналы.  
 б) Импульсную характеристику.  
 в) Частотную характеристику. (Представьте графически амплитудную и фазовую характеристики и сравните с простым дифференциатором, который был рассмотрен в этой главе.)  
 г) Положение нулей на плоскости  $z^{-1}$  (графически).
2. При условии, что на вход фильтра из задачи 1 поданы:
- а) последовательность  $\dots, 1, 1, 1, \dots$ ;  
 б) дискретизованный по времени и амплитуде синусоидальный сигнал частоты 5 кГц, удвоенная амплитуда которого равна 2, определите выходную последовательность, непосредственно используя частотную характеристику, полученную в п. 1, в. Проверьте расчетным путем несколько выходных отсчетов, используя выражение, полученное в п. 1, а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bennet W. R., Spectra of Quantised Signals, *BSTJ*, 27, 446—472 (1948).
2. Rabiner L. R., Gold B., McGonegal C. A., An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-18, № 2, 83—106 (1970).
3. Kaiser J. F., Digital Filters, in: System Analysis by Digital Computers, Kuo F. F., Kaiser J. F., eds., Wiley, N. Y., 1966, Ch. 7; есть русский перевод: Кайзер Д., Цифровые фильтры, приложение к переводу книги: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
4. Helms H. D., Nonrecursive Digital Filters: Design Methods for Achieving Specifications on Frequency Response, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-16, 336—342 (1968).

## МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Р. Коутс

## 7.1. Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье определяет линейчатый спектр дискретизованной периодической функции времени. Обратное дискретное преобразование Фурье позволяет восстановить функцию времени по ее спектру. Эти преобразования обычно сокращенно называют соответственно ДПФ и ОДПФ.

ДПФ служит для анализа периодических функций, и его можно получить исходя из теории рядов Фурье [1]. Пусть  $x_0(t)$  — непрерывная периодическая функция с периодом  $P$  и частотой  $f_0 = 1/P$ , так что

$$x_0(t) = x_0(t + mP), \quad m — \text{целое.}$$

Функцию  $x_0(t)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(n) \exp(2\pi j n f_0 t), \quad 0 < t < P, \quad (7.1)$$

где коэффициенты разложения  $X_0(n)$  заданы формулой

$$X_0(n) = \frac{1}{P} \int_0^P x_0(t) \exp(-2\pi j n f_0 t) dt. \quad (7.2)$$

Обычно  $x_0(t)$  является действительной функцией, и тогда  $X_0(n)$  — комплексные (но это ограничение не обязательно). Поскольку мы рассматриваем  $x_0$  как функцию времени, то  $X_0(n)$  можно назвать комплексным спектром  $x_0(t)$ . По действительной и мнимой частям  $X_0(n)$  можно найти амплитуду и фазу составляющих, образующих колебание  $x_0(t)$ .

Рассмотрим дискретизацию периодической функции  $x_0(t)$ . Для того чтобы эту функцию можно было дискретизовать однозначно, в ее спектре не должно быть составляющих с частотой выше некоторой частоты  $f_1$ , т. е.

$$X_0(n) = 0, \quad |n| > n_1,$$

где  $n_1$  — целое значение  $n$ , задающее частоту  $f_1$ :

$$n_1 f_0 = f_1.$$

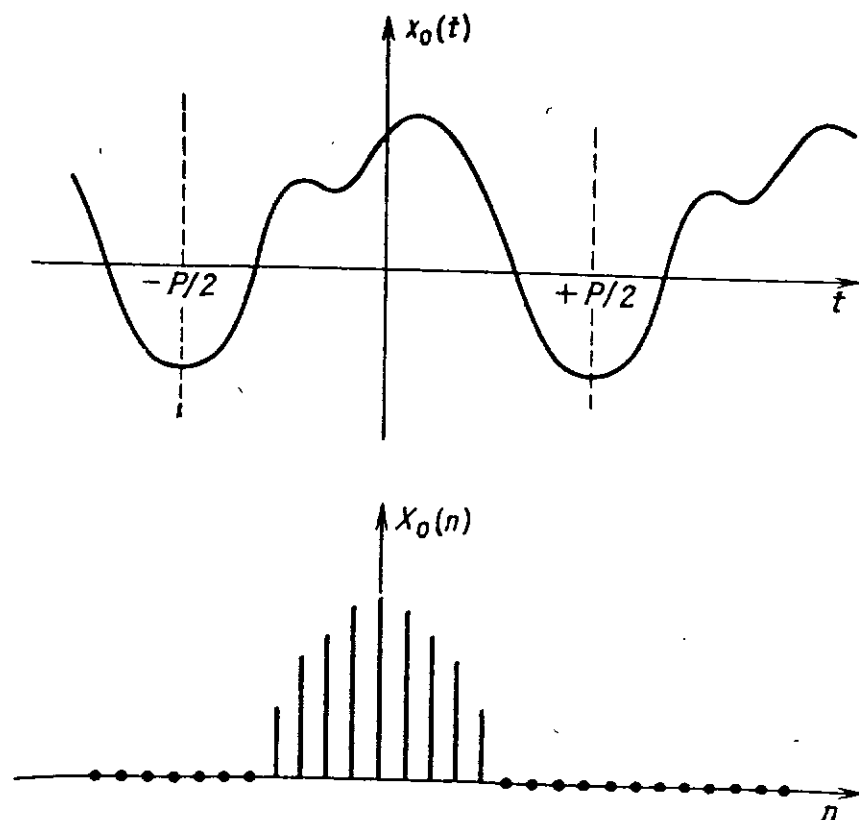
На фиг. 7.1 показаны такой ограниченный спектр и колебание, которому он соответствует.

В соответствии с теоремой отсчетов, рассмотренной в гл. 2, интервал дискретизации  $T$  равен

$$T = \frac{1}{2f_1} = \frac{1}{2n_1 f_0} = \frac{P}{2n_1},$$

так что число отсчетов на период будет

$$2n_1 = N.$$



Фиг. 7.1. Периодическая функция  $x_0(t)$  с ограниченной полосой частот и ее спектр  $X_0(n)$ .

В результате дискретизации получаем периодическое, нормализованное относительно  $T$  колебание вида

$$x\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0\left(\frac{t}{T}\right) \delta\left(\frac{t}{T} - k\right). \quad (7.3)$$

Это колебание определено на интервале, равном его периоду, т. е. при

$$0 \leq t < P$$

или

$$0 \leq \frac{t}{T} < N.$$

Поскольку  $x(t/T)$  — периодическая функция, для расчета коэффициентов ряда Фурье используется соотношение (7.2):

$$X(n) = \frac{1}{N} \int_0^{N-1} x\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(-\frac{2\pi j n}{N} \frac{t}{T}\right) d\left(\frac{t}{T}\right).$$

(Замена  $P$  на  $N$  в делителе и пределах интегрирования соответствует переходу к нормализованной переменной.)

Подставляя выражение (7.3), получаем

$$X(n) = \frac{1}{N} \int_0^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_0\left(\frac{t}{T}\right) \delta\left(\frac{t}{T} - k\right) \exp\left(-\frac{2\pi j n}{N} \frac{t}{T}\right) d\left(\frac{t}{T}\right).$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{T}\right) \delta\left(\frac{t}{T} - k\right) d\left(\frac{t}{T}\right) = f(k),$$

поэтому

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) \exp\left(-\frac{2\pi j k n}{N}\right).$$

Окончательно с учетом того, что по определению

$$x(k) = x_0(k),$$

получим

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-\frac{2\pi j k n}{N}\right). \quad (7.4)$$

Соотношение, связывающее  $x(k)$  с  $X(n)$ , может быть получено непосредственно из формулы (7.1), если подставить  $t = kT$  и учесть, что при ограниченной ширине спектра функции  $x_0(t)$  сумма содержит конечное число членов. Итак,

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(\frac{2\pi j k n}{N}\right). \quad (7.5)$$

Следует заметить, что  $x(k)$  — периодическая функция, т. е.

$$x(k) = x(k + mN), \quad m — \text{целое},$$

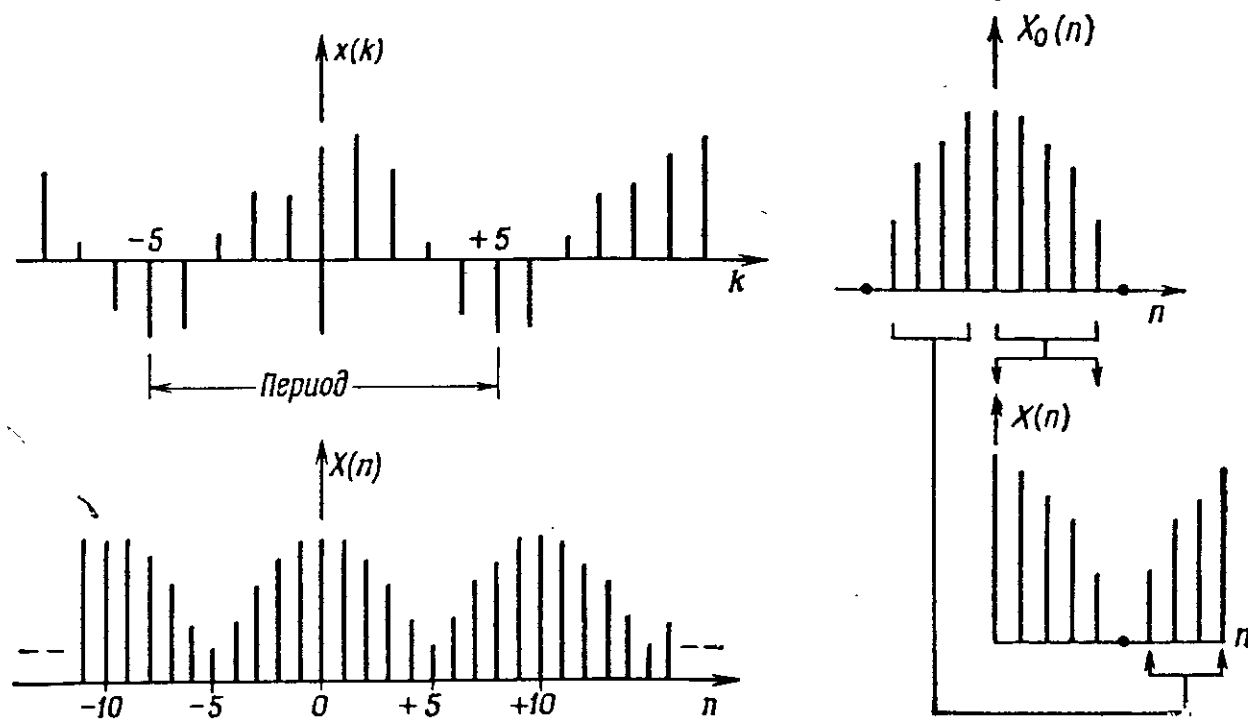
и аналогично

$$X(n) = X(n + mN), \quad m — \text{целое}.$$

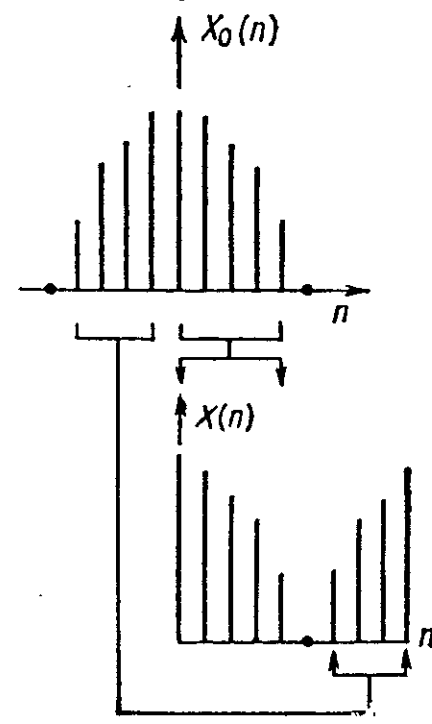
Тот факт, что спектр является периодическим, объясняется периодичностью спектра любой дискретизованной функции, а его дис-

кретный характер связан с тем, что сама дискретизируемая функция также периодическая.

Итак, при дискретизации периодической функции  $x_0(t)$  соотношение (7.4) позволяет по выборкам  $x_0(t)$  найти спектр  $X(n)$ , который на интервале  $0 \leq n \leq N-1$  в точности равен спектру  $X_0(n)$  исходной периодической функции. Функция  $x(k)$  и ее спектр графически представлены на фиг. 7.2. Поскольку соотношение (7.4)



Фиг. 7.2. Дискретизированная периодическая функция  $x(k)$  и ее периодический спектр  $X(n)$ .



Фиг. 7.3. Соотношение между коэффициентами ряда Фурье и ДПФ.

получено на основании теоремы отсчетов, оно является точным и экономичным (при расчетах) эквивалентом исходного интегрального соотношения (7.2) и может быть использовано для вычисления коэффициентов разложения на ЦВМ. Соотношения (7.4) и (7.5) будем называть дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) и обратным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ) соответственно. Заметим, что переменная  $n$  меняется здесь от нуля до  $N-1$ . Получаемый спектр можно интерпретировать следующим образом. Первые  $(N/2-1)$  точек  $X(n)$  соответствуют  $(N/2-1)$  спектральным линиям  $X_0(n)$  на положительных частотах, как показано на фиг. 7.3, а последние  $(N/2-1)$  точек  $X(n)$  соответствуют  $(N/2-1)$  спектральным линиям на отрицательных частотах.

Пара преобразований, заданная соотношениями (7.4) и (7.5), встречается и в другом виде. Например, множитель  $1/N$  и знак минус у экспоненты могут быть записаны как в прямом, так и в обратном преобразовании, общий смысл при этом не меняется.

Естественно, спектр в этом случае нельзя непосредственно отождествлять с тем, который определен формулой (7.2). Иногда оба преобразования приводятся с одинаковыми множителями  $(1/N)^{1/2}$ .

## 7.2. Теоремы и свойства дискретного преобразования Фурье

### 7.2.1. Одномерное ДПФ

Экспоненты в ДПФ и ОДПФ принято записывать в сокращенном виде<sup>1)</sup>:

$$\exp(2\pi j/N) = W.$$

Тогда

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

и

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{-nk}, \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

### 7.2.2. $r$ -мерное ДПФ

ДПФ, как и преобразование Фурье, можно обобщить на  $r$ -мерный случай:

$$x(k_1, k_2, \dots, k_r) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{n_r=0}^{N_r-1} W_{N_1}^{n_1 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_2} \dots W_{N_r}^{n_r k_r} X(n_1, n_2, \dots, n_r),$$

$$X(n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{1}{\prod_{m=1}^r N_m} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{k_r=0}^{N_r-1} W_{N_1}^{-n_1 k_1} W_{N_2}^{-n_2 k_2} \dots W_{N_r}^{-n_r k_r} x(k_1, k_2, \dots, k_r),$$

$$k_s, n_s = 0, 1, \dots, N_s-1 \quad \text{при } s=1, 2, \dots, r.$$

### 7.2.3. Использование ДПФ для вычисления ОДПФ

Формулу ДПФ, если в ней произвести перетасовку членов и ввести масштабный коэффициент, можно использовать для вычисления ОДПФ. Это позволяет использовать один алгоритм для вычисления обоих преобразований.

<sup>1)</sup> Заметим, что некоторые авторы используют экспоненту с отрицательным показателем.

Представим ДПФ в виде ряда

$$X(n) = \frac{x(0)W^0 + x(1)W^{-1n} + \dots + x(N-1)W^{-(N-1)n}}{N}$$

и изменим запись порядков

$$\begin{aligned} X(n) &= \frac{x(N-1)W^{-(N-1)n} + x(N-2)W^{-(N-2)n} + \dots + x(0)W^0}{N} = \\ &= \frac{x(N-1)W^{-Nn}W^{+n} + x(N-2)W^{-Nn}W^{+2n} + \dots + x(0)W^{-Nn}W^{+Nn}}{N}, \end{aligned}$$

но

$$W^{-Nn} = \begin{cases} \exp(-2\pi jn) \\ 1 \end{cases} \text{ для целых } n.$$

Тогда

$$X(n) = \frac{x(0)W^0 + x(N-1)W^{+n} + \dots + x(1)W^{+(N-1)n}}{N},$$

т. е. имеет форму ОДПФ.

Итак, для получения ОДПФ массива  $X(n)$  достаточно все члены, кроме  $X(0)$ , поменять местами:  $X(1)$  с  $X(N-1)$ ,  $X(2)$  с  $X(N-2)$ , а затем сумму умножить на  $N$ .

#### 7.2.4. Теорема Парсеваля

Пусть даны две функции времени  $x(k)$  и  $y(k)$  с соответствующими ДПФ  $X(n)$  и  $Y(n)$ .

Поскольку

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} Y(n)W^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

то

$$y^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} Y^*(n)W^{-nk}.$$

Тогда среднее значение почленного произведения последовательностей  $x(k)$  и  $y^*(k)$  равно

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y^*(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{n=0}^{N-1} Y^*(n)W^{-nk}.$$

Изменяя порядок суммирования, получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y^*(n) \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W^{-nk} = \sum_{n=0}^{N-1} Y^*(n)X(n).$$

Таким образом, в общем случае

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)Y^*(n). \quad (7.6)$$

В частности, если положить  $y(k) = x(k)$ , то  $x(k)x^*(k) = |x(k)|^2$  и

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2. \quad (7.7)$$

Полученный результат известен как теорема Парсеваля. Она показывает, что средняя мощность дискретизованной функции времени равна сумме мощностей отдельных спектральных составляющих и не зависит от их фаз.

#### 7.2.5. Ортогональность

Свойство ортогональности для дискретных рядов можно сформулировать следующим образом:

$$\sum_{m=0}^{N-1} W^{mn}W^{mp} = \begin{cases} N, & \text{если } n \pmod{N} = -p, \\ 0, & \text{если } n \pmod{N} \neq -p. \end{cases} \quad (7.8)$$

Выражение

$$n \pmod{N} = a$$

означает, что  $n$  представляет собой число, которое после многократного деления на  $N$  дает остаток  $a$ . Например,  $12 \pmod{5} = 2$ . Такая запись эквивалентна требованию, чтобы

$$n = \alpha N + a, \quad \alpha \text{ — целое число.}$$

Первое из равенств (7.8) легко доказывается, так как при  $n \pmod{N} = -p$  имеем  $n = \alpha N - p$  и

$$W^{mn}W^{mp} = W^{maN},$$

т. е. каждый член суммы

$$W^{maN} = 1$$

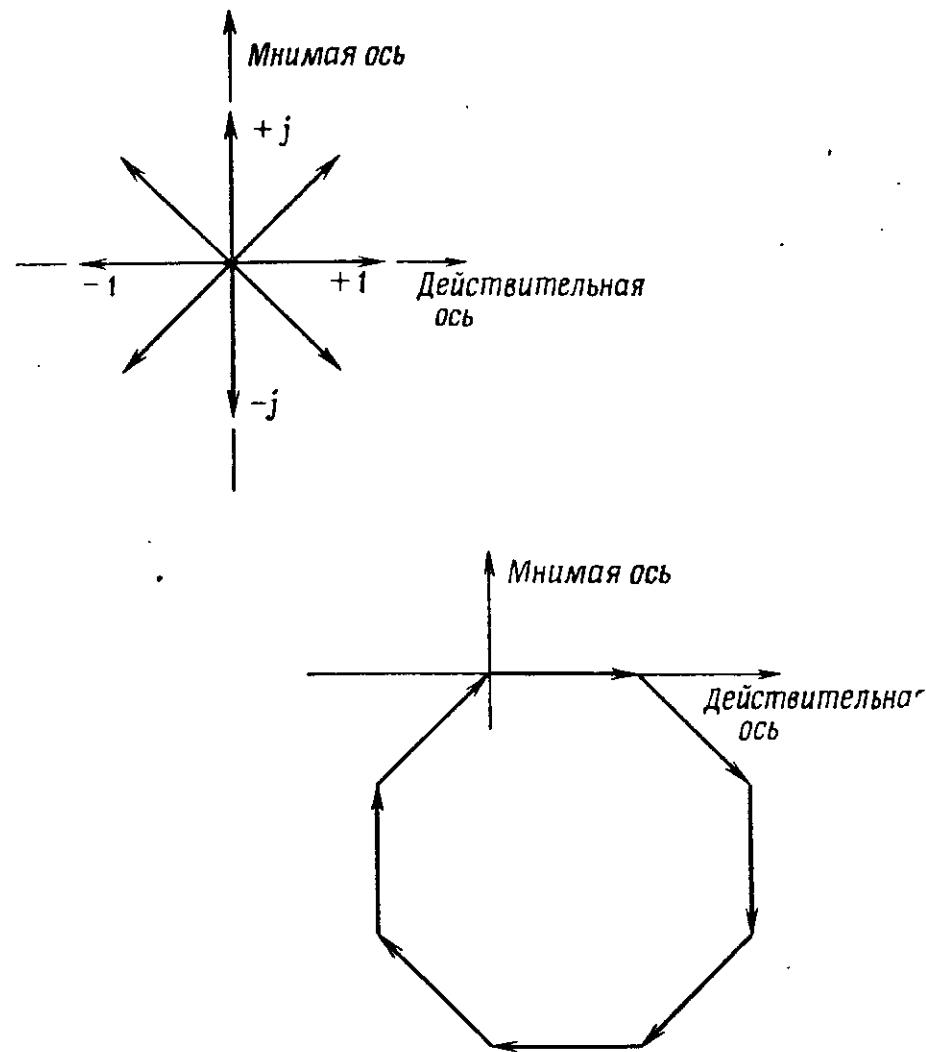
и суммирование  $N$  членов дает  $N$ .

Чтобы показать справедливость второго равенства, достаточно заметить, что

$$W^{mn}W^{mp} = W^{m\beta},$$

где  $\beta$  — целое число, не равное нулю и не являющееся множителем  $N$ . Тогда, во-первых,

$$W^{m\beta} \neq 1.$$



Фиг. 7.4. Векторная сумма  $N$  корней из единицы ( $N = 8$ ).

Во-вторых,  $W^m$  является  $m$ -м из  $N$  корней из единицы. На фиг. 7.4 эти корни представлены в векторной форме для  $N=8$ . Умножение индекса  $m$  на  $\beta$  не изменяет векторной диаграммы. Многоугольник, образующийся при графическом суммировании, имеет  $N$  сторон и является правильным, если  $N$  не кратно  $\beta$ . Начало первого вектора соединяется с концом последнего, так что сумма векторов равна нулю.

### 7.2.6. Энергетический спектр

ДПФ периодического временного ряда  $x(k)$  с периодом  $N$  представляет собой комплексный спектр  $X(n)$ . Часто бывает полезно исследовать не  $X(n)$ , а энергетический спектр последовательности  $x(k)$ , который определяется «мощностью» каждой комплексной составляющей спектра. «Мощность», которую имеет  $n$ -я составляющая спектра, обычно рассчитывается как произведение

$$P_{xx}(n) = X(n) X^*(n) = |X(n)|^2, \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.9)$$

Строго говоря, по размерности эта величина может быть лишь пропорциональна рассеиваемой мощности. Например, если  $x(k)$  измеряется в вольтах, то  $X(n)$  также будет измеряться в вольтах, а  $P_{xx}(n)$  — в (вольт)<sup>2</sup>, а не в ваттах. Тем не менее общепринято называть это произведение мощностью.

Если  $x(k)$  получено из непрерывной периодической функции времени  $x(t)$ , которая имеет спектр с ограниченной шириной, так что эффект наложения частот отсутствует, то  $P_{xx}(n)$  будет представлять собой точное периодическое повторение энергетического спектра функции  $x(t)$ .

Наиболее важное применение спектрального анализа связано с исследованием аperiodических непрерывных колебаний. Интерпретация получаемого при этом непрерывного комплексного спектра не имеет прежнего физического смысла. К сожалению, простое усечение аperiodического колебания и дискретизация полученного отрезка не всегда позволяют получить адекватный спектр колебания. Основной причиной этого является то, что отрезок не может полностью представлять всего колебания. Спектр одного отрезка является «необработанным» или «несглаженным». Сглаживания можно достигнуть интерполяцией  $P_{xx}(n)$ . Этот вопрос подробно обсуждается в разд. 7.11.

### 7.2.7. Автокорреляционная функция

Автокорреляционная функция (АКФ)  $R_{xx}(k)$  задается формулой

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1-k} x(m) x(k+m), \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.10)$$

Напомним, что для непрерывной переменной автокорреляционная функция и энергетический спектр образуют пару преобразований Фурье. Аналогичное соотношение для дискретной переменной имеет вид

$$R_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} P_{xx}(n) W^{kn}.$$

Это можно доказать, заменяя в формуле (7.10) временные ряды их преобразованиями Фурье:

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \sum_{p=0}^{N-1} X(p) W^{pm} \right] \left[ \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W^{kn} W^{nm} \right].$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} X(n) X(p) W^{kn} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} W^{m(n+p)} \right].$$



Используя свойство ортогональности [см. формулу (7.8)] при суммировании по  $m$  (в заданных пределах), получаем

$$N \text{ при } p = -n, \\ 0 \text{ в противном случае.}$$

Таким образом,

$$R_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) X(-n) W^{kn}.$$

Поскольку коэффициенты ДПФ в симметричных точках являются комплексно-сопряженными, т. е.

$$X(-n) = X^*(n),$$

$$\text{то } R_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) X^*(n) W^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} P_{xx}(n) W^{kn}. \quad (7.11)$$

### 7.2.8. Взаимный энергетический спектр и взаимная корреляционная функция

Результаты, полученные в двух предыдущих разделах, можно обобщить. Для двух функций  $x(k)$  и  $y(k)$  взаимный энергетический спектр и взаимная корреляционная функция определяются соответственно как

$$P_{xy}(n) = X(n) Y^*(n) = X^*(n) Y(n), \quad n=0, 1, \dots, N-1,$$

$$\text{и } R_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1-k} x(m) y(k+m) = \\ = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(k+m) y(m) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} P_{xy}(n) W^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.12)$$

Если  $x$  и  $y$  — аперiodические функции, здесь также необходимо сглаживание.

### 7.2.9. Свертка

Операция свертки двух периодических функций  $x(k)$  и  $h(k)$  определяется соотношением (гл. 2)

$$y(m) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) h(m-i), \quad m=0, 1, \dots, N-1, \quad (7.13)$$

которое очень похоже на выражение, используемое для получения корреляционной функции (разд. 7.2.7). Единственное существенное отличие состоит в том, что последовательность  $h$  перед почленным перемножением с  $x$  реверсируется. Учитывая это (знак минус у переменной суммирования  $i$ ) и повторяя тот же анализ, который был использован для вывода зависимости между АКФ и энергетическим спектром, получаем

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} [X(n) H(n)] W^{nm}, \quad m=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.14)$$

Отсюда видно, что операция свертки во временной области эквивалентна умножению в частотной области.

Соотношения (7.13) и (7.14) имеют большое значение, поскольку позволяют осуществлять линейную обработку сигналов и моделировать линейные системы. Применительно к этим задачам  $x(k)$  и  $y(m)$  рассматриваются как входной и выходной сигналы системы, а  $h(k)$  — как ее импульсная характеристика.

Таким образом, свертку можно производить либо непосредственно на основании соотношения (7.13), либо косвенным методом, используя ДПФ для преобразования периодических функций времени в частотную область. В последнем случае для получения  $Y(n)$  при заданных  $h(k)$  и  $x(k)$  нужно вычислить и перемножить соответствующие преобразования  $H(n)$  и  $X(n)$ . Затем  $Y(n)$  преобразуется с помощью ОДПФ в выходной сигнал системы  $y(m)$ .

На первый взгляд вычисление свертки в частотной области кажется более длительной операцией по сравнению с прямым методом. В действительности же косвенный метод иногда позволяет сэкономить значительную долю счетного времени. Причина этого будет рассмотрена в разд. 7.10 после изучения очень эффективного метода вычисления ДПФ и ОДПФ, известного как быстрое преобразование Фурье.

Отметим также, что сходство этого метода с нерекурсивной фильтрацией лишь чисто внешнее. В уравнении, описывающем нерекурсивный фильтр:

$$y(m) = \sum_{i=0}^{L-1} x(i) h(m-i) \quad \text{при всех } m,$$

импульсная характеристика содержит только  $L$  отсчетов, тогда как длины  $x(k)$  и  $y(k)$  не ограничены, т. е. речь идет не об обработке периодической функции с использованием периодической импульсной характеристики. Задача фильтрации может быть решена с применением более тонких приемов обработки данных, обсуждаемых подробно в разд. 7.10.

## 7.3. Анализ непрерывных систем

Как было показано, ДПФ предназначено для анализа и обработки дискретных периодических сигналов. Хотелось бы использовать ДПФ непосредственно для численного анализа дискретизованных непрерывных сигналов<sup>1)</sup>. На первый взгляд это можно сделать, используя ДПФ или ОДПФ как дискретизованные варианты прямого и обратного преобразований Фурье:

$$G_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

$$g_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

К сожалению, по ряду причин, которые будут кратко рассмотрены, для многих сигналов не существует точного соответствия между преобразованием Фурье и ДПФ. Поэтому имеет смысл найти общий рациональный подход к анализу непрерывных сигналов.

Если непрерывный сигнал является аperiodическим с неограниченным спектром, можно установить класс сигналов, к которому он относится. Это может быть: а) класс сигналов, принимающих нулевые значения вне некоторых пределов во временной области; б) класс сигналов, равных нулю вне некоторых пределов в частотной области. Отметим, что эти свойства сигналов являются взаимоисключающими. Они либо оба отсутствуют, либо присутствуют по отдельности, но никогда не присутствуют вместе.

Если сигнал  $g_0(t)$  ограничен во времени некоторыми пределами, то его спектр  $G_0(j\omega)$  не может быть ограниченным по полосе. Если спектр  $G_0(j\omega)$  низкочастотный, то можно ожидать, что сигнал  $g_0(t)$  может быть дискретизован с такой достаточно высокой частотой  $f_d$ , чтобы полученное колебание  $g(t)$  имело спектр  $G(j\omega)$ , в разумных пределах соответствующий  $G_0(j\omega)$  в полосе

$$-\frac{f_d}{2} \leq f \leq \frac{f_d}{2}.$$

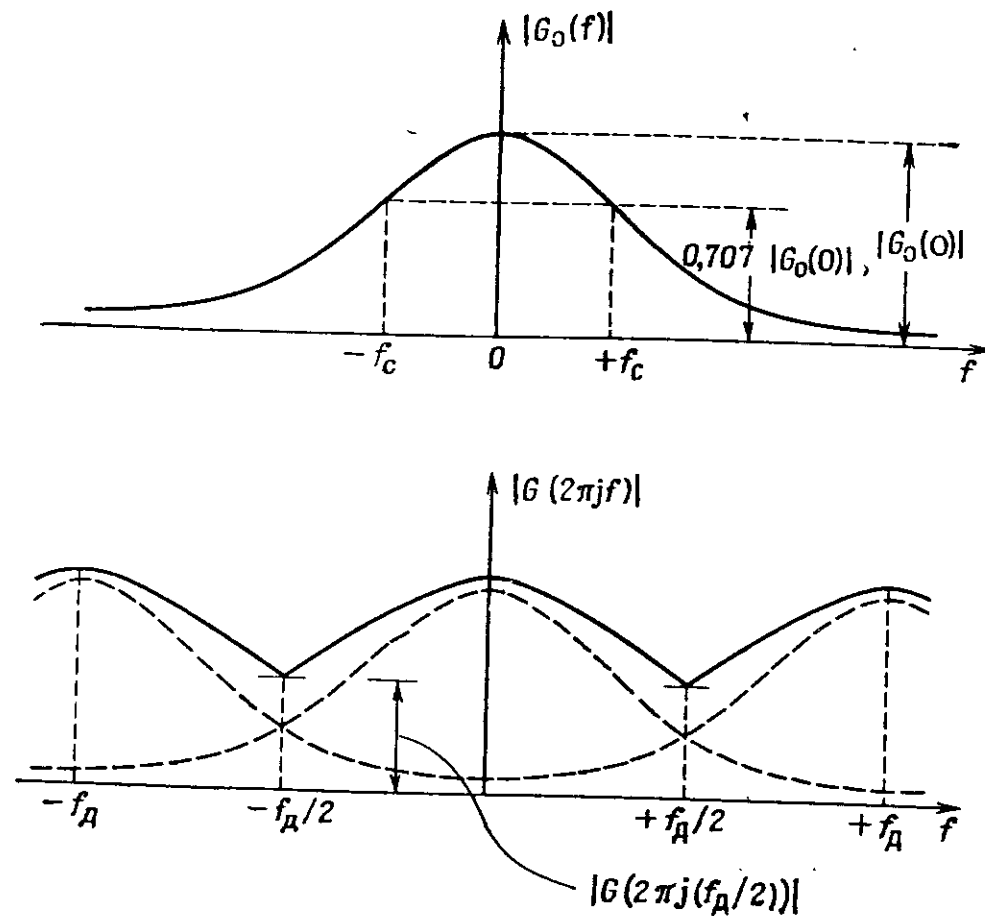
Это иллюстрируется на фиг. 7.5. Ясно, что частоту дискретизации  $f_d$  нужно выбирать таким образом, чтобы отношение

$$\frac{|G(2\pi j \frac{f_d}{2})|}{|G_0(0)|} \quad (7.15)$$

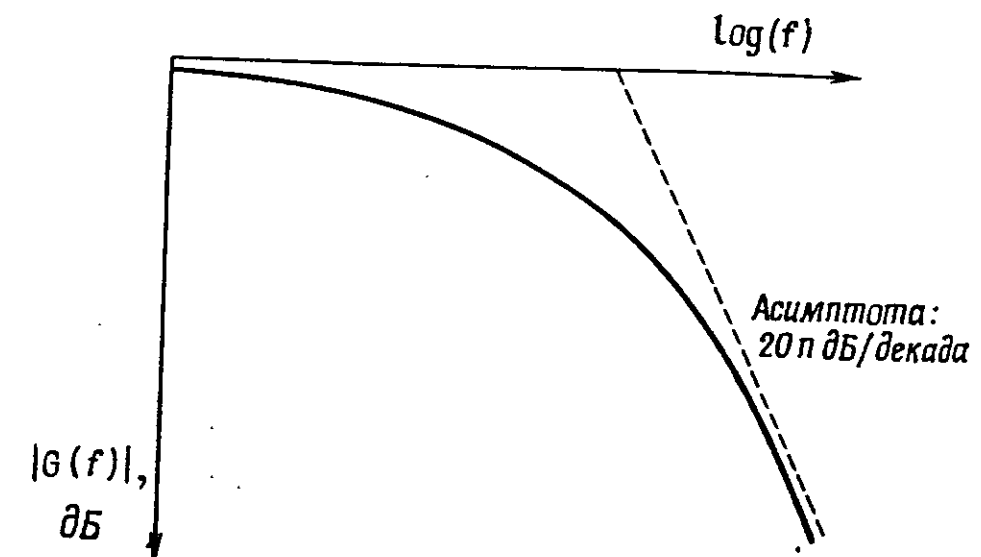
<sup>1)</sup> Существует ограниченный класс сигналов, которые можно анализировать с помощью ДПФ. Он включает периодические колебания с ограниченным спектром, дискретизованные в соответствии с теоремой отсчетов.

было достаточно малым с точки зрения допустимого искажения спектра  $G(j\omega)$ .

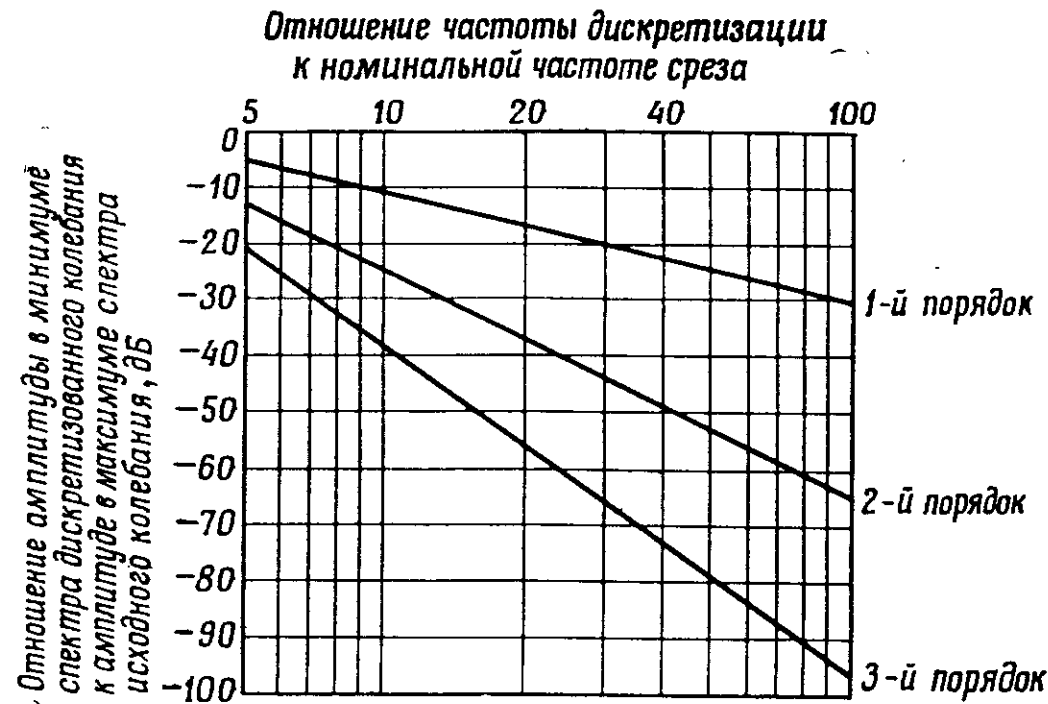
Несмотря на то что общего правила выбора частоты дискретизации для ограниченной по полосе функции получить нельзя, можно руководствоваться следующими соображениями. Пусть коле-



Фиг. 7.5. Наложение спектров, вызванное дискретизацией колебания с неограниченной полосой частот.



Фиг. 7.6. Низкочастотный спектр  $n$ -го порядка.



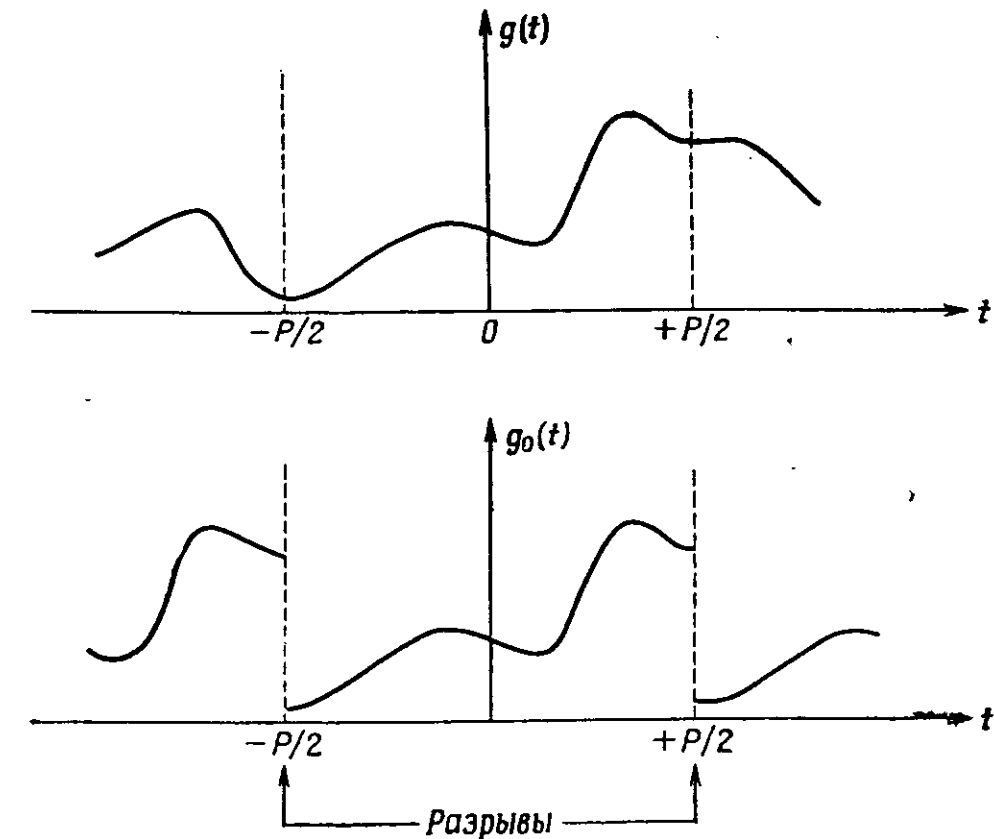
Фиг. 7.7. Соотношение между степенью наложения спектров сигнала с неограниченной полосой и частотой дискретизации.

бание имеет спектр низкочастотного вида, асимптотически спадающий от номинальной частоты среза (которую для удобства определим как точку пересечения асимптоты с осью частот) на  $20n$  дБ на декаду. Такой спектр, который назовем спектром  $n$ -го порядка, показан на фиг. 7.6. Кривые, приведенные на фиг. 7.7, показывают зависимость отношения (7.15) от нормированной по частоте среза частоты дискретизации для этого спектра и позволяют выбрать  $f_d$ .

Ко второму классу относятся сигналы  $g_0(t)$ , ограниченные по полосе:

$$G_0(j\omega) = 0, \quad f > f_1.$$

В этом случае колебание должно быть бесконечной длительности. Кроме того, предполагается, что  $g_0(t)$  — аperiodическая функция. Это может быть, например, шумовое колебание, прошедшее через идеальный фильтр нижних частот с прямоугольной характеристикой. На фиг. 7.8 показано, как из колебания  $g(t)$  выделяется отрезок длительностью  $T$ , содержащий  $N$  отсчетов. Вычисление ДПФ этих отсчетов предполагает периодическое повторение отрезка колебания  $g(t)$ . Если  $N$  недостаточно велико, то разрывы на концах отрезка могут привести к тому, что ДПФ полученной последовательности  $x(n)$  будет существенно отличаться от преобразования Фурье функции  $g(t)$ . Это заставляет учитывать две особенности применения ДПФ. Во-первых, если речь идет о фильтрации (т. е. о вычислении  $X(n)$ , взвешивании составляющих спектра по опре-



Фиг. 7.8. Разрывы, вызванные усечением колебания.

деленному закону и обратном преобразовании во временную область с помощью ОДПФ), то основное внимание должно уделяться выбору такого  $N$ , при котором имеет смысл проводить весовую обработку и адекватное обратное преобразование. Во-вторых, если нужно найти сглаженный энергетический спектр, то  $N$  также должно быть велико, но, кроме того, иногда может возникнуть необходимость предварительно сгладить разрывы на концах отрезка весовой обработкой отсчетов.

#### 7.4. Вычисление ДПФ

В разд. 7.2.3 было показано, что ДПФ и ОДПФ могут быть вычислены с помощью одного алгоритма. Таким образом, имея схему вычисления одного из преобразований, второе можно вычислить, прибегая лишь к простой перетасовке данных. Следовательно, достаточно рассмотреть построение основной схемы вычислений

$$A(n) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} a(k) W^{-nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.16)$$

Для оценки ДПФ на основании этого алгоритма необходимо заметить переменные следующим образом. На входе следует положить

$$a(k) \equiv x(k), \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (7.17)$$

и на выходе

$$\frac{A(n)}{N} \equiv X(n), \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.18)$$

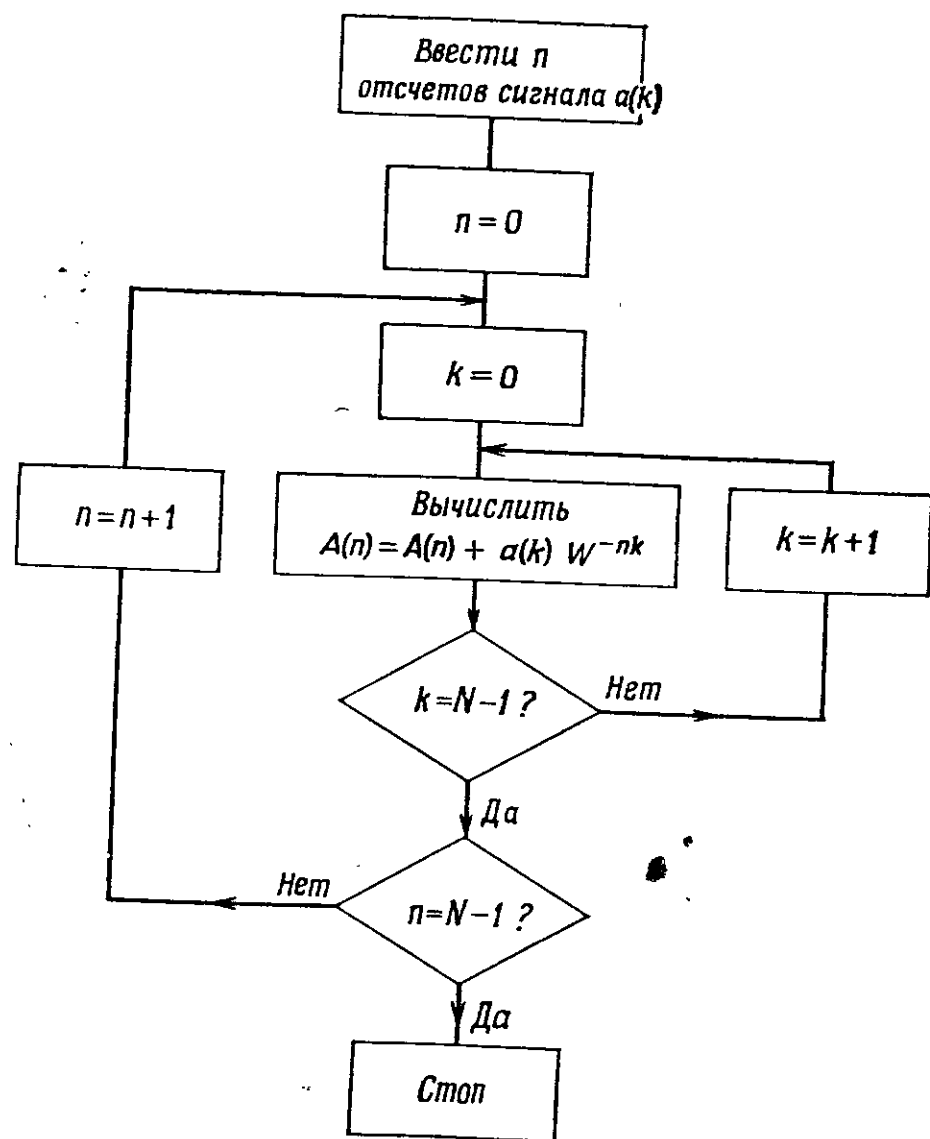
Чтобы использовать этот же алгоритм для выполнения ОДПФ, обрабатываемые данные должны быть перетасованы следующим образом:

$$\begin{aligned} a(k) &\equiv X(N-k), \quad k=1, 2, \dots, N-1, \\ a(0) &\equiv X(0), \end{aligned} \quad (7.19)$$

и для получения заданной последовательности во временной области нужно сделать замену

$$A(n) \equiv x(n), \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.20)$$

Нетрудно, конечно, получить схему вычислений, позволяющую найти  $N$  значений  $A(n)$  по  $N$  значениям  $a(k)$  в соответствии с формулой (7.16). Пример такой структурной схемы показан на



Фиг. 7.9. Блок-схема непосредственного вычисления ДПФ.

фиг. 7.9. Составить соответствующую программу по этой структурной схеме настолько просто, что факт многократного повторения одинаковых операций остается незамеченным. Эти «лишние» операции появляются по следующим причинам. В выражение (7.16) входят произведения общего вида

$$a(k)W^{-nk}.$$

Весовая функция  $W$  является периодической с периодом  $N$ . Для заданного  $k$  при изменении  $n$  от нуля до  $N-1$  произведение также будет меняться периодически, причем число этих периодов равно  $k$ . Более того, даже в пределах одного периода произведения могут образовывать комплексно-сопряженные пары. Следовательно, табулируя промежуточные результаты, можно существенно уменьшить число умножений, необходимых для вычисления  $N$  значений последовательности  $A(n)$ .

Алгоритмы, позволяющие достигнуть этого сокращения вычислительной нагрузки, известны под общим названием «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). Следует подчеркнуть, что это не «новое» преобразование, а всего лишь способ выполнения ДПФ.

Еще одно более незначительное увеличение эффективности алгоритма может быть достигнуто в том случае, когда обрабатываемые данные являются действительными величинами. Это обусловлено тем, что ДПФ действительных чисел обладает комплексно-сопряженной симметрией. Следовательно, достаточно вычислять лишь одну половину спектра. Подробно этот вопрос рассматривается в разд. 7.9.

ДПФ применяется в настоящее время столь широко [2], что, кроме универсальных ЦВМ, для его выполнения используются специально разработанные цифровые устройства. Они делятся обычно на две категории: это либо периферийное устройство для выполнения БПФ, соединенное с универсальной ЦВМ, либо специализированная ЦВМ для обработки и анализа в частотной области. Эта техника достаточно хорошо разработана; в статье [3] перечислено около 200 машин, которые могут выполнять БПФ.

Микропрограммирование дает возможность использовать преимущества аппаратной реализации БПФ при относительно малых затратах труда разработчиков. При микропрограммировании программа содержится в программируемом ПЗУ на микросхемах. Обычно микропрограммирование включает получение алгоритма с последующим составлением программы, которая затем представляется набором машинных команд в двоичной форме. Эти команды затем заносятся в ППЗУ, которое превращается таким образом в постоянно запрограммированный эквивалент небольшого участка памяти машины, обычно содержащего программу в двоичном виде (после ее компиляции).

## 7.5. Быстрое преобразование Фурье

Вывод БПФ из ДПФ трактуется для изучающих этот вопрос различными способами [4—7]. Например, ДПФ можно рассматривать как действия с матрицами, и тогда БПФ выводится в результате факторизации матриц. Были также получены короткие рекурсивные уравнения, ценные тем, что дают математическую формулировку принципа БПФ. Они особенно полезны при составлении программ.

Мы используем менее строгий подход, вполне достаточный для объяснения вывода БПФ, его сути и способов программирования. Начнем с того, что запишем соотношение (7.16) в виде

$$A(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k) \exp(-2\pi jkn), \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

Возьмем последовательность  $a(k)$ , показанную на фиг. 7.10, и разделим ее на две подпоследовательности  $y(k)$  и  $z(k)$ , такие, что

$$\left. \begin{aligned} y(k) &= a(2k), \\ z(k) &= a(2k+1), \end{aligned} \right\} k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Пусть ДПФ  $y(k)$  и  $z(k)$  будут соответственно  $Y(n)$  и  $Z(n)$ . Тогда  $A(n)$  можно записать как

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \left\{ a(2k) \exp\left(\frac{-2\pi j 2kn}{N}\right) + \right. \\ &\quad \left. + a(2k+1) \exp\left[\frac{-2\pi j (2k+1)n}{N}\right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ Y(n) + \exp\left(\frac{-2\pi j n}{N}\right) Z(n) \right]. \end{aligned}$$

Используя принятое ранее более компактное обозначение для экспоненты<sup>1</sup>, получим

$$A(n) = \frac{1}{2} [Y(n) + W^n Z(n)]. \quad (7.21)$$

С точки зрения вычислений можно считать  $A(n)$   $N$ -размерным массивом комплексных чисел. Аналогично  $Y(n)$  и  $Z(n)$  являются такими же массивами, и, поскольку обе эти функции периодические (с периодом  $N/2$ ), массивы имеют размерность  $N/2$ . Очень удобно ис-

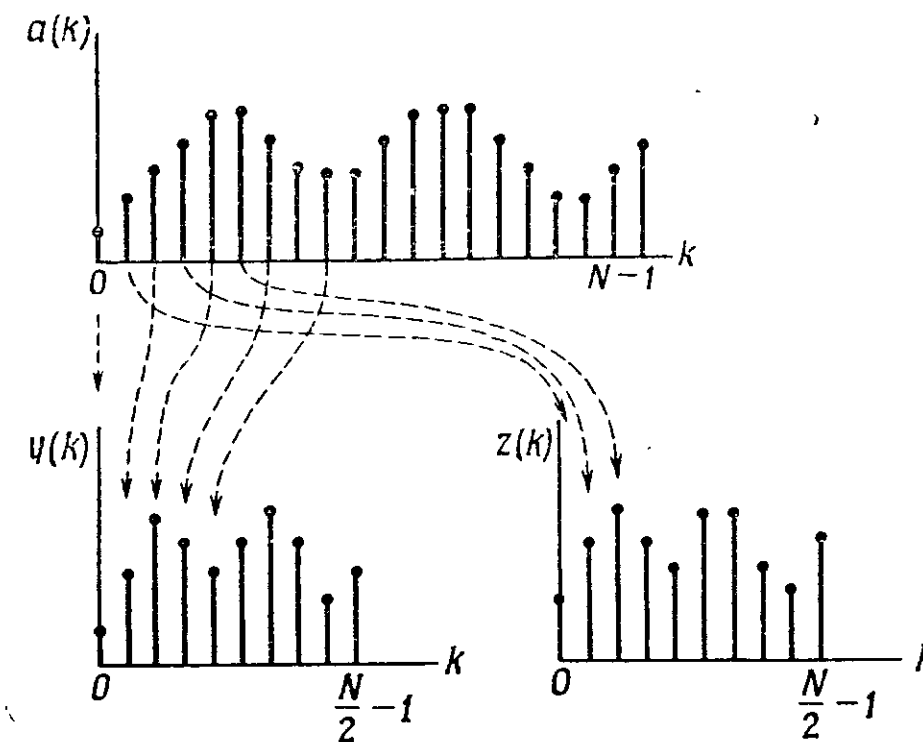
<sup>1</sup> Автор здесь и ниже использует экспоненту со знаком минус  $W = -\exp(-2\pi jN)$ . — Прим. перев.

пользовать одни и те же ячейки памяти для хранения  $A(n)$  и более коротких  $Y(n)$  и  $Z(n)$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} A(n) &\equiv Y(n), \\ A\left(n + \frac{N}{2}\right) &\equiv Z(n), \end{aligned} \right\} n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Тогда вычисление конечного результата выполняется по формуле:

$$A(n) \leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A(n) + A\left(n + \frac{N}{2}\right) W^{-n} \right\}.$$



Фиг. 7.10. Первое прореживание данных, необходимое для выполнения БПФ.

Естественно, если проводить вычисление таким способом, то нельзя будет найти значения  $A(n)$  для  $n$ , больших  $(N/2-1)$ . Однако  $W^{-n}$  — периодическая функция с периодом  $N$ , обладающая свойством

$$W^{-(n+N/2)} = -W^{-n}.$$

Поэтому следующие две операции:

$$\begin{aligned} A(n) &\leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A(n) + A\left(n + \frac{N}{2}\right) W^n \right\}, \\ A\left(n + \frac{N}{2}\right) &\leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A(n) - A\left(n + \frac{N}{2}\right) W^n \right\} \end{aligned}$$

позволят вычислить значения  $A(n)$  для  $n=0, 1, \dots, N/2-1$ . Следовательно, все значения  $A(n)$  могут быть получены вычислением двух  $N/2$ -точечных преобразований и умножением на весовые коэффициенты. Эта процедура показана на фиг. 7.11.

Каждое из двух  $N/2$ -точечных преобразований может быть получено повторением использованного приема, т. е. каждая входная последовательность снова разбивается на две подпоследовательности длиной  $N/4$ . В обоих случаях необходимо подобрать соответствующие весовые коэффициенты. Для исходной пары последовательностей, которые соответствуют вычислению  $N$ -точечного преобразования, коэффициент равен

$$W_N = \exp(-2\pi j/N).$$

Для  $N/2$ -точечного преобразования имеем

$$W_{N/2} = \exp[-2\pi j/(N/2)] = W_N^2.$$

Следовательно, для  $N/2$ -точечных преобразований нужно иметь четыре уравнения:

$$\begin{aligned} A(n) &\leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A(n) + A\left(n + \frac{N}{4}\right) W^{2n} \right\}, \\ A\left(n + \frac{N}{4}\right) &\leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A(n) - A\left(n + \frac{N}{4}\right) W^{2n} \right\}, \\ A\left(n + \frac{N}{2}\right) &\leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A\left(n + \frac{N}{2}\right) + A\left(n + \frac{3N}{4}\right) W^{2n} \right\}, \\ A\left(n + \frac{3N}{4}\right) &\leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A\left(n + \frac{N}{2}\right) - A\left(n + \frac{3N}{4}\right) W^{2n} \right\}, \end{aligned}$$

где всюду

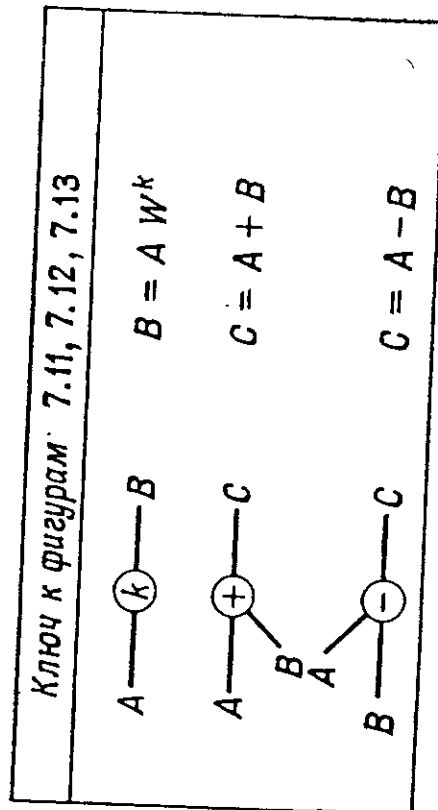
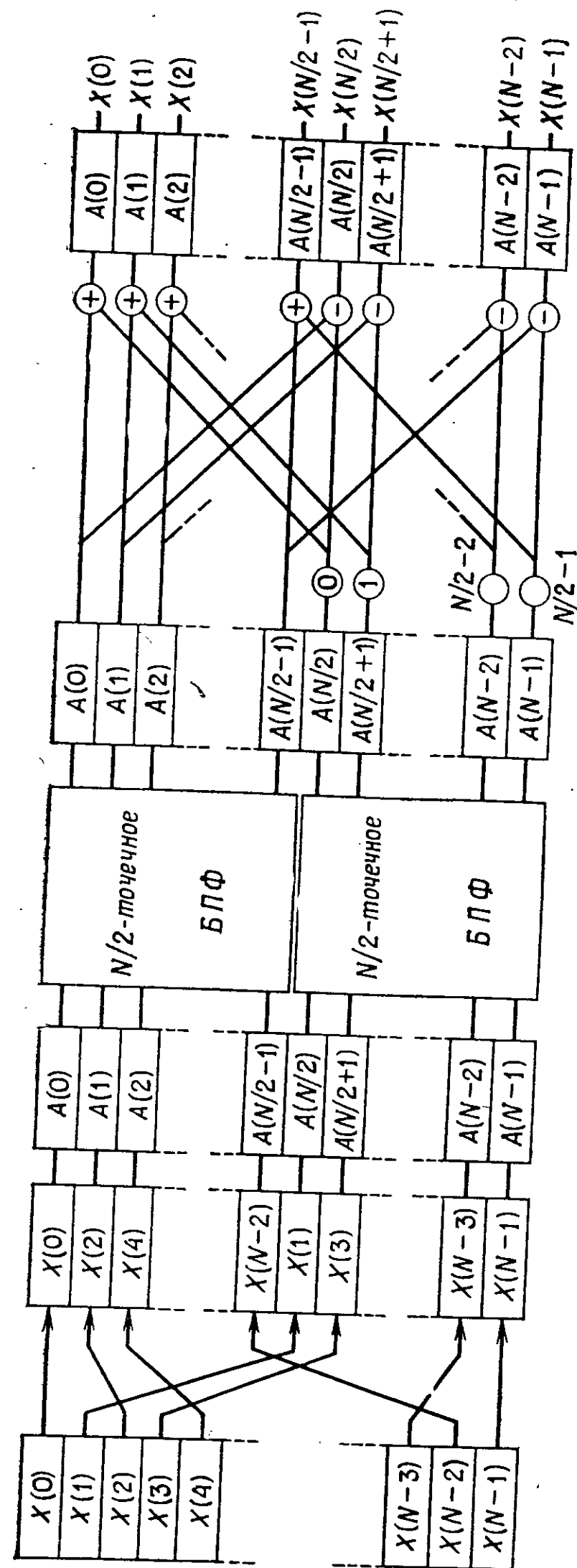
$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1.$$

Если  $N$  — кратно 2, т. е. если

$$N = 2^r,$$

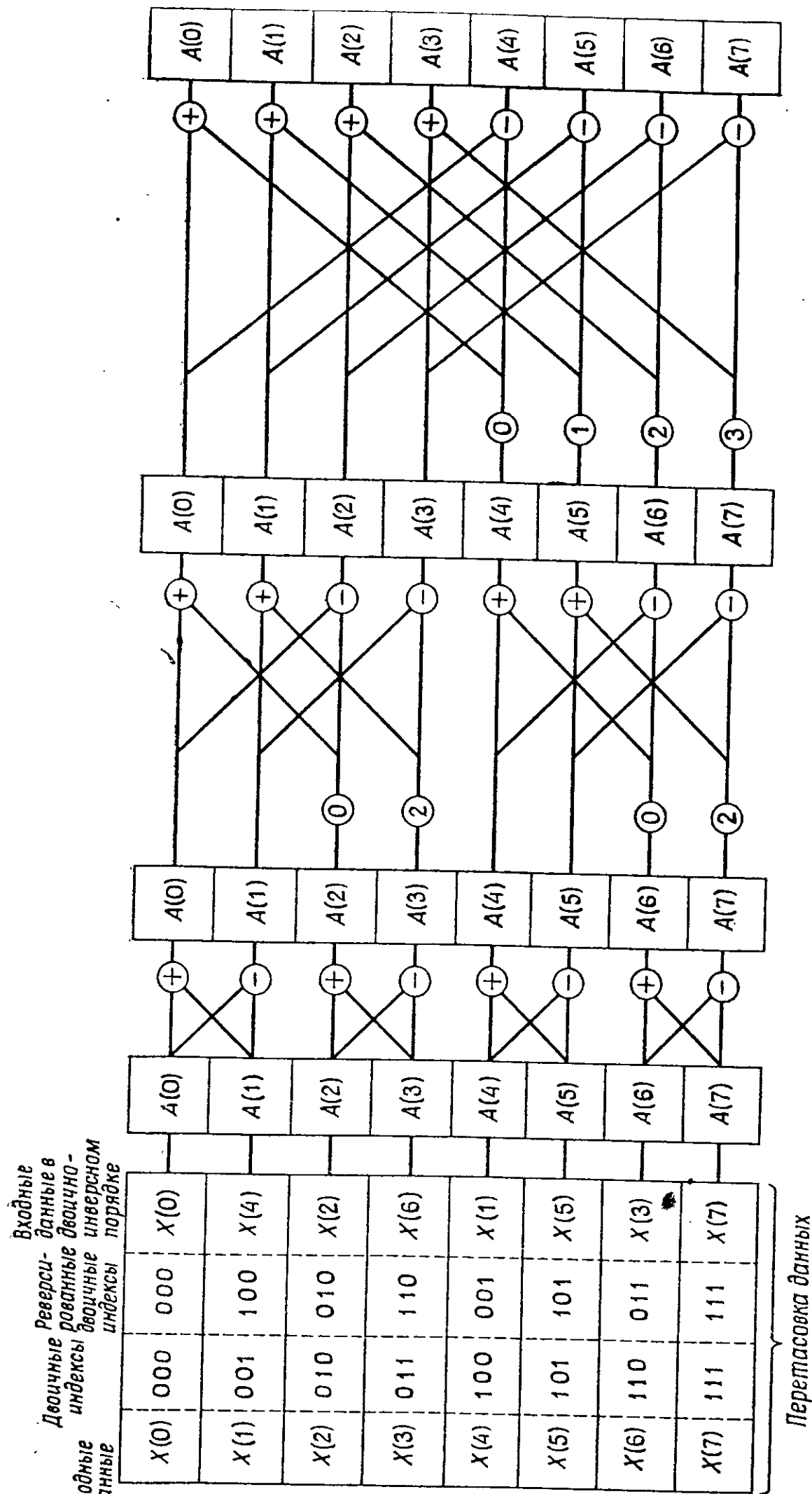
процедура последовательного прореживания входных данных и перезаписи уравнений может быть проведена  $r$  раз до тех пор, пока не останется двухточечное преобразование. Вся процедура преобразования будет в таком случае состоять из последовательных операций умножения на весовые коэффициенты и сложения данных, хранящихся в массиве  $A(n)$ . В качестве примера на фиг. 7.12 показан полный направленный граф для вычисления преобразования при  $N=8$ .

Как видно из фиг. 7.12, входные данные  $x(k)$ , которые преобразуются в массив  $A(n)$ , располагаются не в естественном порядке, что является результатом последовательного прореживания данных для уменьшения числа точек преобразования. Порядок перетасовки можно хорошо пояснить следующим образом. Если индексы входных данных записать в двоичной форме [например,  $x(6)$  в виде  $x(110)$ ], то новое положение числа получается путем инверсии двоичных разрядов индекса. Так, для приведенного примера



Фиг. 7.11. Первый этап выполнения быстрого преобразования Фурье.





Фиг. 7.12. Направленный граф для быстрого преобразования Фурье.

$x(110)$  становится  $x(011)$ , что при преобразовании к десятичному виду дает номер 3. Таким образом,  $x(6)$  становится третьим, а  $x(3)$  — шестым. Эта перетасовка носит название двоичной инверсии.

Еще одна интересная особенность направленного графа — возможность проведения вычислений с «замещением». Как было показано, необходимый объем памяти определяется лишь потребностью хранить  $N$  исходных чисел. По мере выполнения преобразования исходные данные не сохраняются; на их место записываются сначала промежуточные результаты, а затем отсчеты преобразования в естественном порядке.

Рассмотренный метод преобразования носит название «прореживание по времени», поскольку входная временная последовательность разбивается на две подпоследовательности. Другой, совершенно отличный метод основан на разбиении искомой последовательности. Его называют методом прореживания по частоте. Здесь исходные данные стоят в естественном порядке, а конечные — в двоично-инверсном.

Интересно отметить, что для выполнения вычислений не обязательно, чтобы  $N$  было кратно 2. В модифицированном виде алгоритм можно использовать и для других  $N$ . Однако эффективность алгоритма уменьшается, особенно когда сомножители, на которые раскладывается  $N$ , велики. В самом деле, если  $N$  — простое число, алгоритм быстрого преобразования не работает, и необходимо использовать простую схему вычисления ДПФ, показанную на фиг. 7.9.

Оценим теперь эффективность алгоритма быстрого преобразования Фурье, а затем выведем и используем систему рекуррентных уравнений, описывающих БПФ.

### 7.6. Эффективность алгоритма БПФ

При непосредственном вычислении ДПФ, рассмотренном ранее и иллюстрируемом фиг. 7.9, для вычисления каждого из  $N$  значений  $A(n)$  требуется  $N$  комплексных умножений. Поскольку умножение — самая медленная из всех операций, выполняемых на ЦВМ, то время, необходимое для вычисления ДПФ таким способом, будет почти точно пропорционально  $N^2$ .

С другой стороны, исследуя направленный граф на фиг. 7.12, находим, что БПФ требует  $N/2 \log_2 N$  комплексных умножений. Действительно, конечный или любой промежуточный массив  $A(n)$  получается из предыдущего с помощью  $N/2$  взвешиваний, каждое из которых включает одно комплексное умножение. Всего таких циклов взвешивания  $r$ , причем

$$r = \log_2 N.$$



Для больших значений  $N$  БПФ значительно сокращает время вычислений. Например, если  $N=1024$ , БПФ оказывается приблизительно в 100 раз быстрее обычного ДПФ.

### 7.7. Система рекуррентных уравнений, описывающих БПФ

Обозначим индексами последовательные массивы  $A(n)$  направленного графа. Тогда  $A_1(n)$  будет крайним левым массивом графа на фиг. 7.13, а  $A_{r+1}(n)$  — крайним правым;  $A_i(n)$  — произвольный массив с  $i$ , меняющимся от 1 до  $r+1$ , где  $r$  — число последовательных шагов со взвешиванием входных данных. Например, для столбца  $A_{r+1}$  операция взвешивания имеет вид

$$A_{r+1}(n) \leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A_r(n) + A_r\left(n + \frac{N}{2}\right) W^n \right\},$$

$$A_{r+1}\left(n + \frac{N}{2}\right) \leftarrow \frac{1}{2} \left\{ A_r(n) - A_r\left(n + \frac{N}{2}\right) W^n \right\}.$$

В общем случае, чтобы выразить  $A_{i+1}(n)$  через  $A_i(n)$ , необходимо учитывать следующее. При движении справа налево по направленному графу на фиг. 7.13 разнесение между парами, участвующими во взвешивании при каждой итерации, будет уменьшаться в 2 раза. В результате этого:

- а) число уравнений будет удваиваться;
- б) диапазон изменения независимой переменной должен уменьшаться вдвое;
- в) аргумент весовой функции должен удваиваться.

С учетом первого из этих условий пара, участвующая во взвешивании массива  $A_i$ , имеет вид

$$A_i(n) \text{ и } A_i(n + 2^{i-1}).$$

Труднее всего выразить условия «а» и «б». Их можно удовлетворить, если

$$n = (m-1) + (l-1)2^i.$$

Здесь  $l$  — число пар функциональных уравнений,

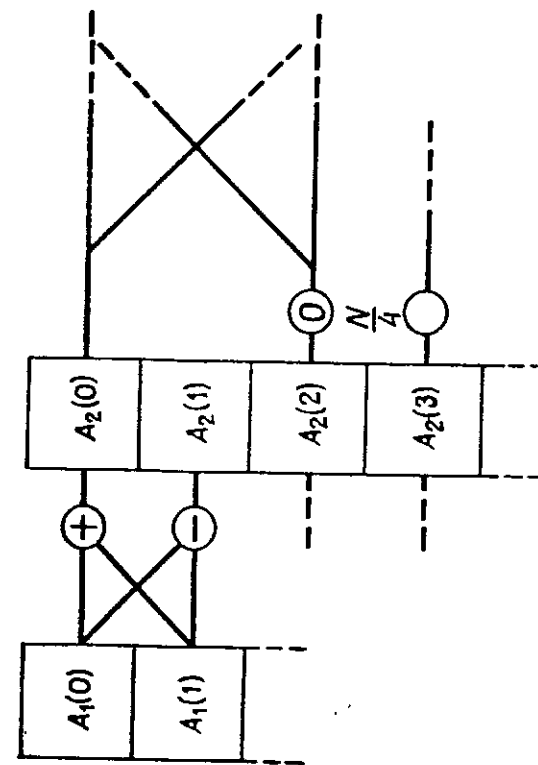
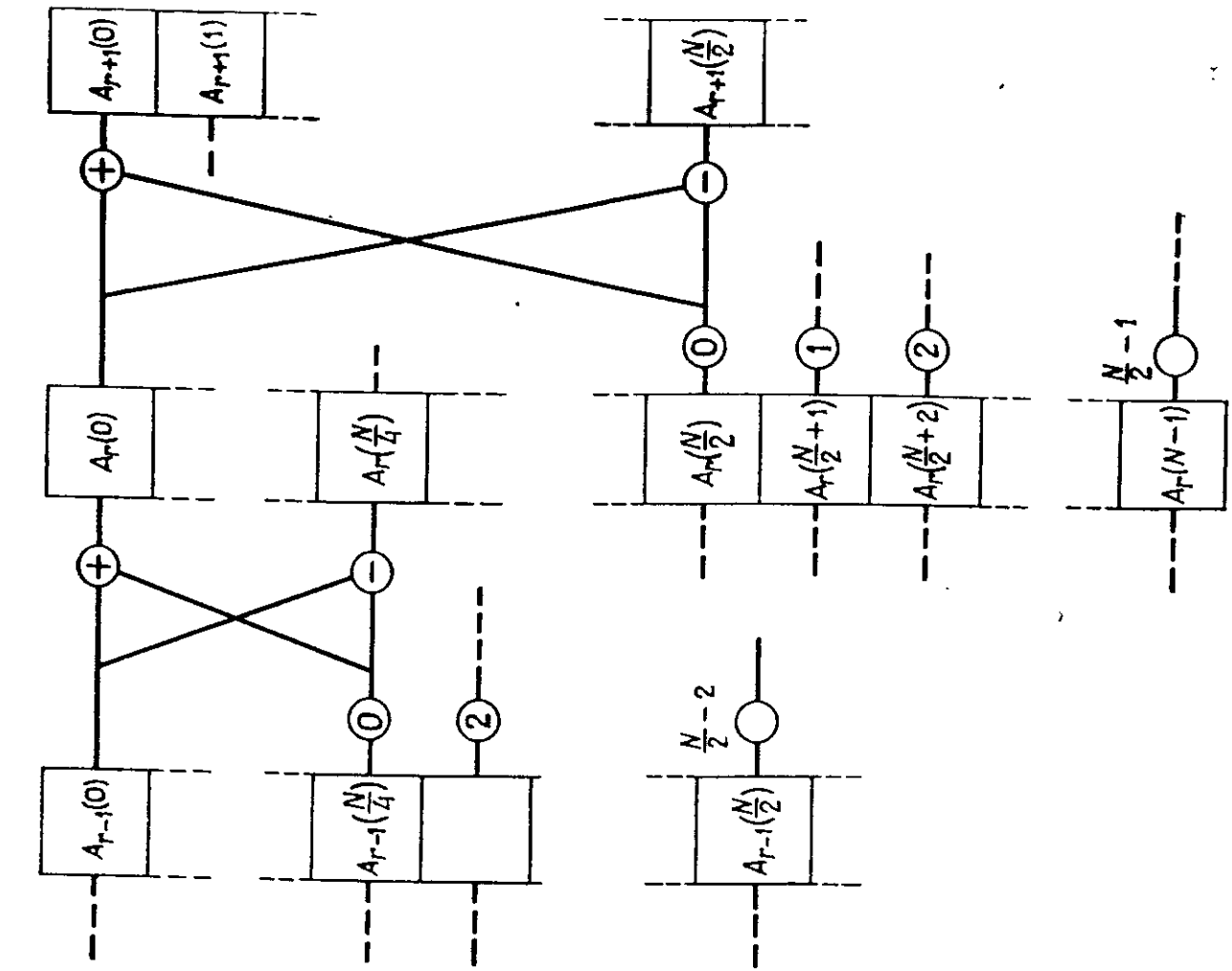
$$l = 1, 2, \dots, 2^{r-i},$$

и  $m$  — диапазон изменения независимой переменной  $n$ , причем

$$m = 1, 2, \dots, 2^{i-1}.$$

Заметим, что независимо от величины  $i$  переменная  $n$  принимает значения от нуля до  $N$  при условии, что  $l$  и  $m$  принимают все свои значения. Однако порядок следования значений  $n$  зависит от  $i$ .

Наконец, условие «в» удовлетворяется, если весовая функция имеет вид  $W^{n2^{r-i}}$ . Эту функцию можно упростить, если выразить  $n$



Фиг. 7.13. Иллюстрация к рекуррентным уравнениям БПФ.

через  $m$  и  $l$  (все целые) и учесть, что  $W^{(n-1)N} = 1$ . В результате получим  $W^{(m-1)2^{r-l}}$ . Теперь можно записать окончательные рекуррентные уравнения:

$$A_{i+1}[(m-1) + (l-1)2^i] = \frac{1}{2} \{A_i[(m-1) + (l-1)2^i] + A_i[(m-1) + (l-1)2^i + 2^{i-1}]W^{(m-1)2^{r-l}}\}, \quad (7.22)$$

$$A_{i+1}[(m-1) + (l-1)2^i + 2^{i-1}] = \frac{1}{2} \{A_i[(m-1) + (l-1)2^i] - A_i[(m-1) + (l-1)2^i + 2^{i-1}]W^{(m-1)2^{r-l}}\}$$

при

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, r, \\ m &= 1, 2, \dots, 2^{i-1}, \\ l &= 1, 2, \dots, 2^{r-i}. \end{aligned}$$

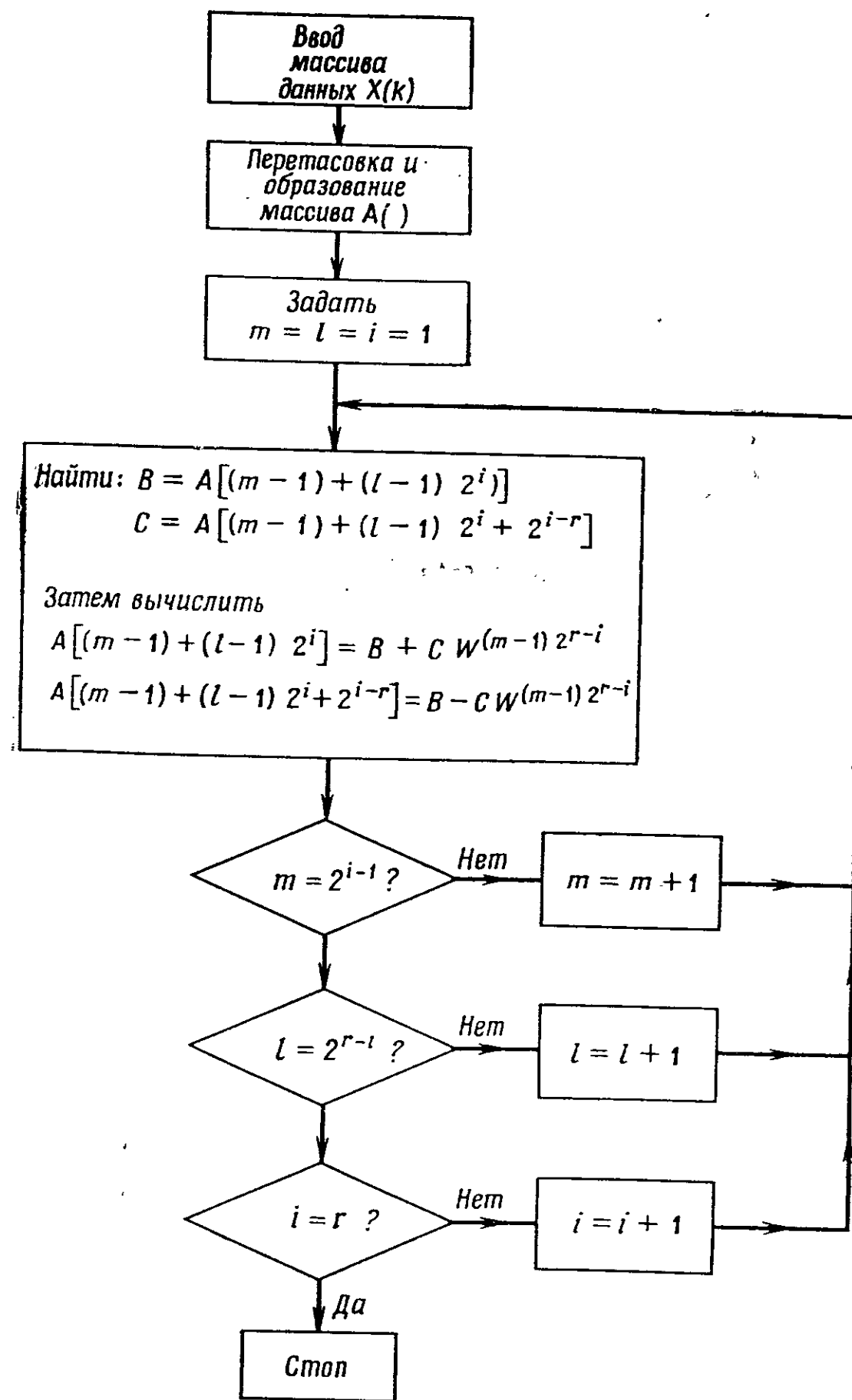
### 7.8. Программирование алгоритма

После того как мы получили рекуррентные уравнения, описывающие БПФ, программирование выполняется очень просто. Заметим, что вычисления включают три цикла длиной  $i$ ,  $l$  и  $m$  соответственно. Самый длительный среди них цикл по  $i$ , поскольку диапазон изменения и  $m$  и  $l$  зависит от  $i$ . На фиг. 7.14 показана блок-схема вычислений, соответствующая рекуррентным уравнениям (7.22). Руководствуясь ей, легко написать программу или подпрограмму на ФОРТРАНе для вычисления БПФ. На фиг. 7.15а приведен текст подпрограммы EASY, представляющей самое простое воплощение алгоритма БПФ. Как следует из комментариев, несколько первых операторов выполняют двоичную инверсию. Остальные касаются выполнения БПФ с прореживанием по времени.

Дальнейшее увеличение эффективности вычислений достигается путем расчета синусных и косинусных весовых функций рекуррентным методом, как это делается в одном из вариантов подпрограммы EASY, приведенном на фиг. 7.15б. Экономия расчетного времени происходит за счет отказа от стандартных программ расчета COS и SIN, требующих больших затрат времени. Рекуррентную формулу легко получить разложением в тригонометрический ряд  $(k+1)$ -х членов  $\cos[(k+1)\theta]$  и  $\sin[(k+1)\theta]$ , где

$$\theta = \frac{2\pi}{N(2^{r-i})}, \quad i=1, 2, \dots, r.$$

Согласно определению, подпрограмма EASY выполняет вычисления, соответствующие формуле (7.16). Для вычисления ДПФ в



Фиг. 7.14. Блок-схема вычислений по алгоритму БПФ с прореживанием по времени.

```

SUBROUTINE EASY(A,R)
INTEGER R
REAL A(2,1)
PI = 3.1415926
N = 2**R
LIM1 = N - 1
LIM2 = N/2
C INPLACE SHUFFLE OF DATA BEGINS
J = 1
DO 3 I = 1,LIM1
IF(I.GE.J) GO TO 1
A1 = A(1,J)
A2 = A(2,J)
A(1,J) = A(1,I)
A(2,J) = A(2,I)
A(1,I) = A1
A(2,I) = A2
1 L = LIM2
2 IF(L.GE.J) GO TO 3
J = J - L
L = L/2
GO TO 2
3 J = J + L
C SHUFFLE COMPLETE
C TRANSFORM BY DECIMATION IN TIME BEGINS
DO 4 I = 1,R
LIM1 = 2**(I - 1)
LIM2 = 2**(R - I)
DO 4 L = 1,LIM2
DO 4 M = 1,LIM1
LIM3 = (M - 1) + (L - 1)*2*LIM1 + 1
B1 = A(1,LIM3)
B2 = A(2,LIM3)
C1 = A(1,LIM3 + LIM1)
C2 = A(2,LIM3 + LIM1)
ARG = 2.0*PI*FLOAT(LM - 1)*LIM2)/FLOAT(N)
A1 = C1*COS(ARG) + C2*SIN(ARG)
A2 = -C1*SIN(ARG) + C2*COS(ARG)
A(1,LIM3) = B1 + A1
A(2,LIM3) = B2 + A2
A(1,LIM3 + LIM1) = B1 - A1
A(2,LIM3 + LIM1) = B2 - A2
4 CONTINUE
END

```

Фиг. 7.15а. Программа на ФОРТРАНе реализации основного алгоритма ДПФ, заданного соотношением (7.16).

соответствии с формулами (7.17) и (7.18) дополнительно к EASY вызывается подпрограмма SCALE (фиг. 7.16). Наконец, для выполнения ОДПФ в соответствии с формулами (7.19) и (7.20) перед исполнением EASY вызывается подпрограмма SORT (фиг. 7.17).

```

SUBROUTINE EASY(A,R)
INTEGER R
REAL A(2,1)
PI = 3.1415926
N = 2**R
LIM1 = N - 1
LIM2 = N/2
C INPLACE SHUFFLE OF DATA BEGINS
J = 1
DO 3 I = 1,LIM1
IF(I.GE.J) GO TO 1
A1 = A(1,J)
A2 = A(2,J)
A(1,J) = A(1,I)
A(2,J) = A(2,I)
A(1,I) = A1
A(2,I) = A2
1 L = LIM2
2 IF(L.GE.J) GO TO 3
J = J - L
L = L/2
GO TO 2
3 J = J + L
C SHUFFLE COMPLETE
C TRANSFORM BY DECIMATION IN TIME BEGINS
DO 4 I = 1,R
LIM1 = 2**(I - 1)
LIM2 = 2**(R - I)
ARG = 2.0*PI*LIM2/FLDAT(N)
CS = 1.0
SI = 0.0
CSTEP = COS(ARG)
SSTEP = SIN(ARG)
DO 4 M = 1,LIM1
DO 5 L = 1,LIM2
LIM3 = (M - 1) + (L - 1)*2*LIM1 + 1
B1 = A(1,LIM3)
B2 = A(2,LIM3)
C1 = A(1,LIM3 + LIM1)
C2 = A(2,LIM3 + LIM1)
A1 = C1*CS + C2*SI
A2 = -C1*SI + C2*CS
A(1,LIM3) = B1 + A1
A(2,LIM3) = B2 + A2
A(1,LIM3 + LIM1) = B1 - A1
A(2,LIM3 + LIM1) = B2 - A2
5 CONTINUE
CS1 = CS*CSTEP - SI*SSTEP
SI1 = SI*CSTEP + CS*SSTEP
CS = CS1
SI = SI1
4 CONTINUE
END

```

Фиг. 7.15б. Улучшенная программа ДПФ с рекуррентным вычислением весовых коэффициентов.

```

SUBROUTINE SCALE(X,R)
DIMENSION X(2,1)
INTEGER R
N = 2**R
DO 1 I = 1,N
X(1,I) = X(1,I)/FLOAT(N)
X(2,I) = X(2,I)/FLOAT(N)
1 CONTINUE
RETURN
END

```

Фиг. 7.16. Подпрограмма для умножения на  $1/N$  результатов вычисления по программе EASY.

```

SUBROUTINE SORT(X,R)
INTEGER R
REAL X(2,1)
N = 2**R
LIM1 = N/2
DO 1 I = 2,LIM1
X1 = X(1,I)
X2 = X(2,I)
LIM2 = N - I + 2
X(1,I) = X(1,LIM2)
X(2,I) = X(2,LIM2)
X(1,LIM2) = X1
X(2,LIM2) = X2
1 CONTINUE
RETURN
END

```

Фиг. 7.17. Подпрограмма для выполнения двоичной инверсии при вычислении ОДПФ с помощью программы ДПФ EASY.

### 7.9. Вычисление ДПФ действительных последовательностей

В предыдущих разделах этой главы было рассмотрено ДПФ и его вычисление с помощью БПФ. ДПФ и БПФ служат для получения спектра  $X(n)$  последовательности  $x(k)$ , которая в общем случае является комплексной. Однако в большинстве инженерных задач используются действительные функции с

$$\operatorname{Im}[x(k)] = 0.$$

Спектр таких функций обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии:

$$X(n) = X^*(N-n), \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Следовательно, при непосредственном использовании БПФ для оценки спектра  $N$ -точечной последовательности половина из  $2N$  требуемых ячеек памяти оказывается избыточной. Кроме того, тра-

тится лишнее время на вычисление половины спектра, соответствующей отрицательным частотам.

Рассмотрим два более эффективных метода обработки действительных данных, которые не имеют указанных недостатков. Оба метода используют фундаментальное свойство симметрии, позволяющее представить любую асимметричную функцию в виде суммы четной и нечетной симметричных относительно некоторой оси функций. Это свойство для удобства последующих выкладок сформулируем в следующем виде:

$$X(n) = X_{\text{четн}}(n) + X_{\text{нечетн}}(n), \quad n=0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$X_{\text{четн}}(n) = X_{\text{четн}}(N-n) = \frac{X(n) + X(N-n)}{2}$$

и

$$X_{\text{нечетн}}(n) = -X_{\text{нечетн}}(N-n) = \frac{X(n) - X(N-n)}{2}.$$

В обеих формулах  $n=1, 2, \dots, N/2-1$ . Кроме того,

$$X_{\text{четн}}(0) = X(0),$$

$$X_{\text{четн}}\left(\frac{N}{2}\right) = X\left(\frac{N}{2}\right),$$

$$X_{\text{нечетн}}(0) = 0,$$

$$X_{\text{нечетн}}\left(\frac{N}{2}\right) = 0.$$

Первый из двух рассматриваемых методов позволяет вычислять половину спектра, соответствующую положительным частотам, для двух  $N$ -точечных действительных последовательностей одинаковой длины одновременно, используя одно  $N$ -точечное БПФ (точки комплексные). В этом состоит и первый этап обработки по второму методу, позволяющему вычислять половину спектра, соответствующую положительным частотам, для одной действительной  $N$ -точечной последовательности, используя  $N/2$ -точечное БПФ (точки комплексные).

На фиг. 7.18, а показаны две действительные  $N$ -точечные последовательности  $y(k)$  и  $z(k)$ . Чтобы получить чисто мнимую функцию, умножим  $z(k)$  на оператор  $j$ . Спектры  $Y(n)$  и  $Z(n)$  являются симметричными в комплексно-сопряженных точках относительно точки  $n=N/2$  (фиг. 7.18, б). Однако эта симметрия такова, что преобразование  $X(n)$  суммы  $x(k) = y(k) + jz(k)$  является асимметричным (фиг. 7.18, в). Исходные спектры  $Y(n)$  и  $Z(n)$  могут быть восста-

новлены из  $X(n)$  на положительных частотах с помощью простых выкладок, основанных на цитированном выше свойстве симметрии:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[Y(n)] &= \frac{\operatorname{Re}[X(n) + X(N-n)]}{2}, \\ \operatorname{Im}[Y(n)] &= \frac{\operatorname{Im}[X(n) - X(N-n)]}{2}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[Z(n)] &= \operatorname{Im}[Z'(n)] = \frac{\operatorname{Im}[X(n) + X(N-n)]}{2}, \\ \operatorname{Im}[Z(n)] &= -\operatorname{Re}[Z'(n)] = -\frac{\operatorname{Re}[X(n) - X(N-n)]}{2}. \end{aligned}$$

где  $n=1, 2, \dots, N/2-1$  и

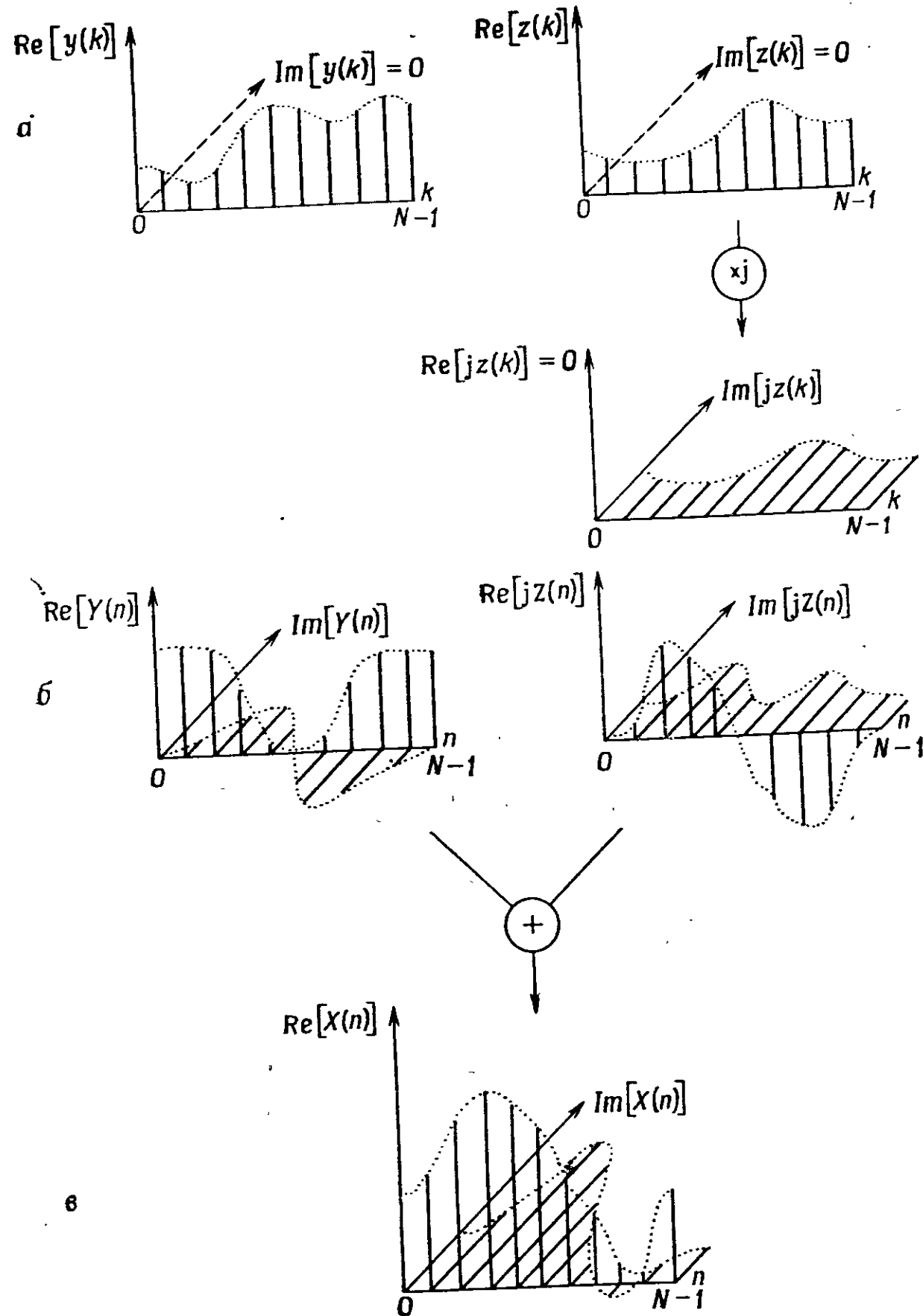
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[Y(0)] &= \operatorname{Re}[X(0)], \\ \operatorname{Re}[Z(0)] &= \operatorname{Im}[X(0)], \\ \operatorname{Re}\left[Y\left(\frac{N}{2}\right)\right] &= \operatorname{Re}\left[X\left(\frac{N}{2}\right)\right], \\ \operatorname{Re}\left[Z\left(\frac{N}{2}\right)\right] &= \operatorname{Im}\left[X\left(\frac{N}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Следовательно, для вычисления действительной и мнимой частей двух функций  $Y(n)$  и  $Z(n)$  достаточно использовать только  $N/2$  ячеек памяти для каждой. Значения  $Y(N/2)$  и  $Z(N/2)$  удобнее всего задавать так, чтобы

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[Y(0)] &= \operatorname{Re}\left[Y\left(\frac{N}{2}\right)\right], \\ \operatorname{Im}[Z(0)] &= \operatorname{Re}\left[Z\left(\frac{N}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

(Учтем, что для действительной функции значение спектра в центральной точке мнимой части всегда равно нулю, т. е. вычислять спектр на этой частоте не нужно.) На фиг. 7.19 приведен текст программы, которую можно использовать для вычисления ДПФ двух функций по описанному методу. Первая функция вводится как действительная часть входного массива  $A(1, I)$ , а вторая — как его мнимая часть  $A(2, I)$ :

	1	1	2	...	N
Действительная часть	$A(1, I)$	$y(0)$	$y(1)$	...	$y(N-1)$
Мнимая часть	$A(2, I)$	$z(0)$	$z(1)$	...	$z(N-1)$



Фиг. 7.18.

```

SUBROUTINE RFT1(A,R)
INTEGER R
DIMENSION A(2,1)
CALL SCALE(A,R)
CALL EASY(A,R)
N = 2**R
LIM1 = N/2
LIM2 = LIM1 + 1
LIM3 = N - 1
A1 = A(2,1)
A(2,1) = A(1,LIM2)
A2 = A(2,LIM2)
DO 1 I = 2,LIM1
A3 = A(1,I)
A4 = A(2,I)
A5 = A(1,N - I + 2)
A6 = A(2,N - I + 2)
A(1,I) = (A5 + A3)/2.0
A(2,I) = (A4 - A6)/2.0
A(1,N - I + 2) = (A4 + A6)/2.0
A(2,N - I + 2) = (A5 - A3)/2.0
1 CONTINUE
DO 2 I = LIM2,LIM3
A(1,I) = A(1,I + 1)
A(2,I) = A(2,I + 1)
2 CONTINUE
A(1,N) = A1
A(2,N) = A2
RETURN
END

```

Фиг. 7.19. Программа для вычисления ДПФ двух действительных  $N$ -точечных последовательностей.

После выполнения преобразования с замещением и перетасовкой результатов в ячейках памяти спектры функций  $y(k)$  и  $z(k)$  располагаются в следующем порядке:

	1	1	2	$\dots$	$N-1$	$N$
Действительная часть	$A(1, 1)$	$\text{Re}[Y(0)]$	$\text{Re}[Y(1)]$	$\dots$	$\text{Re}[Z(1)]$	$\text{Re}[Z(0)]$
Мнимая часть	$A(2, 1)$	$\text{Re}\left[Y\left(\frac{N}{2}\right)\right]$	$\text{Im}[Y(1)]$	$\dots$	$\text{Im}[Z(1)]$	$\text{Re}\left[Z\left(\frac{N}{2}\right)\right]$

Алгоритм обратного преобразования легко получить из формул (7.23), выражая  $X(n)$  и  $X(N-n)$  через  $Y(n)$  и  $Z(n)$ :

$$\begin{aligned} \text{Re}[X(n)] &= \text{Re}[Y(n)] - \text{Im}[Z(n)], \\ \text{Im}[X(n)] &= \text{Re}[Z(n)] + \text{Im}[Y(n)], \\ \text{Re}[X(N-n)] &= \text{Re}[Y(n)] + \text{Im}[Z(n)], \\ \text{Im}[X(N-n)] &= \text{Re}[Z(n)] - \text{Im}[Y(n)], \end{aligned}$$

где  $n=1, 2, \dots, (N/2-1)$ . Значения, соответствующие  $n=0$  и  $N/2$ , определяются из формул (7.24).

На фиг. 7.20 приведен текст подпрограммы RFT2, используемой для выполнения обратного преобразования двух действительных последовательностей.

```

SUBROUTINE RFT2(A,R)
INTEGER R
DIMENSION A(2,1)
N = 2**R
LIM1 = N/2
A1 = A(1,N)
A2 = A(2,N)
DO 1 I = 1,LIM1
A(1,N-I+1) = A(1,N-I)
A(2,N-I+1) = A(2,N-I)
1 CONTINUE
A3 = A(2,1)
A(2,1) = A1
A(2,LIM1 + 1) = A2
A(1,LIM1 + 1) = A3
DO 2 I = 2,LIM1
A5 = A(1,I) - A(2,N-I+2)
A6 = A(2,I) - A(1,N-I+2)
A7 = A(1,I) + A(2,N-I+2)
A8 = A(2,I) + A(1,N-I+2)
A(1,I) = A5
A(2,N-I+2) = -A6
A(1,N-I+2) = A7
A(2,I) = A8
2 CONTINUE
CALL SORT(A,R)
CALL EASY(A,R)
RETURN
END

```

Фиг. 7.20. Программа для получения двух действительных функций из ДПФ, записанных в определенном порядке в памяти. (Подробности о порядке записи ДПФ в массиве  $A$  смотри в тексте. Эта программа дополняет RFT1.)

Метод вычисления ДПФ одной действительной  $N$ -точечной последовательности напоминает первый этап получения алгоритма БПФ. Вспомним, что спектр функции можно найти из спектров двух ее частей, образованных прореживанием. В данном случае мы берем действительную функцию

$$x_1(k), \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

и образуем из нее прореживанием две действительные  $N/2$ -точечные последовательности:

$$\begin{aligned} y(k) &= x_1(2k), \\ z(k) &= x_1(2k + 1), \end{aligned}$$

где  $k=0, 1, \dots, N/2-1$ .

Функции  $y$  и  $z$  используются здесь снова, чтобы показать непосредственную связь с результатами, полученными ранее. Единственное отличие состоит в том, что теперь обе функции имеют длину  $N/2$ , а не  $N$ .

По аналогии с формулой (7.21) можно записать, что

$$X_1(n) = \frac{1}{2} [Y(n) + W^n Z(n)], \quad n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Поскольку  $Y(n)$  и  $Z(n)$  состоят из  $N/4$  комплексных (т. е.  $N/2$  действительных) значений, то удобно проводить вычисления, разбив уравнение на два рабочих соотношения:

$$X_1(n) = \frac{1}{2} [Y(n) + W^n Z(n)], \quad (7.25)$$

$$X_1\left(\frac{N}{2}-n\right) = \frac{1}{2} \left[ Y\left(\frac{N}{2}-n\right) + W^{(N/2-n)} Z\left(\frac{N}{2}-n\right) \right].$$

где  $n=0, 1, \dots, N/4-1$ . Второе из этих соотношений можно выразить через  $N/4$  имеющихся комплексных значений  $Y(n)$  и  $Z(n)$ , поскольку

$$Y\left(\frac{N}{2}-n\right) = Y^*(n)$$

и

$$Z\left(\frac{N}{2}-n\right) = Z^*(n).$$

Таким образом, для тех же значений  $n$  имеем

$$X_1\left(\frac{N}{2}-n\right) = \frac{1}{2} [Y^*(n) - W^{-n} Z^*(n)]. \quad (7.26)$$

Можно вычислять  $Y(n)$  и  $Z(n)$  одновременно, используя подпрограмму RFT1 и выбирая подходящее значение  $R$  в списке ее аргументов [ $R$  определяет длину  $Y(n)$  и  $Z(n)$ , равную  $2^R$ ]. Используя эту подпрограмму и выполняя вычисления по формулам (7.23) и (7.24), получаем спектр  $X_1(n)$ . Все это выполняет подпрограмма RFT3 (фиг. 7.21), у которой действительной частью массива  $A$  является последовательность  $y(k)$ , а мнимой — последовательность  $z(k)$ :

	1	1	2	...	$N/2$
Действительная часть	$A(1, 1)$	$Y(0)$	$Y(1)$	...	$Y\left(\frac{N}{2}-1\right)$
Мнимая часть	$A(2, 1)$	$Z(0)$	$Z(1)$	...	$Z\left(\frac{N}{2}-1\right)$

```

SUBROUTINE RFT3(A,R)
INTEGER R
DIMENSION A(2,1)
PI = 3.14159
CALL RFT1(A,R)
N = 2**R
LIM1 = N/2
LIM2 = LIM1 - 1
A1 = A(2,1)/2.0
A2 = A(2,N)/2.0
A3 = A(1,1)/2.0
A4 = A(1,N)/2.0
DO 1 I = 2,LIM1
A5 = A(1,I)/2.0
A6 = A(2,I)/2.0
A7 = A(1,N - I + 1)/2.0
A8 = A(2,N - I + 1)/2.0
ARG = PI*FLOAT(I - 1)/FLOAT(N)
A(1,I) = A5 + A7*COS(ARG) + A8*SIN(ARG)
A(2,I) = A6 - A7*SIN(ARG) + A8*COS(ARG)
A(1,N - I + 1) = A5 - A7*COS(ARG) - A8*SIN(ARG)
A(2,N - I + 1) = -A6 - A7*SIN(ARG) + A8*COS(ARG)
1 CONTINUE
DO 2 I = 1,LIM2
A(1,N - I + 1) = A(1,N - I)
A(2,N - I + 1) = A(2,N - I)
2 CONTINUE
A(1,LIM1 + 1) = A1
A(2,LIM1 + 1) = -A2
A(1,1) = A3 + A4
A(2,1) = A3 - A4
RETURN
END

```

Фиг. 7.21. Программа для вычисления ДПФ одной действительной  $N$ -точечной последовательности.

Это соответствует следующему расположению в памяти  $N$ -точечной действительной последовательности:

	1	1	2	...	$N/2$
Действительная часть	$A(1, 1)$	$x(0)$	$x(2)$	...	$x(N-2)$
Мнимая часть	$A(2, 1)$	$x(1)$	$x(3)$	...	$x(N-1)$

Отметим, что ввод данных в таком порядке легко программируется на ФОРТРАНе IV с использованием оператора EQUIVALENCE. Примеры использования этого оператора содержатся в текстах подпрограмм FILTR (фиг. 7.25) и WKIN (фиг. 7.28).

Спектр функции  $x(k)$ , получаемый с помощью RFT3, расположен в массиве  $A$  в виде



	I	1	2	...	N/2
Действительная часть	A(1, I)	Re[X(0)]	Re[X(1)]	...	Re[X(N/2 - 1)]
Мнимая часть	A(2, I)	Im[X(0)]	Im[X(1)]	...	Im[X(N/2 - 1)]

Обратное преобразование для определения исходной  $N$ -точечной действительной последовательности можно получить из фор-

```

SUBROUTINE RFT4(A,R)
  INTEGER R
  DIMENSION A(2,1)
  PI = 3.14159
  N = 2**R
  LIM1 = N/2
  LIM2 = LIM1 + 1
  LIM3 = N - 1
  A1 = A(1,LIM2)*2.0
  A2 = A(2,LIM2)*2.0
  A3 = A(1,1)
  A4 = A(2,1)
  DO 1 I = LIM2,LIM3
    A(1,I) = A(1,I+1)
    A(2,I) = A(2,I+1)
  1 CONTINUE
  DO 2 I = 2,LIM1
    ARG = PI*FLOAT(I-1)/FLOAT(N)
    A5 = A(1,I)
    A6 = A(2,I)
    A7 = A(1,N-I+1)
    A8 = A(2,N-I+1)
    A(1,I) = A5 + A7
    A(2,I) = A6 - A8
    A(1,N-I+1) = (A5 - A7)*COS(ARG) - (A6 + A8)*SIN(ARG)
    A(2,N-I+1) = (A5 - A7)*SIN(ARG) + (A6 + A8)*COS(ARG)
  2 CONTINUE
  A(1,1) = A3 + A4
  A(1,N) = A3 - A4
  A(2,1) = A1
  A(2,N) = -A2
  CALL RFT2(A,R)
  RETURN
END

```

Фиг. 7.22. Программа для вычисления ОДПФ по половине спектра только на положительных частотах ДПФ действительной  $N$ -точечной последовательности.

мул (7.25) и (7.26), выражая  $Y(n)$  и  $Z(n)$  через  $X_1(n)$  и  $X_1(N/2-n)$ :

$$Y(n) = X_1(n) + X_1^*\left(\frac{N}{2} - n\right),$$

$$Z(n) = \left[ X_1(n) - X_1^*\left(\frac{N}{2} - n\right) \right] W^{-n}.$$

Вычисления по этим формулам производятся с помощью подпрограммы RFT4 (фиг. 7.22).

### 7.10. Свертка длинных последовательностей

В разд. 7.2.9 показана возможность производить свертку двух периодических последовательностей  $x(k)$  и  $h(k)$  равной длительности путем перемножения их ДПФ,  $X(n)$  и  $H(n)$ , и вычислением ОДПФ произведения. Операция

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} [X(n)H(n)] W^{nm}, \quad m=0, 1, \dots, N-1, \quad (7.27)$$

точно соответствует обычной свертке  $x(k)$  и  $h(k)$ :

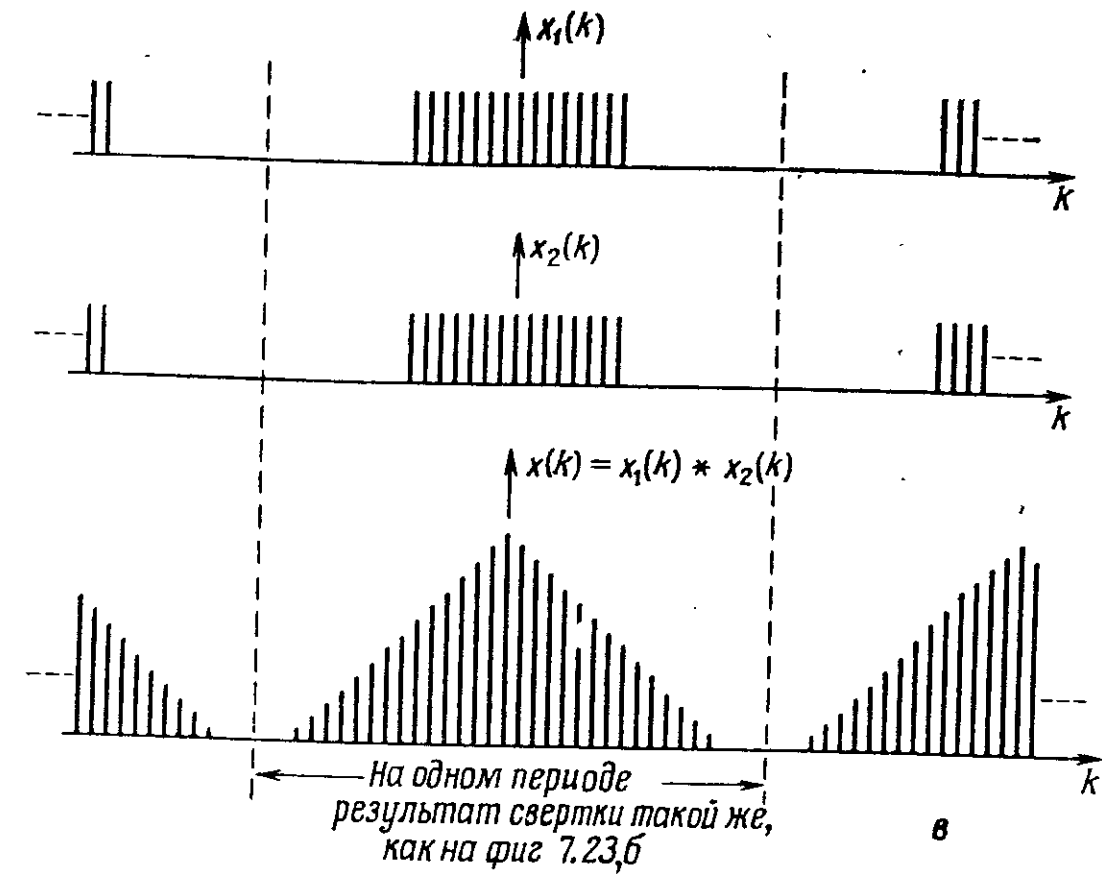
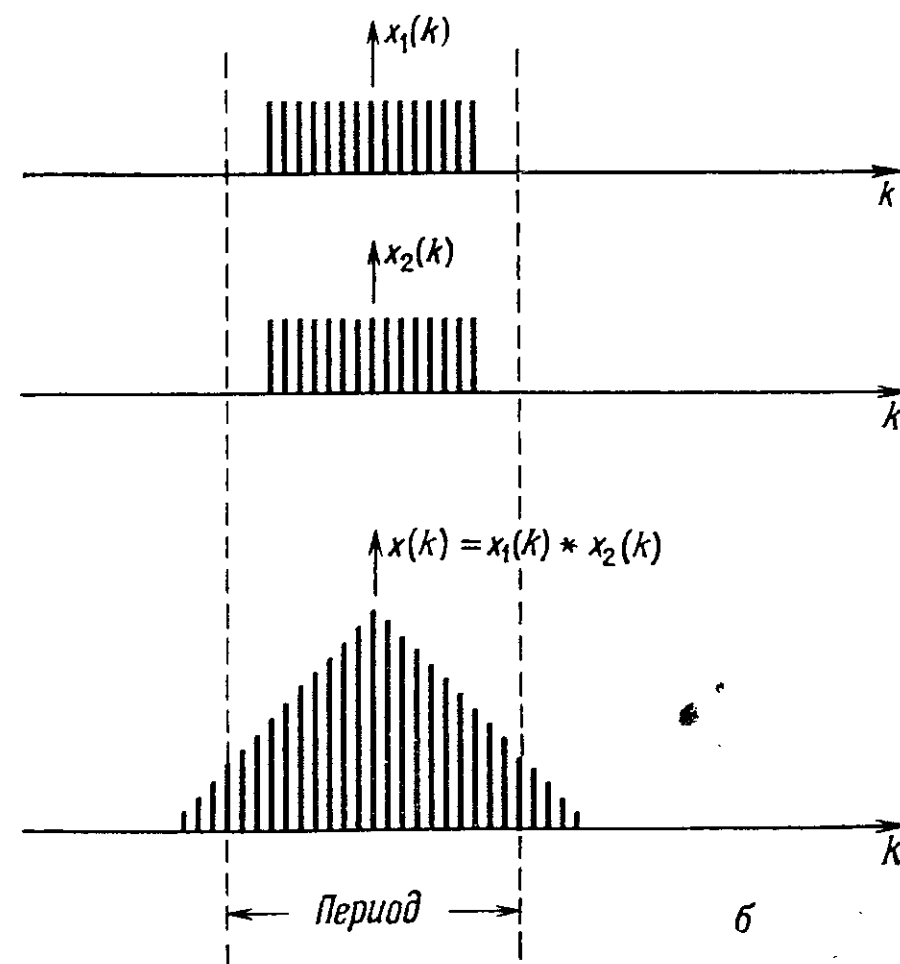
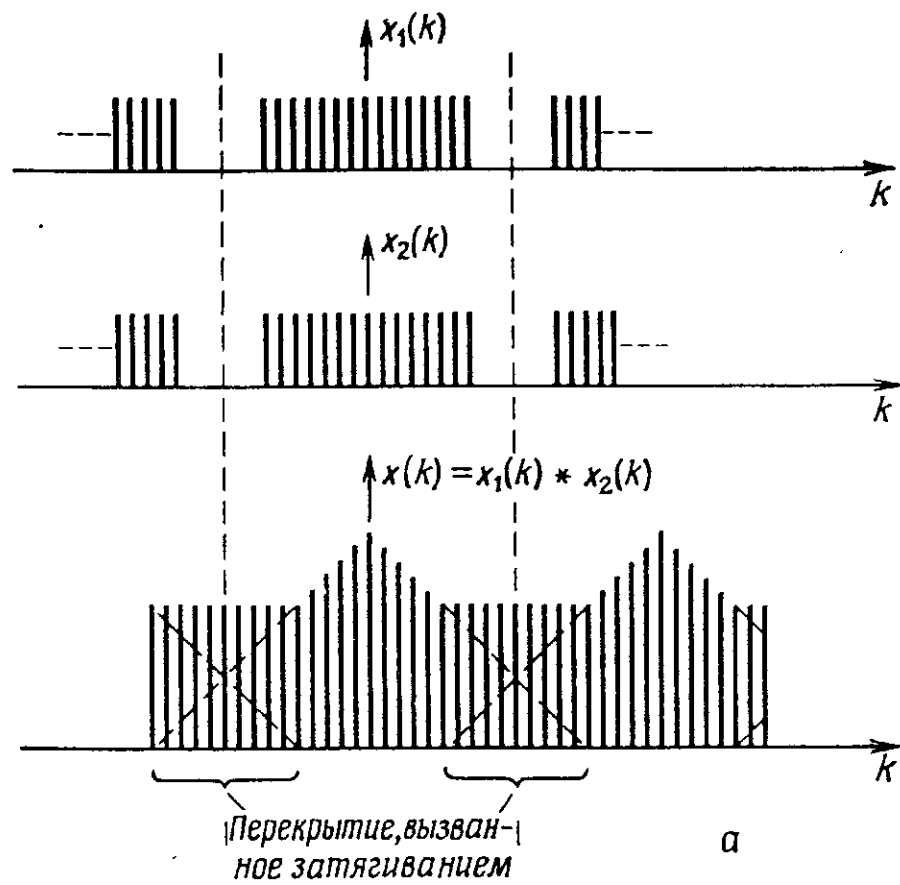
$$y(m) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(m-i), \quad m=0, 1, \dots, N-1. \quad (7.28)$$

Как правило, наибольший интерес принцип свертки представляет применительно к фильтрации. В этом случае и обрабатываемые данные  $x(k)$ , и импульсная характеристика  $h(k)$  являются аperiodическими последовательностями. Пример такой свертки дает нерекursивный фильтр с  $L$  отводами, описанный подробно в разд. 6.2:

$$y(m) = \sum_{i=0}^{L-1} x(i)h(m-i) \quad \text{для всех } m. \quad (7.29)$$

Рассмотрим пример, приведенный на фиг. 7.23, чтобы наглядно показать, как на основе формул (7.27) или (7.28) можно корректно выполнить свертку, когда  $x(k)$  и  $h(k)$  периодические.

Сначала свертываем два периодических колебания прямоугольной формы и получаем корректную периодическую свертку (фиг. 7.23, а). Затем производим свертку двух прямоугольных аperiodических импульсов, соответствующих одному периоду колебания из предыдущего примера (фиг. 7.23, б). Результат свертки совершенно другой. Затягивание, характерное для процесса свертки, приводит к «перекрытию» в случае периодической свертки. Когда требуется вычислить свертку аperiodических функций,



Фиг. 7.23.

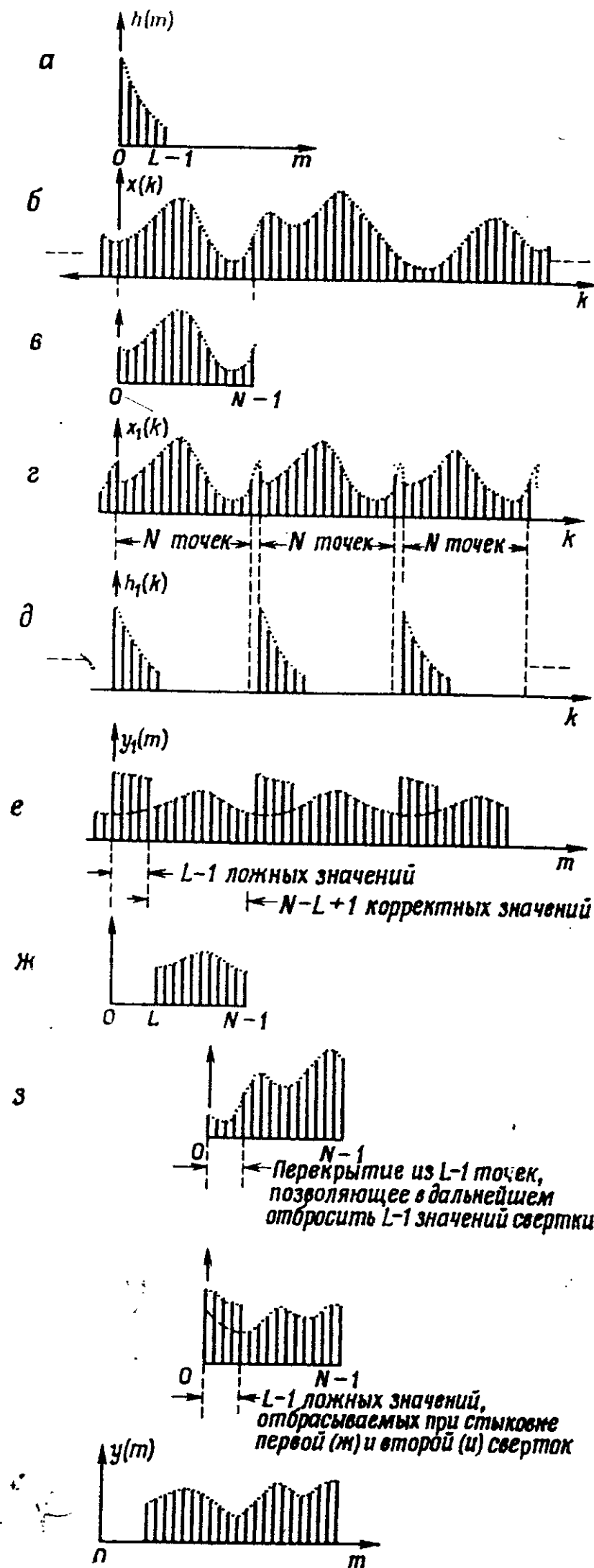
а — корректная свертка периодических прямоугольных функций; б — корректная свертка аperiodических прямоугольных функций; в — влияние увеличения периода на результат периодической свертки.

необходимо принять меры к тому, чтобы избежать перекрытия. В рассмотренном примере этого можно достигнуть, увеличивая период функций (фиг. 7.23, в) и используя ДПФ с большим  $N$ .

Использование ДПФ в формуле (7.27) предполагает, что  $x(k)$  и  $h(k)$  периодические. Поскольку периодические функции приводят к периодической свертке, дискретные свертки, получаемые с помощью ДПФ, часто называют «круговыми».

При использовании свертки для выполнения фильтрации часто сталкиваются еще с одной трудностью. Фильтруемые последовательности обычно много длиннее относительно короткой импульсной характеристики, в результате чего для вычислений требуется чрезвычайно большая память ЦВМ. В этом случае можно производить свертку на основе ДПФ путем соответствующего секционирования длинных последовательностей.

Пусть дана  $L$ -точечная импульсная характеристика  $h(m)$  (фиг. 7.24, а). Она свертывается с длинной последовательностью данных  $x(k)$  (фиг. 7.24, б). Чтобы получить свертку, выделим  $N$  отсчетов из  $x(k)$ , образуя «кадр», который может быть использован в качестве входного массива  $N$ -точечного ДПФ (фиг. 7.24, в). По причине, которая станет понятной ниже, наложим на  $N$  ограни-



Фиг. 7.24.

*a* —  $L$ -точечная импульсная характеристика; *б* — аперриодическая последовательность данных; *в* — первый  $N$ -точечный кадр, взятый из  $x(k)$ ; *г* — периодическое продолжение  $N$ -точечного кадра (периодическое в силу использования ДПФ); *д* — периодическое продолжение  $L$ -точечной импульсной характеристики, дополненной  $N-L$  нулями; *е* — результат умножения  $H(n)$  и  $X_1(n)$  и преобразования произведения во временную область; *ж* — засылка  $N-L+1$  коррективных значений свертки в память на место, занимаемое первым  $N$ -точечным кадром; *з* — второй  $N$ -точечный кадр, взятый из  $x(k)$ ; *и* — один период второй свертки с выделенными первыми ложными значениями; *к* — стыковка кадра *ж* с кадром *и* (после отбрасывания  $L-1$  значений).

чение  $N > L$ . Поскольку используется ДПФ, кадр необходимо рассматривать как один период периодической функции  $x_1(t)$ , показанной на фиг. 7.24, *г*. Далее также с помощью ДПФ вычислим преобразование  $N$ -точечной последовательности, образованной дополнением  $N-L$  нулями  $L$ -точечной импульсной характеристики. Этим достигается периодическое продолжение  $h(k)$ , т. е. получена функция  $h_1(k)$  (фиг. 7.24, *д*), которая свертывается с  $x_1(k)$  умножением в частотной области:

$$Y_1(n) = X_1(n) H_1(n),$$

где

$$X_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) W^{-nk}, \quad n=0, 1, \dots, N-1,$$

и

$$H_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_1(k) W^{-nk}.$$

Применив ОДПФ, получим

$$y_1(m) = \sum_{n=0}^{N-1} [X_1(n) H_1(n)] W^{nm}, \quad m=0, 1, \dots, N-1.$$

Если сюда подставить два выражения, определяющие  $X_1(n)$  и  $H_1(n)$ , и применить свойство ортогональности (разд. 7.2.5), то можно получить

$$y_1(m) = \sum_{i=0}^m h_1(i) x_1(m-i) + \sum_{i=m+1}^{N-1} h_1(i) x_1(N+m-i). \quad (7.30)$$

Сравнение этого уравнения с соотношением (7.29), которое описывает нерекурсивный фильтр, показывает, что они похожи, но вместе с тем не идентичны. Учитывая, что  $N$  положено большим, чем  $L$ , рассмотрим случай, когда  $m=L-1$ :

$$y_1(L-1) = \sum_{i=0}^{L-1} h_1(i) x_1(L-1-i) + \sum_{i=L}^{N-1} h_1(i) x_1(N+L-1+i).$$

Здесь

$$h_1(L) = h_1(L+1) = \dots = h_1(N-1) = 0,$$

так что вторая сумма исчезает, и

$$y_1(L-1) = \sum_{i=0}^{L-1} h_1(i) x_1(L-1-i).$$

Это абсолютно точное выражение, определяющее  $(L-1)$ -й выходной отсчет фильтра с  $L$  отводами. Члены  $y_1(L)$ ,  $y_1(L+1)$ , ...,  $y_1(N-1)$  по той же причине корректны.

Рассмотрим теперь первые  $(L-1)$  выходных отсчетов. Все они содержат ложные члены, вызванные наложением и определяемые второй суммой в формуле (7.30). Из-за этого они не корректны и должны быть отброшены. Иллюстрацией к вышеизложенному служит фиг. 7.24, *е* и *ж*.

Следующий этап включает выделение второго  $N$ -точечного кадра, выбираемого так, что его первые  $(L-1)$  значений идентичны последним  $(L-1)$  отсчетам предыдущего кадра (фиг. 7.24, *з*). Это необходимо в силу того, что в начале следующей  $N$ -точечной свертки снова будет  $(L-1)$  ложных отсчетов, которые должны быть отброшены.

Корректную часть первой свертки мы возвращаем в память (фиг. 7.24, *и*). Поскольку по крайней мере  $N$  отсчетов, взятых из  $x(k)$ , больше не будут использоваться, отфильтрованные данные, полученные в результате первой свертки, могут быть помещены в те же ячейки памяти, которые содержали первый обработанный кадр. Таким образом, весь процесс фильтрации может быть выполнен с «замещением», и в этом случае потребности в памяти определяются необходимостью хранения лишь первоначальных данных. Потребуется также относительно небольшой объем «обязательной» памяти для проведения самой свертки и преобразований (этот объем определяется детальной схемой вычислений).

Стыковка корректных частей от первой и второй свертки, показанная на фиг. 7.24, *к*, демонстрирует способ получения полной свертки из большого числа много меньших  $N$ -точечных свертки.

Описанный способ известен как метод «перекрывания с накоплением» [8], и вполне понятно, почему он так называется. Метод «перекрывания со сложением» позволяет достигнуть тех же результатов несколько по-другому. В деталях он отличается от первого метода, но основной принцип здесь тот же, так же как и необходимые время вычислений и объем памяти.

Если  $N$  много больше длительности импульсной характеристики  $L$ , которую будем считать фиксированной (определяемой требуемым числом отводов фильтра), то свертку можно вычислять сразу большими массивами. Следовательно, для фильтрации

Таблица 7.1

$L$	$N$
$< 11$	32
11—17	64
18—29	128
30—52	256
53—94	512
95—171	1 024
172—310	2 048
311—575	4 096
576—1050	8 192
1051—2000	16 384
2001—3800	32 768
3801—7400	65 536
$> 7400$	131 072

последовательности заданной длины потребуется относительно небольшое число таких свертки. С другой стороны, если  $N$  мало и ненамного превосходит  $L$ , потребуются короткие быстрые свертки, но и процесс фильтрации намного удлинится. Поэтому были рассчитаны [8] оптимальные значения  $N$  для заданных  $L$  (табл. 7.1).

```

SUBROUTINE FILTR(X,LEN)
C   DIMENSIONS OF ARRAYS MUST BE X1(2,M),X2(2,M),H(2,M),
C   AX1(2*M),AX2(2*M) AND AH(2*M) WHERE M = 2**(R - 1) AND
C   R IS SUITABLY CHOSEN, IN THIS CASE M = 64 SO THAT R = 7
DIMENSION X(1),X1(2,64),X2(2,64),H(2,64),AX1(128),AX2(128)
COMMON AH(128)
EQUIVALENCE (AX1(1),X1(1,1)),(AX2(1),X2(1,1)),(AH(1),H(1,1))
INTEGER R
C   SPECIFY VALUE OF R SO THAT LENGTH OF ARRAY AH IS 2**R
R = 7
C   SPECIFY L IN ACCORDANCE WITH TABLE 1
L = 24
N = 2**R
N1 = N/2
R = R - 1
A = 2.0 + FLOAT(LEN)/FLOAT(N-L+1)
LIM1 = IFIX(A)
CALL RFT3(H,R)
DO 5 J = 1,LIM1
DO 2 I = 1,N
LIM3 = J*(N-L+1) + 1 - 1
LIM4 = N - J + 1
IF(LIM3.LE.0.OR.LIM3.GT.LEN) GO TO 1
AX1(LIM4) = X(LIM3)
GO TO 2
1 AX1(LIM4) = 0.0
2 CONTINUE
LIM5 = (J-2)*(N-L+1)
LIM2 = N - L + 1
DO 3 I = 1,LIM2
IF(J.EQ.1) GO TO 3
LIM6 = 1 + LIM5
LIM7 = 1 + L - 1
IF(LIM6.GT.LEN) GO TO 3
X(LIM6) = AX2(LIM7)
3 CONTINUE
IF(J.EQ.LIM1) RETURN
CALL RFT3(X1,R)
X2(1,1) = X1(1,1)*H(1,1)
X2(2,1) = X1(2,1)*H(2,1)
DO 4 I = 2,N1
X2(1,I) = X1(1,I)*H(1,I) - X1(2,I)*H(2,I)
X2(2,I) = X1(1,I)*H(2,I) + X1(2,I)*H(1,I)
4 CONTINUE
CALL RFT4(X2,R)
5 CONTINUE
RETURN
END

```

Фиг. 7.25. Программа для выполнения свертки по методу перекрывания с накоплением действительных данных, записанных в памяти в виде массива  $X$  длиной «LEN».

На фиг. 7.25 приведен текст подпрограммы FILTR, которая выполняет свертку по методу перекрытия с накоплением. Подпрограмма считывает входной массив  $X$  заданной длины и свертывает его с заданной импульсной характеристикой АН длиной

$$N = 2^R.$$

Длина  $L$  ненулевой части импульсной характеристики должна выбираться в соответствии с данными табл. 7.1. Импульсная характеристика и входные данные являются действительными последовательностями, так что подпрограмма FILTR обеспечивает эффективный метод обработки большого числа встречаемых на практике функций, подвергаемых цифровой фильтрации.

Теперь можно сравнить быстродействие выполнения свертки по методу накопления с перекрытием или по методу накопления со сложением с выполнением свертки во временной области на основе формулы (7.29). Предположим, что необходимо выполнить свертку длинной последовательности из  $M$  действительных отсчетов с действительной импульсной характеристикой длиной  $L$ . При этом  $M \gg L$ .

При использовании формулы (7.29) необходимо выполнить  $ML$  действительных умножений. Если применяется метод преобразований, то согласно фиг. 7.24, при каждом преобразовании и взвешивании обрабатываются  $N-L+1$  отсчетов, а всего преобразований и взвешиваний должно быть  $M/(N-L+1)$ , для того чтобы получить свертку всех  $M$  отсчетов. Поскольку все преобразования являются  $N$ -точечными над действительными данными и на каждом шаге нужно выполнить два преобразования и одно  $N$ -точечное взвешивание действительных чисел, то общее число действительных умножений для выполнения свертки в частотной области равно

$$\frac{M}{N-L+1} [2N \log_2(N) + 1].$$

Из табл. 7.1 видно, что при малых значениях  $N$  выполняется соотношение  $L \approx N/5$ . Следовательно, при использовании метода преобразований можно приблизительно найти число действительных умножений по формуле

$$\frac{5M}{4} [2 \log_2(N) + 1],$$

а при работе во временной области — по формуле

$$\frac{MN}{5}.$$

Сравнение этих двух формул показывает, что метод преобразований позволяет получить результаты быстрее, если  $N \geq 128$ . Бо-

лее того, с увеличением  $N$  выигрыш в быстродействии возрастает. Например, если  $N=4096$ , метод преобразований примерно в 30 раз «быстрее» прямого метода.

### 7.11. Оценка энергетического спектра

В разд. 7.2.6 энергетический спектр последовательности  $x(k)$ , имеющей ДПФ  $X(n)$ , был определен как последовательность

$$P(n) = |X(n)|^2, \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

Использование этого энергетического спектра для представления бесконечных временных последовательностей имеет недостаток, кратко рассмотренный в разд. 7.4. Он связан с тем, что спектр рассчитывается лишь по конечному массиву данных. Однако стало уже общепринятым рассматривать сглаженный (усредненный) по времени энергетический спектр.

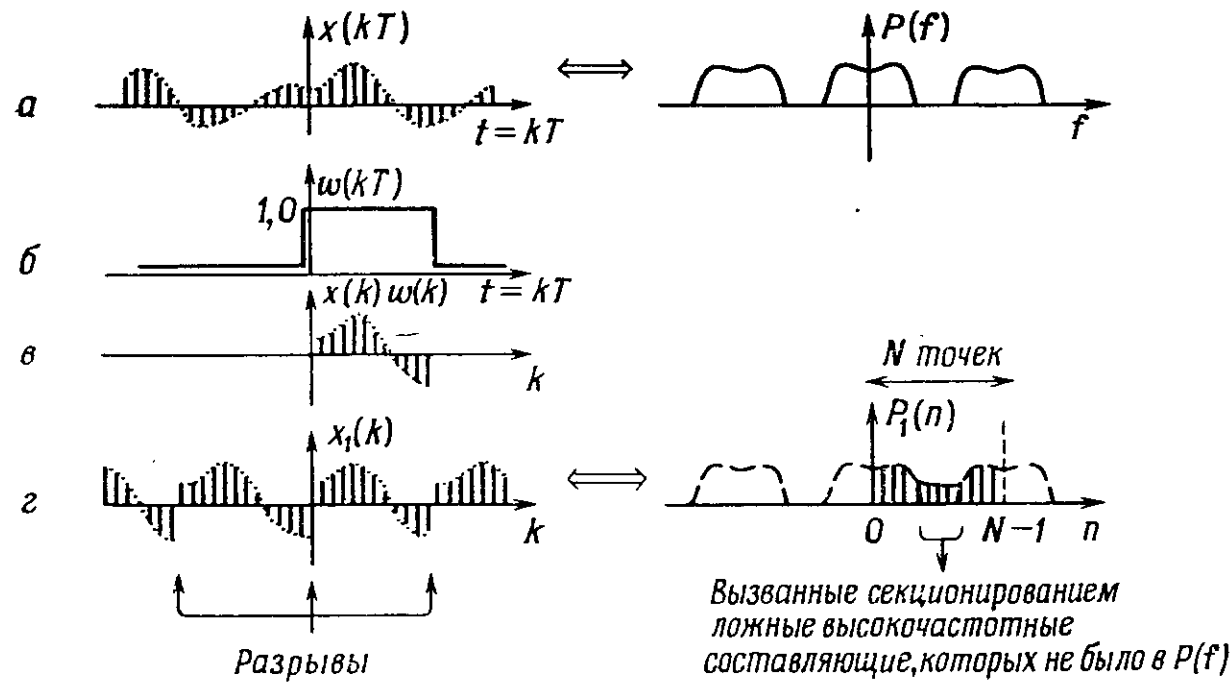
Полезно указать цели, которые мы ставим при оценке энергетического спектра. Будем исходить из того, что измеряемый спектр:

- низкочастотный, т. е. расположен в главной полосе;
- имеет заданное разрешение;
- обладает заданной степенью статистической устойчивости.

Первое из этих условий вполне обоснованно, поскольку любой спектр, расположенный вне главной полосы (его обычно называют полосовым), можно привести к низкочастотному, применяя подходящие частотные преобразования. Далее, секционирование длинной записи с целью выполнения ДПФ, которое необходимо для расчета  $A(n)$  и, следовательно,  $P(n)$ , приводит к появлению ложных спектральных составляющих. Секционирование эквивалентно умножению исходной временной последовательности (фиг. 7.26, а) на прямоугольное «окно» (фиг. 7.26, б), пропускающее только  $N$  отсчетов (фиг. 7.26, в). Следовательно, «истинный» спектр временной последовательности свертывается с преобразованием Фурье от прямоугольной функции. В результате рассчитанный спектр может быть лишь аппроксимацией истинного (фиг. 7.26, г).

Нежелательный эффект секционирования можно ослабить, если вместо прямоугольного использовать другое временное окно. Главное требование при этом состоит в том, чтобы на концах выделяемой секции окно не имело разрывов. Примером используемой в спектральном анализе функции окна, имеющей простую форму записи и удобной в использовании, является

$$w(k) = 0,5 [1 + \cos(2\pi k/(N-1))], \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$



Фиг. 7.26. Появление ложных высокочастотных составляющих спектра при секционировании.  
 а — бесконечная последовательность данных; б — прямоугольное окно; в — отрезок, взятый из исходной последовательности; г — периодическое продолжение отрезка.

Можно показать, что умножение на эту функцию соответствует интерполяции спектральных составляющих по формуле

$$X_1(n) = -0,25X(n-1) + 0,5X(n) - 0,25X(n+1).$$

Таким образом, вместо  $P_{xx}(n)$  получим

$$P_1(n) = |X_1(n)|^2, \quad n=0, 1, \dots, N-1,$$

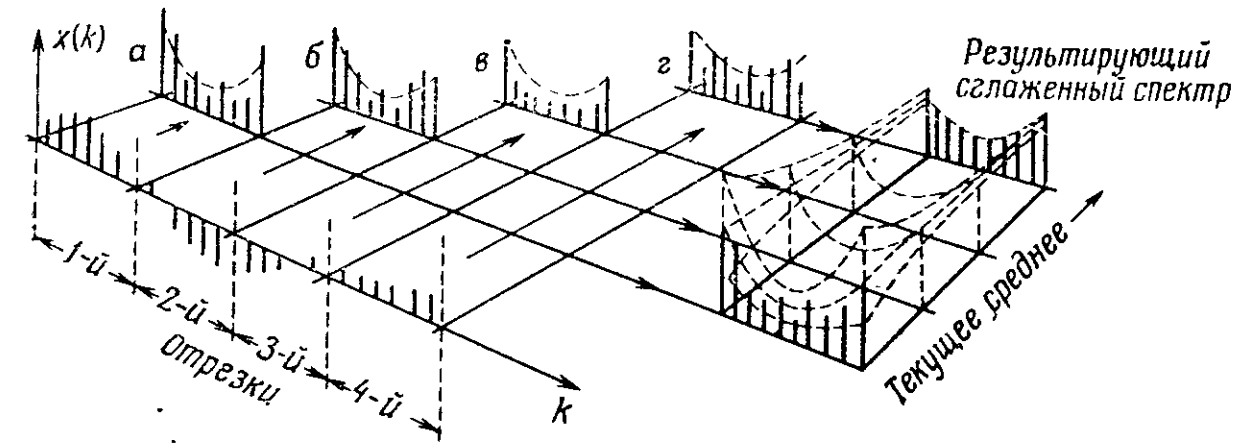
причем

$$x_1(k) = x(k)w(k), \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

Второе условие, состоящее в том, что энергетический спектр должен иметь заданное разрешение, можно понимать следующим образом. Имеется дискретизованная функция с периодом дискретизации, выбранным согласно теореме отсчетов. Тогда в соответствии с этой теоремой анализу должны подлежать массивы последовательных отсчетов функции. Последовательность из  $N$  отсчетов будет иметь длительность  $NT$  секунд и может быть использована для вычисления спектра с разрешением по частоте  $1/NT$  Гц. Поскольку  $T$  фиксировано, то, выбирая  $N$ , можно получить нужное разрешение.

Третье условие, касающееся статистической устойчивости, связано с тем, что анализируются отрезки данных длиной  $N$ , взятых из одной исходной последовательности  $P_1(n)$ . Статистическая устойчивость является самостоятельным критерием по отношению

к разрешению и секционированию. Один из простых способов добиться устойчивости состоит в усреднении нескольких спектров, полученных для последовательных  $N$ -точечных отрезков исходной последовательности. Такая операция иллюстрируется на фиг. 7.27.



Фиг. 7.27. Сглаживание энергетического спектра.  
 а, б, в, г — энергетические спектры, полученные соответственно для 1, 2, 3 и 4-го отрезков временной последовательности.

```

SUBROUTINE WKIN(R)
C   DIMENSIONS OF ARRAYS MUST BE AX(2,M/2),BX(2,M/4)
C   AND X(M) WHERE M = 2**R AND R IS SUITABLY CHOSEN
C   TO DETERMINE THE LENGTH OF THE DATA STRING TO
C   BE ANALYSED.
C   THE EQUIVALENCE STATEMENT MUST HAVE THE FORM:
C   EQUIVALENCE (X(1),AX(1,1)),(X(M/2 + 1),BX(1,1))
C   THE POWER SPECTRUM IS RETURNED IN THE FIRST HALF OF X
C   THE A.C.F. IS RETURNED IN THE SECOND HALF OF X
C   THE POWER SPECTRUM IS A REAL M/2 POINT FUNCTION
C   THE A.C.F. IS A REAL M/4 POINT FUNCTION
C   DIMENSION AX(2,64),BX(2,32)
COMMON X(128)
EQUIVALENCE (X(1),AX(1,1)),(X(65),BX(1,1))
INTEGER R
R = R - 1
N = 2**R
N1 = N/2
CALL RFT3(AX,R)
DO 1 I = 1,N
X(I) = AX(1,I)**2 + AX(2,I)**2
1 CONTINUE
DO 2 I = 1,N
X(I + N1) = X(I)
2 CONTINUE
R = R - 1
CALL RFT4(BX,R)
RETURN
END

```

Фиг. 7.28. Программа для вычисления энергетического спектра и автокорреляционной функции действительных временных рядов.

Длинная последовательность разбивается на смежные  $N$ -точечные отрезки, и для каждого из них вычисляется энергетический спектр. По мере увеличения числа усредняемых спектров спектральные составляющие все меньше отличаются от «идеальных» значений, которые были бы получены при бесконечном числе усредняемых спектров.

Следует отметить, что увеличение  $N$  не приводит к более устойчивому спектру в смысле уменьшения дисперсии вычисленного спектра относительно «идеального». Это объясняется тем, что, хотя время анализа увеличивается при удлинении записи, количество вычисляемых спектральных составляющих возрастает.

Вопросами спектрального анализа занимался ряд исследователей; более глубокое их освещение можно найти в работах [9—11].

На фиг. 7.28 приведен текст простой подпрограммы WKIN, которая позволяет эффективно вычислять энергетический спектр и автокорреляционную функцию действительных временных рядов последовательностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bracewell R., The Fourier Transform and its Applications. McGraw-Hill, N. Y., 1965.
2. Singleton R. C., A Short Bibliography of the Fast Fourier Transform, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-17, № 2, 166 (1969).
3. Bergland G. D., Fast Fourier Transform Hardware, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-17, № 2, 166 (1969).
4. Cooley J. W., Tukey J. W., An Algorithm for Machine Computation of Complex Fourier Series, *Math. of Comp.*, 19, 297—301 (1965).
5. Brigham E. O., Morrow R. E., The Fast Fourier Transform, *IEEE Spectrum*, 4, 63—70 (1967); есть русский перевод: Бригхэм Э., Морроу Р., Быстрое преобразование Фурье, *ТНЭЭР*, 55, № 10, 21—29 (1967).
6. Cochran W. T. et al., What is the Fast Fourier Transform?, *Proc. IEEE*, 55, 1664—1674 (1967); есть русский перевод: Кокрен У. и др., Что такое быстрое преобразование Фурье?, *ТНЭЭР*, 55, № 10, 7—17 (1967).
7. Singleton R. C., A Method of Computing the Fast Fourier Transform, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-15, 91—98 (1967).
8. Helms H. D., Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Difference Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-15, 85—90 (1967).
9. Bingham C., Godfrey M. D., Tukey J. W., Modern Techniques of Power Spectral Estimation, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-15, 56—65 (1967).
10. Welch P. D., The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-15, 70—73 (1967).
11. Richards P. I., Computing Reliable Power Spectra, *IEEE Spectrum*, 14, 83—90 (1967).

## ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

Р. Богнер

### 8.1. Введение

Излагаемый в этой главе метод позволяет получать фильтры со строго линейными фазовыми характеристиками, которые удобно описывать в частотной области и просто программировать при моделировании на ЦВМ. По сравнению с большинством рекурсивных фильтров они требуют большей памяти, но во многих случаях память удается использовать одновременно для нескольких фильтров.

Эти фильтры близки по своим свойствам к фильтрам, синтезируемым методом дискретного преобразования Фурье. Как и нерекурсивные фильтры, они имеют импульсную характеристику конечной длительности.

Преимущества арифметики с комплексными числами особенно ощутимы при разработке цифровых фильтров методом частотной выборки.

### 8.2. Сущность метода

Этот метод применим как к аналоговым, так и к цифровым фильтрам, но в последнем случае его легче реализовать на практике.

Рассмотрим дискретизацию колебаний во временной области. Непрерывный сигнал с ограниченной в пределах  $\pm W$  Гц полосой может быть точно восстановлен по его выборкам, взятым через интервалы  $1/2 W = T$  секунд. Частотная характеристика идеального интерполирующего фильтра при этом постоянна в пределах от  $-W$  до  $W$  Гц и равна нулю вне этих пределов. Соответствующая импульсная характеристика имеет вид

$$h(t) = 2W \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T}$$

Каждая выборка сигнала является амплитудой такой импульсной характеристики. Фильтры на основе частотной выборки описываются аналогичными соотношениями, но в частотной области, т. е. импульсная характеристика, ограниченная пределами  $\pm \tau/2$  секунд,

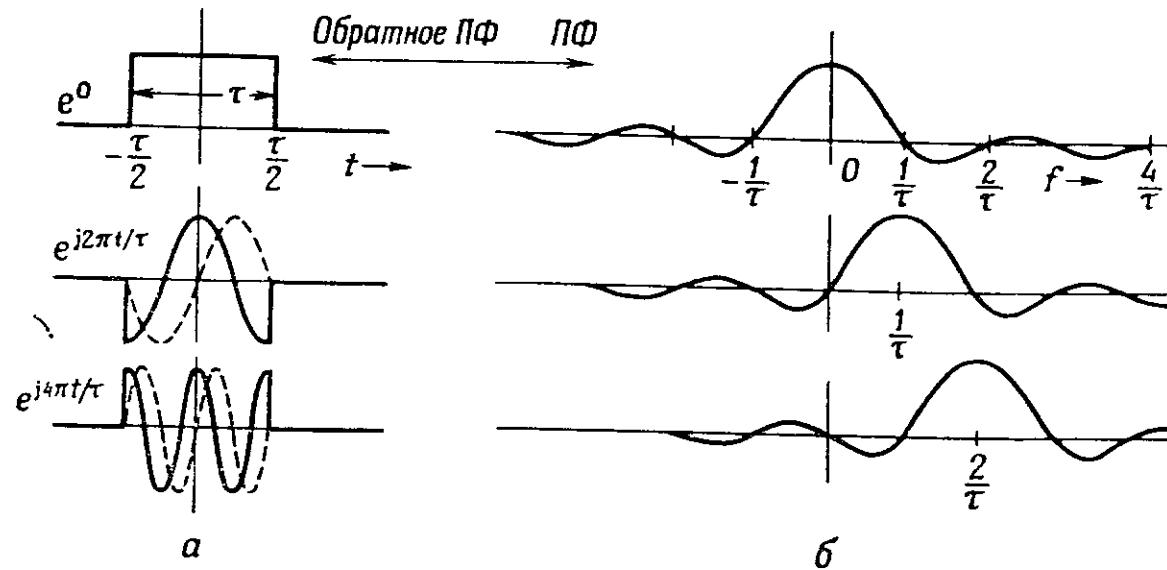


представляется частотными выборками, взятыми с интервалами  $1/\tau$  Гц. На фиг. 8.1 показаны элементарные частотные характеристики с максимумами на центральных частотах  $0; 1/\tau$  и  $2/\tau$  Гц, а также соответствующие им импульсные характеристики

$$e^{j(k2\pi t)/\tau}, \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \left\} \longleftrightarrow \tau \frac{\sin \pi (f - k/\tau) \tau}{\pi (f - k/\tau) \tau} \quad (8.1)$$

0 при других  $t$ .

Графики на фиг. 8.1 построены для  $k=0, 1, 2$ .



Фиг. 8.1.

$a$  — элементарные импульсные характеристики;  $b$  — элементарные частотные характеристики.

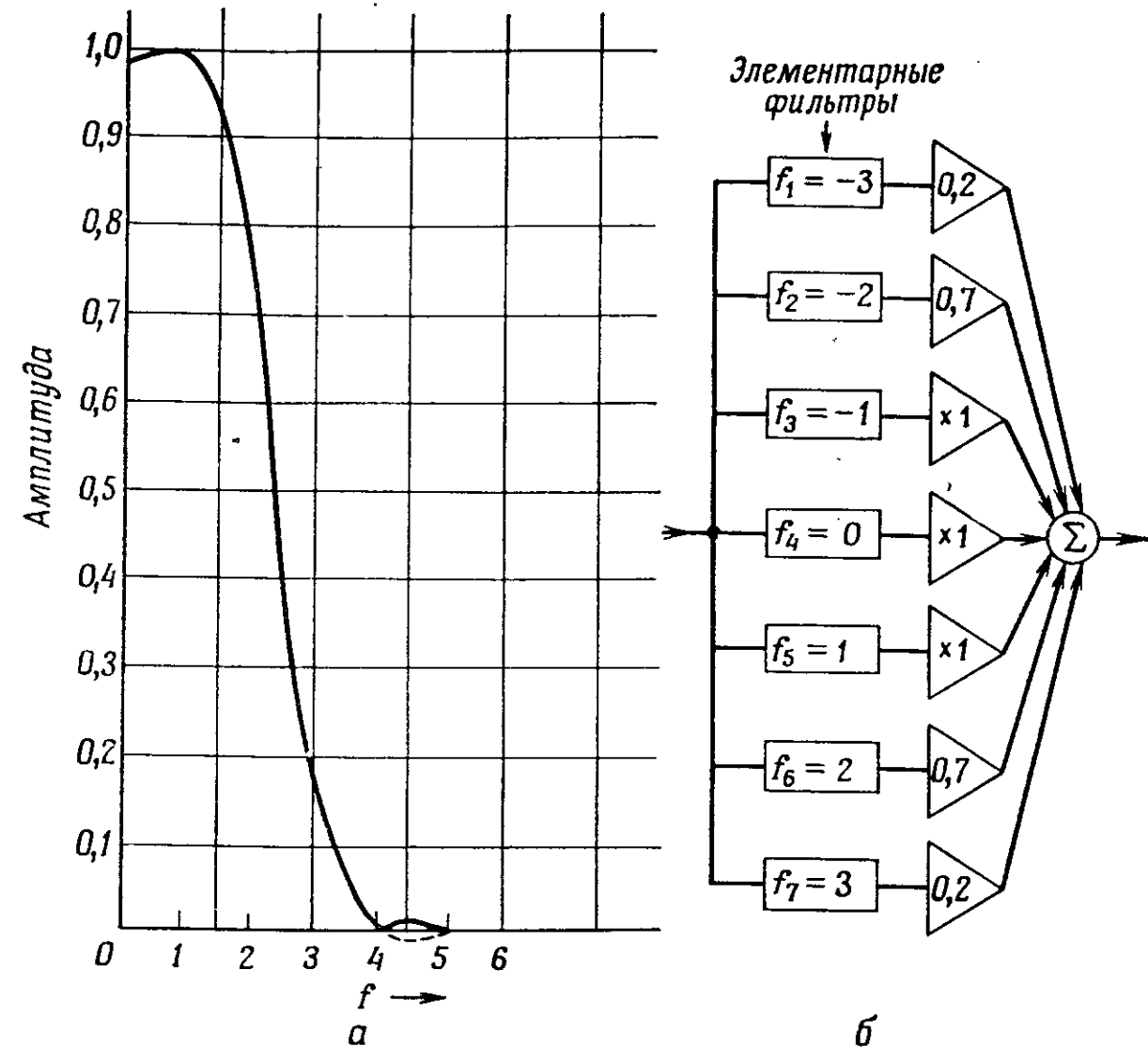
Заметим, что каждая из элементарных частотных характеристик равна нулю на всех частотах дискретизации, за исключением собственной центральной частоты. Благодаря этому свойству частотная характеристика, составленная из суммы элементарных характеристик, в каждой точке дискретизации определяется только одним из заданных чисел — величиной соответствующей частотной выборки. Результирующая частотная характеристика системы имеет вид [1]

$$H(f) = \sum_k A_k \tau \frac{\sin \pi (f - k/\tau) \tau}{\pi (f - k/\tau) \tau} \quad (8.2)$$

а соответствующая ей импульсная характеристика равна

$$h(t) = \sum_k A_k e^{jk2\pi t/\tau} \quad (8.3)$$

при  $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$ .



Фиг. 8.2.

$a$  — частотная характеристика;  $b$  — блок-схема системы.

Типичная результирующая частотная характеристика, соответствующая системе на фиг. 8.2,  $b$ , показана на фиг. 8.2,  $a$ . Каждый блок на схеме представляет систему с характеристиками (8.1). Значения  $A$  в этом примере для заданных  $k$  равны

$$k = -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3,$$

$$A = 0,2 \quad 0,7 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0,7 \quad 0,2.$$

При этих значениях  $A$  импульсная характеристика (8.3) равна нулю при  $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$ .

### 8.3. Реализация элементарных характеристик

Наиболее простой является импульсная характеристика в том случае, если она действительная. Большинство фильтров на основе частотной выборки имеет действительные элементарные характеристики  $h_k(t)$ :

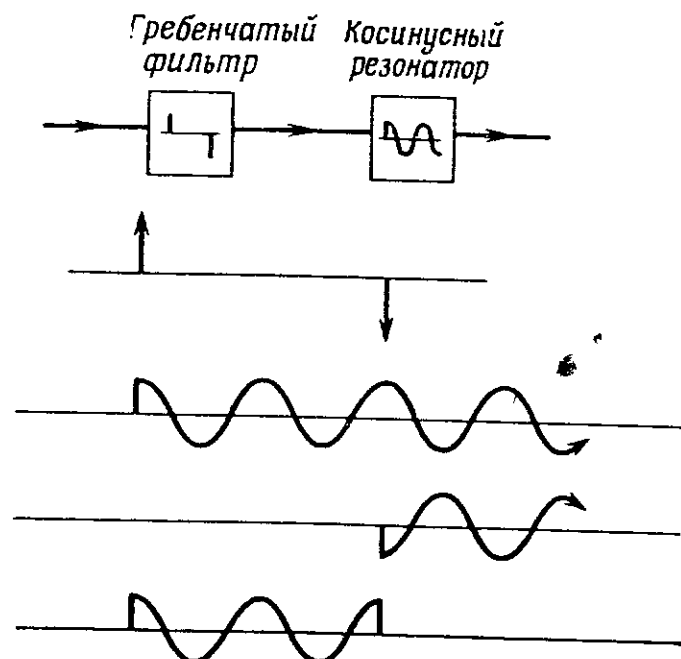
$$h_k(t) = \begin{cases} \cos \frac{k2\pi t}{\tau}, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (8.4)$$

На фиг. 8.3 показан гребенчатый фильтр (смысл термина пояснен ниже), импульсная характеристика которого состоит из единичных импульсов: положительного при  $t=0$  и отрицательного при  $t=\tau$ . За этим фильтром следует резонатор с импульсной характеристикой  $\cos k 2\pi t/T, t \geq 0$ . Как показано на фиг. 8.3, отрицательный импульс гребенчатого фильтра возбуждает косинусный резонатор в противофазе по отношению к отклику на положительный импульс, в результате чего импульсная характеристика комбинации фильтров имеет вид косинусоидального импульса.

Косинусоидальные импульсные характеристики очень просто записать в экспоненциальной форме

$$2 \cos \frac{k2\pi t}{\tau} = e^{jk2\pi t/\tau} + e^{-jk2\pi t/\tau}.$$

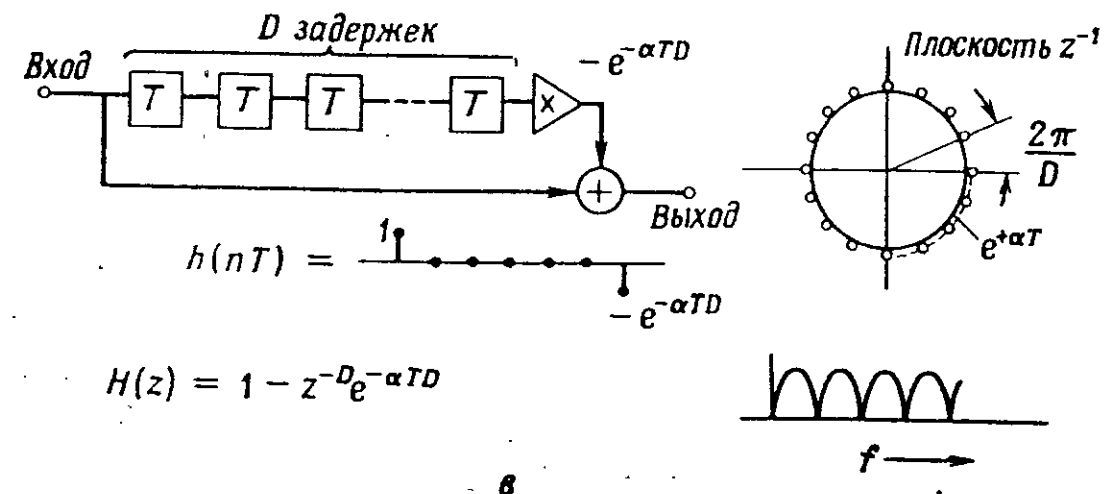
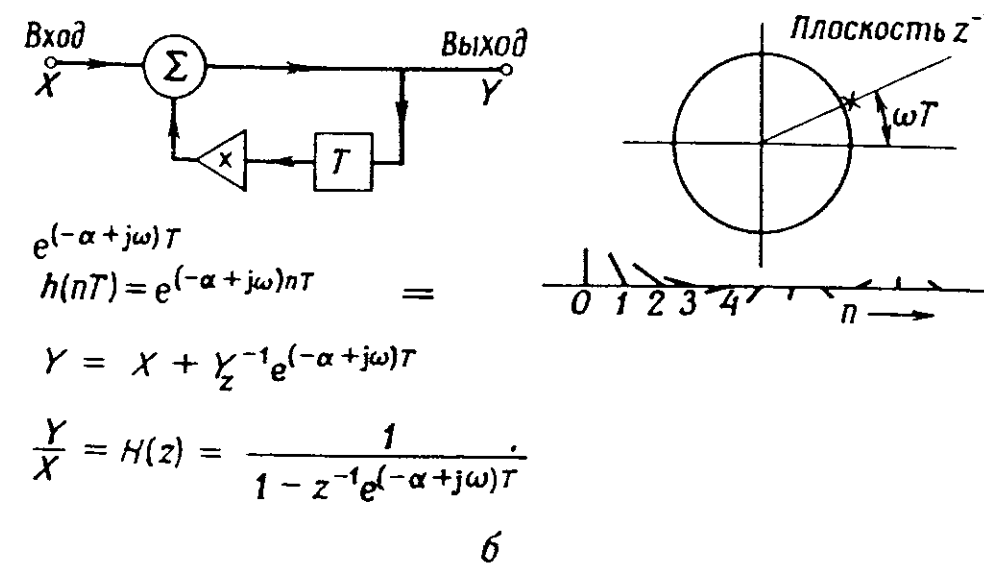
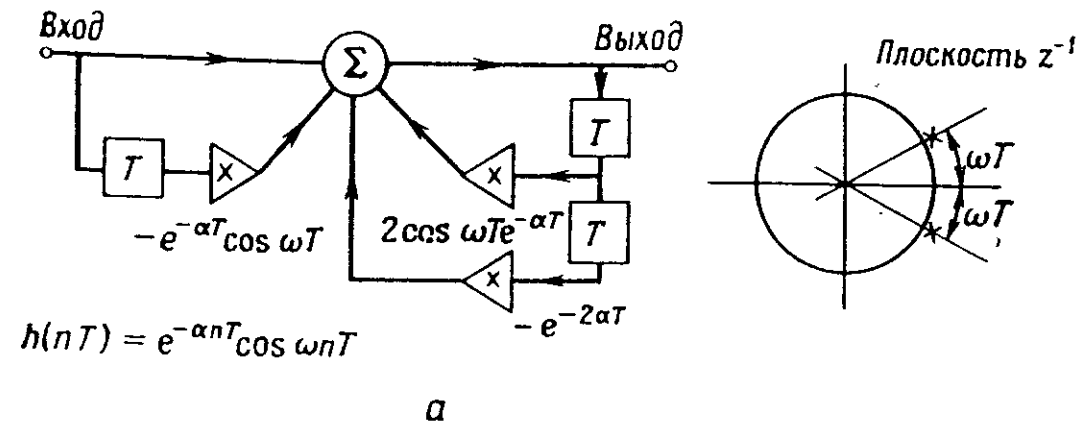
Отсюда видно, что отсчеты частотной характеристики на отрицательных и положительных частотах однозначно связаны между собой, что всегда имеет место при действительных импульсных характеристиках. Необходимым условием физической реализуемости является то, что импульсная характеристика должна начинаться не при  $t=-\tau/2$ , а в момент  $t=0$ , что соответствует задержке во



Фиг. 8.3. Получение элементарной импульсной характеристики.

всей системе. Все элементарные характеристики должны иметь одинаковое запаздывание  $\tau/2$ .

Поскольку все элементарные характеристики симметричны относительно средней точки, общая импульсная характеристика также будет симметричной, а фазовая характеристика — строго линейной.



Фиг. 8.4.

а — косинусный резонатор; б — комплексный резонатор; в — гребенчатый фильтр.

На фиг. 8.4 показаны некоторые реальные схемы, используемые для построения фильтров. Косинусный резонатор является рекурсивным фильтром второго порядка с полюсами около единичной окружности (в плоскости  $z$ ). Комплексный резонатор [2] имеет дискретизованную импульсную характеристику вида

$$1, e^{(j\omega_k - \alpha)T}, e^{2(j\omega_k - \alpha)T}, e^{3(j\omega_k - \alpha)T}, \dots,$$

где  $\omega_k = k2\pi/\tau$ . Ее можно получить, если подать на вход резонатора единичный импульс. При каждом цикле вычисления выходной отсчет умножается на  $e^{(j\omega_k - \alpha)T}$ . Постоянная затухания  $\alpha$  является обычно небольшой положительной величиной, обеспечивающей устойчивость фильтра при неточных коэффициентах. Результирующая передаточная функция  $k$ -го резонатора имеет вид

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{(j\omega_k - \alpha)T}}. \quad (8.5)$$

Комплексный резонатор удивительно прост для программирования. Это всего одна строка на ФОРТРАНе:

$$Y = Y * B + X,$$

где  $X$  и  $Y$  — входной и выходной сигналы, а  $B = e^{(j\omega_k - \alpha)T}$ . Если требуются лишь косинусные характеристики, на выходе берется только действительная часть  $Y$ .

Гребенчатый фильтр требует значительного объема памяти, что не имеет особого значения при работе на ЦВМ и не очень существенно в том случае, когда один гребенчатый фильтр используется со многими резонаторами или фильтрами, образующими единую систему.

#### 8.4. Полная структура фильтра

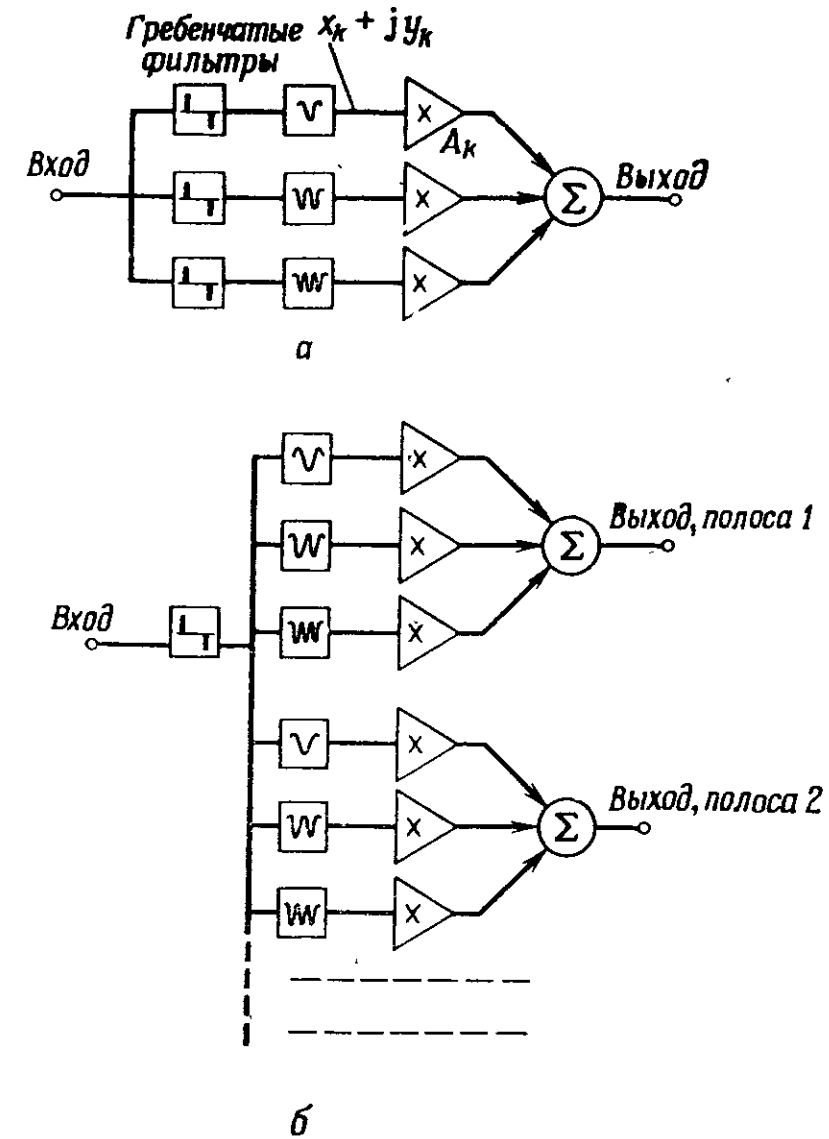
На фиг. 8.5 показано, каким образом можно использовать один гребенчатый фильтр одновременно с несколькими резонаторами при создании одного или ряда фильтров на основе частотной выборки.

#### 8.5. Интерпретация с помощью нулей и полюсов

Как и все системы с ограниченной импульсной характеристикой, гребенчатый фильтр имеет в передаточной функции только нули. Они находятся там, где его передаточная функция

$$H(z) = 1 - z^{-D} \quad (8.6)$$

равна нулю. Здесь  $DT = \tau$  — задержка гребенчатого фильтра. Таким образом, нули расположены равномерно по частоте (откуда



Фиг. 8.5.

и название «гребенчатый» фильтр) в точках  $z = \sqrt[D]{1}$  (фиг. 8.4), т. е. при

$$z = e^{mj2\pi/D}, \quad m = 0, 1, \dots, D-1. \quad (8.7)$$

При пренебрежимо малом затухании полюсы резонаторов (комплексных) находятся в точках (фиг. 8.4)

$$z = e^{jk2\pi T/\tau} = e^{jk2\pi T/DT} = e^{jk2\pi/D} \quad (8.8)$$

и, таким образом, компенсируют часть нулей. Это похоже на то, как если бы сначала всю характеристику «прибили гвоздями» к оси частот через равные интервалы, а затем вынули некоторые «гвозди». Можно показать, что некомпенсированные нули образуют комплексно-сопряженные пары и поэтому их влияние взаимно компенсируется, но такие детали редко имеют существенное значение.

### 8.6. Связь с дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) [2]

Рассмотрим комплексные резонаторы при  $\alpha=0$ . Отклик  $k$ -го резонатора в моменты  $nT$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) на единичный импульс, приходящий в момент  $mT$ , равен  $e^{j\omega_k(n-m)T}$ . Следовательно, отклик  $k$ -го резонатора на сигнал  $s(mT)$  ( $m=\dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n$ ) в момент  $nT$  будет иметь вид (фиг. 8.5, а)

$$\begin{aligned} x_k(nT) + jy_k(nT) &= \sum_{m=-\infty}^n s(mT) e^{j\omega_k(n-m)T} = \\ &= e^{j\omega_k nT} \sum_{m=-\infty}^n s(mT) e^{-j\omega_k mT}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где  $\omega_k = 2\pi k/DT = 2\pi k/\tau$ .

Если резонатору предшествует гребенчатый фильтр, то наличие в его импульсной характеристике отрицательного импульса, следующего за положительным через  $DT$  секунд, приводит к появлению второй суммы в выражении (8.9):

$$\begin{aligned} x_k(nT) + jy_k(nT) &= e^{j\omega_k nT} \sum_{m=-\infty}^n s(mT) e^{-j\omega_k mT} - \\ &- e^{j\omega_k nT} \sum_{m=-\infty}^n s[(m-D)T] e^{j\omega_k mT} = \\ &= e^{j\omega_k nT} \left[ \sum_{m=-\infty}^n s(mT) e^{-j\omega_k mT} - \right. \\ &\left. - \sum_{m=-\infty}^{n-D} s(mT) e^{-j\omega_k mT} e^{-j\omega_k DT} \right]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Но  $DT$  — целое число, кратное периоду  $2\pi/\omega_k$ , так что  $e^{-j\omega_k DT} = 1$ . Следовательно,

$$x_k(nT) + jy_k(nT) = e^{j\omega_k nT} \sum_{m=n-D+1}^n s(mT) e^{-j\omega_k mT}. \quad (8.11)$$

Это выражение можно рассматривать как колебание  $e^{j\omega_k nT}$  с амплитудой, равной коэффициенту ДПФ сигнала  $s(mT)$  на частоте  $\omega_k$ , вычисленному по последним  $D$  выборкам. На выходе фильтра на основе частотной выборки с учетом весовых коэффициентов  $A_k$  имеем

$$\begin{aligned} x(nT) + jy(nT) &= \sum_k A_k [x_k(nT) + jy_k(nT)] = \\ &= \sum_k e^{j\omega_k nT} \left[ A_k \sum_{m=n-D+1}^n s(mT) e^{-j\omega_k mT} \right]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Полученное выражение описывает синтез методом преобразования Фурье (обратного ДПФ) частотной функции

$$A_k \sum_{m=n-D+1}^n s(mT) e^{-j\omega_k mT}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (8.13)$$

которую можно рассматривать как произведение текущего ДПФ от  $s(mT)$  и ДПФ, значения которого на частотах  $\omega_k$  равны  $A_k$ .

Таким образом, фильтрация методом частотной выборки эквивалентна фильтрации методом Фурье-преобразования с последующим умножением на частотную характеристику фильтра и обратным преобразованием.

До сих пор рассматривалась только действительная частотная характеристика фильтра ( $A_k, k=1, 2, \dots$ ). Однако нет причин, в силу которых  $A_k$  не могли быть комплексными, что позволило бы иметь произвольную фазовую характеристику фильтра. Комплексные значения  $A_k$  могут быть заданы в декартовых или полярных координатах, причем последние предпочтительнее для задания амплитуды и фазы. В случае комплексных  $A_k$  система не является линейно-фазовой, так как ее импульсная характеристика несимметричная.

### 8.7. Приближения, связанные с дискретизацией

В разд. 8.2 были рассмотрены элементарные частотные характеристики аналоговой системы (случай бесконечной частоты дискретизации). Для дискретных систем передаточная функция элементарного фильтра равна произведению передаточных функций комплексного резонатора [выражение (8.5)] и гребенчатого фильтра [выражение (8.6)]:

$$H_k(z) = \frac{1 - z^{-D}}{1 - z^{-1} e^{j2\pi k/D}} = \frac{1 - e^{j2\pi k} z^{-D}}{1 - e^{j2\pi k/D} z^{-1}},$$

т. к.  $e^{j2\pi k} = 1$ . Чтобы получить частотную характеристику, подставим  $z = e^{j\omega T} = e^{j2\pi f T}$ :

$$H_k(j) = \frac{e^{-j\pi(f-f_k)DT} \{ e^{j\pi(f-f_k)DT} - e^{-j\pi(f-f_k)DT} \}}{e^{-j\pi(f-f_k)T} \{ e^{j\pi(f-f_k)T} - e^{-j\pi(f-f_k)T} \}},$$

где  $f_k = kDT$ . Отсюда

$$|H(f)| = \left| \frac{\sin \pi(f-f_k)DT}{\sin \pi(f-f_k)T} \right|. \quad (8.14)$$

Система обладает строго линейной фазовой характеристикой и конечной задержкой  $DT/2$ . Модуль частотной характеристики (8.14) заменяет здесь идеальную характеристику (8.1) и отличается от

нее в основном знаменателем. Если  $\pi(f-f_k)T$  мало, т. е. разность  $f$  и  $f_k$  мала по сравнению с  $1/2T$  (наивысшей возможной частотой сигнала), то

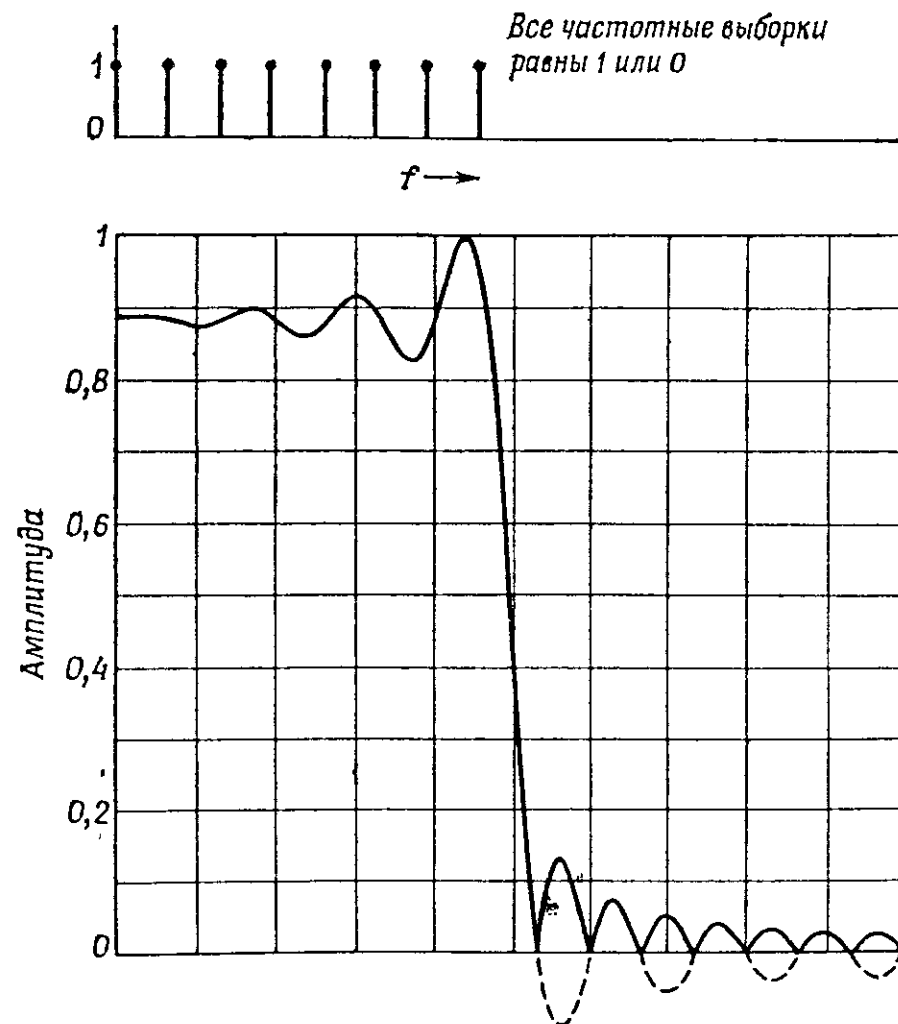
$$\sin \pi(f-f_k)T \rightarrow \pi(f-f_k)T,$$

и обе функции почти не отличаются. Это происходит, когда  $T \rightarrow 0$ , т. е. при непрерывной (аналоговой) фильтрации.

Отличие от аналогового случая связано исключительно с появлением при дискретизации повторяющихся полюсов. Для аналогового варианта знаменатель  $\pi(f-f_k)T$  содержит только один полюс при  $f=f_k$ .

### 8.8. Явление Гиббса и частотная характеристика

Синтезируемая частотная характеристика должна в точности соответствовать заданной в точках частотных выборок, но между ними она может проходить достаточно произвольно (фиг. 8.6). Та-



Фиг. 8.6.

кое поведение связано с явлением Гиббса, которое описывает выбросы функции скачка, представленной усеченным рядом Фурье (т. е. ограниченной по полосе). Соответствующая весовая обра-

ботка характеристик на срезах может привести к сглаживанию пульсаций в полосах пропускания и непропускания (фиг. 8.2, а); однако получить для нее математические соотношения в явном виде не удастся. Нетрудно связать подавление боковых лепестков с компенсацией «хвостов» функций  $\sin x/x$ , но такой критерий не будет универсальным. Эта проблема в несколько другом виде встречалась и раньше в главах, посвященных нерекурсивным фильтрам и преобразованиям Фурье.

В последнее время [3] появились методы автоматической оптимизации (в рассматриваемом случае метод линейного программирования), оказавшиеся очень эффективными для расчета коэффициентов с целью подавления боковых лепестков. В гл. 11 даны общие идеи методов оптимизации.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Rader C. M., Gold B., Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain, *Proc. IEEE*, 55, № 2, 149 (1967); есть русский перевод: Рэйдер Ч., Голд Б., Методы расчета цифровых фильтров в частотной области, *ТНЭЭР*, 55, № 5 (1967).
2. Bogner R. E., Frequency Sampling Filters — Hilbert Transforms and Resonators, *BSTJ*, 48, № 3, 501 (1969).
3. Rabiner L. R., Gold B., McGonegal C. A., The Approximation Problem for Non-recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-18, 83—106 (1970).

## ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

П. Линн

### 9.1. Введение

В предыдущих главах были рассмотрены методы фильтрации дискретизованных сигналов. На практике часто бывает нелегко выбрать метод, наиболее подходящий для заданного частного случая, и, даже если принято решение синтезировать фильтр во временной области, остается неясным вопрос, какой фильтр следует использовать — рекурсивный или нерекурсивный. Обычно важным практическим критерием является объем вычислений, требуемых для выполнения фильтрации; при моделировании цифрового фильтра на универсальной вычислительной машине сокращение вычислений определяет возможность обработки входных данных в реальном времени. Однако независимо от того, выполняется ли фильтрация на вычислительной машине или с помощью специализированного оборудования, операции умножения требуют наибольших затрат времени и объема оборудования. Другими словами, сокращение вычислений зависит главным образом от степени минимизации числа умножений, требуемых для расчета очередного (отфильтрованного) выходного отсчета. Если, кроме того, коэффициенты, на которые умножаются выборки, — небольшие целые числа, то умножение значительно упрощается по сравнению со случаями, когда эти коэффициенты приходится представлять числами с плавающей запятой и 5—6 десятичными разрядами.

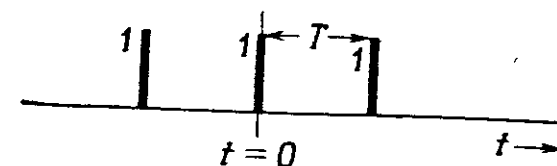
Часто использование рекурсивного фильтра приводит к значительному уменьшению требуемого числа умножений по сравнению со случаем использования нерекурсивного фильтра, имеющего аналогичную частотную характеристику. Однако коэффициенты, на которые умножаются выборки при рекурсивной фильтрации, приходится задавать с высокой точностью. Причина состоит в том, что рекурсивный фильтр имеет на плоскости  $z$  полюсы, которые обычно располагаются близко к единичной окружности, так что небольшая погрешность в значениях коэффициентов разностного уравнения может привести к перемещению этих полюсов за пределы единичной окружности и, как следствие, к неустойчивости фильтра (в этой главе вместо плоскости  $z^{-1}$  будет использоваться плос-

кость  $z$ , поэтому для обеспечения устойчивости фильтра полюсы должны располагаться внутри круга единичного радиуса). Но даже если не рассматривать проблему устойчивости, то, для того чтобы получить заданную частотную характеристику, полюсы фильтра должны быть расположены с достаточной точностью.

В настоящей главе рассматривается семейство цифровых рекурсивных фильтров, у которых коэффициенты всех умножителей представляют собой небольшие целые числа [1]. Будет показано, что это практически важное преимущество обеспечивается только после принятия достаточно серьезных ограничений на расположение полюсов и нулей фильтра в плоскости  $z$ . Эти ограничения дают еще одно преимущество: все фильтры этого семейства имеют идеально линейные фазовые характеристики, обеспечивая постоянную задержку для всех спектральных составляющих входного сигнала. Фактически эти фильтры можно рассматривать как частный случай фильтров на основе частотной выборки, описанных в гл. 8. Детальному анализу этих фильтров предшествует рассмотрение некоторых общих свойств цифровых фильтров с линейной фазовой характеристикой.

### 9.2. Цифровые фильтры с линейной фазовой характеристикой

Любой фильтр с импульсной характеристикой (называемой также весовой функцией), симметричной относительно момента  $t=0$  подачи единичного импульса, имеет чисто действительную частотную характеристику. Можно также показать, что фильтр с антисимметричной относительно  $t=0$  весовой функцией (в том смысле, что часть характеристики, расположенная слева от  $t=0$ , равна перевернутому зеркальному отражению ее правой половины) имеет чисто мнимую частотную характеристику; иначе говоря, на всех частотах он создает фазовый сдвиг 90 или 270°. Простой пример симметричной весовой функции приведен на фиг. 9.1. Соот-

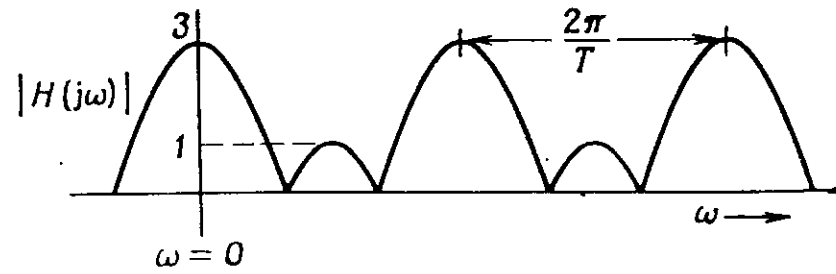


Фиг. 9.1. Простая симметричная весовая функция.

ветствующую ей частотную характеристику можно рассчитать, используя метод, описанный в гл. 3. В результате получим функцию

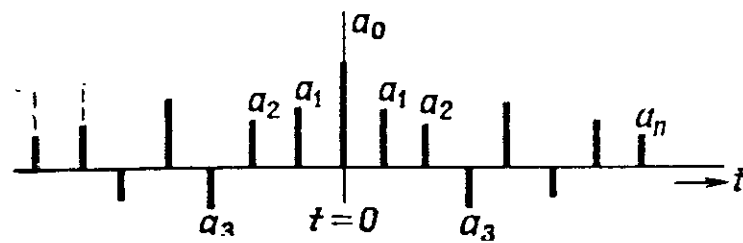
$$H(j\omega) = 1 + e^{-j\omega T} + e^{j\omega T} = 1 + 2 \cos \omega T,$$

являющуюся чисто действительной (фиг. 9.2). Отсюда следует, что любая весовая функция конечной длительности, симметричная от-



Фиг. 9.2. Модуль частотной характеристики, соответствующей весовой функции, изображенной на фиг. 9.1.

носителю  $t=0$ , приводит к действительной частотной характеристике, равной конечной сумме косинусов, включая постоянную составляющую. Таким образом, частотная характеристика, соответ-



Фиг. 9.3. Более сложная симметричная весовая функция.

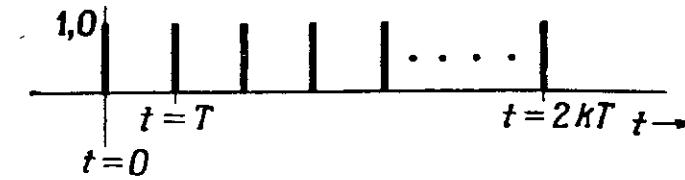
ствующая представленной на фиг. 9.3 весовой функции, имеет следующий вид:

$$H(j\omega) = a_0 + 2a_1 \cos \omega T + 2a_2 \cos 2\omega T + \dots + 2a_n \cos n\omega T. \quad (9.1)$$

Конечно, цифровой фильтр с импульсной характеристикой, начинающейся до момента  $t=0$ , физически неосуществим, поскольку его отклик на входной импульс опережает сам импульс. Однако его легко преобразовать в физически осуществимый, сдвинув импульсную характеристику по оси времени таким образом, чтобы она начиналась с момента  $t=0$  или позже. Это не повлияет на амплитудно-частотную характеристику, но превратит нулевую фазово-частотную характеристику исходного фильтра в линейную фазовую характеристику.

### 9.3. Рекурсивная реализация фильтров нижних частот с линейной фазовой характеристикой

Рекурсивная форма построения цифровых фильтров с симметричными весовыми функциями рассматриваемого типа приводит к сокращению объема вычислений. Другие преимущества рекурсивной формы связаны с использованием целых коэффициентов. Это положение легко проиллюстрировать на простом примере ве-



Фиг. 9.4. Весовая функция «скользящего среднего» с  $2k+1$  членами.

совой функции «скользящего среднего», показанной на фиг. 9.4, которая симметрична относительно  $t=kT$ . Передаточную функцию такого фильтра можно найти непосредственно по определению  $z$ -преобразования:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-2k} = \frac{1 - z^{-2k-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (9.2)$$

Функция  $H(z)$  равна нулю при  $(1 - z^{-2k-1}) = 0$ , т. е. она имеет  $2k+1$  нулей, равномерно распределенных по единичной окружности в плоскости  $z$ . Кроме нулей, она имеет в точке  $z=1$  простой полюс.

В полученном выражении для  $H(z)$  функции  $Y(z)$  и  $X(z)$  являются  $z$ -преобразованиями соответственно выходной и входной последовательностей, поэтому связывающему их соотношению

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + (1 - z^{-2k-1})X(z)$$

во временной области соответствует следующее разностное уравнение:

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-2k-1). \quad (9.3)$$

Отсюда следует, что разностное уравнение, содержащее только три члена, эквивалентно нерекурсивному фильтру скользящего среднего с весовой функцией, содержащей произвольное число членов. Если, например,  $k=5$ , то весовая функция содержит 11 членов, а фильтрация осуществляется с помощью разностного уравнения

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-11).$$

Весовая функция, расположение нулей и полюсов, а также частотная характеристика такого фильтра показаны на фиг. 9.5.

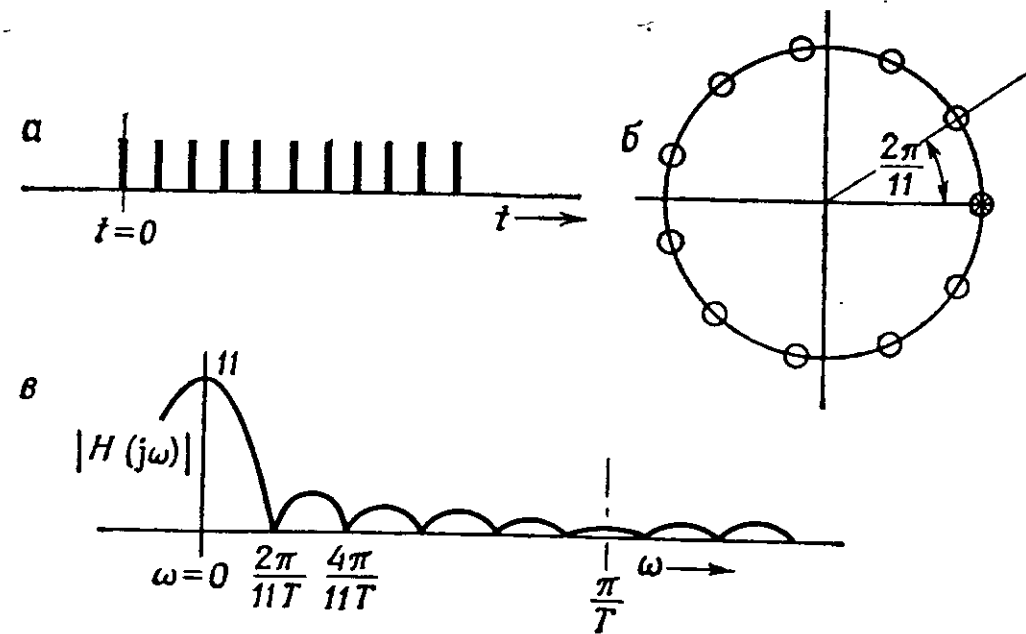
Перейдем к рассмотрению треугольной весовой функции, изображенной на фиг. 9.6. Используя формулу (9.2) и рассматривая треугольную весовую функцию как результат сложения совокупности сдвинутых последовательностей единичных отсчетов, получаем

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2k-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-1}(1 - z^{-2k+1})}{1 - z^{-1}} + \dots + \frac{z^{-k}(1 - z^{-1})}{1 - z^{-1}},$$

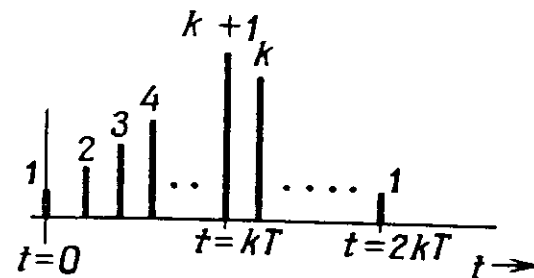
откуда

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-k-1})^2}{(1 - z^{-1})^2}.$$





Фиг. 9.5. Фильтр «скользящего среднего», весовая функция которого имеет 11 членов.  
 а — весовая функция; б — расположение нулей и полюсов в плоскости  $z$ ; в — модуль частотной характеристики.



Фиг. 9.6. Треугольная весовая функция, состоящая из  $2k+1$  члена.

Соответствующее разностное уравнение имеет вид

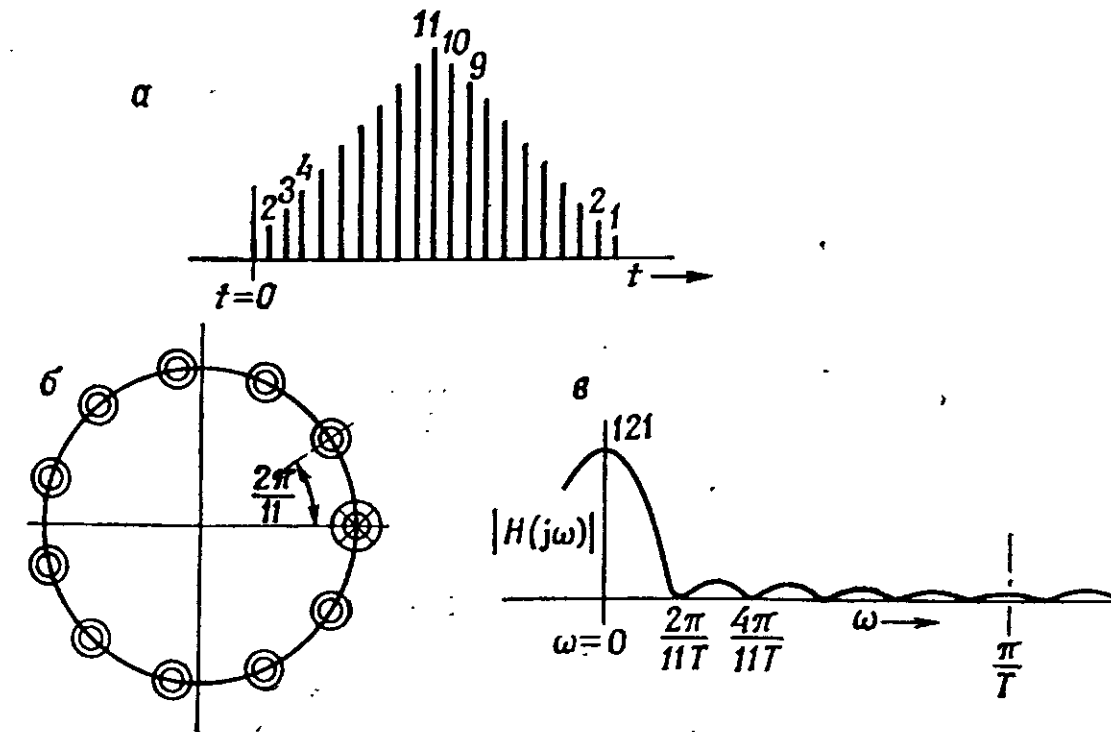
$$y(n) = -y(n-2) + 2y(n-1) + x(n-2k-2) - 2x(n-k-1) + x(n). \quad (9.4)$$

Этот результат показывает, что треугольную весовую функцию с произвольным числом членов можно получить, используя рекурсивный фильтр, разностное уравнение которого содержит 5 членов. Например,  $k=10$  соответствует треугольной весовой функции, содержащей 21 член, а передаточная функция такого фильтра равна

$$H(z) = \frac{(1-z^{-11})^2}{(1-z^{-1})^2}.$$

Она имеет 11 нулей 2-го порядка, равномерно расположенных по единичной окружности в плоскости  $z$ , а также полюс 2-го порядка

в точке  $z=1$ : Весовая функция, расположение нулей и полюсов и частотная характеристика фильтра показаны на фиг. 9.7. Этот



Фиг. 9.7. Фильтр с треугольной весовая функцией, имеющей 21 член.  
 а — весовая функция; б — расположение нулей и полюсов в плоскости  $z$ ; в — модуль частотной характеристики.

фильтр может быть реализован с помощью следующего разностного уравнения:

$$y(n) = -y(n-2) + 2y(n-1) + x(n-22) - 2x(n-11) + x(n).$$

Отметим, что нули и полюсы при  $k=10$  расположены так же, как и у рассмотренного ранее простого фильтра скользящего среднего (имеющего  $k=5$ ), но простые нули заменены на нули 2-го порядка и простой полюс в точке  $z=1$  на полюс 2-го порядка. Передаточная функция фильтра с треугольной весовой функцией, содержащей 21 член, равна квадрату передаточной функции цифрового фильтра скользящего среднего с 11 членами. Учитывая, что умножение в частотной области эквивалентно свертке во временной области, приходим к выводу, что, как и следовало ожидать, треугольная импульсная характеристика может быть получена путем свертки весовой функции фильтра скользящего среднего с этой же функцией.

В обоих рассмотренных фильтрах используются нули, равномерно расположенные по единичной окружности в плоскости  $z$ ; устранение одного из нулей путем введения совпадающего с ним полюса (или полюсов) и создает полосу пропускания фильтра. Вообще можно показать, что равномерное размещение нулей вдоль

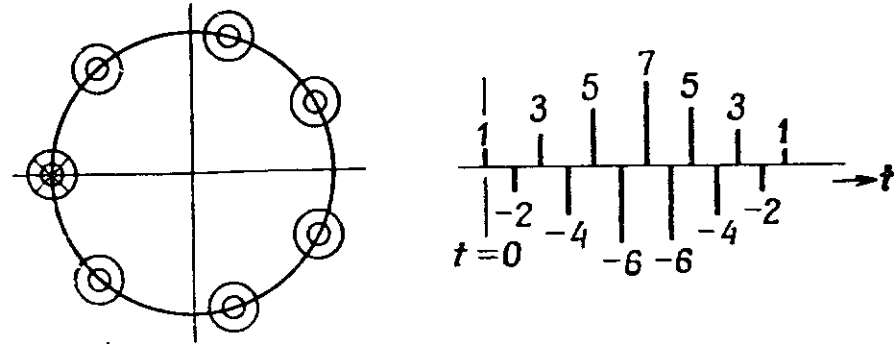
единичной окружности с последующим устранением одного или нескольких из них за счет введения совпадающих с ними полюсов приводит к рекурсивным фильтрам, преимуществами которых являются целые коэффициенты и линейные фазовые характеристики. При этом всегда сохраняется возможность возведения заданной передаточной функции в целую степень, что приводит к увеличению крутизны спада характеристики и уменьшению уровня боковых лепестков.

#### 9.4. Фильтры верхних частот и полосовые фильтры

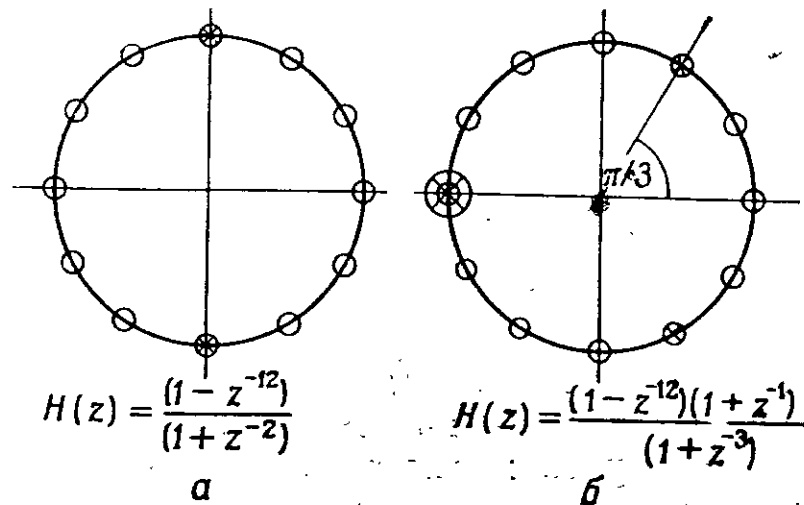
Методика размещения устраняющих нули полюсов на единичной окружности в точке  $z=1$  может быть модифицирована для построения фильтров верхних частот и полосовых фильтров. Фильтры верхних частот получаются при введении полюсов в точке  $z=-1$ . В качестве примера рассмотрим передаточную функцию вида

$$H(z) = \frac{(1+z^{-7})^2}{(1+z^{-1})^2}$$

Ей соответствует уравнение с пятью членами. Расположение нулей и полюсов, а также весовая функция показаны на фиг. 9.8. Если



Фиг. 9.8. Расположение нулей и полюсов и весовая функция рекурсивного фильтра с пятью членами.



$$H(z) = \frac{(1-z^{-12})}{(1+z^{-2})}$$

а

$$H(z) = \frac{(1-z^{-12})(1+z^{-1})}{(1+z^{-3})}$$

б

Фиг. 9.9. Расположение нулей и полюсов для двух полосовых фильтров. а — центральная частота фильтра  $\omega_0 = \pi/2T$ ; б — центральная частота фильтра  $\omega_0 = \pi/3T$ .

требуется, чтобы у фильтра верхних частот нуль передачи был на нулевой частоте  $\omega=0$ , числитель  $H(z)$  должен иметь вид  $(1+z^{-k})^n$ , где  $k$  — четное целое число.

При введении устраняющих нули полюсов в точках  $z = \pm j$  получим полосовой фильтр с центральной частотой  $\omega_0 = \pi/2T$ , где  $T$  — период дискретизации. Для построения полосовых фильтров с центральными частотами  $\omega_0 = \pi/3T$  или  $\omega_0 = 2\pi/3T$  следует ввести на единичной окружности три равноудаленных друг от друга устраняющих нули полюса, один из которых затем компенсируется при добавлении нулей. На фиг. 9.9 показаны два вида расположения нулей и полюсов, типичные для полосовых фильтров.

#### 9.5. Боковые лепестки фильтров с целыми коэффициентами

Увеличивая порядок нулей и полюсов фильтра, можно ослаблять уровень его боковых лепестков по сравнению с главным лепестком. Однако при этом в разностном уравнении возрастает число членов, так что улучшение качества фильтрации достигается за счет увеличения объема вычислений. Уровень боковых лепестков, соответствующий заданному расположению нулей и полюсов, можно рассчитать с помощью длин векторов, проведенных из точки на единичной окружности (соответствующей частоте, которая представляет интерес) к полюсам и нулям. Вычисления существенно упрощаются, если учесть, что значение частотной характеристики на средней частоте между двумя смежными нулями служит достаточно хорошей оценкой уровня бокового лепестка на интервале частот между ними. Используя элементарные сведения из геометрии и тригонометрии, можно показать, что отношение уровней главного и бокового лепестков (они являются наибольшими) остается постоянным.

##### 9.5.1. Фильтры нижних и верхних частот

$$\frac{\text{Главный лепесток}}{\text{Первый боковой лепесток}} = \left[ k \sin \frac{3\pi}{2k} \right]^n,$$

где  $k$  — число нулей, равномерно расположенных по единичной окружности,  $n$  — порядок каждого нуля. Отметим, что  $k^n$  равно коэффициенту передачи фильтра в центре полосы пропускания.

##### 9.5.2. Полосовые фильтры с центральной частотой $\omega_0 = \pi/2T$

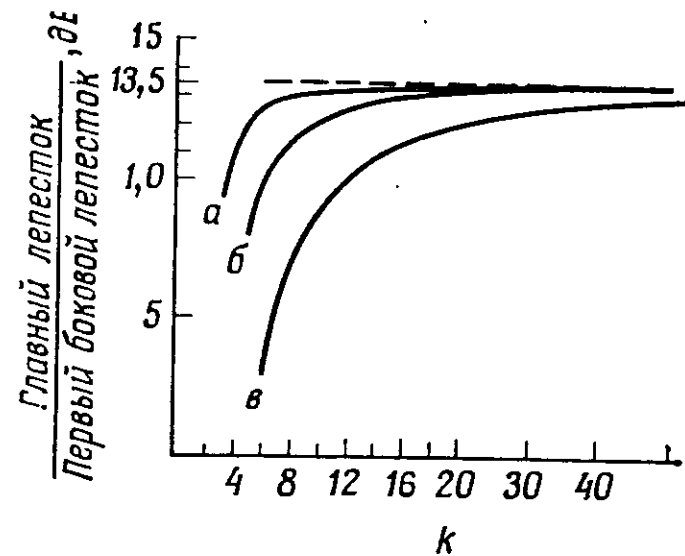
$$\frac{\text{Главный лепесток}}{\text{Первый боковой лепесток}} = \left[ \frac{k}{2} \sin \frac{3\pi}{k} \right]^n.$$

Отметим, что  $(k/2)^n$  равно коэффициенту передачи фильтра в центре полосы пропускания.

9.5.3. Полосовые фильтры с центральной частотой  $\omega_0 = \pi/3T$  или  $\omega_0 = 2\pi/3T$

$$\frac{\text{Главный лепесток}}{\text{Первый боковой лепесток}} = \frac{\left[ k \sin\left(\frac{3\pi}{2k}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{2k}\right) \right]^n}{\sin^n \frac{\pi}{3}} = \left[ 1,15k \sin\left(\frac{3\pi}{2k}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{2k}\right) \right]^n.$$

На фиг. 9.10 эти три отношения построены в функции  $k$  для  $n=1$ . При  $n=2$  (в этом случае на единичной окружности располагаются полюсы и нули 2-го порядка) передаточная функция полу-



Фиг. 9.10. Изменение уровня боковых лепестков для фильтров трех типов в функции числа нулей  $k$ , равномерно расположенных по единичной окружности в плоскости  $z$ .

$a$  — фильтры нижних и верхних частот;  $b$  — полосовой фильтр с центральной частотой  $\omega_0 = \pi/2T$ ;  $v$  — полосовой фильтр с центральной частотой  $\omega_0 = \pi/3T$  или  $\omega_0 = 2\pi/3T$ .

чается путем возведения в квадрат функции, соответствующей  $n=1$ , и число децибел, приведенное на фиг. 9.10, нужно удвоить; при  $n=3$  оно утраивается и т. д.

### Упражнения

Фильтры на основе частотной выборки с целыми коэффициентами

1. Изобразите графически в плоскости  $z$  нули и полюсы простого рекурсивного фильтра нижних частот скользящего среднего, который имеет первый нуль передачи на частоте  $\omega = \pi/6T$ . Запишите выражение для передаточной функции этого фильтра, а также его разностное уравнение. Рассматривая воздействие на фильтр

единичного импульса, получите его весовую функцию (т. е. импульсную характеристику).

2. Фильтр верхних частот имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-12})^2}{(1 - z^{-1})^2}$$

Найдите его весовую функцию, а затем, используя методику свертки, оцените коэффициент передачи фильтра на частотах вплоть до  $f = 1/2T$  Гц.

3. Рассчитайте рекурсивный полосовой фильтр со следующими данными:

- максимум коэффициента передачи на частоте  $\omega_0 = 2\pi/3T$ ;
- ширина главного лепестка  $\pi/3T$  рад/с;
- первый боковой лепесток ниже главного по крайней мере на 17 дБ.

Запишите разностное уравнение фильтра и оцените выигрыш в количестве умножений за счет перехода к рекурсивной форме.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Lynn P. A., Economic Linear-Phase Recursive Digital Filters, *Electron Letters*, 6, 143—145 (1970).

## ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

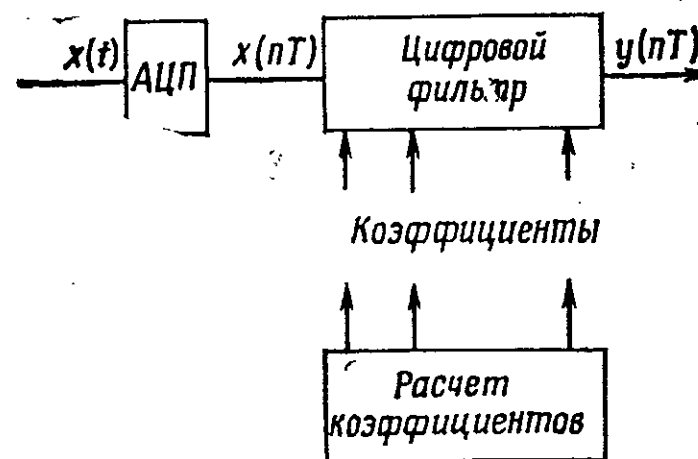
В. Лоуренс

### 10.1. Введение

Для представления состояния и значений коэффициентов цифровых фильтров используются числа с конечным числом разрядов. Это обстоятельство приводит к ошибкам:

- 1) квантования входного сигнала по уровням;
- 2) квантования коэффициентов фильтра по конечному числу двоичных разрядов;
- 3) квантования результатов арифметических операций;
- 4) колебаний предельного цикла низкого уровня (эффекты мертвой зоны);
- 5) колебаний переполнения.

Происхождение ошибок первых трех видов, представленных на фиг. 10.1, детально рассмотрено в последних разделах настоящей



Фиг. 10.1.

главы. Влияние этих ошибок можно неограниченно уменьшать, выбирая достаточно большую длину слов (число разрядов), но это приводит к удорожанию цифрового фильтра.

Величина ошибок, возникающих при работе цифровых фильтров, зависит от вида выполняемых арифметических операций и формы построения фильтра [1—4].

### 10.2. Построение цифровых фильтров

В приложении 10А на фиг. 10.17—10.20 представлены четыре рассмотренные ранее формы построения цифровых фильтров: прямая, прямая каноническая, параллельная и последовательная (каскадная).

### 10.3. Анализ арифметических устройств

В цифровых фильтрах операции над числами выполняются с помощью арифметического устройства с фиксированной или плавающей запятой. Ошибки, возникающие при работе таких фильтров, неодинаковы. Фильтры с фиксированной запятой легче анализировать, но им присущи недостатки двоичной арифметики с фиксированной запятой и более жесткие ограничения по динамическому диапазону [4].

#### 10.3.1. Арифметическое устройство с фиксированной запятой

В арифметическом устройстве с фиксированной запятой значение переменной или коэффициента  $U$  (меньше единицы) представляется в двоичном виде следующим образом:

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i 2^{-i}, \quad (10.1)$$

где  $U_i = 0$  или  $1$ , и при реализации фильтра квантуется до величины

$$[U_{\text{кв}}] = U_0 + \sum_{i=1}^{t-1} U_i 2^{-i} + \left[ U_t + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \right]. \quad (10.2)$$

Здесь при округлении к  $t$ -му разряду добавляется 1 или 0 в зависимости от того, 1 или 0 содержится в  $(t+1)$ -м разряде. При усечении разряды, следующие за старшими  $t$  разрядами, просто отбрасываются.

Обозначим ошибку квантования через  $\epsilon$ :

$$\epsilon = U - [U_{\text{кв}}];$$

при округлении она меняется в пределах от  $-2^{-t}$  до  $2^{-t}$ , т. е.

$$-2^{-t} < U - [U_{\text{кв}}] \leq 2^{-t},$$

а при усечении — в диапазоне от  $-2^{-t+1}$  до 0, так что

$$-2^{-t+1} < U - [U_{\text{кв}}] \leq 0.$$

При перемножении двух двоичных чисел или слов конечной длины  $U$  и  $V$  длина результирующего слова обычно больше длины

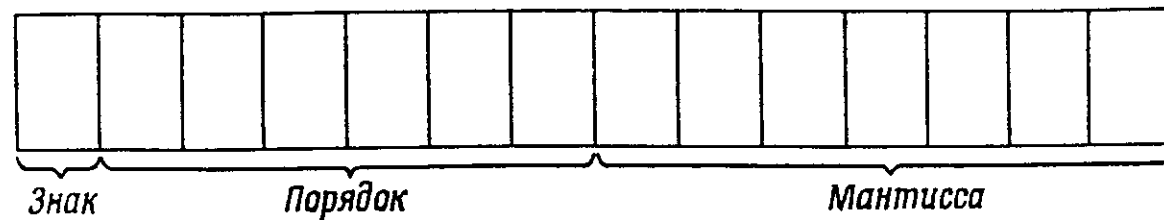
каждого из сомножителей. Если при реализации фильтра длина слова должна быть постоянной, избыточные биты (со стороны младших разрядов) обычно отбрасываются. Эта операция приводит к ошибке, которая аналогична ошибке, получаемой при работе квантователя с равномерным шагом. Сложение двух двоичных чисел конечной длины вообще не приводит к погрешности, за исключением случая, когда имеет место переполнение.

Для изучения проблемы точности цифровых фильтров, связанной с ошибками квантования, необходимо иметь некоторые сведения о свойствах этих ошибок. Большинство специалистов, работающих в этой области, пришли к заключению, что получение теоретических результатов, которые, как правило, хорошо согласуются с экспериментальными данными, облегчается при введении следующих трех предположений [1—8]:

- 1) ошибки квантования  $[U - [U_{кв}]]$  можно рассматривать как случайные величины;
- 2) ошибки взаимно независимы и не зависят от  $U$  и  $V$ ;
- 3) плотность распределения вероятностей ошибок округления равномерно распределена на интервале от  $-2^{-t}$  до  $2^{-t}$ .

### 10.3.2. Арифметическое устройство с плавающей запятой

В арифметическом устройстве с фиксированной запятой ошибки находятся в фиксированном диапазоне, тогда как в случае плавающей запятой они пропорциональны величинам сигналов [3, 6, 9]. Обычно числа с плавающей запятой представляются так, как показано на фиг. 10.2.



Фиг. 10.2.

Цифровое выражение числа  $U$  таково:

$$[\text{sgn}] [2^\alpha] [\beta], \quad (10.3)$$

где порядок  $\alpha$  — целое число, равное или превышающее  $\log_2 |U|$ , а мантисса  $\beta$  равна частному от деления величины числа на степень двойки, равную порядку, т. е.

$$\beta = \frac{U}{2^\alpha}. \quad (10.4)$$

Мантисса всегда квантована и принимает значения между 1 и  $1/2$ . Переполнения могут происходить в порядке (который и определяет динамический диапазон фильтра).

При выполнении арифметических операций с плавающей запятой и сумма, и произведение двух чисел с конечной разрядностью подлежат квантованию. Поскольку это квантование приводит к появлению ошибок в системе, сумма и произведение двух чисел записываются следующим образом:

$$\text{Сумма } [U + V]_{кв} = (U + V)(1 + \epsilon); \quad (10.5)$$

$$\text{Произведение } [U \cdot V]_{кв} = (U \cdot V)(1 + \gamma), \quad (10.6)$$

где  $\epsilon$  и  $\gamma$  рассматриваются как случайные числа, являющиеся следствием округления или усечения, которые меняются в следующих пределах:

$$\begin{aligned} -2^{-t} < \epsilon, \gamma < 2^{-t}, & \text{ для округления,} \\ -2^{-t} < \epsilon, \gamma < 0, & \text{ для усечения.} \end{aligned}$$

В настоящей главе проведен анализ проблемы точности цифровых фильтров только для случая выполнения арифметических операций с фиксированной запятой. Следующий раздел посвящен детальному рассмотрению ошибок, возникающих в различных частях фильтра.

## 10.4. Эффекты квантования

### 10.4.1. Квантование входного сигнала

Аналоговый сигнал  $x(t)$ , подлежащий обработке в цифровом фильтре, должен быть предварительно преобразован по амплитуде и времени в цифровую форму. В процессе дискретизации каждой выборки сигнала  $x(nT)$  по амплитуде используется квантование по уровням с шагом  $E_0$ , приводящее, как правило, к появлению ошибки в системе. При анализе она рассматривается как аддитивный шум, поданный на вход фильтра. Таким образом, предполагается, что входной сигнал создается двумя различными источниками и содержит следующие компоненты: 1) входной сигнал без шума  $x(nT)$ ; 2) аддитивный шум  $e(nT)$ :

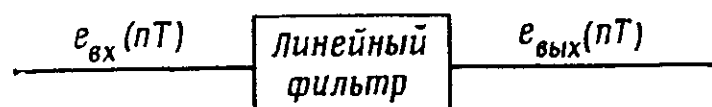
$$x_{ш}(nT) = x(nT) + e(nT). \quad (10.7)$$

Относительно этого шума можно сделать следующие предположения:

- 1) ошибка каждой выборки равномерно распределена в диапазоне от  $-E_0/2$  до  $E_0/2$  при округлении и от  $-E_0$  до 0 при усечении;

2) ошибки различных выборок статистически независимы. Эти предположения означают, что аддитивный шум — белый, с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , равной  $E_0^2/12$  [10—14]. Используя теорию шумов линейных систем, можно рассчитать дисперсию (среднюю мощность) выходной шумовой последовательности.

Рассмотрим линейную систему с передаточной функцией  $H(z)$ , изображенную на фиг. 10.3. Выходная шумовая последователь-



Фиг. 10.3.

ность  $e_{\text{вых}}(nT)$  вычисляется с помощью свертки импульсной характеристики  $h(mt)$  с  $e_{\text{вх}}(nT)$ :

$$e_{\text{вых}}(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT) e_{\text{вх}}[(n-m)T], \quad (10.8)$$

которую можно рассматривать как взвешенную сумму случайных величин с автокорреляционной функцией, определяемой выражением

$$\begin{aligned} R_{\text{вых}}(rT) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{\text{вых}}(nT) e_{\text{вых}}[(n-r)T] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(mT) e_{\text{вх}}[(n-m)T] h[(m-r)T] e_{\text{вх}}[(n-m-r)T], \end{aligned}$$

которое после суммирования по  $n$  принимает вид

$$R_{\text{вых}}(rT) = R_{\text{вх}}(rT) \sum_{m=0}^{\infty} h(mT) h[(m-r)T]. \quad (10.9)$$

Дисперсию (среднее значение выходной мощности шума) можно рассчитать, положив в (10.9)  $r=0$ , т. е.

$$R_{\text{вых}}(0) = \sigma_{\text{вых}}^2 = R_{\text{вх}}(0) \sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT).$$

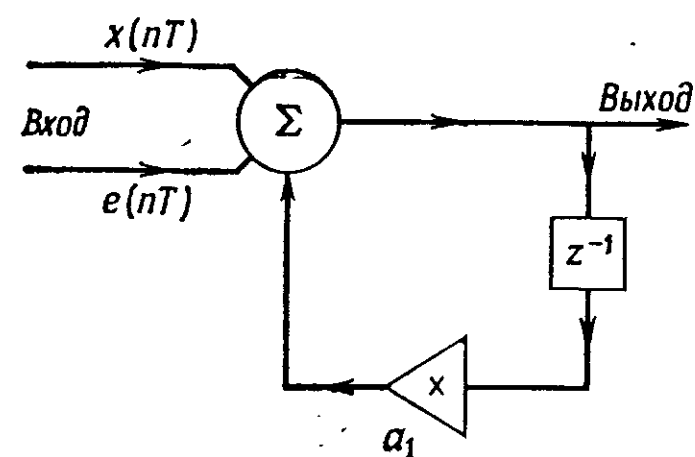
Обозначив здесь  $R_{\text{вх}}(0)$  через  $\sigma_{\text{вх}}^2$  или  $E_0^2/12$  (см. приложение 10.Б), получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{E_0^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT). \quad (10.10)$$

При бесконечной импульсной характеристике  $h(nT)$  выходную дисперсию проще вычислять в плоскости  $z$  с помощью вычетов, рассчитывая, согласно дискретной теореме Парсеваля, значение контурного интеграла:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{E_0^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT) = \frac{E_0^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H^*(z) \frac{dz}{z} \quad (10.11)$$

(см. приложение 10В). Применение этой формулы иллюстрируется в примере 1.



Фиг. 10.4. Цифровой фильтр 1-го порядка с импульсной характеристикой

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_1^n \delta(t-nT).$$

Пример 1. Рассмотрим систему 1-го порядка, изображенную на фиг. 10.4, которая описывается следующим разностным уравнением:

$$y(nT) = a_1 y(nT - T) + x(nT) + e(nT).$$

Здесь  $|a| < 1$ . Импульсная характеристика этого фильтра определяется выражением

$$h(nT) = a_1^n. \quad (10.12)$$

Подстановка этого выражения в (10.10) дает

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{E_0^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} a_1^{2n} = \quad (10.13)$$

$$= \frac{E_0^2}{12(1-a_1^2)}. \quad (10.14)$$

<sup>1</sup>  $H(z)$  — передаточная функция идеального фильтра, но ее можно модифицировать так, чтобы включить ошибки округления при умножении, а также ошибки, связанные с квантованием коэффициентов.

Перейдем теперь к анализу в области  $z$ . Так как

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}, \quad (10.15)$$

$$H^*(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-1} - a_1}, \quad (10.16)$$

то

$$H(z)H^*(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \frac{z^{-1}}{z^{-1} - a_1}. \quad (10.17)$$

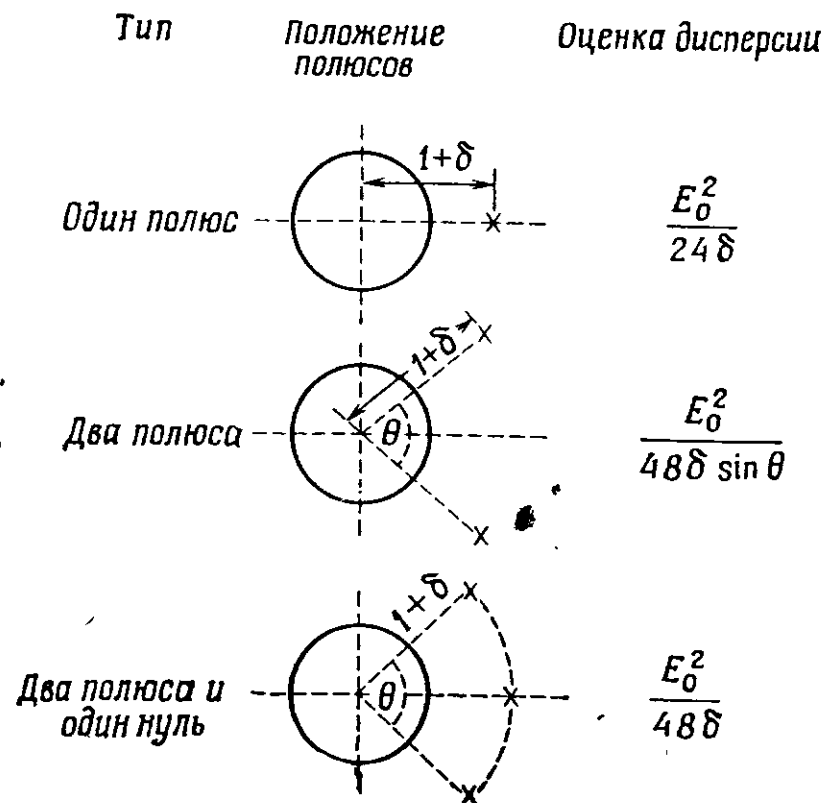
Подставив (10.17) в (10.11), получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{E_0^2}{12(2\pi j)} \oint \frac{z^{-1}}{(1 - a_1 z^{-1})(z^{-1} - a_1)} \frac{dz^{-1}}{z^{-1}}. \quad (10.18)$$

Значение  $\sigma_{\text{вых}}^2$  вычисляется с помощью вычетов в особых точках внутри контура интегрирования (в круге единичного радиуса). Особыми точками (полюсами) подынтегральной функции  $H(z)H^*(z)$  на плоскости  $z^{-1}$  являются точки  $z^{-1} = a_1$  и  $z^{-1} = 1/a_1$ . При  $|a| < 1$  внутри контура интегрирования размещается лишь один полюс  $z^{-1} = a_1$ . Вычет в этой точке равен  $1/(1 - a_1)$ , поэтому

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{E_0^2}{12(2\pi j)} 2\pi j \Sigma(\text{вычет}) = \frac{E_0^2}{12(1 - a_1^2)}, \quad (10.19)$$

т. е. мы получили такой же результат, как и при прямом суммировании [см. формулу (10.14)].



Фиг. 10.5.

Если, например,  $a_1 = 0,9$ , то

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{E_0^2}{12 \cdot 0,19}.$$

На фиг. 10.5 приведены значения дисперсии (средней мощности шума на выходе) для трех простых фильтров. Следует отметить небольшое уменьшение дисперсии при введении нуля, так что нуль способствует уменьшению шума на выходе.

#### 10.4.2. Квантование коэффициентов фильтра по конечному числу разрядов

Выходная последовательность идеального цифрового фильтра описывается разностным уравнением

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i x[(n-i)T] - \sum_{i=1}^L b_i y[(n-i)T]. \quad (10.20)$$

При квантовании коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  она изменяется. Эффект квантования состоит в замене идеальных коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  на слова конечной длины. Возникающие при этом ошибки аналогичны встречающимся при проектировании аналоговых фильтров, когда требуемое значение индуктивности равно, скажем, 5,498 мГн, но после намотки катушки измеренное значение индуктивности может оказаться равным 5,52 мГн.

Квантование коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  изменяет исходное положение нулей и полюсов синтезируемого фильтра на плоскости  $z^{-1}$  и, как следствие, приводит к изменению его амплитудной и фазовой характеристик. При определенных условиях эта погрешность может нарушить устойчивость фильтра.

С учетом квантования последовательность на выходе цифрового фильтра можно выразить следующим образом:

$$y_{\text{кв}}(nT) = \sum_{i=0}^N [a_i]_{\text{кв}} x[(n-i)T] - \sum_{i=0}^M [b_i]_{\text{кв}} y_{\text{кв}}[(n-i)T], \quad (10.21)$$

где

$$[a_i]_{\text{кв}} = a_i + \gamma_i$$

и

$$[b_i]_{\text{кв}} = b_i + \delta_i.$$

При выполнении арифметических операций с фиксированной запятой  $\gamma_i$  и  $\delta_i$  меняются в пределах  $-2^{-t} < \gamma_i, \delta_i < 2^{-t}$  [6, 9].



Передаточная функция такого «квантованного» фильтра равна

$$H_{\text{кв}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^N [a_i]_{\text{кв}} z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^L [b_i]_{\text{кв}} z^{-i}} \quad (10.22)$$

Проиллюстрируем на примере системы 2-го порядка характер изменения положения нулей и полюсов при изменении коэффициентов.

**Пример 2.** Рассмотрим разностное уравнение 2-го порядка

$$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + a_2 x(nT - 2T) + b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T). \quad (10.23)$$

Ему соответствует передаточная функция

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}, \quad (10.24)$$

полюсы которой размещаются в точках

$$r_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \frac{1}{2b_2} \sqrt{b_1^2 + 4b_2}, \quad (10.25)$$

$$r_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \frac{1}{2b_2} \sqrt{b_1^2 + 4b_2}, \quad (10.26)$$

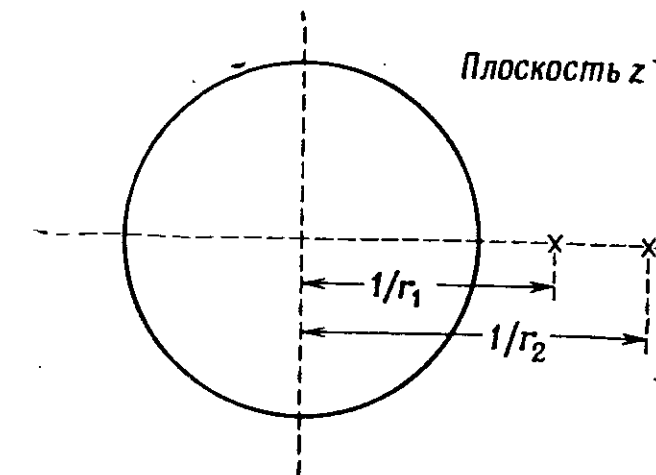
а нули — в точках

$$r_3 = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{1}{2a_2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}, \quad (10.27)$$

$$r_4 = -\frac{a_1}{2a_2} - \frac{1}{2a_2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}. \quad (10.28)$$

Изменение коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, b_1$  и  $b_2$  приведет к другим значениям  $r_1, r_2, r_3, r_4$  и, как следствие, к изменению амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик фильтра. В некоторых случаях полюсы, первоначально расположенные в устойчивой области достаточно близко к единичной окружности на плоскости  $z^{-1}$ , могут сместиться в область неустойчивости. В связи с этим необходимо найти такие формы построения фильтров, для которых изменение коэффициентов приводит лишь к незначительному смещению полюсов. В приводимом ниже примере показано, что различные формы имеют неодинаковую чувствительность к изменению коэффициентов.

**Пример 3.** Рассмотрим систему 2-го порядка, расположение полюсов которой в плоскости  $z^{-1}$  показано на фиг. 10.6. Полюсы



Фиг. 10.6.

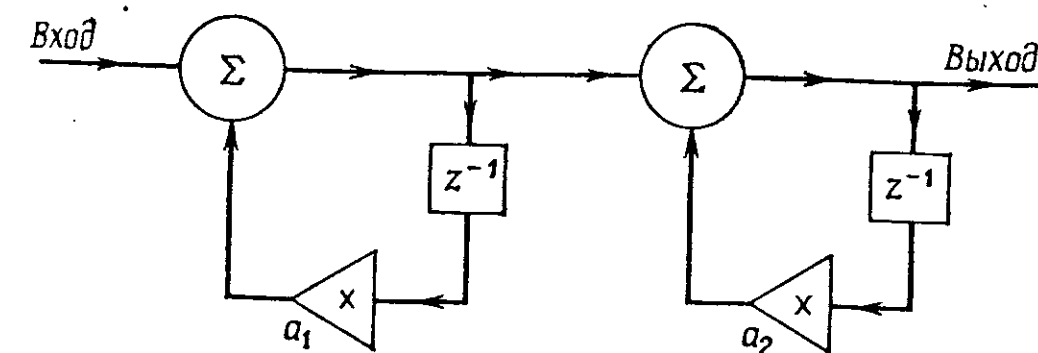
находятся в точках  $z^{-1} = 1/r_1$  и  $z^{-1} = 1/r_2$ . Передаточную функцию системы с этими полюсами можно записать в одной из следующих форм:

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - r_1 z^{-1})(1 - r_2 z^{-1})}, \quad (10.29)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - (r_1 + r_2) z^{-1} + r_1 r_2 z^{-2}}. \quad (10.30)$$

Рассмотрим различные формы реализации этих передаточных функций.

1) *Каскадная (последовательная) форма.* Она представлена на фиг. 10.7, причем



Фиг. 10.7. Каскадная (последовательная) форма цифрового фильтра.

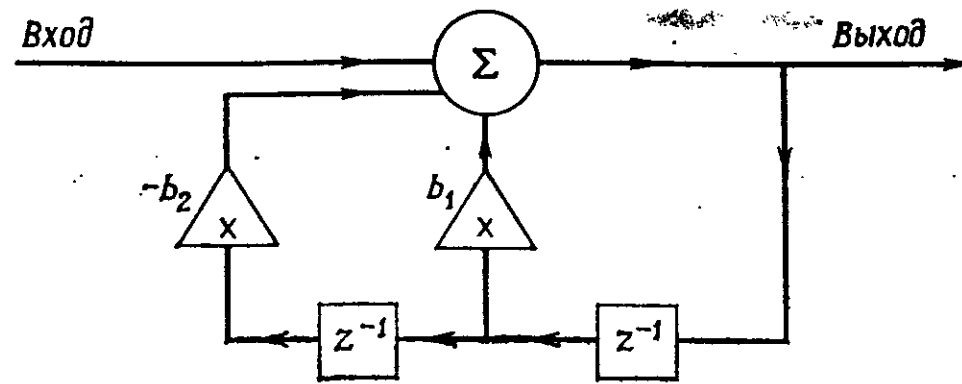
$$a_1 = r_1, \quad (10.31)$$

$$a_2 = r_2. \quad (10.32)$$

2) *Прямая форма.* Она представлена на фиг. 10.8, где

$$b_1 = r_1 + r_2, \quad (10.33)$$

$$b_2 = r_1 r_2. \quad (10.34)$$



Фиг. 10.8. Прямая форма цифрового фильтра.

Найдем из формул (10.29) — (10.34) следующие частные производные:

$$\frac{\partial r_1}{\partial a_1} = 1, \quad (10.35) \quad \frac{\partial r_1}{\partial a_2} = 0, \quad (10.36)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial a_1} = 0, \quad (10.37) \quad \frac{\partial r_2}{\partial a_2} = 1, \quad (10.38)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial b_1} = \frac{r_1}{r_1 - r_2}, \quad (10.39) \quad \frac{\partial r_1}{\partial b_2} = \frac{1}{r_2 - r_1}, \quad (10.40)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial b_1} = \frac{r_2}{r_2 - r_1}, \quad (10.41) \quad \frac{\partial r_2}{\partial b_2} = \frac{1}{r_1 - r_2}. \quad (10.42)$$

Видно, что

$$\frac{\partial r_1}{\partial b_1} > \frac{\partial r_1}{\partial a_1}, \quad \text{если } r_1 \text{ и } r_2 \text{ одного знака,}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial b_2} > \frac{\partial r_1}{\partial a_2} \quad \text{при любых возможных } r_1 \text{ и } r_2,$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial b_1} > \frac{\partial r_2}{\partial a_1} \quad \text{при любых возможных } r_1 \text{ и } r_2,$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial b_2} > \frac{\partial r_2}{\partial a_2}, \quad \text{если } r_1 \text{ и } r_2 \text{ одного знака.}$$

Отсюда следует, что в большинстве практических случаев изменение  $b_1$  и  $b_2$  приводит к большему смещению полюсов  $r_1$  и  $r_2$ , чем изменение  $a_1$  и  $a_2$ . Это означает, что в рассмотренном примере прямая форма построения, по-видимому, более чувствительна к эффектам квантования коэффициентов. Общую связь между смещением полюсов и изменением коэффициентов можно получить из формулы Кайзера [15]

$$\Delta z_r = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{z_r^{i+1}}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^N \left(1 - \frac{z_r}{z_n}\right)} \Delta b_i \right]. \quad (10.43)$$

(Вывод этой формулы приведен в приложении 10Г.) Здесь  $\Delta b_i$  — изменение коэффициента  $b_i$ , а  $z_1, z_2, \dots, z_r$  — положения полюсов идеального фильтра. Используя это соотношение, Кайзер доказал, что чувствительность смещения полюсов к коэффициентам увеличивается с ростом порядка фильтра при прямой форме его реализации. Таким образом, он пришел к выводу, что реализация фильтра выше 2-го порядка в прямой форме нежелательна. В этом случае предпочтительнее параллельная или каскадная форма.

#### 10.4.3. Квантование результатов арифметических операций

Результат каждого умножения параметра состояния<sup>1)</sup> на коэффициент должен быть усечен или округлен. При выполнении каждой итерации разностного уравнения эта операция над произведениями приводит к ошибкам в различных узлах системы. Для анализа влияния этой ошибки, аналогичного эффекту квантования на входе, в разных узлах фильтра вводится белый шум. Поскольку этот шум вводится в различных узлах системы, средняя мощность шума на выходе будет зависеть от структуры фильтра.

Существуют четыре основные формы реализации передаточной функции:

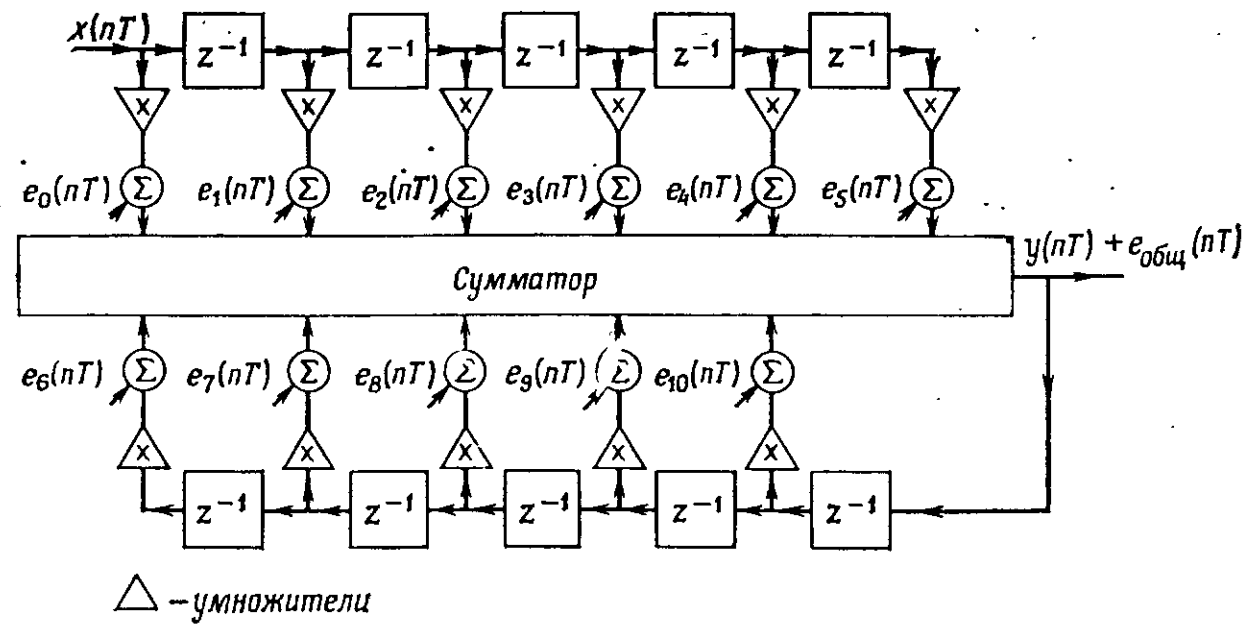
- 1) прямая;
- 2) прямая каноническая (меньшее число элементов задержки);
- 3) параллельная (прямая и каноническая);
- 4) каскадная (прямая или каноническая).

Для каждой из этих четырех структур в последующих подразделах рассчитывается среднее значение мощности шума на выходе, связанного с квантованием результатов арифметических операций.

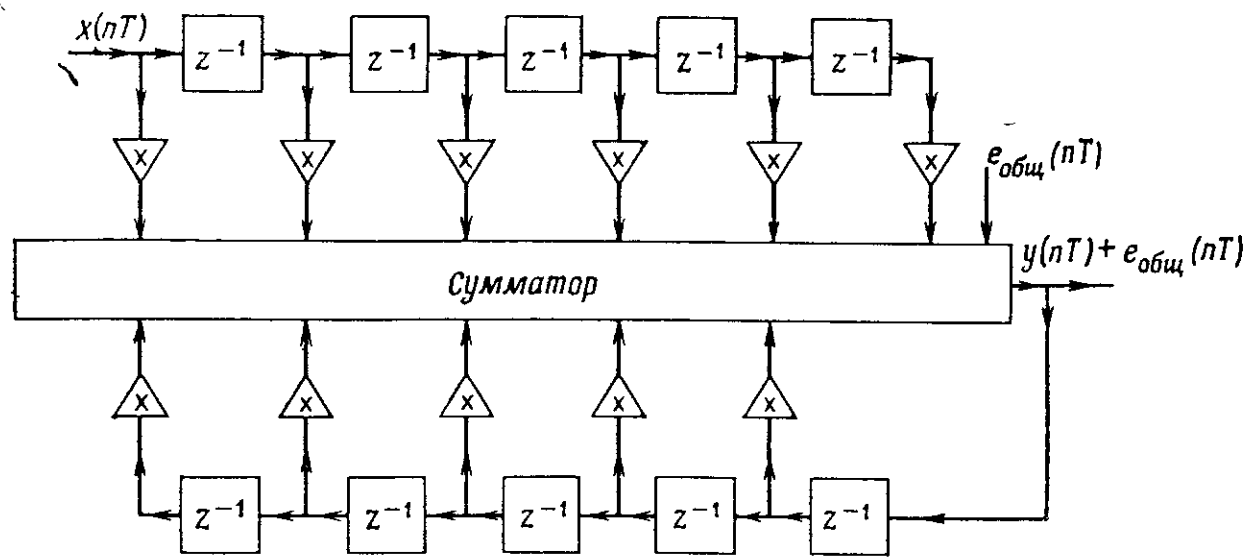
##### 10.4.3.1. Прямая форма

Шумовая модель прямой формы построения фильтра с  $N$  нулями и  $M$  полюсами, содержащая источники шума, подключенные к различным узлам фильтра, изображена на фиг. 10.9. Все шумовые источники подключены непосредственно к сумматору, поэтому их можно объединить в один шумовой источник, соединенный с сумматором, как показано на фиг. 10.10. Легко увидеть, что шум проходит только через полюсы фильтра, определяемые коэффициентами  $b_i$ . Таким образом, передаточная функция от шумового источника до выхода состоит только из полюсов, тогда как сигнал проходит через нули (они описываются коэффициентами  $a_i$ ). Среднюю

<sup>1)</sup> Параметрами состояния называются временные выборки на выходах узлов цифрового фильтра.



Фиг. 10.9. Шумовая модель для прямой формы цифрового фильтра.



Фиг. 10.10.

мощность шума на выходе фильтра можно вычислить следующим образом.

Пусть передаточная функция фильтра описывается формулой

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

где  $A(z)$  определяет нули, а  $B(z)$  — полюсы. В предположении, что шум введенного источника представляет собой стационарный в широком смысле случайный процесс с нулевым средним [1—3, 5—11], спектральная плотность мощности шума на выходе будет равна

$$S_{\text{вых}}(z) = S_{11}(z) \left[ \frac{1}{B(z)} \right] \left[ \frac{1}{B(z)} \right]^* \quad (10.44)$$

где  $1/B(z)$  — эффективная передаточная функция только для шума, а  $S_{11}(z)$  — спектральная плотность мощности источника шума, подключенного к сумматору.

Средняя мощность шума на выходе определяется среднеквадратическим значением шумовой последовательности, равным среднему значению автокорреляционной функции в начале координат. Автокорреляционная функция  $e_{\text{вых}}(nT)$  имеет вид

$$R_{\text{вых}}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{\text{вых}}(nT) e_{\text{вых}}[(n-r)T] \quad (10.45)$$

В начале координат, где  $r=0$ ,

$$R_{\text{вых}}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{\text{вых}}(nT) e_{\text{вых}}(nT) \quad (10.46)$$

Автокорреляционная функция равна преобразованию Фурье от функции спектральной плотности мощности, поэтому среднее значение автокорреляционной функции в начале координат равно среднему значению энергетического спектра, т. е.

$$R_{\text{вых}}(r) \xrightarrow{\text{ПФ}} S_{\text{вых}}(z) \quad (10.47)$$

$$R_{\text{вых}}(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint S_{\text{вых}}(z) \frac{dz}{z}$$

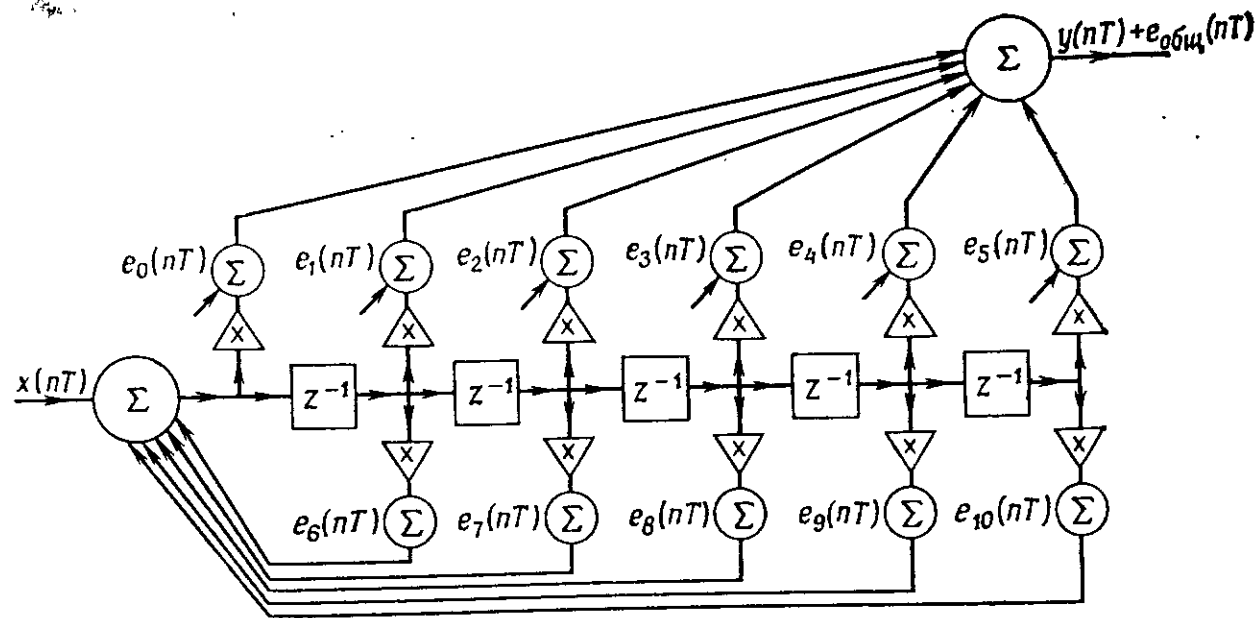
Таким образом, согласно формулам (10.45) и (10.47), средняя мощность шума на выходе может быть вычислена по формуле

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = (1+N+M) \frac{E_0^2}{12(2\pi j)} \oint \frac{1}{B(z)} \left[ \frac{1}{B(z)} \right]^* \frac{dz}{z} \quad (10.48)$$

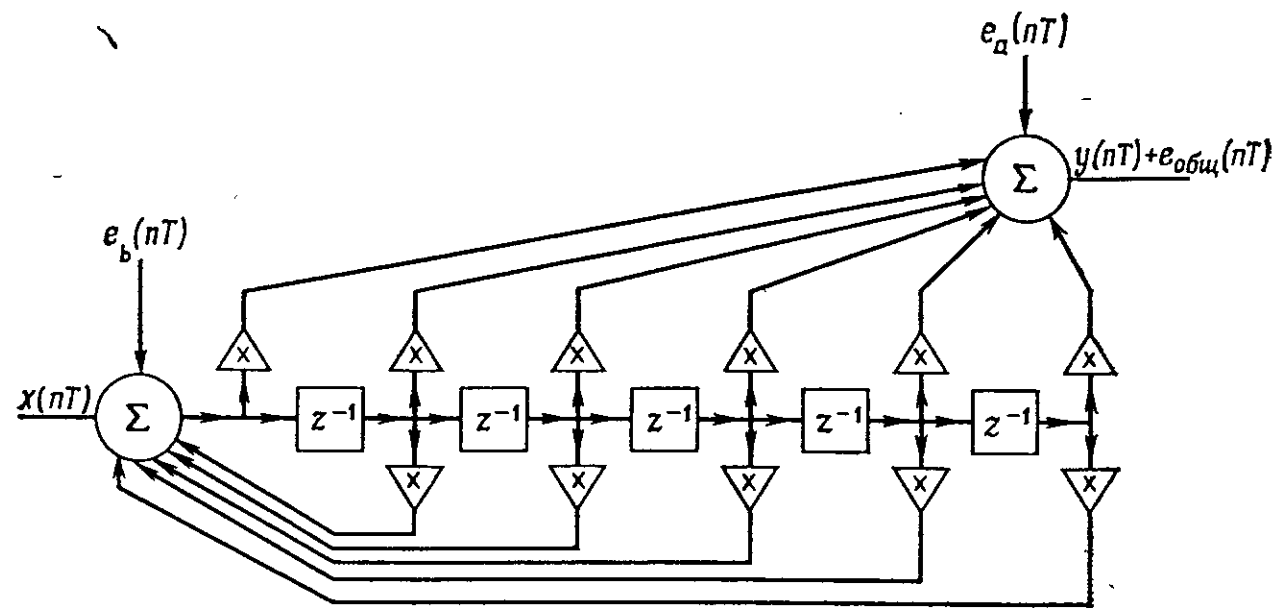
где  $(1+N+M)E_0^2/12$  — средняя мощность шума, вызванного округлением произведений,  $E_0$  — шаг квантования, а  $(M+N)$  — число полюсов и нулей.

#### 10.4.3.2. Каноническая форма

Фильтр канонической формы содержит половину общего числа элементов задержки, необходимых при прямой форме построения фильтра. Шумовая и эквивалентная шумовая модели канонической формы, изображенные на фиг. 10.11 и 10.12 соответственно, показывают, что эквивалентный источник шума вводится в систему иначе, чем в фильтре прямой формы. Эквивалентный шум  $e_b(nT)$ , обусловленный умножением коэффициентов  $b_i$  на значения параметров состояния, проходит через всю цепь (полюсы и нули), тогда как шум  $e_a(nT)$ , связанный с перемножением  $a_i$  и параметров состояния, просто добавляется на выходе.



Фиг. 10.11. Шумовая модель для канонической формы цифрового фильтра.



Фиг. 10.12.

Таким образом, дисперсия на выходе (общая средняя мощность) будет равна сумме дисперсий на выходе, обусловленных отдельно  $e_b(nT)$  и  $e_a(nT)$ .

Дисперсия на выходе, обусловленная  $e_b(nT)$ , равна

$$\sigma_b^2 = \frac{ME_0^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H^*(z) \frac{dz}{z}, \quad (10.49)$$

где  $H(z)$  — эффективная передаточная функция для  $e_b(nT)$ ,  $M$  — число полюсов. Дисперсия на выходе, обусловленная  $e_a(nT)$ , рассчитывается по формуле

$$\sigma_a^2 = (1 + N) \frac{E_0^2}{12}. \quad 50$$

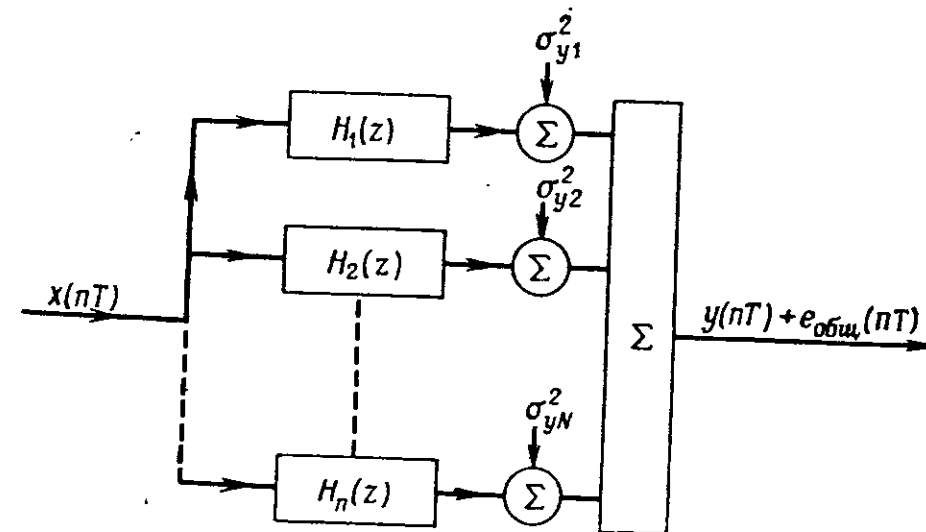
Поэтому выражение для общей дисперсии шума на выходе, равной сумме  $\sigma_b^2$  и  $\sigma_a$ , будет иметь следующий вид:

$$\sigma_{общ}^2 = \frac{ME_0^2}{12(2\pi j)} \oint H(z) H^*(z) \frac{dz}{z} + (1 + N) \frac{E_0^2}{12}. \quad (10.51)$$

Итак, при канонической форме построения фильтра часть шума и сигнал проходят как через нули, так и через полюсы системы. Обычно, хотя и не всегда (см. пример 5 в приложении 10Д), нули ослабляют шум, поэтому, когда речь идет об ошибках округления в арифметических устройствах с фиксированной запятой, каноническая форма, по-видимому, лучше прямой формы. В работе [19] показано, что при работе с плавающей запятой уровень шумов округления для канонической и прямой форм одинаков.

### 10.4.3.3. Параллельная форма

Передаточная функция фильтра параллельной формы (фиг. 10.13) представляется в виде линейной комбинации переда-



Фиг. 10.13. Шумовая модель для параллельной формы цифрового фильтра.

точных функций 1-го или 2-го порядка, т. е.

$$H(z) = K + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_N(z) = K + \frac{\alpha_1}{1 - \beta_1 z^{-1}} + \frac{\gamma + \delta z^{-1}}{\pi + \xi z^{-1} + \eta z^{-2}} + \dots \quad (10.52)$$

Каждая из этих упрощенных передаточных функций 1-го или 2-го порядка реализуется в прямой или канонической форме. Дисперсия шума  $\sigma_i^2$  на выходе каждого блока с передаточной функцией  $H_i(z)$  вычисляется в зависимости от структурной формы блока по формуле (10.48) или (10.51). Полная дисперсия шума на выходе

равна сумме средних значений мощностей шума на выходе всех блоков, т. е.

$$\sigma_{\text{общ}}^2 = \sum_{i=1}^L \sigma_i^2, \quad (10.53)$$

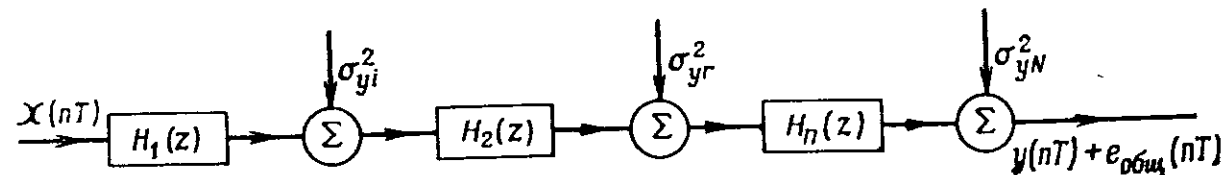
где  $L$  — число параллельных каналов.

#### 10.4.3.4. Каскадная форма

Передаточная функция фильтра каскадной формы (фиг. 10.14) разбивается на составляющие 1-го или 2-го порядка следующим образом:

$$\begin{aligned} H(z) &= KH_1(z)H_2(z) \dots H_N(z) = \\ &= K \frac{z^{-1} - \alpha_1}{1 - \beta_1 z^{-1}} \frac{z^{-2} - \gamma z^{-1} + \delta}{\pi z^{-2} + \xi z^{-1} + 1} \dots \end{aligned} \quad (10.54)$$

И в этом случае мощность шума на выходе каждого блока можно определить, используя формулы (10.48) или (10.51) в зависимо-



Фиг. 10.14. Шумовая модель для каскадной формы цифрового фильтра.

сти от формы его построения. Для каскадной формы шум на входе каждого каскада включает в себя выходной шум предыдущего каскада, а также шум, созданный внутри каскада. Поэтому выходной шум первого каскада проходит через нули и полюсы остальных каскадов. Вообще выходной шум  $i$ -го каскада проходит через все нули и полюсы  $(i+1)$ -го и всех последующих каскадов системы.

В математической форме общая средняя мощность шума может быть выражена следующим образом:

$$\sigma_{\text{общ}}^2 = \sum_{i=0}^L \sigma_i^2 \frac{1}{2\pi j} \oint \prod_{k=i+1}^L [H_k^*(z) H_k(z)] \frac{dz}{z}, \quad (10.55)$$

где  $L$  — число каскадов.

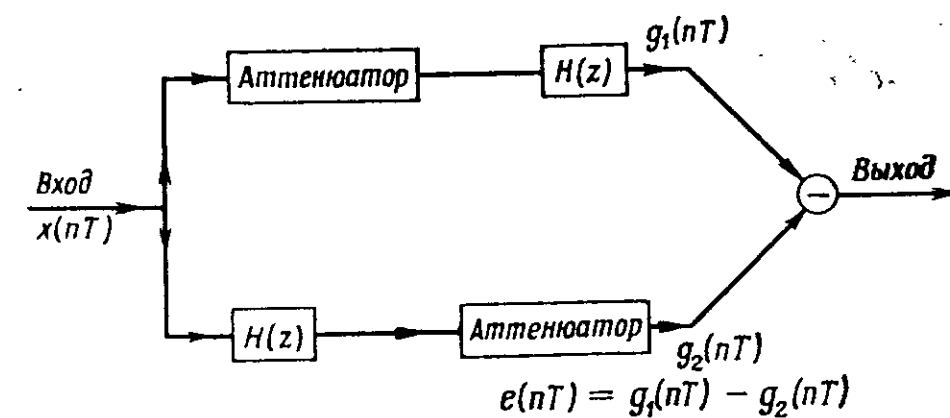
#### 10.4.3.5. Заключение

В общем случае эффекты шумов округления зависят от формы построения цифрового фильтра, даже если все варианты построения дают одну и ту же передаточную функцию. Для выбора кон-

кретной формы, минимизирующей нежелательные эффекты шума, можно использовать формулы (10.48), (10.51), (10.53) и (10.55). Доказано, что в большинстве случаев наилучшей является каскадная форма [2].

### 10.5. Измерение шумов

Блок-схема экспериментальной установки для измерения шумов округления, возникающих в цифровом фильтре, представлена на фиг. 10.15. В двух параллельных цепях схемы содержатся два



Фиг. 10.15. Блок-схема измерения шумов цифрового фильтра.

одинаковых цифровых фильтра с передаточными функциями  $H(z)$ , а также два аттенюатора, один из которых включен до фильтра (в первой цепи), а другой — за фильтром (во второй цепи). Сигнал в одной из цепей ослабляется до прохождения через фильтр, а в другой — после фильтрации. Таким образом, разность между сигналом на выходе фильтра в первой цепи и сигналом на выходе аттенюатора во второй цепи является непосредственной мерой шумов округления, создаваемых цифровым фильтром с передаточной функцией  $H(z)$ .

### 10.6. Предельные циклы низкого уровня

В предыдущем разделе при рассмотрении ошибок округления и усечения, возникающих после умножения в различных узлах фильтра, предполагалось, что все они взаимно независимы и некоррелированы от выборки к выборке. Как показано рядом авторов, рассматривавших эти вопросы [2—9, 16—20], теоретические результаты, полученные при этих предположениях, хорошо согласуются с экспериментальными данными, но лишь при условии, что входной сигнал фильтра имеет достаточную амплитуду. Для входных сигналов низкого уровня шумы округления становятся корре-

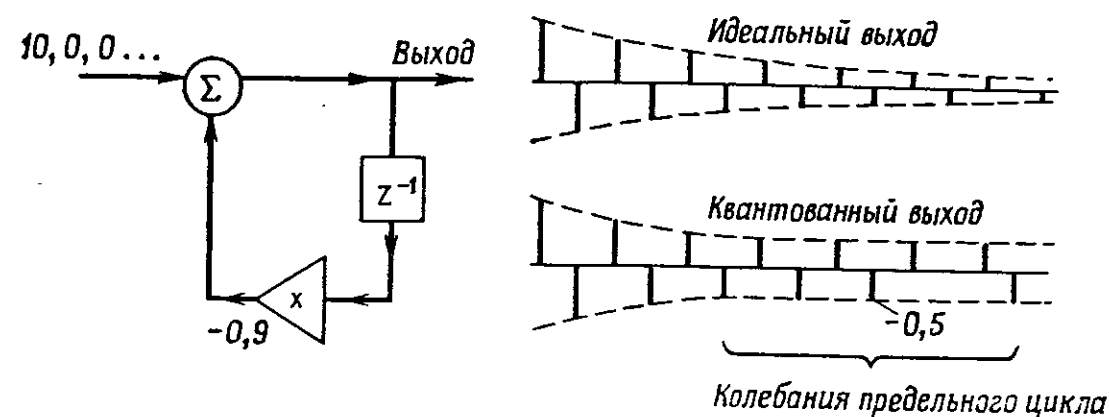
лированными, и в пределе, когда входной сигнал равен нулю, на выходе рекурсивных цифровых фильтров наблюдаются периодические сигналы или предельные циклы. Таким образом, фильтры, импульсная характеристика которых должна спадать до нуля, могут не иметь такой характеристики вследствие квантования результатов умножения в различных узлах фильтра. (Фильтры, считавшиеся асимптотически устойчивыми в смысле ограниченности входа и выхода, оказываются на границе устойчивости.)

При условии, что не происходит переполнения [5], ошибки предельных циклов низкого уровня не нарушают устойчивости фильтра. Приводимый ниже пример 4 служит иллюстрацией возникновения предельных циклов в цифровых фильтрах.

**Пример 4.** Рассмотрим цифровой фильтр 1-го порядка с разностным уравнением

$$y(nT) = x(nT) - 0,9 [y(nT - T)]. \quad (10.56)$$

Здесь  $y(nT)$ ,  $x(nT)$  — выходной и входной сигналы, а 0,9 — коэффициент множителя. Возможная схема построения такого фильтра показана на фиг. 10.16а.



Фиг. 10.16а.

Идеальные значения выходного сигнала при подаче на вход последовательности 10, 0, 0, ... приведены во втором столбце табл. 10.1. В третьем столбце представлены выходные отсчеты, когда каждый результат умножения  $y(nT - T)$  на 0,9 округляется до ближайшего целого. Из приведенной таблицы видно, что через 5T секунд в фильтре начинаются колебания. Амплитуда колебаний равна 5, частота колебаний — половине частоты дискретизации фильтра. При разных порядках и коэффициентах множителя фильтра амплитуда и частота колебаний будут различными.

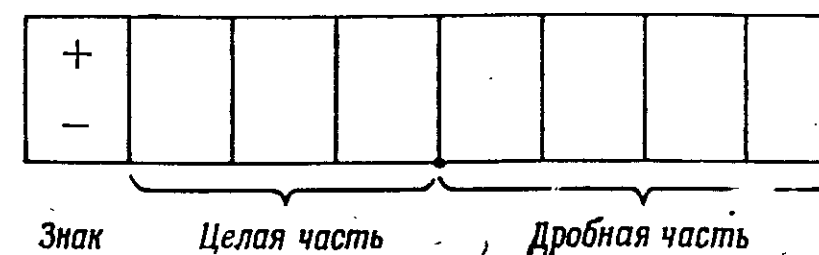
Таблица 10.1  
(Входные отсчеты 10, 0, 0, ...)

Время	Выходные отсчеты	
	идеальные	квантованные
0T	+10	+10
1T	-9	-9
2T	+8,1	+8
3T	-7,29	-7
4T	+6,561	+6
5T	-5,8949	-5
6T	+4,80541	+5
7T	-4,324869	-5
8T	+3,8923821	+5
⋮	⋮	⋮
∞T	0,000000	±5

### 10.7. Колебания переполнения

После выполнения действий разностного уравнения в различных узлах фильтра могут возникнуть колебания переполнения, обусловленные ограниченным динамическим диапазоном фильтра. Эти колебания очень велики и весьма нежелательны, поэтому важно предупредить их появление. Простой метод состоит в сбросе на нуль выходных отсчетов в тех узлах, где произошло переполнение. Более сложные методы разработаны Сэндбергом [6] и Эбертом и др. [21]. Однако не все происходящие в узлах переполнения представляют опасность. Джэксон и др. [22] показали, что при расчете частичных сумм двух и более отсчетов может быть допущено некоторое переполнение.

**Пример.** Пусть в некоторый момент времени в 8-разрядном цифровом фильтре складываются следующие числа: 0,0; +5,0; +6,0; -2,0; -4,0. Будем считать, что параметры состояния фильтра с фиксированной запятой представляются следующим образом:



Первый разряд является знаковым, следующие три представляют целую часть, последние четыре — дробную. Максимально возможное значение числа равно  $7^{15}/16$ .

Таблица 10.2

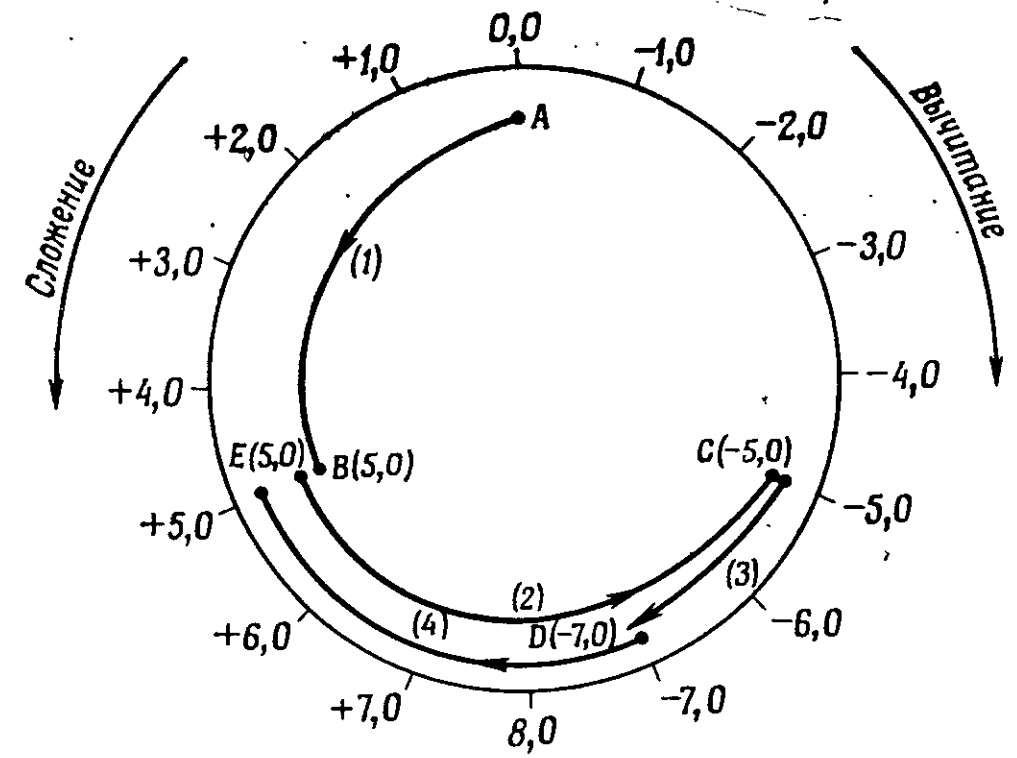
	Десятичный вид	Двоичный дополнительный код	Замечания
1-я частичная сумма	0,0	00000000	
	5,0	01010000	
2-я частичная сумма	5,0	01010000	Правильный ответ без переполнения
	6,0	01100000	
3-я частичная сумма	11,0	10110000	Переполнение, результат -5 неверен. Должно быть 11
		01011000	
	-2,0	11100000	
4-я частичная сумма	9,0	11001000	Переполнение, результат -7 неверен. Должно быть 9,0
		01001000	
	-4,0	11000000	
	5,0	10101000	Правильный ответ +5

В табл. 10.2 показана последовательность формирования частичных сумм при сложении заданных чисел в дополнительном коде.

Из таблицы видно, что окончательный результат +5 верен, хотя при счете дважды имели место переполнения. Таким образом, если значение окончательной суммы не выходит за пределы динамического диапазона фильтра (в нашем примере  $7^{15}/16$ ), временные переполнения можно допустить. Диаграмма формирования частичных сумм представлена на фиг. 10.16б. Пояснения к диаграмме:

1) 1-я частичная сумма. Начинаем с точки А (0, 0) и добавляем 5,0, перемещаясь на 5 шагов против часовой стрелки в точку В (5, 0).

2) 2-я частичная сумма. Перемещаемся от В (5,0) на 6 шагов в С (-5,0).



Фиг. 10.16б.

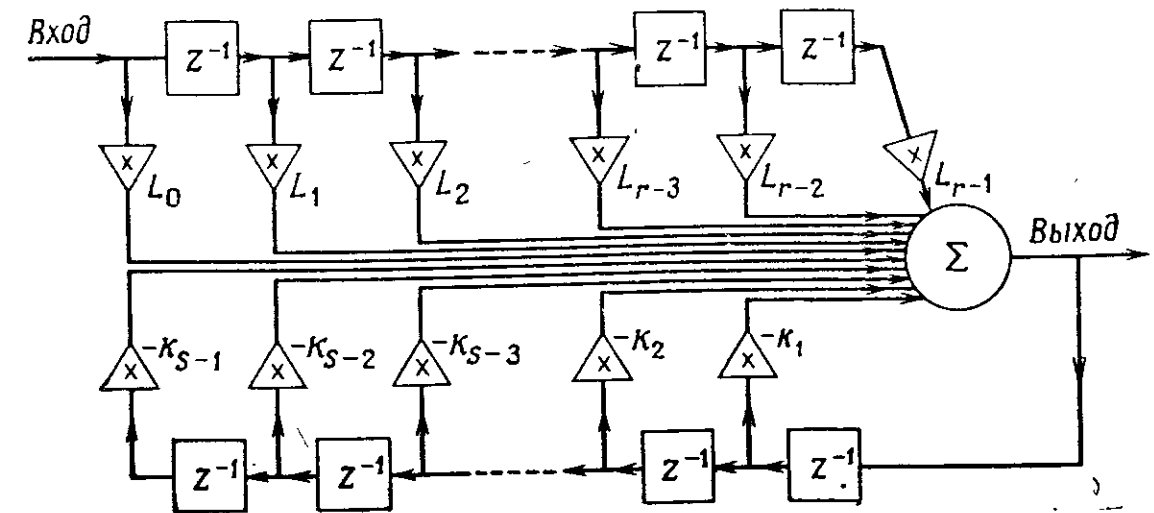
3) 3-я частичная сумма. От точки С смещаемся на 2 шага в точку D (-7, 0).

4) 4-я частичная сумма. От D (-7, 0) по часовой стрелке перемещаемся на 4 шага в точку E (или В), где и получим окончательный результат +5,0.

Приложение 10А

Построение цифрового фильтра

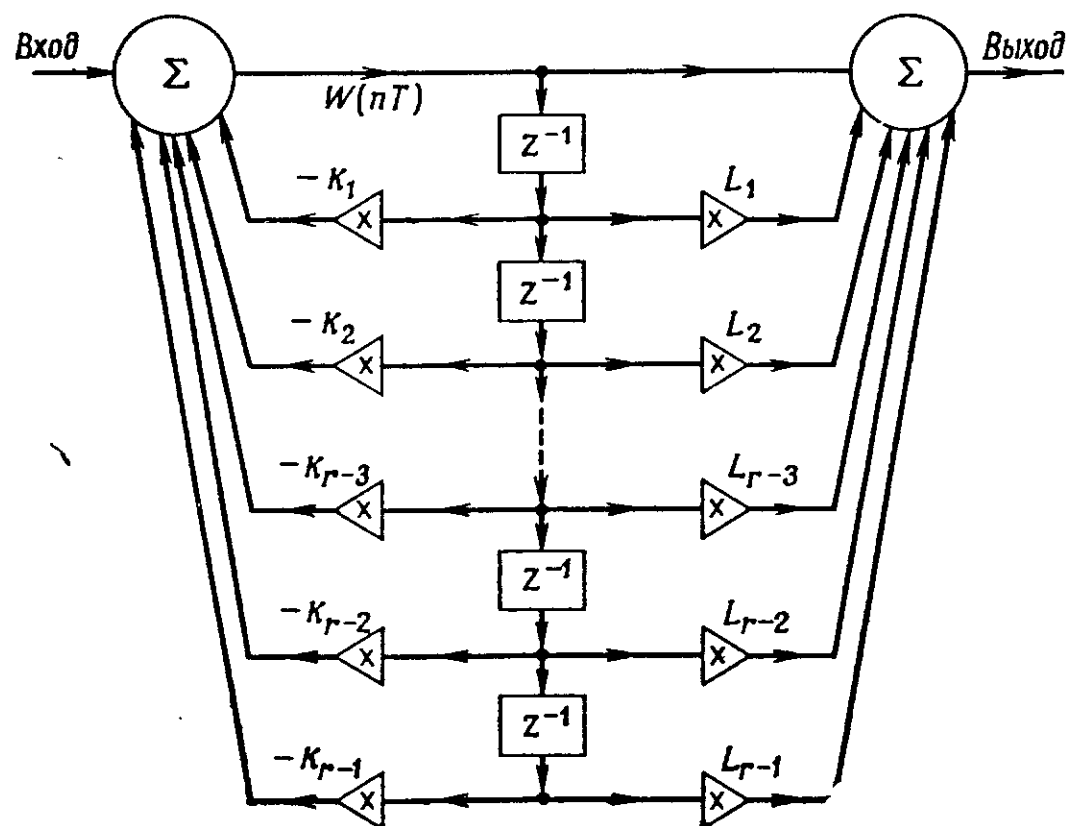
Фильтры с нулями и полюсами известны как рекурсивные или как фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры). Они также строятся на основе сумматоров, умножителей



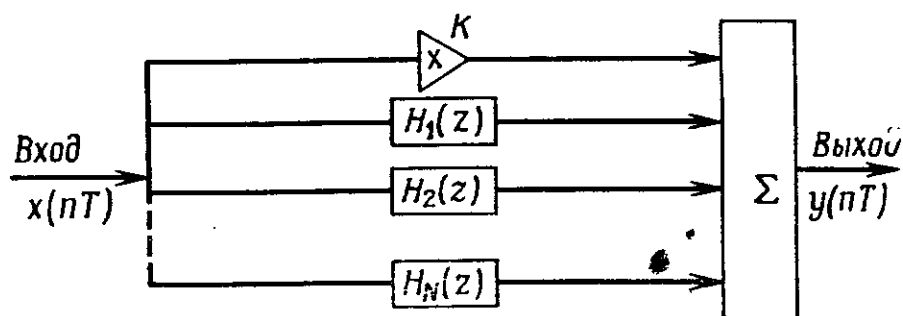
Фиг. 10.17. Прямая форма цифрового фильтра.



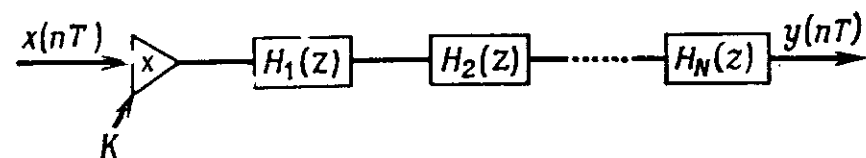
лей и элементов задержки. От фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров) они отличаются только наличием обратных связей [они содержат  $(s-1)$  элементов задержки в цепях обратной связи и  $(r-1)$  элементов в прямых цепях]. Четыре рассмотренные выше формы построения фильтров представлены на фиг. 10.17—10.20. Фильтр прямой формы, изображенный на фиг. 10.17, имеет  $r+s$  элементов задержки, причем общее число



Фиг. 10.18. Каноническая форма цифрового фильтра (имеет меньше элементов задержки, т. е. меньшую память).



Фиг. 10.19. Параллельная форма цифрового фильтра.



Фиг. 10.20.

этих элементов превышает порядок фильтра. Такую же передаточную функцию можно получить с меньшим количеством элементов задержки, например, их число может быть равно  $s$  при  $s > r$  или  $r$ , если  $s < r$ , причем большее из этих двух чисел равно порядку фильтра. Фильтры, для которых число элементов задержки равно порядку передаточной функции, называют каноническими. Передаточная функция

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^r L_i z^{-i}}{\sum_{i=1}^s k_i z^{-i}} \quad (10.57)$$

преобразуется к виду

$$H(z) = W(z) \sum_{i=0}^r L_i z^{-i}, \quad (10.58)$$

где

$$W(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^s k_i z^{-i}}. \quad (10.59)$$

Далее, передаточную функцию  $H(z)$  можно разбить на члены 1-го или 2-го порядка и построить цифровой фильтр в виде параллельного или последовательного соединения блоков более низкого порядка (фиг. 10.19 и 10.20).

Для параллельной формы

$$H(z) = K + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_N(z) = \quad (10.60)$$

$$= K + \frac{\alpha_1}{1 - \beta_1 z^{-1}} + \frac{\gamma_1 + \delta z^{-1}}{\pi + \xi z^{-1} + \eta z^{-2}} + \dots \quad (10.61)$$

Для последовательной формы

$$H(z) = K H_1(z) H_2(z) \dots H_N(z) = \quad (10.62)$$

$$= K \left[ \frac{z^{-1} - \alpha_1}{z^{-1} - \beta_1} \right] \left[ \frac{z^{-2} + \gamma z^{-1} + \delta}{z^{-2} + \xi z^{-1} + \pi} \right] \dots \quad (10.63)$$

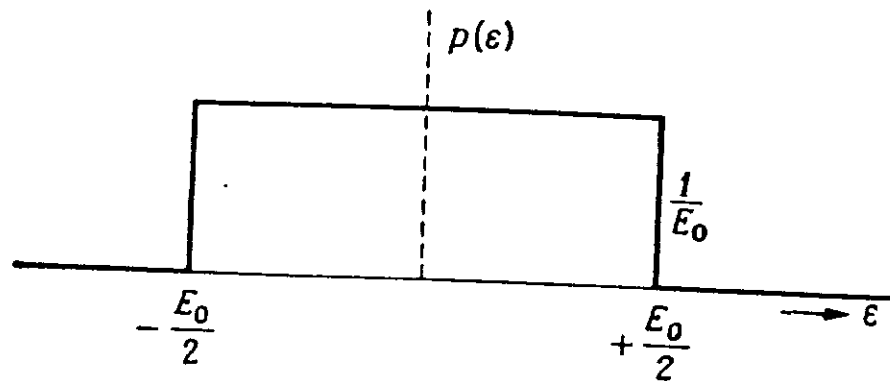
причем каждая функция  $H_i(z)$  может быть реализована в канонической или прямой форме (см. фиг. 10.17 или 10.18 соответственно).

## Приложение 10Б

## Дисперсия ошибок округления

Выше были сделаны следующие предположения относительно ошибок округления при выполнении арифметических операций:

- 1) ошибка  $\epsilon$  равномерно распределена в диапазоне от  $-E_0/2$  до  $E_0/2$ , где  $E_0$  — шаг квантования;
- 2) среднее значение  $\epsilon$  равно нулю;
- 3) все ошибки взаимно независимы и некоррелированы от выборки к выборке.



Фиг. 10.21. Плотность вероятности ошибок округления.

Плотность распределения вероятностей ошибок  $p(\epsilon)$  при этих предположениях графически представлена на фиг. 10.21. Здесь

$$p(\epsilon) = \frac{1}{E_0}.$$

Дисперсия ошибок по определению [23] равна

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\epsilon - \mu)^2 p(\epsilon) d\epsilon, \quad (10.64)$$

где  $\mu$  — среднее значение, в нашем случае равное нулю, а  $p(\epsilon) = 0$  при  $\epsilon > E_0/2$  и  $\epsilon < -E_0/2$ . При этих условиях выражение (10.64) можно переписать следующим образом:

$$\sigma_0^2 = \int_{-E_0/2}^{E_0/2} (\epsilon - 0)^2 \frac{1}{E_0} d\epsilon. \quad (10.65)$$

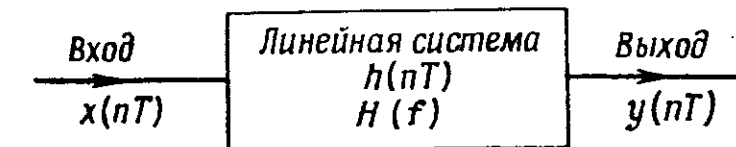
После интегрирования

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{E_0} \left[ \frac{\epsilon^3}{3} \right]_{-E_0/2}^{E_0/2} = \frac{E_0^2}{12}.$$

## Приложение 10В

## Дискретная теорема Парсеваля

Рассмотрим линейную систему, изображенную на фиг. 10.22, где  $x(t)$  и  $y(t)$  — входная и выходная функции времени соответственно, а  $h(t)$  — импульсная характеристика линейной системы



Фиг. 10.22.

(фильтра). Энергетический спектр выходной функции  $y(t)$ , обозначенный через  $S_{yy}(f)$ , равен [24]

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2, \quad (10.66)$$

где  $S_{xx}(f)$  — энергетический спектр входной функции  $x(t)$ ,  $H(f)$  — частотная характеристика фильтра. Среднее значение выходной мощности равно интегралу от энергетического спектра:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(f) df. \quad (10.67)$$

С учетом формул (10.66) и (10.67) оно может быть представлено следующим образом:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) H(f) H^*(f) df. \quad (10.68)$$

Если считать, что  $x(t)$  — нормальный случайный процесс с дисперсией  $\sigma_{\text{вх}}^2$ , то формула (10.68) упрощается к виду

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) H^*(f) df. \quad (10.69)$$

Эту формулу можно преобразовать из частотной области в область переменной  $z$ , используя преобразование

$$z = e^{j2\pi f}, \quad (10.70)$$

отображающее мнимую ось плоскости  $s$  в единичную окружность в плоскости  $z$  [25] и преобразующее интеграл, который ранее вычислялся в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , в контурный по единичной окружности.

Продифференцируем выражение (10.70):

$$dz = j2\pi e^{j2\pi f} df. \quad (10.71)$$

Отсюда

$$df = \frac{dz}{j2\pi z}. \quad (10.72)$$

Таким образом, преобразование (10.70) сводит выражение (10.69) к виду

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{\text{ВХ}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H^*(z) \frac{dz}{z}. \quad (10.73)$$

Из формулы (10.10) находим

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{\text{ВХ}}^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT). \quad (10.74)$$

Приравняв правые части равенств (10.73) и (10.74), получим теорему Парсеваля:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H^*(z) \frac{dz}{z}. \quad (10.75)$$

#### Приложение 10Г

Обобщенная связь между смещением полюсов и изменением коэффициентов фильтра [15]

Рассмотрим передаточную функцию  $H(z)$ , заданную в виде

$$H(z) = \frac{N(z)}{1 + \sum_{k=1}^n b_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_j}\right)}. \quad (10.76)$$

где  $z_j$  — полюсы  $H(z)$  на плоскости  $z^{-1}$ ,  $b_k$  — коэффициенты фильтра, определяющие положение полюсов,  $n$  — число полюсов, а  $N(z)$  — передаточная функция нулей.

Приравняв знаменатели левой и правой частей равенства (10.76), получим

$$1 + \sum_{k=1}^n b_k z^{-k} = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_j}\right). \quad (10.77)$$

Найдем частные производные правой и левой частей (10.77) по  $b_k$ :

$$z^{-k} = \frac{\partial}{\partial b_k} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_j}\right). \quad (10.78)$$

$$z^{-k} = \frac{\partial}{\partial b_k} \left[ \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_n}\right) \right], \quad (10.79)$$

$$z^{-k} = \sum_{m=1}^n \frac{z^{-1}}{z_m^2} \frac{\partial z_m}{\partial b_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_j}\right). \quad (10.80)$$

Положив для каждого  $m$ -го полюса  $z^{-1} = z_m$ , получим

$$z_m^k = \frac{z_m}{z_m^2} \frac{\partial z_m}{\partial b_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n \left(1 - \frac{z_m}{z_j}\right);$$

откуда

$$\frac{\partial z_m}{\partial b_k} = \frac{z_m^{k+1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n \left(1 - \frac{z_m}{z_j}\right)}. \quad (10.81)$$

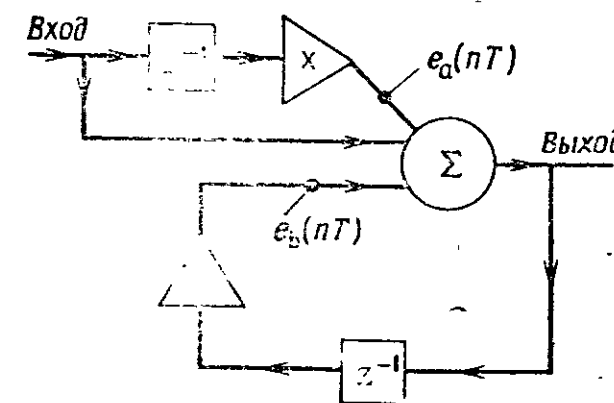
#### Приложение 10Д

Ошибки округления результатов арифметических операций для прямой и канонической форм цифрового фильтра 1-го порядка

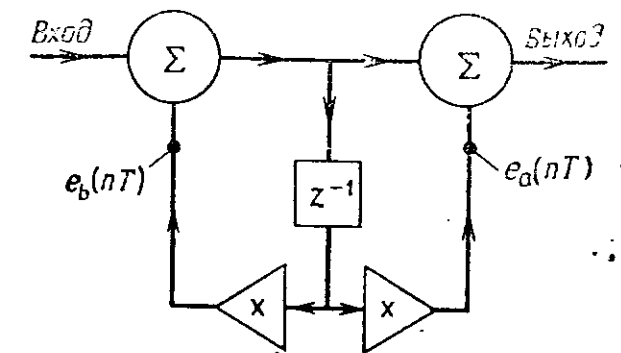
**Пример 5.** Рассмотрим фильтр 1-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}}. \quad (10.82)$$

Прямая и каноническая формы реализации этой передаточной функции показаны на фиг. 10.23а и 10.23б соответственно. Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты, причем  $\beta$  должно быть меньше единицы,  $\alpha$  может быть любым.



Фиг. 10.23а. Прямая форма фильтра 1-го порядка.



Фиг. 10.23б. Каноническая форма фильтра 1-го порядка.

1) *Прямая форма.* Полную среднюю мощность шумов округления на выходе фильтра можно получить, используя формулу (10.48):

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{2E_0^2}{12(2\pi j)} \oint \left( \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \frac{z^{-1}}{z^{-1}-\beta} \right) \frac{dz^{-1}}{z^{-1}} \quad (10.83)$$

Здесь  $1/(1-\beta z^{-1})$  — передаточная функция для шумов обоих шумовых источников. Множитель 2 в правой части равенства (10.83) показывает, что шумы возникают в двух узлах фильтра.

Значение правой части (10.83) можно найти с помощью вычета в единственном полюсе  $z^{-1} = \beta$ ; при этом

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{E_0^2 2\pi j}{12(2\pi j)} \frac{1}{1-\beta^2} \quad (10.84)$$

поэтому среднее значение общей мощности шума на выходе фильтра при прямой форме его построения становится равным

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{E_0^2}{12} \frac{2}{1-\beta^2} \quad (10.85)$$

2) *Каноническая форма.* Среднюю общую мощность выходного шума для фильтра, изображенного на фиг. 10.23б, можно рассчитать, используя выражение (10.51):

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = 1 \frac{E_0^2}{12(2\pi j)} \oint \left( \frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\beta z^{-1}} \frac{z^{-1}+\alpha}{z^{-1}-\beta} \right) \frac{dz^{-1}}{z^{-1}} + 1 \frac{E_0^2}{12} \quad (10.86)$$

Передаточная функция для шума  $e_b(nT)$  равна

$$\frac{1+\alpha z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}$$

Шум от другого источника  $e_a(nT)$  добавляется непосредственно на выходе, поэтому его вклад равен  $E_0^2/12$ . Вычисляя  $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2$  из формулы (10.86) по теореме о вычетах, получим выражение

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{E_0^2}{12} \left[ \frac{(1+\beta\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta(1-\beta\beta)} - \frac{\alpha}{\beta} \right] + \frac{E_0^2}{12} \quad (10.87)$$

которое можно упростить к виду

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{2E_0^2}{12(1-\beta^2)} + \frac{E_0^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2)}{12(1-\beta^2)} \quad (10.88)$$

Сравнение правых частей (10.85) и (10.88) показывает, что при канонической форме шумы округления меньше, если член

$$\frac{E_0^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2)}{12(1-\beta^2)}$$

отрицателен. Если этот член больше нуля, предпочтительнее прямая форма. Если же он равен нулю, то при канонической и прямой форме получаются шумы округления одинакового уровня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gold B., Rader C., *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill, 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., *Цифровая обработка сигналов*, изд-во «Советское радио», 1973.
2. Jackson L., *An Analysis of Round-off Noise in Digital Filters*, D. Sc. Thesis, Stevens Institute of Techn., 1969.
3. Liu B., *Effects of Finite Wordlength on the Accuracy of Digital Filters*, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-18, № 6 (1971); есть русский перевод: Лиу Б., *Влияние конечной длины слова на точность цифровых фильтров*, *Западная радиоэлектроника*, № 6 (1973).
4. Lawrence V. B., *Use of Orthogonal Functions in the Design of Digital Filters*, Ph. D. Thesis, London Univ., Nov. 1972.
5. Bonzanigo F., Pellandini F., *Problems de realization des filters digitaux*, *Agenc* (July 1969).
6. Sandberg I. W., *Floating-Point-Round-off Accumulation in Digital-Filter Realization*, *BSTJ*, 46 (Oct. 1967).
7. Jackson L., *On the Interaction of Round-off Noise and Dynamic Range in Digital Filters*, *BSTJ*, 49 (Feb. 1970).
8. Knowles J. B., Edwards R., *Effects of a Finite-Word-Length Computer in a Sampled-Data Feedback System*, *Proc. Inst. Elect. Eng.*, 112 (June 1965).
9. Liu B., Kaneko T., *Error Analysis of Digital Filters Realized with Floating Point Arithmetic*, *Proc. IEEE*, 57, № 10 (Oct. 1969); есть русский перевод: Лиу Б., Канеко Т., *Анализ погрешностей цифровых фильтров, реализуемых арифметическими операциями с плавающей запятой*, *ТНЭЭР*, 57, № 10 (1969).
10. Thomas J. B., Liu B., *Error Problems in Sampling Representations*, *IEEE Int. Conv. Rec.* (1964).
11. Liu B., Thomas J. B., *Error Problems in the Reconstruction of Signals from Data*, *Proc. Nat. Electronic Conf.*, 23 (Oct. 1967).
12. Bennett W. R., *Spectra of Quantized Signals*, *BSTJ*, 27 (July 1948).
13. Widrow B., *Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled Data Systems*, *AIEE Trans. Appl. Ind.*, 79, (Jan. 1961).
14. Katzenelson J., *On Errors Introduced by Combined Sampling and Quantization*, *IRE Trans. Automatic Control*, AC-7, (April 1962).
15. Kaiser J. F., *Some Practical Considerations in the Realization of Linear Digital Filters*, *Proc. 3rd Annual Allerton Conf.* (Oct. 1965).
16. Jackson L., *An Analysis of Limit Cycles due to Multiplication Rounding in Recursive Digital Filters*, *Proc. 7th Annual Allerton Conf.* (1969).
17. Bonzanigo F., *Constant-Input Behaviour of Recursive Digital Filters*, *IEEE Arden House Workshop on Digital Filtering*, N. Y., 1970.
18. Sandberg I. W., Kaiser J. F., *A Bound Limit Cycles in Fixed-Point Implementation of Digital Filters*, *IEEE Trans. on Circuit Theory* (Nov. 1971).
19. Kan E. K., Aggarwal J. K., *Error Analysis of Digital Filter Employing Floating Point Arithmetic*, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-18, № 6 (Nov. 1971).
20. Parker S. R., Hess S. F., *Limit Cycle Oscillation in Digital Filters*, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-18, № 6 (Nov. 1971).
21. Ebert P. M., Mazo J. E., Taylor M. G., *Overflow Oscillations in Digital Filters*, *BSTJ*, 48, № 9 (Nov. 1969).
22. Jackson L. B., Kaiser J. F., McDonald H. S., *An Approach to the Implementation of Digital Filters*, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-16, № 3 (Sept. 1968).
23. Papoulis A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1965.
24. Papoulis A., *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, 1962.
25. Jury E. I., *Theory and Application of z-Transform Method*, Wiley, N. Y., 1964.

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Г. Баун

## 11.1. Введение

При синтезе цепей понятие оптимизации [1] более или менее очевидно. Мы подбираем расчетные параметры (обычно это значения компонент) до тех пор, пока реализация в некотором заданном смысле не станет оптимальной, приближаясь таким образом к почти идеальному варианту. Для достижения этой цели нужно уметь оценивать реализацию на любом этапе ее синтеза. Последнее обычно осуществляется путем взятия отсчетов характеристики фильтра для  $n$  значений *независимой переменной* (например, частоты) и получения таким образом вектора ошибки  $E$ :

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Поясним понятие вектора ошибки на простом примере из области *нерекурсивной фильтрации* (гл. 6), в которой методы оптимизации нашли широкое применение [2, 3]. Фильтр с откликом на единичный импульс в виде последовательности  $a_1, a_2, a_1, 0, 0, \dots$  имеет частотную характеристику  $H(\omega)$ , равную

$$H(\omega) = (a_2 + 2a_1 \cos \omega T) \exp(-j\omega T),$$

причем коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  можно варьировать. Для определенности, а также с целью предельного упрощения примера рассмотрим только модуль  $H(\omega)$ , обозначив его через  $g(\theta)$  и переписав в виде

$$g(\theta) = x_1 + x_2 \cos \theta, \quad (11.2)$$

где  $\theta$  — независимая переменная, а  $x_1$  и  $x_2$  рассчитываемые коэффициенты (с точки зрения задачи оптимизации они являются переменными). Идеальный отклик можно задать с помощью исход-

ных данных для  $n$  дискретных значений  $\theta$ . Пусть таблица этих данных имеет вид

$\theta$	$g(\theta)$
0	1
$\pi/2$	1
$\pi$	0

Все три элемента вектора ошибки можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 + x_2 - 1, \\ e_2 &= x_1 - 1, \\ e_3 &= x_1 - x_2. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Они представляют собой разности между значениями  $g(\theta)$ , вычисленными по формуле (11.2), и приведенными в таблице исходными данными. Требуемые условия будут полностью удовлетворены, если каждая из этих ошибок равна нулю и, следовательно, вектор ошибки  $E$  — нулевой. Задавая переменным  $x_1$  и  $x_2$  числовые значения, можно рассчитать соответствующие векторы  $E$ . Результаты сведены в следующую таблицу:

	Пример 1	Пример 2
$x_1$	0	1
$x_2$	0	1
$e_1$	-1	1
$e_2$	-1	0
$e_3$	0	0

Возникают два вопроса: можно ли полностью удовлетворить требуемым условиям, а если нет, то можно ли сказать, какой из двух вариантов лучше? При ответе на первый вопрос следует учитывать, что, имея две степени свободы, невозможно удовлетворить одновременно трем условиям, так что нельзя рассчитывать свести к нулю каждый из элементов  $E$ . Ниже всегда будет предполагаться, что число выборочных отсчетов  $n$  больше числа переменных  $m$ . С учетом сказанного следует рассмотреть, что такое наилучшее решение, т. е. получить ответ на второй из поставленных вопросов.

Из приведенной таблицы видно, что во втором примере два из трех элементов ошибки равны нулю, поэтому он представляется ближе к идеальной реализации, чем первый пример, в котором только один элемент ошибки равен нулю. С другой стороны, инте-

рес может представлять только ошибка в наилучшей дискретной точке, так как именно на этой основе обычно задают исходные данные. При этом второй пример оказывается ничуть не лучше первого, поскольку величина наибольшей ошибки в обоих случаях равна единице. Возникшую трудность можно преодолеть, если принимать решение на основе скалярной величины, являющейся в свою очередь функцией вектора  $E$ . Эта величина в теории оптимизации носит название *целевой функции*.

Целевая функция служит скалярной мерой ошибки между полученной реализацией и исходными данными. Она должна уменьшаться по мере улучшения реализации и равняться нулю в идеальном случае, когда вектор  $E$  является нулевым. При этом задача оптимизации расчета цепей становится эквивалентной математической задаче минимизации функции  $m$  переменных. Существует много способов определения этой функции. Обычно используют критерий суммы квадратов

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) = (e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2)^{1/2} \quad (11.4)$$

и критерий максимума модуля

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) = \max(|e_1|, |e_2|, \dots, |e_n|). \quad (11.5)$$

Решения, соответствующие минимальному значению для этих двух альтернативных критериев, называются соответственно решением наименьших квадратов и минимаксным решением. С математической точки зрения предпочтительнее метод наименьших квадратов, поскольку вычисления в этом случае носят достаточно элементарный характер. Иная ситуация имеет место при использовании минимаксного метода, так как первые частные производные от  $\varphi$  по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_m$  не являются непрерывными функциями.

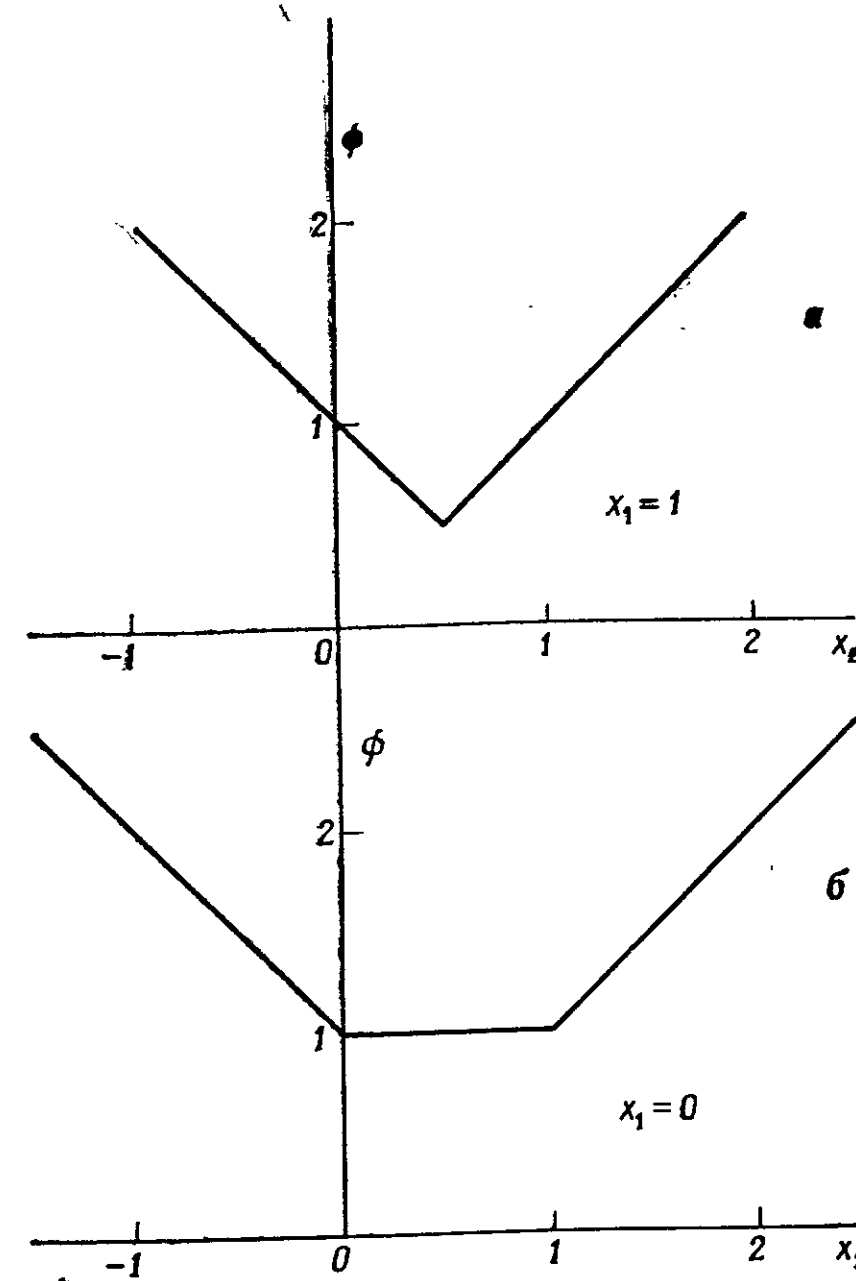
Однако с точки зрения задания исходных данных и работы с фильтром минимаксный критерий является весьма привлекательным. В связи с этим ему было уделено значительное внимание [2—6]. Было показано, что задача синтеза нерекурсивных фильтров оказывается вполне разрешимой с применением модифицированных методов линейного программирования. Пример полосового фильтра, рассчитанного рассматриваемыми методами, приведен на фиг. 6.11. Обширные сведения по расчету полосовых фильтров с импульсной характеристикой конечной длительности содержатся в работе [2].

Для расчета рекурсивных фильтров методами оптимизации использовались несколько критериев [6]. Коэффициенты и характеристики таких фильтров обычно связаны нелинейными соотношениями. В некоторых случаях оказалось возможным выполнить преобразования, позволяющие использовать методы линейного программирования.

## 11.2. Минимаксный критерий и импульсная характеристика конечной длительности

Выше было отмечено свойство минимаксного метода, состоящее в том, что первые частные производные от  $\varphi$  по  $x_1, x_2, \dots, x_m$  не являются непрерывными. Поясним это на примере, положив  $x_1 = 1$ . Тогда уравнения (11.3) примут вид

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2, \\ e_2 &= 0, \\ e_3 &= 1 - x_2. \end{aligned} \quad (11.6)$$



Фиг. 11.1. Особенности критерия максимума модуля.

Характер изменения функции  $\phi$  при изменении  $x$  и использовании критерия максимума модуля показан на фиг. 11.1, а. Функция имеет ярко выраженный минимум при  $x_2=0,5$ , однако ее производная терпит разрыв. Другое важное свойство этого метода можно получить, положив  $x_1=0$ . В этом случае уравнения (11.3) принимают вид

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2 - 1, \\ e_2 &= -1, \\ e_3 &= -x_2; \end{aligned} \quad (11.7)$$

график соответствующей функции  $\phi$  показан на фиг. 11.1, б. Она имеет минимум не в одной точке, а на интервале

$$0 \leq x_2 \leq 1,$$

что иллюстрирует еще одно свойство функций с разрывными производными.

Теперь логично отказаться от ограничений на  $x_1$  и рассматривать  $\phi$  как функцию двух переменных. Для графического представления этой функции изобразим контурную диаграмму, каждый контур которой соответствует определенному значению  $\phi$  (фиг. 11.2). Видно, что контуры имеют острые углы, причем форма контуров может резко меняться. Последнее связано с переходом от равенства  $\phi$  одной из ошибок к равенству другой ошибки при изменении переменных и лучше всего может быть продемонстрировано путем введения нового определения целевой функции:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_m) = \max(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}), \quad (11.8)$$

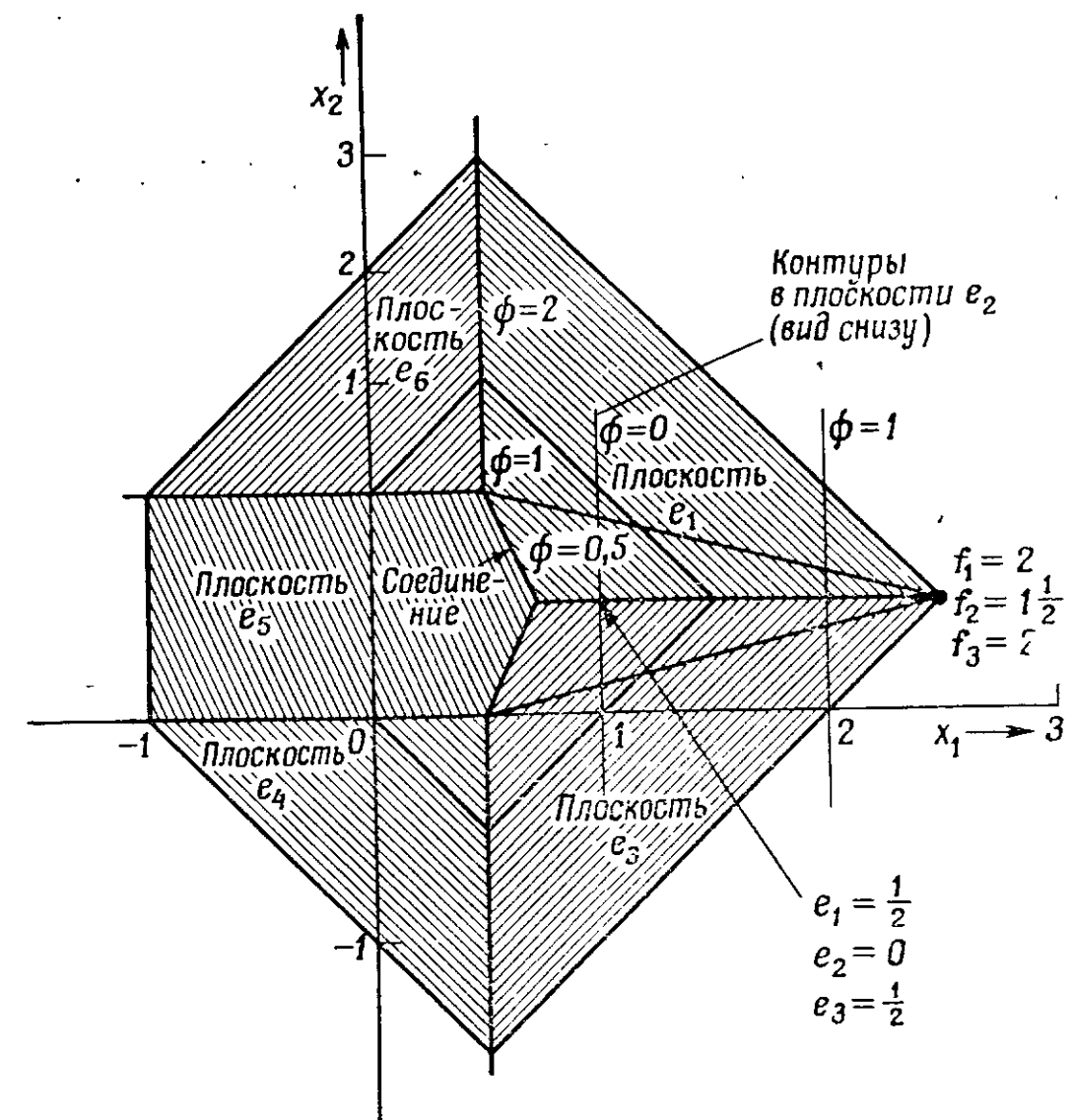
где

$$e_{n+i} = -e_i. \quad (11.9)$$

Это определение эквивалентно исходному [см. формулу (11.5)], но имеет более удобную форму записи и по существу представляет собой первый важный шаг в направлении получения минимаксного решения. Теперь в численном примере нужно рассматривать шесть ошибок:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 + x_2 - 1, \\ e_2 &= x_1 - 1, \\ e_3 &= x_1 - x_2, \\ e_4 &= -x_1 - x_2 + 1, \\ e_5 &= -x_1 + 1, \\ e_6 &= -x_1 + x_2. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Пусть эти ошибки измеряются вдоль третьей оси, нормальной к изображенной на фиг. 11.2 плоскости  $x_1, x_2$ . Теперь они представ-



Фиг. 11.2. Контурная диаграмма.

ляются шестью плоскостями [пронумерованными в соответствии с индексами левых частей уравнений (11.10)], а функция  $\phi$  определяется поверхностью, расположенной наиболее высоко над плоскостью  $x_1, x_2$ . Она является поверхностью выпуклого многогранника, причем наинизшая точка поверхности совпадает, вообще говоря, с его вершиной. Эта вершина образуется при пересечении трех плоскостей, имеющих, согласно уравнениям (11.10), номера 1, 3 и 5. Три перечисленные плоскости определяют значения функции  $\phi$  вплоть до уровня  $\phi=0,5$  включительно и создают трехсторонние контуры, изображенные на фиг. 11.2. Для больших значений  $\phi$  определяющими становятся еще две плоскости, четвертая и шестая, которые создают в итоге пятисторонние контуры. Шестая плоскость с номером 2 не является определяющей ни в одной из точек и не влияет на окончательное решение. Представив графически все три плоскости, определяющие положение вершины в наинизшей точке, получим искомое решение:



$$\begin{aligned} x_1 &= 0,75, \\ x_2 &= 0,5, \\ \varphi &= 0,25. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Будучи весьма наглядной, графическая методика является громоздкой даже для случая двух переменных и практически неосуществима при большем их числе. Поэтому следует разработать более формализованную методику. Она составляет содержание следующего раздела, а сейчас укажем три основных ее момента:

а) постановка задачи как задачи оптимизации с ограничениями;

б) достаточные условия решений (т. е. минимальное значение  $\varphi$ );

в) алгоритм перехода от п. «а» к п. «б» с помощью конечного числа шагов.

Отметим также, что в противоположность традиционной задаче линейного программирования при исследовании операций мы не будем вводить предположение о том, что переменные  $x_i$  положительны. Будем считать, что эти переменные не ограничены и могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

### 11.3. Постановка задачи и ее решение

Первый, уже выполненный шаг в направлении решения задачи заключается в увеличении размерности вектора ошибки согласно формулам (11.8)—(11.10). Матричная форма записи этой операции имеет вид

$$E^* = \begin{bmatrix} E \\ -E \end{bmatrix}, \quad (11.12)$$

где вектор  $E$  содержит  $2n$  элементов. Следующий шаг, состоящий в добавлении новой переменной  $\lambda$  к каждой из ошибок, позволяет сформулировать задачу оптимизации с ограничениями. Применение этой идеи к уравнениям (11.10) дает

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + \lambda - 1, \\ y_2 &= x_1 + \lambda - 1, \\ y_3 &= x_1 - x_2 + \lambda, \\ y_4 &= -x_1 - x_2 + \lambda + 1, \\ y_5 &= -x_1 + \lambda + 1, \\ y_6 &= -x_1 + x_2 + \lambda. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом: минимизировать  $\lambda$  так, чтобы

$$y_1, y_2, \dots, y_6 \geq 0. \quad (11.14)$$

Эта формулировка эквивалентна исходной задаче, потому что для заданных  $x_1$  и  $x_2$  минимальное значение  $\lambda$ , удовлетворяющее ограничениям (11.14), равно  $\varphi$ . В этом смысле новая переменная  $\lambda$  может рассматриваться как целевая функция. Матричная форма записи уравнений (11.13) имеет следующий вид:

$$Y = E^* + \lambda U, \quad (11.15)$$

где  $U$  — вектор-столбец, все элементы которого равны единице. Для практических вычислений систему уравнений удобнее представить в виде таблицы, содержащей  $2n$  строк и  $m+2$  столбцов (табл. 11.1).

Так как мы имеем систему из  $2n$  уравнений относительно  $m+1$  независимых переменных, то целевую функцию можно записать следующим образом:

$$\lambda = \sum a_i y_i + b, \quad (11.16)$$

где  $i$  принимает  $m+1$  значения в диапазоне от 1 до  $2n$ . Если каждый из коэффициентов  $a_i$  положителен, минимум  $\lambda$  достигается, когда все  $y_i$ , выступающие здесь в качестве условных переменных, равны нулю. Соответствующее им значение  $\lambda$  равно  $b$ . В заключение рассмотрим, как следует выполнять необходимые алгебраические операции над системой уравнений, представленной в табл. 11.1 [или вообще над системой (11.15)] для получения зависимой переменной  $\lambda$  в виде (11.16). На первом этапе мы ищем так

Таблица 11.1

	$x_1$	$x_2$	$\lambda$	1
$y_1$	1	1	$\frac{1}{-}$	-1
$y_2$	1	0	1	-1
$y_3$	1	-1	1	0
$y_4$	-1	-1	1	1
$y_5$	-1	0	1	1
$y_6$	-1	1	1	0

$$\lambda = 1$$

называемое допустимое решение [т. е. решение, удовлетворяющее ограничениям (11.14)]; второй этап сводится к получению такой последовательности допустимых решений, чтобы  $\lambda$  никогда не увеличивалась и приводила в конце концов к оптимальному решению.

Начнем с табл. 11.1. Положим каждую из независимых пере-

менных  $x_1$  и  $x_2$ , а также  $\lambda$  равными нулю. Эти условия определяют точку в трехмерном пространстве, однако она относится к числу недопустимых, так как в ней нарушаются ограничения, наложенные на  $y_1$  и  $y_2$ . Это положение всегда можно изменить путем увеличения  $\lambda$  от нуля до тех пор, пока не станут выполняться все ограничения. В этом случае потребуем, чтобы

$$\lambda = 1,$$

как записано под табл. 11.1. Затем одна (или несколько) из условных переменных изменяется до нуля, и мы получаем новую точку путем перестановки соответствующей условной переменной с независимой переменной, значение которой с начального изменено на нулевое. В данном случае мы переставляем  $y_1$  с  $\lambda$ , причем общий элемент соответствующих строки и столбца носит название ведущего. Ведущие элементы в таблицах подчеркнуты. Строка и столбец, содержащие ведущий элемент, также называются ведущими. Операция перестановки включает решение уравнения ведущей строки относительно независимой переменной, соответствующей ведущему столбцу, и подстановку результата в остальные строки. Для рассматриваемого примера это означает, что первое уравнение решается относительно  $\lambda$ , а результат подставляется в остальные пять уравнений. В результате получается новая система уравнений, приведенная в табл. 11.2. Матрица ее имеет ту же размерность, а  $\lambda$  и  $y_1$  поменялись местами. Мы по-прежнему считаем, что

Таблица 11.2

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	1
$\lambda$	-1	-1	1	1
$y_2$	0	-1	1	0
$y_3$	0	-2	1	1
$y_4$	-2	-2	1	2
$y_5$	-2	-1	1	2
$y_6$	-2	0	1	1

$$x_1 = 0,5$$

находимся в точке, соответствующей нулевым значениям независимых переменных  $x_1$  и  $x_2$ , а также  $y_1$ . Далее поменяем местами независимые переменные и соответствующие им зависимые переменные, начиная с первого столбца и продолжая вплоть до получения искомого решения, т. е. до тех пор, пока все независимые перемен-

ные не будут относиться к переменным  $y$ , а все коэффициенты в строке  $\lambda$  не станут положительными. Для получения допустимого решения нужна одна перестановка, затем еще  $m$  перестановок для исключения переменных  $x$  из числа независимых переменных и, кроме того, ряд промежуточных перестановок для получения положительных коэффициентов в строке  $\lambda$ .

Возвращаясь к табл. 11.1 и выбрав в качестве ведущего 1-й столбец, мы видим, что для уменьшения  $\lambda$  следует  $x_1$  изменять в положительную сторону, причем максимально допустимое значение  $x_1$  определяется величиной  $y_6$ . Поэтому 6-я строка становится ведущей; результаты перестановки  $y_6$  и  $x_1$  приведены в табл. 11.3. Две последующие перестановки, показанные в табл. 11.4 и 11.5, приводят к окончательному решению.

Таблица 11.3

	$y_6$	$x_2$	$y_1$	1
$\lambda$	0,5	-1	0,5	0,5
$y_2$	0	-1	1	0
$y_3$	0	-2	1	1
$y_4$	1	-2	0	1
$y_6$	1	-1	0	1
$x_1$	-0,5	0	0,5	0,5

$$x_2 = 0$$

Таблица 11.4

	$y_6$	$y_2$	$y_1$	1
$\lambda$	0,5	1	-0,5	0,5
$x_2$	0	-1	1	0
$y_3$	0	2	-1	1
$y_4$	1	2	-2	1
$y_6$	1	1	-1	1
$x_1$	-0,5	0	0,5	0,5

$$y_1 = 0,5$$

Таблица 11.5

	$\nu_6$	$\nu_2$	$\nu_4$	1
$\lambda$	0,25	0,5	0,25	0,25
$x_2$	0,5	0	-0,5	0,5
$y_3$	-0,5	1	0,5	0,5
$\nu_1$	0,5	1	-0,5	0,5
$y_6$	0,5	0	0,5	0,5
$x_1$	-0,25	0,5	-0,25	0,75

Решение:  $x_1 = 0,75$ ,  $x_2 = 0,5$

Перечислим формальные правила выбора ведущего элемента в  $j$ -м столбце:

*Случай 1.* Независимая переменная относится к переменным  $x$  (этот случай имеет место при первых  $m+1$  перестановках).

а) Выделить знак коэффициента в строке  $\lambda$ .

б) Выделить в  $j$ -м столбце элементы того же знака, исключая строки, соответствующие переменным  $x$ .

в) При положительном знаке выбрать в качестве ведущего элемент, для которого отношение

$$\frac{a_{i, m+2}}{a_{ij}}$$

минимально.

г) При отрицательном знаке выбрать в качестве ведущего элемент, для которого отношение

$$\frac{a_{i, m+2}}{a_{ij}}$$

максимально.

*Случай 2.* Независимая переменная относится к переменным  $y$  (это достигается после первых  $m+1$  перестановок).

а) Выделить знак коэффициента в строке  $\lambda$ .

б) При положительном знаке перейти к следующему столбцу, в противном случае

в) выбрать в качестве ведущего элемент, для которого отношение

$$\frac{|a_{i, m+2}|}{a_{ij}}$$

максимально.

После выбора описанным методом ведущего элемента нужна формализованная методика для получения новой системы уравнений с переставленными переменными. Она строится на основе алгоритма перестановки Штайфеля [7].

#### 11.4. Алгоритм перестановки

Как видно из таблиц, система уравнений представляется матрицей, содержащей  $2n$  строк и  $m+2$  столбца. Если  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  — элементы старой и новой матриц соответственно,  $a_{rs}$  — ведущий элемент, то алгоритм перестановки записывается следующим образом:

$$b_{rj} = -\frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \quad j \neq s, \quad (11.17)$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}, \quad i \neq r, j \neq s, \quad (11.18a)$$

$$b_{is} = \frac{a_{is}}{a_{rs}}, \quad i \neq r, \quad (11.19)$$

$$b_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}. \quad (11.20)$$

Подставив выражение (11.17) в (11.18a), увидим, что при замене последнего уравнения на

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{is} + b_{rj}, \quad i \neq r, j \neq s, \quad (11.18b)$$

методика вычислений становится более эффективной. Отметим, что неравенство  $i \neq r$  означает «исключение ведущей строки», а  $j \neq s$  сводится к «исключению ведущего столбца». Применение этого алгоритма иллюстрируется на численном примере с помощью табл. 11.4.

Ведущий элемент уже был выбран ранее (строка 4, столбец 3), поэтому начнем с модификации ведущей строки согласно уравнению (11.17), результат которой приведен в табл. 11.6. Следующий шаг — модификация всех элементов в соответствии с (11.18b), не принадлежащих ведущим строке и столбцу; результат приведен в табл. 11.7. Последующая модификация ведущего столбца приводит к табл. 11.8, а завершающая замена самого ведущего элемента на обратную величину дает результат, представленный ранее в табл. 11.5. На этом этап перестановки заканчивается.

Таблица 11.6

0,5	1	-0,5	0,5
0	-1	1	0
0	2	-1	1
0,5	1	-2	0,5
1	1	-1	1
-0,5	0	0,5	0,5

Таблица 11.7

0,25	0,5	-0,5	0,25
0,5	0	.1	0,5
-0,5	1	-1	0,5
0,5	1	-2	0,5
0,5	0	-1	0,5
-0,25	0,5	0,5	0,75

Таблица 11.8

0,25	0,5	0,25	0,25
0,5	0	-0,5	0,5
-0,5	1	0,5	0,5
0,5	1	-2	0,5
0,5	0	0,5	0,5
-0,25	0,5	-0,25	0,75

### 11.5. Особенности практического применения минимаксной оптимизации

В предыдущих разделах рассматривалась линейная зависимость ошибок от переменных. В противном случае необходимо использовать итеративную методику с применением в начале каждого этапа линейной аппроксимации ошибок. Подробности этой методики можно найти в статье [8].

Основной недостаток метода минимаксной оптимизации заключается в повышенных требованиях, предъявляемых в отличие от метода наименьших квадратов к объему оперативной памяти вычислительной машины (поскольку матрица системы имеет  $2n \times (m+2)$  элементов). Известно, что решение определяется взаимным пересечением  $m+1$  гиперплоскостей, однако сначала мы обычно не знаем, каковы соответствующие им составляющие ошибок, и приходится совместно решать все  $2n$  уравнений. Однако в отдельных случаях наличие информации о том, что некоторые из ошибок можно не учитывать, позволяет добиться существенного сокращения времени вычислений и значительно снизить требования к объему памяти вычислительной машины.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bown G. C. S., Geiger G. V., Design and Optimisation of Circuits by Computer, *Proc. IEE*, 118, № 5, 649—661 (1971).
2. Rabiner L. R., Gold B., McGonegal C. A., An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-18, № 2, 83—106 (1970).

3. Rabiner L. R., Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, № 4, 280—288 (1972).
4. Rabiner L. R., Techniques for Designing Finite-Duration Impulse-Response Digital Filters, *IEEE Trans. on Communication Technology*, COM-19, № 2, 188—195 (1971).
5. Helms H. D., Digital Filters with Equiripple or Minimax Responses, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-19, № 1, 89—94 (1971).
6. Thajchayapong P., Rayner P. J. W., Recursive Digital Filter Design by Linear Programming, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, № 2, 107—112 (1973).
7. Stiefel E. L., An Introduction to Numerical Mathematics, Academic Press, 1963.
8. Ishizaki T., Wanatable H., An Iterative Chebyshev Approximation Method for Network Design, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-15, № 4, 326—336 (1968).

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие . . . . .	6
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. История и тенденции развития . . . . .	7
1.2. Сравнение аналоговых и цифровых фильтров . . . . .	9
1.3. Время и частота . . . . .	11
1.4. Ограничения . . . . .	14
1.5. Гибридные системы . . . . .	14
1.6. Методика синтеза . . . . .	14
1.7. Почему именно время и частота? . . . . .	15
Литература . . . . .	17
<b>Глава 2. Введение в теорию дискретизации и <math>z</math>-преобразований . . . . .</b>	<b>18</b>
2.1. Введение . . . . .	18
2.2. Модуляция . . . . .	18
2.3. Дискретизация . . . . .	20
2.4. Преобразование Лапласа дискретизованного сигнала . . . . .	21
2.5. Представление дискретизованных сигналов в комплексной плоскости . . . . .	22
2.6. Восстановление сигналов. Теорема отсчетов . . . . .	26
2.7. Соотношение между плоскостью $s$ и плоскостью $z$ . $z$ -преобразования . . . . .	27
2.8. Общее соотношение между сигналами и положениями полюсов . . . . .	29
2.9. Обратное $z$ -преобразование . . . . .	31
2.10. Разностные уравнения, $z$ -преобразования и передаточные функции . . . . .	35
Упражнения на $z$ -преобразования . . . . .	39
Литература . . . . .	40
<b>Глава 3. Общие характеристики цифровых фильтров . . . . .</b>	<b>41</b>
3.1. Общие замечания . . . . .	41
3.2. Уравнение цифрового фильтра . . . . .	43
3.3. Передаточная функция цифрового фильтра . . . . .	44
3.4. Полюсы и нули передаточной функции . . . . .	45
3.5. Устойчивость . . . . .	45
3.6. Частотная характеристика . . . . .	46
3.7. Формы реализации передаточных функций цифровых фильтров . . . . .	48
3.7.1. Последовательная форма . . . . .	49
3.7.2. Биквадратная форма . . . . .	50
3.7.3. Каскадная реализация . . . . .	50
3.7.4. Параллельная реализация . . . . .	52
Литература . . . . .	53
<b>Глава 4. Синтез цифровых фильтров по данным аналоговых фильтров . . . . .</b>	<b>54</b>
4.1. Введение . . . . .	54
4.2. Косвенный метод синтеза цифровых фильтров . . . . .	55
4.3. Билинейное преобразование . . . . .	55
4.4. Обобщенные преобразования аналогового фильтра нижних частот в многополосный фильтр . . . . .	60
4.5. Замечания . . . . .	62
4.6. Сводные данные по преобразованиям . . . . .	65
4.7. Пример . . . . .	65
Литература . . . . .	67

<b>Глава 5. Прямой синтез цифровых фильтров . . . . .</b>	<b>68</b>
5.1. Введение . . . . .	68
5.2. Полиномиальные цифровые фильтры нижних частот . . . . .	71
5.3. Синтез монотонных цифровых фильтров Баттерворта нижних частот . . . . .	72
5.4. Частотные преобразования [4] . . . . .	79
Упражнения . . . . .	80
Литература . . . . .	81
<b>Глава 6. Фильтры с импульсными характеристиками конечной длительности . . . . .</b>	<b>82</b>
6.1. Введение . . . . .	82
6.2. Аналоговый и цифровой трансверсальные фильтры . . . . .	82
6.3. Импульсная характеристика . . . . .	85
6.4. Дискретная свертка . . . . .	86
6.5. Частотная характеристика . . . . .	87
6.6. Полюсы и нули . . . . .	88
6.7. Сравнение аналогового и рекурсивного цифрового фильтров . . . . .	90
6.8. Квантование коэффициентов . . . . .	90
6.9. Проектирование нерекурсивных фильтров методом частотной выборки . . . . .	93
6.10. Временные окна . . . . .	96
6.11. Реализация фильтров . . . . .	97
Упражнения . . . . .	97
Литература . . . . .	98
<b>Глава 7. Методы преобразования Фурье . . . . .</b>	<b>99</b>
7.1. Дискретное преобразование Фурье . . . . .	99
7.2. Теоремы и свойства дискретного преобразования Фурье . . . . .	103
7.2.1. Одномерное ДПФ . . . . .	103
7.2.2. $r$ -мерное ДПФ . . . . .	103
7.2.3. Использование ДПФ для вычисления ОДПФ . . . . .	103
7.2.4. Теорема Парсевала . . . . .	104
7.2.5. Ортогональность . . . . .	105
7.2.6. Энергетический спектр . . . . .	106
7.2.7. Автокорреляционная функция . . . . .	107
7.2.8. Взаимный энергетический спектр и взаимная корреляционная функция . . . . .	108
7.2.9. Свертка . . . . .	108
7.3. Анализ непрерывных систем . . . . .	110
7.4. Вычисление ДПФ . . . . .	113
7.5. Быстрое преобразование Фурье . . . . .	116
7.6. Эффективность алгоритма БПФ . . . . .	121
7.7. Система рекуррентных уравнений, описывающих БПФ . . . . .	122
7.8. Программирование алгоритма . . . . .	124
7.9. Вычисление ДПФ действительных последовательностей . . . . .	128
7.10. Свертка длинных последовательностей . . . . .	137
7.11. Оценка энергетического спектра . . . . .	145
Литература . . . . .	148
<b>Глава 8. Фильтры на основе частотной выборки . . . . .</b>	<b>149</b>
8.1. Введение . . . . .	149
8.2. Сущность метода . . . . .	149
8.3. Реализация элементарных характеристик . . . . .	152
8.4. Полная структура фильтра . . . . .	154
8.5. Интерпретация с помощью нулей и полюсов . . . . .	154
8.6. Связь с дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) [2] . . . . .	156
8.7. Приближения, связанные с дискретизацией . . . . .	157
8.8. Явление Гиббса и частотная характеристика . . . . .	158
Литература . . . . .	159

<b>Глава 9. Фильтры на основе частотной выборки с целыми коэффициентами</b>	<b>160</b>
9.1. Введение	160
9.2. Цифровые фильтры с линейной фазовой характеристикой	161
9.3. Рекурсивная реализация фильтров нижних частот с линейной фазовой характеристикой	162
9.4. Фильтры верхних частот и полосовые фильтры	166
9.5. Боковые лепестки фильтров с целыми коэффициентами	167
9.5.1. Фильтры нижних и верхних частот	167
9.5.2. Полосовые фильтры с центральной частотой $\omega_0 = \pi/2T$	167
9.5.3. Полосовые фильтры с центральной частотой $\omega_c = \pi/3T$ или $\omega_0 = 2\pi/3T$	168
Упражнения	168
Литература	169
<b>Глава 10. Эффекты квантования в цифровых фильтрах</b>	<b>170</b>
10.1. Введение	170
10.2. Построение цифровых фильтров	171
10.3. Анализ арифметических устройств	171
10.3.1. Арифметическое устройство с фиксированной запятой	171
10.3.2. Арифметическое устройство с плавающей запятой	172
10.4. Эффекты квантования	173
10.4.1. Квантование входного сигнала	173
10.4.2. Квантование коэффициентов фильтра по конечному числу разрядов	177
10.4.3. Квантование результатов арифметических операций	181
10.4.3.1. Прямая форма	181
10.4.3.2. Каноническая форма	183
10.4.3.3. Параллельная форма	185
10.4.3.4. Каскадная форма	186
10.4.3.5. Заключение	186
10.5. Измерение шумов	187
10.6. Предельные циклы низкого уровня	187
10.7. Колебания переполнения	189
Приложение 10А. Построение цифрового фильтра	191
Приложение 10Б. Дисперсия ошибок округления	194
Приложение 10В. Дискретная теорема Парсеваля	195
Приложение 10Г. Обобщенная связь между смещением полюсов и изменением коэффициентов фильтра [15]	196
Приложение 10Д. Ошибки округления результатов арифметических операций для прямой и канонической форм цифрового фильтра 1-го порядка	197
Литература	199
<b>Глава 11. Методы оптимизации синтеза цифровых фильтров</b>	<b>200</b>
11.1. Введение	200
11.2. Минимаксный критерий и импульсная характеристика конечной длительности	203
11.3. Постановка задачи и ее решение	206
11.4. Алгоритм перестановки	211
11.5. Особенности практического применения минимаксной оптимизации	212
Литература	212