



W. KECS

P. P. TEODORESCU

**INTRODUCERE  
IN TEORIA DISTRIBUTIILOR  
CU APLICATII IN TEHNICĂ**

EDITURA TEHNICĂ  
BUCURESTI—1975

**В.Кеч, П.Теодореску**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ  
ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В ТЕХНИКЕ**

Перевод с румынского О.Е.Булгару

Под редакцией Б.Е.Побегри

631764

Издательство 'Мир'

Москва 1978-518с.

ИНВ № 33  
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В  
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

**БИБЛИОТЕКА  
КОЛОХЗА  
ОСКОРКА**

Книга содержит элементарное изложение основ теории обобщенных функций, главным образом дельта-функций Дирака и их производных, часто встречающихся в инженерных расчетах. С помощью этих функций осуществляется представление сосредоточенных механических и физических величин. Основная часть книги посвящена приложениям теории обобщенных функций в механике, физике, электротехнике.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, специализирующихся в самых различных областях механики и физики, а также для студентов технических вузов.

*Редакция литературы по новой технике*

© Перевод на русский язык, с авторскими изменениями и дополнениями, «Мир», 1978.

К  $\frac{20204-158}{041(01)-78}$  158-78

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Тот, кто проводил более или менее громоздкие математические выкладки, не раз испытывал досаду от того, что довольно «хорошая» непрерывная функция в некоторых точках является недифференцируемой, рассматриваемый ряд или интеграл расходится, а преобразование Фурье достаточно простой функции, например константы, не существует. Эта досада усугублялась тем, что проводимые выкладки не являлись самоцелью, а были лишь промежуточным этапом в получении необходимого результата. (В дальнейшем от недифференцируемой функции необходимо было взять интеграл, сложить расходящиеся ряды или интегралы с подобными себе, а преобразование Фурье нужно было лишь для того, чтобы упростить задачу и на заключительном этапе вернуться к оригиналу с помощью обратного преобразования.)

Именно в том, чтобы сделать промежуточные операции «законными», неоценимую услугу исследователю оказывают обобщенные функции, обобщенные производные, обобщенное понимание сходимости рядов и интегралов, обобщенное преобразование Фурье. Рассмотрению таких понятий посвящено в настоящее время довольно много работ, причем не только «чисто» математических. Нельзя также пожаловаться на отсутствие литературы по прикладным вопросам теории обобщенных функций. Среди механиков, физиков и инженеров большой популярностью пользуются книги И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, В. С. Владимирова, Я. Микусин-

ского и Р. Сикорского, Л. Шварца, Г. Бремермана<sup>1)</sup> и многие другие.

Однако почти во всех современных руководствах по теоретической механике, теории упругости и гидромеханике основные положения теории обобщенных функций полностью игнорируются. Хотя для обозначения сосредоточенных воздействий в некоторых из них и применяются символы дельта-функции Дирака и ее производных, при оценке их влияния используются средства классического анализа с его вырезанием окрестностей особых точек и рассмотрением пределов при уменьшении этих окрестностей.

Предлагаемая советскому читателю книга румынских авторов поможет механикам и физикам принять на вооружение основные достижения теории обобщенных функций для описания сосредоточенных нагрузок, масс, электрических зарядов, фундаментальных решений теории упругости и т. д.

Книга предназначена для тех, кому часто приходится сталкиваться в различных ситуациях при решении самых разнообразных задач с такими функциями, как единичная функция Хевисайда, дельта-функция Дирака и ее производные.

Нельзя сказать, что от читателя не требуется никакой предварительной математической подготовки. Хотя книга содержит минимальный теоретический материал, все же предполагается, что читатель владеет основными понятиями функционального анализа или по крайней мере может в них разобраться, заглянув в какой-либо учебник, например в книгу А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа». Имея в виду именно такого читателя, мы не делали при переводе разъяснений используемых авторами математических понятий. Например, не отмечалось, что под компактными множествами авторы понимают ограниченные замкнутые множества, ибо рассматриваются только евклидовы пространства  $R^n$ .

При переводе мы старались использовать терминологию, общепринятую в отечественной литературе. В слу-

<sup>1)</sup> См. список литературы на стр. 504.

чаях отсутствия полностью эквивалентных терминов на русском языке делались соответствующие сноски. Заметим, что слово «*distributie*» — «распределение» переводилось нами как «обобщенная функция», что более принято в отечественной литературе, хотя некоторые авторы и делают различие между понятиями «распределение» и «обобщенная функция» (см., например, книгу А. Г. Земадяна «Интегральные преобразования обобщенных функций»). Прилагательное «*real*» переводилось как «действительный», хотя не менее распространен термин «вещественный».

Для русского издания авторы существенно переработали книгу. Сделаны значительные добавления в тексте и литературе, исправлены опечатки и неточности.

Книга, несомненно, заинтересует многих инженеров, механиков, физиков. Она будет также полезна аспирантам и студентам технических учебных заведений.

*Б. Е. Победря*

## **ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ**

В русском издании этой книги дано несколько новых постановок задач, улучшены некоторые доказательства, приведены новые результаты и формулы, полезные в различных областях.

Настоящее издание дополнено также несколькими новыми пунктами и разделами, относящимися как к теории обобщенных функций, так и к ее применениям. Рассмотрены обобщенные функции с компактными носителями и периодические обобщенные функции, имеющие многочисленные применения. В разделы, где рассматриваются дифференциальные и интегральные уравнения, включены сведения об интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки, а также функциях Грина и обобщенных функциях Грина, тесно связанных с фундаментальными решениями в смысле теории обобщенных функций.

В разделе, относящемся к приложениям в механике, описаны применения обобщенных функций к системам материальных точек с переменной массой. Выведены уравнения Лагранжа для систем материальных точек, масса которых изменяется непрерывно или скачкообразно, а также для случая столкновения.

В настоящем издании указаны новые важные применения, связанные с постановкой плоской задачи теории упругости в напряжениях как в статическом, так и в динамическом случаях. Получены фундаментальные решения для упругой плоскости (в статическом и динамическом случаях) и поставлена задача для упругой полу-



плоскости (статическая), включая особый случай периодических нагрузок.

Методы теории обобщенных функций очень полезны при изучении линейной вязкоупругости. В книге подробно рассмотрены одномерный случай и модели Кельвина и Максвелла.

Во многих областях физики встречаются задачи, связанные с линейными колебаниями. С помощью методов теории обобщенных функций проведено исследование таких колебаний, включая продольные колебания механических систем.

В настоящем издании дополнен также список литературы.

Авторы благодарят издательство «Мир» за разрешение на увеличение объема книги, что позволило включить большое количество новых задач.

Авторы также приносят благодарность д-ру физико-математических наук, профессору Московского государственного университета Б. Е. Победре за его содействие улучшению издания нашей книги на русском языке.

21 мая 1977 г.

*Авторы*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение многих теоретических и практических задач тесно связано как с методологическим подходом, так и с используемым математическим аппаратом. При математическом описании физических явлений и решении соответствующих краевых задач могут возникнуть определенные трудности, связанные с дополнительными ограничениями, появляющимися в связи с ограниченными возможностями используемого математического аппарата. Вообще говоря, эти ограничения вовсе не необходимы и они не всегда связаны с рассматриваемым физическим явлением.

К обычно используемым методам относятся методы классического математического анализа. Однако возможности этих методов часто ограничены. Так, например, не всякая непрерывная функция дифференцируема. Это связано с математическим аппаратом и сильно влияет на единство и общность результатов. Теория обобщенных функций является мощным математическим аппаратом, позволяющим решать широкий класс задач (которые, вообще говоря, не поддаются решению методами классического математического анализа) без ограничений, не связанных с физическим явлением. Этот аппарат позволяет строго обосновать применяемые методы и полученные результаты и дает возможность построить единую и общую теорию.

В первой части книги авторы приводят элементы теории обобщенных функций — формулировки теорем с их возможными применениями, не уделяя при этом слиш-

ком много внимания их доказательству, но и без ущерба для математической строгости. Рассматриваются такие вопросы, как дифференцирование обобщенных функций, дельтаобразные последовательности, прямое произведение и свертка обобщенных функций, обобщенные функции, сосредоточенные на кривых, поверхностях и объемах, однородные обобщенные функции, интегральные преобразования обобщенных функций, и приводятся различные вычислительные формулы. Особо подчеркиваются возможности применения этой теории при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, а также уравнений в свертках, встречающихся в механике, физике и технике. Много внимания уделяется также методике решения возникающих краевых задач (задач Коши, многоточечных краевых задач и т. д.).

Во второй части книги рассматривается представление некоторых механических и физических величин (связанные векторы, сосредоточенные нагрузки, моменты систем материальных точек, электрические величины) через обобщенные функции. Это представление выявляет единство математического описания непрерывных и разрывных явлений. Приводятся примеры применения в механике (общие теоремы, задачи Коши для материальной точки, линейные колебания, задачи для балки и нитей, краевые задачи теории упругости), физике (в акустике — эффект Доплера, в оптике — явление дифракции, в исследовании электростатического поля — выражения для напряженности и потенциала) и электротехнике (сила тока и электрический заряд, полное сопротивление и проводимость электрических цепей, отрицательные частоты, установившиеся и переходные процессы, линейные динамические системы, стационарные системы, дифференцирующие цепочки и т. д.). Приведены также некоторые характерные задачи, подчеркивающие эффективность применения обобщенных функций.

Следует отметить, что наряду с известными результатами авторы приводят большое количество и новых. В книге излагается методика подхода к различным задачам, которая иллюстрируется примерами, выявляются

различные стороны этой методики, а также трудности, которые при этом могут возникнуть.

Цель книги в том, чтобы привлечь внимание к возможностям использования современного математического аппарата при изучении некоторых механических или физических явлений, а также в технике, т. е. книга обращена к широкому кругу читателей, применяющих математические методы, и особенно к тем, кто должен решать дифференциальные уравнения: инженерам, занимающимся проектированием и исследовательской работой в различных областях, механикам, физикам, студентам высших учебных заведений.

23 апреля 1975 г.

*Авторы*

## Элементы теории обобщенных функций

### 1.1. ПОНЯТИЕ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА. ОПЕРАЦИИ

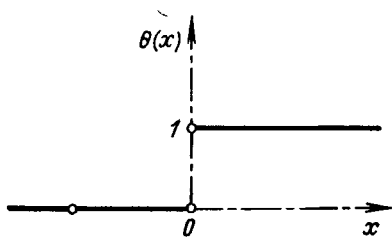
#### 1.1.1. Введение

##### 1.1.1.1. Единичная функция. Дельта-функция

Обобщенные функции были введены в связи с трудностями решения некоторых задач математической физики, квантовой механики, электромагнетизма и т. д., где, помимо непрерывных функций, описывающих непрерывно распределенные величины (масса, источники тепла, механический импульс и др.), понадобилось использовать разрывные функции для сосредоточенных величин (точечная масса, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и др.).

Из разрывных функций важную роль сыграла единичная функция  $\theta(x)$ , определенная следующим образом (фиг. 1.1):

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$



Фиг. 1.1.

Эта функция была введена в 1898 г. английским инженером Хевисайдом для решения операционными методами некоторых дифференциальных уравнений теории электрических цепей.

В 1926 г. английский физик Дирак ввел в квантовой механике символ  $\delta$ , названный им *дельта-функцией*, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией. С физической точки зрения  $\delta$ -функция Дирака представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начале координат. Если этот заряд имеет величину  $m$ , то его плотность

$$\rho(x) = m\delta(x). \quad (1.1.2)$$

Отсюда следует, что символ  $\delta(x)$  обладает свойствами

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \infty & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1.1.3')$$

Заметим, что, строго говоря,  $\delta(x)$  не представляет собой функцию, так как не существует функций, удовлетворяющих соотношениям (1.1.3) и (1.1.3'). Получился, таким образом, некоторый формализм в применении  $\delta$ -функции, с помощью которого достаточно просто были исследованы некоторые разрывные явления. В частности, было замечено, что между единичной функцией  $\theta(x)$  и функцией  $\delta(x)$  существует связь

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (1.1.4)$$

которая, очевидно, не имеет смысла в рамках классического анализа, но справедлива в смысле теории обобщенных функций.

### 1.1.1.2. Исторический очерк

Другими областями, где используются обобщенные функции, являются теория обыкновенных дифференциальных уравнений и теория уравнений в частных произ-

водных. С. Л. Соболев в 1936 г. ввел понятие обобщенного решения для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Были введены и другие новые понятия: конечные части расходящихся интегралов, формальные производные в случае преобразования Фурье и т. д., что позволило создать единую теорию обобщенных функций. Так, в 1950—1951 гг. появилась монография Л. Шварца, в которой систематически излагается теория обобщенных функций и дается математическое обоснование формализма применения обобщенных функций в различных областях механики, физики и техники.

Основанная на методах функционального анализа теория обобщенных функций привела к развитию ряда направлений математики: теории дифференциальных уравнений, операционного исчисления, теории преобразований Фурье и др. Позже она была развита в работах Я. Микусинского и Р. Сикорского, И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, Л. Хёрмандера, А. Х. Земаняна, Г. Бремермана и др. Румынская литература в этой области представлена монографиями Г. Маринеску, Р. Кристеску, В. Кеча и П. П. Теодореску.

Л. Шварц вводит обобщенные функции методом линейных функционалов; Я. Микусинский и Р. Сикорский вводят обобщенные функции с помощью фундаментальных последовательностей непрерывных функций, т. е. используя секвенциальный метод. Последний метод аналогичен методу Р. Дедекинда введения действительных чисел посредством сечений в области рациональных чисел. Таким образом, становится очевидным, что понятие обобщенной функции является обобщением понятия функции. С другой стороны, этот метод ближе к классическому анализу, что привело к его широкому применению в физике.

Заметим еще, что при решении конкретных задач механики, физики или техники дельта-функция (и другие аналогичные функции) встречается, как правило, только на промежуточных этапах; в окончательном ответе они или отсутствуют, или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией. Это указывает на то, что в действительности каж-

дая обобщенная функция связана с определенным функционалом и обобщенные функции с помощью линейных функционалов вводятся естественным путем, что оказывается эффективным и с точки зрения моделирования физических явлений, и с точки зрения вычислений. Мы воспользуемся этим в дальнейшем для введения понятия обобщенной функции.

## 1.1.2. Основные функции и основные пространства

### 1.1.2.1. Основное пространство $K^m$

Пусть  $R^n$  —  $n$ -мерное действительное евклидово пространство, а  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — точки из этого пространства. Определим скалярное произведение следующим образом:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (1.1.5)$$

а норму — выражением

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |x|. \end{aligned} \quad (1.1.5')$$

Расстояние между точками  $x$  и  $y$  определяется по формуле

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (1.1.6)$$

**Определение 1.1.1.** Основное пространство  $K^m$  состоит из действительных функций  $\varphi(x)$ , называемых *основными функциями*, класса  $C^m$  (т. е. имеющими непрерывные производные до порядка  $m$  включительно), равными нулю вместе со всеми своими производными до порядка  $m$  включительно вне некоторых ограниченных областей.

Эти области вместе с границами определяют *носители основных функций*; обозначим их через  $\text{supp } \varphi(x)$ . Носитель функции  $\varphi(x)$  определим как замыкание множества точек  $x$ , для которых  $\varphi(x) \neq 0$ ; таким образом,



если  $x_0 \in \text{supp } \varphi(x)$ , то, какой бы ни была окрестность  $V$  точки  $x_0$ , существует точка  $x \in V$ , для которой  $\varphi(x) \neq 0$ . Так как носитель функции  $\varphi(x)$  ограничен, то он является *компактным множеством* (ограниченное замкнутое множество). Поэтому можно утверждать, что функции  $\varphi(x) \in K^m$  имеют непрерывные производные до порядка  $m$  включительно и *компактный носитель*.

Основное пространство  $K^m$  является *векторным (линейным) пространством*, так как если  $\varphi_1, \varphi_2 \in K^m$ ,  $\alpha, \beta \in R$ , то  $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in K^m$ . Чтобы это пространство было *топологическим*, определим сходимость к нулю (сдвигом можно определить сходимость к любой точке) последовательности функций  $\varphi_k(x) \in K^m$ ,  $k \in N_0$  ( $N_0 = N - \{0\}$ ), следующими условиями:

$$a) \text{supp } \varphi_k(x) \subset |x| \leq a;$$

$$b) D^p \varphi_k(x) \xrightarrow{u} 0, D^p = \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}},$$

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq m.$$

В этом случае

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = 0. \quad (1.1.7)$$

Выражение (1.1.7) равносильно условиям а) и б), из которых первое означает, что носитель каждого члена последовательности  $\varphi_k(x) \in K^m$  содержится в шаре радиуса  $a$  с центром в начале координат ( $n$ -мерный шар), а второе условие означает, что эта последовательность функций вместе со всеми своими производными до порядка  $m$  включительно равномерно сходится (в обычном смысле) к нулю. Таким образом, множество функций  $\varphi(x) \in K^m$  со сходимостью, определенной выше, образует *векторное топологическое пространство*.

Если определить норму в пространстве  $K^m$  выражением

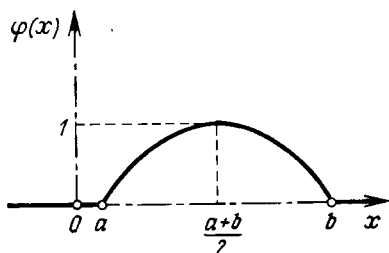
$$\|\varphi(x)\|_m = \sup_{p < m, |x| < a} |D^p \varphi(x)|, \quad (1.1.8)$$

то условие б) равномерной сходимости к нулю имеет следующий вид:

$$б') \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k(x)\|_m = 0.$$

Рассмотрим функцию (фиг. 1.2)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin \frac{x-a}{b-a} \pi & \text{при } x \notin [a, b], \\ 0 & \text{при } x \in [a, b]. \end{cases} \quad (1.1.9)$$



Фиг. 1.2.

Заметим, что эта функция непрерывна и имеет компактный носитель (отрезок  $[a, b]$ ). Она бесконечное число раз дифференцируема (за исключением точек  $a$  и  $b$ ), и можно написать

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{b-a} \cos \frac{x-a}{b-a} \pi & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Для односторонних производных в точках  $a$  и  $b$  имеем выражения

$$\varphi'_-(a) = 0, \quad \varphi'_+(a) = \frac{\pi}{b-a},$$

$$\varphi'_-(b) = -\frac{\pi}{b-a}, \quad \varphi'_+(b) = 0.$$

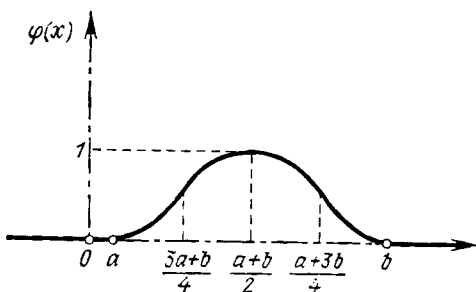
Это означает, что рассматриваемая функция не дифференцируема в этих точках. Таким образом, функция

(1.1.9) непрерывна и имеет компактный носитель  $[a, b]$ ; она принадлежит основному пространству  $K^0$ .

Аналогично пусть дана функция (фиг. 1.3)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{x-a}{b-a} \pi & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (1.1.9')$$

Эта функция непрерывна вместе со своей первой производной и имеет компактный носитель  $[a, b]$ . Она не имеет



Фиг. 1.3.

непрерывных производных второго и выше порядка в точках  $a$  и  $b$  несмотря на то, что бесконечное число раз дифференцируема в остальных точках. Таким образом, функция  $\varphi(x) \in K^1(a, b)$ .

Вообще методом математической индукции можно доказать, что функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^{m+1} \frac{x-a}{b-a} \pi & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases} \quad (1.1.10)$$

является основной и принадлежит пространству  $K^m(a, b)$ .

С помощью рассмотренных функций можно построить и другие функции того же основного пространства. Так, если  $\varphi(x) \in K^m$ , а  $f(x)$  — функция класса  $C^m$ , то  $\psi(x) = f(x)\varphi(x) \in K^m$ .

Функция

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \sin^{m+1} \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i} \pi & \text{при } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_n, \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin D_n \end{cases} \quad (1.1.11)$$

является функцией  $n$  переменных и принадлежит пространству  $K^m$  с носителем  $D_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . В частности, функция

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} \pi \sin \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \pi & \text{при } (x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \end{cases} \quad (1.1.11')$$

принадлежит основному пространству  $K^0$  и имеет носителем область в виде прямоугольника  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ .

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin^{m+1} \frac{x \div a}{2a} \pi & \text{при } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{при } x \notin [-a, a]. \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Очевидно, что  $\text{supp } \varphi_n(x) = [-a, a]$  для любого  $n$ . Эта последовательность вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно равномерно сходится к нулю, а носители всех членов последовательности ограничены. Поэтому последовательность (1.1.12) сходится к нулю в основном пространстве  $K^m$ .

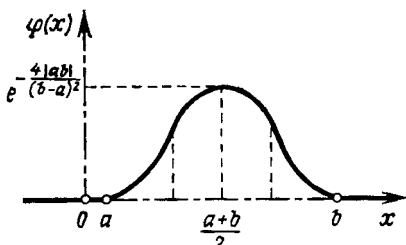
С другой стороны, последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin^{m+1} \frac{\frac{x}{n} + a}{2a} \pi & \text{при } \frac{x}{n} \in [-a, a], \\ 0 & \text{при } \frac{x}{n} \notin [-a, a], \end{cases} \quad (1.1.12')$$

несмотря на то что равномерно сходится к нулю вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно, все же не является последовательностью, сходящейся к нулю в пространстве  $K^m$ , так как  $\text{supp } \varphi_n(x) = [-na, na]$  и условие а) ограниченности носителей при  $n \rightarrow \infty$  не выполняется.

### 1.1.2.2. Основное пространство $K$

Если для пространства  $K^m$  положить  $m = \infty$ , то получится *основное пространство  $K$* , образованное бесконечно



Фиг. 1.4а.

дифференцируемыми функциями (класса  $C^\infty$ ) с компактными носителями. Что касается сходимости к нулю в пространстве  $K$ , то она определяется аналогично сходимости в пространстве  $K^m$  с условием, что последовательность основных функций вместе со всеми своими производными любого порядка равномерно сходится к нулю, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k(x)\|_m = 0 \text{ для любого } m. \quad (1.1.13)$$

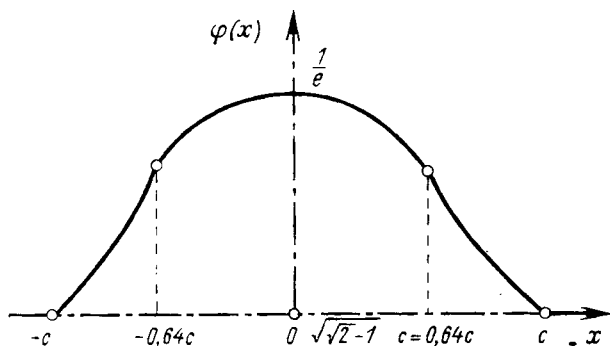
Рассмотрим функцию (фиг. 1.4а)

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|ab|}{(x-a)(b-x)}} & \text{при } x \in (a, b), \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b). \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Легко можно установить, что она бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель  $[a, b]$ . В точках  $a$  и  $b$  функция  $\varphi(x)$  вместе со своими производными лю-

бого порядка равна нулю, т. е. в этих точках ее график имеет касание бесконечного порядка с осью абсцисс.

Возьмем, в частности,  $a = -c$ ,  $b = c$ ; тогда получим следующую основную функцию (фиг. 1.46):



Фиг. 1.46.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{c^2}{c^2-x^2}} & \text{при } x \in (-c, c), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (1.1.14')$$

Аналогично в евклидовом пространстве  $R^n$  рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}} & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r \geq a, \end{cases} \quad (1.1.15)$$

где  $r = |x|$ . Носителем этой функции является  $n$ -мерный шар с центром в начале координат  $|x| \leq a$ . Следовательно, рассматриваемая функция принадлежит основному пространству  $K$ .

Функция

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{|a_i b_i|}{(x_i - a_i)(b_i - x_i)}} & \text{при } x_i \in (a_i, b_i), \\ 0 & \text{при } x_i \notin (a_i, b_i) \end{cases} \quad (1.1.16)$$

тоже является основной, принадлежит пространству  $K$  и имеет носителем область  $D_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ .

Если обозначить через  $K^m(D)$  основное пространство, образованное функциями класса  $C^m$  с носителями в  $n$ -мерном компакте  $D$ , то между пространствами  $K^m(D)$ ,  $K^m$ ,  $K(D)$  и  $K$  можно записать соотношения

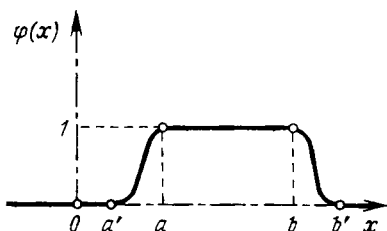
$$K^m(D) \subset K^m, \quad K(D) \subset K \subset K^m \subseteq K^0, \quad (1.1.17)$$

$$\bigcup_D K^m(D) = K^m, \quad \bigcup_D K(D) = K, \quad \bigcap_{m=0}^{\infty} K^m = K, \quad (1.1.17')$$

где объединения осуществляются по всем компактам  $D$ .

**Теорема 1.1.1.** Если  $E$  является компактным множеством из  $R^n$ , а  $F$  — открытое множество, содержащее  $E$  ( $F \supset E$ ), то существует основная функция  $\varphi(x)$ , равная единице на  $E$ , нулю вне  $F$  и заключенная между 0 и 1 в остальной области.

На фиг. 1.5 приведен график этой функции для  $n=1$  (компакт  $E = [a, b]$ ,  $F = (a', b') \supset [a, b]$ ).



Фиг. 1.5.

**Теорема 1.1.2.** Если  $\varphi(x) \in K$ , а  $U_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) — конечное число областей<sup>1)</sup>, покрывающих носитель функции  $\varphi(x)$ , то существуют функции  $e_k(x) \in K$ , такие, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi(x) e_k(x), \quad \text{supp } e_k(x) \subset U_k, \quad (1.1.18)$$

<sup>1</sup> То есть открытых множеств. — Прим. ред.

причем эти функции  $e_k(x) \in [0, 1]$ , равны нулю вне областей  $U_k$  и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^N e_k(x) = 1. \quad (1.1.19)$$

Последнее свойство представляет собой теорему разбиения единицы и используется при доказательстве локальных свойств обобщенных функций и при выполнении операций над ними.

Соотношение (1.1.18) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) \in K, \quad \text{supp } \varphi_k(x) \subset U_k. \quad (1.1.18')$$

Теорема справедлива и для  $N = \infty$ .

**Теорема 1.1.3.** Пусть  $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$ ,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ . Тогда существует последовательность

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{i=1}^N u_{ik}(x) v_{ik}(y), \quad \text{где } u_{ik}(x) \in K(R^n), \quad v_{ik}(y) \in K(R^m),$$

которая сходится к  $\varphi(x, y)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Это означает, что множество основных функций

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i(x) v_i(y), \quad \text{где } u_i(x) \in K(R^n), \quad v_i(y) \in K(R^m),$$

плотно в  $K(R^{n+m})$ .

Заметим, что функция  $\varphi(x) = C$ ,  $C = \text{const} \neq 0$ , не является основной, так как хотя она и бесконечно дифференцируема, но не обладает компактным носителем. Однако функция  $\varphi(x) = 0$  является основной функцией.

### 1.1.2.3. Основное пространство $S$

Основное пространство  $S$  получается расширением пространства  $K$ ; по определению это пространство содержит все функции  $\varphi(x)$  класса  $C^\infty$ , которые при  $|x| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю вместе со всеми своими производными



любого порядка быстрее любой степени  $1/|x|$ <sup>1)</sup>. Эти функции удовлетворяют соотношению

$$|x^k D^q \varphi(x)| \leq C_{kq}, \quad (1.1.20)$$

где

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

$$D^q = \frac{\partial^{q_1+q_2+\dots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \dots \partial x_n^{q_n}}, \quad (1.1.20')$$

$$C_{kq} = C_{k_1 k_2 \dots k_n q_1 q_2 \dots q_n}(k_1, k_2, \dots, k_n, q_1, q_2, \dots, q_n = 0, 1, 2, \dots).$$

**Определение 1.1.2.** Последовательность функций  $\varphi_k(x) \in S$  сходится к функции  $\varphi(x) \in S$ , если для любых  $\alpha, \beta$

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \Rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi(x),$$

$$k \rightarrow \infty, x \in R^n, \quad (1.1.21)$$

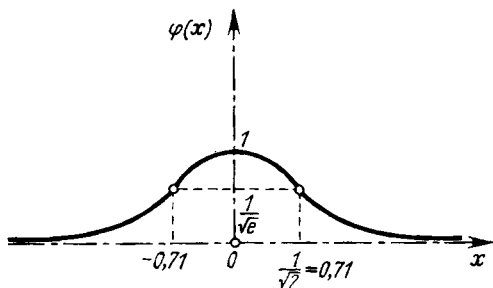
где  $C_{\alpha\beta}$  не зависят от  $k$ .

Пространство  $S$  линейно, так как для любых  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$  и  $\varphi_1, \varphi_2 \in S$  имеем  $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \in S$ .

Следует отметить, что пространство  $S$  шире пространства  $K$  ( $K \subset S$ ), так как любой элемент  $\varphi(x) \in K$  принадлежит и пространству  $S$ ; обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Пространство  $S$  получено расширением пространства  $K$  путем уточнения поведения на бесконечности функций  $\varphi(x)$ , которое менее ограничительно, чем в случае пространства  $K$ . Именно в этом и состоит существенное отличие между этими пространствами.

Из определения сходимости в пространстве  $S$  следует, что она слабее сходимости в пространстве  $K$ , так как из сходимости в пространстве  $K$  следует сходимость в пространстве  $S$ . Если  $\varphi \in K$  и  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  в  $K$ , то  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  и в  $S$ . Более того, пространство  $K$  плотно в  $S$ , так как для лю-

<sup>1</sup> То есть носителем функции пространства  $S$  может быть неограниченное множество (некомпактное). — Прим. ред.



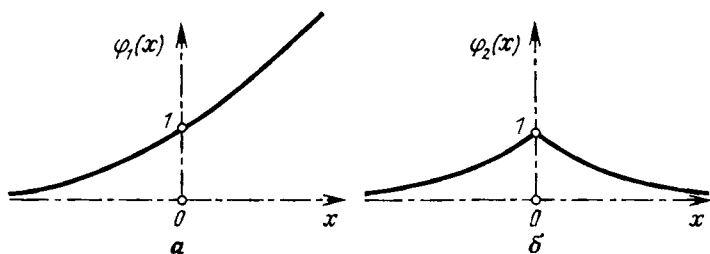
Фиг. 1.6.

бого  $\varphi \in S$  существует последовательность  $\varphi_k \in K$ , такая, что  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ .

Функция (фиг. 1.6)

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad x \in R, \quad (1.1.22)$$

принадлежит основному пространству  $S$ , что можно легко проверить. В отличие от нее функции (фиг. 1.7, а, б)



Фиг. 1.7.

$$\varphi_1(x) = e^x, \quad \varphi_2(x) = e^{-|x|}, \quad x \in R, \quad (1.1.23)$$

не принадлежат пространству  $S$ . Действительно, функция  $\varphi_1(x)$  не стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , а функция  $\varphi_2(x)$  не дифференцируема в начале координат.

Заметим, что если  $a(x) \in C^\infty$  и  $\varphi(x) \in S$ , то функция  $\psi(x) = a(x)\varphi(x)$  не всегда принадлежит пространству  $S$ ; например, если  $a(x) = e^{x^2}$ , то функция  $a(x)e^{-x^2} \notin S$ . Можно показать, что если функция  $a(x) \in C^\infty$  вместе со

всеми своими производными любого порядка и не возрастает при  $x \rightarrow \infty$  быстрее полинома, то функция  $a(x)\varphi(x) \in S$ . Этими свойствами обладают, например, функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $P(x)$  (полином).

Аналогично функция

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= e^{-|x|^2} = \\ &= e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}, \quad x \in R^n,\end{aligned}\quad (1.1.24)$$

принадлежит основному пространству  $S$ . Тому же пространству принадлежит, в частности, и функция

$$\varphi(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in R^2. \quad (1.1.24')$$

Функция

$$\varphi(x, y, z) = x^m y^n z^p e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad (x, y, z) \in R^3, \quad (1.1.25)$$

тоже принадлежит основному пространству  $S$ .

### 1.1.3. Пространство обобщенных функций

#### 1.1.3.1. Понятие обобщенной функции.

##### Пространство обобщенных функций

**Определение 1.1.3.** *Обобщенной функцией* называется каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве.

Обозначим через  $\Phi$  рассматриваемое основное пространство (например,  $K^m$ ,  $K$  или  $S$ ). Приведенное определение включает следующие условия:

а) каждой основной функции  $\varphi \in \Phi$  соответствует по определенному закону  $f$  действительное число, которое обозначим через  $(f, \varphi)$ , т. е.  $\varphi \xrightarrow{f} (f, \varphi)$ ;

б) для любых  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$  и  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$  выполняется соотношение

$$(f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 (f, \varphi_1) + \lambda_2 (f, \varphi_2);$$

в) если  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $\varphi \in \Phi$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f, \varphi_k) = (f, \varphi).$$

Первое из этих условий является выражением *действи-*

тельности функционала, второе выражает *линейность*, а третье — *непрерывность* функционала. Определенное таким образом основное пространство является топологическим векторным пространством. Чтобы ввести явно рассматриваемую переменную, запишем функционал  $f$  через  $f(x)$ .

Поскольку функционал, определенный условиями а) — в), принимает действительные значения, то *обобщенная функция будет действительной*. Очевидно, можно ввести и *комплексные обобщенные функции*; для этого достаточно рассматривать вместо действительного основного пространства комплексное основное пространство, оставляя в силе определение 1.1.3. Число  $(f, \varphi)$ , соответствующее комплексной основной функции  $\varphi$ , будет действительным или комплексным. В дальнейшем будут рассматриваться только действительные обобщенные функции; случаи комплексных обобщенных функций будут оговорены.

Совокупность обобщенных функций, порождаемых основным пространством  $\Phi$ , образует топологическое пространство  $\Phi'$ , сопряженное с пространством  $\Phi$ <sup>1</sup>). Соответственно определяются пространства  $(K^m)'$ ,  $K'$  и  $S'$ . В зависимости от рассматриваемых основных пространств получаются различные виды обобщенных функций. Так, обобщенные функции, определенные на пространстве  $K^m$ , называются *обобщенными функциями конечного порядка*  $p \leq m$  (поскольку из включения  $K^m \subseteq K^p$ ,  $m \geq p$ , следует включение  $(K^p)' \subseteq (K^m)'$ ); обобщенные функции, определенные на пространстве  $K^0$  (случай  $m=0$ ), называются *мерами*. Обобщенные функции, определенные на пространстве  $K$ , называются *обобщенными функциями бесконечного порядка*, а обобщенные функции, определенные на пространстве  $S$ , — *обобщенными функциями медленного роста*.

Поскольку сходимость, определенная в пространстве  $K$ , сильнее сходимости, определенной в пространстве  $S$  ( $S \supset K$ ), то множество функционалов, определенных на

<sup>1</sup> Совокупность всех непрерывных линейных функционалов, определенных на некотором топологическом линейном пространстве  $\Phi$ , образует линейное пространство  $\Phi'$ , называемое сопряженным с  $\Phi$ . — *Прим. ред.*

пространстве  $K$ , содержит множество функционалов, определенных на пространстве  $S$ . Следовательно, имеет место соотношение

$$S' \subset K'. \quad (1.1.26)$$

Поскольку основное пространство  $K$  плотно в  $S$ , то обобщенные функции медленного роста могут быть получены *продолжением* некоторых обобщенных функций, определенных на основном пространстве  $K$ . Интегрируемые функции, ограниченные функции и вообще локально интегрируемые функции, которые удовлетворяют соотношению

$$|f(x)| < A |x|^k \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad A, k = \text{const}, \quad (1.1.27)$$

составляют класс обобщенных функций медленного роста. Они могут рассматриваться как продолжения соответствующих функционалов из пространства  $K'$ . Это свойство будет использовано в случае преобразования Фурье. Аналогично обобщенные функции с ограниченными носителями являются обобщенными функциями медленного роста; они могут быть продолжены из  $K'$  в  $S'$ .

### 1.1.3.2. Свойства

Определим произведение обобщенной функции на действительное число соотношением

$$(\lambda f, \varphi) = \lambda (f, \varphi), \quad \varphi \in \Phi, \quad f \in \Phi', \quad \lambda \in R, \quad (1.1.28)$$

а сумму двух обобщенных функций — следующим образом:

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi), \quad \varphi \in \Phi, \quad f, g \in \Phi'. \quad (1.1.28')$$

Следовательно, если  $\lambda, \mu \in R, \varphi \in \Phi, f, g \in \Phi'$ , то

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda (f, \varphi) + \mu (g, \varphi) \quad (1.1.29)$$

и множество  $\Phi'$  обобщенных функций является линейным пространством.

Таким образом, функционал  $\lambda f + \mu g$  является линейным и непрерывным. Его непрерывность следует сразу,

так как если  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  в  $\Phi$  при  $k \rightarrow \infty$ , то

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \rightarrow \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi) = (\lambda f + \mu g, \varphi), \quad k \rightarrow \infty.$$

Определим теперь сходимость в пространстве обобщенных функций  $\Phi'$ . Пусть  $\varphi$  — основная функция, принадлежащая пространству  $\Phi$ , а  $f$  и  $f_k$  — соответственно обобщенная функция и последовательность обобщенных функций из пространства  $\Phi'$ . Будем говорить, что последовательность обобщенных функций  $f_k \in \Phi'$  *сходится* к обобщенной функции  $f \in \Phi'$ , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi) \quad (1.1.30)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f. \quad (1.1.30')$$

Сходимость, введенная в  $\Phi'$ , является *слабой сходимостью*.

Таким образом, операции умножения обобщенной функции на действительное число, сложения двух обобщенных функций и введение сходимости позволяют определить *пространство обобщенных функций*. Можно показать, что пространство обобщенных функций является *полным пространством*. В самом деле, если последовательность обобщенных функций такова, что для каждого  $\varphi \in \Phi$  числовая последовательность  $(f_k, \varphi)$  имеет предел, то существует единственная обобщенная функция  $f \in \Phi'$ , для которой справедливо соотношение (1.1.30).

Пусть  $a(x)$  — функция класса  $C^\infty$ , а  $f(x)$  — обобщенная функция, принадлежащая пространству  $\Phi'$ . Тогда произведение  $a(x)f(x)$  тоже будет обобщенной функцией, определяемой соотношением

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \Phi. \quad (1.1.31)$$

Условия бесконечной дифференцируемости функции  $a(x)$  достаточно для существования произведения  $af$  в случае основных пространств  $K^m$  и  $K$ . Мы видели, что в случае основного пространства  $S$  должно выполняться дополнительное условие (функция  $a(x) \in C^\infty$  при  $x \rightarrow \infty$  не дол-

жна расти быстрее полинома). В случае основного пространства  $K^m$  для того, чтобы произведение  $a(x)f(x)$  имело смысл, достаточно, чтобы функция  $a(x)$  была функцией класса  $C^m$ .

Произведение комплексной обобщенной функции  $f$  на комплексную функцию  $a$  определяется соотношением

$$(af, \varphi) = (f, \bar{a}\varphi), \quad (1.1.32)$$

где  $\bar{a}$  — функция, комплексно сопряженная с функцией  $a$ , причем предполагается, что  $\bar{a}\varphi \in \Phi$ . В частности, если  $a = \lambda = \alpha + i\beta$  — комплексное число, то  $\bar{a} = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  и можно написать

$$(\lambda f, \varphi) = (f, \bar{\lambda}\varphi) = \bar{\lambda}(f, \varphi).$$

Заметим также, что каждой комплексной обобщенной функции  $f$  можно поставить в соответствие комплексно сопряженную обобщенную функцию  $\bar{f}$ , определяемую соотношением

$$(\bar{f}, \varphi) = \overline{(f, \bar{\varphi})}. \quad (1.1.33)$$

## 1.1.4. Примеры обобщенных функций

### 1.1.4.1. Примеры

Пусть для определенности  $\Phi = K$ . Определим функционал  $f$ , ставящий в соответствие каждой функции  $\varphi \in K$  число

$$(f, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots \quad (1.1.34)$$

Эта сумма конечна, так как  $\varphi(x)$  является функцией с компактным носителем. Определенный таким образом функционал представляет собой обобщенную функцию, потому что, как легко проверить, он является линейным и непрерывным. Очевидно, вместо основного пространства  $K$  можно рассмотреть основное пространство  $K^m$  и получить, таким образом, обобщенную функцию конечного порядка  $p \leq m$  на этом пространстве.

Рассмотрим теперь функционал (1.1.34) на пространстве  $S$ . В этом случае функция  $\varphi(x)$  не имеет компакт-

ного носителя, а второй член в формуле является числовым рядом. Поскольку  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ , то  $|\varphi(x)| \leq A/|x|^{m+2}$ ,  $A > 0$ ,  $m > 0$ , и, следовательно, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(n)|$  сходит-

ся, а значит, сходится и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$ . Таким образом,

функционал (1.1.34) имеет смысл и на пространстве  $\mathcal{S}$ . Определенный таким образом функционал (1.1.34) является линейным. Если непрерывность следует из того, что сходимость в  $\mathcal{K}$  сильнее сходимости в  $\mathcal{S}$ . Следовательно, этот функционал является обобщенной функцией на  $\mathcal{S}$ .

#### 1.1.4.2. Обобщенная функция Дирака<sup>1)</sup>

Обобщенную функцию  $\delta(x)$  Дирака можно определить на каждом из пространств  $\mathcal{K}^m$ ,  $\mathcal{K}$  и  $\mathcal{S}$  соотношением

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad x \in R^n. \quad (1.1.35)$$

Можно легко проверить, что этот функционал является линейным и непрерывным.

На основе соотношения (1.1.35) можно написать выражение для обобщенной функции Дирака, сосредоточенной в точке  $x^0 \in R^n$  (*сдвиг обобщенной функции*); она обозначается символом  $\delta(x-x^0)$  и определяется соотношением

$$(\delta(x-x^0), \varphi(x)) = \varphi(x^0), \quad x, x^0 \in R^n. \quad (1.1.35')$$

Заметим, что обобщенная функция Дирака является мерой, поскольку для определения этого функционала достаточно рассмотреть пространство  $\mathcal{K}^0$  ( $m=0$ ).

Если обобщенная функция  $\delta(x)$  определена на  $\mathcal{K}^0$  и если функция  $a(x) \in C^0$ , то произведение  $a(x)\delta(x)$  имеет смысл. На основе формулы (1.1.31) можно написать

$$(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0), \quad x \in R^n. \quad (1.1.36)$$

<sup>1</sup> Обобщенную функцию Дирака обычно называют дельта-функцией. — Прим. ред.



Отметим, что функционал  $f$ , определенный на  $K^m$ ,  $K$  или  $S$  соотношением

$$(f, \varphi) = |\varphi(0)|, \quad (1.1.37)$$

не является обобщенной функцией, хотя это непрерывный функционал, потому что он не линеен. Действительно, вообще говоря, модуль суммы двух чисел не равен сумме модулей этих чисел.

### 1.1.4.3. Регулярные обобщенные функции. Сингулярные обобщенные функции

Будем говорить, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R^n$ , является *абсолютно интегрируемой* в конечной области  $D_n \subset R^n$ , если существует интеграл

$$\int_{D_n} |f(x)| dx < \infty; \quad (1.1.38)$$

если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в любой конечной области  $D_n \subset R^n$ , она называется *локально интегрируемой*. Заметим, что абсолютно интегрируемая функция является *интегрируемой*, т. е.

$$\int_{D_n} f(x) dx < \infty. \quad (1.1.39)$$

Локально интегрируемые функции порождают важный класс обобщенных функций. Пусть  $f(x)$  является локально интегрируемой функцией и  $\varphi(x) \in K$ . Определим функционал на  $K$  соотношением

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} f\varphi dx = \int_{D_n} f\varphi dx, \quad x \in R^n, \quad (1.1.40)$$

где  $D_n$  — носитель основной функции  $\varphi(x)$ . Заметим, что если  $f_k(x)$  образуют последовательность локально интегрируемых функций на  $R^n$ , равномерно сходящуюся на каждом компакте к функции  $f(x)$ , то

$$\lim (f_k, \varphi) = (f, \varphi). \quad (1.1.41)$$

 КОЛОДКА  
 ОСКОРЖКА

Следовательно, этот функционал определяет обобщенную функцию. Если  $f(x)$  является локально интегрируемой функцией с комплексными значениями, то соотношение (1.1.40) принимает вид

$$(f, \varphi) = \int_{D_n} \bar{f} \varphi dx. \quad (1.1.40')$$

Обобщенные функции, порожденные локально интегрируемыми функциями, называются *регулярными обобщенными функциями* или *обобщенными функциями типа обычной функции*; будем обозначать их тем же символом  $f(x)$ , что и порождающую функцию.

Если  $\varphi(x) \in S(R^n)$ , а  $f(x)$  является интегрируемой функцией на  $R^n$ , то соотношение

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} f \varphi dx, \quad x \in R^n, \quad (1.1.42)$$

определяет *регулярную обобщенную функцию медленного роста*.

Если  $f(x)$  является ограниченной функцией, т. е.  $|f(x)| \leq A$ ,  $A > 0$ , для любого  $x \in R^n$ , то

$$|(f, \varphi)| \leq A \int_{R^n} |\varphi(x)| dx. \quad (1.1.43)$$

Интеграл в (1.1.43) существует. Следовательно, ограниченная функция  $f(x)$  определяет на пространстве  $S$  регулярную обобщенную функцию медленного роста.

В общем случае, если  $f(x)$  является локально интегрируемой функцией, такой, что  $|f(x)| \leq A|x|^k$ ,  $A, k > 0$ , при  $|x| \rightarrow \infty$ , и если  $\varphi(x) \in S$  (тогда  $\varphi(x)$  удовлетворяет соотношению  $|\varphi(x)| \leq B|x|^{-(k+2)}$ ,  $B, k > 0$ ), то  $|f(x)\varphi(x)| \leq AB|x|^{-2}$ . Следовательно, интеграл  $\int_{R^n} f(x)\varphi(x) dx$  существует, а функция  $f(x)$  определяет

регулярную обобщенную функцию медленного роста на основном пространстве  $S$ . Такие обобщенные функции определяются, например, функцией  $e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ , многочленом  $P(x)$  и т. д.



Поскольку  $y = a^{-1}(x - b)$  и  $dy = |\det a|^{-1} dx$ , то имеет место соотношение

$$(f(ay + b), \varphi(y)) = \frac{1}{|\det a|} (f(x), \varphi[a^{-1}(x - b)]). \quad (1.1.47)$$

Это равенство получено для регулярных обобщенных функций; оно будет принято в качестве определения обобщенной функции  $f(ay + b)$  в общем случае.

### 1.1.5.2. Сдвиг обобщенных функций

Рассмотрим, в частности, *сдвиг обобщенных функций*. Если  $f(y)$  — обобщенная функция, то  $f(y - y^0)$  является обобщенной функцией, полученной сдвигом исходной обобщенной функции  $f(y)$ , где  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  и  $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ . Тогда

$$x = y - y^0, \quad (1.1.48)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_1^0, \\ x_2 &= y_2 - y_2^0, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= y_n - y_n^0. \end{aligned} \quad (1.1.48')$$

Матрица  $a$  в этом случае является единичной матрицей

$$a = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.49)$$

$\det a = 1$  и  $a^{-1} = a$ . Следовательно,

$$(f(y - y^0), \varphi(y)) = (f(x), \varphi(x + y^0)). \quad (1.1.50)$$

Заметим, что можно изменить обозначение для независимой переменной, поэтому

$$(f(x - x^0), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x + x^0)), \quad x, x^0 \in R^n. \quad (1.1.50')$$

В частности, можно написать

$$(\delta(x - x^0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x + x^0)) = \varphi(x^0), \quad x, x^0 \in R^n. \quad (1.1.51)$$

### 1.1.5.3. Преобразование подобия обобщенных функций

Линейное преобразование подобия (растяжение и сжатие) определяется соотношением

$$x = ay, \quad (1.1.52)$$

где матрица  $a$  и обратная матрица  $a^{-1}$  имеют вид

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}, \quad (1.1.53)$$

а  $\det a = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ . В развернутом виде можно написать

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1, \\ x_2 &= a_{22}y_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= a_{nn}y_n. \end{aligned} \quad (1.1.53')$$

Следовательно,

$$(f(ay), \varphi(y)) = \frac{1}{|a_{11}a_{22} \dots a_{nn}|} (f(x), \varphi(a^{-1}x)), \quad (1.1.54)$$

или, изменив обозначения для независимых переменных, можно написать

$$\begin{aligned} &(f(a_{11}x_1, a_{22}x_2, \dots, a_{nn}x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= \frac{1}{|a_{11}a_{22} \dots a_{nn}|} \left( f(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{22}}, \dots, \frac{x_n}{a_{nn}}\right) \right). \end{aligned} \quad (1.1.54')$$

Если  $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=\alpha$ , то

$$(f(\alpha x), \varphi(x)) = \frac{1}{|\alpha|^n} \left( f(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right), \quad x \in R^n, \alpha \in R. \quad (1.1.55)$$

Для обобщенной функции Дирака можно написать

$$(\delta(\alpha x), \varphi(x)) = \frac{1}{|\alpha|^n} \left( \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right) = \frac{\varphi(0)}{|\alpha|^n}, \quad x \in R^n, \alpha \in R. \quad (1.1.56)$$

Если  $\alpha = -1$ , получаем *преобразование симметрии обобщенных функций*. При этом соответствующее соотношение принимает вид

$$(f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)), \quad x \in R^n. \quad (1.1.57)$$

В частности,

$$(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(-x)) = \varphi(0), \quad x \in R^n. \quad (1.1.58)$$

## 1.1.6. Равенство обобщенных функций

### 1.1.6.1. Равенство двух обобщенных функций

Две непрерывные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  на отрезке  $[a, b] \subset R$  равны, если они принимают одинаковые значения в каждой точке рассматриваемого отрезка. Очевидно, это равенство в обычном смысле является поточечным, т. е. локальным равенством.

Можно определить равенство рассматриваемых двух функций в более широком смысле, считая, например, что они равны, если равны площади, определяемые ими на отрезке  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx, \quad x \in R; \quad (1.1.59)$$

равенство в смысле соотношения (1.1.59) может быть распространено на более широкий класс функций, чем непрерывные.

**Определение 1.1.4.** Функция  $f(x)$  называется *нулевой почти всюду на множестве  $A$* , если множество всех точек  $x \in A$ , для которых  $f(x) \neq 0$ , имеет нулевую меру (т. е. это множество может быть покрыто счетным семейством отрезков, сумма длин которых сколь угодно мала).

Отметим, что множества нулевой меры называют еще и *пренебрежимыми множествами*.

**Определение 1.1.5.** Две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются *равными почти всюду на множестве  $A$* , если множество всех точек  $x \in A$ , для которых  $f(x) \neq g(x)$ , является множеством нулевой меры.

В этом случае будем писать

$$f(x) = g(x) \text{ почти всюду, } x \in A. \quad (1.1.60)$$

Из определения следует, что если две интегрируемые функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенные на множестве  $A = [a, b]$ , равны почти всюду на  $A$ , то они удовлетворяют соотношению (1.1.59). Таким образом, равенство почти всюду является обобщением поточечного равенства двух функций.

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $x \in R^n$ , — две локально интегрируемые функции, равные почти всюду. Если  $\varphi(x) \in K$ , то

$$\int_{R^n} f(x) \varphi(x) dx = \int_{R^n} g(x) \varphi(x) dx. \quad (1.1.61)$$

Следовательно,

$$(f, \varphi) = (g, \varphi), \quad (1.1.61')$$

или

$$(f - g, \varphi) = 0. \quad (1.1.61'')$$

**Определение 1.1.6.** Две обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  равны:

$$f = g, \quad (1.1.62)$$

если для любой основной функции  $\varphi(x)$  выполняется соотношение (1.1.61').

**Определение 1.1.7.** Обобщенная функция  $f(x)$  равна нулю:

$$f = 0, \quad (1.1.63)$$

если для любой основной функции  $\varphi(x)$

$$(f(x), \varphi(x)) = 0. \quad (1.1.63')$$

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 1, 2, x \in R, \\ 1 & \text{при } x = 1, \\ 2 & \text{при } x = 2 \end{cases} \quad (1.1.64)$$

порождает обобщенную функцию, равную нулю.

Рассмотрим следующую функцию Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при иррациональном } x, \\ 1 & \text{при рациональном } x, \end{cases} \quad (1.1.65)$$

определенную для  $x \in R$ , а также функцию

$$g(x) = 0, \quad x \in R. \quad (1.1.66)$$

Заметим, что функция  $f(x)$  разрывна в каждой точке, тогда как функция  $g(x)$  непрерывна. Функция  $f(x)$  не является локально интегрируемой по Риману, но она локально интегрируема по Лебегу. Таким образом, эти две функции локально интегрируемы по Лебегу и равны почти всюду, поскольку множество всех точек  $x$ , для которых  $f(x) \neq g(x)$ , совпадает с множеством рациональных точек и, следовательно, имеет нулевую меру. Таким образом, можно написать<sup>1)</sup>

$$(\mathcal{L}) \int_R f(x) \varphi(x) dx = (\mathcal{L}) \int_R g(x) \varphi(x) dx = 0,$$

т. е. выполнены соотношения типа (1.1.61') и (1.1.63') для любой основной функции  $\varphi(x)$ . Следовательно, обобщенные функции, порожденные функциями  $f(x)$  и  $g(x)$ , равны (обобщенная функция, порожденная функцией Дирихле, равна нулю).

Введем также функцию

$$h(x) = 1, \quad x \in R. \quad (1.1.67)$$

<sup>1)</sup> Символ  $\mathcal{L}$  означает, что интеграл понимается в смысле Лебега в отличие от  $\mathcal{R}$  — интеграла в смысле Римана. — Прим. ред.



Заметим, что  $h(x)$  не совпадает с функцией Дирихле  $f(x)$  на множестве иррациональных чисел, и поскольку последнее множество не образует ни на каком компакте множества меры нуль, то эти две функции не равны почти всюду, так что

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}) \int_{\mathcal{R}} f(x) \varphi(x) dx &= 0, \\ (\mathcal{L}) \int_{\mathcal{R}} h(x) \varphi(x) dx &= (\mathcal{R}) \int_{\mathcal{R}} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно, обобщенные функции, порожденные функциями  $h(x)$  и  $f(x)$ , не равны.

### 1.1.6.2. Обобщенная функция Хевисайда

Рассмотрим функции

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (1.1.68)$$

$$\theta_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (1.1.68')$$

Эти функции локально интегрируемы по Риману, причем они отличаются только в точке  $x=0$ . Следовательно, обобщенные функции, порожденные ими, равны:

$$\theta(x) = \theta_1(x), \quad (1.1.69)$$

поэтому можно написать

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (1.1.69')$$

Заметим, что  $\theta(x)$  является регулярной обобщенной функцией; она называется *обобщенной функцией Хевисайда*<sup>1)</sup>.

<sup>1</sup> Обычно эту функцию называют единичной функцией Хевисайда. — Прим. ред.

## Функция Хевисайда

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.70)$$

определенная на  $R^n$ , порождает регулярную обобщенную функцию (обобщенную функцию Хевисайда на  $R^n$ ), описываемую соотношением

$$\begin{aligned} (\theta(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.1.70')$$

## 1.1.6.3. Свойства обобщенной функции Дирака

Используя определение равенства двух обобщенных функций, можно получить интересные соотношения для них. Например, с помощью формул (1.1.31) и (1.1.51) можно обобщить соотношение (1.1.36) следующим образом:

$$\begin{aligned} (a(x) \delta(x - x^0), \varphi(x)) &= a(x^0) \varphi(x^0), \\ a(x) &\in C^0, x, x^0 \in R^n, \end{aligned} \quad (1.1.71)$$

откуда, учитывая соотношение (1.1.35') и определение равенства двух обобщенных функций, получаем

$$\begin{aligned} a(x) \delta(x - x^0) &= a(x^0) \delta(x - x^0), \\ a(x) &\in C^0, x, x^0 \in R^n. \end{aligned} \quad (1.1.72)$$

В частности,

$$x^n \delta(x) = 0, \quad n \in N_0, \quad x \in R^1. \quad (1.1.73)$$

Аналогично можно написать

$$a(x, y) \delta(x, y) = a(0, 0) \delta(x, y), \quad a(x, y) \in C^0, \quad (1.1.74)$$

<sup>1</sup> Здесь и далее  $N_0$  — множество натуральных чисел,  $N$  — множество целых неотрицательных чисел. — *Прим. ред.*

и, в частности,

$$x\delta(x, y) = 0. \quad (1.1.75)$$

Из соотношения (1.1.58) с учетом (1.1.35) следует

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad x \in R^n. \quad (1.1.76)$$

Таким образом, обобщенная функция Дирака является *четной обобщенной функцией*.

Аналогично, исходя из формулы (1.1.56), можно получить соотношение

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x), \quad x \in R. \quad (1.1.77)$$

Для пространства  $R^n$  имеем

$$\begin{aligned} & \delta(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) = \\ & = \frac{1}{|\alpha_1| |\alpha_2| \dots |\alpha_n|} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.1.77')$$

Можно также написать

$$\delta(\alpha x + \beta) = \frac{1}{|\alpha|^n} \delta\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad x \in R^n. \quad (1.1.78)$$

#### 1.1.6.4. Обобщенная функция $Vp \frac{1}{x}$

Рассмотрим функцию (фиг. 1.8)

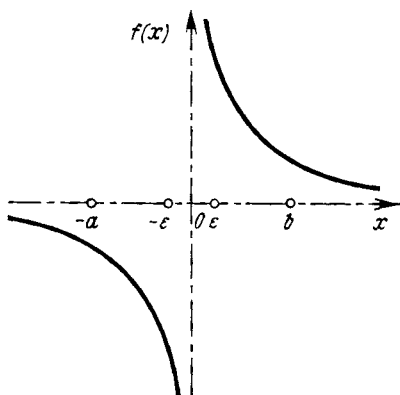
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0; \quad (1.1.79)$$

эта функция не является локально интегрируемой, так как она не интегрируема в окрестности начала координат. Отбрасывая окрестность, содержащую начало координат, можно получить локально интегрируемую функцию. График функции состоит из двух ветвей равносторонней гиперболы, асимптотами которой являются оси координат.

Чтобы определить функционал, соответствующий этой функции, введем понятие *главного значения* в смысле Коши расходящегося интеграла от данной

функции. Очевидно,  $\int_{-a}^b (1/x) dx$  для  $a, b > 0$  не существует. По определению главное значение этого интеграла, обозначаемое символом  $Vp$ , равно

$$Vp \int_{-a}^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{x} \right). \quad (1.1.80)$$



Фиг. 1.8.

Вычислив здесь правую часть, получим

$$Vp \int_{-a}^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}, \quad a, b > 0. \quad (1.1.80')$$

В частности,

$$Vp \int_{-a}^a \frac{dx}{x} = 0, \quad Vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0. \quad (1.1.81)$$

Следующее соотношение ставит в соответствие функции  $1/x$  функционал  $Vp (1/x)$ :

$$\left( Vp \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = Vp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi(x) \in K. \quad (1.1.82)$$

Легко можно проверить, что определенный таким образом функционал является линейным и непрерывным. Следовательно, он представляет собой обобщенную функцию. Обобщенная функция  $V_p(1/x)$  совпадает с  $1/x$  всюду, за исключением начала координат; поэтому обобщенная функция  $V_p(1/x)$  называется *регуляризацией* функции  $1/x$ .

Заметим, что для  $\varphi(x) \in K$  можно написать

$$\begin{aligned} \left(x V_p \frac{1}{x}, \varphi(x)\right) &= \left(V_p \frac{1}{x}, x\varphi(x)\right) = \\ &= V_p \int_K \varphi(x) dx = \int_K \varphi(x) dx = (1, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$x V_p \frac{1}{x} = 1. \quad (1.1.83)$$

Таким образом, регуляризация функции  $1/x$  была проведена хорошо, поскольку из соотношения (1.1.83) видно, что сохраняется главное свойство этой функции.

### 1.1.6.5. Другие обобщенные функции

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ при } x \neq 0 \quad (1.1.84)$$

и поставим ей в соответствие обобщенную функцию  $V_p(1/x^2)$ :

$$\left(V_p \frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = V_p \int_K \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx. \quad (1.1.84')$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(x^2 V_p \frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) &= \left(V_p \frac{1}{x^2}, x^2 \varphi(x)\right) = \\ &= V_p \int_K \varphi(x) dx = \int_K \varphi(x) dx = (1, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x^2 \text{Vp} \frac{1}{x^2} = 1. \quad (1.1.85)$$

Рассмотрим также функцию

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \text{ при } x \neq 0, x \in R, \quad (1.1.86)$$

и введем обобщенную функцию  $\mathcal{P} (1/|x|)$  следующим соотношением:

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{|x|}, \varphi(x) \right) = \int_{|x| > 1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + \int_{|x| < 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx. \quad (1.1.86'')$$

Можно обобщить это определение на случай, когда  $x \in R^n$ . Например, введем обозначение

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.1.87)$$

и определим обобщенную функцию  $\mathcal{P} (1/r)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{P} \frac{1}{r}, \varphi(x, y) \right) = & \iint_{r < 1} \frac{\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)}{r} dx dy + \\ & + \iint_{r > 1} \frac{\varphi(x, y)}{r} dx dy. \end{aligned} \quad (1.1.88)$$

Эта обобщенная функция является регуляризацией функции  $1/r$ , которая не является локально интегрируемой в окрестности начала координат.

Аналогично можно определить обобщенную функцию  $\mathcal{P} [1/(x^2 + y^2)]$ .

Заметим, что функции (1.1.84) можно поставить в соответствие и обобщенную функцию  $\text{Pf}(1/x^2)$ , которая называется псевдофункцией  $1/x^2$  и определяется следующим образом:

$$\left( \text{Pf} \frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right]. \quad (1.1.89)$$

Аналогично определяются и обобщенные функции  $\text{Pf}(\theta(x)/x)$  и  $\text{Pf}(\theta(-x)/x)$ :

$$\left(\text{Pf} \frac{\theta(x)}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right], \quad (1.1.90)$$

$$\left(\text{Pf} \frac{\theta(-x)}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \ln \varepsilon \right]. \quad (1.1.90')$$

Нетрудно проверить следующие соотношения:

$$\text{Vp} \frac{1}{x} = \text{Pf} \frac{\theta(x)}{x} + \text{Pf} \frac{\theta(-x)}{x}, \quad (1.1.91)$$

$$\mathcal{P} \frac{1}{|x|} = \text{Pf} \frac{\theta(x)}{x} - \text{Pf} \frac{\theta(-x)}{x}. \quad (1.1.91')$$

Отметим, что понятие конечной части интеграла, так же как и понятие псевдофункции, было введено Адамаром.

#### 1.1.6.6. Носитель обобщенной функции.

*Обобщенные функции, сосредоточенные на множестве*

**Определение 1.1.8.** Пусть  $A$  — открытое множество. Будем говорить, что *обобщенная функция является нулевой на  $A$* :

$$f(x) = 0, \quad x \in A, \quad (1.1.92)$$

если для любой основной функции  $\varphi \in K$ , такой, что  $\text{supp } \varphi \subset A$ , выполняется соотношение

$$(f, \varphi) = 0. \quad (1.1.92')$$

**Определение 1.1.9.** Будем говорить, что *обобщенные функции  $f$  и  $g$  равны на открытом множестве  $A$* , если для любой основной функции  $\varphi \in K$ , такой, что  $\text{supp } \varphi \subset A$ , выполняется соотношение

$$(f, \varphi) = (g, \varphi), \quad (1.1.93)$$

или

$$(f - g, \varphi) = 0. \quad (1.1.93')$$

В этом случае будем писать

$$f(x) = g(x), \quad x \in A. \quad (1.1.93'')$$

Из определения обобщенной функции следует, что не имеет смысла говорить о значении обобщенной функции в точке. Таким образом, нельзя, например, сказать, что значение обобщенной функции в точке  $x_0$  равно нулю. Тем не менее можно придать точный смысл понятию «нулевой» в окрестности некоторой точки обобщенной функции. Пусть  $U$  — некоторая окрестность точки  $x_0$  и  $\varphi \in K$  — произвольная основная функция с носителем, содержащимся в  $U$ . Будем говорить, что обобщенная функция  $f(x)$  равна нулю в окрестности точки  $x_0$ , если  $(f, \varphi) = 0$  для любой  $\varphi \in K$  с  $\text{supp } \varphi \subset U$ . Можно доказать, что обобщенная функция является нулевой на открытом множестве  $A$ , если она является нулевой в окрестности любой точки этого множества. Это доказывает следующее локальное свойство обобщенных функций: если две обобщенные функции равны в окрестности каждой точки, то они равны и глобально, т. е. на данном открытом множестве.

**Определение 1.1.10.** *Носителем обобщенной функции  $f$  называется дополнение объединения всех открытых множеств, на которых  $f(x)$  равна нулю. Носитель обобщенной функции  $f$  будем обозначать символом  $\text{supp } f$ .*

Из определения следует, что носитель обобщенной функции является замкнутым множеством. Если к тому же носитель обобщенной функции является ограниченным, то в этом случае имеем обобщенную функцию с компактным носителем; такие обобщенные функции особенно важны в приложениях.

**Определение 1.1.11.** Будем говорить, что *обобщенная функция  $f$  сосредоточена на множестве  $A$* , если носитель обобщенной функции  $f$  содержится в  $A$  ( $\text{supp } f \subset A$ ).

В частности, носитель обобщенной функции, порожденной кусочно непрерывной функцией, определяется замыканием множества всех точек, в которых функция отлична от нуля.

Рассмотрим обобщенную функцию Дирака  $\delta(x)$ ; запишем для любой функции  $\varphi(x) \in K$  соотношение



(1.1.35). Заметим, что для любой функции  $\varphi(x) \in K$ , носитель которой не содержит начало координат ( $0 \notin \text{supp } \varphi$ ), можно написать

$$(\delta(x), \varphi(x)) = 0. \quad (1.1.94)$$

Следовательно, обобщенная функция  $\delta(x)$  равна нулю в окрестности любой точки  $x \neq 0$ , т. е.

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0. \quad (1.1.94')$$

Отсюда следует, что носителем обобщенной функции  $\delta(x)$  является точка 0. Таким образом, обобщенная функция Дирака  $\delta(x)$  сосредоточена в начале координат. Аналогично носителем обобщенной функции  $\delta(x-x^0)$  является точка  $x^0$ , т. е.  $\delta(x-x^0)$  сосредоточена в этой точке. Из определения равенства на открытом множестве двух обобщенных функций и соотношения (1.1.94') следует, что обобщенная функция Дирака  $\delta(x)$  совпадает на множестве точек  $x \neq 0$  с обобщенной функцией, равной всюду нулю. Обобщенная функция  $\delta(x)$  обладает компактным носителем.

Аналогично обобщенная функция  $Vp(1/x)$  равна  $1/x$  на множестве точек  $x \neq 0$ . Носителем этой обобщенной функции является множество  $R$  всех действительных чисел. Таким образом, она не является обобщенной функцией с компактным носителем.

Носителем обобщенной функции Хевисайда является множество  $[0, \infty] = R_+$ , т. е. ее носитель ограничен справа. Таким образом,  $\theta(x)$  является обобщенной функцией с некомпактным носителем, сосредоточенной на положительной полупрямой  $R_+$ .

### 1.1.6.7. Характеристическая функция отрезка

Рассмотрим функцию (фиг. 1.9)

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > a, \\ 1 & \text{при } |x| \leq a, \end{cases} \quad a > 0. \quad (1.1.95)$$

Эта функция называется *характеристической функцией отрезка*  $[-a, a]$ . Вообще функция

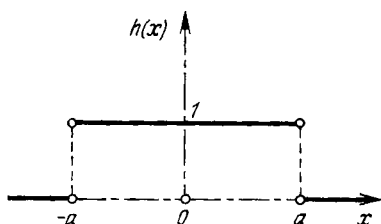
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in A, \\ 0 & \text{при } x \notin A \end{cases} \quad (1.1.96)$$

представляет собой характеристическую функцию множества  $A$ .

Функция  $h(x)$  порождает обобщенную функцию, определяемую соотношением

$$(h(x), \varphi(x)) = \int_{\mathcal{R}} h(x) \varphi(x) dx = \int_{-a}^a \varphi(x) dx. \quad (1.1.97)$$

Заметим, что для любой  $\varphi \in K$ , такой, что  $\text{supp } \varphi \cap [-a, a] = \emptyset$ , выполняется соотношение  $(h, \varphi) = 0$ . Следовательно, носителем обобщенной функции  $h(x)$  является



Фиг. 1.9.

отрезок  $[-a, a]$ . Таким образом,  $h(x)$  — обобщенная функция с компактным носителем, сосредоточенная на отрезке  $[-a, a]$ .

Обобщенную функцию  $h(x)$  можно выразить при помощи обобщенной функции Хевисайда следующим образом:

$$h(x) = \theta(x + a) - \theta(x - a) = \theta(a - |x|), \quad x \in \mathcal{R}. \quad (1.1.98)$$

### 1.1.6.8. Отношения неравенств

Чтобы можно было сравнивать обобщенные функции, введем понятие положительной обобщенной функции.

**Определение 1.1.12.** Обобщенная функция  $f$  называется положительной на множестве  $A$ , если для любой функции  $\varphi \in K$ ,  $\varphi \geq 0$ , с  $\text{supp } \varphi \subset A$  выполняется соотношение

$$(f, \varphi) \geq 0. \quad (1.1.99)$$

В этом случае будем писать

$$f \geq 0, \quad x \in A. \quad (1.1.99)$$

**Определение 1.1.13.** Будем говорить, что *обобщенная функция  $f$  больше обобщенной функции  $g$  на множестве  $A$ :*

$$f(x) \geq g(x), \quad x \in A, \quad (1.1.100)$$

если для любой функции  $\varphi \in K$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $\text{supp } \varphi \subset A$ , выполняется соотношение

$$(f, \varphi) \geq (g, \varphi), \quad (f - g, \varphi) \geq 0. \quad (1.1.100')$$

В частности, если неравенство  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in A$ , имеет место для любого множества  $A$ , т. е. если  $(f, \varphi) \geq 0$  для любой функции  $\varphi \in K$ ,  $\varphi \geq 0$ , то

$$f \geq 0; \quad (1.1.101)$$

аналогично

$$f \geq g, \quad (1.1.102)$$

если  $(f, \varphi) \geq (g, \varphi)$  для любой функции  $\varphi \in K$ ,  $\varphi \geq 0$ .

Пусть  $\varphi(x) \geq 0$  ( $\varphi(x) \in K$ ). Тогда

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) \geq 0. \quad (1.1.103)$$

Следовательно, *обобщенная функция Дирака  $\delta(x)$  положительна.*

Заметим, что можно писать

$$(\delta(2x), \varphi(x)) = \frac{1}{2} \varphi(0) \geq 0,$$

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) \geq 0.$$

Следовательно,

$$\delta(x) \geq \delta(2x). \quad (1.1.104)$$

В общем случае при  $\alpha \geq 1$

$$\delta(\alpha x) \leq \delta(x). \quad (1.1.104')$$

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — локально интегрируемые функции и  $f \geq g$  почти всюду, то для любой функции  $\varphi \geq 0$

( $\varphi \in K$ ) выполняется соотношение

$$(f, \varphi) \geq (g, \varphi), \quad (1.1.105)$$

т. е.

$$\int_R f(x) \varphi(x) dx \geq \int_R g(x) \varphi(x) dx. \quad (1.1.105')$$

Этому соотношению удовлетворяют функция Дирихле  $f(x)$ , определяемая формулой (1.1.65), и функция

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{для рационального } x, \\ 1 & \text{для иррационального } x, \end{cases} \quad (1.1.106)$$

где интегрирование понимается по Лебегу.

## 1.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. ДЕЛЬТООБРАЗНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 1.2.1. Дифференцирование обобщенных функций

#### 1.2.1.1. Производная обобщенной функции.

##### Свойства

Дифференцирование является одной из операций, которая выявляет пользу понятия обобщенной функции. Действительно, в отличие от обычных функций, которые не всегда дифференцируемы, обобщенные функции обладают производными любого порядка; этот факт ведет к многочисленным применениям.

Чтобы дать определение производной любой обобщенной функции, воспользуемся понятием производной локально интегрируемой функции и получим формулу для регулярных обобщенных функций. Полученное таким образом определение сведется в случае обыкновенных функций к классическому определению.

Пусть функция  $f(x) \in C^1$ . Тогда

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_R f'(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in K. \quad (1.2.1)$$

Функционал (1.2.1) определяет обобщенную функцию, соответствующую непрерывной функции  $f'(x)$  — произ-

водной функции  $f(x)$ . Проинтегрируем выражение (1.2.1) по частям:

$$\begin{aligned}(f'(x), \varphi(x)) &= \int_R \varphi(x) df(x) = \\ &= \varphi(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_R f(x) \varphi'(x) dx,\end{aligned}$$

но основная функция  $\varphi(x)$  имеет компактный носитель, поэтому

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x)), \quad x \in R. \quad (1.2.2)$$

Соотношение (1.2.2) выполняется в случае регулярной обобщенной функции. В общем случае *производная обобщенной функции* определяется соотношением (1.2.2)<sup>1</sup>. Можно показать, что функционал, определенный соотношением (1.2.2), является линейным; его непрерывность следует из определения сходимости в пространстве  $K$ . Следовательно, производная обобщенной функции является обобщенной функцией.

Для производной  $k$ -го порядка можно написать

$$(f^{(k)}(x), \varphi(x)) = (-1)^k (f(x), \varphi^{(k)}(x)), \quad x \in R. \quad (1.2.3)$$

Заметим, что, используя понятия сдвига обобщенных функций и сходимости в пространстве обобщенных функций, можно определить производную обобщенной функции, как и в классическом случае. Пусть  $f(x)$  — обобщенная функция одной действительной переменной. Тогда

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}, \quad (1.2.4)$$

где переход к пределу осуществляется в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций. Аналогично можно определить и *дифференциал обобщенной функции*.

Используя это замечание, можно легко распространить на *сложные обобщенные функции* правило диффе-

<sup>1</sup> Такую производную часто называют обобщенной производной. — *Прим. ред.*

ренцирования обычных сложных функций. Пусть  $u(x) \in C^\infty$ ,  $x \in R$  и  $f(x)$  — обобщенная функция. Можно написать следующее правило дифференцирования:

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du} u'(x), \quad (1.2.5)$$

которое имеет смысл, поскольку функция  $u'(x) \in C^\infty$ . Полученное обобщение является естественным, поскольку оно охватывает случай обычных функций.

Аналогично, если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — обобщенная функция  $n$  независимых переменных, а  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — основная функция,  $\varphi \in K$ , то частная производная по переменной  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) определяется соотношением

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right) = \\ & = - \left( f(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

В общем случае

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right) = \\ & = (-1)^k \left( f(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial^k \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right), \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

где  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ . Символически можно написать

$$(D^k f, \varphi) = (-1)^k (f, D^k \varphi). \quad (1.2.7')$$

Отметим также следующее свойство:

$$\text{supp } D^k f \subset \text{supp } f. \quad (1.2.8)$$

Приведенные выше определения справедливы и для обобщенных функций, определенных на пространстве  $K^m$ , при условии, что  $k \leq m$ . Эти определения действительны также и для обобщенных функций, определенных на основном пространстве  $S$ .

Пусть  $a(x)$  — функция одной переменной,  $a(x) \in C^\infty$ , и  $f(x)$  — обобщенная функция одной переменной,

$f(x) \in K'$ . Формула для производной произведения, известная в классическом случае, сохраняется:

$$(af)' = af' + a'f. \quad (1.2.9)$$

Аналогично эта формула распространяется и на случай многих переменных: если функция  $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^\infty$  и обобщенная функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(af) = \frac{\partial a}{\partial x_i} f + a \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.2.10)$$

В случае обобщенных функций, определенных на пространствах  $K^m$  и  $S$ , справедливы аналогичные формулы при условии, что имеет смысл произведение функции на обобщенную функцию.

В классическом случае производная функции нескольких переменных зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования. В пространстве обобщенных функций производная обобщенной функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования. Например, для обобщенной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'$  можно написать

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i, j=1, 2, \dots, n). \quad (1.2.11)$$

Этот результат действителен для производных любого порядка: символически можно написать

$$D^{p+q} f = D^p (D^q f) = D^q (D^p f). \quad (1.2.12)$$

Пусть  $\theta(x)$  — обобщенная функция Хевисайда. Тогда

$$\begin{aligned} (\theta'(x), \varphi(x)) &= -(\theta(x), \varphi'(x)) = - \int_R \theta(x) \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = - \varphi(x) \Big|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)), \end{aligned}$$

откуда следует

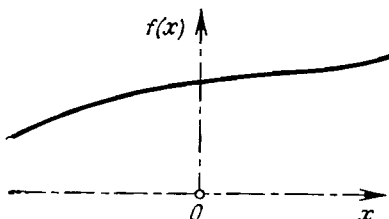
$$\theta'(x) = \delta(x). \quad (1.2.13)$$

В общем случае, если  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — обобщенная функция Хевисайда, то

$$\frac{\partial^n \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.2.14)$$

В частности,

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \partial y} = \delta(x, y). \quad (1.2.14')$$



Фиг. 1.10.

Из формулы (1.2.3) непосредственно следует

$$(\delta^{(k)}(x), \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0). \quad (1.2.15)$$

В частности,

$$(\delta'(x), \varphi(x)) = -\varphi'(0). \quad (1.2.15')$$

Заметим, что

$$\theta'(x - x^0) = \delta(x - x^0), \quad (1.2.16)$$

а

$$(\delta^{(k)}(x - x^0), \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0). \quad (1.2.16')$$

Пусть теперь  $f(x)$  — функция класса  $C^\infty$ , отличная от нуля и для которой  $f'(x) \neq 0$ . В этом случае  $f(x)$  либо положительна, либо отрицательна (фиг. 1.10). Если  $\theta(f(x))$  — функция Хевисайда, то

$$\theta(f(x)) = \begin{cases} 0 & \text{при } f(x) < 0, \\ 1 & \text{при } f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (1.2.17)$$

Дифференцируя в смысле теории обобщенных функций по формуле для производной сложной обобщенной



функции и замечая, что  $d\theta(f(x))/dx=0$ , получаем

$$f'(x) \delta(f(x))=0. \quad (1.2.18)$$

Поскольку  $f'(x) \neq 0$  всюду, то

$$\delta(f(x))=0. \quad (1.2.19)$$

В частности, эти условия выполняются для функции  $f(x)=e^x$ , поэтому

$$\delta(e^x)=0. \quad (1.2.20)$$

Пусть теперь  $f(x, y)=xy$ ; тогда

$$\theta(xy)=\begin{cases} 0 & \text{при } xy < 0, \\ 1 & \text{при } xy \geq 0. \end{cases} \quad (1.2.21)$$

Заметим, что эта функция может быть выражена также следующим образом:

$$\theta(xy)=\theta(x, y) \dagger \theta(-x, -y). \quad (1.2.21')$$

Дифференцируя это выражение и учитывая четность обобщенной функции Дирака, получаем

$$\frac{\partial^2 \theta(xy)}{\partial x \partial y} = \delta(x, y) \dagger \delta(-x, -y) = 2\delta(x, y). \quad (1.2.22)$$

Наконец, дифференцируя  $\theta(xy)$  по формуле для производной сложной обобщенной функции, получаем

$$2\delta(x, y) = \delta(xy) \dagger xy\delta'(xy). \quad (1.2.23)$$

Отметим еще одно свойство: *если производная обобщенной функции равна нулю, то обобщенная функция является константой.*

### 1.2.1.2. Производная в смысле теории обобщенных функций. Производная в обычном смысле

В дальнейшем будем различать *производную в смысле теории обобщенных функций*<sup>1</sup> и *производную в обычном смысле* в случаях, когда последняя существует (для

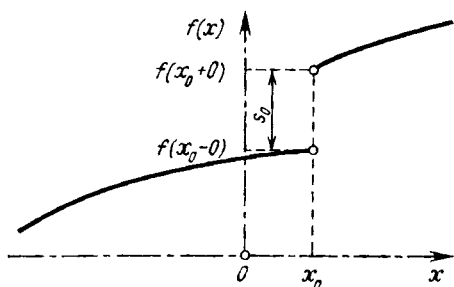
<sup>1</sup> То есть обобщенную производную (см. сноску на стр. 53). — Прим. ред.

регулярных обобщенных функций); производную в обычном смысле будем отмечать волнистой чертой. Тогда для обобщенных функций, порожденных функциями класса  $C^m$ , можно написать

$$D^k f = \tilde{D}^k f, \quad k \leq m. \quad (1.2.24)$$

Заметим, что для обобщенной функции Хевисайда  $\theta(x)$ ,  $x \in R$ , производная в обычном смысле равна нулю:

$$\tilde{\theta}'(x) = 0 \quad (1.2.25)$$



Фиг. 1.11.

в каждой точке, отличной от начала координат. Разница между формулами (1.2.13) и (1.2.25) и выявляет существующее отличие между производной в смысле теории обобщенных функций и производной в обычном смысле.

Для обобщенной функции Хевисайда в  $R^2$  аналогично можно написать

$$\tilde{D}^k \theta(x, y) = 0, \quad (1.2.26)$$

за исключением точек на положительных полуосях координат.

Среди функций, часто встречающихся в приложениях, отметим *кусочно дифференцируемые функции*. Пусть  $f(x)$  — функция одной переменной с производной, непрерывной всюду, за исключением, быть может, одной точки  $x_0$ , в которой она имеет разрыв первого рода (фиг. 1.11). Пусть

$$l_d = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

$$l_s = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \quad (1.2.27)$$

— соответственно пределы справа и слева функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и

$$s_0 = l_d - l_s = f(x_0+0) - f(x_0-0) \quad (1.2.27')$$

— скачок функции в этой точке.

Пусть  $\varphi(x) \in K$ ; тогда

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(j'(x), \varphi'(x)) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x) \varphi'(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \right].$$

Интегрируя по частям и переходя к пределу, получаем

$$(f'(x), \varphi(x)) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} + f(x) \varphi(x) \Big|_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \right] +$$

$$+ \int_K \tilde{f}'(x) \varphi(x) dx = s_0 \varphi(x) + (\tilde{f}'(x), \varphi(x)) =$$

$$= (f'(x) + s_0 \delta(x - x_0), \varphi(x)),$$

откуда в силу определения равенства двух обобщенных функций следует

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + s_0 \delta(x - x_0). \quad (1.2.28)$$

Таким образом, производная в смысле теории обобщенных функций равна сумме производной в обычном смысле и произведения скачка на обобщенную функцию Дирака, сосредоточенную в точке разрыва.

В частности, если функция непрерывна, то  $s_0 = 0$  и

$$f'(x) = \tilde{f}'(x), \quad (1.2.29)$$

т. е. в этом случае производная в смысле теории обобщенных функций совпадает с производной в обычном смысле.

Если  $f(x)$  — функция класса  $C^1$  всюду, за исключением точек  $x_i (i=1, 2, \dots, p)$ , в которых она имеет разрывы первого рода со скачками

$$s_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \quad (i=1, 2, \dots, p), \quad (1.2.30)$$

то можно написать соотношение

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + \sum_{i=1}^p s_i \delta(x - x_i). \quad (1.2.31)$$

Точки разрыва могут образовывать и счетное множество, например если функция  $f(x)$  является периодической.

Предположим теперь, что  $f(x)$  — функция класса  $C^k$  всюду, за исключением точки  $x_0$ , в которой функция и все ее производные в обычном смысле до  $k$ -го порядка включительно имеют разрывы первого рода; пусть  $s_i (i=0, 1, 2, \dots, k-1)$  — скачок функции  $\tilde{f}^{(i)}(x)$  в точке  $x_0$ . Последовательно дифференцируя соотношение (1.2.28), находим

$$f^{(k)}(x) = \tilde{f}^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} s_i \delta^{(k-i-1)}(x - x_0). \quad (1.2.32)$$

Можно получить аналогичные формулы для функций нескольких переменных.

### 1.2.1.3. Примеры

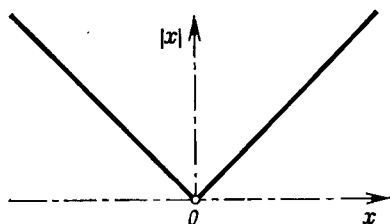
С помощью формулы (1.2.28) можно вычислить производную обобщенной функции Хевисайда. Действительно, замечая, что  $s_0 = \theta(x+0) - \theta(x-0) = 1$  и учитывая равенство (1.2.25), получаем опять формулу (1.2.13).

Для вычисления производной обобщенной функции, соответствующей характеристической функции отрезка (1.1.95), можно использовать соотношение (1.1.98) или формулу (1.2.31). Таким образом, находим

$$h'(x) = \delta(x+a) - \delta(x-a). \quad (1.2.33)$$

Рассмотрим теперь функцию (фиг. 1.12)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.2.34)$$



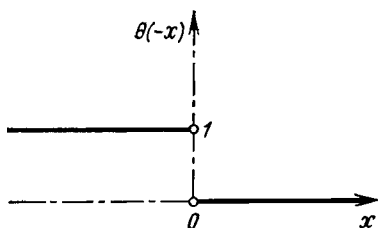
Фиг. 1.12.

Эта функция непрерывна всюду; она также дифференцируема всюду, за исключением начала координат, где  $f'(0-0) = -1$ ,  $f'(0+0) = 1$ . Можно записать производную в смысле теории обобщенных функций в виде

$$|x|' = |\tilde{x}|' = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0, \end{cases} = 2\theta(x) - 1. \quad (1.2.34')$$

Эта производная совпадает с производной в обычном смысле.

Введем наряду с обобщенной функцией Хевисайда также следующую обобщенную функцию (фиг. 1.13):



Фиг. 1.13.

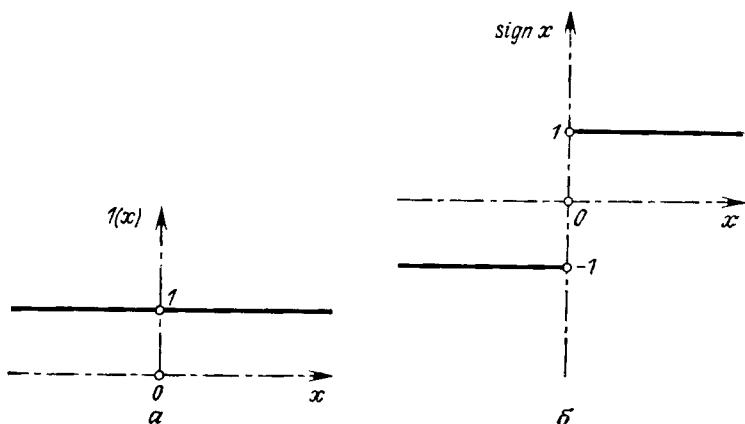
$$\theta(-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (1.2.35)$$

Заметим, что имеют место соотношения

$$\theta(x) + \theta(-x) = 1(x), \quad (1.2.36)$$

$$\theta(x) - \theta(-x) = \text{sign } x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (1.2.36')$$

где функция  $1(x)$  равна единице в любой точке  $x \in \mathbb{R}$  (фиг. 1.14, а), а функция  $\text{sign } x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , указывает знак числа  $x$  (фиг. 1.14, б).



Фиг. 1.14.

В этом случае можно написать

$$|x|' = \text{sign } x, \quad (1.2.34'')$$

а также

$$|x|'' = (\text{sign } x)' = 2\delta(x). \quad (1.2.34''')$$

Исходя из соотношения (1.1.73), с помощью математической индукции можно получить следующие соотношения:

$$x^n \delta^{(n-k)}(x) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}_0). \quad (1.2.37)$$

Из того же соотношения для случая  $n=1$  последовательно находим

$$\delta(x) + x\delta'(x) = 0,$$

$$2\delta'(x) + x\delta''(x) = 0, \quad (1.2.37')$$

.....

$$n\delta^{(n-1)}(x) + x\delta^{(n)}(x) = 0.$$

Отсюда последовательным исключением получаем

$$x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x), \quad n \in N. \quad (1.2.38)$$

При помощи математической индукции можно показать также, что

$$x^n \delta^{(n+1)}(x) = (-1)^n (n+1)! \delta'(x), \quad n \in N, \quad (1.2.38')$$

или в более общем виде

$$x^n \delta^{(n+k)}(x) = (-1)^n \frac{(n+k)!}{k!} \delta^{(k)}(x), \quad k, n \in N. \quad (1.2.38'')$$

Действительно, при  $n=0$  получаем тождество. Предположим теперь, что соотношение верно для  $n$ . Умножим соотношение

$$(n+k+1) \delta^{(n+k)}(x) + x \delta^{(n+k+1)}(x) = 0,$$

имеющее вид (1.2.37), на  $x^n$ . В результате получим

$$\begin{aligned} x^{n+1} \delta^{(n+k+1)}(x) &= -(n+k+1) x^n \delta^{(n+k)}(x) = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+k+1)!}{k!} \delta^{(k)}(x); \end{aligned}$$

таким образом, соотношение (1.2.38'') доказано.

Эти результаты позволяют вычислять произведение многочлена на производные произвольного порядка обобщенной функции Дирака. При этом используются производные меньшего порядка этой обобщенной функции.

В общем случае, исходя из соотношения (1.1.72), можно установить при помощи математической индукции следующую формулу:

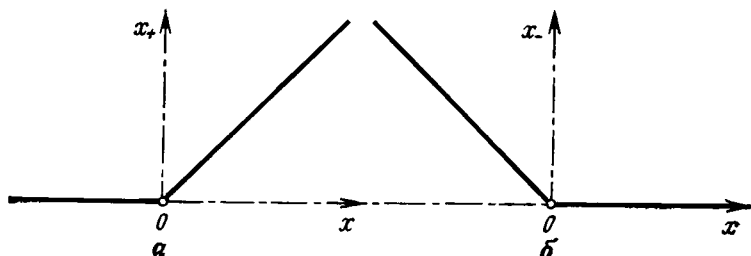
$$\begin{aligned} a(x) \delta^{(m)}(x-x^0) &= C_m^0 a(x^0) \delta^{(m)}(x-x^0) - \\ &- C_m^1 a'(x^0) \delta^{(m-1)}(x-x^0) + C_m^2 a''(x^0) \delta^{(m-2)}(x-x^0) - \\ &- \dots + (-1)^m C_m^m a^{(m)}(x^0) \delta(x-x^0), \\ a(x) &\in C^m, \quad x, x^0 \in R^n, \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

где  $C_m^p$  — число сочетаний из  $m$  элементов по  $p$ .

Отсюда можно легко получить различные частные случаи (в том числе и формулы (1.2.37) — (1.2.38'')). Например, в случае  $a(x) = \sin x$  получаем

$$\begin{aligned} \sin x \delta^{(m)}(x) = & -C_m^1 \delta^{(m-1)}(x) + \\ & + C_m^3 \delta^{(m-3)}(x) - \dots + (-1)^p C_m^{2p-1} \delta^{(m-2p+1)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.2.39')$$

Введем также обобщенные функции, соответствующие функциям  $x_+$  и  $x_-$ , определенным следующим образом (фиг. 1.15):



Фиг. 1.15.

$$x_+ = x\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (1.2.40)$$

$$x_- = -x\theta(-x) = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (1.2.40')$$

Заметим, что эти обобщенные функции являются обобщенными функциями медленного роста.

Отметим соотношения

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_- = x \operatorname{sign} x. \quad (1.2.41)$$

Можно вычислить производные

$$(x_+)' = \theta(x), \quad (x_-)' = -\theta(-x), \quad (1.2.42)$$

а также

$$(x_+^p)' = p x_+^{p-1}. \quad (1.2.42')$$



Введем теперь обобщенную функцию  $Vp(1/x)$  и вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+\varepsilon^2} - i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = -i\pi\varphi(0) + \\ &+ Vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi(x) \in K. \end{aligned}$$

Отсюда получим соотношения Сохоцкого

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x+i\varepsilon} = Vp \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \quad (1.2.43)$$

$$\frac{1}{x-i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x-i\varepsilon} = Vp \frac{1}{x} + i\pi\delta(x). \quad (1.2.43')$$

В. Гейзенберг ввел обобщенные функции  $\delta_+(x)$  и  $\delta_-(x)$ , определяемые следующими соотношениями:

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) - \frac{1}{2\pi i} Vp \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{i}{2\pi} Vp \frac{1}{x}, \quad (1.2.44)$$

$$\delta_-(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{2\pi i} Vp \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \delta(x) - \frac{i}{2\pi} Vp \frac{1}{x}. \quad (1.2.44')$$

Заметим, что

$$\delta_+(x) + \delta_-(x) = \delta(x). \quad (1.2.45)$$

Учитывая формулы Сохоцкого, можно также написать

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{x+i0}, \quad \delta_-(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{i}{x-i0}. \quad (1.2.46)$$

Можно установить также следующие результаты, которые обобщают формулу Сохоцкого:

$$\frac{1}{(x+i0)^p} = \text{Vp} \frac{1}{x^p} - (-1)^{p-1} \frac{i\pi}{(p-1)!} \delta^{(p-1)}(x), \quad (1.2.47)$$

$$\frac{1}{(x-i0)^p} = \text{Vp} \frac{1}{x^p} + (-1)^{p-1} \frac{i\pi}{(p-1)!} \delta^{(p-1)}(x),$$

$$p \in N. \quad (1.2.47')$$

Определим обобщенную функцию  $\ln|x|$  соотношением

$$(\ln|x|, \varphi(x)) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \ln|x| dx, \quad \varphi(x) \in K. \quad (1.2.48)$$

Тогда можно написать

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \text{Vp} \frac{1}{x}. \quad (1.2.49)$$

Можно также доказать соотношение

$$\frac{d}{dx} \text{Vp} \frac{1}{x} = -\text{Vp} \frac{1}{x^2}. \quad (1.2.49')$$

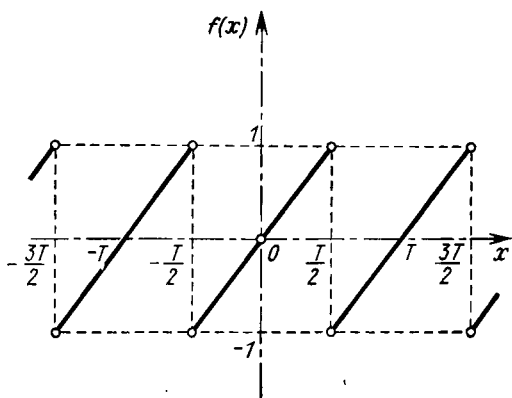
#### 1.2.1.4. Ряды обобщенных функций

В электротехнике часто встречаются «зубчатые» волны — периодическая функция с периодом  $T$  и единичной амплитудой (фиг. 1.16), определяемая соотношением

$$f_1(x) = \frac{2}{T} x, \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right). \quad (1.2.50)$$

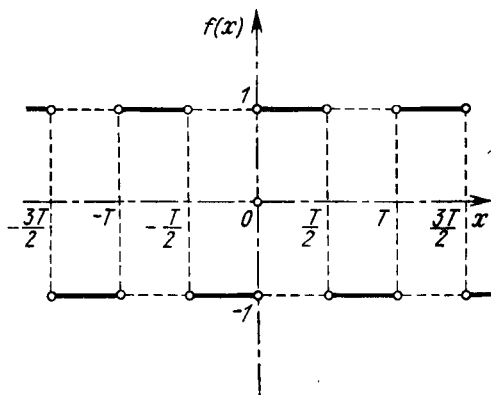
Точки  $x_i = (2i+1)(T/2)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , являются точками разрыва этой функции, а ее скачки равны  $s_i = -1 - 1 = -2$ . Применяв формулу (1.2.31), где точки разрыва образуют счетное множество, получаем

$$f_1'(x) = \frac{2}{T} - 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - (2i+1) \frac{T}{2}\right). \quad (1.2.51)$$



Фиг. 1.16.

Аналогично прямоугольная волна с единичной амплитудой и периодом  $T$  (фиг. 1.17), определяемая соотношением



Фиг. 1.17.

$$f_2(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right], \\ 1 & \text{при } x \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \end{cases} \quad (1.2.52)$$

имеет точки разрыва  $x_i = i(T/2)$ ,  $i \in Z$ , и скачки  $s_i = 2(-1)^i$ , так что

$$f'_2(x) = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \delta\left(x - i \frac{T}{2}\right). \quad (1.2.53)$$

Разложив функцию  $f_i(x)$  в ряд Фурье, получаем следующие ряды по синусам:

$$f_1(x) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i\pi} (-1)^i \sin \frac{2\pi i x}{T}, \quad (1.2.50')$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4}{(2i+1)\pi} \sin(2i+1) \frac{2\pi x}{T}. \quad (1.2.52')$$

Поскольку эти ряды сходятся, их можно почленно дифференцировать. Таким образом, получаем

$$f'_1(x) = -\frac{4}{T} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cos \frac{2\pi i x}{T}, \quad (1.2.51')$$

$$f'_2(x) = \frac{8}{T} \sum_{i=0}^{\infty} \cos(2i+1) \frac{2\pi x}{T}. \quad (1.2.53')$$

Отсюда следует

$$T \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - (2i+1) \frac{T}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cos \frac{2\pi i x}{T}. \quad (1.2.54)$$

В частности, при  $T = 2\pi$  можно написать

$$2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - (2i+1)\pi) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cos ix. \quad (1.2.54')$$

Аналогично

$$T \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \delta\left(x - i \frac{T}{2}\right) = 4 \sum_{i=0}^{\infty} \cos(2i+1) \frac{2\pi x}{T}, \quad (1.2.55)$$

а также

$$\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \delta(x - i\pi) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \cos(2i+1)x. \quad (1.2.55')$$

Используя таким образом разложение в ряд Фурье и дифференцирование в смысле теории обобщенных функций, можно получить различные соотношения между рядами.

В общем случае, если ряд из обобщенных функций с общим членом  $f_i(x) \in K'$  сходится к обобщенной функции  $f(x) \in K'$ , т. е. если

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f(x), \quad (1.2.56)$$

то этот ряд можно почленно дифференцировать:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(k)}(x) = f^{(k)}(x), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2.56')$$

### 1.2.1.5. Другие свойства производной

Ранее было показано, что для функций одной переменной, принадлежащих  $C^1$  всюду, за исключением конечного числа точек, где они имеют разрывы первого рода, имеет место формула (1.2.31). Похожая формула может быть установлена и для частных производных первого порядка функций нескольких переменных, являющихся функциями класса  $C^1$  всюду, за исключением дуги кривой, где они терпят разрывы первого рода.

Пусть  $f(x, y)$  — функция класса  $C^1$  в  $R^2$ , за исключением кривой  $\Gamma$ , где она имеет разрывы первого рода (фиг. 1.18). Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & (\tilde{f}'_y(x, y), \varphi(x, y)) = \\ & = (\tilde{f}'_y(x, y), \varphi(x, y)) + \int_{\Gamma} s_y \varphi(x, y) dx, \end{aligned} \quad (1.2.57)$$

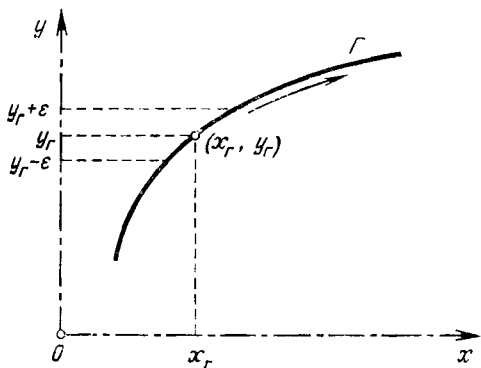
где  $s_y$  представляет собой скачок функции  $f(x, y)$  при пересечении кривой  $\Gamma$  в положительном направлении

оси  $Oy$  и определяется формулой

$$s_y = f(x_\Gamma, y_\Gamma + 0) - f(x_\Gamma, y_\Gamma - 0), \quad (x_\Gamma, y_\Gamma) \in \Gamma. \quad (1.2.57')$$

Действительно, пусть  $\varphi(x, y) \in K$ . Тогда

$$\begin{aligned} & (f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = -(f(x, y), \varphi'_y(x, y)) = \\ & = - \iint_{R^2} f(x, y) \varphi'_y(x, y) dx dy = - \int_R dx \int_R f(x, y) d_y \varphi(x, y), \end{aligned}$$



Фиг. 1.18.

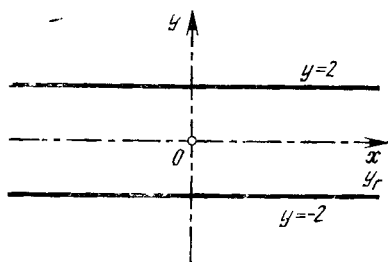
где

$$\begin{aligned} & \int_R f(x, y) d_y \varphi(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{y_\Gamma - \varepsilon} f(x, y) d_y \varphi(x, y) + \right. \\ & \left. + \int_{y_\Gamma + \varepsilon}^{\infty} f(x, y) d_y \varphi(x, y) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ f(x, y) \varphi(x, y) \Big|_{-\infty}^{y_\Gamma - \varepsilon} + \right. \\ & \left. + f(x, y) \varphi(x, y) \Big|_{y_\Gamma + \varepsilon}^{\infty} - \int_{-\infty}^{y_\Gamma - \varepsilon} \varphi(x, y) \tilde{f}'_y(x, y) dy - \right. \\ & \left. - \int_{y_\Gamma + \varepsilon}^{\infty} \varphi(x, y) \tilde{f}'_y(x, y) dy \right] = -s_y \varphi(x_\Gamma, y_\Gamma) - \end{aligned}$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) \tilde{f}'_y(x, y) dy.$$

Получаем

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = \int_{R^2} \varphi(x, y) \tilde{f}'_y(x, y) dx dy + \\ + \int_{\Gamma} s_y \varphi(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) dx,$$



Фиг. 1.19

отсюда, если учесть, что второй интеграл вычисляется вдоль кривой  $\Gamma$  и представляет собой криволинейный интеграл, следует формула (1.2.57).

Аналогично, если обозначить через  $s_x$  скачок функции  $f(x, y)$  при пересечении кривой  $\Gamma$  в положительном направлении оси  $Ox$ , можно написать

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) + \\ + \int_{\Gamma} s_x \varphi(x, y) dy. \quad (1.2.58)$$

В  $R^3$  можно также написать

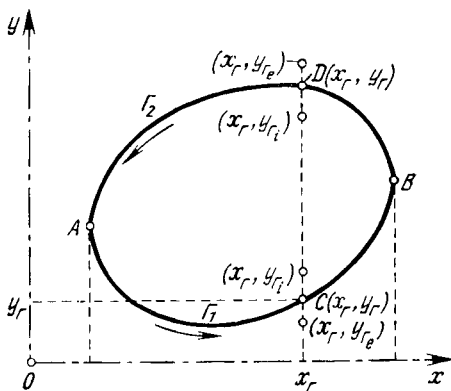
$$(f'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = (\tilde{f}'_x(x, y, z), \\ \varphi(x, y, z)) + \int_S s_x \varphi(x, y, z) dy dz, \quad (1.2.58')$$

где  $S$  — кусочно гладкая поверхность.

Рассмотрим, например, функцию (фиг. 1.19)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } -2 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases} \quad (1.2.59)$$

которая равна единице на полосе, ограниченной прямыми  $y = -2$  и  $y = 2$ , и равна нулю в остальных точках плоскости. Используя предыдущие формулы и учитывая при



Фиг. 1.20.

этом, что  $\tilde{f}'_x = 0$ ,

$$\tilde{f}'_y = 0, \quad s_y|_{y=-2} = 1, \quad s_y|_{y=2} = -1, \quad s_x|_{y=-2} = s_x|_{y=2} = 0,$$

получим

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) = 0 \Rightarrow f'_x(x, y) = 0, \quad (1.2.60)$$

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = \int_K [\varphi(x, -2) - \varphi(x, 2)] dx. \quad (1.2.60')$$

Аналогичные результаты можно получить и для замкнутых контуров. Пусть  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \in R^2$  — замкнутая кусочно-гладкая кривая (фиг. 1.20). Применяв формулу



(1.2.57) к дугам кривой  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , получим

$$\begin{aligned} (f'_y, \varphi) &= (\tilde{f}'_y, \varphi) + \int_{\widehat{AB}(\Gamma_1)} s_y \varphi dx + \\ &+ \int_{\widehat{AB}(\Gamma_2)} s_y \varphi dx = (\tilde{f}'_y, \varphi) + \int_{\Gamma_1} s_y \varphi dx - \int_{\Gamma_2} s_y \varphi dx, \end{aligned}$$

где кривая  $\Gamma$  пройдена в прямом направлении. Можно далее написать

$$\begin{aligned} (f'_y(x, y), \varphi(x, y)) &= (\tilde{f}'_y(x, y), \varphi(x, y)) + \\ &+ \int_{\Gamma} (\Delta f(x, y))_y \varphi(x, y) dx, \end{aligned} \quad (1.2.61)$$

где  $(\Delta f)_y$  представляет собой скачок функции  $f$  при пересечении кривой  $\Gamma$  и выражается следующим образом:

$$(\Delta f(x, y))_y = f(x_{\Gamma^i}, y_{\Gamma^i}) - f(x_{\Gamma^e}, y_{\Gamma^e}). \quad (1.2.62)$$

Здесь индекс  $i$  соответствует внутренности области, ограниченной кривой  $\Gamma$ , а индекс  $e$  — внешности этой области.

В частности, если функция  $f(x, y)$  равна нулю во внешности области, ограниченной кривой  $\Gamma$ , то формула (1.2.61) принимает вид

$$\begin{aligned} (f'_y(x, y), \varphi(x, y)) &= (\tilde{f}'_y(x, y), \varphi(x, y)) + \\ &+ \int_{\Gamma} f(x, y) \varphi(x, y) dx. \end{aligned} \quad (1.2.63)$$

Аналогично можно написать

$$\begin{aligned} (f'_x(x, y), \varphi(x, y)) &= (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) + \\ &+ \int_{\Gamma} (\Delta f(x, y))_x \varphi(x, y) dy, \end{aligned} \quad (1.2.61')$$

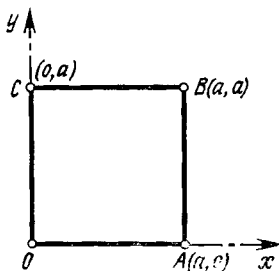
$$\begin{aligned} (f'_x(x, y), \varphi(x, y)) &= (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) + \\ &+ \int_{\Gamma} f(x, y) \varphi(x, y) dy. \end{aligned} \quad (1.2.63')$$

Можно установить аналогичные формулы и для функций нескольких переменных. Пусть, например, функция  $f(x, y, z)$  отлична от нуля (или равна нулю) во внешности области  $D$ , ограниченной замкнутой кусочно гладкой поверхностью  $S$ . Тогда имеют место следующие соотношения:

$$(f'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = (\tilde{f}'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) + \iint_S (\Delta f(x, y, z))_x \varphi(x, y, z) dydz, \quad (1.2.64)$$

$$(f'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = (\tilde{f}'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) + \iint_S f(x, y, z) \varphi(x, y, z) dydz, \quad (1.2.64')$$

а также соотношения, соответствующие направлениям, определяемым осями  $Oy$  и  $Oz$ .



Фиг. 1.21.

Рассмотрим, например, квадрат  $OABC$  со стороной  $a$  (фиг. 1.21) и функцию  $f(x, y)$ , равную нулю вне квадрата и единице внутри квадрата. Учитывая, что  $\tilde{f}'_x = 0$ ,  $\tilde{f}'_y = 0$ , а  $f(x, y) = 1$  на сторонах квадрата, можно написать

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = \int_{\Gamma} \varphi(x, y) dy = \int_{\widehat{OA}} \varphi(x, y) dy + \int_{\widehat{AB}} \varphi(x, y) dy + \int_{\widehat{BC}} \varphi(x, y) dy + \int_{\widehat{CO}} \varphi(x, y) dy =$$

$$= \int_0^a \varphi(a, y) dy + \int_a^0 \varphi(0, y) dy.$$

Отсюда следует

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = \int_0^a [\varphi(a, y) - \varphi(0, y)] dy \quad (1.2.65)$$

и аналогично

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = \int_0^a [\varphi(x, 0) - \varphi(x, a)] dx. \quad (1.2.65')$$

Отметим, что скачки, фигурирующие в формулах, соответствующих незамкнутым кривым и поверхностям, вычислены в положительном направлении соответствующей оси; если это направление изменено, то скачок следует взять с противоположным знаком. В случае замкнутых кривых и поверхностей скачки вычислены по направлению к внутренности области, ограниченной соответствующими кривыми или поверхностями.

## 1.2.2. Формулы разложения некоторых обобщенных функций

### 1.2.2.1. Общие результаты

Для интерпретации различных физических явлений часто полезно представлять одни обобщенные функции другими, более простыми; для обобщенной функции Ди-рака имеют место такие *формулы разложения*.

**Теорема 1.2.1.** *Рассмотрим на  $R^n$  функции  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^\infty$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Если эти функции имеют единственный корень  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , так что функциональный определитель отличен от нуля:*

$$D(x^0) = \left| \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|_{x=x^0} \neq 0, \quad (1.2.66)$$

то имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \delta(f_1, f_2, \dots, f_n) &= \frac{1}{|D(x^0)|} \delta(x - x^0) = \\ &= \frac{1}{|D(x^0)|} \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_n - x_n^0). \end{aligned} \quad (1.2.67)$$

Действительно, можно написать

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \dots, f_n) \varphi(f_1, f_2, \dots, f_n) df_1 df_2 \dots df_n = \\ = \varphi(0, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

где

$$df_1 df_2 \dots df_n = |D(x)| dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \dots, f_n) \varphi(f_1, f_2, \dots, f_n) |D(x)| dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \varphi(0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Заметим, что функция

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = |D(x)| \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

является основной; поэтому

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \dots, f_n) \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \varphi(0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Но

$$\varphi(0, 0, \dots, 0) = \frac{1}{|D(x^0)|} \psi(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

так что можно написать

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \dots, f_n) \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \frac{1}{|D(x^0)|} \psi(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (1.2.67).

Это соотношение может быть обобщено на случай, когда функции  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) имеют конечное или бесконечное число простых корней  $x^j$ . Таким образом, можно написать

$$\delta(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_j \frac{1}{|D(x^j)|} \delta(x - x^j),$$

$$x, x^j \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.68)$$

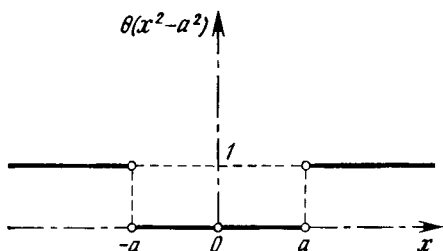
В частности, получаем

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x^j)|} \delta(x - x^j), \quad x, x^j \in \mathbb{R}. \quad (1.2.69)$$

Этот результат можно получить и путем применения правила дифференцирования сложной обобщенной функции.

### 1.2.2.2. Применения

Пусть  $\theta(x)$  — обобщенная функция Хевисайда. Определим следующую обобщенную функцию (фиг. 1.22):



Фиг. 1.22.

$$\theta(x^2 - a^2) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^2 - a^2 < 0, \\ 1 & \text{при } x^2 - a^2 \geq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < a, \\ 1 & \text{при } |x| \geq a, \end{cases} \quad a > 0. \quad (1.2.70)$$

Эту обобщенную функцию можно выразить также следующим образом:

$$\theta(x^2 - a^2) = 1 - \theta(x + a) + \theta(x - a), \quad a > 0. \quad (1.2.70')$$

Поскольку функция  $u(x) = x^2 - a^2$  бесконечно дифференцируема, можно применить формулу (1.2.5) дифференцирования сложной обобщенной функции. В результате получим

$$2x\delta(x^2 - a^2) = \delta(x - a) - \delta(x + a), \quad a > 0. \quad (1.2.71)$$

Функция  $v(x) = x$  не равна нулю в точках  $x = -a$  и  $x = a$ , поэтому соотношение (1.2.71) принимает следующий вид:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2x} [\delta(x - a) - \delta(x + a)], \quad a > 0. \quad (1.2.71')$$

Используя формулу (1.1.72), можно написать

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad a > 0. \quad (1.2.71'')$$

Применив формулу (1.2.69), получим такой же результат.

Заметим, что формулу (1.2.69) нельзя применить к  $\delta(x^2)$ , поскольку уравнение  $x^2 = 0$  имеет двойной корень. Поэтому обобщенная функция  $\delta(x^2)$  пока что лишена смысла. Можно придать смысл этой обобщенной функции путем вычисления

$$\lim_{a \rightarrow +0} \delta(x^2 - a^2).$$

При  $\varphi(x) \in K$  можно написать

$$(\delta(x^2 - a^2), \varphi(x)) = \frac{1}{2a} [\varphi(a) + \varphi(-a)], \quad a > 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(0) + a\varphi'(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < a, \\ \varphi(-a) &= \varphi(0) - a\varphi'(\xi_2), \quad -a < \xi_2 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\delta(x^2 - a^2), \varphi(x)) = \frac{1}{a} \varphi(0) + \frac{1}{2} [\varphi'(\xi_1) - \varphi'(\xi_2)], \quad a > 0.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{a \rightarrow +0} (\delta(x^2 - a^2), \varphi(x)) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a} \varphi(0). \quad (1.2.72)$$

Этот предел не существует при  $\varphi(0) \neq 0$ . Но если  $\varphi(x) \in K$  и  $\varphi(0) = 0$ , то

$$\lim_{a \rightarrow +0} \delta(x^2 - a^2) = 0. \quad (1.2.72')$$

Последнее соотношение придает смысл обобщенной функции  $\delta(x^2)$ .

Рассмотрим теперь обобщенную функцию

$$\theta(x^2 + a^2) = 1 \text{ при } x \in R, a \neq 0. \quad (1.2.73)$$

Заметим, что функция  $\omega(x) = x^2 + a^2 \in C^\infty$ , поэтому можно применить формулу (1.2.5) сложного дифференцирования. В результате будем иметь

$$x\delta(x^2 + a^2) = 0. \quad (1.2.74)$$

Применив формулу (1.2.69) к обобщенным функциям  $\delta(\sin x)$  и  $\delta(\cos x)$ , также получим

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi), \quad (1.2.75)$$

$$\delta(\cos x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right). \quad (1.2.75')$$

В пространстве  $R^3$  можно написать, например, соотношение

$$\begin{aligned} & \delta(\sin x, \sin y, \sin z) = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\pi, y - n\pi, z - p\pi). \end{aligned} \quad (1.2.75'')$$

Найдем теперь разложение обобщенной функции  $\delta(x^2 - a^2, y)$ . В этом случае применим формулу (1.2.67). Поскольку функции  $f_1(x, y) = x^2 - a^2$  и  $f_2(x, y) = y$  имеют простые корни  $(a, 0)$  и  $(-a, 0)$ , а функциональный опре-

делитель  $D(x, y) = 2x$ , то

$$\delta(x^2 - a^2, y) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a, y) + \delta(x + a, y)], \quad a > 0. \quad (1.2.76)$$

В случае  $f_1(x, y) = x^2 - a^2$ ,  $f_2(x, y) = y^2 - b^2$  получаем четыре пары простых корней:  $(a, b)$ ,  $(-a, b)$ ,  $(-a, -b)$  и  $(a, -b)$ , а функциональный определитель  $D(x, y) = 4xy$ . Из формулы (1.2.67) следует

$$\begin{aligned} \delta(x^2 - a^2, y^2 - b^2) = & \frac{1}{4ab} [\delta(x - a, y - b) + \\ & + \delta(x + a, y - b) + \delta(x + a, y + b) + \delta(x - a, y + b)], \\ & a, b > 0. \end{aligned} \quad (1.2.77)$$

Аналогично получаем

$$\delta(\sin x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\pi, y). \quad (1.2.78)$$

Умножая обе части соотношения (1.2.76) на  $x$ , получаем

$$\begin{aligned} x\delta(x^2 - a^2, y) &= \frac{x}{2a} [\delta(x - a, y) + \delta(x + a, y)] = \\ &= \frac{1}{2} [\delta(x - a, y) - \delta(x + a, y)], \quad a > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение

$$2x\delta(x^2 - a^2, y) = \delta(x - a, y) - \delta(x + a, y), \quad a > 0, \quad (1.2.79)$$

которое в более общем виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 2x\delta(x^2 - a^2, y - b) &= \delta(x - a, y - b) - \delta(x + a, y - b), \\ & a > 0, \end{aligned} \quad (1.2.79')$$

$$\begin{aligned} 4xy\delta(x^2 - a^2, y^2 - b^2) &= \delta(x - a, y - b) - \delta(x + a, y - b) + \\ & + \delta(x + a, y + b) - \delta(x - a, y + b), \quad a, b > 0. \end{aligned} \quad (1.2.79'')$$



Аналогично можно написать

$$\delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|b-a|} [\delta(x-a) + \delta(x-b)], \quad a \neq b, \quad (1.2.80)$$

а также

$$\delta(\alpha(x)(x-a)) = \frac{1}{|\alpha(a)|} \delta(x-a) = \frac{1}{|\alpha(x)|} \delta(x-a), \quad (1.2.81)$$

где  $\alpha(x)$  — функция класса  $C^\infty$ , не обращающаяся в нуль. Например,

$$\delta(x^3 - 1) = \frac{1}{3} \delta(x-1) = \delta(3(x-1)) < \delta(x-1), \quad (1.2.82)$$

или в общем случае

$$\delta(x^n - 1) = \frac{1}{n} \delta(x-1) = \delta(n(x-1)) < \delta(x-1), \quad 1 < n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.82')$$

### 1.2.3. Обобщенные функции с компактным носителем. Периодические обобщенные функции

#### 1.2.3.1. Общие результаты

Приведем две особенно полезные в приложениях теоремы.

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $g(x)$  — локально интегрируемая функция, а  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — постоянные величины. Равенство

$$g(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(x-x_i) = 0, \quad x, x_i \in \mathbb{R}, \quad (1.2.83)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$g(x) = 0, \quad (1.2.83')$$

$$\alpha_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.2.83'')$$

Действительно, пусть  $\varphi(x) \in K(R)$  — основная функция, носитель которой не содержит точки  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ); соотношение (1.2.83) влечет равенство

$$(g, \varphi) = 0,$$

откуда следует, что функция  $g(x)$  равна нулю почти всюду, исключая, быть может, лишь точки  $x_i$ .

Пусть теперь  $\varphi(x)$  — основная функция, носитель которой содержит только точку  $x_i$ . Тогда

$$\alpha_i \varphi(x_i) = 0.$$

Следовательно,  $\alpha_i = 0$ . Поступая таким образом для  $i=1, 2, \dots, n$ , получаем условия (1.2.83''); теперь из формулы (1.2.83) с учетом (1.2.83'') следует условие (1.2.83'). Достаточность условий очевидна. Таким образом, теорема доказана.

Таким же путем можно доказать следующую теорему.

**Теорема 1.2.3.** Пусть  $g(x)$  — непрерывная функция, а  $\alpha_i^j$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=0, 1, 2, \dots, m$ ) — постоянные величины. Тогда равенство

$$g(x) + \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \delta^{(j)}(x - x_j) = 0 \quad (1.2.84)$$

влечет соотношения

$$g(x) = 0, \quad (1.2.84')$$

$$\alpha_i^j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots, m). \quad (1.2.84'')$$

Эта теорема представляет собой обобщение предыдущей теоремы.

### 1.2.3.2. Структура обобщенных функций с компактным носителем

**Теорема 1.2.4.** Для того чтобы обобщенная функция одной переменной  $f(x)$  удовлетворяла уравнению

$$P(x) f(x) = 0, \quad (1.2.85)$$

где  $P(x)$  — многочлен, необходимо и достаточно, чтобы  $f(x)$  имела вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^s c_i \delta(x - x_i) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} c_j^k \delta^{(j-1)}(x - x'_k), \quad (1.2.86)$$

где  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ) — простые корни,  $x'_k$  ( $k=1, 2, \dots, r$ ) — кратные корни многочлена  $P(x)$  кратности  $m_k$ ,  $c_i$  и  $c_j^k$  — постоянные величины, а  $\delta$  — обобщенная функция Дирака.

Эта теорема может быть связана с результатами разд. 1.2.1.3, относящимися к произведению многочлена на производные произвольного порядка обобщенной функции Дирака.

**Теорема 1.2.5.** Пусть носитель обобщенной функции  $f(x)$  образован точками  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Тогда  $f(x)$  имеет вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m_j} c_i^j \delta^{(i)}(x - x_j), \quad (1.2.87)$$

где  $c_i^j$  ( $i=0, 1, \dots, m_j$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ) — постоянные величины, а  $\delta$  — обобщенная функция Дирака.

Действительно, для любой основной функции  $\psi(x)$ , равной нулю вместе со своими производными до порядка  $m_i$  включительно в точке  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), можно написать

$$(f, \psi) = 0.$$

Пусть теперь  $\varphi(x)$  — произвольная основная функция. Тогда

$$\psi(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_n)^{m_n} \varphi(x) = P(x) \varphi(x).$$

Следовательно,

$$(f, \psi) = (Pf, \varphi) = 0.$$

Таким образом, получено соотношение вида (1.2.85). Далее из предыдущей теоремы следует соотношение (1.2.87), поэтому сформулированная выше теорема доказана.

Итак, две сформулированные теоремы эквивалентны.

Отметим, что в теореме 1.2.4 были особо выделены простые корни ввиду важной роли, которую они играют. Очевидно, однако, что вклад простых корней можно было учесть в выражении для кратных корней, рассматривая корни с единичной кратностью.

### 1.2.3.3. Периодические обобщенные функции

В механике, как и в других естественных науках, встречаются периодические величины, имеющие большое значение как с теоретической, так и с практической точки зрения. Разложения в ряд Фурье являются важными представлениями таких величин.

Иногда, однако, появляются трудности, связанные с тем, что ряд Фурье, соответствующий некоторой функции, не всегда сходится к этой функции, например в случае периодических сосредоточенных величин. Единая теория, позволяющая обойти эти трудности, получается при разложении в ряд Фурье периодических величин в пространстве обобщенных функций. В этом пространстве любой ряд Фурье, соответствующий периодической обобщенной функции, сходится к этой обобщенной функции. Таким образом, задача сходимости не возникает и можно представлять рядами Фурье как величины, выраженные посредством локально интегрируемых функций, так и величины, выраженные периодическими обобщенными функциями.

Для выявления свойств рядов Фурье в пространстве обобщенных функций ниже будет изучена зависимость между функциями, определенными на окружности, и соответствующими периодическими функциями, определенными на прямой.

Пусть  $\Gamma$  — окружность длины  $T$  с центром в начале координат  $O$ , и пусть  $\mathbf{f}(M)$ ,  $M \in \Gamma$ , — векторная функция, определенная на  $\Gamma$ . Поставим в соответствие этой функции векторную периодическую функцию  $\tilde{\mathbf{f}}(x)$  с периодом  $T$ , определенную на оси  $Ox$ ; здесь волнистая черта обозначает периодичность функции. Основной функции  $\varphi(x) \in K(R)$  поставим в соответствие следующую периодическую функцию с периодом  $T$ :

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + nT), \quad n \in Z. \quad (1.2.88)$$

Очевидно, что эта функция также является основной, так что  $\tilde{\Phi}(x) \in K(R)$ .

Между функцией  $f(s)$ , определенной на  $\Gamma$ , и периодической функцией  $\tilde{f}(x)$ , определенной на  $R$ , имеет место соотношение

$$\int_{\Gamma} f(s) \Phi(s) ds = \int_R \tilde{f}(x) \varphi(x) dx = \int_0^T \tilde{f}(x) \tilde{\Phi}(x) dx, \quad (1.2.89)$$

где  $\Phi(s)$  — функция класса  $C^\infty$ ,  $\Phi(s) \in K(\Gamma)$ .

Очевидно, что при  $x, s \in [0, T]$

$$f(s) = \tilde{f}(x), \quad \Phi(s) = \tilde{\Phi}(x). \quad (1.2.90)$$

**Определение 1.1.14.** *Обобщенная функция  $F(x) \in K'(R)$  называется периодической с периодом  $T$ , если для любой основной функции  $\varphi(x) \in K(R)$  выполняется соотношение*

$$(F(x-T), \varphi(x)) = (F(x), \varphi(x)). \quad (1.2.91)$$

Из этого определения и соотношения (1.2.89) следует, что связь между обобщенной функцией  $f(s)$ , определенной на  $\Gamma$ , и периодической обобщенной функцией  $\tilde{f}(x)$ , определенной на  $R$ , выражается соотношением

$$(\tilde{f}(x), \varphi(x)) = (f(s), \Phi(s)), \quad (1.2.89')$$

являющимся обобщением соотношения (1.2.89).

Пусть  $\delta(s) \in K'(\Gamma)$  — обобщенная функция Дирака, сосредоточенная в начале координат, которая зависит от дуги  $s$  окружности  $\Gamma$ . Поставим в соответствие этой обобщенной функции периодическую обобщенную функцию  $\tilde{\delta}(x)$ , определенную на  $R$ . Таким образом, можно написать соотношение

$$(\delta(s), \Phi(s)) = (\tilde{\delta}(x), \varphi(x)) = \Phi(0). \quad (1.2.92)$$

Заметим, что

$$\Phi(0) = \tilde{\Phi}(0),$$

поэтому в соответствии с формулой (1.2.88) можно написать

$$\tilde{\Phi}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT), \quad n \in Z. \quad (1.2.93)$$

Следовательно,

$$(\tilde{\delta}(x), \varphi(x)) = \tilde{\Phi}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nT), \varphi(x) \right), \quad n \in Z. \quad (1.2.92')$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nT), \quad n \in Z. \quad (1.2.94)$$

Далее с учетом соотношения (1.2.75) можно написать

$$\delta(\sin \omega x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T'}{2\pi} \delta\left(x - n \frac{T'}{2}\right), \quad \omega = \frac{2\pi}{T'}, \quad n \in Z. \quad (1.2.95)$$

Если ввести теперь обозначение  $T' = 2T$ , то получим

$$\delta\left(\sin \frac{\pi}{T} x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{\pi} \delta(x-nT), \quad n \in Z. \quad (1.2.95')$$

Таким образом, сложная обобщенная функция  $\delta(\sin \omega x)$  является периодической обобщенной функцией с периодом  $T$ , для которой

$$\tilde{\delta}(x) = \omega \delta(\sin \omega x), \quad \omega = \frac{\pi}{T}. \quad (1.2.96)$$

Заметим также, что для обобщенной функции  $\tilde{\theta}(x)$  имеет место соотношение

$$\tilde{\theta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(x-nT), \quad n \in Z. \quad (1.2.97)$$

Следовательно, обобщенная функция  $\tilde{\theta}(x)$  удовлетворяет равенству

$$\tilde{\theta}'(x) = \tilde{\delta}(x). \quad (1.2.98)$$

Таким образом,  $\tilde{\theta}(x)$  соответствует обобщенной функции Хевисайда.

Дифференцируя соотношение (1.2.94), получаем выражение для обобщенной функции  $\tilde{\delta}'(x)$ :

$$\tilde{\delta}'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x - nT), \quad n \in Z. \quad (1.2.94')$$

Пусть теперь  $\tilde{f}(x)$  — периодическая обобщенная функция с периодом  $T$ , определенная на  $R$ . Коэффициенты соответствующего ряда Фурье определяются соотношением

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{T} (\tilde{f}(x), e^{-in\omega x}), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad n \in Z, \quad (1.2.99)$$

а ряд Фурье имеет вид

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{f}) e^{in\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad n \in Z. \quad (1.2.100)$$

Аналогично можно изучить периодические обобщенные функции  $\tilde{f}(x) \in K'(R^n)$ ; в частности, при  $n=2$  и  $n=3$  можно рассмотреть векторные обобщенные функции, широко используемые в механике.

## 1.2.4. Дельтаобразные последовательности

### 1.2.4.1. Понятие дельтаобразной последовательности

Во многих задачах теоретического или прикладного характера появляются последовательности локально интегрируемых функций, которые сходятся в пространстве обобщенных функций к обобщенной функции Дирака. Такие последовательности локально интегрируемых функций называются *дельтаобразными последовательностями*.

**Определение 1.1.15.** Если  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является последовательностью локально интегрируемых функций, такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.2.101)$$

то  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $k \in N_0$ , называется *дельтообразной последовательностью*.

Заметим, что соотношение (1.2.101), определяющее такую последовательность, эквивалентно следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \\ &= (\delta(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= \varphi(0, 0, \dots, 0), \end{aligned} \quad (1.2.101')$$

где  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K$ .

Можно сказать, что любой член последовательности  $f_k(x)$  является некоторым приближением обобщенной функции Дирака. Это обстоятельство чрезвычайно важно для практических целей. Действительно, предположим, что нужно получить некоторые числовые значения в задаче, в которой результаты выражаются через обобщенные функции. Тогда для выполнения вычислений можно заменить регулярную обобщенную функцию обычной функцией, порождающей данную обобщенную функцию, а сингулярную обобщенную функцию — некоторым членом соответствующей дельтообразной последовательности. Полученные таким образом формулы можно запрограммировать для вычислений на ЭВМ и получить нужное приближение в зависимости от выбранного члена дельтообразной последовательности.

Важной задачей является отыскание критериев, позволяющих устанавливать, является ли данная последовательность локально интегрируемых функций дельтообразной.

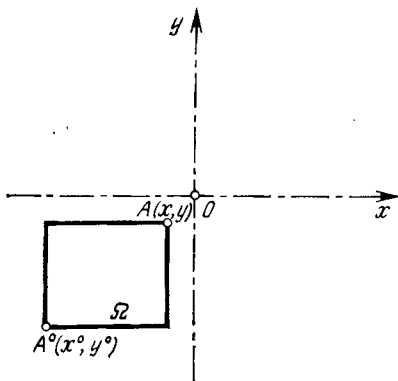
**Теорема 1.2.6.** Пусть последовательность локально интегрируемых функций  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенных на  $R^n$ , удовлетворяет условиям



$$а) \left| \iint_{\Omega} \dots \int f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right| \leq M,$$

$$б) \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} \dots \int f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots$$

$$\dots dx_n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \notin \Omega, \\ 1, & \text{если } 0 \in \Omega, \end{cases}$$



Фиг. 1.23.

где  $M$  не зависит от  $k$  и  $\Omega$  и  $\Omega$  — некоторый параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям и одна из вершин которого  $A^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  такова, что  $x_1^0 < 0, x_2^0 < 0, \dots, x_n^0 < 0$ . Тогда эта последовательность является дельтаобразной, т. е. выполняется соотношение (1.2.101).

Для доказательства ограничимся последовательностью  $f_k(x, y)$  локально интегрируемых функций. Указанный параллелепипед сводится в этом случае к прямоугольнику, для которого  $x^0 < 0, y^0 < 0$  (фиг. 1.23). Введем функцию

$$F_k(x, y) = \int_{x^0}^x \int_{y^0}^y f_k(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f_k(x, y) dx dy.$$

(1.2.102)

Ясно, что

$$\frac{\partial^2 F_k(x, y)}{\partial x \partial y} = f_k(x, y), \quad k \in N_0. \quad (1.2.102')$$

Если  $x > 0$  и  $y > 0$ , то  $\Omega$  содержит начало координат и, следовательно, согласно условию б)  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x, y) = 1$ .

Если же координаты точки  $A(x, y)$  не являются одновременно положительными, то  $\Omega$  не содержит начала координат и в силу того же условия  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x, y) = 0$ .

Поскольку  $F_k(x, y)$  являются ограниченными функциями, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x, y) = \theta(x, y), \quad (1.2.103)$$

где  $\theta(x, y)$  — функция Хевисайда в  $R^2$ . В силу соотношения (1.2.102') можно написать

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 F_k(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x, y) \right] = \\ &= \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) = \delta(x, y), \quad (1.2.103')$$

т. е. теорема доказана.

Функции, образующие дельтообразные последовательности, называют также *импульсными функциями*.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

**Теорема 1.2.7.** Пусть  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — дельтообразная последовательность, а  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция класса  $C^\infty$ , такая, что  $\psi(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Тогда для любого параллелепипеда  $\Omega \subset R^n$ , грани которого параллельны координатным плоскостям и одна из вершин которого  $A(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  такова, что  $x_1^0 < 0, x_2^0 < 0, \dots, x_n^0 < 0$ , имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \int \dots \int_{\Omega} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ \times dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0. \end{aligned} \quad (1.2.104)$$

Для доказательства ограничимся дельтообразной последовательностью в  $R^2$ . Пусть  $f_k(x, y)$  — рассматриваемая последовательность. Введем обозначение

$$F_k(x, y) = \int_{x^0}^x \int_{y^0}^y \psi(x, y) f_k(x, y) dx dy.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 F_k(x, y)}{\partial x \partial y} = \psi(x, y) f_k(x, y).$$

Переходя к пределу в смысле теории обобщенных функций, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 F_k(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x^0}^x \int_{y^0}^y \psi(x, y) f_k(x, y) dx dy = \psi(x, y) \delta(x, y) = \psi(0, 0) \delta(x, y) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x, y) = h_1(x) + h_2(y),$$

где  $h_i$  ( $i=1, 2$ ) — функции одной переменной.

Поскольку это соотношение имеет место для любой дельтообразной последовательности  $f_k(x, y)$ , то можно использовать такую произвольно выбранную последовательность для определения функций  $h_i$ . В этом случае выполняется соотношение (1.2.103). Следовательно,  $h_i = 0$ , поэтому соотношение (1.2.104) имеет место и теорема, таким образом, доказана.

#### 1.2.4.2. Примеры

Дельтообразные последовательности были использованы в интегралах Фурье, теории распространения тепла, волновой теории света, в представлении сосредоточенных нагрузок и т. д. Так, при формулировке принципа Гюйгенса в волновой теории света Кирхгоф использовал функции (фиг. 1.24)

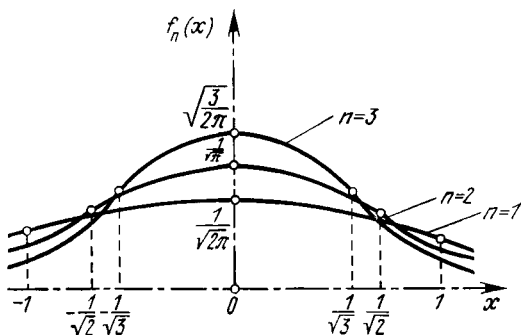
$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{\pi x^2}{2}}, \quad (1.2.105)$$

сходящиеся в обобщенном смысле к  $\delta(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x). \quad (1.2.106)$$

При представлении точечных источников тепла Кельвин использовал эту функцию в виде

$$g_k(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad k > 0, \quad t > 0. \quad (1.2.106')$$



Фиг. 1.24.

Как известно, в теории интеграла Фурье используется функция Дирихле (фиг. 1.25)

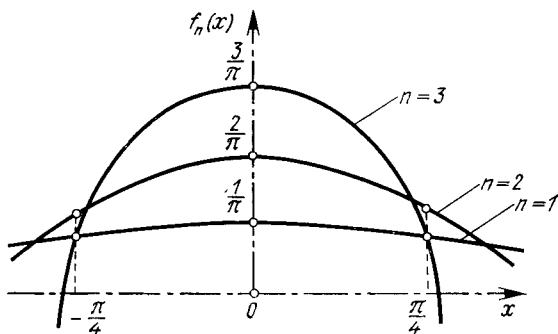
$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}, \quad 0 < n < \infty, \quad (1.2.107)$$

для которой также можно написать предельное соотношение вида (1.2.106). В самом деле, применим теорему 1.2.7. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(x) \frac{\sin nx}{x} dx = 0, \quad (1.2.108)$$

где  $\psi(x)$  — функция класса  $C^\infty$ , для которой  $\psi(0) = 0$ . В частности, при  $\psi(x) = x$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sin nx dx = 0. \quad (1.2.108')$$



Фиг. 1.25.

Интегрируя по частям, переходя к пределу и учитывая соотношение (1.2.108), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(x) \cos nx dx = 0. \quad (1.2.109)$$

В частности, при  $\psi(x) = x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x \cos nx dx = 0. \quad (1.2.109')$$

Отметим и функцию Стильеса (фиг. 1.26)

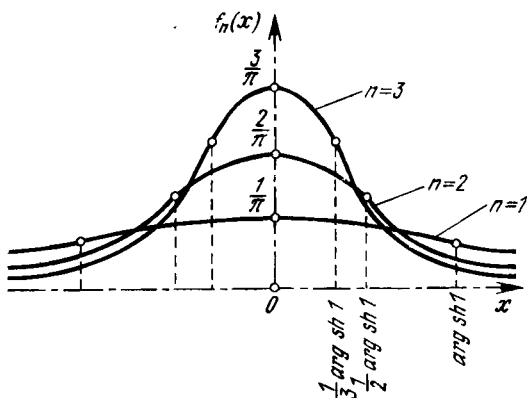
$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{n}{e^{nx} + e^{-nx}} = \frac{1}{\pi} \frac{n}{\operatorname{ch} nx}, \quad (1.2.110)$$

которая также является импульсной функцией. Интегрируя по  $x$  и переходя к пределу, получаем

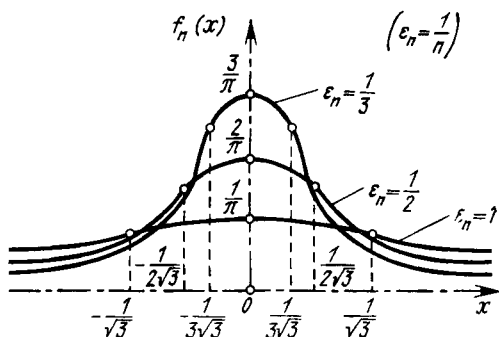
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^{nx} = \theta(x). \quad (1.2.111)$$

Функция Коши (фиг. 1.27)

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon_n}{x^2 + \varepsilon_n^2}, \quad \varepsilon_n > 0, \quad n \in \mathcal{N}_0, \quad (1.2.112)$$



Фиг. 1.26.



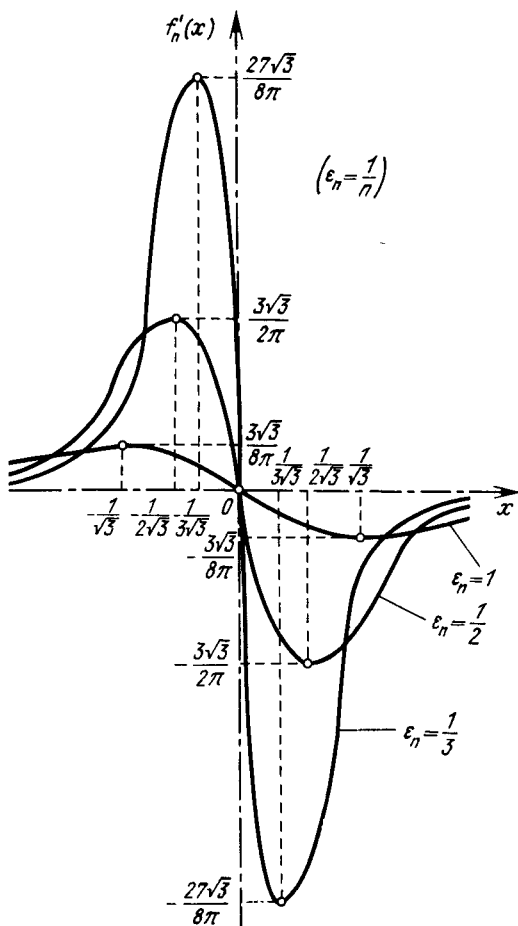
Фиг. 1.27.

где  $\epsilon_n$  — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, также является импульсной функцией.

Дифференцируя по  $x$ , получаем (фиг. 1.28)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2}{\pi} \frac{\epsilon_n x}{(x^2 + \epsilon_n^2)^2} \right] = \delta'(x), \quad (1.2.113)$$

т. е. последовательность  $f_n'(x)$  сходится к производной дельта-функции.

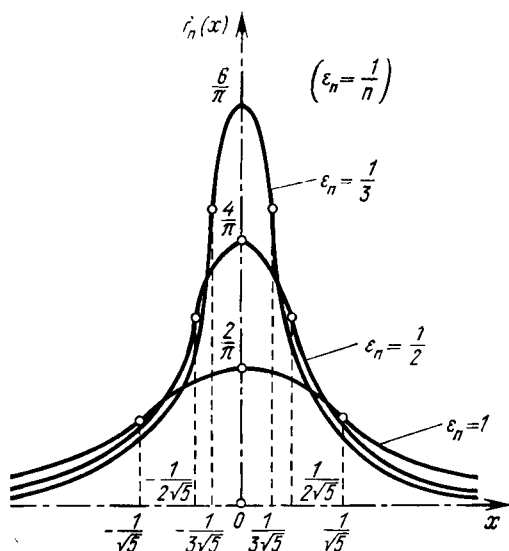


Фиг. 1.28.

Аналогично функции (фиг. 1.29)

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\epsilon_n^3}{(x^2 + \epsilon_n^2)^2}, \quad \epsilon_n > 0, \quad n \in N_0, \quad (1.2.114)$$

где последовательность положительных чисел  $\epsilon_n$  сходит-



Фиг. 1.29.

ся к нулю, образуют дельтообразную последовательность.

Действительно,

$$\int_a^b f_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \frac{b\varepsilon_n}{b^2 + \varepsilon_n^2} - \frac{a\varepsilon_n}{a^2 + \varepsilon_n^2} + \operatorname{arctg} \frac{b}{\varepsilon_n} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\varepsilon_n} \right),$$

Поскольку

$$\left| \frac{b\varepsilon_n}{b^2 + \varepsilon_n^2} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{a\varepsilon_n}{a^2 + \varepsilon_n^2} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad \left| \operatorname{arctg} \frac{b}{\varepsilon_n} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \frac{a}{\varepsilon_n} \right| \leq \pi,$$

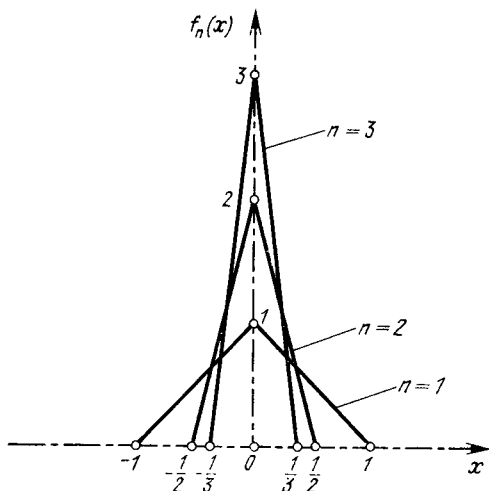
то справедливо соотношение

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{\pi} (1 + \pi).$$



Таким образом, условие а) теоремы 1.2.6 выполнено; условие б) нетрудно проверить, если учесть при этом приведенные выше соотношения.

Рассмотрим теперь следующую последовательность функций (фиг. 1.30):



Фиг. 1.30.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{1}{n}, \\ n(1 + nx) & \text{при } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0, \\ n(1 - nx) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (1.2.115)$$

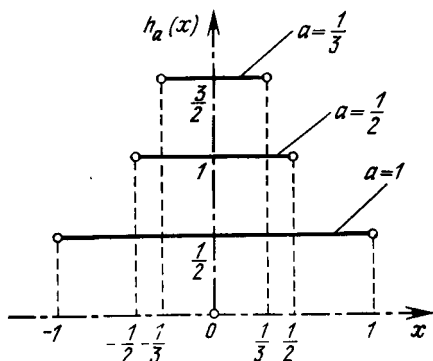
Заметим, что площадь образовавшегося треугольника равна единице при любом  $n$ . Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1, \quad (1.2.115')$$

т. е. условие а) теоремы 1.2.2 выполнено; далее

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^x f_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (1.2.115'')$$

т. е. выполнено и условие б) теоремы, и, следовательно, можно написать соотношение вида (1.2.106).



Фиг. 1.31а.

Рассмотрим теперь последовательность функций (фиг. 1.31а)

$$h_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{при } x \in [-a, a], a > 0, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (1.2.116)$$

Используя теорему 1.2.6, можно доказать, что

$$\lim_{a \rightarrow +0} h_a(x) = \delta(x). \quad (1.2.116')$$

К этому же результату можно прийти и другим путем. Действительно, при  $\varphi(x) \in K$

$$(h_a(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varphi(x) dx.$$

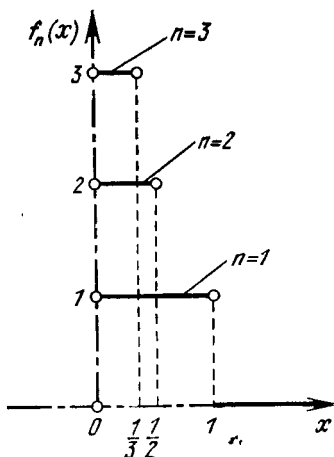
Применив теорему о среднем значении, получим

$$(h_a(x), \varphi(x)) = \varphi(\xi), \quad -a < \xi < a,$$

откуда при  $a \rightarrow +0$  будем иметь

$$\lim_{a \rightarrow +0} (h_a(x), \varphi(x)) = \lim_{a \rightarrow +0} \varphi(\xi) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Таким образом, соотношение (1.2.116') доказано.



Фиг. 1.316.

Рассмотрим также функцию (фиг. 1.316)

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (1.2.117)$$

Заметим, что

$$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^x f_n(x) dx = n \int_0^x dx \leq n \left( \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Следовательно, условие а) выполнено, поскольку интеграл ограничен. Что касается условия б), можно, очевид-

но, написать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Получено, таким образом, соотношение (1.2.101).

Рассмотрим интеграл

$$F_n(x) = \int_a^x \psi(x) f_n(x) dx, \quad (1.2.117')$$

где  $\psi(x)$  — функция класса  $C^\infty$ , такая, что  $\psi(0) = 0$ , а  $f_n$  — рассмотренная выше дельтообразная последовательность. Применяя теорему о среднем значении, получаем

$$F_n(x) = n \int_0^x \psi(x) dx = n \left( \frac{1}{n} \right) \psi(\xi), \quad 0 \leq \xi < x \leq \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \psi(0) = 0. \quad (1.2.117'')$$

Таким образом, последовательность (1.2.117) является последовательностью импульсных функций.

Аналогично можно построить дельтообразные последовательности функций нескольких переменных, имеющих такой же вид. Например, последовательность функций

$$h_a(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4a^2} & \text{при } (x, y) \in [-a, a] \times [-a, a], \\ 0 & \text{в остальных точках} \end{cases} \quad (1.2.118)$$

удовлетворяет соотношению

$$\lim_{a \rightarrow +0} h_a(x, y) = \delta(x, y). \quad (1.2.118')$$

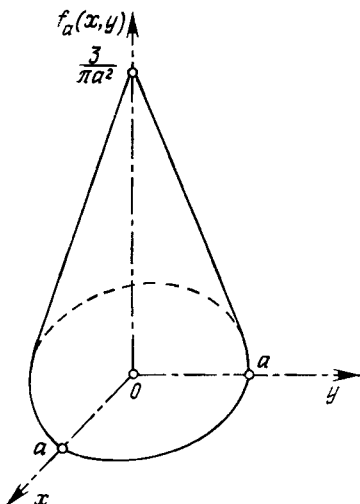
Таким же образом последовательность

$$h_a(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{8a^3} & \text{при } (x, y, z) \in [-a, a] \times [-a, a] \times \\ & \times [-a, a], \\ 0 & \text{в остальных точках} \end{cases} \quad (1.2.119)$$

сходится к дельта-функции:

$$\lim_{a \rightarrow +0} h_a(x, y, z) = \delta(x, y, z). \quad (1.2.119')$$

Рассмотрим теперь следующую последовательность функций (фиг. 1.32):



Фиг. 1.32.

$$f_a(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{\pi a^3} (a - r) & \text{при } 0 \leq r \leq a, a > 0, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (1.2.120)$$

Заметим, что

$$\iint_{R^2} f_a(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{3}{\pi a^3} (a - r) r dr d\theta.$$

Следовательно, выполнено первое условие теоремы 1.2.2. Далее для любой прямоугольной области  $\Omega$ , удовлетво-

ряющей условиям теоремы, имеет место соотношение

$$\lim_{a \rightarrow +0} \iint_{\Omega} f_a(x, y) dx dy = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \notin \Omega, \\ 0, & \text{если } 0 \in \Omega. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\lim_{a \rightarrow +0} f_a(x, y) = \delta(x, y). \quad (1.2.120')$$

Можно также показать, что функции

$$f_n(x, y) = \frac{p-2}{2\pi} \frac{\varepsilon_n^{p-2}}{(x^2 + y^2 + \varepsilon_n^2)^{p/2}},$$

$$\varepsilon_n > 0, n \in N_0 \quad (p=3, 4, 5, \dots), \quad (1.2.121)$$

где последовательность положительных чисел  $\varepsilon_n$  сходится к нулю, являются импульсными.

Например, при  $p=3$  получаем

$$f_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_n}{(x^2 + y^2 + \varepsilon_n^2)^{3/2}}, \quad \varepsilon_n > 0, \quad n \in N_0. \quad (1.2.121')$$

Следовательно,

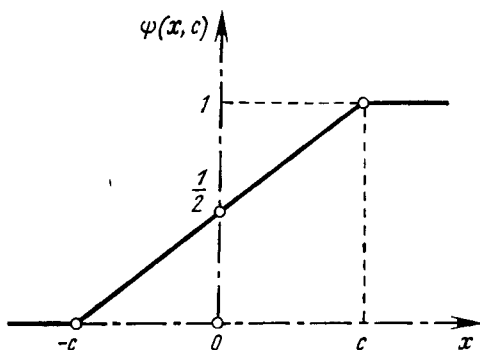
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = \delta(x, y). \quad (1.2.121'')$$

Дифференцируя формулу (1.2.121'') по  $x$  и  $y$ , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} f_n(x, y) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{3}{2\pi} \frac{x\varepsilon_n}{(x^2 + y^2 + \varepsilon_n^2)^{5/2}} \right], \quad (1.2.122) \\ \frac{\partial}{\partial y} \delta(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} f_n(x, y) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{3}{2\pi} \frac{y\varepsilon_n}{(x^2 + y^2 + \varepsilon_n^2)^{5/2}} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим также функцию (фиг. 1.33)

$$\begin{aligned} \psi(x, c) &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^x \theta(x-t) dt = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } x < -c, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{c}\right) & \text{при } -c \leq x \leq c, \\ 1 & \text{при } x > c, \end{cases} \quad (1.2.123) \end{aligned}$$



Фиг. 1.33.

где  $\theta$  — функция Хевисайда. Справедливо соотношение

$$\lim_{c \rightarrow +0} \psi(x, c) = \theta(x). \quad (1.2.123')$$

Таким образом, последовательность функций  $\psi(x, c)$  сходится к функции Хевисайда  $\theta(x)$ .

### 1.3. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. СВЕРТКА

#### 1.3.1. Прямое произведение

##### 1.3.1.1. Общие результаты

Прямое, или *тензорное*, *умножение* двух обобщенных функций — операция, обобщающая обычное умножение двух функций. Пусть  $R^n$  и  $R^m$  — два евклидовых пространства размерности  $n$  и  $m$  соответственно, а  $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  и  $y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$  — точки этих пространств. Декартово произведение этих пространств  $R^n \times R^m = R^{n+m}$  представляет собой новое евклидово пространство размерности  $n+m$ . Точками этого пространства являются пары  $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ , причем координаты записываются в указанном порядке.

Пусть теперь  $f(x)$  и  $g(y)$  — две числовые функции,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ . По определению прямое произведение функций  $f(x)$  и  $g(y)$  — это определенная на  $R^{n+m}$  функция

$$h(x, y) = f(x) \times g(y) = f(x) g(y). \quad (1.3.1)$$

Таким образом, прямое умножение двух функций совпадает с обычным умножением и является коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным по отношению к сложению определенных на одном пространстве функций.

Если, в частности, функции  $f(x)$  и  $g(y)$  локально интегрируемы на  $R^n$  и  $R^m$  соответственно, то их прямое произведение  $h(x, y)$  является локально интегрируемой на  $R^{n+m}$  функцией.

Чтобы определить прямое произведение двух обобщенных функций, обобщающее прямое произведение двух функций, рассмотрим сначала на  $R^n$  и  $R^m$  соответственно две локально интегрируемые функции  $f(x)$  и  $g(y)$ . Пусть  $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$  — основная функция, определенная на  $R^{n+m}$ . В силу теоремы Фубини<sup>1)</sup> о перемене порядка интегрирования можно записать

<sup>1</sup> См., например, [46, стр. 317]. — *Прим. ред.*



$$\begin{aligned} (f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) &= \int_{R^{n+m}} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy = \\ &= \int_{R^n} f(x) dx \int_{R^m} g(y) \varphi(x, y) dy = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))). \end{aligned}$$

Таким образом, *прямое произведение двух обобщенных функций*  $f(x) \in K'(R^n)$  и  $g(y) \in K'(R^m)$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} (f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) &= \\ &= (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \varphi(x, y) \in K(R^{n+m}). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Можно показать, что функционал, порожденный прямым произведением, является линейным и непрерывным и, следовательно, представляет собой обобщенную функцию, определенную на основном пространстве  $K(R^{n+m})$ .

Заметим, что прямое произведение двух регулярных обобщенных функций является регулярной обобщенной функцией, соответствующей функции  $f(x) g(y)$ .

Можно показать, что носитель обобщенной функции  $f(x) \times g(y)$  является декартовым произведением носителей обобщенных функций  $f(x)$  и  $g(y)$ , т. е.

$$\text{supp} [f(x) \times g(y)] = [\text{supp} f(x)] \times [\text{supp} g(y)]. \quad (1.3.3)$$

Используя полученные выше результаты, можно легко доказать *коммутативность* прямого умножения. Запишем равенство

$$f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x). \quad (1.3.4)$$

Следовательно, прямое произведение можно определить и соотношением

$$\begin{aligned} (f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) &= \\ &= (g(y), (f(x), \varphi(x, y))), \varphi(x, y) \in K(R^{n+m}). \end{aligned} \quad (1.3.2')$$

*Ассоциативность* прямого умножения доказывается аналогично:

$$f(x) \times [g(y) \times h(z)] = [f(x) \times g(y)] \times h(z), \quad (1.3.5)$$

где  $f(x) \in K'(R^n)$ ,  $g(y) \in K'(R^m)$ ,  $h(z) \in K'(R^p)$ .

*Дистрибутивность* прямого умножения относительно сложения определенных на одном и том же пространстве обобщенных функций очевидна. Таким образом, если  $f(x) \in K'(R^n)$ ,  $g_1(y), g_2(y) \in K'(R^m)$  и  $\alpha, \beta \in R$ , то

$$f(x) \times [\alpha g_1(y) + \beta g_2(y)] = \alpha f(x) \times g_1(y) + \beta f(x) \times g_2(y). \quad (1.3.6)$$

### 1.3.1.2. Свойства. Примеры

Пусть  $D_x^p$  и  $D_y^q$  — дифференциальные операторы по переменным  $x$  и  $y$  соответственно. Тогда справедливо соотношение

$$D_x^p D_y^q [f(x) \times g(y)] = (D_x^p f(x)) \times (D_y^q g(y)). \quad (1.3.7)$$

Действительно, для произвольной основной функции  $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$  можно написать

$$\begin{aligned} (D_x^p [f(x) \times g(y)], \varphi(x, y)) &= \\ &= (-1)^p (f(x) \times g(y), D_x^p \varphi(x, y)) = \\ &= (-1)^p (g(y), (f(x), D_x^p \varphi(x, y))) = \\ &= (g(y), (D_x^p f(x), \varphi(x, y))) = \\ &= (D_x^p f(x) \times g(y), \varphi(x, y)). \end{aligned}$$

Применив теперь оператор  $D_y^q$ , получим соотношение (1.3.7).

Аналогичное соотношение получается при умножении прямого произведения на бесконечно дифференцируемую функцию вида  $a(x) b(y)$ . Таким образом, если  $a(x) \in C^\infty(R^n)$  и  $b(y) \in C^\infty(R^m)$ , а  $f(x) \in K'(R^n)$  и  $g(y) \in K'(R^m)$ , то справедливо соотношение

$$a(x) b(y) [f(x) \times g(y)] = [a(x) f(x)] \times [b(y) g(y)]. \quad (1.3.8)$$

В случае других основных пространств можно получить аналогичный результат, учитывая условия, при которых определено произведение функции на соответствующую обобщенную функцию.

Если функция  $f(x)$  определена на  $R^n$ , а функция  $1(y)$ <sup>1</sup> — на  $R^m$ , то

$$f(x) \times 1(y) = f(x). \quad (1.3.9)$$

Следовательно, это прямое произведение не зависит от переменной  $y$ . То же самое справедливо и для обобщенных функций.

Обобщенная функция Хевисайда  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенная на  $R^n$ , может быть записана с использованием прямого произведения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \theta(x_1) \times \theta(x_2) \times \dots \times \theta(x_n) = \\ &= \theta(x_1) \theta(x_2) \dots \theta(x_n). \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Ее носителем является множество

$$\begin{aligned} \text{supp } \theta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \text{supp } \theta(x_1) \times \text{supp } \theta(x_2) \times \dots \times \text{supp } \theta(x_n) = \\ &= [0, \infty) \times [0, \infty) \times \dots \times [0, \infty). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} &= \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{\partial \theta(x_1)}{\partial x_1} \times \frac{\partial \theta(x_2)}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial \theta(x_n)}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1) \times \delta(x_2) \times \dots \times \delta(x_n). \quad (1.3.12)$$

Используя прямое произведение, выражение  $(\partial/\partial y)\theta(x, y)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} [\theta(x) \times \theta(y)] = \\ &= \theta(x) \times \frac{\partial}{\partial y} \theta(y) = \theta(x) \times \delta(y). \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

<sup>1</sup> Здесь функция  $1(y) \equiv 1, y \in R^m$ . — Прим. ред.

Тогда для функции  $\varphi(x, y) \in K(R^2)$  получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y), \varphi(x, y) \right) &= (\theta(x) \times \delta(y), \varphi(x, y)) = \\ &= (\theta(x), (\delta(y), \varphi(x, y))) = (\theta(x), \varphi(x, 0)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y), \varphi(x, y) \right) = \int_0^{\infty} \varphi(x, 0) dx. \quad (1.3.13')$$

Используя формулу (1.2.57), можно написать

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y), \varphi(x, y) \right) &= \\ &= \left( \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} \theta(x, y), \varphi(x, y) \right) + \int_{y=0} s_y \varphi(x, y) dx. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что  $s_y = 1$  на границе разрыва  $y=0$  и кроме того  $(\tilde{\partial}/\partial y)\theta(x, y) = 0$ . Итак, соотношение (1.3.13') получено другим путем.

## 1.3.2. Свертка

### 1.3.2.1. Общие результаты

По сравнению с прямым умножением свертка является преобразованием другой природы.

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — локально интегрируемые функции на  $R^n$ . *Свертка* функций  $f(x)$  и  $g(x)$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \int_{R^n} f(t) g(x-t) dt = \int_{R^n} g(t) f(x-t) dt = \\ &= (f(x), g(x-t)) = (g(x), f(x-t)) = (f \star g)(x), \quad (1.3.14) \end{aligned}$$

если только интеграл существует и является локально интегрируемой функцией переменной  $x \in R^n$ . Равенство двух интегралов легко проверить, например, заменой  $z = x - t$ .

Если, в частности, функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны, то их свертка также является непрерывной функцией.

Для существования свертки двух функций достаточно выполнения одного из следующих условий:

а) Функция  $f(x)$  интегрируема на  $R^n$ , а функция  $g(x)$  ограничена на  $R^n$  (или интегрируема на  $R^n$ ). В этом случае свертка является непрерывной и ограниченной функцией на  $R^n$ , причем можно написать следующую оценку:

$$|f(x) \times g(x)| \leq \int_{R^n} |f(x)| dx \sup_{x \in R^n} |g(x)|. \quad (1.3.15)$$

б) Носители функций  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $x \in R$ , содержатся в интервале  $[0, \infty]$ . В этом случае свертка принимает вид

$$f(x) \times g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \int_0^x f(t) g(x-t) dt & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.3.16)$$

Ее носитель содержится в интервале  $[0, \infty)$ .

в) Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  обладают компактными носителями.

Чтобы распространить определение свертки на обобщенные функции, рассмотрим сначала локально интегрируемые функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенные на  $R^n$ , в предположении, что их свертка, определяемая формулой (1.3.14), существует. Пусть  $\varphi(x) \in K(R^n)$  — основная функция. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} (f(x) \times g(x), \varphi(x)) &= \int_{R^n} \left[ \int_{R^n} f(\xi) g(x-\xi) d\xi \right] \varphi(x) dx = \\ &= \int_{R^{2n}} f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где произведена замена переменной  $x - \xi = \eta$ . Очевидно, что произведение  $f(\xi)g(\eta)$  можно рассматривать как прямое произведение  $f(\xi) \times g(\eta)$ , так что

$$\begin{aligned} (f(x) \times g(x), \varphi(x)) &= (f(x) \times g(y), \varphi(x+y)) = \\ &= (f(x), (g(y), \varphi(x+y))) = (g(y), (f(x), \varphi(x+y))). \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Будем считать, что соотношение (1.3.17) определяет *свертку обобщенных функций*  $f(x), g(x) \in K'(R^n)$ . Таким образом, свертка записывается при помощи прямого произведения; при этом основная функция равна  $\varphi(x+y)$ .

Можно показать, что для существования свертки достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

а) Хотя бы одна из обобщенных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  обладает компактным носителем.

б) Обе обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  обладают ограниченными с одной и той же стороны носителями [например,  $f(x)=0$  при  $x < a$  и  $g(x)=0$  при  $x < b$ , т. е. носители обеих функций ограничены слева].

Вообще можно показать, что носитель свертки двух обобщенных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  содержится в замыкании объединения носителей этих обобщенных функций:

$$\text{supp}(f(x) \times g(x)) \subset \overline{\text{supp } f(x) \cup \text{supp } g(x)}. \quad (1.3.18)$$

Учитывая свойства *коммутативности* и *ассоциативности* прямого умножения, можно показать, что свертка также обладает этими свойствами: если  $f(x), g(x), h(x) \in K'(R^n)$ , то можно написать

$$f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x), \quad (1.3.19)$$

$$[f(x) \times g(x)] \times h(x) = f(x) \times [g(x) \times h(x)].$$

Свертка обладает также свойством *дистрибутивности* относительно сложения обобщенных функций, т. е.

$$\begin{aligned} f(x) \times [\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] &= \\ = \alpha [f(x) \times g_1(x)] + \beta [f(x) \times g_2(x)], \quad \alpha, \beta \in R. \end{aligned} \quad (1.3.19')$$

Если  $D^p$  — дифференциальный оператор, то можно написать

$$D^p(f(x) \times g(x)) = D^p f(x) \times g(x) = f(x) \times D^p g(x). \quad (1.3.20)$$

Действительно, для  $\varphi(x) \in K(R^n)$

$$(D^p(f(x) \times g(x)), \varphi(x)) = (-1)^p (f(x) \times g(x), D^p \varphi(x)) =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^p (f(x) \times g(y), D^p \varphi(x+y)) = \\
&= (-1)^p (f(x), (g(y), D^p \varphi(x+y))) = \\
&= (f(x), (D^p g(y), \varphi(x+y))) = \\
&= (f(x) \times D^p g(y), \varphi(x+y)) = (f(x) \times D^p g(x), \varphi(x)).
\end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение (1.3.20).

В приложениях часто появляются обобщенные функции, зависящие от параметра.

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $f_t(x)$  — обобщенная функция, зависящая от параметра и такая, что существует  $(\partial/\partial t)f_t(x)$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_t(x) \times g(x)) = \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} \times g(x) \quad (1.3.21)$$

в случае, если выполнено одно из условий:

а) все обобщенные функции  $f_t(x)$  сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве;

б) обобщенная функция  $g(x)$  сосредоточена на ограниченном множестве;

в) носители функций  $f_t(x)$  и  $g(x)$  ограничены с одной и той же стороны константой, не зависящей от  $t$ .

Предположим теперь, что параметр  $t=k$  принадлежит счетному множеству. Если последовательность обобщенных функций  $f_k(x)$  сходится к обобщенной функции  $f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  и обобщенные функции  $f_k(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют одному из перечисленных выше условий а) — в), то можно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x) \times g(x)) = f(x) \times g(x). \quad (1.3.22)$$

### 1.3.2.2. Примеры

Обобщенная функция  $\delta(x)$  играет роль единицы для свертки, поскольку

$$\delta(x) \times f(x) = f(x), \quad x \in R^n. \quad (1.3.23)$$

Действительно, условие а) существования свертки выполнено, поскольку носитель  $\delta(x)$  состоит из одной точки. В этом случае можно написать

$$\begin{aligned} (\delta(x) \times f(x), \varphi(x)) &= (\delta(x) \times f(y), \varphi(x+y)) = \\ &= (f(y), (\delta(x), \varphi(x+y))) = (f(y), \varphi(y)) = (f(x), \varphi(x)), \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (1.3.23).

Если  $f_k(x)$  является дельтообразной последовательностью, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x) \times g(x)) = g(x). \quad (1.3.22')$$

Аналогично можно показать, что

$$\delta(x - x^0) \times f(x) = f(x - x^0), \quad x, x^0 \in R^n; \quad (1.3.23')$$

в частности,

$$\delta(x - a) \times \delta(x - b) = \delta(x - a - b), \quad x, a, b \in R^n. \quad (1.3.23'')$$

Можно также написать

$$D^p [\delta(x) \times f(x)] = D^p \delta(x) \times f(x) = D^p f(x). \quad (1.3.24)$$

Вычислим теперь свертку  $\theta(x-a) \times \theta(x-b)$ ,  $0 \leq a \leq b$ . В этом случае носителями функций  $\theta(x-a)$  и  $\theta(x-b)$  являются соответственно интервалы  $[a, \infty)$  и  $[b, \infty)$ , причем оба они содержатся в интервале  $[0, \infty)$ . Применяя формулу (1.3.16), получим

$$\begin{aligned} \theta(x-a) \times \theta(x-b) &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \int_a^x \theta(t-a) \theta(x-t-b) dt & \text{при } x \geq a. \end{cases} \quad (1.3.25) \end{aligned}$$

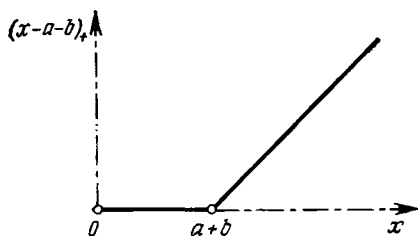
Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \int_a^x \theta(t-a) \theta(x-t-b) dt &= \int_a^x \theta(x-t-b) dt = \\ &= - \int_{x-a-b}^{-b} \theta(u) du = \int_0^{x-a-b} \theta(u) du = x-a-b, \quad x \geq a+b. \end{aligned}$$

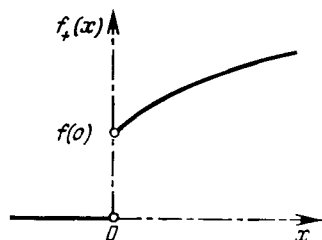


Отсюда получаем (фиг. 1.34а)

$$\begin{aligned} \theta(x-a) \times \theta(x-b) &= (x-a-b)_+ = (x-a-b)\theta(x-a-b) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } x < a+b, \\ x-a-b & \text{при } x \geq a+b. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.25')$$



Фиг. 1.34а.



Фиг. 1.34б.

Вообще, если дана функция  $f(x)$ , то определим положительную часть функции  $f(x)$  соотношением (фиг. 1.34б)

$$f_+(x) = \theta(x) f(x). \quad (1.3.26)$$

Для  $a=b=0$  получаем

$$\theta(x) \times \theta(x) = x_+ = x\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.3.27)$$

Аналогично можно написать

$$\theta(x) \times x_+^n = \frac{1}{n+1} x_+^{n+1}; \quad (1.3.28)$$

в частности,

$$\theta(x) \times x_+ = \frac{1}{2} x_+^2. \quad (1.3.28')$$

Справедливы также следующие соотношения:

$$\theta(x) \sin x \times \theta(x) \cos x = \frac{1}{2} x_+ \sin x, \quad (1.3.29)$$

$$\theta(x) \sin x \times \theta(x) \sin x = \frac{1}{2} [\theta(x) \sin x - x_+ \cos x], \quad (1.3.29')$$

$$\theta(x) \cos x \times \theta(x) \cos x = \frac{1}{2} [\theta(x) \sin x + x_+ \cos x]. \quad (1.3.29'')$$

Рассмотрим теперь интегрируемую на  $R$  функцию

$$f_a(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2}, \quad a > 0, \quad (1.3.30)$$

и вычислим свертку  $f_a(x) \times f_b(x)$ :

$$\begin{aligned} f_a(x) \times f_b(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) f_b(x-t) dt = \\ &= \frac{ab}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} e^{-b^2 (x-t)^2} dt = \\ &= \frac{ab}{\pi} e^{-\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a^2 + b^2} t - \frac{b^2 x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Произведя замену

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} t - \frac{b^2 x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

и учитывая значение интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \quad (1.3.31)$$

получаем

$$f_a(x) \times f_b(x) = f_c(x), \quad (1.3.32)$$

$$c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1.3.32')$$

Отметим, что функция (1.3.30) соответствует дельтообразной последовательности, определяемой формулой (1.2.105).

Рассмотрим теперь функцию

$$f_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad a > 0, \quad (1.3.33)$$

соответствующую последовательности, определяемой формулой (1.2.112). Заметим, что, хотя носителем этой функции является вся действительная ось, эта функция ограничена:

$$|f_a(x)| \leq \frac{1}{\pi a},$$

поэтому свертка имеет смысл и можно написать соотношение вида (1.3.32), причем

$$c = a + b. \quad (1.3.32'')$$

#### 1.4. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НА КРИВЫХ, ПОВЕРХНОСТЯХ И ОБЪЕМАХ. ОДНОРОДНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

##### 1.4.1. Обобщенные функции, сосредоточенные на кривых, поверхностях и объемах

###### 1.4.1.1. Общие результаты

Если носитель обобщенной функции  $f(x)$  содержится в множестве  $A$  ( $\text{supp } f \subset A$ ), то говорят, что обобщенная функция  $f(x)$  *сосредоточена на  $A$* . Так, например, обобщенная функция Дирака  $\delta(x)$  и обобщенная функция Хевисайда  $\theta(x)$  сосредоточены соответственно в начале координат и на полуоси  $[0, \infty)$ .

Общий метод представления таких обобщенных функций основан на введении некоторой дифференциальной формы, соответствующей *гиперповерхности*<sup>1</sup> в пространстве  $R^n$ . В целях упрощения вычислений будем использовать другой, более простой способ, допускающий важные физические интерпретации.

Пусть  $\Gamma$  — кусочно гладкая кривая в  $R^3$ , а  $\rho(x, y, z)$  — линейная плотность массы, распределенной на  $\Gamma$ . Обозначим через  $ds$  и  $dm$  соответственно элементы дуги и массы. Тогда линейная плотность  $\rho(x, y, z)$  будет равна

$$\rho(x, y, z) = \frac{dm}{ds}. \quad (1.4.1)$$

<sup>1</sup> То есть  $n-1$ -мерной поверхности в  $R^n$ . — Прим. ред.

Полная масса, распределенная на  $\Gamma$ ,

$$M = \int_{\Gamma} dm = \int_{\Gamma} \rho ds. \quad (1.4.2)$$

Введем теперь в связи с общей массой  $M$  обобщенную функцию  $f(x, y, z)$ , определив ее соотношением

$$(f(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \int_{\Gamma} f(x, y, z) \varphi(x, y, z) ds, \quad (1.4.3)$$

где  $f(x, y, z)$  — локально интегрируемая функция, а  $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$ . Обобщенная функция  $f(x, y, z)$  сосредоточена на  $\Gamma$ , поскольку для любой основной функции  $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$ , носитель которой не содержит точек кривой  $\Gamma$ , обобщенная функция  $f(x, y, z)$  равна нулю. Рассмотрим, в частности, следующую обобщенную функцию, сосредоточенную на  $\Gamma$ :

$$f(x, y, z) = \rho(x, y, z) = 1 \text{ на } \Gamma,$$

которую символически будем обозначать как  $\delta(\Gamma)$ . С физической точки зрения эта обобщенная функция соответствует полной массе, распределенной на  $\Gamma$  с единичной линейной плотностью. Она является аналогом обобщенной функции Дирака  $\delta(x, y, z)$ , которая с физической точки зрения выражает единичную плотность массы, сосредоточенной в начале координат. В дальнейшем обобщенную функцию  $\delta(\Gamma)$  будем называть *обобщенной функцией Дирака, сосредоточенной на  $\Gamma$* . Формально эта обобщенная функция определяется соотношением

$$\begin{aligned} (\delta(\Gamma), \varphi(x, y, z)) &= \iiint_{R^3} \delta(\Gamma) \varphi(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \int_{\Gamma} \varphi(x, y, z) ds. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Ее основное свойство состоит в том, что  $\delta(\Gamma) = 0$  для точек  $(x, y, z) \notin \Gamma$ .

Аналогично, если  $S$  — кусочно гладкая гиперповерхность в  $R^n$ , а  $dS$  — элемент площади, то *обобщенная функция Дирака  $\delta(S)$ , сосредоточенная на гиперповерх-*

ности  $S$ , определяется соотношением

$$(\delta(S), \varphi(x)) = \int_S \varphi(x) dS, \quad \varphi(x) \in K(R^n), \quad x \in R^n. \quad (1.4.5)$$

Далее, если  $V$  — область в  $R^n$ , то обобщенная функция  $\delta(V)$ , сосредоточенная на области  $V$ , определяется соотношением

$$(\delta(V), \varphi(x)) = \int_V \varphi(x) dV, \quad (1.4.6)$$

где  $\varphi(x) \in K(R^n)$ , а  $dV$  — элемент объема.

Используя формулы

$$(f(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \int_S f(x, y, z) \varphi(x, y, z) dS, \quad (1.4.5')$$

$$(f(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \int_V f(x, y, z) \varphi(x, y, z) dV, \quad (1.4.6')$$

можно ввести произвольные обобщенные функции  $f(x)$ , сосредоточенные соответственно на гиперповерхности  $S$  и объеме  $V$ .

В частности, в случае  $n=3$  получаем обобщенные функции, сосредоточенные соответственно на поверхности  $S$  и в объеме  $V$  в пространстве  $R^3$ .

Важно отметить, что некоторые физические величины действуют на функции, которые не всегда принадлежат основному пространству  $K$ . Например, обобщенная функция  $f = \rho\delta(\Gamma)$ , определенная соотношением (1.4.3), тесно связана с полной распределенной на кривой  $\Gamma$  массой, выражение которой дано формулой (1.4.2). Чтобы соотношение (1.4.3) также определяло полную массу, распределенную на  $\Gamma$ , необходимо допустить, что  $\varphi = 1$ ; между тем эта функция не принадлежит основному пространству  $K$ , поскольку не обладает компактным носителем. Таким образом,

$$(\rho\delta(\Gamma), 1) = \int_{\Gamma} \rho ds = M. \quad (1.4.7)$$

Рассмотрим теперь обобщенную функцию  $x\rho\delta(\Gamma)$ , где  $\rho(x, y, z)$  — непрерывная функция. Если  $\varphi(x, y,$

$z) \in K$  — основная функция, то

$$(x\rho\delta(\Gamma), \varphi) = (\delta(\Gamma), x\rho\varphi) = \int_{\Gamma} x\rho\varphi ds. \quad (1.4.8)$$

Очевидно, что рассмотренная обобщенная функция также сосредоточена на  $\Gamma$ . Чтобы выявить ее физический смысл, достаточно рассмотреть абсциссу центра масс кривой  $\Gamma$ :

$$x_c = \frac{\int_{\Gamma} x\rho ds}{\int_{\Gamma} \rho ds}. \quad (1.4.9)$$

**Числитель**

$$S_{Oyz} = \int_{\Gamma} x\rho ds \quad (1.4.10)$$

представляет собой статический момент кривой  $\Gamma$  относительно плоскости  $Oyz$ , а знаменатель — полную массу, распределенную на  $\Gamma$ .

Сравнивая выражение (1.4.10) для статического момента  $S_{Oyz}$  с выражением (1.4.8), замечаем, что для  $\varphi = 1$  можно написать

$$(x\rho\delta(\Gamma), 1) = \int_{\Gamma} x\rho ds = S_{Oyz}. \quad (1.4.11)$$

Отсюда следует, что статический момент кривой  $\Gamma$  относительно плоскости  $Oyz$  полностью описывается обобщенной функцией  $x\rho\delta(\Gamma)$ , которая называется обобщенной функцией статического момента кривой  $\Gamma$  относительно плоскости  $Oyz$ . Введем обозначение

$$x\rho\delta(\Gamma) = S_x(\Gamma). \quad (1.4.12)$$

Тогда можно написать

$$(S_x(\Gamma), 1) = S_{Oyz}.$$

Также можно ввести обобщенные функции, соответствующие статическим моментам кривой  $\Gamma$  относительно остальных координатных плоскостей.

Аналогичные рассуждения можно провести и в случае моментов инерции, а также моментов произвольного порядка. Эти примеры показывают, что некоторым физическим величинам могут соответствовать функционалы, определенные на более широком, чем  $K$ , пространстве.

Важным свойством обобщенных функций Дирака является их *аддитивность*. Таким образом, если гиперповерхность  $S = S_1 \cup S_2$ , то

$$\delta(S) = \delta(S_1) + \delta(S_2). \quad (1.4.13)$$

Действительно, для произвольной функции  $\varphi(x) \in \in K(R^n)$  можно написать

$$\begin{aligned} (\delta(S), \varphi) &= \int_S \varphi dS = \int_{S_1} \varphi dS_1 + \int_{S_2} \varphi dS_2 = \\ &= (\delta(S_1), \varphi) + (\delta(S_2), \varphi), \end{aligned}$$

откуда следует соотношение (1.4.13).

Если  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  — уравнение некоторой гиперповерхности в  $R^n$ , такой, что  $P \in C^\infty$ , то

$$P\delta(S) = 0, \quad (1.4.14)$$

поскольку

$$(P\delta(S), \varphi) = (\delta(S), P\varphi) = \int_S P\varphi dS = 0,$$

ибо функция  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  равна нулю для  $x \in S$ .

### 1.4.1.2. Формулы дифференцирования

Обобщенные функции Дирака  $\delta(\Gamma)$  и  $\delta(S)$  особенно часто используются при вычислении частных производных обобщенных функций, порожденных функциями с разрывами первого рода.

Рассмотрим теперь формулу (1.2.57), полученную для функций  $f(x, y)$  класса  $C^1$  в  $R^2$ , имеющих разрывы первого рода при пересечении кривой  $\Gamma$ . Введем угол, образованный нормалью  $n$  с осью  $Oy$ . Тогда  $dx = ds \cos(n, y)$  и интеграл в правой части формулы (1.2.57) можно записать в виде

$$\int_{\Gamma} s_y \varphi(x, y) dx = \int_{\Gamma} s_y \varphi(x, y) \cos(n, y) ds = \\ = (s_y \cos(n, y) \delta(\Gamma), \varphi(x, y)),$$

так что будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} f(x, y) + s_y \cos(n, y) \delta(\Gamma). \quad (1.4.15)$$

Получим также

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} f(x, y) + s_x \cos(n, x) \delta(\Gamma). \quad (1.4.15')$$

Аналогично, рассматривая формулу (1.2.58'), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} f(x, y, z) + s_x \cos(n, x) \delta(S). \quad (1.4.15'')$$

Вообще, если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция класса  $C^1$  всюду на  $R^n$ , за исключением гиперповерхности  $S$ , где функция терпит разрыв первого рода, то можно написать

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\tilde{\partial} f}{\partial x_i} + s_i \cos(n, x_i) \delta(S) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.4.16)$$

где  $\delta(S)$  — обобщенная функция Дирака, сосредоточенная на гиперповерхности  $S$ ,  $s_i$  — скачок функции при пересечении этой гиперповерхности в положительном направлении оси  $Ox_i$ , а  $\cos(n, x_i)$  — косинус угла, образованного осью  $Ox_i$  с нормалью к гиперповерхности.

Для обобщенной функции Дирака, сосредоточенной на кривой или поверхности, можно получить формулы, аналогичные формулам (1.2.37) — (1.2.39').

### 1.4.1.3. Примеры

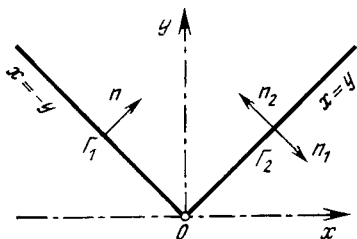
Рассмотрим функцию (фиг. 1.35)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq y, y > 0, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (1.4.17)$$



Кривая, ограничивающая область, где функция отлична от нуля, состоит из двух ветвей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ( $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ), которые определяются соответственно следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} (\Gamma_1) \quad x &= -y, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0, \\ (\Gamma_2) \quad x &= y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0; \end{aligned} \quad (1.4.18)$$



Фиг. 1.35.

это и есть кривая разрыва, соответствующая функции  $f(x, y)$ . Производные в обычном смысле там, где они существуют, равны

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

При вычислении производной по  $x$  следует учесть, что

$$s_x|_{\Gamma_1} = 1, \quad s_x|_{\Gamma_2} = -1$$

и

$$\cos(n, x)|_{\Gamma_1} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(n_1, x)|_{\Gamma_2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\delta(\Gamma_1) - \delta(\Gamma_2)]. \quad (1.4.19)$$

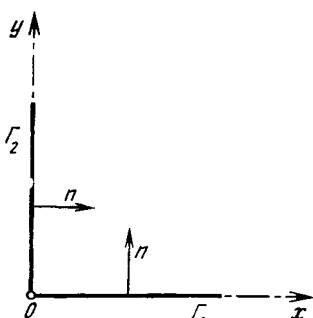
Аналогично при вычислении производной по  $y$  имеем

$$s_y|_{\Gamma_1} = s_y|_{\Gamma_2} = 1,$$

а также

$$\cos(n, y)|_{\Gamma_1} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(n_2, y)|_{\Gamma_2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$



Фиг. 1.36.

откуда следует

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\delta(\Gamma_1) + \delta(\Gamma_2)] = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(\Gamma). \quad (1.4.19')$$

Пусть  $\theta(x, y)$  — обобщенная функция Хевисайда

$$\theta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (1.4.20)$$

Кривая разрыва  $\Gamma$  этой функции состоит из двух ветвей (фиг. 1.36):

$$\begin{aligned} (\Gamma_1) \quad y &= 0, \quad x \geq 0, \\ (\Gamma_2) \quad x &= 0, \quad y \geq 0, \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

соответствующих полуосям  $Ox$  и  $Oy$ . Заметим, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad s_x|_{\Gamma_2} = s_y|_{\Gamma_1} = 1,$$

$$\cos(n, x)|_{\Gamma_2} = \cos(n, y)|_{\Gamma_1} = 1,$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y) = \delta(\Gamma_2), \quad \frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y) = \delta(\Gamma_1). \quad (1.4.22)$$

В этом случае можно написать

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \partial y}, \varphi(x, y) \right) = \left( \frac{\partial}{\partial y} \delta(\Gamma_2), \varphi(x, y) \right) = \\ & = - \left( \delta(\Gamma_2), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) \right) = - \int_0^{\infty} \varphi'_y(0, y) dy = - \varphi(0, y) \Big|_0^{\infty} = \\ & = \varphi(0, 0) = (\delta(x, y), \varphi(x, y)), \end{aligned}$$

откуда следует соотношение

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \delta(\Gamma_2) = \frac{\partial}{\partial x} \delta(\Gamma_1) = \delta(x, y). \quad (1.4.23)$$

Далее, учитывая аддитивность обобщенной функции Дирака, сосредоточенной на кривой  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , и дифференцируя соотношение (1.4.23) по  $x$  и  $y$ , получим

$$\frac{\partial^2 \delta(\Gamma)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y}. \quad (1.4.24)$$

## 1.4.2. Однородные обобщенные функции

### 1.4.2.1. Общие результаты

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция  $n$  переменных, а  $k$  — действительное положительное число. Функция  $f(x)$ ,  $x \in R^n$ , называется *однородной функцией степени  $\lambda$* , если

$$\begin{aligned} & f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = \\ & = k^\lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

Класс функций, определенный этим соотношением, полностью описывается *уравнением Эйлера*

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.4.26)$$

которое является линейным неоднородным уравнением первого порядка. Его общим решением является функция, удовлетворяющая соотношению (1.4.25).

Например, функции

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \quad (1.4.27)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \quad (1.4.27')$$

являются однородными функциями степени 1 и  $-1$  соответственно. Первая из этих функций локально интегрируема всюду, тогда как вторая имеет сингулярность в начале координат и не интегрируема в окрестности этой точки. Поэтому поставим в соответствие функции  $1/r$  функционал, совпадающий с этой функцией всюду, за исключением начала координат. Производные функции  $r$  также являются однородными функциями нулевой степени; начало координат является сингулярной точкой этих функций.

Функция Хевисайда  $\theta(x)$  является однородной функцией нулевой степени, поскольку

$$\theta(kx) = \theta(x) = k^0 \theta(x). \quad (1.4.28)$$

Далее, поскольку преобразование подобия определено для обобщенных функций, то понятие однородности произвольной степени можно распространить и на обобщенные функции.

**Определение 1.4.1.** Обобщенная функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *однородной функцией степени  $\lambda$* , если для любого действительного числа  $k > 0$  она удовлетворяет соотношению вида (1.4.25).

Можно записать это условие и в другом виде. Действительно, пусть  $\varphi(x) \in K(R_n)$  — основная функция. Учитывая определение преобразования подобия, получаем<sup>1)</sup>

$$(f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) =$$

<sup>1</sup> См. формулу (1.1.55). — Прим. ред.

$$= \frac{1}{k^n} \left( f(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi \left( \frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \dots, \frac{x_n}{k} \right) \right) =$$

$$= k^\lambda (f(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad k > 0,$$

откуда следует

$$\left( f(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi \left( \frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \dots, \frac{x_n}{k} \right) \right) =$$

$$= k^{\lambda+n} (f(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad (1.4.29)$$

или

$$\left( f(x), \varphi \left( \frac{x}{k} \right) \right) = k^{\lambda+n} (f(x), \varphi(x)), \quad x \in R^n. \quad (1.4.29')$$

Эти соотношения эквивалентны соотношению (1.4.25) и позволяют установить, является ли данная обобщенная функция однородной или нет.

Для обобщенной функции Дирака  $\delta(x)$ ,  $x \in R^n$ , можно написать

$$\left( \delta(x), \varphi \left( \frac{x}{k} \right) \right) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)), \quad x \in R^n,$$

т. е.  $\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является однородной обобщенной функцией степени  $-n$ . В частности,  $\delta(x)$ ,  $x \in R$ , является однородной обобщенной функцией степени  $-1$ ,  $\delta(x, y)$  — однородная обобщенная функция степени  $-2$ , а  $\delta(x, y, z)$  — однородная обобщенная функция степени  $-3$ .

Аналогично для  $\delta(x)$ ,  $x \in R$ , можно написать

$$\left( \delta^{(p)}(x), \varphi \left( \frac{x}{k} \right) \right) = \frac{(-1)^p}{k^p} \varphi^{(p)}(0) = k^{-p} (\delta^{(p)}(x), \varphi(x)),$$

т. е.  $\delta^{(p)}(x)$ ,  $x \in R$ , является однородной обобщенной функцией степени  $-p-1$ . Таким образом, после дифференцирования  $p$  раз по  $x$  степень однородности понизилась на  $p$  единиц.

Можно показать, что однородные обобщенные функции обладают следующими свойствами:

а) сумма двух однородных обобщенных функций степени  $\lambda$  является однородной обобщенной функцией степени  $\lambda$ ;

б) если  $a(x)$  — однородная бесконечно дифференцируемая функция степени  $\mu$ , а  $f(x)$  — однородная обобщенная функция степени  $\lambda$ , то  $a(x)f(x)$  является однородной обобщенной функцией степени  $\lambda + \mu$ ;

в) производная по переменной  $x_i$  однородной обобщенной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  степени  $\lambda$  является однородной обобщенной функцией степени  $\lambda - 1$ ;

г) однородные функции разных степеней линейно независимы.

Можно показать, что обобщенная функция  $\text{Vp}(1/x)$  является однородной обобщенной функцией степени  $-1$ ; напротив, обобщенная функция  $(1/|x|)$  неоднородна.

### 1.4.2.2. Формулы дифференцирования

Пусть  $f(x, y)$  — однородная в обычном смысле функция степени  $-1$ , локально интегрируемая на  $R^2$ . Вычислим производную по  $y$  этой функции. Пусть  $\varphi(x, y) \in K(R^2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), \varphi(x, y) \right) &= - \left( f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) \right) = \\ &= - \iint_D f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)] dx dy - \\ &\quad - \iint_{R^2 - D} f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

где  $D$  — конечная область с границей  $\Gamma$ , а  $R^2 - D$  — дополнительная область к  $R^2$ . Заметим, что после интегрирования по частям первый интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)] dx dy &= \\ &= - \iint_D \varphi(x, y) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx dy - \\ &\quad - \int_{\Gamma} f(x, y) [\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)] dx, \end{aligned}$$

где кривая  $\Gamma$  пройдена в положительном направлении. Поэтому

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial y}, \varphi \right) &= \iint_D \varphi \frac{\tilde{\partial} f}{\partial y} dx dy - \iint_{R^2-D} f \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy + \\ &+ \int_{\Gamma} f \varphi dx - \varphi(0, 0) \int_{\Gamma} f dx. \end{aligned}$$

Выберем теперь  $\varphi(x)$  так, чтобы  $\text{supp } \varphi \subset D$ . Тогда

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y}, \varphi \right) = \left( \frac{\tilde{\partial} f}{\partial y} \Big|_D, \varphi \right) - \left( \delta(x, y) \int_{\Gamma} f dx, \varphi(x, y) \right),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} f(x, y) \Big|_D - \delta(x, y) \int_{\Gamma} f(x, y) dx. \quad (1.4.30)$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} f(x, y) \Big|_D + \delta(x, y) \int_{\Gamma} f(x, y) dy. \quad (1.4.30')$$

В общем случае справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.4.1.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — однородная в обычном смысле функция степени  $1-n$ , локально интегрируемая на  $R^n$ . Тогда ее частные производные равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_D + \\ &+ (-1)^{i-1} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \int_{\Gamma} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots \\ &\dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.4.31) \end{aligned}$$

где  $D$  — ограниченная в  $R^n$  область, границей которой является гиперповерхность  $\Gamma$ .

### 1.4.2.3. Примеры

Функция  $1/R = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  является однородной в обычном смысле функцией степени  $-1$ . Для нее

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{x}{R^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{y}{R^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{z}{R^3}. \quad (1.4.32)$$

Тогда получаются однородные в обычном смысле функции степени  $1-3=-2$ . Применяв теперь формулу (1.4.31), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) &= \frac{3x^2 - R^2}{R^5} - \delta(x, y, z) \int_{\Gamma} \frac{xdydz}{R^3}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{R} \right) &= \frac{3y^2 - R^2}{R^5} + \delta(x, y, z) \int_{\Gamma} \frac{ydx dz}{R^3}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R} \right) &= \frac{3z^2 - R^2}{R^5} - \delta(x, y, z) \int_{\Gamma} \frac{zdx dy}{R^3}. \end{aligned} \quad (1.4.33)$$

Сложим полученные равенства и введем оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.4.34)$$

тогда

$$\Delta \left( \frac{1}{R} \right) = -\delta(x, y, z) \int_{\Gamma} \frac{xdydz - ydx dz + zdx dy}{R^3}. \quad (1.4.33')$$

Выберем теперь в качестве  $\Gamma$  поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат. Заметим, что  $dx dz = -dz dx$ . Тогда

$$\Delta \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(x, y, z). \quad (1.4.35)$$

Функция  $1/R$  является гармонической при  $R \neq 0$ . Соотношение (1.4.35) выявляет таким образом разницу между оператором Лапласа в обычном смысле и оператором Лапласа в смысле теории обобщенных функций.



Аналогично получаем

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi \delta(x, y), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.4.36)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \quad (1.4.37)$$

это однородная в обычном смысле функция степени  $1-2=-1$ . В этом случае можно воспользоваться формулами (1.4.30) и (1.4.30'). Выберем в качестве  $\Gamma$  окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{x^2(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{3\pi}{4} \delta(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= -\frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^3}, \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

поскольку криволинейный интеграл в формуле (1.4.30) равен нулю.

Заметим, что

$$\frac{x}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \ln r.$$

Отсюда, учитывая соотношение (1.4.36), получаем

$$\Delta \left( \frac{x}{r^2} \right) = 2\pi \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, y). \quad (1.4.39)$$

Заметим также, что в первом из соотношений (1.4.33) интегрированием по поверхности шара единичного радиуса с центром в начале координат получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R^5} (3x^2 - R^2) - \frac{4\pi}{3} \delta(x, y, z). \quad (1.4.40)$$

Аналогично из соотношения

$$\frac{x^2}{R^3} = \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{R} \right)$$

с учетом соотношения

$$\Delta\left(\frac{x}{R}\right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R}\right) \quad (1.4.41)$$

имеем

$$\Delta\left(\frac{x^2}{R^3}\right) = \frac{2}{R^3} (R^2 - 3x^2) - \frac{4\pi}{3} \delta(x, y, z). \quad (1.4.42)$$

## 1.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

### 1.5.1. Преобразование Фурье

#### 1.5.1.1. Преобразование Фурье обобщенной функции одной переменной

Пусть  $f(x)$ ,  $x \in R$ , — действительная или комплексная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле (т. е.  $f(x)$  — ограниченная кусочно монотонная функция с конечным числом разрывов первого рода); кроме того, предположим, что  $f(x)$  — абсолютно интегрируемая функция, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (1.5.1)$$

Экспоненциальное преобразование Фурье функции  $f(x)$  определяется формулой

$$F(u) = F[f(x)] = \tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux} dx, \quad (1.5.2)$$

где  $u$  — новая действительная переменная. Преобразование Фурье  $\tilde{f}(x) = F[f(x)] = F(u)$  функции  $f(x)$  является комплекснозначной функцией действительной переменной. Заметим, что эта функция ограничена, поскольку

$$|F[f(x)]| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (1.5.3)$$

Функция  $F(u)$  является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением бесконечно удален-

ной точки; таким образом, она имеет производные любого порядка по  $u$ . Если  $f(x)$  — интегрируемая функция на  $R$ , то ее преобразование Фурье существует и является непрерывной и ограниченной функцией, стремящейся к нулю при  $|u| \rightarrow 0$ .

Пусть в соотношении (1.5.2) функция  $F(u)$  известна, а функция  $f(x)$  — неизвестна. Тогда это соотношение является интегральным уравнением, решение которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-iux} du. \quad (1.5.4)$$

В этом случае  $f(x)$  называется *обратным преобразованием Фурье* функции  $F(u)$ , которое будем обозначать как

$$f(x) = F^{-1}[F(u)] = F^{-1}[\tilde{f}(x)] = F^{-1}[F[f(x)]]. \quad (1.5.4')$$

Таким образом, были определены два интегральных оператора: прямой оператор  $F[ ]$  и обратный оператор  $F^{-1}[ ]$ . Это линейные операторы, поскольку для любых действительных или комплексных чисел  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$  имеют место соотношения

$$F[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F[f_1(x)] + \beta F[f_2(x)], \quad (1.5.5)$$

$$F^{-1}[\alpha_1 F_1(u) + \beta_1 F_2(u)] = \alpha_1 F^{-1}[F_1(u)] + \beta_1 F^{-1}[F_2(u)].$$

В некоторых приложениях с успехом могут быть использованы *синус-* и *косинус-преобразования Фурье*, определяемые соотношениями

$$F_c[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \cos ux dx, \quad (1.5.6)$$

$$F_s[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \sin ux dx.$$

Между этими двумя преобразованиями Фурье и экспоненциальным преобразованием Фурье существует тесная связь. Если  $f(x)$  — *четная функция*,  $f(x) = f(-x)$ , то

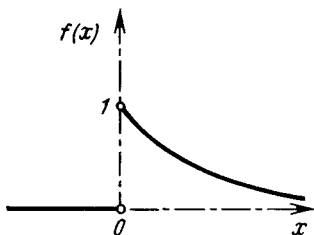
$$F[f(x)] = 2F_c[f(x)]. \quad (1.5.7)$$

Аналогично, если  $f(x)$  — нечетная функция, т. е.  $f(x) = -f(-x)$ , то

$$F[f(x)] = 2iF_s[f(x)]. \quad (1.5.7')$$

В общем случае любую функцию можно представить в виде суммы двух функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (1.5.8)$$



Фиг. 1.37.

где

$$f_1(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)], \quad (1.5.8')$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)],$$

причем первая из этих функций является четной, а вторая — нечетной. Следовательно,

$$F[f(x)] = 2F_c[f_1(x)] + 2iF_s[f_2(x)]. \quad (1.5.9)$$

Рассмотрим, например, функцию (фиг. 1.37)

$$f(x) = \theta(x)e^{-ax} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{-ax} & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad a > 0. \quad (1.5.10)$$

Ясно, что эта функция непрерывна всюду, за исключением начала координат. Ее скачок в начале координат равен единице. Кроме того, это абсолютно интегрируемая

на  $R$  функция, поскольку  $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = 1/a$ . Таким образом, получаем

$$F[\theta(x)e^{-ax}] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{-ax}e^{iux} dx = \\ = \int_0^{\infty} e^{-ax}e^{iux} dx = -\frac{1}{a-iu} e^{-ax}e^{iux} \Big|_0^{\infty},$$

откуда, учитывая формулу Эйлера

$$e^{iux} = \cos ux + i \sin ux, \quad |e^{iux}| = 1, \quad (1.5.11)$$

будем иметь

$$F[\theta(x)e^{-ax}] = \frac{1}{a-iu} = \frac{a}{a^2+u^2} + i \frac{u}{a^2+u^2}. \quad (1.5.12)$$

Аналогично

$$F_c[\theta(x)e^{-ax}] = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos ux dx = \frac{a}{a^2+u^2}, \quad (1.5.13)$$

$$F_s[\theta(x)e^{-ax}] = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin ux dx = \frac{u}{a^2+u^2}, \quad a > 0.$$

Следовательно,

$$F[\theta(x)e^{-ax}] = F_c[\theta(x)e^{-ax}] + iF_s[\theta(x)e^{-ax}]. \quad (1.5.14)$$

Заметим теперь, что интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} |\sin x| dx$ ,

$\int_{-\infty}^{\infty} |\cos x| dx$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |\theta(x)| dx$  расходятся, поэтому нельзя вычислить преобразование Фурье в обычном смысле функций  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\theta(x)$ . Чтобы устранить эти исключительные случаи, распространим преобразование Фурье на обобщенные функции.

В дальнейшем будет рассмотрено комплексное основное пространство  $K$ , состоящее из основных комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций  $\varphi(x)$  действительного переменного, обладающих компактными носителями. Таким образом, пусть  $\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , — комплекснозначная основная функция. Тогда ее преобразование Фурье будет определяться соотношением

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{iux} dx, \quad (1.5.15)$$

где  $u$  — действительная переменная. Вместо действительной переменной  $u$  можно рассмотреть комплексную переменную  $s = u + iv$ , так что

$$\begin{aligned} \psi(s) = \tilde{\varphi}(s) = F[\varphi(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{isx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-vx} e^{iux} dx. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Поскольку функция  $\varphi(x)$  обладает компактным носителем, то интеграл в этой формуле рассматривается только на интервале, соответствующем носителю функции  $\varphi(x)$ .

Функции  $\psi(s)$  являются аналитическими всюду на комплексной плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки. Таким образом, функции  $\psi(s)$  бесконечно дифференцируемы. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} F[\varphi'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) e^{isx} dx = \\ &= \varphi(x) e^{isx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} is\varphi(x) e^{isx} dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что преобразование Фурье функции  $\varphi'(x)$  равно

$$F[\varphi'(x)] = -isF[\varphi(x)]. \quad (1.5.17)$$

В общем случае можно написать

$$F[\varphi^{(p)}(x)] = (-is)^p F[\varphi(x)], \quad p \in N. \quad (1.5.17')$$

Далее, если  $P(d/dx)$  — дифференциальный полином с постоянными коэффициентами, то

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right] = P(-is)F[\varphi(x)]. \quad (1.5.18)$$

Пусть  $K(a)$  — множество основных функций  $\varphi(x)$ , носитель которых содержится в интервале  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ . Множество преобразований Фурье  $\psi(s) = F[\varphi(x)]$  этих функций составляет векторное пространство  $Z(a)$ . Объединение этих пространств составляет *основное комплексное пространство*  $Z$ :

$$Z = \bigcup_a Z(a), \quad (K = \bigcup_a K(a)). \quad (1.5.19)$$

Функции  $\psi(s) \in Z(a)$  удовлетворяют неравенствам

$$|s^p \psi(s)| \leq C_p e^{a|v|}, \quad s = u + iv, \quad p \in N, \quad (1.5.20)$$

где  $C_p$  — константа, зависящая от  $p$ .

**Определение 1.5.1.** Последовательность  $\psi_n(s) \in Z$  сходится к  $\psi(s) \in Z$ , если члены этой последовательности удовлетворяют неравенствам (1.5.20), где  $C_p$  и  $a$  не зависят от  $n$ , и, кроме того, функции  $\psi_n(s)$  сходятся к функции  $\psi(s)$  равномерно на каждом интервале действительной оси.

Полученное таким образом пространство  $Z$  является основным комплексным пространством, на котором будет определено преобразование Фурье обобщенных функций. Пусть  $Z'$  — множество линейных непрерывных функционалов на  $Z$ . Функционалы  $F(s) \in Z'$  являются обобщенными функциями, определенными на основном комплексном пространстве  $Z$ . Эти обобщенные функции называют также *ультраобобщенными функциями*. Между пространствами  $K$  и  $Z$  существует взаимно однозначное соответствие, так что можно написать

$$F[K] = Z, \quad F^{-1}[Z] = K. \quad (1.5.19')$$

Пусть  $f(x)$ ,  $x \in R$ , — обобщенная функция, определенная на основном пространстве  $K$ .

**Определение 1.5.2.** Преобразованием Фурье обобщенной функции  $f(x) \in K'(R)$  называется обобщенная функция  $F[f(x)] = F(s) \in Z'$ , определенная на  $Z$  следующим соотношением типа равенства Парсеваля:

$$(F[f(x)], F[\varphi(x)]) = (\tilde{f}(x), \tilde{\varphi}(x)) = 2\pi (f(x), \varphi(x)). \quad (1.5.21)$$

Аналогично можно определить преобразование Фурье обобщенных функций, определенных на основном пространстве  $S$ .

### 1.5.1.2. Свойства

Основные свойства преобразования Фурье обычной функции сохраняются и в случае обобщенных функций. Таким образом, можно написать

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right] = P(-is)F[f(x)] = P(-is)F(s), \quad (1.5.22)$$

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F(s) = P\left(\frac{d}{ds}\right)F[f(x)] = F[P(ix)f(x)], \quad (1.5.22')$$

$$F^{-1}[F[f(x)]] = f(x), \quad (1.5.23)$$

$$F[F[f(x)]] = 2\pi f(-x), \quad (1.5.23')$$

где  $F^{-1}$  — оператор, обратный  $F$ , который удовлетворяет соотношению

$$(F^{-1}[f(u)], \varphi(x)) = \frac{1}{2\pi} (f(u), F[\varphi(x)]).$$

Преобразование Фурье *прямого произведения* двух обобщенных функций можно записать в виде

$$F[f(x) \times g(y)] = F[f(x)] \times F[g(y)]. \quad (1.5.24)$$

Пусть  $f(x)$  — обобщенная функция медленного роста, а  $g(x)$  — обобщенная функция с ограниченным носителем.



лем. Тогда для свертки этих обобщенных функций справедливо соотношение

$$F[f(x) \times g(x)] = F[f(x)] F[g(x)]. \quad (1.5.25)$$

Далее, если  $f(x) \in S'$ , а функция  $a(x) \in C^\infty$  такова, что функция  $F[a(x)]$  обладает ограниченным носителем и  $a(x)f(x) \in S'$ , то

$$F[a(x)f(x)] = F[a(x)] \times F[f(x)]. \quad (1.5.25')$$

Заметим, что преобразование Фурье обобщенных функций с ограниченными носителями и обобщенных функций медленного роста, появляющихся во многих задачах, можно вычислить по более простым формулам.

Действительно, пусть  $f(x)$  — обобщенная функция с ограниченным носителем. Тогда ее преобразование Фурье удовлетворяет соотношению

$$\tilde{f}(x) = F[f(x)] = (\overline{f(x)}, e^{iux}) = \overline{(f(x), e^{-iux})} = F(u). \quad (1.5.26)$$

Далее, пусть  $f(x) \in S'$ , т. е.  $f(x)$  — обобщенная функция медленного роста. Тогда

$$(F[f(x)], \varphi(u)) = (f(u), F[\varphi(x)]), \quad (1.5.27)$$

где  $F[\varphi(x)] = \psi(u)$ ,  $F[f(x)] = F(u)$ .

Пусть теперь последовательность  $f_n(x)$  сходится в смысле теории обобщенных функций к обобщенной функции  $f(x)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ; если

$$F_n(s) = F[f_n(x)] \quad \text{и} \quad F(s) = F[f(x)],$$

то

$$F(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s). \quad (1.5.28)$$

### 1.5.1.3. Преобразование Фурье обобщенной функции нескольких переменных

Аналогично можно определить преобразование Фурье и в случае обобщенных функций нескольких переменных.

Если  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K(R^n)$ , то ее преобразование Фурье  $\psi(s_1, s_2, \dots, s_n) = F[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , где  $s_j = u_j + iv_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) определяется соотношением

$$\tilde{\varphi}(x) = F[\varphi(x)] = \int_{R^n} \varphi(x) e^{i(s, x)} dx, \quad x \in R^n. \quad (1.5.29)$$

Здесь  $(s, x)$  означает скалярное произведение

$$(s, x) = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n. \quad (1.5.30)$$

Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'(R^n)$ , то ее преобразование Фурье

$F[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \tilde{f}(s_1, s_2, \dots, s_n) = F(s_1, s_2, \dots, s_n)$  определяется соотношением

$$(\tilde{f}(x), \tilde{\varphi}(x)) = (2\pi)^n (f(x), \varphi(x)), \quad x \in R^n. \quad (1.5.31)$$

В частности, если интегрируемая на  $R^n$  функция имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n), \quad (1.5.32)$$

то ее преобразование Фурье равно

$$\begin{aligned} F[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] &= \\ &= F[f_1(x_1)] F[f_2(x_2)] \dots F[f_n(x_n)]. \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

Для обобщенных функций медленного роста можно также написать формулу вида (1.5.27).

Преобразование Фурье обобщенных функций с ограниченным носителем можно вычислять по формуле

$$\begin{aligned} F[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] &= \\ &= (\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n), e^{i(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n)}). \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

Для преобразования Фурье обобщенных функций нескольких переменных можно получить соотношение

$$\begin{aligned} F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] &= \\ &= P(-is_1, -is_2, \dots, -is_n) F(s_1, s_2, \dots, s_n), \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

где  $P(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n)$  — дифференциальный полином с постоянными коэффициентами. Справедливо также следующее соотношение:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right) F[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \\ = F[P(ix_1, ix_2, \dots, ix_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (1.5.35')$$

Формула для обратного преобразования Фурье имеет вид

$$(F^{-1}[f(u)], \varphi(x)) = \frac{1}{(2\pi)^n} (f(u), F[\varphi(x)]), \quad x \in R^n. \quad (1.5.31')$$

Для прямого произведения и свертки можно получить формулы, аналогичные формулам (1.5.24) и (1.5.25).

#### 1.5.1.4. Приложения

Соотношение

$$F[\theta(-x)e^{-a|x|}] = \frac{1}{a+iu}, \quad a > 0, \quad (1.5.36)$$

можно получить так же, как формулу (1.5.12). Учитывая соотношение (1.2.36), будем иметь

$$F[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + u^2}, \quad a > 0. \quad (1.5.37)$$

Заметим, что функция  $e^{-a|x|}$  определяет обобщенную функцию медленного роста. Далее можно написать

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} = \delta(x), \quad (1.5.38)$$

что соответствует дельтообразной последовательности, определенной функцией Коши (1.2.112). Переходя к пределу при  $a \rightarrow +0$  в формуле (1.5.37), получаем

$$F[1(x)] = 2\pi\delta(u), \quad (1.5.39)$$

а также

$$F^{-1}[\delta(u)] = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.5.39')$$

Поскольку  $\delta(x)$  является обобщенной функцией с ограниченным носителем, то ее преобразование Фурье можно вычислять по формуле (1.5.26). Поэтому

$$F[\delta(x)] = (\overline{\delta(x)}, e^{-jux}) = e^0 = 1. \quad (1.5.40)$$

Аналогично, учитывая соотношения (1.1.55) и (1.1.77), получаем

$$F[\delta(x-a)] = e^{iua}, \quad F[\delta(kx)] = \frac{1}{|k|}. \quad (1.5.41)$$

Если в формуле (1.5.12) положить  $a \rightarrow +0$ , то будем иметь

$$F[\theta(x)] = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a - iu} = \lim_{a \rightarrow +0} \left[ \frac{a}{a^2 + u^2} + i \frac{u}{a^2 + u^2} \right].$$

Заметим, что

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{u}{a^2 + u^2} = \text{Vp} \frac{1}{u}, \quad (1.5.42)$$

поэтому

$$F[(\theta(x))] = \pi\delta(u) + i \text{Vp} \frac{1}{u}. \quad (1.5.43)$$

К этому же результату можно прийти, если провести преобразование Фурье обобщенной функции  $\theta(x)$ , определенной на  $K$ , а потом, учитывая замечание, сделанное в разд. 1.1.3.1, продолжить ее с  $K$  на  $S$ . Действительно, можно написать

$$F\left[\frac{d\theta(x)}{dx}\right] = F[\delta(x)] = -isF[\theta(x)] = 1, \quad s = u + iv,$$

откуда следует

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{is} = \frac{i}{s} = \frac{i}{u + iv}. \quad (1.5.43')$$

Теперь, устремив  $v \rightarrow +0$  и учитывая соотношения (1.5.38) и (1.5.42), получаем формулу (1.5.43).

Заметим, что соотношение (1.5.43') выражает преобразование Фурье обобщенной функции, определенной на пространстве  $K$ , тогда как соотношение (1.5.43) выража-

ет преобразование Фурье обобщенной функции, определенной на пространстве  $S$ .

Учитывая соотношение Сохоцкого (1.2.43), можно также написать

$$F[\theta(x)] = \frac{i}{u + i0}. \quad (1.5.43'')$$

Аналогично, учитывая соотношение (1.2.36), получаем

$$F[\theta(-x)] = \pi\delta(u) - i \text{Vp} \frac{1}{u} = -\frac{i}{u - i0}. \quad (1.5.44)$$

С помощью формул (1.2.46), определяющих обобщенные функции Гейзенберга, можно написать

$$F[\theta(x)] = 2\pi\delta_+(u), \quad F[\theta(-x)] = 2\pi\delta_-(u). \quad (1.5.45)$$

Из формулы (1.5.22), примененной к первому из соотношений (1.2.42), следует

$$F[x_+] = -\frac{1}{s^2}. \quad (1.5.46)$$

Заметим, что  $x_+$  является обобщенной функцией медленного роста, которая может быть продолжена на  $S$ . Поэтому

$$F[x_+] = -\lim_{v \rightarrow +0} \frac{1}{s^2}. \quad (1.5.46')$$

Но

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} = \text{Vp} \frac{1}{u^2}, \quad (1.5.47)$$

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \frac{uv}{(u^2 + v^2)^2} = -\delta'(u).$$

Следовательно,

$$F[x_+] = -\text{Vp} \frac{1}{u^2} - i\pi\delta'(u). \quad (1.5.46'')$$

Используя формулу (1.2.47), получаем

$$F[x_+] = -\frac{1}{(u + i0)^2}. \quad (1.5.46''')$$

Аналогично, учитывая формулы (1.2.42') и (1.2.47), можно показать с помощью математической индукции, что

$$F[x_+^n] = n! i^{n+1} \text{Vp} \frac{1}{u^{n+1}} + \pi (-i)^n \delta^{(n)}(u) = \frac{n! i^{n+1}}{(u + i0)^{n+1}},$$

$$n \in N. \quad (1.5.48)$$

Аналогично доказывается, что

$$F[x_-] = -\text{Vp} \frac{1}{u^2} + i\pi \delta'(u) = -\frac{1}{(u - i0)^2}, \quad (1.5.49)$$

$$F[x_-^n] = n! i^{n+1} \text{Vp} \frac{1}{u^{n+1}} - \pi (-i)^n \delta^{(n)}(u) =$$

$$= \frac{n! i^{n+1}}{(u - i0)^{n+1}}, \quad n \in N. \quad (1.5.50)$$

Учитывая соотношения (1.2.41), можно также написать

$$F[x] = -2i\pi \delta'(u), \quad F[|x|] = -2 \text{Vp} \frac{1}{u^2}. \quad (1.5.51)$$

Чтобы вычислить преобразование Фурье обобщенной функции  $\text{Vp}(1/x)$ , будем, исходя из обобщенной функции Хевисайда, применять формулу (1.5.23'). В результате получим

$$F[F[\theta(u)]] = \pi F[\delta(x)] + iF\left[\text{Vp} \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \pi + iF\left[\text{Vp} \frac{1}{x}\right] = 2\pi\theta(-u).$$

Отсюда, учитывая формулу (1.2.36'), будем иметь

$$F\left[\text{Vp} \frac{1}{x}\right] = i\pi \text{sign } u. \quad (1.5.52)$$

Можно также написать

$$F[\text{sign } x] = 2i \text{Vp} \frac{1}{u}. \quad (1.5.52')$$

Далее применим преобразование Фурье к обоим членам формулы (1.5.36). Учитывая соотношение (1.5.23'), получаем

$$F\left[\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}\right]=e^{-a|u|}, \quad a > 0. \quad (1.5.53)$$

Формула (1.5.25) позволяет в этом случае получить новое доказательство справедливости соотношения (1.3.32) для функции (1.3.33).

Для преобразования Фурье функции  $f(x) = e^{-a^2x^2} \in \mathcal{S}$  можно написать

$$F[e^{-a^2x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} e^{iux} dx = F(u).$$

Дифференцируя по  $u$ , находим

$$\begin{aligned} F'(u) &= i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a^2x^2} e^{iux} dx = -\frac{i}{2a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d(e^{-a^2x^2}) = \\ &= -\frac{i}{2a^2} \left[ e^{-a^2x^2} e^{iux} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} iue^{-a^2x^2} e^{iux} dx \right] = -\frac{u}{2a^2} F(u), \end{aligned}$$

откуда следует

$$F'(u) + \frac{u}{2a^2} F(u) = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$F(u) = Ce^{-\frac{u^2}{4a^2}}.$$

Следовательно, при  $u=0$  можно написать

$$F(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}.$$

Таким образом,

$$F(u) = F[e^{-a^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} e^{-\frac{u^2}{4a^2}}. \quad (1.5.54)$$

Аналогично можно доказать справедливость соотношения (1.3.32) для функции (1.3.30).

Вычислим некоторые преобразования Фурье в случае  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ . Можно написать

$$F[\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1, \quad (1.5.55)$$

$$F[\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)] = e^{i(u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_n a_n)}, \quad (1.5.56)$$

$$F[\delta(kx_1, kx_2, \dots, kx_n)] = \frac{1}{|k|^n}, \quad (1.5.57)$$

$$F[1(x_1, x_2, \dots, x_n)] = (2\pi)^n \delta(s_1, s_2, \dots, s_n), \quad (1.5.58)$$

$$F[e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}] = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4}(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)}. \quad (1.5.59)$$

Другие полезные в приложениях преобразования Фурье можно получить таким же путем.

Можно ввести *преобразование Фурье* обобщенной функции  $\delta(y)$  по двум переменным по формуле

$$(F[\delta(y)], \psi(\alpha, \beta)) = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) dx, \quad (1.5.60)$$

где  $\alpha, \beta$  — новые переменные в пространстве преобразований Фурье. В этом случае обратное преобразование Фурье выражается формулой

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \quad (1.5.60')$$

Следовательно,

$$F[\delta(y)] = 2\pi\delta(\alpha). \quad (1.5.61)$$

Аналогично

$$F[\delta(x)] = 2\pi\delta(\beta). \quad (1.5.61')$$

Заметим, что здесь  $\delta(x)$  и  $\delta(y)$  являются обобщенными функциями, сосредоточенными на прямых  $x=0$  и  $y=0$  соответственно. Их нельзя путать с обобщенными функциями, сосредоточенными в начале координат.



Далее получаем

$$F \left[ \frac{d}{dx} \delta(x) \right] = -i\alpha F [\delta(x)] = -2i\pi\alpha\delta(\beta), \quad (1.5.62)$$

$$F \left[ \frac{d}{dy} \delta(y) \right] = -i\beta F [\delta(y)] = -2i\pi\beta\delta(\alpha), \quad (1.5.62')$$

а также аналогичные результаты для производных произвольного порядка.

Можно, например, исходя из соотношений

$$\theta(x) = \theta(x) \times 1(y), \quad \delta(\alpha, \beta) = \delta(\alpha) \times \delta(\beta), \quad (1.5.63)$$

с учетом формулы (1.5.24) написать

$$F[\theta(x)] = 4\pi^2\delta_+(\alpha) \times \delta(\beta) = 2\pi^2\delta(\alpha, \beta) + 2i\pi \frac{1}{\alpha} \times \delta(\beta). \quad (1.5.64)$$

## 1.5.2. Преобразование Лапласа

### 1.5.2.1. Преобразование Лапласа функции одной переменной

Преобразованием Лапласа функции  $f(x)$  действительной переменной является функция  $L(p)$  комплексной переменной, определяемая соотношением

$$L(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx. \quad (1.5.65)$$

Карсон использовал операционное исчисление, основанное на преобразовании

$$C(p) = p \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx, \quad (1.5.66)$$

которое называется *преобразованием Карсона* функции  $f(x)$ <sup>1)</sup>. Очевидно, что

$$C(p) = pL(p). \quad (1.5.67)$$

На основе преобразования Лапласа было развито операционное исчисление Хевисайда.

<sup>1</sup> В отечественной литературе преобразование (1.5.66) известно под названием преобразования Лапласа — Карсона. — *Прим. ред.*

**Определение 1.5.3.** Пусть  $f(x)$  — комплекснозначная функция действительной переменной, удовлетворяющая следующим условиям:

- а)  $f(x) = 0$  при  $x < 0$ ;
- б)  $f(x)$  кусочно дифференцируема;
- в)  $|f(x)| \leq Me^{ax}$ ,  $M > 0$ ,  $a \geq 0$ .

Тогда функция

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx, \quad (1.5.68)$$

определенная для комплексной переменной  $p = u + iv$ , называется *преобразованием Лапласа функции  $f(x)$* . Функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условиям а) — в), называется *оригиналом*, а функция  $L[f(x)]$  — *изображением* функции  $f(x)$ . Можно показать, что изображение  $L(p)$ , определяемое соотношением (1.5.68), является аналитической функцией на комплексной полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a$ . Число  $a$ , фигурирующее в условии в) экспоненциальной ограниченности функции  $f(x)$ , называется *показателем роста* этой функции. В частности, если оригинал ограничен, то его показатель роста  $a = 0$ .

Нетрудно проверить, что функции  $x_+^n$ ,  $\theta(x) \cos x$ ,  $\theta(x) \sin x$ ,  $\theta(x) e^{-x^2}$  являются оригиналами, тогда как функция  $\theta(x) e^{x^2}$  не является оригиналом. Сумма и произведение двух оригиналов являются оригиналами.

Поскольку функция (1.5.68) является аналитической, то она бесконечно дифференцируема в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a$ . Справедливо следующее соотношение (*теорема дифференцирования изображения*):

$$L^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (-x)^n f(x) e^{-px} dx = L[(-x)^n f(x)]. \quad (1.5.69)$$

Показатель роста оригинала  $(-x)^n f(x)$  совпадает с показателем роста оригинала  $f(x)$ .

Если  $f(x)$  является функцией класса  $C^1$  на  $[0, \infty)$ , то можно написать

$$L[f'(x)] = \int_0^{\infty} f'(x) e^{-px} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-px} df(x) = f(x) e^{-px} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx.$$

Отсюда следует

$$L[f'(x)] = pL[f(x)] + f(0+0), \quad (1.5.70)$$

где  $f(0+0)$  — скачок функции  $f(x)$  в начале координат, а  $f(0-0) = 0$ .

Обратное преобразование Лапласа, обозначаемое как  $L^{-1}$ , определяется соотношением

$$L^{-1}[L(p)] = L^{-1}[L[f(x)]] = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} L(p) e^{px} dp, \quad u > 0. \quad (1.5.71)$$

В общем случае голоморфная функция  $L(p)$  может быть преобразованием Лапласа некоторой функции  $f(x)$  тогда и только тогда, когда она определена на полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  и ее модуль мажорируется полиномом относительно переменной  $|p|$ .

Для функции Хевисайда  $\theta(x)$  можно написать

$$L[\theta(x)] = \int_0^{\infty} \theta(x) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} e^{-px} dx = -\frac{1}{p} e^{-ux} e^{-ivx} \Big|_0^{\infty}.$$

Заметим, что  $|e^{-ivx}| = 1$ , а  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ux} = 0$ , если только  $u > 0$ ; поэтому

$$L[\theta(x)] = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.5.72)$$

Аналогично получаем

$$L[\theta(x) e^{-\lambda x}] = \frac{1}{p - \lambda}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda, \quad (1.5.73)$$

$$L[\theta(x) \sin \omega x] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (1.5.74)$$

$$L[\theta(x) \cos \omega x] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|.$$

Формула (1.5.68), определяющая преобразование Лапласа для функций, может быть распространена и на обобщенные функции.

**Определение 1.5.4.** Пусть  $f(x)$  — обобщенная функция одной переменной с  $\text{supp } f \subset [0, \infty)$  и такая, что произведение  $f(x)e^{-px}$  является обобщенной функцией медленного роста ( $f(x)e^{-px} \in S'$ ). Тогда преобразование Лапласа обобщенной функции  $f(x)$  определяется соотношением

$$L[f(x)] = (f(x), e^{-px}). \quad (1.5.75)$$

Теорема дифференцирования, выраженная соотношением (1.5.69), верна и в этом случае.

### 1.5.2.2. Свойства. Применения

Классические свойства преобразования Лапласа сохраняются и в случае обобщенных функций. Заметим, что

$$L[f(kx)] = (f(kx), e^{-px}) = \frac{1}{k} \left( f(x), e^{-\frac{p}{k}x} \right), \quad k > 0,$$

поэтому можно сформулировать теорему подобия

$$L[f(kx)] = \frac{1}{k} L\left(\frac{p}{k}\right), \quad k > 0. \quad (1.5.76)$$

Аналогично получаем теорему запаздывания

$$L[f(x-a)] = e^{-pa} L[f(x)] \quad (1.5.77)$$

и теорему дифференцирования

$$L[f'(x)] = pL[f(x)], \quad (1.5.78)$$

или в общем случае

$$L[f^{(n)}(x)] = p^n L[f(x)], \quad (1.5.78')$$

где производные рассматриваются в смысле теории обобщенных функций.

Заметим, что

$$L[\delta(x)] = (\delta(x), e^{-px}) = e^0 = 1; \quad (1.5.79)$$

формулы (1.5.76) — (1.5.78') позволяют также написать

$$L[\delta(kx)] = \frac{1}{k}, \quad k > 0, \quad (1.5.80)$$

$$L[\delta(x-a)] = e^{-pa}, \quad (1.5.81)$$

$$L[\delta^{(n)}(x)] = p^n. \quad (1.5.82)$$

Используя формулу для преобразования Лапласа (1.5.72) и соотношение (1.5.69), получаем

$$L[(-x)^n \theta(x)] = \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}},$$

откуда следует

$$L[x_+^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} = (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}. \quad (1.5.83)$$

Далее, если учесть формулу разложения (1.2.71''), то будем иметь

$$L[\delta(x^2 - a^2)] = \frac{1}{2a} (e^{pa} + e^{-pa}) = \frac{1}{a} \operatorname{ch} pa, \quad a > 0. \quad (1.5.84)$$

Используя формулу (1.2.75), получим

$$L[\delta(\sin x)] = L\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n\pi p},$$

$$n \in Z. \quad (1.5.85)$$

Отметим также следующую теорему смещения (теорему затухания)<sup>1)</sup>:

$$L[f(x)e^{\lambda x}] = L(p - \lambda). \quad (1.5.86)$$

Например,

$$L[\theta(x)e^{\lambda x}] = L(p - \lambda) = \frac{1}{p - \lambda}. \quad (1.5.86')$$

Что касается изображения производной оригинала, заметим, что формула для обобщенных функций (1.5.78) отличается, вообще говоря, от классической формулы

<sup>1)</sup> Иногда теоремой смещения (в отличие от теоремы затухания) называют теорему (1.5.77). — Прим. ред.

(1.5.70). Формальное совпадение получается только в случае, когда оригинал является непрерывной в начале координат функцией, т. е. когда скачок в начале координат  $f(0+0)=0$ . На самом деле формула (1.5.78) является более общей, чем формула (1.5.70); последняя является частным случаем первой. Действительно, если ввести в рассмотрение производную в смысле теории обобщенных функций и производную в обычном смысле и учесть формулу (1.2.28), то можно написать

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + f(0+0)\delta(x),$$

откуда следует

$$L[f'(x)] = L[\tilde{f}'(x)] + f(0+0). \quad (1.5.87)$$

Отсюда с учетом соотношения (1.5.78) получаем формулу (1.5.70).

В случае когда функция  $f(x)$  имеет несколько точек разрыва первого рода  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), можно написать

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + f(0+0)\delta(x) + \sum_{i=1}^n s_i \delta(x-x_i),$$

где  $s_i$  — скачок в точке  $x_i$ . Применив к этому выражению преобразование Лапласа, получим

$$L[f'(x)] = L[\tilde{f}'(x)] + f(0+0) + \sum_{i=1}^n s_i e^{-px_i}. \quad (1.5.87')$$

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — две обобщенные функции, носители которых содержатся в интервале  $[0, \infty)$  и для которых при  $\operatorname{Re} p > a_1$  и  $\operatorname{Re} p > a_2$  существуют преобразования Лапласа. Тогда при  $\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$  можно написать

$$\begin{aligned} (f(x), e^{-px}) &= L[f(x)], \\ (g(x), e^{-px}) &= L[g(x)]. \end{aligned} \quad (1.5.88)$$

Согласно определению свертки,

$$(f(x) * g(x), e^{-px}) = (f(x) \times g(y), e^{-p(x+y)}) =$$

$$\begin{aligned} &= (f(x), (g(y), e^{-p(x+y)})) = (g(y), e^{-py}) (f(x), e^{-px}) = \\ &= L[f(x)] L[g(x)]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L[f(x) * g(x)] = L[f(x)] L[g(x)]. \quad (1.5.89)$$

Итак, преобразование Лапласа свертки двух обобщенных функций равно произведению изображений этих обобщенных функций в случае, если указанная свертка определена.

Из соотношения (1.3.27) имеем

$$L[x_+] = \frac{1}{p^2}. \quad (1.5.90)$$

Этот же результат можно получить как частный случай из формулы (1.5.83).

Аналогично можно написать

$$L[\theta(x) e^{\lambda x} * \theta(x)] = \frac{1}{p(p-\lambda)}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda, \quad (1.5.91)$$

$$L[\theta(x) e^{\lambda x} * \theta(x) e^{\mu x}] = \frac{1}{(p-\lambda)(p-\mu)},$$

$$\operatorname{Re} p > \max(\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Re} \mu), \quad (1.5.91')$$

$$L[f(x) * \delta^{(n)}(x)] = p^n L[f(x)], \quad (1.5.92)$$

$$L[f(x) * \delta(x)] = L[f(x)]. \quad (1.5.92')$$

### 1.5.2.3. Преобразование Лапласа обобщенной функции нескольких переменных

Классическое определение преобразования Лапласа в случае одной переменной, так же как и соответствующее определение для обобщенных функций, можно распространить на случай нескольких переменных. Итак, если  $\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — комплекснозначная функция действительных переменных, удовлетворяющая следующим условиям:

а)  $\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  при  $x_1 < 0$  или  $x_2 < 0$  или ... или  $x_n < 0$ ,

б)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет частные производные первого порядка,

$$в) |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}, \quad M > 0, \\ a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0,$$

то преобразованием Лапласа функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется комплекснозначная функция  $n$  переменных  $p_j = u_j + i v_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), определяемая соотношением

$$L(p_1, p_2, \dots, p_n) = L[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (1.5.93)$$

или

$$L[f(x)] = \int_{R^n} f(x) e^{-(p, x)} dx, \quad x \in R^n, \quad (1.5.93')$$

где

$$(p, x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n, \\ dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (1.5.93'')$$

Изображение  $L(p_1, p_2, \dots, p_n)$  является аналитической функцией на области  $\operatorname{Re} p_i > a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Обратное преобразование Лапласа определяется соотношением

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L^{-1}[L[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]] = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} \int_{u_2 - i\infty}^{u_2 + i\infty} \dots \\ \dots \int_{u_n - i\infty}^{u_n + i\infty} L(p_1, p_2, \dots, p_n) e^{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n} dp_1 dp_2 \dots dp_n \quad (1.5.94)$$

при  $u_j > a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Очевидно, что

$$L^{-1}[L(p_1, p_2, \dots, p_n)] = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.5.94')$$



В частности, при  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$  можно написать

$$\begin{aligned} L[f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)] &= \\ &= L[f_1(x_1)] L[f_2(x_2)] \dots L[f_n(x_n)]. \end{aligned} \quad (1.5.95)$$

Таким образом, для функции Хевисайда  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta(x_1) \theta(x_2) \dots \theta(x_n)$  получаем

$$\begin{aligned} L[\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)] &= L[\theta(x_1)] L[\theta(x_2)] \dots L[\theta(x_n)] = \\ &= \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n}, \quad \operatorname{Re} p_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.5.96)$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} L[\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}] &= \\ &= L[\theta(x_1) e^{\lambda_1 x_1}] L[\theta(x_2) e^{\lambda_2 x_2}] \dots L[\theta(x_n) e^{\lambda_n x_n}] = \\ &= \frac{1}{(p_1 - \lambda_1)(p_2 - \lambda_2) \dots (p_n - \lambda_n)} \end{aligned} \quad (1.5.97)$$

при  $\operatorname{Re} p_j > \operatorname{Re} \lambda_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ).

Заметим, что

$$L[\theta(x) \sin x] = \frac{1}{1 + p^2}, \quad (1.5.98)$$

$$L[\theta(x) \cos x] = \frac{p}{1 + p^2},$$

откуда, учитывая соотношение

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2,$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} L[\theta(x_1, x_2) \sin(x_1 + x_2)] &= \frac{p_1 + p_2}{(1 + p_1^2)(1 + p_2^2)}, \\ \operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2 &> 0. \end{aligned} \quad (1.5.99)$$

Теорема дифференцирования изображения имеет вид

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial p_1^{k_1} \partial p_2^{k_2} \dots \partial p_n^{k_n}} L(p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ = L[(-x_1)^{k_1} (-x_2)^{k_2} \dots (-x_n)^{k_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (1.5.100)$$

Рассматривая соотношение (1.5.93) для случая  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ , получим формулу для итерированного преобразования Лапласа

$$\bar{L}[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \bar{L}(p) = \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-p(x_1+x_2+\dots+x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1.5.101)$$

при тех же условиях, что и общее преобразование Лапласа. Например,

$$\bar{L}[\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \frac{1}{p^n}. \quad (1.5.102)$$

Очевидно, другие частные случаи общего преобразования Лапласа получаются аналогично.

Для изображения производной оригинала нескольких переменных можно написать

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] = p_i L[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] - \\ - L[f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)], \quad (1.5.103)$$

где  $L[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  — преобразование Лапласа в  $R^n$ , а  $L[f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)]$  — преобразование Лапласа в  $R^{n-1}$ .

Например,

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_2} e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\right] = p_2 L[e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}] - L[e^{\lambda_1 x_1}] =$$

$$= \frac{p_2}{(p_1 - \lambda_1)(p_2 - \lambda_2)} - \frac{1}{p_1 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2}{(p_1 - \lambda_1)(p_2 - \lambda_2)}, \quad (1.5.103')$$

$$\operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} p_2 > \operatorname{Re} \lambda_2.$$

Это соотношение можно получить непосредственно.

Как и в случае одной переменной, преобразование Лапласа может быть распространено и на пространство обобщенных функций.

**Определение 1.5.5.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'$  — обобщенная функция, носитель которой содержится в области  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ , и такая, что произведение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)}$$

является обобщенной функцией медленного роста.

Тогда преобразование Лапласа определяется соотношением

$$L[f(x)] = (f(x), e^{-(p, x)}), \quad x \in R^n, \quad (1.5.104)$$

где скалярное произведение  $(p, x)$  дается формулой (1.5.93'').

Теорема дифференцирования, выраженная соотношением (1.5.100), верна и в этом случае.

#### 1.5.2.4. Свойства. Применения

Как и в случае преобразования Лапласа обобщенной функции одной переменной, можно написать

$$\begin{aligned} L[f(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n)] &= \\ &= \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n} L\left(\frac{p_1}{k_1}, \frac{p_2}{k_2}, \dots, \frac{p_n}{k_n}\right), \\ & \quad k_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.5.105)$$

$$\begin{aligned} L[f(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)] &= \\ &= e^{-(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n)} L[f(x_1, x_2, \dots, x_n)], \end{aligned} \quad (1.5.106)$$

$$L \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] = p_i L[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (1.5.107)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & L[\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \\ & = (\delta(x_1, x_2, \dots, x_n), e^{-(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)}) = e^0 = 1. \end{aligned} \quad (1.5.108)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L[\delta(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n)] &= \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n}, \\ k_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.5.105')$$

$$\begin{aligned} L[\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)] &= \\ &= e^{-(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n)}, \end{aligned} \quad (1.5.106')$$

$$L \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] = p_i. \quad (1.5.107')$$

Можно написать также итерированное преобразование Лапласа

$$\bar{L}[\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1. \quad (1.5.108')$$

Для преобразования Лапласа производной произвольного порядка обобщенной функции нескольких переменных получаем

$$\begin{aligned} L \left[ \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] &= \\ &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} L[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \end{aligned} \quad (1.5.109)$$

Отсюда, в частности, следует

$$\begin{aligned} L \left[ \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}. \end{aligned} \quad (1.5.109')$$

Рассмотрим теперь формулу (1.4.16) дифференцирования функции  $f(x)$ ,  $x \in R^n$ , принадлежащей классу  $C^1$  всюду, за исключением гиперповерхности  $S$ , где она имеет разрыв первого рода. Применив преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned} & L \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] = \\ & = L \left[ \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] + L [s_i \cos(n, x_i) \delta(S)]. \end{aligned} \quad (1.5.110)$$

Поскольку оригинал  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  только при  $x_i \geq 0$ , то гиперплоскости  $x_i = 0$  являются гиперповерхностями разрыва, причем скачок в направлении  $Ox_i$  равен  $s_i = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , а  $\cos(n, x_i) = 1$ ; приходим, таким образом, к формуле (1.5.103). Например,

$$\begin{aligned} & L \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \theta(x_1, x_2) \right] = \\ & = p_1 L [\theta(x_1, x_2)] = \frac{p_1}{p_1 p_2} = \frac{1}{p_2}. \end{aligned} \quad (1.5.110')$$

Формула для свертки (1.5.89) остается справедливой также и в случае нескольких переменных.

Для обобщенной функции  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с ограниченным носителем, содержащимся в области  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ , преобразование Лапласа определяется также соотношением

$$\begin{aligned} & L(p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ & = (f(x_1, x_2, \dots, x_n), e^{-(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)}), \quad \operatorname{Re} p_j > a_j, \end{aligned} \quad (1.5.111)$$

где  $p_j = u_j + i v_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Преобразование Фурье этой обобщенной функции равно

$$\begin{aligned} & F(s_1, s_2, \dots, s_n) = \\ & = (f(x_1, x_2, \dots, x_n), e^{i(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n)}), \end{aligned} \quad (1.5.112)$$

где  $s_j = u_j + i v_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Заметим, что

$$L(-is_1, -is_2, \dots, -is_n) = F(s_1, s_2, \dots, s_n). \quad (1.5.113)$$

Для этих обобщенных функций можно также написать

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \lim_{v_j \rightarrow +0} F(s_1, s_2, \dots, s_n) = \\ &= \lim_{v_j \rightarrow +0} L(-is_1, -is_2, \dots, -is_n) \quad (j=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.5.114)$$

Последняя формула имеет много практических применений.

## 1.6. НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ ФОРМУЛЫ

### 1.6.1. Производные некоторых часто используемых обобщенных функций

#### 1.6.1.1. Обобщенные функции одной переменной

Для случая  $x \in R$  можно написать

$$\theta'(x) = \delta(x), \quad \theta'(-x) = -\delta(x), \quad (1.6.1)$$

$$(x_+)' = \theta(x), \quad (x_-)' = -\theta(-x), \quad (1.6.2)$$

$$(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}, \quad (x_-^\lambda)' = -\lambda x_-^{\lambda-1}, \quad \lambda \notin Z_-, \quad (1.6.3)$$

$$(\theta(x) \cos x)' = \delta(x) - \theta(x) \sin x, \quad (1.6.4)$$

$$(\theta(x) \sin x)' = \theta(x) \cos x, \quad (1.6.4')$$

$$x^n \delta^{(n)}(x) = -n \delta^{(n-1)}(x), \quad n \in N_0, \quad (1.6.5)$$

$$x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x), \quad n \in N, \quad (1.6.5')$$

$$x^n \delta^{(n-k)}(x) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n, n \in N_0), \quad (1.6.5'')$$

$$x^n \delta^{(n+k)}(x) = (-1)^n \frac{(n+k)!}{k!} \delta^{(k)}(x), \quad k, n \in N, \quad (1.6.5''')$$

$$|x|' = 2\theta(x) - 1 = \text{sign } x, \quad (\text{sign } x)' = 2\delta(x), \quad (1.6.6)$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq a \\ 0 & \text{при } |x| > a \end{cases} = \theta(x+a) - \theta(x-a) = \\ = \theta(a - |x|), \quad a > 0, \quad (1.6.7)$$

$$h'(x) = \delta(x+a) - \delta(x-a) = -2x\delta(x^2 - a^2), \quad a > 0, \quad (1.6.7')$$

$$(\ln |x|)' = \text{Vp} \frac{1}{x}, \quad \left(\text{Vp} \frac{1}{x}\right)' = -\text{Vp} \frac{1}{x^2}, \quad (1.6.8)$$

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda, \quad \lambda \notin Z_-, \quad (1.6.9)$$

$$\frac{d}{dx} (x+i0)^\lambda = \lambda (x+i0)^{\lambda-1}, \quad \lambda \neq 0, \quad (1.6.9')$$

$$(x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda, \quad \lambda \notin Z_-, \quad (1.6.10)$$

$$\frac{d}{dx} (x-i0)^\lambda = \lambda (x-i0)^{\lambda-1}, \quad \lambda \neq 0, \quad (1.6.10')$$

$$\ln(x+i0) = \ln|x| + i\pi\theta(-x), \quad (1.6.11)$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x+i0) = \text{Vp} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)_+ = \frac{1}{x+i0}, \quad (1.6.11')$$

$$\ln(x-i0) = \ln|x| - i\pi\theta(-x), \quad (1.6.12)$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x-i0) = \text{Vp} \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)_- = \frac{1}{x-i0}, \quad (1.6.12')$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} [(2n+1)\pi - x], \quad n \in Z, \quad x \in R, \quad (1.6.13)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( -1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \quad (1.6.13')$$

$$f''(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x-2\pi n) = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{inx} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx, \quad (1.6.13'')$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [2n, 2n+1), \\ -1 & \text{при } x \in [2n+1, 2n+2), \end{cases} \quad n \in Z, \quad (1.6.14)$$

$$f'(x) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(x-n) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\pi x. \quad (1.6.14')$$

Заметим, что ряд (1.6.14') соответствует ряду, определенному формулой (1.2.52) при  $T=2$ ; соответствующий график аналогичен графику на фиг. 1.17.

### 1.6.1.2. Обобщенные функции нескольких переменных

В случае обобщенных функций двух переменных можно написать

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \partial y} = \delta(x, y), \quad (1.6.15)$$

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi \delta(x, y), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.6.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^2}, \quad (1.6.16')$$

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{x}{r^2} \right) &= 2\pi \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{z} \right) &= \pi \delta(x, y), \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

$$E(x; t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq t, \\ 0 & \text{при } |x| > t, \end{cases} \quad t > 0, \quad (1.6.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x; t) = \delta(x+t) - \delta(x-t), \quad t > 0, \quad (1.6.18')$$



$$\frac{\partial}{\partial t} E(x; t) = \delta(x+t) + \delta(x-t), \quad t > 0, \quad (1.6.18'')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x; t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x; t) = \delta'(x+t) - \delta'(x-t), \quad t > 0, \quad (1.6.18''')$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta(t) \theta(at - |x|) = 2a\delta(x; t). \quad (1.6.19)$$

Для случая обобщенных функций трех переменных запишем следующие формулы:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(x, y, z), \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.6.20)$$

$$\Delta \left( \frac{x^2}{R^3} \right) = \frac{2}{R^5} (R^2 - 3x^2) - \frac{4\pi}{3} \delta(x, y, z). \quad (1.6.20')$$

## 1.6.2. Преобразование Фурье некоторых часто используемых обобщенных функций

### 1.6.2.1. Обобщенные функции одной переменной

Для случая  $x \in \mathcal{R}$  можно написать

$$F[1(x)]^{1)} = 2\pi\delta(u), \quad (1.6.21)$$

$$F[\delta(x)] = 1, \quad F[\delta(x-a)] = e^{iua}, \quad (1.6.21')$$

$$F[\delta(kx)] = \frac{1}{k}, \quad (1.6.21'')$$

$$F[\delta'(x)] = -iu, \quad F[\delta^{(n)}(x)] = (-iu)^n, \quad (1.6.22)$$

$$F[\delta^{(2n)}(x)] = (-1)^n u^{2n}, \quad (1.6.22')$$

$$F[\delta^{(2n+1)}(x)] = (-1)^{n+1} i u^{2n+1}, \quad (1.6.22'')$$

$$F[\theta(x)] = \frac{i}{u+io} = \pi\delta(u) + i \text{Vp} \frac{1}{u} = 2\pi\delta_+(u), \quad (1.6.23)$$

$$F[\theta(-x)] = -\frac{i}{u-io} = \pi\delta(u) - i \text{Vp} \frac{1}{u} = 2\pi\delta_-(u), \quad (1.6.23')$$

<sup>1</sup> См. формулу (1.2.36). — Прим. ред.

$$F[\theta(a - |x|)] = 2 \frac{\sin au}{u}, \quad a > 0, \quad (1.6.23'')$$

$$F[x_+] = -\frac{1}{(u + i0)^2} = -\text{Vp} \frac{1}{u^2} - i\pi\delta'(u), \quad (1.6.24)$$

$$F[x_-] = -\frac{1}{(u - i0)^2} = -\text{Vp} \frac{1}{u^2} + i\pi\delta'(u), \quad (1.6.24')$$

$$F[x_+^n] = \frac{n! i^{n+1}}{(u + i0)^{n+1}} =$$

$$= i^{n+1} \left[ n! \text{Vp} \frac{1}{u^{n+1}} + (-1)^{n+1} i\pi\delta^{(n)}(u) \right], \quad n \in N, \quad (1.6.25)$$

$$F[x_-^n] = \frac{n! i^{n+1}}{(u - i0)^{n+1}} =$$

$$= i^{n+1} \left[ n! \text{Vp} \frac{1}{u^{n+1}} - (-1)^{n+1} i\pi\delta^{(n)}(u) \right], \quad n \in N, \quad (1.6.25')$$

$$F[x] = -2i\pi\delta'(u), \quad (1.6.26)$$

$$F[|x|] = -2 \text{Vp} \frac{1}{u^2}, \quad (1.6.26')$$

$$F\left[\text{Vp} \frac{1}{x}\right] = i\pi \text{sign } u, \quad (1.6.27)$$

$$F[\text{sign } x] = 2i \text{Vp} \frac{1}{u}, \quad (1.6.27')$$

$$F[x^{2n}] = (-1)^n 2\pi\delta^{(2n)}(u), \quad (1.6.28)$$

$$F[x^{2n} \text{sign } x] = 2i (-1)^n (2n)! \text{Vp} \frac{1}{u^{2n+1}}, \quad (1.6.28')$$

$$F[x^n] = 2(-i)^n \pi\delta^{(n)}(u), \quad (1.6.29)$$

$$F\left[\text{Vp} \frac{1}{x^n}\right] = \frac{i^n}{(n-1)!} \pi u^{n-1} \text{sign } u, \quad n \in N_0, \quad (1.6.29')$$

$$F\left[\text{Vp} \frac{1}{x^2}\right] = -\pi |u|, \quad (1.6.29'')$$

$$F\left[\mathcal{P} \frac{1}{|x|}\right] = -2C - 2 \ln |u|, \quad (1.6.30)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера:

$$C = \int_0^1 \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} d\alpha - \int_1^{\infty} \frac{\cos \alpha}{\alpha} d\alpha = 0,57721566490\dots \quad (1.6.30')$$

$$F[\sin ax] = i\pi [\delta(s-a) - \delta(s+a)], \quad (1.6.31)$$

$$F[\cos ax] = \pi [\delta(s-a) + \delta(s+a)], \quad (1.6.31')$$

$$F[\operatorname{sh} ax] = \pi [\delta(s-ia) - \delta(s+ia)], \quad (1.6.32)$$

$$F[\operatorname{ch} ax] = \pi [\delta(s-ia) + \delta(s+ia)], \quad (1.6.32')$$

$$F[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + u^2}, \quad (1.6.33)$$

$$F\left[\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}\right] = e^{-a|u|}, \quad a > 0, \quad (1.6.33')$$

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right] = 2K_0(au), \quad a > 0, \quad (1.6.34)$$

где  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя второго рода и нулевого порядка,

$$F[\theta(x)e^{-ax}] = \frac{1}{a - iu}, \quad a > 0, \quad (1.6.35)$$

$$F[\theta(-x)e^{-a|x|}] = \frac{1}{a + iu}, \quad a > 0, \quad (1.6.35')$$

$$F[e^{-a^2 x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{u^2}{4a^2}}, \quad a > 0. \quad (1.6.36)$$

### 1.6.2.2. Обобщенные функции нескольких переменных

Для случая обобщенных функций двух переменных можно написать

$$F\left[\ln \frac{1}{r}\right] = \frac{2\pi}{\sigma_2^2}, \quad (1.6.37)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad (1.6.37')$$

$$F \left[ \text{Vp} \frac{1}{r^2} \right] = 4\pi \ln \frac{1}{\sigma_2} - 2\pi C_0, \quad (1.6.38)$$

где

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(\alpha)}{\alpha} d\alpha - \int_1^\infty \frac{J_0(\alpha)}{\alpha} d\alpha, \quad (1.6.38')$$

а  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка;

$$F \left[ \frac{x}{x^2 + k^2 y^2} \right] = 2\pi i \frac{k u_1}{k^2 u_1^2 + u_2^2}, \quad k > 0, \quad (1.6.39)$$

$$F \left[ \frac{x}{r^2} \right] = 2\pi i \frac{u_1}{\sigma_2^2}, \quad F \left[ \frac{x y^2}{r^4} \right] = \pi i \frac{u_1 (u_1^2 - u_2^2)}{\sigma_2^4}, \quad (1.6.39')$$

$$F \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}} \right] = \frac{2\pi}{\sigma_2} e^{-k\sigma_2}, \quad k > 0, \quad (1.6.40)$$

$$F \left[ \frac{\theta(a-r)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] = \frac{2\pi}{\sigma_2} \sin a\sigma_2, \quad a > 0, \quad (1.6.41)$$

$$F [K_0(kr)] = \frac{2\pi}{\sigma_2^2 + k^2}, \quad \text{Re } k > 0. \quad (1.6.42)$$

Для обобщенных функций трех переменных отметим следующие преобразования Фурье:

$$F [\delta(R-a)] = 4\pi \frac{a}{\sigma_3} \sin a\sigma_3, \quad (1.6.43)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sigma_3 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad (1.6.43')$$

$$F \left[ \frac{1}{R} \right] = \frac{4\pi}{\sigma_3^2}, \quad (1.6.44)$$

$$F \left[ \frac{x}{R} \right] = 8\pi i \frac{u_1}{\sigma_3^4}, \quad F \left[ \frac{1}{R^3} \right] = \frac{2\pi^2}{\sigma_3}, \quad (1.6.44')$$

$$F [e^{-a'r^2}] = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{a} \right)^3 e^{-\frac{\sigma_3^2}{4a^2}}, \quad a > 0. \quad (1.6.45)$$

Аналогично для обобщенных функций  $n$  переменных можно написать

$$F [1(x_1, x_2, \dots, x_n)] = (2\pi)^n \delta(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (1.6.46)$$

$$F [\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1, \quad (1.6.46')$$

$$F [\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)] = e^{i(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n)}, \quad (1.6.46'')$$

$$F [\delta(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n)] = \frac{1}{|k_1 k_2 \dots k_n|}, \quad (1.6.46''')$$

$$F \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] = -i u_j \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (1.6.47)$$

$$F [x_j] = -2\pi i \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (1.6.47')$$

### 1.6.3. Преобразование Лапласа некоторых часто используемых обобщенных функций

#### 1.6.3.1. Обобщенные функции одной переменной

Для случая  $x \in R$  можно написать

$$L[\theta(x)] = \frac{1}{p}, \quad L[\theta(x-a)] = \frac{1}{p} e^{-ap}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.48)$$

$$L[\delta(x)] = 1, \quad L[\delta(x-a)] = e^{-ap}, \quad (1.6.49)$$

$$L[\delta(kx)] = \frac{1}{|k|}, \quad (1.6.49')$$

$$L[\delta^{(n)}(x)] = p^n, \quad (1.6.50)$$

$$L[x_+^n] = (-1)^n \left( \frac{1}{p} \right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{(n+1)}}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.51)$$

$$L[(x-a)_+] = \frac{1}{p^2} e^{-ap}, \quad L[(x-a)_+^2] = \frac{2}{p^3} e^{-ap}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.51')$$

$$L[\delta(x+a) + \delta(x-a)] = 2 \operatorname{ch} ap, \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.52)$$

$$L[\delta(x+a) - \delta(x-a)] = 2 \operatorname{sh} ap, \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.52')$$

$$L[\delta(a^2x^2 - b^2)] = \frac{1}{|ab|} \operatorname{ch} \frac{b}{a} p, \quad (1.6.52'')$$

$$L[\delta(\sin x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau np}, \quad (1.6.53)$$

$$L[\theta(x) e^{\lambda x}] = \frac{1}{p - \lambda}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda, \quad (1.6.54)$$

$$L[\theta(x) e^{i\omega x}] = \frac{1}{p - i\omega}, \quad (1.6.54')$$

$$L[\theta(x) e^{-i\omega x}] = \frac{1}{p + i\omega}, \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.54'')$$

$$L[\theta(x) \cos \omega x] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.55)$$

$$L[\theta(x) \sin \omega x] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.55')$$

$$L[\theta(x) \operatorname{ch} ax] = \frac{p}{p^2 - a^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|, \quad (1.6.56)$$

$$L[\theta(x) \operatorname{sh} ax] = \frac{a}{p^2 - a^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|, \quad (1.6.56')$$

$$L[\theta(x) J_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}, \operatorname{Re} p > 0, \quad (1.6.57)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка;

$$\begin{aligned} L[\theta(x) \theta(x-a) \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})] &= \\ &= \frac{1}{p} K_0(ap), \quad a > 0, \end{aligned} \quad (1.6.58)$$

$$L\left[\frac{\theta(x) \theta(x-a)}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right] = K_0(ap), \quad a > 0, \quad (1.6.58')$$

$$L\left[\frac{\theta(x) \theta(x-a)}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}\right] = -pK_0(ap), \quad a > 0, \quad (1.6.58'')$$

где  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

### 1.6.3.2. Обобщенные функции нескольких переменных

Для преобразования Лапласа обобщенных функций трех и четырех переменных имеем

$$L\left[\frac{1}{R}\right] = -\frac{4\pi}{\rho_3^2}, \quad \operatorname{Re} \rho_3 = 0, \quad (1.6.59)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad (1.6.59')$$

$$L[\delta(a - R)] = \frac{4\pi a}{\rho_3} \operatorname{sh} a \rho_3, \quad (1.6.60)$$

$$L\left[\frac{\cos kR}{R}\right] = -\frac{4\pi}{\rho_3^2 + k^2}, \quad \operatorname{Re} \rho_3 = 0, \quad \operatorname{Im} k = 0, \quad (1.6.61)$$

$$L\left[\frac{\delta(t - R)}{R}\right] = -\frac{4\pi}{\rho_3^2 - q^2}, \quad \operatorname{Re} q > |\operatorname{Re} \rho_3|. \quad (1.6.62)$$

Аналогично в случае обобщенных функций  $n$  переменных можно написать

$$L[\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n}, \quad (1.6.63)$$

$$\operatorname{Re} p_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$L[\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1, \quad (1.6.64)$$

$$L[\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)] = e^{-(a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n)}, \quad (1.6.64')$$

$$L[\delta(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n)] = \frac{1}{|k_1 k_2 \dots k_n|}, \quad (1.6.64'')$$

$$L\left[\frac{1}{r_n} e^{ikr_n}\right] = -\frac{1}{\rho_n^2 + k^2}, \quad \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} \rho_n|, \quad (1.6.65)$$

где

$$r_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad \rho_n = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2}. \quad (1.6.65')$$

## **Дифференциальные уравнения в обобщенных функциях**

### **2.1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

#### **2.1.1. Общие результаты. Фундаментальные решения**

Теория дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций отличается от теории этих уравнений в пространстве обычных функций. Вывод этих уравнений и отыскание их решений важны в приложениях. Дифференциальные уравнения в обобщенных функциях позволяют находить новые решения, которые невозможно получить классическими методами.

Следует заметить, что вывод некоторых уравнений математической физики не всегда можно осуществить непосредственно в пространстве обобщенных функций из-за трудностей, возникающих при моделировании физических явлений. Вообще говоря, уравнения, описывающие такие явления, выводятся сначала классическими методами. После этого осуществляется нулевое продолжение неизвестных функций таким образом, чтобы они были определены на всем пространстве; рассмотренные в обычном смысле производные заменяются соответствующими выражениями, вычисленными согласно соотношению между производной в смысле теории обобщенных функций и производной в обычном смысле почти всюду непрерывной функции, имеющей конечное число точек разрыва первого рода. Таким образом, неизвестные величины задачи — это регулярные обобщенные функции. Затем допускается, что эти неизвестные могут быть произвольными обобщенными функциями. Часто используется другая возможность: с самого начала предполагается, что



неизвестные величины — произвольные обобщенные функции, причем рассматриваемые дифференциальные уравнения в обобщенных функциях имеют тот же вид, что и дифференциальные уравнения, полученные классическими методами (очевидно, что эти уравнения справедливы не на всем пространстве). Однако общего метода перехода к дифференциальным уравнениям в обобщенных функциях не существует.

### 2.1.1.1. Основные функции

Приведем сначала некоторые полезные при исследовании дифференциальных уравнений свойства основных функций.

Пусть  $H(R)$  — подпространство  $K(R)$ ,  $H \subset K$ , содержащее основные функции вида

$$\chi(x) = \varphi'(x), \quad \varphi \in K. \quad (2.1.1)$$

Заметим, что это подпространство характеризуется тем, что любой его элемент удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) dx = 0. \quad (2.1.2)$$

Пусть  $\psi(x) \in K(R)$  — произвольная функция, а

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx \quad (2.1.3)$$

— постоянная, соответствующая  $\psi(x)$ . Пусть также  $\varphi_0(x) \in K(R)$  — фиксированная основная функция, удовлетворяющая соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1. \quad (2.1.4)$$

**Теорема 2.1.1.** Любую основную функцию  $\psi(x) \in K(R)$  можно единственным образом представить в виде

$$\psi(x) = \chi(x) + \lambda \varphi_0(x), \quad \chi(x) \in H(R). \quad (2.1.5)$$

Действительно, поскольку  $\varphi_0(x)$  — фиксированная функция, а  $\lambda$  определяется соотношением (2.1.3), то функция  $\chi(x)$  определяется единственным образом соотношением (2.1.5). Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 0.$$

Следовательно,  $\chi(x) \in H(R)$  и  $\chi(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем.

Этот результат можно распространить и на случай основных функций нескольких переменных. Пусть  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K(R^n)$  — основная функция, определенная на  $R_n$ , а  $\lambda(x_2, x_3, \dots, x_n) \in K(R^{n-1})$  — ассоциированная основная функция, определяемая соотношением

$$\begin{aligned} \lambda(x_2, x_3, \dots, x_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, \quad \psi \in K(R^n). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Пусть также  $\varphi_0(x_1) \in K(R)$  — фиксированная основная функция одной переменной, обладающая свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1) dx_1 = 1. \quad (2.1.7)$$

Обозначим через  $H_1(R^n)$  подпространство  $K(R^n)$ ,  $H_1 \subset K$ , содержащее основные функции  $\chi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , обладающие свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 = 0. \quad (2.1.8)$$

Любой элемент этого подпространства имеет вид

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \varphi \in K(R^n). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Следовательно,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \chi(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1. \quad (2.1.9')$$

**Теорема 2.1.1.'** Любую основную функцию  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K(R^n)$  можно единственным образом представить в виде

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \chi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ & + \lambda(x_2, x_3, \dots, x_n) \varphi_0(x_1), \quad \chi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in H_1(R^n). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Действительно, функция  $\chi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , единственным образом определяемая соотношением (2.1.10), является основной и удовлетворяет соотношению (2.1.8), т. е. принадлежит подпространству  $H_1(R^n)$ .

### 2.1.1.2. Первообразная обобщенной функции

**Определение 2.1.1.** Обобщенная функция  $g(x) \in K'(R)$  называется первообразной  $m$ -го порядка обобщенной функции  $f(x) \in K'(R)$ , если

$$g^{(m)}(x) = f(x), \quad (2.1.11)$$

т. е.

$$(g^{(m)}(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x)) \quad (2.1.11')$$

для любой  $\varphi(x) \in K(R)$ .

В частности, если  $m=1$ , то  $g(x)$  является первообразной первого порядка или просто первообразной обобщенной функции  $f(x)$ .

**Теорема 2.1.2.** Любая обобщенная функция  $f(x) \in K'(R)$  обладает первообразной  $g(x) \in K'(R)$ . Две первообразные  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  отличаются на постоянную.

Действительно, пусть дана обобщенная функция  $f(x) \in K'(R)$  и  $\psi(x) \in K(R)$  — основная функция, записанная в виде (2.1.5). Определим функционал  $g(x)$  соотношением

$$\begin{aligned}(g(x), \psi(x)) &= (g(x), \chi(x)) + \lambda (g(x), \varphi_0(x)) = \\ &= (g(x), \varphi'(x)) + \lambda C = -(f(x), \varphi(x)) + \lambda C,\end{aligned}$$

где  $C = (g(x), \varphi_0(x))$  — постоянная величина. Нетрудно проверить, что определенный таким образом функционал  $g(x)$  является линейным и непрерывным и представляет собой обобщенную функцию. С другой стороны, справедливо соотношение

$$(g(x), \psi'(x)) = -(g'(x), \psi(x)) = -(f(x), \bar{\varphi}(x)) + \bar{\lambda}C,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x) dx = 0, \quad \bar{\varphi} = \int_{-\infty}^x \bar{\chi}(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^x \psi'(\xi) d\xi = \psi(x).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(g'(x), \psi(x)) = (f(x), \psi(x)), \quad (2.1.12)$$

или

$$g'(x) = f(x). \quad (2.1.12')$$

Таким образом, существование первообразной доказано.

Пусть теперь  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  — две первообразные обобщенной функции  $f(x)$ . Для  $\varphi(x) \in K(R)$  можно написать

$$(g_1'(x), \varphi(x)) = (g_2'(x), \varphi(x)), \quad \varphi \in K(R),$$

или

$$\begin{aligned}([g_1(x) - g_2(x)]', \varphi(x)) &= -(g_1(x) - g_2(x), \varphi'(x)) = \\ &= -(g_1(x) - g_2(x), \chi(x)), \quad \chi \in H.\end{aligned}$$

Рассмотрев теперь  $\psi(x) \in K(R)$  в виде (2.1.5), получим

$$\begin{aligned}(g_1(x) - g_2(x), \psi(x)) &= \\ &= (g_1(x) - g_2(x), \chi(x)) + \lambda (g_1(x) - g_2(x), \varphi_0(x)) = \\ &= \lambda C = C \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = (C, \psi(x)),\end{aligned}$$

где  $(g_1(x) - g_2(x), \varphi_0(x)) = C = \text{const.}$

Следовательно,

$$g_1(x) - g_2(x) = C \quad (2.1.13)$$

и теорема полностью доказана.

**Теорема 2.1.2'.** Любая обобщенная функция  $f(x) \in K'(R)$  обладает первообразной  $g(x) \in K'(R)$  произвольного порядка  $m$ . Две первообразные  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  одинакового порядка  $m$  отличаются между собой на полином степени  $m-1$ .

Действительно, существование обобщенной функции  $g(x)$ , удовлетворяющей соотношению (2.1.11), можно доказать методом математической индукции, используя результаты, полученные в случае  $m=1$ , для которого теорема доказана. Предположим, что существует обобщенная функция  $h(x)$ , для которой  $h^{(m-1)}(x) = f(x)$ . Заметим, что в силу доказанного существует обобщенная функция  $g(x)$ , для которой  $g'(x) = h(x)$ . Отсюда следует, что  $g(x)$  удовлетворяет соотношению (2.1.11), т. е. существование первообразной  $m$ -го порядка доказано.

Предположим теперь, что существуют две первообразные  $m$ -го порядка  $h_1(x)$  и  $h_2(x)$ , для которых

$$(h_1(x) - h_2(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{m-1}(x) \varphi(x) dx,$$

где  $P_{m-1}(x)$  — полином  $m-1$ -й степени. Тогда после интегрирования по частям с учетом формулы (2.1.1) получается следующее соотношение для первообразных  $g_1(x) = h_1'(x)$  и  $g_2(x) = h_2'(x)$ :

$$(g_1(x) - g_2(x), \chi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) \chi(x) dx,$$

где  $P_m(x)$  — полином  $m$ -й степени. С учетом представления (2.1.5) для основной функции  $\psi(x) \in K(R)$  можно написать

$$\begin{aligned} & (g_1(x) - g_2(x), \psi(x)) = \\ & = (g_1(x) - g_2(x), \chi(x)) + \lambda (g_1(x) - g_2(x), \varphi_0(x)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) \chi(x) dx + \lambda (g_1(x) - g_2(x), \varphi_0(x)) = \\
&= \lambda (g_1(x) - g_2(x), \varphi_0(x)) - \\
&\quad - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) \varphi_0(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) \psi(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) \psi(x) dx + \lambda C = \\
&= (P_m(x) + C, \psi(x)), \quad C = \text{const},
\end{aligned}$$

откуда следует

$$g_1(x) - g_2(x) = P_m(x) \quad (2.1.14)$$

(постоянная  $C$  вошла в полином  $P_m(x)$ ).

**Теорема 2.1.3.** Для любой обобщенной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'(R^n)$  существует первообразная  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'(R^n)$ , так что

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.1.15)$$

Если  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — две первообразные, то

$$\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\
&= h(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (2.1.16)
\end{aligned}$$

где  $h(x_2, x_3, \dots, x_n) \in K'(R^{(n-1)})$ .

Отметим, что эту теорему можно обобщить для первообразной произвольного порядка  $m$ , так что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^m g(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}} = \\
&= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (m = m_1 + m_2 + \dots + m_n). \quad (2.1.17)
\end{aligned}$$

### 2.1.1.3. Общие результаты

Учитывая полученные результаты, можно утверждать, что дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = 0 \quad (2.1.18)$$

имеет единственное классическое решение

$$y(x) = C = \text{const.} \quad (2.1.18')$$

Рассматриваемое в смысле теории обобщенных функций дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x), \quad (2.1.19)$$

где  $f(x)$  — произвольная обобщенная функция, всегда имеет решение. Заметим, что если  $f(x)$  является регулярной обобщенной функцией, то всегда существует первообразная, являющаяся также регулярной обобщенной функцией. Отсюда в силу теоремы 2.1.2 все первообразные будут регулярными обобщенными функциями.

**Теорема 2.1.4.** Пусть уравнение (2.1.19), где  $f(x)$  — обычная функция, рассматривается в смысле теории обобщенных функций. Тогда его единственным решением является классическое решение

$$y(x) = \int f(x) dx.$$

Заметим, что возможны случаи, когда  $f(x)$  является сингулярной обобщенной функцией, тогда как ее первообразная — регулярная обобщенная функция. Например, при  $f(x) = \delta(x)$  получим первообразную  $y(x) = \theta(x)$ . Возможны также случаи, когда  $f(x)$  — регулярная обобщенная функция, тогда как ее первообразная является непрерывной функцией. Например, при  $f(x) = \theta(x)$  получим первообразную  $y(x) = x_+$ . В общем случае можно написать

$$y(x) = x_+ + C = x\theta(x) + C, \quad C = \text{const.} \quad (2.1.20)$$





**Теорема 2.1.5.** Единственным решением матричного дифференциального уравнения (2.1.22') с элементами матрицы  $A(x)$ , являющимися бесконечно дифференцируемыми функциями, будет классическое решение.

Действительно, допустим, что существует решение в обобщенных функциях  $y(x) = U(x)z(x)$ , где  $z(x)$  — новая неизвестная матрица. Дифференцируя, получаем

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dU(x)}{dx} z(x) + U(x) \frac{dz(x)}{dx}.$$

Отсюда, учитывая равенство (2.1.22''), будем иметь

$$U(x) \frac{dz(x)}{dx} = 0.$$

Далее, поскольку  $U(x)$  — невырожденная матрица, то  $dz(x)/dx = 0$ . Следовательно,  $z(x) = C$  и теорема доказана.

Рассмотрим теперь однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) \equiv y^{(n)}(x) + \\ + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0. \quad (2.1.24)$$

Если ввести обозначение

$$y_i(x) = y^{(n-i)}(x) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.1.25)$$

то можно показать, что это уравнение эквивалентно системе линейных дифференциальных уравнений вида (2.1.22).

**Теорема 2.1.6.** Дифференциальное уравнение (2.1.24) для каждого  $x \in R$  всегда обладает отличным от нуля решением класса  $C^n$ .

**Теорема 2.1.7.** Единственным решением однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (2.1.24) с переменными коэффициентами  $a_i(x) \in C^\infty$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) является классическое решение.

В частности, единственным решением рассматриваемого в смысле теории обобщенных функций дифференци-

ального уравнения

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0, \quad a(x) \in C^\infty, \quad (2.1.26)$$

является классическое решение

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)dx}, \quad C = \text{const.} \quad (2.1.26')$$

Если  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  — фундаментальная система решений уравнения (2.1.24), то общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

$$C_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1.24')$$

Вронскиан фундаментальной системы решений отличен от нуля:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.1.27)$$

поскольку эти решения линейно независимы. В этом случае уравнение (2.1.24') можно записать в следующем виде:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n; y) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.1.28)$$

Коэффициенты  $a_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) уравнения выражаются в виде

$$a_i(x) = \frac{(-1)^i}{W(y_1, y_2, \dots, y_n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-i-1)} & y_2^{(n-i-1)} & \dots & y_n^{(n-i-1)} \\ y_1^{(n-i+1)} & y_2^{(n-i+1)} & \dots & y_n^{(n-i+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (2.1.28')$$

#### 2.1.1.4. Обобщенное решение. Фундаментальное решение

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'(R) \quad (2.1.29)$$

с коэффициентами  $a_i(x) \in C^\infty$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

**Определение 2.1.2.** Обобщенным решением дифференциального уравнения (2.1.29) на интервале  $[a, b]$  называется обобщенная функция  $y(x) \in K'(R)$ , которая удовлетворяет в смысле теории обобщенных функций этому уравнению на интервале  $[a, b]$ , т. е. для которой выполняется соотношение

$$\left(P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x), \varphi(x)\right) = (f(x), \varphi(x)) \quad (2.1.29')$$

при любой  $\varphi(x) \in K(R)$ , такой, что  $\text{supp } \varphi(x) \subset [a, b]$ .

**Теорема 2.1.8.** Пусть  $f(x)$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция. Тогда единственным решением уравнения (2.1.29) на интервале  $[a, b]$  является классическое решение.

**Определение 2.1.3.** Пусть коэффициенты линейного дифференциального оператора  $P(d/dx)$ , соответствующего уравнению (2.1.29), являются постоянными величинами

ми. *Элементарным*, или *фундаментальным*, *решением* уравнения (2.1.29) или соответствующего оператора  $P(d/dx)$  называется обобщенная функция  $E(x) \in K'(R)$ , удовлетворяющая уравнению

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta(x). \quad (2.1.30)$$

**Теорема 2.1.9.** *Решение уравнения (2.1.29) существует и имеет вид*

$$y(x) = E(x) * f(x), \quad (2.1.31)$$

*если только свертка определена.*

Это утверждение справедливо, если, например, обобщенная функция  $f(x)$  обладает ограниченным носителем или если фундаментальное решение обладает таким носителем.

Для доказательства теоремы используем формулы (1.3.20) и (1.3.23). Тогда

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) &= P\left(\frac{d}{dx}\right)[E(x) * f(x)] = \\ &= P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Заметим, что существует бесконечно много фундаментальных решений. Все они отличаются на слагаемое, являющееся решением однородного уравнения

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = 0. \quad (2.1.32)$$

Частное решение уравнения (2.1.30) называется *частным фундаментальным решением* и обозначается через  $E_+(x)$ . Общее решение однородного уравнения (2.1.32) обозначается через  $E_0(x)$ . В этом случае *общее фундаментальное*, или просто *фундаментальное*, *решение* дается формулой

$$E(x) = E_0(x) + E_+(x), \quad (2.1.33)$$

которую можно непосредственно проверить.

*Частное* или *общее решение* данного уравнения можно получить, если использовать соответственно частное

фундаментальное или фундаментальное решение этого уравнения.

Например, одним из частных фундаментальных решений оператора  $d^n/dx^n$  является следующая обобщенная функция:

$$E_+(x) = \frac{1}{(n-1)!} x_+^{n-1} = \frac{\theta(x)}{(n-1)!} x^{n-1}. \quad (2.1.34)$$

Для доказательства этого результата можно использовать метод математической индукции. Формулу (2.1.34) нетрудно проверить при  $n=1$ . Пусть  $E_n$  — решение, соответствующее показателю  $n$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} E_{n+1}^{(n)} &= \left( \theta(x) \frac{x^{n-1}}{n(-1)!} \frac{x}{n} \right)^{(n)} = \left( E_n \frac{x}{n} \right)^{(n)} = \\ &= E_n^{(n)} \frac{x}{n} + C_n^1 E_n^{(n-1)} \left( \frac{x}{n} \right)' + \dots + C_n^n E_n \left( \frac{x}{n} \right)^{(n)} = \\ &= \frac{x}{n} \delta(x) + \theta(x) = \theta(x), \end{aligned}$$

поэтому  $E_{n+1}^{(n+1)} = \delta(x)$ . Таким образом, формула (2.1.34) доказана.

Аналогично регулярная обобщенная функция

$$E(x) = \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}, \quad \omega > 0, \quad (2.1.35)$$

является фундаментальным решением оператора  $(d^2/dx^2) + \omega^2$ . Действительно, поскольку

$$E'(x) = \theta(x) \cos \omega x,$$

$$E''(x) = \delta(x) - \theta(x) \omega \sin \omega x,$$

то утверждение очевидно.

Далее, обобщенная регулярная функция

$$E(x) = -\frac{1}{2\omega} e^{-\omega|x|}, \quad \omega > 0, \quad (2.1.36)$$

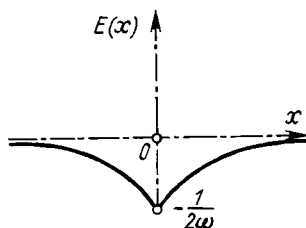
является фундаментальным решением оператора  $(d^2/dx^2) - \omega^2$ . Эта обобщенная функция порождена непрерывной всюду, за исключением начала координат,

дифференцируемой функцией (фиг. 2.1). Заметим, что

$$E'(x) = \frac{1}{2} e^{-\omega|x|} \operatorname{sign} x.$$

Дальнейшая проверка утверждения не представляет трудностей.

Эти операторы имеют многочисленные применения в механике, особенно в задачах теории колебаний.



Фиг. 2.1

## 2.1.2. Методы решения

### 2.1.2.1. Метод вариации постоянных

Одним из классических методов интегрирования линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является *метод вариации постоянных*. Этот метод может быть применен и в случае, когда уравнения изучаются в пространстве обобщенных функций.

Рассмотрим уравнение

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'(R), \quad (2.1.37)$$

где оператор  $P(d/dx)$  определен в формуле (2.1.24). Пусть  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), x \in [a, b]$ , — фундаментальная система решений (т. е. система линейно независимых частных решений) однородного уравнения (2.1.24) с отличным от нуля на интервале  $[a, b]$  вронскианом (2.1.27). С другой стороны, уравнение (2.1.24) можно записать в виде (2.1.28); коэффициенты уравнения даны формулой (2.1.28').

Предположим, что коэффициенты  $a_i(x)$  бесконечно дифференцируемы. Поскольку вронскиан  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$  дифференцируем, с учетом формулы (2.1.28') получаем, что вронскиан бесконечно дифференцируем на интервале  $[a, b]$ . С помощью фундаментальной системы решений общее решение однородного уравнения (2.1.24) можно записать в виде (2.1.24').

Используя метод вариации постоянных, будем искать решение неоднородного уравнения (2.1.37) в виде (2.1.24'). При этом будем предполагать, что  $C_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) являются обобщенными функциями. Коэффициенты  $C_i(x)$  можно определить из системы уравнений

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0,$$

$$\dots \dots \dots (2.1.38)$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0,$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Далее, поскольку определителем этой системы является вронскиан  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , который отличен от нуля на интервале  $[a, b]$ , то решение системы можно записать в виде

$$C_i'(x) = \frac{A_i(x)}{W(x)} f(x) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.1.38')$$

где  $A_i(x)$  — алгебраические дополнения элементов последней строки и  $i$ -го столбца вронскиана. При помощи первообразных этих обобщенных функций общее решение уравнения (2.1.37) можно записать в виде (2.1.24').

Если коэффициент при  $y^{(n)}(x)$  не равен 1, то последнее уравнение системы (2.1.38) изменится — первый член нужно умножить на этот коэффициент. При этом определитель полученной системы не всегда отличен от нуля, так что при решении системы следует учитывать имеющиеся особенности.

Эти рассуждения можно использовать при определении фундаментального решения, соответствующего оператору  $P(d/dx)$ . Если  $f(x) = \delta(x)$ , то можно написать

$$C'_i(x) = \frac{A_i(x)}{W(x)} \delta(x) = \frac{A_i(0)}{W(0)} \delta(x). \quad (2.1.39)$$

Отсюда следует

$$C_i(x) = \frac{A_i(0)}{W(0)} \theta(x) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.1.39')$$

Частное фундаментальное решение выражается в виде

$$E_+(x) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i(0)}{W(0)} \theta(x) y_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i(0)}{W(0)} y_{i+}(x), \quad (2.1.40)$$

где, согласно соотношению (1.3.26),  $y_{i+}(x)$  — положительная часть функции  $y_i(x)$ .

Если фундаментальная система решений является нормальной, т. е.

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, \quad y'_1(0) = 0, \dots, \quad y_1^{(n-1)}(0) = 0, \\ y_2(0) &= 0, \quad y'_2(0) = 1, \dots, \quad y_2^{(n-1)}(0) = 0, \\ &\dots \dots \dots \quad (2.1.41) \\ y_{n-1}(0) &= 0, \quad y'_{n-1}(0) = 0, \dots, \quad y_{n-1}^{(n-1)}(0) = 0, \\ y_n(0) &= 0, \quad y'_n(0) = 0, \dots, \quad y_n^{(n-1)}(0) = 1, \end{aligned}$$

то  $W(0) = 1$ ,  $A_i(0) = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ),  $A_n(0) = 1$ ,

так что

$$E_+(x) = \theta(x) y_n(x) = y_{n+}(x). \quad (2.1.42)$$

Общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$E_0(x) = y(0) y_1(x) + y'(0) y_2(x) + \dots + y^{(n-1)}(0) y_n(x). \quad (2.1.43)$$

В частности, если  $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0$ ,  $y^{(n-1)}(0) = 1$ , то можно написать



$$E_0(x) = y_n(x). \quad (2.1.44)$$

Отсюда следует, что для определения частного фундаментального решения можно исходить из решения  $E_0(x)$  однородного уравнения, удовлетворяющего следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} E_0(0) = 0, \quad E_0'(0) = 0, \dots, \quad E_0^{(n-2)}(0) = 0, \\ E_0^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned} \quad (2.1.44')$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$y^{(n)}(x) = f(x), \quad f(x) \in K'(R). \quad (2.1.45)$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)}(x) = 0 \quad (2.1.46)$$

записывается в виде

$$E_0(x) = C_1 + C_2(x) + \dots + C_n x^{n-1}. \quad (2.1.46')$$

С учетом условий (2.1.44') получаем

$$E_0(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}. \quad (2.1.46'')$$

Мы пришли, таким образом, к частному фундаментальному решению (2.1.34).

Для дифференциального уравнения

$$y''(x) - \omega^2 y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'(R), \quad (2.1.47)$$

можно написать

$$E_0(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}, \quad \omega > 0. \quad (2.1.48)$$

Отсюда с учетом начальных условий  $E_0(0) = 0$ ,  $E_0'(0) = 1$  получаем

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{2\omega}.$$

Тогда частное фундаментальное решение можно записать в виде

$$E_+(x) = \frac{\theta(x)}{2\omega} (e^{\omega x} - e^{-\omega x}) = \frac{\theta(x)}{\omega} \operatorname{sh} \omega x, \quad \omega > 0. \quad (2.1.47')$$

Заметим, что это решение отличается от полученного ранее (2.1.36). Однако если к нему прибавить решение  $-(1/2\omega)e^{\omega x}$  однородного уравнения, то получим решение (2.1.36).

Аналогично для уравнения

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'(R), \quad (2.1.49)$$

находим

$$E_0(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \quad (2.1.50)$$

и получаем частное фундаментальное решение (2.1.35).

Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = \theta(x) \cos \omega' x, \quad (2.1.51)$$

$$\omega \neq \omega', \quad \omega, \omega' > 0.$$

Частное фундаментальное решение (2.1.35) и обобщенная функция в правой части имеют один и тот же носитель — интервал  $[0, \infty)$ . Следовательно, получаем решение

$$y(x) = E_+(x) * \theta(x) \cos \omega' x = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{\omega} \int_0^x \sin \omega t \cos \omega' (x-t) dt = \frac{\cos \omega' x - \cos \omega x}{\omega^2 - \omega'^2} & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (2.1.51')$$

Рассмотрим следующее линейное неоднородное уравнение с переменными коэффициентами:

$$x y''(x) - y'(x) = x^2. \quad (2.1.52)$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x^2. \quad (2.1.53)$$

Далее,  $W(x) = 2x \neq 0$  при  $x \neq 0$ . Используя метод вариации постоянных, получаем систему уравнений

$$C_1'(x) + x^2 C_2'(x) = 0, \quad (2.1.54)$$

$$2x^2 C_2'(x) = x^2,$$

позволяющую определить обобщенные функции  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ . Заметим, что в этом случае коэффициент при  $y''(x)$  отличен от единицы.

Из написанной выше системы уравнений следует

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}x^2, \quad (2.1.54')$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}[h_2\delta(x) + h_3\delta'(x)].$$

Отсюда получаем

$$C_1(x) = -\frac{1}{6}x^3 + h_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{h_2}{2}\theta(x) + \frac{h_3}{2}\delta(x) + h_4, \quad h_1, h_2, h_3, h_4 = \text{const.} \quad (2.1.54'')$$

Следовательно,

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha_1x^2 + \alpha_2x^2\theta(x) + \alpha_3, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \text{const.} \quad (2.1.55)$$

Заметим, что при помощи обобщенной функции Хевисайда это решение определено на всем интервале  $(-\infty, \infty)$ , тогда как классическое решение определено только на каждом из интервалов  $(-\infty, 0)$  и  $(0, \infty)$ , на которых оно совпадает с обобщенным решением.

Рассмотрим уравнение

$$xy''(x) - y'(x) = 1. \quad (2.1.56)$$

Соответствующая система имеет вид

$$C_1'(x) + x^2C_2'(x) = 0, \quad (2.1.57)$$

$$2x^2C_2'(x) = 1.$$

Отсюда находим

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}x + h_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2}\text{Vp}\frac{1}{x} + \frac{h_2}{2}\theta(x) + \frac{h_3}{2}\delta'(x) + h_4, \quad h_1, h_2, h_3, h_4 = \text{const.} \quad (2.1.57')$$

Используя свойства обобщенной функции  $Vp(1/x)$ , получаем

$$y(x) = -x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^2 \theta(x) + \alpha_3, \quad (2.1.58)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const.}$$

Далее рассмотрим уравнение

$$xy''(x) - y'(x) = \delta(x). \quad (2.1.59)$$

Запишем соответствующую систему

$$C_2'(x) + x^2 C_2'(x) = 0, \quad (2.1.60)$$

$$2x^2 C_2'(x) = \delta(x),$$

откуда

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \theta(x) + h_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{4} \delta'(x) + \quad (2.1.60')$$

$$+ \frac{h_2}{2} \delta(x) + \frac{h_3}{2} \theta(x) + h_4, \quad h_1, h_2, h_3, h_4 = \text{const.}$$

Следовательно, общее решение принимает вид

$$y(x) = -\frac{1}{2} \theta(x) + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^2 \theta(x) + \alpha_3, \quad (2.1.59')$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const.}$$

Полученное общее решение не является фундаментальным, поскольку нельзя выразить решение уравнения

$$xy''(x) - y'(x) = f(x), \quad f(x) \in K'(R), \quad (2.1.61)$$

в виде свертки  $y(x) * f(x)$ , так как оператор  $x(d^2/dx^2) - d/dx$  имеет переменные коэффициенты.

### 2.1.2.2. Метод интегральных преобразований

Интегральные преобразования могут быть особенно полезными при решении дифференциальных уравнений в обобщенных функциях. Ниже будет показано, как

можно использовать в этих целях преобразование Фурье и преобразование Лапласа.

Рассмотрим, например, (недифференциальное) уравнение

$$x^n y(x) = 0. \quad (2.1.62)$$

При  $x \neq 0$  единственным классическим решением является функция  $y=0$ . Однако в пространстве обобщенных функций это уравнение имеет и другие решения.

Действительно, применим преобразование Фурье. Тогда, используя свойство (1.5.22'), получаем

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = 0, \quad (2.1.63)$$

откуда в силу теоремы 2.1.2'

$$F(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \dots + C_{n-1} s^{n-1}. \quad (2.1.63')$$

Применив обратное преобразование Фурье, можно написать

$$y(x) = C_0 \delta(x) + C_1 \delta'(x) + C_2 \delta''(x) + \dots + C_{n-1} \delta^{(n-1)}(x). \quad (2.1.62')$$

В частности, при  $n=1$  решением уравнения

$$xy(x) = 0 \quad (2.1.64)$$

является обобщенная функция

$$y(x) = C_0 \delta(x). \quad (2.1.64')$$

Рассмотрим теперь линейный оператор с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n, \quad (2.1.65)$$

а также соответствующее уравнение (2.1.30). Применив преобразование Фурье к этому уравнению, получим

$$P(-is)F[E(x)] = 1, \quad s = u + iv. \quad (2.1.65')$$

Это уравнение всегда имеет решение. Следовательно, можно определить фундаментальное решение уравнения

(2.1.30), а также решение уравнения (2.1.29) при условии, что существует свертка (2.1.31).

Отметим, что преобразование Фурье можно применить непосредственно к уравнениям вида (2.1.37), несмотря на то что это уравнения с переменными коэффициентами. Например, применив преобразование Фурье к уравнению

$$E''(x) - \omega^2 E(x) = \delta(x), \quad (2.1.66)$$

получим

$$(-is)^2 F[E(x)] - \omega^2 F[E(x)] = 1, \quad (2.1.67)$$

откуда следует

$$F[E(x)] = -\frac{1}{s^2 + \omega^2}.$$

Используя формулу (1.5.37), получаем фундаментальное решение (2.1.36).

Применим преобразование Лапласа к уравнению

$$E''(x) + \omega^2 E(x) = \delta(x). \quad (2.1.68)$$

Тогда

$$p^2 L[E(x)] + \omega^2 L[E(x)] = 1.$$

Отсюда следует

$$L[E(x)] = \frac{1}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.1.69)$$

Применив теперь формулу (1.5.69), получим фундаментальное решение (2.1.35).

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение с переменными коэффициентами

$$xy''(x) + 2y'(x) = \delta(x). \quad (2.1.70)$$

Применив преобразование Лапласа, получим

$$-\frac{d}{dp}(p^2 L[y(x)]) + 2pL[y(x)] = 1, \quad (2.1.71)$$

откуда следует

$$-p^2 \frac{d}{dp} L[y(x)] = 1,$$

а также

$$L[y(x)] = \frac{1}{p} + C_1. \quad (2.1.72)$$

Применение обратного преобразования Лапласа позволяет написать

$$y(x) = \theta(x) + C_1 \delta(x) + C_2, \quad (2.1.70')$$

где вторая произвольная константа  $C_2$  соответствует однородному уравнению.

Применив теперь преобразование Фурье к уравнению (2.1.70), получим

$$i \frac{d}{ds} (s^2 F[y(x)]) - 2is F[y(x)] = 1, \quad (2.1.73)$$

откуда следует

$$is^2 \frac{d}{ds} F[y(x)] = 1$$

и

$$F[y(x)] = \frac{i}{s} + C_1, \quad C_1 = \text{const}. \quad (2.1.74)$$

Применение обратного преобразования Фурье приводит, таким образом, к тому же решению (2.1.70').

## 2.2. УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ

### 2.2.1. Свойства уравнений в свертках

#### 2.2.1.1. Алгебры со сверткой

В линейном пространстве определена операция сложения двух элементов пространства, а также операция умножения на число (действительное или комплексное). В некоторых из таких пространств можно определить и операцию умножения двух элементов пространства.

**Определение 2.2.1.** Линейное пространство  $A$  называется *алгеброй*, если в нем определена операция умножения двух элементов, удовлетворяющая следующим условиям:

- а)  $x(yz) = (xy)z$ ,  $x, y, z \in A$  (ассоциативность);  
 б)  $(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(x, y)$ ,  $x, y \in A$ ,  $\alpha, \beta \in R$ ;  
 в)  $x(y+z) = xy + xz$ ,  $(y+z)x = yx + zx$ ,  $x, y, z \in A$   
 (дистрибутивность относительно сложения).

Если операция умножения обладает еще следующим свойством:

г)  $xy = yx$ ,  $x, y \in A$  (коммутативность), то алгебра называется коммутативной.

Элемент  $u \in A$  называется *единичным элементом*, если он обладает свойством

д)  $ix = xi = x$  для любого  $x \in A$ ; в этом случае  $A$  называется *алгеброй с единицей*.

Например, множество непрерывных на интервале  $[a, b]$  функций образует коммутативную алгебру с единицей, если под умножением понимать обычное умножение двух функций.

Аналогично множество квадратных матриц порядка  $n$  с действительными элементами образует (некоммутативную) алгебру с единицей.

Если для элемента  $x \in A$  существует элемент  $x^{-1} \in A$ , такой, что

$$e) \quad xx^{-1} = x^{-1}x = u,$$

то говорят, что  $x^{-1}$  является *обратным элементом* для  $x$ .

В алгебре матриц порядка  $n$  не всякий элемент обладает обратным; обратный элемент существует тогда и только тогда, когда матрица невырождена (ее определитель отличен от нуля).

В пространстве обобщенных функций, являющемся линейным векторным пространством, определена свертка двух обобщенных функций, которая есть не что иное, как операция умножения двух обобщенных функций. Однако пространство обобщенных функций не является алгеброй по отношению к такой операции умножения, поскольку свертка определена не для всех пар обобщенных функций. Если свертка имеет смысл, то она является коммутативной и ассоциативной операцией, причем единичным элементом для нее служит обобщенная функция Дирака  $\delta(x)$ . Поэтому будем рассматривать определенные подпространства пространства  $K'$ , образующие алгебру относительно свертки.



**Определение 2.2.2.** Подпространство  $\mathcal{H}' \subset K'$  образует (коммутативную) алгебру со сверткой (обладающей единичным элементом), если выполняются следующие условия:

а) свертка двух или нескольких обобщенных функций, принадлежащих  $\mathcal{H}'$ , существует и принадлежит этому же подпространству;

б)  $\delta(x) \in \mathcal{H}'$  (единичный элемент).

Например, множество  $A'$  обобщенных функций с ограниченным носителем образует алгебру со сверткой. поскольку если  $f(x), g(x) \in A'$ , то свертка  $f(x) * g(x)$  существует и принадлежит  $A'$ .

Аналогично множество  $K'_+$ , состоящее из обобщенных функций из  $K'$ , носитель которых содержится в  $[0, \infty)$ , образует алгебру со сверткой.

Если обобщенная функция  $f(x) \in \mathcal{H}'$  обладает обратной  $f^{-1}(x) \in \mathcal{H}'$ , то

$$f(x) * f^{-1}(x) = f^{-1}(x) * f(x) = \delta(x). \quad (2.2.1)$$

Во всех приведенных выше выкладках можно считать также, что  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим, например, алгебру со сверткой  $K'_-(\mathbb{R})$ . Обобщенная функция  $\theta(x) \in K'_+$ , поскольку ее носителем является интервал  $[0, \infty]$ . Обобщенная функция  $\delta'(x)$  сосредоточена в начале координат. Следовательно,  $\delta'(x) \in K'_+$ . Далее,

$$\theta(x) * \delta'(x) = \frac{d}{dx} [\theta(x) * \delta(x)] = \frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x),$$

поэтому

$$\theta^{-1}(x) = \delta'(x). \quad (2.2.2)$$

Заметим, что

$$f(x) = \theta(x) e^x, \quad [\delta'(x) - \delta(x)] \in K'_+(\mathbb{R})$$

и

$$\begin{aligned} \theta(x) e^x * [\delta'(x) - \delta(x)] &= \frac{d}{dx} [\theta(x) e^x] - \theta(x) e^x = \\ &= \delta(x) e^x = e^0 \delta(x) = \delta(x). \end{aligned}$$

Поэтому можно написать

$$f^{-1}(x) = \delta'(x) - \delta(x). \quad (2.2.3)$$

Далее, поскольку обобщенная функция (2.1.35) является фундаментальным решением уравнения (2.1.68), то

$$\begin{aligned} E^{-1}(x) * E(x) &= [\delta''(x) + \omega^2 \delta(x)] * E(x) = \\ &= E''(x) + \omega^2 E(x) = \delta(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E^{-1}(x) = \delta''(x) + \omega^2 \delta(x), \quad (2.2.4)$$

причем обобщенные функции  $E(x)$  и  $E^{-1}(x)$  принадлежат пространству  $K'_+$ .

Учитывая, что

$$\theta(x, y), \quad \frac{\partial^2 \delta(x, y)}{\partial x \partial y} \in K'_+(R^2),$$

можно написать

$$\begin{aligned} \theta(x, y) * \frac{\partial^2 \delta(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\theta(x, y) * \delta(x, y)] = \\ &= \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \partial y} = \delta(x, y). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\theta^{-1}(x, y) = \frac{\partial^2 \delta(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.2.5)$$

Учитывая соотношение (1.4.36), запишем для обобщенной функции

$$\Delta \delta(x, y) \in K'_+(R^2), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

следующую свертку:

$$\begin{aligned} \Delta \delta(x, y) * \left( -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right) &= \delta(x, y) * \Delta \left( -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right) = \\ &= \delta(x, y) * \delta(x, y) = \delta(x, y). \end{aligned}$$

Заметим, однако, что обобщенная функция  $-(1/2\pi) \ln(1/r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , не является обратной к обобщенной функции  $\Delta \delta(x, y)$ , поскольку она не принадлежит подпространству  $K'_+(R^2)$ .

**Теорема 2.2.1.** Пусть для обобщенных функций  $f(x)$ ,  $g(x) \in K'_+$  существуют обратные функции  $f^{-1}(x)$  и  $g^{-1}(x)$ . Тогда свертка  $f(x) * g(x) \in K'_+$  имеет обратную функцию следующего вида:

$$[f(x) * g(x)]^{-1} = f^{-1}(x) * g^{-1}(x). \quad (2.2.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & [f(x) * g(x)] * [f^{-1}(x) * g^{-1}(x)] = \\ & = [f(x) * f^{-1}(x)] * [g(x) * g^{-1}(x)] = \delta(x) * \delta(x) = \delta(x). \end{aligned}$$

### 2.2.1.2. Определение уравнения в свертках

Пусть  $\mathcal{K}' \subset K'$  — алгебра со сверткой, а  $a(x)$ ,  $b(x) \in \mathcal{K}'$ . Все приводимые в дальнейшем результаты действительны при  $x \in R^n$ .

**Определение 2.2.3.** Уравнение вида

$$a(x) * y(x) = b(x), \quad (2.2.7)$$

где  $a(x)$  и  $b(x)$  — известные обобщенные функции, а  $y(x)$  — неизвестная обобщенная функция, называется *уравнением в свертках*.

**Теорема 2.2.2.** Пусть  $a(x) \in \mathcal{K}'$  — фиксированная обобщенная функция. Чтобы уравнение в свертках (2.2.7) имело хотя бы одно решение при любой правой части  $b(x) \in \mathcal{K}'$ , необходимо и достаточно, чтобы для  $a(x)$  существовала обратная обобщенная функция  $a^{-1}(x)$ . Если  $a^{-1}(x)$  существует, то уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = a^{-1}(x) * b(x). \quad (2.2.7')$$

Указанное условие является необходимым. Действительно, предположим, что при любой правой части  $b(x) \in \mathcal{K}'$  уравнение (2.2.7) имеет хотя бы одно решение. В частности, при  $b(x) = \delta(x) \in \mathcal{K}'$  существует решение  $y(x)$ :  $a(x) * y(x) = \delta(x)$ . Следовательно,  $y(x) = a^{-1}(x)$ , т. е. для  $a(x)$  существует обратный элемент. Это условие является и достаточным, поскольку если  $a(x) \in \mathcal{K}'$  обладает обратной обобщенной функцией  $a^{-1}(x) \in \mathcal{K}'$ , т. е.

если

$$a(x) * a^{-1}(x) = a^{-1}(x) * a(x) = \delta(x),$$

то, умножив уравнение (2.2.7) слева на  $a^{-1}(x)$  (умножение понимается в смысле операции умножения, определенной в алгебре  $\mathcal{K}'$ ), получим

$$\begin{aligned} a^{-1}(x) * [a(x) * y(x)] &= a^{-1} * b(x) = \\ &= \delta(x) * y(x) = y(x). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение имеет решение вида (2.2.7').

Для доказательства единственности решения достаточно умножить решение (2.2.7') на  $a(x)$ ; при этом получается уравнение (2.2.7). Следовательно, соотношения (2.2.7) и (2.2.7') эквивалентны. Теперь достаточно заметить, что  $a^{-1}(x)$  является единственным решением уравнения (2.2.7) при  $b(x) = \delta(x)$ . Теорема доказана.

Элемент  $a^{-1}(x)$  называется *элементарным (фундаментальным) решением уравнения в свертках* (2.2.7).

Если  $a(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция, то она не обладает обратной обобщенной функцией. В этом случае уравнение (2.2.7) не обладает элементарным решением.

Рассмотрим следующее определенное в  $K'_+(R)$  уравнение в свертках:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * y(x) = \delta(x), \quad (2.2.8)$$

где  $P(d/dx)$  — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (2.1.65). Свертка (2.2.8) существует для любой обобщенной функции  $y(x) \in K'_+$ , поскольку

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * y(x) &= \delta(x) * P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = \\ &= P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = \delta(x). \end{aligned}$$

Следовательно,  $y(x)$  является фундаментальным решением, соответствующим оператору (2.1.65). Согласно результатам, приведенным в разд. 2.1.2.1, фундаментальное решение уравнения (2.1.37) имеет вид (2.1.42), где

$y_n(x)$  — решение соответствующего однородного уравнения с начальными условиями вида (2.1.44'). Следовательно, можно написать

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * \theta(x) y_n(x) = \delta(x), \quad (2.2.9)$$

так что

$$\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right]^{-1} = \theta(x) y_n(x) \in K'_+. \quad (2.2.9')$$

Таким образом, уравнение

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'_+, \quad (2.2.10)$$

имеет единственное решение

$$y(x) = \left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right]^{-1} * f(x) = \theta(x) y_n(x) * f(x), \quad (2.2.10')$$

которое удовлетворяет также и дифференциальному уравнению

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'_+. \quad (2.2.10'')$$

В частности, фундаментальное решение (2.1.35) оператора  $P(d/dx) = (d^2/dx^2) + \omega^2$  принадлежит алгебре со сверткой  $K'_+$ . Следовательно,

$$\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right]^{-1} = \frac{\theta(x) \sin \omega x}{\omega}, \quad \omega > 0. \quad (2.2.11)$$

Рассмотрим теперь оператор  $P(d/dx) = (d^2/dx^2) - \omega^2$ . Заметим, что фундаментальное решение (2.1.36) не принадлежит алгебре со сверткой  $K'_+$ , потому что его носителем является вся числовая ось. Следовательно, это фундаментальное решение не является обратным элементом для  $P(d/dx)\delta(x)$ . В то же время носитель фундаментального решения (2.1.47') содержится в интервале  $[0, \infty)$ , поэтому это фундаментальное решение принадлежит  $K'_+$ . Следовательно, можно написать

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right)\delta(x)\right]^{-1} = \frac{\theta(x)}{\omega} \operatorname{sh} \omega x, \quad \omega > 0. \quad (2.2.12)$$

В силу полученных выше результатов уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right) \delta(x) * y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'_+, \quad (2.2.13)$$

имеет единственное решение, которое дается формулой

$$y(x) = \frac{\theta(x)}{\omega} \operatorname{sh} \omega x * f(x). \quad (2.2.13')$$

Фундаментальное решение оператора  $d^n/dx^n$  определяется соотношением (2.1.34) и принадлежит алгебре со сверткой  $K'_+$ . Следовательно, можно написать

$$[\delta^{(n)}(x)]^{-1} = \frac{\theta(x)}{(n-1)!} x^{n-1}. \quad (2.2.14)$$

В общем случае множество всех фундаментальных решений дифференциального уравнения (2.2.10'') содержит решение, принадлежащее  $K'_+$ . Это решение единственно и является фундаментальным решением соответствующего уравнения в свертках.

### 2.2.1.3. Операционный метод решения уравнений в свертках

Рассмотрим уравнение в свертках (2.2.7), где  $a(x)$ ,  $b(x) \in K'_+$ . В теореме 2.2.2 даны условия, при которых существует единственное решение (2.2.7'). Среди эффективных методов решения этого уравнения отметим метод преобразования Лапласа, которое обладает свойством (1.5.89). Действительно, это соотношение справедливо для обобщенных функций, носители которых содержатся в интервале  $x \geq 0$  и для которых, следовательно, определено преобразование Лапласа. Применив преобразование Лапласа к этому уравнению, получим

$$L[a(x)] L[y(x)] = L[b(x)], \quad (2.2.15)$$

откуда следует

$$L[y(x)] = \frac{L[b(x)]}{L[a(x)]} = L(p), \quad p = u + iv. \quad (2.2.15')$$

Если для функции  $L(p)$  существует оригинал, принадле-

жащий алгебре со сверткой  $K'_+$ , то он и является единственным искомым решением.

Этот метод не применим в случае, когда для обобщенных функций  $a(x)$  и  $b(x)$  не определено преобразование Лапласа или когда для функции  $L(p)$  не существует оригинала.

Заметим, что к уравнению в свертках (2.2.7) можно применить и преобразование Фурье. Нужно лишь заранее убедиться в выполнении условий применения этого преобразования к свертке рассматриваемых обобщенных функций.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\theta(x) \sin x * y(x) = \frac{1}{2} \theta(x) x \sin x. \quad (2.2.16)$$

Входящие в это уравнение обобщенные функции принадлежат алгебре со сверткой  $K'_+$ . С учетом теоремы (1.5.69) и преобразования Лапласа (1.5.98) можно написать

$$L[\theta(x) \sin x] L[y(x)] = \frac{1}{2} L[\theta(x) x \sin x],$$

или

$$\frac{1}{p^2 + 1} L[y(x)] = -\frac{1}{2} \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p^2 + 1} \right),$$

откуда следует

$$L[y(x)] = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Поэтому решение уравнения (2.2.16) единственно и дается формулой

$$y(x) = \theta(x) \cos x, \quad (2.2.16')$$

которая соответствует соотношению (1.3.29).

Рассмотрим также уравнение

$$\theta(x) \cos x * y(x) = \frac{1}{2} \theta(x) (\sin x + x \cos x), \quad (2.2.17)$$

коэффициенты которого принадлежат  $K'_+$ . Применив преобразование Лапласа, получим

$$\frac{p}{p^2 + 1} L[y(x)] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2} \right] = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2},$$

откуда следует

$$L[y(x)] = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Таким образом, получено также решение (2.2.16'), соответствующее соотношению (1.3.29'').

Найдем теперь обобщенную функцию, обратную обобщенной функции  $a(x) = \theta(x) + \delta'(x)$ , принадлежащей, очевидно, алгебре со сверткой  $K'_+$ . Составив уравнение в свертках

$$[\theta(x) + \delta'(x)] * y(x) = \delta(x) \quad (2.2.18)$$

и применив к нему преобразование Лапласа, получим

$$\left( \frac{1}{p} + p \right) L[y(x)] = 1.$$

Следовательно,

$$L[y(x)] = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Таким образом, опять получили решение (2.2.16').

Рассмотрим теперь уравнение

$$[\delta''(x) - \omega^2 \delta(x)] * y(x) = \delta(x). \quad (2.2.19)$$

Применив к нему преобразование Лапласа, получим

$$(p^2 - \omega^2) L[y(x)] = 1.$$

Следовательно,

$$L[y(x)] = \frac{1}{p^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right],$$

откуда находим решение

$$y(x) = \frac{\theta(x)}{2\omega} (e^{\omega x} - e^{-\omega x}) = \frac{\theta(x)}{\omega} \operatorname{sh} \omega x, \quad \omega > 0, \quad (2.2.19')$$

соответствующее фундаментальному решению (2.1.47').

Предположим теперь, что нужно найти обобщенную функцию  $y(x)$  таким образом, чтобы обобщенная функ-



ция  $E(x)$ , определяемая соотношением

$$E(x) = y(x) * \theta(x) \sin x, \quad (2.2.20)$$

являлась фундаментальным решением оператора  $(d/dx) - 1$ . Составим соответствующее уравнение в свертках

$$\left(\frac{d}{dx} - 1\right) \theta(x) \sin x * y(x) = \delta(x); \quad (2.2.21)$$

оно определено на алгебре со сверткой  $K'_+$ . Действуя аналогичным образом, получаем

$$y(x) = \delta(x) + \delta'(x) + 2e^x. \quad (2.2.21')$$

## 2.2.2. Интегральные уравнения

### 2.2.2.1. Общие положения

Многочисленные задачи математической физики приводят к уравнениям, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла. Такие уравнения называются *интегральными*. Так, например, дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'(x) = f(x, y), \quad f(x, y) \in C^0(D), \quad (2.2.22)$$

с условием  $y = y_0$  при  $x = x_0$ , где  $(x_0, y_0) \in D \subset R^2$ , эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi, y) d\xi + y_0, \quad (2.2.22')$$

в котором неизвестная функция  $y(x)$  входит под знак интеграла. Вообще говоря, эта функция входит в уравнение нелинейным образом, так что уравнение является *нелинейным интегральным уравнением*.

Если  $f(x, y)$  является линейной по  $y$  функцией, то интегральное уравнение (2.2.22') называется линейным. Среди линейных интегральных уравнений отметим *интегральные уравнения Вольтерры первого рода*, имеющие вид

$$\int_0^x \bar{K}(x, t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.23)$$

а также *интегральные уравнения Вольтерры второго рода*, имеющие вид

$$y(x) + \lambda \int_0^x \bar{K}(x, t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (2.2.24)$$

Функции  $\bar{K}(x, t)$  и  $f(x)$  известны и представляют собой соответственно ядро и свободный член интегрального уравнения. Функция  $y(x)$  неизвестна, а  $\lambda$  — действительный или комплексный параметр. Предполагается, что функции  $\bar{K}(x, t)$  и  $f(x)$  локально интегрируемы и ядро  $\bar{K}(x, t)$  равно нулю при  $t \geq x \geq 0$ .

Если функция  $f(x)$  равна нулю, то уравнения (2.2.23) и (2.2.24) являются *однородными*.

Специальный вид уравнений Вольтерры получается, если рассмотреть  $\lambda=1$  и ядро  $\bar{K}(x, t) = K(x-t)$ .

В этом случае можно написать

$$\int_0^x K(x-t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.23')$$

$$y(x) + \int_0^x K(x-t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (2.2.24')$$

Продолжим функции  $K(x)$ ,  $f(x)$  и  $y(x)$  нулевыми значениями при  $x < 0$  и введем соответствующие обобщенные функции. Тогда рассматриваемые интегральные уравнения можно записать при помощи свертки следующим образом:

$$\theta(x) K(x) * y(x) = \theta(x) f(x), \quad (2.2.23'')$$

$$y(x) + \theta(x) K(x) * y(x) = \theta(x) f(x). \quad (2.2.24'')$$

Заметим, что  $\theta(x) K(x)$ ,  $\theta(x) f(x)$ ,  $y(x) \in K'_+(R)$ , поэтому уравнение Вольтерры первого рода (2.2.23') становится уравнением в свертках (2.2.23''), определенным на алгебре со сверткой  $K'_+$ .

Уравнение (2.2.23'') не всегда имеет решение. Например, если после продолжения ядро  $\theta(x) K(x)$  является функцией класса  $C^\infty$ , то рассматриваемое уравнение в свертках не имеет решения. Действительно, в этом слу-

чае для любой обобщенной функции  $g(x) \in K'_+$  свертка  $\theta(x)K(x) * g(x)$  является бесконечно дифференцируемой функцией. Поэтому при  $g(x) = [\theta(x)K(x)]^{-1}$  свертка  $\theta(x)K(x) * [\theta(x)K(x)]$  является бесконечно дифференцируемой функцией, которая, следовательно, не может совпадать с  $\delta(x)$ .

Рассмотрим теперь для уравнения Вольтерры второго рода следующую обобщенную функцию:

$$K_1(x) = \theta(x)K(x) + \delta(x). \quad (2.2.25)$$

Поскольку  $K_1(x) \in K'_+$ , можно написать

$$K_1(x) * y(x) = \theta(x)f(x). \quad (2.2.24''')$$

Следовательно, уравнение Вольтерры второго рода также сводится к уравнению в свертках на алгебре со сверткой  $K'_+$ .

### 2.2.2.2. Интегральные уравнения Вольтерры первого рода

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры первого рода

$$\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.26)$$

с ядром  $K(x) = \cos x$ . Продолжим функции  $\cos x$ ,  $f(x)$ ,  $y(x)$  нулевыми значениями при  $x < 0$ . Тогда уравнение (2.2.26) будет эквивалентно следующему уравнению в свертках:

$$\theta(x)\cos x * y(x) = \theta(x)f(x). \quad (2.2.26')$$

Заметим [см. формулу (2.2.18)], что

$$[\theta(x)\cos x]^{-1} = \theta(x) + \delta'(x), \quad (2.2.27)$$

поэтому решение уравнения (2.2.26) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= [\theta(x) + \delta'(x)] * \theta(x)f(x) = \\ &= [\theta(x)f(x)]' + \theta(x) \int_0^x f(t)dt. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

В частности, при  $f(x) = \sin x$  получаем

$$y(x) = [\theta(x) \sin x]' + \theta(x) \int_0^x \sin t dt = \theta(x). \quad (2.2.28')$$

Следовательно,  $y(x) = \theta(x)$  является решением уравнения

$$\int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = \sin x, \quad x \geq 0. \quad (2.2.26'')$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t) \cos(x-t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.29)$$

где  $f(x)$  — заданная функция. Ядром этого уравнения является функция  $K(x) = x \cos x$ .

Запишем соответствующее уравнение в свертках

$$\theta(x) x \cos x * y(x) = \theta(x) f(x). \quad (2.2.29')$$

Если теперь в качестве правой части полученного уравнения в свертках взять обобщенную функцию Дирака  $\delta(x)$  и применить к этому уравнению преобразование Лапласа, то получим

$$-\frac{d}{dp} \left( \frac{p}{p^2 + 1} \right) L [[\theta(x) x \cos x]^{-1}] = 1,$$

откуда

$$L [[\theta(x) x \cos x]^{-1}] = \frac{(p^2 + 1)^2}{p^2 - 1} = p^2 + 3 + 2 \left( \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [\theta(x) x \cos x]^{-1} &= \delta''(x) + 3\delta(x) + 2\theta(x)(e^x - e^{-x}) = \\ &= \delta''(x) + 3\delta(x) + 4\theta(x) \operatorname{sh} x. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Таким образом, решение уравнения (2.2.29) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= [\delta''(x) + 3\delta(x) + 4\theta(x) \operatorname{sh}(x)] * \theta(x) f(x) = \\ &= [\theta(x) f(x)]'' + 3\theta(x) f(x) + 4\theta(x) \operatorname{sh}(x) * \theta(x) f(x) = \\ &= [\theta(x) f(x)]'' + 3\theta(x) f(x) + 4\theta(x) \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

В частности, при  $f(x) = e^x$  имеем

$$y(x) = \delta'(x) + \delta(x) + 2\theta(x) [(1+x)e^x + \operatorname{sh} x]. \quad (2.2.31')$$

Запишем теперь для интегрального уравнения

$$\int_0^x \sin(x-t)y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.32)$$

соответствующее уравнение в свертках

$$\theta(x) \sin x * y(x) = \theta(x) f(x). \quad (2.2.32')$$

Учитывая формулы (2.1.35) и (2.2.4) при  $\omega = 1$ , получаем

$$[\theta(x) \sin x]^{-1} = \delta''(x) + \delta(x). \quad (2.2.33)$$

Следовательно, решением уравнения (2.2.32) является обобщенная функция

$$\begin{aligned} y(x) &= [\delta''(x) + \delta(x)] * \theta(x) f(x) = \\ &= [\theta(x) f(x)]'' + \theta(x) f(x), \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

где дифференцирование проводится в смысле теории обобщенных функций.

В частности, при  $f(x) = \cos x$  можно написать

$$y(x) = \delta'(x). \quad (2.2.34')$$

Интегральному уравнению

$$\int_0^x (e^{-t} - \sin t) y(x-t) dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.35)$$

соответствует следующее уравнение в свертках:

$$\theta(x) (e^{-x} - \sin x) * y(x) = \theta(x) f(x). \quad (2.2.35')$$

Аналогично можно показать, что

$$[\theta(x) (e^{-x} - \sin x)]^{-1} = \delta'(x) + 2\delta(x) + \theta(x) (4e^x - 1). \quad (2.2.36)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (2.2.35) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= [\delta'(x) + 2\delta(x) + \theta(x) (4e^x - 1)] * \theta(x) f(x) = \\ &= [\theta(x) f(x)]' + 2\theta(x) f(x) + \theta(x) \int_0^x (4e^{x-t} - 1) f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

В частности, при  $f(x) = \theta(x)$  получаем

$$y(x) = \delta(x) + \theta(x)(4e^x - x - 2). \quad (2.2.37')$$

### 2.2.2.3. Интегральные уравнения Вольтерры второго рода

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$y(x) + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (2.2.38)$$

Соответствующее уравнение в свертках имеет вид

$$[\delta(x) + \theta(x)e^x] * y(x) = f(x). \quad (2.2.38')$$

Заметим, что

$$[\delta(x) + \theta(x)e^x]^{-1} = \delta(x) - \theta(x). \quad (2.2.39)$$

Следовательно, решением уравнения (2.2.38) является обобщенная функция

$$\begin{aligned} y(x) &= [\delta(x) - \theta(x)] * \theta(x) f(x) = \\ &= \theta(x) f(x) - \theta(x) \int_0^x f(x-t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Отметим, что решение этого уравнения можно записать и в виде

$$y(x) = f(x) - \int_0^x f(x-t) dt, \quad x \geq 0. \quad (2.2.40')$$

Для интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.41)$$

получаем следующее уравнение в свертках:

$$[\delta(x) + \theta(x) \cos x] * y(x) = \theta(x) f(x). \quad (2.2.41')$$

Вычислим теперь при помощи преобразования Лапласа

обратный элемент, соответствующий ядру  $K_1(x) = \delta(x) + \theta(x) \cos x$  в алгебре со сверткой  $K'_+$ :

$$\left(1 + \frac{p}{p^2 + 1}\right) L[K_1^{-1}(x)] = 1.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} L[K_1^{-1}(x)] &= \frac{p^2 + 1}{p^2 + p + 1} = \\ &= 1 - \frac{p + \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

$$K_1^{-1}(x) = \delta(x) - \theta(x) e^{-\frac{x}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \quad (2.2.42)$$

Решение уравнения (2.2.41) имеет вид

$$y(x) = \left[ \delta(x) - \theta(x) e^{-\frac{x}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] * \theta(x) f(x) =$$

$$\begin{aligned} &= \theta(x) f(x) - \theta(x) \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \times \\ &\quad \times f(x-t) dt, \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

или

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) - \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \times \\ &\quad \times f(x-t) dt, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.43')$$

Рассмотрим также следующее уравнение:

$$y(x) + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (2.2.44)$$

Соответствующее уравнение в свертках имеет вид

$$[\delta(x) + \theta(x) \sin x] * y(x) = \theta(x) f(x). \quad (2.2.44')$$

Заметим, что

$$[\delta(x) + \theta(x) \sin x]^{-1} = \delta(x) - \theta(x) \sin \sqrt{2}x, \quad (2.2.45)$$

поэтому решение уравнения (2.2.44) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= [\delta(x) - \theta(x) \sin \sqrt{2}x] * \theta(x) f(x) = \\ &= \theta(x) f(x) - \theta(x) \int_0^x \sin \sqrt{2}(x-t) f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

или

$$y(x) = f(x) - \int_0^x \sin \sqrt{2}(x-t) f(t) dt, \quad x \geq 0. \quad (2.2.46')$$

Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_0^x (x-t) \cos(x-t) y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (2.2.47)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &[\delta(x) + \theta(x) x \cos x]^{-1} = \\ &= \delta(x) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \theta(x) (x\sqrt{3} - 4 \sin x \sqrt{3}). \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

Отсюда находим решение

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_0^x [t\sqrt{3} - 4 \sin t \sqrt{3}] f(x-t) dt, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

Для интегрального уравнения Вольтерры второго рода вида (2.2.24) имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.2.3.** Пусть ядро  $K(x)$  является локально интегрируемой функцией, ограниченной на каждом интервале. Тогда обобщенная функция  $\delta(x) + K(x) = K_1(x) \in K'_+$  единственным образом обратима в алгебре



со сверткой  $K_+$ . Обратный элемент имеет вид

$$K_1^{-1}(x) = \delta(x) + H(x), \quad (2.2.50)$$

где  $H(x) \in K'_+$ .

Применив преобразование Лапласа к уравнению

$$[\delta(x) + K(x)] * K_1^{-1}(x) = \delta(x),$$

получим

$$L[K_1^{-1}(x)] = \frac{1}{1 + g(p)} = 1 - g(p) + g^2(p) - \\ - g^3(p) + \dots + (-1)^n g^n(p) + \dots; \quad g(p) = L[K(x)]$$

при условии, что ряд сходится. При помощи обратного преобразования Лапласа получаем

$$K_1^{-1}(x) = \delta(x) - K(x) + K^{*2}(x) - K^{*3}(x) + \dots \\ \dots + (-1)^n K^{*n}(x) + \dots, \quad (2.2.51)$$

где свертка  $n$  членов обозначена символом

$$K^{*n}(x) = K(x) * K(x) * \dots * K(x). \quad (2.2.52)$$

Осталось доказать, что ряд (2.2.51) сходится в  $K'_+$ ; для этого достаточно доказать, что каждый член ряда, за исключением первого, ограничен по модулю членом сходящегося на интервале  $[0, a]$  ряда. Введем обозначение  $M_a = \max |K(x)|$  на интервале  $[0, a]$ . Тогда

$$|K^{*2}(x)| = \left| \int_0^x K(x-t)K(t) dt \right| \leq \\ \leq \int_0^x |K(x-t)K(t)| dt \leq x M_a^2, \quad x \in [0, a].$$

Предположим теперь, что

$$|K^{*n}(x)| \leq \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} M_a^n, \quad x \in [0, a]. \quad (2.2.53)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |K^{*n+1}(x)| &= \left| \int_0^x K^{*n}(t) K(x-t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^x |K^{*n}(t) K(x-t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} M_a^{n+1} dt = \frac{x^n}{n!} M_a^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, методом математической индукции соотношение (2.2.53) доказано полностью. Заметим, что

$$\frac{x^n}{n!} M_a^{n+1} \leq \frac{a^n}{n!} M_a^{n+1},$$

поэтому на интервале  $[0, a]$  рассматриваемый ряд мажорируется сходящимся числовым рядом

$$M_a + \frac{a}{1!} M_a^2 + \frac{a^2}{2!} M_a^3 + \dots + \frac{a^{n-1}}{n-1!} M_a^n + \dots \quad (2.2.54)$$

Таким образом, доказана сходимость ряда (2.2.51).

Итак, для обратного элемента получено выражение вида (2.2.50), где

$$\begin{aligned} H(x) &= -K(x) + K^{*2}(x) - K^{*3}(x) + \dots \\ &\dots + (-1)^n K^{*n}(x) + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что  $H(x) = 0$  при  $x < 0$ . Если  $K(x)$  — непрерывная функция, то и  $H(x)$  является непрерывной функцией.

В силу теоремы 2.2.2 обратный элемент определен единственным образом.

Решение уравнения (2.2.24') выражается в виде

$$\begin{aligned} y(x) &= \theta(x) f(x) + H(x) * \theta(x) f(x) = \\ &= \theta(x) f(x) + \theta(x) \int_0^x H(x-t) f(t) dt, \quad (2.2.55) \end{aligned}$$

или

$$y(x) = f(x) + \int_0^x H(x-t) f(t) dt, \quad x \geq 0. \quad (2.2.55')$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$y(x) + \int_0^x y(t) dt = f(x), \quad x \geq 0. \quad (2.2.56)$$

Заметим, что  $K_1(x) = \delta(x) + \theta(x)$ , поэтому

$$\begin{aligned} H(x) = & -\theta(x) + \theta^{*2}(x) - \theta^{*3}(x) + \dots \\ & \dots + (-1)^n \theta^{*n}(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

Учитывая формулы (1.3.27) и (1.3.28), получаем

$$\theta^{*n}(x) = \frac{\theta(x)}{(n-1)!} x^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} x_+^{n-1}. \quad (2.2.58)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H(x) = & -\theta(x) + \frac{\theta(x)}{1!} x - \frac{\theta(x)}{2!} x^2 + \dots \\ & \dots + (-1)^n \frac{\theta(x)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots = -\theta(x) e^{-x}. \end{aligned} \quad (2.2.58')$$

Таким образом,

$$K_1^{-1}(x) = \delta(x) - \theta(x) e^{-x}, \quad (2.2.59)$$

поэтому решение уравнения (2.2.56) можно записать в виде

$$y(x) = f(x) - \int_0^x e^{-(x-t)} f(t) dt, \quad x \geq 0. \quad (2.2.60)$$

В частности, при  $f(x) = e^{-x}$  получаем следующее решение:

$$y(x) = (1-x) e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad (2.2.60')$$

интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^x y(t) dt = e^{-x}, \quad x \geq 0. \quad (2.2.56')$$

Очевидно, что если применить преобразование Лапласа к уравнению

$$[\delta(x) + \theta(x)] * K_1^{-1}(x) = \delta(x),$$

то получим

$$L[K_1^{-1}(x)] = 1 - \frac{1}{p+1}.$$

Таким образом, мы приходим к тому же результату.

#### 2.2.2.4. Интегро-дифференциальные уравнения

Наряду с рассмотренными выше интегральными уравнениями Вольтерры вида (2.2.23') и (2.2.24') введем также *интегро-дифференциальные уравнения типа свертки*, имеющие следующий общий вид:

$$D_1 y(x) + \int_0^x f(x-t) D_2 y(t) dt = g(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.61)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка  $n$  и  $m$  соответственно ( $n \geq m$ ). Предположим, что функции  $f$  и  $g$  являются функциями классов  $C^m[0, \infty)$  и  $C^0[0, \infty)$  соответственно. Тогда решение интегро-дифференциального уравнения типа свертки (2.2.61) состоит в отыскании функции  $y \in C^n[0, \infty)$ , удовлетворяющей этому уравнению, а также следующим условиям типа Коши:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad y''(0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \quad (2.2.62)$$

Используя далее зависимость между производными в обычном смысле и производными в смысле теории обобщенных функций, можно переписать уравнение (2.2.61) вместе с условиями (2.2.62) в виде уравнения в свертках. Полученное уравнение можно решать, применяя, например, преобразование Лапласа.

Чтобы проиллюстрировать методику решения интегро-дифференциальных уравнений типа свертки, рассмотрим

рим уравнение

$$ay''(x) + by'(x) + c \int_0^x f(x-t)y'(t) dt = \\ = g(x), \quad a, b, c = \text{const}, \quad x \geq 0, \quad (2.2.63)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \quad (2.2.64)$$

Введем теперь обобщенную функцию, соответствующую функции

$$\bar{y}(x) = \theta(x)y(x), \quad (2.2.65)$$

а также обобщенные функции, определенные функциями

$$\bar{f}(x) = \theta(x)f(x), \quad \bar{g}(x) = \theta(x)g(x). \quad (2.2.65')$$

Тогда уравнение (2.2.63) можно записать в виде

$$a \frac{\tilde{d}^2}{dx^2} \bar{y}(x) + b \frac{\tilde{d}}{dx} \bar{y}(x) + c \bar{f}(x) * \frac{\tilde{d}}{dx} \bar{y}(x) = \bar{g}(x), \quad x \in R. \quad (2.2.63')$$

Используя соотношения

$$\frac{d}{dx} \bar{y}(x) = \frac{\tilde{d}}{dx} \bar{y}(x) + y_0 \delta(x), \\ \frac{d^2}{dx^2} \bar{y}(x) = \frac{\tilde{d}^2}{dx^2} \bar{y}(x) + y_0 \delta'(x) + y_1 \delta(x),$$

в которых введены производные в смысле теории обобщенных функций и производные в обычном смысле, получаем следующее уравнение в свертках:

$$[a\delta''(x) + b\delta'(x) + c\bar{f}'(x)] * \bar{y}(x) = \\ = \bar{g}(x) + cy_0\bar{f}(x) + ay_0\delta'(x) + (ay_1 + by_0)\delta(x). \quad (2.2.63'')$$

Например, в случае интегро-дифференциального уравнения

$$2y''(x) + 3y'(x) - \int_0^x (x-t)y'(t) dt = 2e^x, \quad x \geq 0, \quad (2.2.66)$$

с однородными (т. е. нулевыми) начальными условиями получаем следующее уравнение в свертках:

$$[2\delta''(x) + 3\delta'(x) - \theta(x)] * \bar{y}(x) = 2\theta(x)e^x. \quad (2.2.66')$$

Применив преобразование Лапласа, получим

$$\left(p^2 + \frac{3}{2}p - \frac{1}{2p}\right)L[\bar{y}(x)] = \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} L[\bar{y}(x)] &= \frac{p}{p-1} \frac{1}{p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}} = \frac{p}{(p-1)\left(p - \frac{1}{2}\right)(p+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} - \frac{4}{9} \frac{1}{p - \frac{1}{2}} - \frac{1}{18} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{(p+1)^2}. \quad (2.2.67) \end{aligned}$$

Применив далее обратное преобразование Лапласа, получим

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{18} \theta(x) [(9e^{x/2} - 8)e^{x/2} - (1 + 6x)e^{-x}], \quad x \in R. \quad (2.2.68)$$

Можно также написать

$$y(x) = \frac{1}{18} [(9e^{x/2} - 8)e^{x/2} - (1 + 6x)e^{-x}], \quad x \geq 0. \quad (2.2.68')$$

## 2.3. ЗАДАЧА КОШИ И МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 2.3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Изучение дифференциального уравнения состоит, вообще говоря, в отыскании функции определенного класса, удовлетворяющей как данному уравнению, так и *краевым условиям*. Эти условия соответствуют конкретным условиям, при которых протекает явление, описываемое дифференциальным уравнением, и позволяют

определить единственным образом решение задачи в случае, если последняя *корректно поставлена*.

Среди всевозможных типов краевых условий рассмотрим сначала *условия типа Коши* (называемые также *начальными условиями* в случае, когда независимая переменная имеет смысл времени). Эти условия задаются в одной точке интервала (области), в котором определено дифференциальное уравнение.

Будут рассмотрены также *двухточечные* и *многоточечные* задачи, краевые условия для которых задаются в двух или нескольких точках рассматриваемого интервала (области).

### 2.3.1.1. Задача Коши

Пусть  $P(d/dx)$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $n$  с переменными коэффициентами:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x), \quad (2.3.1)$$

где  $a_i(x) \in C^0[a, b]$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x), \quad f(x) \in C^0[a, b]. \quad (2.3.2)$$

**Определение 2.3.1.** Задачей Коши для дифференциального уравнения (2.3.2) называется задача, заключающаяся в определении функции  $y(x) \in C^n[a, b]$ , удовлетворяющей этому уравнению и принимающей вместе со своими производными до  $n-1$ -го порядка заданные значения

$$y_0 = y(x_0), \quad y'_0 = y'(x_0), \quad y''_0 = y''(x_0), \dots, \quad y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0) \quad (2.3.3)$$

в точке  $x_0 \in (a, b)$ .

Можно доказать, что задача Коши имеет единственное решение.

Решим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \quad x \geq 0, \quad (2.3.4)$$

с коэффициентами  $a_i = \text{const}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и  $f(x) \in C^0[0, \infty)$ . Найдем решение, удовлетворяющее этому уравнению, а также начальным условиям

$$\lim_{x \rightarrow +0} y^{(k)}(x) = y_0^{(k)} \quad (k=0, 1, \dots, n-1), \quad (2.3.5)$$

где  $y_0^{(k)}$  — заданные числа.

Заметим, что решение этой задачи для уравнения (2.3.4) тесно связано с определением соответствующего фундаментального решения.

Запишем уравнение (2.3.4) в обобщенных функциях. Для этого продолжим функцию  $f(x)$  и искомое решение  $y(x)$  нулевыми значениями при  $x < 0$ . Введем функции

$$\bar{f}(x) = \theta(x) f(x) \quad \bar{y}(x) = \theta(x) y(x) \quad (2.3.6)$$

и соответствующие регулярные обобщенные функции. Начальные условия являются в этом случае скачками функции  $y(x)$  и ее производных до  $n-1$ -го порядка включительно в точке  $x=0$ . С учетом формулы (1.2.32) можно написать

$$\bar{y}^{(p)}(x) = \tilde{y}^{(p)}(x) + \sum_{k=1}^p y_0^{(k-1)} \delta^{(k-1)}(x) \quad (p=1, 2, \dots, n), \quad (2.3.7)$$

где  $\tilde{y}^{(p)}(x)$  — производная порядка  $p$  в обычном смысле, а  $\bar{y}^{(p)}(x)$  — производная порядка  $p$  в смысле теории обобщенных функций. Введем обозначение

$$F(x) = \bar{f}(x) + b_1 \delta^{(n-1)}(x) + \dots + b_{n-1} \delta'(x) + b_n \delta(x), \quad (2.3.8)$$

где

$$b_k = y_0^{(k-1)} + a_1 y_0^{(k-2)} + \dots + a_{k-2} y_0' + a_{k-1} y_0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2.3.8')$$



Таким образом, дифференциальное уравнение

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\bar{y}(x) = F(x), \quad F(x) \in K'_+, \quad (2.3.9)$$

где оператор (2.3.1) имеет постоянные коэффициенты, справедливо в пространстве обобщенных функций. При этом предполагается, что его решениями могут быть и сингулярные обобщенные функции. Преимущество этого уравнения состоит в том, что оно содержит начальные условия задачи Коши и в формулировке данной задачи участвуют обобщенные функции.

Уравнение в свертках, соответствующее дифференциальному уравнению (2.3.9), имеет вид

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * \bar{y}(x) = F(x). \quad (2.3.9')$$

Элементарное решение уравнения (2.3.9'), т. е. фундаментальное решение дифференциального уравнения (2.3.9), является обратным элементом обобщенной функции  $P(d/dx)\delta(x)$  в алгебре со сверткой  $K'_+$ . Предположим, что это решение определено. Обозначим его через  $E(x)$ . Тогда с учетом формулы (1.3.24) можно написать

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= E(x) * F(x) = E(x) * \bar{f}(x) + \\ &+ b_1 E^{(n-1)}(x) + \dots + b_{n-1} E'(x) + b_n E(x), \quad x \in R. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

При помощи метода вариации постоянных с использованием формулы (2.1.42) можно записать фундаментальное решение в виде

$$E(x) = \theta(x) y_n(x), \quad (2.3.11)$$

где  $y_n(x)$  — решение однородного уравнения

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (2.3.12)$$

с начальными условиями вида (2.1.44'). Тогда решение (2.3.10) принимает вид

$$\bar{y}(x) = \theta(x) y_n(x) * \theta(x) f(x) +$$

$$+ \theta(x) [b_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + b_{n-1} y'_n(x) + b_n y_n(x)], \quad x \in R. \quad (2.3.10')$$

Таким образом, решение уравнения (2.3.4) с начальными условиями (2.3.5) выражается в виде

$$y(x) = \int_0^x y_n(x-t) f(t) dt + \\ + b_1 y_n^{(n-1)}(x) + \dots + b_{n-1} y'_n(x) + b_n y_n(x), \quad x \geq 0. \quad (2.3.13)$$

При этом предполагается, что  $f(x)$  — локально интегрируемая функция. В частности, решение однородного уравнения (2.3.12) с краевыми условиями типа Коши (2.3.5) дается формулой

$$y(x) = b_1 y_n^{(n-1)}(x) + b_2 y_n^{(n-2)}(x) + \dots \\ \dots + b_{n-1} y'_n(x) + b_n y_n(x), \quad x \geq 0. \quad (2.3.14)$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$y''(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (2.3.15)$$

с начальными условиями

$$\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = y_0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y'(x) = y'_0. \quad (2.3.16)$$

Заметим, что  $a_1 = a_2 = 0$  и  $b_1 = y_0$ ,  $b_2 = y'_0$ ; кроме того, функция  $y_2(x) = x$  является решением однородного уравнения (2.3.15), удовлетворяющим условиям

$$y_2(0) = 0, \quad y'_2(0) = 1. \quad (2.3.16')$$

Поэтому

$$y(x) = y_0 + y'_0 x, \quad x \geq 0. \quad (2.3.15')$$

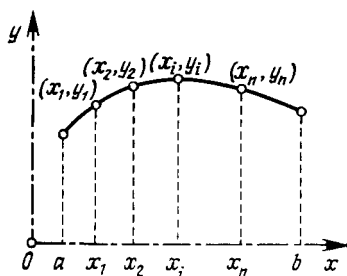
Можно также написать

$$\bar{y}(x) = y'_0 x_+ + y_0 \theta(x), \quad x \in R. \quad (2.3.15'')$$

### 2.3.1.2. Многоточечные задачи

Рассмотренная выше задача Коши является локальной задачей, поскольку начальные условия были поставлены в одной точке интервала (области), в котором определено уравнение.

**Определение 2.3.2.** Многоточечной задачей для дифференциального уравнения (2.3.2) называется задача отыскания функции  $y(x) \in C^n[a, b]$ , удовлетворяющей данно-



Фиг. 2.2.

му уравнению и принимающей значения

$$y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_n = y(x_n) \quad (2.3.17)$$

в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ .

Заметим, что если  $x_i \neq x_j$  ( $i \neq j$ ) то пары  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) определяют  $n$  различных точек на плоскости (фиг. 2.2). Следовательно, с геометрической точки зрения многоточечная задача состоит в определении функции, которая удовлетворяет данному дифференциальному уравнению и график которой проходит через заданные  $n$  точек.

Заметим, что многоточечная задача может иметь единственное решение, может не иметь решения, а также может иметь бесконечное число решений.

Пусть  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения (2.3.12), соответствующего данному дифференциальному уравнению (2.3.2), а  $y_0(x)$  — частное решение по-



Применив формулу (1.2.32) к соответствующей регулярной обобщенной функции и заметив при этом, что уравнение (2.3.15''') записано в обычном смысле, т. е. в виде

$$\tilde{y}''(x) = 0, \quad (2.3.20)$$

получим соответствующее уравнение в пространстве обобщенных функций

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= y'(x_1)\delta(x-x_1) - y'(x_2)\delta(x-x_2) + \\ &+ y(x_1)\delta'(x-x_1) - y(x_2)\delta'(x-x_2), \quad x \in R. \end{aligned} \quad (2.3.20')$$

Вычислим первообразные обобщенной функции  $\bar{y}''(x)$ . Тогда с учетом двухточечных условий (2.3.16'') получим после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} [(x - x_1)_+ - (x - x_2)_+] + \\ &+ y_1\theta(x - x_1) - y_2\theta(x - x_2) = \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)_+ [1 - \theta(x - x_2)] + \\ &+ y_1[\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)], \quad x \in R. \end{aligned} \quad (2.3.19'')$$

Очевидно, что полученные два решения эквивалентны.

В механике наряду с задачами типа Коши часто встречаются двухточечные задачи рассмотренного типа. Отметим, например, задачи баллистики, в которых известно положение в начальный и конечный моменты времени и нужно определить траекторию или угол запуска, задачи теории колебаний, в которых известно начальное положение, а также положение в некоторый момент времени и нужно определить частоту колебаний, и т. д.

Можно рассмотреть и другие краевые условия и сформулировать *смешанные задачи*. Для дифференциального уравнения порядка  $n$  (2.3.2) можно зафиксировать значения функции в  $m < n$  точках и значения производной первого порядка в остальных  $n - m$  точках, принадлежащих интервалу  $(a, b)$ :

$$\begin{aligned} y(x_i) = y_i, \quad y'(x_j) = y'_j \quad (i = 1, 2, \dots, m, \\ j = m + 1, m + 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

В некоторых точках интервала  $(a, b)$  можно зафиксировать значения и функции и некоторых ее производных. При этом следует учитывать, что число краевых условий должно равняться порядку рассматриваемого дифференциального уравнения.

### 2.3.2. Дифференциальные уравнения в частных производных

#### 2.3.2.1. Общие рассмотрения. Фундаментальные решения

Для дифференциальных уравнений в частных производных можно ставить задачи, аналогичные задачам, рассматриваемым в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме задач типа Коши, ставится много других краевых задач. Можно, например, рассматривать условия на контуре (на границе области, внутри которой справедливо данное уравнение), соответствующие многоточечным условиям для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка  $m$  с переменными коэффициентами

$$P(x, D) = \sum_{\alpha=0}^m a_{\alpha}(x) D^{\alpha}, \quad D \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad (2.3.22)$$

где  $a_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^{\infty}$ .

Используемое обозначение указывает на то, что оператор является полиномиальным с переменными коэффициентами. Для случая оператора с постоянными коэффициентами будет использовано обозначение  $P(D)$ .

Рассмотрим уравнение

$$P(x, D)u(x) = f(x), \quad f(x) \in K', \quad x \in R^n. \quad (2.3.23)$$

**Определение 2.3.3.** Назовем *обобщенным решением* уравнения (2.3.23) в области  $\Omega \subset R^n$  любую обобщенную функцию  $u(x) \in K'(R^n)$ , удовлетворяющую в рассматриваемой области этому уравнению в смысле теории обобщенных функций.

Таким образом, если обобщенная функция  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является обобщенным решением уравнения (2.3.23), то для любой основной функции  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которой  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ , можно написать

$$\begin{aligned} (P(x, D)u(x), \varphi(x)) &= (f(x), \varphi(x)), \\ \varphi &\in K(\Omega), x \in R^n. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Очевидно, что любое решение в обычном смысле уравнения (2.3.23) является одновременно и обобщенным решением. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, если  $f(x)$  — непрерывная функция в области  $\Omega$ , а  $u(x) \in C^m(\Omega)$  — решение уравнения (2.3.33), то  $u(x)$  является решением этого уравнения как в обычном смысле, так и в смысле теории обобщенных функций (в обобщенном смысле). Заметим, что аналогичный результат был получен для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Действительно, в рассматриваемом случае производные максимального порядка  $m$  в обычном смысле и в смысле теории обобщенных функций совпадают. Следовательно,  $[P(x, D)u(x) - f(x)]$  является непрерывной функцией, равной нулю для любого  $x \in \Omega(R^n)$ . В этом случае  $P(x, D)u(x) - f(x) = 0$  и в обобщенном смысле, поскольку для любой функции  $\varphi(x) \in K(\Omega)$  можно написать

$$(P(x, D)u(x) - f(x), \varphi(x)) = 0.$$

**Определение 2.3.4.** Назовем *фундаментальным решением* линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами  $P(D)$  обобщенную функцию  $E(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K'(R^n)$ , удовлетворяющую соотношению

$$P(D)E(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.3.25)$$

Заметим, что заданный оператор  $P(D)$  имеет бесконечно много фундаментальных решений. Действительно, если  $E_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является решением уравнения

$$P(D)u(x) = 0, x \in R^n, \quad (2.3.26)$$

а  $E_+(x)$  является частным фундаментальным решением

неоднородного уравнения (2.3.25), то обобщенная функция

$$E(x) = E_0(x) + E_+(x) \quad (2.3.27)$$

является фундаментальным решением, поскольку

$$P(D)E(x) = P(D)E_0(x) + P(D)E_+(x) = \delta(x). \quad (2.3.26')$$

Можно утверждать, что любой линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами  $P(D)$  имеет фундаментальное решение, поскольку уравнение (2.3.25) всегда разрешимо. Для определения этого решения часто пользуются преобразованиями Фурье или Лапласа. Применяв, например, преобразование Фурье к уравнению (2.3.25), получим

$$P(-is_1, -is_2, \dots, -is_n)F[E(x)] = 1.$$

Отсюда следует

$$F[E(x)] = \frac{1}{P(-is_1, -is_2, \dots, -is_n)}. \quad (2.3.28)$$

В дальнейшем для получения обратного преобразования Фурье важную роль сыграет разложение выражения (2.3.28) на простые дроби. Заметим, что

$$P(D)[E(x) * f(x)] = P(D)E(x) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x).$$

**Теорема 2.3.1.** Пусть обобщенная функция  $E(x) \in K'(R^n)$  является фундаментальным решением дифференциального оператора с постоянными коэффициентами  $P(D)$ . Если обобщенная функция  $f(x) \in K'(R^n)$  такова, что свертка  $E(x) * f(x)$  существует, то обобщенная функция

$$u(x) = E(x) * f(x) \quad (2.3.29)$$

является решением линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами

$$P(D)u(x) = f(x), \quad f(x) \in K', \quad x \in R^n. \quad (2.3.30)$$

Заметим, что понятие фундаментального решения имеет смысл и для некоторых классов дифференциаль-



ных уравнений с переменными коэффициентами, для которых можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 2.3.1.

### 2.3.2.2. Уравнения гиперболического типа

Ниже будет рассмотрено следующее уравнение гиперболического типа:

$$\square_a u(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0^{(1)}, \quad (2.3.31)$$

где  $\square_a$  — оператор Даламбера в  $R^n \times R$ ,

$$\square_a = \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (2.3.32)$$

а  $\Delta$  — оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \quad (2.3.33)$$

Это уравнение называется *волновым уравнением* в  $R^n$ .

Найдем фундаментальное решение оператора (2.3.32) в частных случаях  $n=1$ ,  $n=2$  и  $n=3$ . Итак, при  $n=1$  рассмотрим оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.3.34)$$

и будем искать решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 E(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 E(x; t)}{\partial t^2} = \delta(x; t) = \delta(x) \times \delta(t). \quad (2.3.35)$$

Применив преобразование Фурье относительно переменной  $x$ , получим

$$-\alpha^2 F_x[E(x; t)] - \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} F_x[E(x; t)] = 1(\alpha) \times \delta(t),$$

где  $\alpha$  — комплексная переменная, соответствующая этому преобразованию. Заметим, что в левой части появляется оператор, фундаментальное решение которого выража-

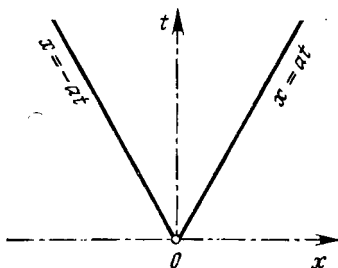
<sup>1</sup> Координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  считаются прямоугольными декартовыми в  $R^n$ . — Прим. ред.

ется формулой (2.1.35). Таким образом,

$$F_x[E(x; t)] = -\frac{\theta(t)a}{\alpha} \sin \alpha at, \quad a, \alpha > 0.$$

Применив теперь обратное преобразование Фурье, получим фундаментальное решение

$$E(x; t) = -\frac{a}{2} \theta(t) \theta(at - |x|), \quad a > 0, \quad (2.3.36)$$



Фиг. 2.3.

где введена обобщенная функция, соответствующая характеристической функции интервала (1.1.98). Можно также написать

$$E(x; t) = \begin{cases} -\frac{a}{2} & \text{при } |x| \leq at, t > 0, a > 0, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (2.3.36')$$

Следовательно,  $E(x; t)$  является функцией двух переменных, принимающей значение  $-a/2$  во внутренности конуса, изображенного на фиг. 2.3, и равной нулю вне этого конуса.

Используя первый пример из разд. 1.4.1.3, можно непосредственно проверить, что (2.3.36') является фундаментальным решением, соответствующим дифференциальному уравнению (2.3.35).

Применив теперь двойное преобразование Лапласа относительно переменных  $x$  и  $t$  к уравнению (2.3.35), получим

$$p_1^2 L_t [L_x [E(x; t)]] - \frac{1}{a^2} p_2^2 L_t [L_x [E(x; t)]] = 1,$$

где  $p_1$  — комплексная переменная, соответствующая переменной  $x$ , а  $p_2$  — комплексная переменная, соответствующая переменной  $t$ . Отсюда следует

$$\begin{aligned} L_t [L_x [E(x; t)]] &= \frac{a^2}{a^2 p_1^2 - p_2^2} = \\ &= \frac{a}{2p_1} \left( \frac{1}{ap_1 + p_2} + \frac{1}{ap_1 - p_2} \right). \end{aligned}$$

Применив обратное преобразование Лапласа относительно переменной  $t$ , получим

$$L_x [E(x; t)] = -\frac{a}{2p_1} (e^{ap_1 t} - e^{-ap_1 t}).$$

Отсюда обратное преобразование Лапласа относительно переменной  $x$  вновь приводит к решению (2.3.36).

Рассмотрим теперь уравнения

$$\square_i u(x, y, z; t) = f(x, y, z; t) \quad (i=1, 2), \quad (2.3.37)$$

где  $\square_i$  — оператор Даламбера,

$$\square_i = \Delta - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (i=1, 2), \quad (2.3.37')$$

$c_i$  — скорость распространения продольных волн ( $i=1$ ) или скорость распространения поперечных волн ( $i=2$ ), а  $f(x, y, z; t)$  — заданная обобщенная функция. Предположим, что уравнение справедливо для всего пространства, причем на бесконечности обеспечена регулярность, а начальные условия однородны (равны нулю при  $t=0$ ). Используя преобразование Фурье относительно пространственных переменных и преобразование Лапласа относительно времени  $t$ , получаем

$$-\left( \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_i^2} \right) F [L[u]] = F [L[f]],$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $p$  — комплексные переменные, соответствующие пространственным переменным и времени  $t$ . Заметим, что

$$F \left[ \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_i}} \right] = \frac{4\pi}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_i^2}}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(i=1, 2). \quad (2.3.38)$$

Поэтому

$$u(x, y, z; t) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} L^{-1} \left[ \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_i}} * L[f] \right] \quad (i=1, 2), \quad (2.3.39)$$

где осуществлена свертка по пространственным переменным.

Если

$$f(x, y, z; t) = -4\pi \kappa(t) \times \delta(x, y, z), \quad (2.3.40)$$

где  $\kappa(t)$  — обобщенная функция, то

$$u(x, y, z; t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_i}} \right]_{(t)} * \kappa(t) \quad (i=1, 2), \quad (2.3.41)$$

где осуществлена свертка по переменной  $t$ . Таким образом, решение уравнения

$$\square_i u(x, y, z; t) + 4\pi \kappa(t) \times \delta(x, y, z) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (2.3.42)$$

дается формулой

$$u(x, y, z; t) = \frac{1}{R} \kappa \left( t - \frac{R}{c_i} \right) \quad (i=1, 2), \quad (2.3.43)$$

где учтено, что

$$L \left[ \delta \left( t - \frac{R}{c_i} \right) \right] = e^{-p \frac{R}{c_i}} \quad (i=1, 2). \quad (2.3.44)$$

В частности, фундаментальное решение уравнений (2.3.37) записывается в виде

$$E(x, y, z; t) = -\frac{1}{4\pi R} \delta \left( t - \frac{R}{c_i} \right) \quad (i=1, 2). \quad (2.3.45)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\square_1 \square_2 u(x, y, z; t) = f(x, y, z; t), \quad (2.3.46)$$

где  $f(x, y, z; t)$  — заданная обобщенная функция. Как и в предыдущем случае, используя интегральные преобразования, получим

$$\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_1^2}\right) \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right) F[L[u]] = F[L[f]].$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} F[L[u(x, y, z; t)]] &= \\ &= \frac{c_1^2 c_2^2}{4\pi p^2 (c_1^2 - c_2^2)} F \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right] \times \\ &\quad \times F[L[f(x, y, z; t)]], \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

где использованы следующее разложение на простые дроби:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_1^2}\right) \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right)} = \\ &= \frac{c_1^2 c_2^2}{p^2 (c_1^2 - c_2^2)} \left( \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_1^2}} - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{p^2}{c_2^2}} \right) \end{aligned}$$

и формула (2.3.38). Поэтому

$$\begin{aligned} u(x, y, z; t) &= \\ &= \frac{c_1^2 c_2^2}{4\pi (c_1^2 - c_2^2)} L^{-1} \left[ \frac{1}{p^2 R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) * L[f] \right], \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

где свертка осуществляется по пространственным переменным.

Если обобщенная функция  $f(x, y, z; t)$  имеет вид (2.3.40), то

$$u(x, y, z; t) =$$

$$= -\frac{c_1^2 c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} L^{-1} \left[ \frac{1}{p^2 R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right] * x(t), \quad (2.3.49)$$

где свертка осуществляется по переменной  $t$ . Таким образом, решение уравнения

$$\square_1 \square_2 u(x, y, z; t) + 4\pi x(t) \times \delta(x, y, z) = 0 \quad (2.3.50)$$

имеет вид

$$u(x, y, z; t) = -\frac{c_1^2 c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} \left[ \left( t - \frac{R}{c_1} \right)_+ - \left( t - \frac{R}{c_2} \right)_+ \right] * x(t), \quad (2.3.51)$$

где учтено, что

$$L \left[ \left( t - \frac{R}{c_i} \right)_+ \right] = \frac{1}{p^2} e^{-p \frac{R}{c_i}} \quad (i=1, 2), \quad (2.3.52)$$

а

$$\left( t - \frac{R}{c_i} \right)_+ = \left( t - \frac{R}{c_i} \right) \theta \left( t - \frac{R}{c_i} \right) \quad (i=1, 2). \quad (2.3.53)$$

В частности, фундаментальное решение уравнения (2.3.46) имеет вид

$$E(x, y, z; t) = \frac{c_1^2 c_2^2}{4\pi(c_1^2 - c_2^2)} \left[ \left( t - \frac{R}{c_1} \right)_+ - \left( t - \frac{R}{c_2} \right)_+ \right]. \quad (2.3.54)$$

Рассмотрим для случая  $n=2$  уравнения

$$\square_i u(x, y; t) = f(x, y; t) \quad (i=1, 2), \quad (2.3.55)$$

$$\square_1 \square_2 u(x, y; t) = f(x, y; t), \quad (2.3.56)$$

где  $f(x, y; t)$  — заданная обобщенная функция. Как и в предыдущем случае, учитывая, что

$$F \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_i} \right) \right] = \frac{2\pi}{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{p^2}{c_i^2}}, \quad (2.3.57)$$

$$\operatorname{Re} p > 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad c_i > 0 \quad (i=1, 2),$$

где  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, получаем следующий интеграл уравнений (2.3.55):

$$u(x, y; t) = -\frac{1}{2\pi} L^{-1} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_i} \right) * L[f] \right] \quad (i=1, 2), \quad (2.3.58)$$

где свертка осуществляется по пространственным переменным.

Введем обобщенную функцию, определяемую следующей функцией:

$$f_0 \left( t; \frac{r}{c_i} \right) = L^{-1} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_i} \right) \right] = \frac{c_i \theta (c_i t - r)}{\sqrt{c_i^2 t^2 - r^2}} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{r}{c_i}, \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_i^2}}} & \text{при } t > \frac{r}{c_i} \end{cases} \quad (i=1, 2). \quad (2.3.59)$$

В этом случае уравнениям (2.3.55) соответствуют следующие фундаментальные решения:

$$E(x, y; t) = -\frac{1}{2\pi} f_0 \left( t; \frac{r}{c_i} \right) \quad (i=1, 2). \quad (2.3.60)$$

Аналогично для уравнения (2.3.56) можно написать

$$u(x, y; t) = \frac{c_1^2 c_2^2}{2\pi (c_1^2 - c_2^2)} L^{-1} \left[ \frac{1}{p^2} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] * L[f] \right], \quad (2.3.61)$$

где свертка осуществляется по пространственным переменным.

Введем теперь обобщенную функцию, определяемую следующей функцией:

$$\begin{aligned}
 f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_i}\right) &= L^{-1}\left[\frac{1}{p^2} K_0\left(p \frac{r}{c_i}\right)\right] = \\
 &= \theta(c_i t - r) \left[ t \ln\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_i^2}}\right) - \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_i^2}} \right] = \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{r}{c_i}, \\ t \ln\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_i^2}}\right) - \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_i^2}} & \text{при } t > \frac{r}{c_i}. \end{cases} \quad (i=1, 2),
 \end{aligned}
 \tag{2.3.62}$$

Тогда фундаментальное решение, соответствующее уравнению (2.3.56), можно записать в виде

$$E(x, y; t) = \frac{c_1^2 c_2^2}{2\pi(c_1^2 - c_2^2)} \left[ f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_1}\right) - f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) \right]. \tag{2.3.63}$$

### 2.3.2.3. Уравнения параболического типа

Ниже будет рассмотрено следующее *уравнение параболического типа*:

$$\underline{\Omega}_a u(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0, \tag{2.3.64}$$

где  $\underline{\Omega}_a$  — оператор Николеску в пространстве  $R^n \times R$ ,

$$\underline{\Omega}_a = \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.3.65}$$

Если  $u(x; t)$  представляет собой перепад температуры, то коэффициент  $a$  характеризует *температуропроводность* и имеет вид

$$a = \frac{\lambda}{c\gamma}, \tag{2.3.66}$$

где  $c$  — теплоемкость,  $\gamma$  — плотность, а  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. В этом случае параболическое уравнение является *уравнением Фурье распространения тепла в твердом теле* при отсутствии источников тепла.



Рассмотрим при  $n=1$  оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.3.67)$$

и найдем решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = \delta(x) \times \delta(t) = \delta(x; t). \quad (2.3.68)$$

Применим преобразование Лапласа относительно переменной  $t$  и преобразование Фурье относительно переменной  $x$ . Используя новые комплексные переменные  $p$  и  $\alpha$ , получаем

$$-\alpha^2 L[F[u]] - \frac{p}{a} L[F[u]] = 1(\alpha) \times 1(p) = 1,$$

откуда

$$L[F[u]] = -\frac{a}{p + a\alpha^2}.$$

Применив теперь обратное преобразование Лапласа, получим

$$F[u(x; t)] = -a\theta(t)e^{-a\alpha^2 t};$$

применив обратное преобразование Фурье, будем иметь

$$E(x; t) = -\frac{\theta(t)\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad (2.3.69)$$

Если в приведенном выше уравнении  $a < 0$ , то оно носит название обратного уравнения теплопроводности, а если  $a$  — чисто мнимое число, то получается уравнение Шредингера квантовой механики для материальной точки (частицы), находящейся в поле консервативных сил.

В случае  $n=2$  фундаментальное решение имеет вид

$$E(x, y; t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi t} e^{-\frac{r^2}{4at}}, \quad (2.3.70)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а для случая  $n=3$  можно написать

$$E(x, y, z; t) = -\frac{\theta(t)}{8\pi t \sqrt{\pi a t}} e^{-\frac{R^2}{4at}}, \quad (2.3.71)$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

### 2.3.2.4. Уравнения эллиптического типа

Рассмотрим уравнение Пуассона эллиптического типа

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.3.72)$$

определенное на  $R^n$ , где  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — фиксированная обобщенная функция.

В случае  $n=3$  получаем уравнение

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z). \quad (2.3.73)$$

Рассмотрим также обобщенное уравнение Пуассона<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \Delta E(x, y, z) - k^2 E(x, y, z) &= \delta(x, y, z) = \\ &= \delta(x) \times \delta(y) \times \delta(z), \quad k = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.3.74)$$

где в правую часть введены обобщенные функции Дирака. Применяв преобразование Фурье относительно всех трех переменных, получим

$$-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) F[E(x, y, z)] - k^2 F[E(x, y, z)] = 1,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — новые комплексные переменные. Следовательно,

$$F[E(x, y, z)] = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + k^2}.$$

Заметим, что

$$F^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + k^2} \right] = \frac{1}{4\pi R} e^{-kR}, \quad (2.3.75)$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Поэтому фундаментальное решение уравнения (2.3.74) имеет вид

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} e^{-kR}. \quad (2.3.76)$$

<sup>1)</sup> В отечественной литературе такое уравнение известно под названием неоднородного уравнения Гельмгольца. — *Прим. ред.*

В частном случае  $k=0$  получаем следующее фундаментальное решение уравнения Пуассона (2.3.73):

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R}. \quad (2.3.77)$$

Заменяя  $k$  на  $-k$ , получим сопряженное фундаментальное решение уравнения (2.3.74):

$$\bar{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} e^{kR}. \quad (2.3.76')$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ch} kR = \frac{1}{2} (e^{kR} + e^{-kR}), \quad (2.3.78)$$

находим и следующее фундаментальное решение:

$$\mathcal{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} \operatorname{ch} kR. \quad (2.3.76'')$$

С помощью соотношения

$$\operatorname{sh} kR = \frac{1}{2} (e^{kR} - e^{-kR}) \quad (2.3.78')$$

получаем для однородного уравнения

$$\Delta u(x, y, z) - k^2 u(x, y, z) = 0 \quad (2.3.79)$$

следующий интеграл:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{R} \operatorname{sh} kR. \quad (2.3.80)$$

Заменяя  $k$  на  $\pm ik$ , где  $i$  — мнимая единица, находим комплексно сопряженные фундаментальные решения

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} e^{-ikR}, \quad (2.3.81)$$

$$\bar{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} e^{ikR}, \quad (2.3.81')$$

соответствующие уравнению

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad k = \text{const}, \quad (2.3.82)$$

где  $f(x, y, z)$  — заданная обобщенная функция.

Используя соотношение

$$\cos kR = \frac{1}{2} (e^{ikR} + e^{-ikR}), \quad (2.3.83)$$

находим также фундаментальное решение

$$\mathcal{G}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} \cos kR. \quad (2.3.81'')$$

Аналогично с помощью соотношения

$$\sin kR = \frac{1}{2i} (e^{ikR} - e^{-ikR}) \quad (2.3.83')$$

находим для *однородного уравнения Гельмгольца*

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0 \quad (2.3.84)$$

следующий интеграл:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{R} \sin kR. \quad (2.3.85)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\Delta \Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (2.3.86)$$

где  $f(x, y, z)$  — заданная обобщенная функция. Чтобы найти соответствующее фундаментальное решение, используем соотношение

$$\Delta(gh) = h\Delta g + g\Delta h + 2\left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z}\right), \quad (2.3.87)$$

где  $g(x, y, z) = g$  — бесконечно дифференцируемая функция, а  $h(x, y, z) = h$  — обобщенная функция. Пусть  $g$  — фундаментальное решение уравнения Пуассона

$$g = -\frac{1}{4\pi R}, \quad \Delta g = \delta(x, y, z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{2} R^2 g\right) &= \frac{1}{2} g \Delta(R^2) + \frac{1}{2} R^2 \Delta g + \\ &+ \frac{\partial(R^2)}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial(R^2)}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial(R^2)}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial (R^2)}{\partial x} = 2x, \quad \Delta (R^2) = 6, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{x}{R^3}. \quad (2.3.88)$$

Отсюда, учитывая, что

$$R^2 \delta(x, y, z) = 0, \quad (2.3.89)$$

получаем

$$\Delta \left( \frac{1}{2} R^2 g \right) = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Таким образом,

$$\Delta \Delta \left( \frac{1}{2} R^2 g \right) = \delta(x, y, z).$$

Итак, получено следующее фундаментальное решение уравнения (2.3.86):

$$E(x, y, z) = -\frac{R}{8\pi}. \quad (2.3.90)$$

Для случая двух пространственных переменных с помощью формулы (1.4.36) можно получить для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (2.3.91)$$

где  $f(x, y)$  — заданная обобщенная функция, следующее фундаментальное решение:

$$E(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \quad (2.3.92)$$

Заметим, что

$$\Delta (gh) = h\Delta g + g\Delta h + 2 \left( \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (2.3.87')$$

где  $g(x, y)$  — бесконечно дифференцируемая функция, а  $h(x, y)$  — обобщенная функция. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{1}{4} r^2 g \right) &= \frac{1}{4} g \Delta (r^2) + \frac{1}{4} r^2 \Delta g + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (r^2)}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial (r^2)}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

где

$$g = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad \Delta g = \delta(x, y).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2x, \quad \Delta(r^2) = 4, \quad \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^2}. \quad (2.3.88')$$

Отсюда, учитывая, что

$$r^2 \delta(x, y) = 0, \quad (2.3.89')$$

получаем

$$\Delta \left( \frac{1}{4} r^2 g \right) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \ln \frac{1}{r} \right);$$

поэтому

$$\Delta \Delta \left( \frac{1}{4} r^2 g \right) = \delta(x, y).$$

Таким образом, находим следующее фундаментальное решение:

$$E(x, y) = -\frac{1}{8\pi} r^2 \ln \frac{1}{r}, \quad (2.3.93)$$

соответствующее уравнению

$$\Delta \Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (2.3.94)$$

где  $f(x, y)$  — заданная обобщенная функция.

### 2.3.2.5. Задача Коши

Рассмотрим следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} P \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x; t) &= f(x; t), \quad f(x; t) \in K'(R^{n+1}), \\ x &\in R^n, \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

для которого нужно найти решение  $u(x; t) \in K'(R^{n+1})$ .  
Фундаментальное решение  $\bar{E}(x; t)$  соответствует опера-

тору  $P(\partial/\partial x; \partial/\partial t)$  и удовлетворяет уравнению

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right)E(x; t) = \delta(x; t). \quad (2.3.96)$$

Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x; t) = 0 \quad (2.3.97)$$

порядка  $m$  относительно переменной  $t$ .

**Определение 2.3.5.** Назовем *задачей Коши* для уравнения (2.3.97) задачу, в которой нужно определить обобщенную функцию  $u(x; t) \in K'(R^{n+1})$ , удовлетворяющую этому уравнению, а также следующим начальным условиям ( $t=0$ ):

$$\begin{aligned} u(x; +0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x; +0) = \\ &= u_1(x), \dots, \quad \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(x; +0) = u_{m-1}(x), \end{aligned} \quad (2.3.98)$$

где  $u_0(x), u_1(x), \dots, u_{m-1}(x)$  — некоторые заданные обобщенные функции.

**Определение 2.3.6.** Назовем *фундаментальным решением* задачи Коши, соответствующей уравнению (2.3.97), обобщенную функцию  $E(x; t)$ , удовлетворяющую этому уравнению и следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} E(x; +0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} E(x; +0) = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} E(x; +0) = \\ &= 0, \quad \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} E(x; +0) = \delta(x). \end{aligned} \quad (2.3.99)$$

**Теорема 2.3.2.** Пусть обобщенная функция  $E(x; t)$  такова, что свертка  $E(x; t) * u_{m-1}(x)$  имеет смысл. Тогда решение задачи Коши для уравнения (2.3.97) с начальными условиями

$$u(x; +0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x; +0) = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} u(x; +0) = 0, \quad (2.3.100)$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(x; +0) = u_{m-1}(x)$$

имеет вид

$$u(x; t) = E(x; t) * u_{m-1}(x). \quad (2.3.101)$$

Действительно, можно написать

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x; t) = \\ & = P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) E(x; t) * u_{m-1}(x) = 0; \end{aligned}$$

соотношение (2.3.97), таким образом, выполнено. Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x; t) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} [E(x; t) * u_{m-1}(x)] = \\ &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} E(x; t) * u_{m-1}(x) \quad (k=0, 1, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношения (2.3.99), можно заметить, что выполнены начальные условия (2.3.100).

Последовательным применением описанного выше метода можно решить задачу Коши для уравнения (2.3.97) с начальными условиями (2.3.98). Заметим, что, вообще говоря, можно выбрать начальный момент  $t = t_0 \neq 0$ , при этом задача существенно не меняется.

Для решения задачи Коши рассмотрим функцию

$$\bar{u}(x; t) = \theta(t) u(x; t), \quad (2.3.102)$$

а также соответствующую регулярную обобщенную функцию. Учитывая формулу (1.2.32), связывающую производную в смысле теории обобщенных функций с производной в обычном смысле и используя начальные условия (2.3.98), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x; t) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x; t) + u_0(x) \delta(t),$$



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u}(x; t) = \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial t^2} \bar{u}(x; t) + u_1(x) \delta(t) + u_0(x) \dot{\delta}(t),$$

..... (2.3.103)

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \bar{u}(x; t) = \frac{\tilde{\partial}^m}{\partial t^m} \bar{u}(x; t) + u_{m-1}(x) \delta(t) +$$

$$+ u_{m-2}(x) \dot{\delta}(t) + \dots + u_1(x) \delta^{(m-2)}(t) + u_0(x) \delta^{(m-1)}(t).$$

Заметим, что производные в обычном смысле по  $t$  функции  $\bar{u}(x; t)$  равны соответствующим производным функции  $u(x; t)$  при  $t > 0$ . Поэтому уравнение (2.3.97) принимает вид

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{u}(x; t) = g(x; t), \quad (2.3.104)$$

где  $g(x; t)$  — заданная обобщенная функция, включающая начальные условия. В этом случае назовем фундаментальным решением уравнения (2.3.104) обобщенную функцию  $E(x; t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) E(x; t) = \delta(x; t). \quad (2.3.105)$$

Тогда решение задачи Коши принимает вид

$$\bar{u}(x; t) = E(x; t) * g(x; t), \quad (2.3.106)$$

где свертка осуществляется по всем  $n+1$  переменным. Этот способ определения фундаментального решения в случае задачи Коши является, очевидно, эквивалентным описанному выше.

Рассмотрим, например, следующее уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} = f(x; t) \quad (2.3.107)$$

с начальными условиями

$$u(x; +0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x; +0) = u_1(x), \quad (2.3.108)$$

где  $f(x; t)$  — непрерывная при  $t \geq 0$  функция, а  $u_0(x) \in C^1(R)$ ,  $u_1(x) \in C^0(R)$ . Введем следующие функции:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x; t) &= \theta(t) u(x; t), \\ \bar{f}(x; t) &= \theta(t) f(x; t).\end{aligned}\tag{2.3.109}$$

Тогда уравнение (2.3.107) записывается в виде

$$\frac{\tilde{\partial}^2 \bar{u}(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\tilde{\partial}^2 \bar{u}(x; t)}{\partial t^2} = \bar{f}(x; t), \tag{2.3.107'}$$

где производные вычисляются в обычном смысле. Начальные условия (2.3.108) принимают вид

$$\bar{u}(x; +0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x; +0) = u_1(x), \tag{2.3.108'}$$

где скачки функций  $\bar{u}(x; t)$  и  $\tilde{\partial}/\partial t \bar{u}(x; t)$  вычисляются в начальный момент  $t=0$ . Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x; t) &= \frac{\tilde{\partial}}{\partial t} \bar{u}(x; t) + u_0(x) \delta(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u}(x; t) &= \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial t^2} \bar{u}(x; t) + u_1(x) \delta(t) + u_0(x) \dot{\delta}(t).\end{aligned}\tag{2.3.110}$$

Из условий, которым удовлетворяют функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$ , следует, что произведения  $u_0(x) \delta(t)$ ,  $u_0(x) \dot{\delta}(t)$  и  $u_1(x) \delta(t)$  имеют смысл. Подставим в уравнение (2.3.107') полученные выражения для производных. Тогда уравнение (2.3.107) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{u}(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}(x; t)}{\partial t^2} &= \\ &= \tilde{f}(x; t) - \frac{1}{a^2} [u_1(x) \delta(t) + u_0(x) \dot{\delta}(t)].\end{aligned}\tag{2.3.107''}$$

Это уравнение содержит начальные условия поставленной задачи Коши.

Если  $u_0(x), u_1(x) \in K'(R)$ , то уравнение (2.3.107'') принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{u}(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}(x; t)}{\partial t^2} &= \bar{f}(x; t) - \\ &- \frac{1}{a^2} [u_1(x) \times \delta(t) + u_0(x) \times \dot{\delta}(t)],\end{aligned}\tag{2.3.107'''}$$

где введено прямое произведение двух обобщенных функций. Таким образом, решение задачи Коши в обобщенных функциях будет решением уравнения (2.3.107''').

Заметим теперь, что фундаментальное решение, соответствующее оператору (2.3.34), дается соотношением (2.3.36). Поэтому решение уравнения (2.3.107''') можно записать в виде

$$\bar{u}(x; t) = -\frac{a}{2} \theta(t) \theta(at - |x|) * \left[ \bar{f}(x; t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a^2} u_1(x) \times \delta(t) - \frac{1}{a^2} u_0(x) \times \dot{\delta}(t) \right], \quad a > 0. \quad (2.3.111)$$

Если  $g(x) \in K'(R^n)$ , а  $h(x; t) \in K'(R^{n+1})$ , то можно показать, что

$$h(x; t) * [g(x) \times \delta^{(k)}(t)] = \\ = \frac{\partial^k}{\partial t^k} h(x; t) * g(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3.112)$$

при  $\text{supp } h(x; t) \subset \{x^2 - a^2 t^2 \leq 0, t \geq 0\}$ .

Таким образом, решение (2.3.111) принимает вид

$$u(x; t) = -\frac{a}{2} \theta(at - |x|) * \bar{f}(x; t) + \\ + \frac{1}{2a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \theta(at - |x|) * u_0(x) + \right. \\ \left. + \theta(at - |x|) * u_1(x) \right], \quad a > 0, t \geq 0. \quad (2.3.111')$$

Если  $f(x; t) \in C^0$ ,  $u_0(x) \in C^1$  и  $u_1(x) \in C^0$ , то решение задачи Коши, соответствующей уравнению (2.3.107), определяется следующей формулой Даламбера:

$$u(x; t) = -\frac{a}{2} \int_0^{t-x+a(t-\tau)} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi; \tau) d\xi d\tau + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]. \quad (2.3.111'')$$

### 2.3.2.6. Одна ассоциированная задача

Между фундаментальным решением оператора  $P(\partial/\partial x; \partial/\partial t)$  и фундаментальным решением задачи Коши для некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных существует тесная связь. Рассмотрим, например, следующее уравнение первого порядка относительно переменной  $t$ :

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x; t) = 0, \quad x \in R^n. \quad (2.3.113)$$

**Теорема 2.3.3.** Пусть  $E(x; t)$  — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения (2.3.113); тогда следующая обобщенная функция:

$$\bar{E}(x; t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ E(x; t) & \text{при } t \geq 0 \end{cases} = \theta(t)E(x; t) \quad (2.3.114)$$

также является фундаментальным решением этого уравнения.

Действительно, можно написать

$$\frac{\partial E(x; t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x; t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.3.115)$$

$$E(x; 0) = \delta(x). \quad (2.3.115')$$

Применив преобразование Фурье относительно пространственных переменных, получаем

$$\frac{d\tilde{E}(\alpha; t)}{dt} - P(-i\alpha)\tilde{E}(\alpha; t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\tilde{E}(\alpha; 0) = 1,$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — новые комплексные переменные. Но  $E(x; t) = \bar{E}(x; t)$  при  $t \geq 0$ , поэтому

$$\frac{d\tilde{\tilde{E}}(\alpha; t)}{dt} - P(-i\alpha)\tilde{\tilde{E}}(\alpha; t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\tilde{\tilde{E}}(\alpha; 0) = 1,$$

где дифференцирование по времени проводится в обыч-

ном смысле. Заметим, что это уравнение справедливо и при  $t < 0$ . Далее, поскольку  $\tilde{E}(\alpha; 0)$  — скачок  $\tilde{E}(\alpha; t)$  в момент  $t=0$ , то между производной в обычном смысле и производной в смысле теории обобщенных функций справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(\alpha; t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \tilde{E}(\alpha; t) + \delta(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(\alpha; t) - P(-i\alpha) \tilde{E}(\alpha; t) = \delta(t).$$

Применив преобразование Фурье по времени, получим

$$-ip\tilde{E}(\alpha; p) - P(-i\alpha)\tilde{E}(\alpha; p) = 1,$$

где  $p$  — новая комплексная переменная. Заметим теперь, что это не что иное, как преобразование Фурье относительно всех переменных уравнения

$$\frac{\partial \bar{E}(x; t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{E}(x; t) = \delta(x; t). \quad (2.3.116)$$

Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим, в частности, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in R. \quad (2.3.117)$$

Соответствующая задача Коши состоит в отыскании обобщенной функции  $u(x; t)$ , удовлетворяющей этому уравнению, а также начальному условию

$$u(x; 0) = u_0(x), \quad (2.3.118)$$

где  $u_0(x)$  — заданная обобщенная функция. Фундаментальное решение дано формулой (2.3.69). Согласно теореме 2.3.3, фундаментальное решение задачи Коши дается следующей формулой:

$$E(x; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}, \quad t > 0. \quad (2.3.119)$$

Таким образом, это решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial E(x; t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 E(x; t)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad (2.3.120)$$

и начальному условию

$$E(x; 0) = \delta(x). \quad (2.3.120')$$

Следовательно, если считать переменную  $t$  параметром, то  $E(x; t)$  образует дельтообразную последовательность. Действительно, используя интеграл Пуассона (1.3.31), нетрудно проверить справедливость соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x; t) dx = 1.$$

Решение задачи Коши для уравнения (2.3.117) с начальным условием (2.3.118) дается формулой

$$u(x; t) = E(x; t) * u_0(x), \quad t > 0. \quad (2.3.121)$$

Если  $u_0(x)$  — обобщенная функция с компактным носителем, то свертка имеет смысл. Аналогично, если  $u_0(x)$  — ограниченная или интегрируемая функция на  $R$ , то

$$u(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x - \xi; t) u(\xi) d\xi, \quad t > 0.$$

Можно сформулировать аналог теоремы 2.3.3 в случае, когда появляются производные высших порядков по времени. Проиллюстрируем вышеизложенное на волновом уравнении (2.3.31) в  $R^n$ . Фундаментальное решение  $E(x; t)$  задачи Коши, соответствующей этому уравнению, удовлетворяет соотношениям

$$\square_a E(x; t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.3.122)$$

$$E(x; 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} E(x; 0) = \delta(x). \quad (2.3.122')$$

**Теорема 2.3.4.** Пусть  $E(x, t)$  — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения (2.3.31). Тогда существ-

вует фундаментальное решение вида (2.3.114), удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{E}(x; t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta \bar{E}(x; t) = \delta(x; t). \quad (2.3.123)$$

Применим преобразование Фурье по пространственным переменным к соотношениям (2.3.122). Тогда

$$\alpha^2 \tilde{E}(\alpha; t) + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \tilde{E}(\alpha; t)}{dt^2} = 0, \quad t > 0,$$

$$\tilde{E}(\alpha; 0) = 0, \quad \frac{d\tilde{E}(\alpha; 0)}{dt} = 1,$$

где  $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2$ . С учетом соотношения (2.3.114) получаем уравнение, справедливое при  $t > 0$  и  $t < 0$ :

$$\alpha^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; t) + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; t)}{dt^2} = 0,$$

где дифференцирование проводится в обычном смысле. Имеем также

$$\tilde{\tilde{E}}(\alpha; 0) = 0, \quad \frac{d}{dt} \tilde{\tilde{E}}(\alpha; 0) = 1,$$

поэтому можно написать следующие соотношения между производными в обычном смысле и производными в смысле теории обобщенных функций

$$\frac{d\tilde{\tilde{E}}(\alpha; t)}{dt} = \frac{\tilde{d}\tilde{\tilde{E}}(\alpha; t)}{dt},$$

$$\frac{d^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; t)}{dt^2} = \frac{\tilde{d}^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; t)}{dt^2} + \delta(t).$$

Таким образом, выполняется соотношение

$$\frac{d^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; t)}{dt^2} + a^2 \alpha^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; t) = \delta(t),$$

откуда, применяя преобразование Фурье относительно времени, получаем

$$(-ip)^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; p) + a^2 \alpha^2 \tilde{\tilde{E}}(\alpha; p) = 1.$$

Мы пришли, таким образом, к преобразованию Фурье уравнения (2.3.123), и, следовательно, теорема доказана.

Обобщенная функция

$$u(x; t) = E(x; t) * u_1(x), \quad x \in R^n, \quad t > 0, \quad (2.3.124)$$

является, таким образом, решением задачи Коши для уравнения (2.3.31) с начальными условиями

$$u(x; 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x; 0) = u_1(x), \quad (2.3.125)$$

где  $u_1(x)$  — заданная обобщенная функция, а свертка проводится по пространственной переменной  $x$  (время  $t$  рассматривается как параметр).

В частности, при  $n=1$  получаем уравнение *колебания струны*

$$\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in R, \quad t > 0. \quad (2.3.126)$$

Фундаментальное решение этого уравнения дается формулой

$$\bar{E}(x; t) = \frac{1}{2a} \theta(t) \theta(at - |x|). \quad (2.3.127)$$

Следовательно, согласно доказанной теореме, фундаментальное решение задачи Коши имеет вид

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{при } |x| \leq at, \\ 0 & \text{при } |x| > at, \end{cases} \quad t > 0. \quad (2.3.127')$$

Следовательно, решение уравнения (2.3.126) с начальными условиями (2.3.125) дается сверткой

$$u(x; t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) * u_1(x), \quad t > 0. \quad (2.3.128)$$

Поскольку  $E(x; t)$  является обобщенной функцией с компактным носителем, то эта свертка имеет смысл для



любой обобщенной функции  $u_1(x)$ . Если  $u_1(x)$  — непрерывная функция, то можно написать:

$$u(x; t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(x-\xi) d\xi. \quad (2.3.129)$$

Рассмотрим задачу Коши с начальными условиями (2.3.108). Уравнение

$$\frac{\partial^2 v_1(x; t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_1(x; t)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad (2.3.130)$$

с начальными условиями

$$v_1(x; 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} v_1(x; 0) = u_0(x) \quad (2.3.130')$$

имеет, согласно полученному результату, следующее решение:

$$v_1(x; t) = \frac{1}{2a} \int_{a-xt}^{x+at} u_0(\xi) d\xi. \quad (2.3.131)$$

Дифференцируя это уравнение по  $t$ , находим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial v_1(x; t)}{\partial t} \right] - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial v_1(x; t)}{\partial t} \right] = 0.$$

Следовательно, производная  $v_2(x; t) = \partial v_1(x; t) / \partial t$  удовлетворяет уравнению колебания струны и условию  $v_2(x; 0) = u_0(x)$ .

Применив формулу дифференцирования по параметру

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x; t) dx &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x; t)}{\partial t} dx + \\ &+ f(b; t) \frac{db(t)}{dt} - f(a; t) \frac{da(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.3.132)$$

в предположении, что  $u_0(x) \in C^1$ , получаем

$$x_2(x; t) = \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_2(x; t) = 0. \quad (2.3.131')$$

Суперпозиция решения  $v_2(x; t)$  и решения (2.3.129) приводит вновь к формуле Даламбера (2.3.111''), соответствующей задаче Коши с начальными условиями (2.3.108).

### 2.3.3. Функции Грина. Обобщенные функции Грина

#### 2.3.3.1. Общие результаты

Решение многочисленных задач математической физики тесно связано с построением так называемых *функций Грина*, с помощью которых решение краевых задач можно найти непосредственно квадратурами. Заметим, что функцию Грина можно получить, используя фундаментальное решение в смысле теории обобщенных функций. Если фундаментальное решение является обобщенной функцией, то соответствующая *функция Грина будет обобщенной функцией*.

Рассмотрим, например, линейное дифференциальное уравнение вида (2.1.29) с постоянными коэффициентами, где  $f(x)$  — функция, интегрируемая на интервале  $[0, \infty)$ . Частное фундаментальное решение удовлетворяет уравнению (2.1.30) Произведем сдвиг начала координат в точку  $\xi$ . Тогда соответствующая обобщенная функция будет удовлетворять уравнению

$$P \left( \frac{d}{dx} \right) E_+(x - \xi) = \delta(x - \xi) \quad x, \xi \in R. \quad (2.3.133)$$

Таким образом получили обобщенную функцию Грина для уравнения (2.1.29) с постоянными коэффициентами:

$$G_+(x; \xi) = E_+(x - \xi), \quad x, \xi \in R. \quad (2.3.134)$$

Предположим, что эта обобщенная функция Грина определена. Тогда решение уравнения (2.1.29) выражается в виде (2.1.31), т. е.

$$y(x) = \int_0^x E_+(x - \xi) f(\xi) d\xi = \int_0^x G_+(x; \xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.3.135)$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения (2.1.29) получено. Прибавляя к этому решению общее решение соответствующего однородного уравнения, получаем общее решение уравнений (2.1.29). Аналогичный метод был использован в разд. 2.1.1.4.

Упомянутая выше обобщенная функция Грина была определена с помощью частного фундаментального решения уравнения (2.1.31). Можно, однако, определить обобщенную функцию Грина для уравнения (2.1.29) и другим путем. Эта функция должна являться также решением уравнения

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)G(x; \xi) = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in R, \quad (2.3.133')$$

и включать в себя частную обобщенную функцию Грина, соответствующую уравнению (2.3.133). Более того, обобщенная функция Грина  $G_+(x; \xi)$  является *сингулярной частью* обобщенной функции Грина  $G(x; \xi)$ . Вторая, *несингулярная*, часть этой обобщенной функции является общим решением однородного уравнения (2.1.32). Пусть  $E_0(x)$  — общее решение уравнения (2.1.32). Тогда обобщенная функция Грина выражается соотношением

$$G(x; \xi) = E_0(x) + G_+(x; \xi). \quad (2.3.136)$$

Очевидно, что сингулярная часть  $G_+(x; \xi)$  является *существенной* частью обобщенной функции Грина  $G(x; \xi)$ .

### 2.3.3.2. Применения

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}(x) = f(x), \quad (2.3.137)$$

где  $f(x)$  — регулярная обобщенная функция. Заметим, что частное фундаментальное решение имеет вид (2.1.34), поэтому частная обобщенная функция Грина определяется соотношением

$$G_+(x, \xi) = \frac{1}{(n-1)!} (x - \xi)^{n-1}, \quad x \geq \xi. \quad (2.3.138)$$

Она является решением уравнения

$$y^{(n)}(x) = \delta(x - \xi), \quad x \geq \xi, \quad (2.3.139)$$

где  $\xi$  — параметр.

Решение исходной задачи записывается в виде

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi, \quad x \geq 0. \quad (2.3.140)$$

Оно соответствует однородным начальным условиям типа Коши

$$y^{(k)}(0) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.3.141)$$

Можно также написать

$$G_+(x; \xi) = \frac{1}{(n-1)!} \theta(x-\xi) (x-\xi)^{n-1}, \quad x, \xi \in R. \quad (2.3.138')$$

Тогда решение (2.3.140) принимает вид

$$y(x) = \frac{\theta(x)}{(n-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi, \quad x \in R. \quad (2.3.140')$$

В случае неоднородных начальных условий Коши

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad y''(0) = y_2, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \quad (2.3.141')$$

решение задачи дается формулой

$$y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + y_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi, \quad x \geq 0. \quad (2.3.142)$$

Можно также написать

$$y_-(x) = y_0 \theta(x) + y_1 x_+ + \frac{1}{2!} y_2 x_+^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} y_{n-1} x_+^{n-1} +$$

$$+ \frac{\theta(x)}{(n-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi, \quad x \in R. \quad (2.3.142')$$

Аналогично можно рассмотреть и дифференциальные уравнения в частных производных. Например, в случае обобщенного уравнения Пуассона (2.3.74) обобщенная функция Грина дается формулой

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi\rho} e^{-k\rho}, \quad (2.3.143)$$

где

$$\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \quad (2.3.144)$$

В частности, при  $k=0$  получается обобщенная функция Грина для уравнения Пуассона (2.3.73):

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi\rho}. \quad (2.3.145)$$

Предположим теперь, что  $f(x, y, z)$  — функция, интегрируемая в  $R^3$ . Тогда можно написать

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.3.146)$$

Предположим, что уравнения (2.3.73) и (2.3.74) рассматриваются в пространстве обобщенных функций, а  $f(x, y, z)$  — обобщенная функция с компактным носителем. Тогда решение этих уравнений записывается в виде

$$u(x, y, z) = E(x, y, z) * f(x, y, z), \quad (2.3.147)$$

где  $E(x, y, z)$  — обобщенная функция, определяемая соотношениями (2.3.76) или (2.3.77) соответственно, а свертка рассматривается в пространстве обобщенных функций.

Отметим, что сдвиг

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = E(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \quad (2.3.148)$$

позволяет получить обобщенную функцию Грина из фундаментального решения в смысле теории обобщенных функций.

## Представление некоторых механических и физических величин обобщенными функциями

### 3.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ВЕКТОРОВ ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

*Связанный вектор* является математическим объектом, который характеризуется *направлением, величиной (модулем) и точкой приложения*. Связанный вектор представляется в пространстве  $E_3$  направленным отрезком. Приложенный в точке связанный вектор может быть представлен через некоторую сингулярную обобщенную функцию, в частности через обобщенную функцию Дирака.

#### 3.1.1. Представление связанного вектора

##### 3.1.1.1. Частный случай

На отрезке  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ , рассматривается векторное поле  $V_a(x)$ , перпендикулярное оси  $Ox$  и направленное в положительном направлении оси  $Oy$ . В предположении, что на этом отрезке рассматриваемые векторы имеют величину  $P/2a$  (фиг. 3.1,  $a$ ) и распределены равномерно, можно написать

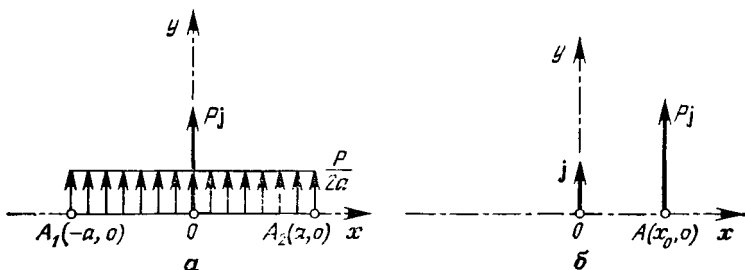
$$V_a(x) = \begin{cases} \frac{P}{2a} & \text{при } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{при } x \notin [-a, a]. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Используя дельтообразную последовательность, образованную функциями  $h_a(x)$ , определяемыми формулой (1.2.91), можно представить величину рассматриваемого

векторного поля следующим образом:

$$V_a(x) = Ph_a(x). \quad (3.1.1')$$

Заметим, что при  $a \rightarrow +0$  длина отрезка  $[-a, a]$  стремится к нулю, а величина  $P/2a$  стремится к бесконечности.



Фиг. 3.1.

Рассматривая предел векторного поля при  $a \rightarrow +0$  в смысле теории обобщенных функций, получаем

$$V(x) = \lim_{a \rightarrow +0} V_a(x) = P \lim_{a \rightarrow +0} h_a(x) = P\delta(x). \quad (3.1.2)$$

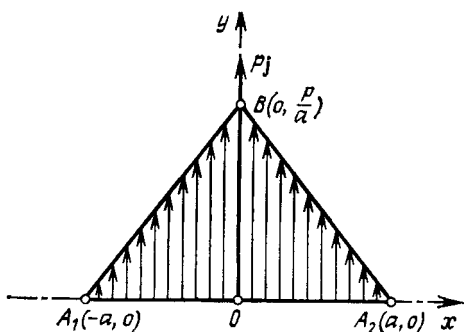
Это и есть математическое представление величины связанного вектора, который направлен в положительном направлении оси  $Oy$  перпендикулярно оси  $Ox$  и приложен в начале координат. Величина равнодействующей рассматриваемого векторного поля есть  $P$ . В векторном виде можно написать

$$\mathbf{Q}(x) = V(x) \mathbf{j} = P \mathbf{j} \delta(x), \quad (3.1.2')$$

где  $\mathbf{j}$  — орт оси  $Oy$ . Таким образом,  $\mathbf{Q}(x)$  представляет собой *векторное поле, эквивалентное связанному вектору  $P\mathbf{j}$* , приложенному в начале координат. Векторное поле  $\mathbf{Q}(x)$  можно рассматривать как *линейную плотность связанного вектора  $P\mathbf{j}$* . Если вектор  $P\mathbf{j}$  приложен в точке  $A$  с абсциссой  $x_0$  (фиг. 3.1, б), то эквивалентное векторное поле, полученное из (3.1.2') сдвигом, будет следующим:

$$\mathbf{Q}(x) = P \mathbf{j} \delta(x - x_0). \quad (3.1.3)$$

Заметим, что функция  $h_a(x)$  играет вспомогательную роль. Вместо нее можно рассматривать другую дельтообразную последовательность. В частности, можно рассматривать векторное поле  $V_a(x)$ , которое направлено вдоль положительного направления оси  $Oy$  перпендикулярно оси  $Ox$  и определяется по формуле (фиг. 3.2)



Фиг. 3.2.

$$V_a(x) = \begin{cases} \frac{P}{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right) & \text{при } x \in [-a, 0], \\ \frac{P}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{при } x \in [0, a], \quad P > 0, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Это поле распределено в равнобедренном треугольнике площадью  $P$ .

Используя формулу (1.2.115) при  $n=1/a$ , можно заметить, что функции

$$g_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right) & \text{при } x \in [-a, 0], \\ \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{при } x \in [0, a], \\ 0 & \text{при } |x| > a \end{cases} \quad (3.1.5)$$



образуют дельтообразную последовательность, такую, что

$$\lim_{a \rightarrow +0} g_a(x) = \delta(x). \quad (3.1.5')$$

Величина рассматриваемого векторного поля (3.1.4) представляется следующим образом:

$$V_a(x) = P g_a(x). \quad (3.1.4')$$

При  $a \rightarrow +0$  получаем

$$V(x) = \lim_{a \rightarrow +0} V_a(x) = P \lim_{a \rightarrow +0} g_a(x) = P \delta(x), \quad (3.1.6)$$

что совпадает с представлением (3.1.2) или (3.1.2').

### 3.1.1.2. Общий случай

Рассмотрим в ортогональной системе координат  $Oxyz$  связанный вектор  $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$ , приложенный в точке  $O$ . Пусть  $\Omega_\varepsilon$  — замкнутая область, содержащая точку  $O$ , такая, что при  $\varepsilon \rightarrow +0$  она стремится к точке  $O$ . На этой области определим векторное поле  $\mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z)$ , имеющее составляющие  $V_x f_\varepsilon(x, y, z)$ ,  $V_y g_\varepsilon(x, y, z)$ ,  $V_z h_\varepsilon(x, y, z)$ , при условии, что  $f_\varepsilon$ ,  $g_\varepsilon$  и  $h_\varepsilon$  являются дельтообразными последовательностями, т. е.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon(x, y, z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g_\varepsilon(x, y, z) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} h_\varepsilon(x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Переходя к пределу в смысле теории обобщенных функций, получим векторное поле, эквивалентное связанному вектору  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q}(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z) = \\ &= V_x \mathbf{i} \delta(x, y, z) + V_y \mathbf{j} \delta(x, y, z) + V_z \mathbf{k} \delta(x, y, z) = \\ &= \mathbf{V} \delta(x, y, z) = \mathbf{V} \delta(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты осей координат, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $(x, y, z)$ . Векторное поле  $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$  можно рассматривать как *объемную плотность* связанного вектора  $\mathbf{V}$ . Ес-

ли связанный вектор  $\mathbf{V}$  приложен в точке  $A$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ , то эквивалентное векторное поле имеет вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \mathbf{V}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.1.9)$$

Для представления связанного вектора  $\mathbf{V}$  может быть использована произвольная дельтообразная последовательность, так как на окончательный результат влияет не конкретная форма этой последовательности, а ее свойства. Пусть дана функция

$$f_\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} & \text{при } r < \varepsilon, \\ 0 & \text{при } r > \varepsilon, \end{cases} \quad (3.1.10)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Носителем этой функции является шар  $\Omega_\varepsilon$  радиуса  $r = \varepsilon$  с центром в начале координат. Функции  $f_\varepsilon(x, y, z)$  образуют дельтообразную последовательность, такую, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon(x, y, z) = \delta(x, y, z). \quad (3.1.11)$$

Действительно, для произвольной основной функции  $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$  можно написать

$$\begin{aligned} (f_\varepsilon(x, y, z), \varphi(x, y, z)) &= \int_{R^3} f_\varepsilon(x, y, z) \varphi(x, y, z) d\Omega = \\ &= \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x, y, z) d\Omega = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \Omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

где использована теорема о среднем для тройного интеграла. Таким образом, получается

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon(x, y, z), \varphi(x, y, z)) &= (\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \\ &= \varphi(0, 0, 0) = (\delta(x, y, z), \varphi(x, y, z)), \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость соотношения (3.1.11).

Рассмотрим поле параллельных векторов

$$\mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z) = \mathbf{V}f_\varepsilon(x, y, z), \quad (3.1.12)$$

определенное на шаре  $\Omega_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  и с центром в начале координат. Переходя к пределу в смысле теории обобщенных функций, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q}(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z) = \\ &= \mathbf{V} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon(x, y, z) = \mathbf{V} \delta(x, y, z) = \mathbf{V} \delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Для доказательства справедливости этого представления вычислим торсор<sup>1)</sup> в точке  $O$  рассматриваемого векторного поля. Имеем равнодействующую

$$\mathbf{R}_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{Q}_\varepsilon d\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{V} f_\varepsilon d\Omega = \mathbf{V} \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon d\Omega, \quad (3.1.14)$$

откуда при  $\varepsilon \rightarrow +0$  получаем

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}. \quad (3.1.15)$$

Результирующий момент имеет значение

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r} \times \mathbf{Q}_\varepsilon d\Omega = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r} \times \mathbf{V} d\Omega = \\ &= -\frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \mathbf{V} \times \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r} d\Omega = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.1.15')$$

где учтено, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r} d\Omega = \mathbf{0}, \quad (3.1.16)$$

так как этот интеграл определяет статический момент однородного шара  $\Omega_\varepsilon$  относительно его центра. Очевидно, что  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$  и представление (3.1.13) оправдано с точки зрения механики.

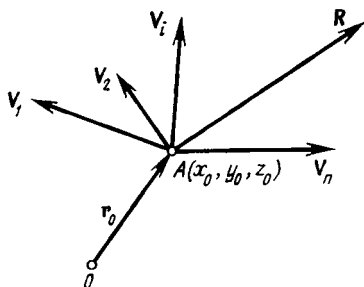
Заметим, что можно использовать любую другую дельтообразную последовательность  $f_\varepsilon$ , предполагая, что она зависит только от  $\varepsilon$  при  $|\mathbf{r}| \leq \varepsilon$ .

<sup>1</sup> В отечественной литературе торсор, т. е. совокупность вектора и момента  $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ , отнесенную к некоторой точке  $O$ , называют моторм. Мотор у которого момент  $\mathbf{M}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{Q}$ , называется винтом. (См. Диментберг Ф. М., Винтовое исчисление. изд-во «Наука», М., 1965. — Прим. ред.).

### 3.1.2. Сложение связанных векторов

Пусть  $V_1, V_2, \dots, V_n$  — система связанных векторов, приложенных в точке  $A(x_0, y_0, z_0)$  (фиг. 3.3). Эквивалентные векторные поля имеют вид

$$Q_i(\mathbf{r}) = V_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.17)$$



Фиг. 3.3.

Если ввести равнодействующий приложенный в той же точке  $A$  вектор по формуле

$$R = \sum_{i=1}^n V_i, \quad (3.1.18)$$

для эквивалентного векторного поля будем иметь выражение

$$Q(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{r}) = R \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.1.19)$$

Таким образом, свойства связанных векторов, приложенных в одной и той же точке, сохраняются и в их представлениях через обобщенные функции.

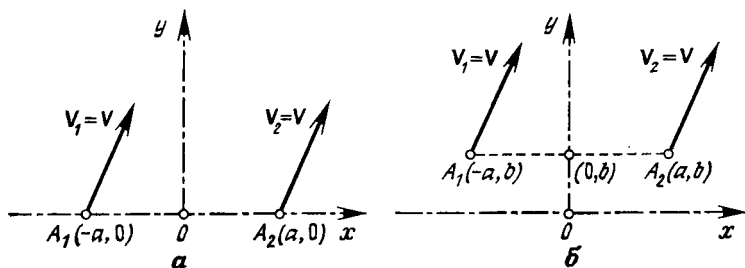
Когда точки приложения связанных векторов различны, об их сложении говорить нельзя. Однако в некоторых случаях можно привести представления через обобщенные функции системы из двух связанных векторов. Для системы  $n > 2$  векторов, приложенных в различных точках, можно попробовать сложить их, если они парал-

лельны. В противном случае можно разложить каждый вектор по трем направлениям и получить три системы, каждая из которых содержит  $n$  параллельных векторов (векторные компоненты рассматриваемых векторов).

Связанные векторы, представленные таким образом, могут быть сосредоточенными силами, импульсами и др.

### 3.1.2.1. Одинаково направленные параллельные векторы

Рассмотрим, например, два параллельных и равных между собой связанных вектора ( $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$  в смысле свободных векторов), приложенных в точках  $A_1(-a, 0)$  и  $A_2(a, 0)$ ,  $a > 0$  (фиг. 3.4, а). Этим двум векторам соответствуют эквивалентные векторные поля



Фиг. 3.4.

$$\mathbf{Q}_1(x, y) = \mathbf{V}_1 \delta(x + a, y) = \mathbf{V} \delta(x + a, y), \quad (3.1.20)$$

$$\mathbf{Q}_2(x, y) = \mathbf{V}_2 \delta(x - a, y) = \mathbf{V} \delta(x - a, y).$$

Эквивалентное векторное поле  $\mathbf{Q}(x, y)$  системы заданных связанных векторов имеет вид

$$\mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{Q}_1(x, y) + \mathbf{Q}_2(x, y) = \mathbf{V} [\delta(x + a, y) + \delta(x - a, y)]$$

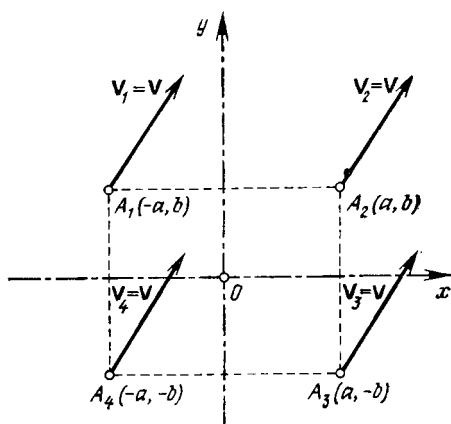
или с учетом формулы (1.2.76) получаем

$$\mathbf{Q}(x, y) = 2a\mathbf{V} \delta(x^2 - a^2, y), \quad a > 0. \quad (3.1.21)$$

Соотношение (3.1.21) может быть принято за правило сложения двух эквиполентных (равных в смысле сво-

бодных векторов) связанных векторов на плоскости  $Oxy$ , приложенных на оси  $Ox$ . То, что рассматривается плоскость  $Oxy$  и что точки приложения находятся на оси  $Ox$ , не существенно. Например, если рассматривается прямая  $y=b$ , параллельная оси  $Ox$ , получается эквивалентное векторное поле

$$\mathbf{Q}(x, y) = 2aV\delta(x^2 - a^2, y - b), \quad (3.1.21')$$



Фиг. 3.5.

соответствующее эквивалентным связанным векторам  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  (равным  $\mathbf{V}$  в смысле свободных векторов), приложенным в точках  $A_1(-a, b)$ ,  $A_2(a, b)$ ,  $a > 0$  (фиг. 3.4, б).

Заметим, что представления, полученные выше, справедливы только для случая двух связанных векторов; для двух скользящих векторов получается равнодействующая, равная  $2V$ , приложенная в точке  $(0, 0)$  или в точке  $(0, b)$ .

Пусть  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4$  — система четырех эквивалентных связанных векторов (равных  $\mathbf{V}$  в смысле свободных векторов), находящихся в плоскости  $Oxy$  и приложенных в точках  $A_1(-a, b)$ ,  $A_2(a, b)$ ,  $A_3(a, -b)$ ,  $A_4(-a, -b)$ ,  $a, b > 0$  (фиг. 3.5).

Эквивалентное векторное поле имеет вид

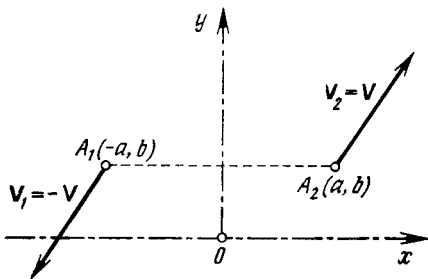
$$\mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{V} [\delta(x+a, y-b) + \delta(x-a, y-b) + \delta(x-a, y+b) + \delta(x+a, y+b)].$$

С помощью соотношения (1.2.77) получается следующая формула сложения:

$$\mathbf{Q}(x, y) = 4ab\mathbf{V}\delta(x^2 - a^2, y^2 - b^2), \quad a, b > 0. \quad (3.1.22)$$

### 3.1.2.2. Противоположно направленные параллельные векторы

Рассмотрим два противоположно направленных связанных вектора  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ , равных по величине ( $\mathbf{V}_1 = -\mathbf{V}, \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$  в смысле свободных векторов) и приложенных в точках  $A_1(-a, b)$  и  $A_2(a, b)$ ,  $a > 0$  (фиг. 3.6). Эквива-



Фиг. 3.6.

лентное векторное поле имеет вид

$$\mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{V} [-\delta(x+a, y-b) + \delta(x-a, y-b)].$$

С помощью соотношения (1.2.79') можно написать

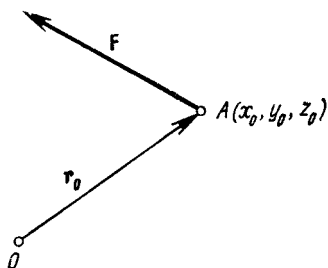
$$\mathbf{Q}(x, y) = 2a\mathbf{V}\delta(x^2 - a^2, y - b), \quad a > 0. \quad (3.1.23)$$

Это и есть формула сложения двух параллельных, противоположно направленных и равных по величине связанных векторов.

Полученное представление теряет смысл в случае двух скользящих векторов; эта система векторов образует пару, которой соответствует свободный вектор.

### 3.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК И НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАГРУЗОК ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

*Сосредоточенные нагрузки* математически могут быть смоделированы с помощью связанных векторов. Принимая во внимание изложенное в разд. 3.1.1, можно представить нагрузку, эквивалентную *сосредоточенной силе*  $\mathbf{F}$ , приложенной (фиг. 3.7) в некоторой точке  $A$  с



Фиг. 3.7.

радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ , следующим образом:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.2.1)$$

Носителем эквивалентной нагрузки  $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$  является точка  $A$ . С помощью этого представления можно получить математические выражения и для других сосредоточенных нагрузок (механических величин с точечными носителями).

Для представления непрерывно распределенных нагрузок можно использовать формулу (3.2.1) и получить результаты, свойственные этому случаю нагружения.

С помощью формулы (3.2.1) можно получить и представление периодических сосредоточенных сил. Рассмотрим, например, *периодическую сосредоточенную силу* величиной  $|\mathbf{F}|$  с периодом  $T$ , приложенную в точках  $x = nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Нагрузка, эквивалентная силе, приложенной в начале координат, имеет вид

$$\mathbf{Q}(x) = \mathbf{F} \delta(x). \quad (3.2.1')$$



Для коэффициентов разложения (3.2.1') в ряд Фурье имеем выражения

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{T} (F\tilde{\delta}(x), e^{+in\omega x}) = \frac{1}{T} F, \quad n \in Z. \quad (3.2.2)$$

Следовательно, периодическая обобщенная функция, соответствующая сосредоточенной силе (3.2.1'), имеет вид

$$\tilde{Q}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F e^{in\omega x}, \quad n \in Z, \quad (3.2.2')$$

или

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \delta(x - nT), \quad n \in Z. \quad (3.2.2'')$$

### 3.2.1. Сосредоточенные моменты

#### 3.2.1.1. Направленный сосредоточенный момент<sup>1)</sup>

В механике абсолютно твердого тела сосредоточенные силы моделируются *скользящими векторами*, а моменты представляются свободными векторами. В механике сплошных сред сосредоточенные силы моделируются *связанными векторами* и, таким образом, каждая пара сил зависит от точек приложения составляющих ее сосредоточенных сил. Мы будем рассматривать *направленный сосредоточенный момент* как сосредоточенную нагрузку, полученную предельным переходом из системы двух сосредоточенных сил.

Пусть  $A$  — фиксированная точка с радиусом-вектором  $r_0(x_0, y_0, z_0)$ , а  $B$  — подвижная точка с радиусом-вектором  $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ . Точки  $A$  и  $B$  расположены так, что орт  $u$  вектора  $\overrightarrow{AB}$  постоянный (фиг. 3.8,  $a$ ). В точках  $A$  и  $B$  действуют соответственно параллельные, противоположно направленные силы  $-F$  и  $F$ ; будем считать, что орт  $F^0$  вектора  $F$  тоже постоянный. Обозначим через

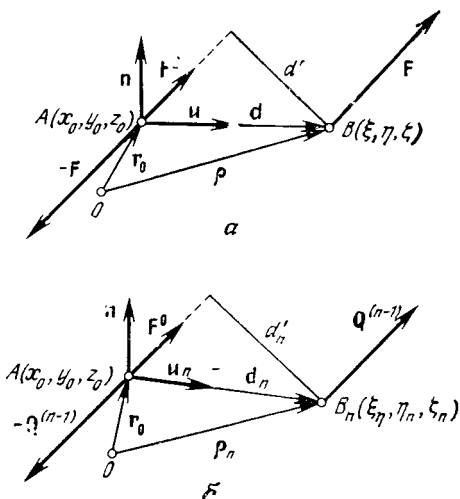
<sup>1</sup> В русской литературе такой сосредоточенный момент носит название *двойной силы с моментом*. — *Прим. ред.*

$\mathbf{d} = \vec{AB}$  плечо пары  $(-\mathbf{F}, \mathbf{F})$ . Момент рассматриваемой пары равен

$$M = Fd', \quad (3.2.3)$$

где  $d'$  — расстояние между линиями действия векторов

$$d' = d |\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0| = d \sin(\mathbf{u}, \mathbf{F}^0). \quad (3.2.3')$$



Фиг. 3.8.

**Определение 3.2.1.** *Направленным сосредоточенным моментом* называется предел в смысле теории обобщенных функций пары сосредоточенных сил  $(-\mathbf{F}, \mathbf{F})$  при стремлении плеча пары  $d$  к нулю. При этом предполагается, что точка  $A$  фиксирована, точка  $B$  подвижна, орты  $\mathbf{F}^0$ ,  $\mathbf{u}$  и момент пары  $M$  постоянные.

Чтобы получить выражение для направленного сосредоточенного момента, заметим, что действие рассматриваемых сил равносильно действию нагрузки

$$\mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{F}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.2.4)$$

Учитывая формулы (3.2.2) и (3.2.3), можно написать

$$\mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = -\frac{MF^0}{d |\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})]. \quad (3.2.4')$$

В этом случае нагрузка  $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ , соответствующая направленному сосредоточенному моменту, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) &= \lim_{d \rightarrow +0} \mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = -\frac{MF^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} \frac{\partial}{\partial u} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ &= -\frac{MF^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} \mathbf{u} \cdot \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Здесь введена *производная по направлению*  $\mathbf{u}$  обобщенной функции Дирака, которая определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \mathbf{u} \cdot \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ &= \lim_{d \rightarrow +0} \frac{1}{d} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] = \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \\ &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) + \\ &+ \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) + \\ &+ \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образованные вектором  $\mathbf{u}$  с осями координат.

Заметим, что носителем направленного сосредоточенного момента (3.2.5) является точка  $A(\mathbf{r}_0)$ , и предполагается, что орты  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{F}^0$  не коллинеарны, т. е.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0 \neq 0. \quad (3.2.7)$$

Важным частным случаем является случай, когда орты  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{F}^0$  взаимно перпендикулярны ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^0 = 0$ ). Соответ-

ствующая нагрузка имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) &= -MF^0 \frac{\partial}{\partial u} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ &= -MF^0 [\mathbf{u} \cdot \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Из соотношений (3.2.5) следует, что направленный сосредоточенный момент характеризуется:

- а) точкой приложения  $A(x_0, y_0, z_0)$ ;
- б) ортом  $\mathbf{F}^0$  сил, образующим его;
- в) ортом  $\mathbf{u}$  направления, вдоль которого осуществляется предельный переход;
- г) его величиной  $M$ .

Момент направлен по нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости действия направленного сосредоточенного момента, причем  $\mathbf{n}$  выбирался таким образом, чтобы смешанное произведение  $(\mathbf{u}, \mathbf{F}^0, \mathbf{p}) > 0$ . Направленный сосредоточенный момент, определяемый таким образом, положителен, так как для наблюдателя, расположенного вдоль орта  $\mathbf{n}$ , вращение в рассматриваемой плоскости происходит в положительном направлении.

Рассмотрим случай *периодического направленного сосредоточенного момента* с периодом  $T$ , приложенного в точках  $x = nT$ ,  $n \in Z$ . Нагрузка, эквивалентная направленному сосредоточенному моменту, приложенному в начале координат, имеет вид

$$\mathbf{Q}(x) = - \frac{MF^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} \frac{\partial}{\partial u} \delta(x). \quad (3.2.5')$$

Обозначив через  $\tilde{\mathbf{Q}}$  периодическую обобщенную функцию, соответствующую направленному сосредоточенному моменту (3.2.5'), можно написать соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}(x) &= - \frac{MF^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x - nT) = \\ &= - \frac{MF^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i n}{T^2} e^{i n \omega x}, \quad n \in Z, \end{aligned} \quad (3.2.5'')$$

где  $\mathbf{u}$  — орт оси  $Ox$ .

Направленный сосредоточенный момент является моментом первого порядка; при необходимости будем обозначать его величину и нагрузку верхним индексом 1 ( $M^{(1)}$  и  $Q^{(1)}$ ).

Исходя из направленного сосредоточенного момента порядка  $n-1$ , рассмотрим пару  $(-Q^{(n-1)}, Q^{(n-1)})$ , составляющие которой приложены соответственно в фиксированной точке  $A(r_0)$  и подвижной точке  $B_n(q_n)$ . Обозначим через  $u_n$  орт плеча  $d_n = \vec{AB}_n$  (фиг. 3.8, б). Величина рассматриваемого момента равна

$$M^{(n)} = F d'_1 d'_2 \dots d'_n, \quad (3.2.9)$$

где  $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1}$  — плечи соответствующих моментов порядка, меньшего  $n$ . Через  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) обозначим орты, определяющие направления, вдоль которых осуществляются предельные переходы к фиксированной точке  $A$ .

**Определение 3.2.2.** *Направленным сосредоточенным моментом порядка  $n$  в точке  $A(r_0)$  называется предел в смысле теории обобщенных функций пары эквивалентных нагрузок  $(-Q^{(n-1)}, Q^{(n-1)})$ , когда плечо  $d_n \rightarrow 0$ , причем точка  $A$  фиксирована, точка  $B_n$  подвижна, орты  $F^0, u_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и величина  $M^{(n)}$  момента постоянные.*

Учитывая выражение для эквивалентной нагрузки направленного сосредоточенного момента первого порядка, которое было получено ранее, запишем выражение для эквивалентной нагрузки направленного сосредоточенного момента порядка  $n$ :

$$Q^{(n)}(r) = (-1)^n \frac{M^{(n)} F^0}{\prod_{i=1}^n |u_i \times F^0|} \frac{\partial^n}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n} \delta(r - r_0), \quad (3.2.10)$$

где введена смешанная производная по направлению порядка  $n$  обобщенной функции Дирака.

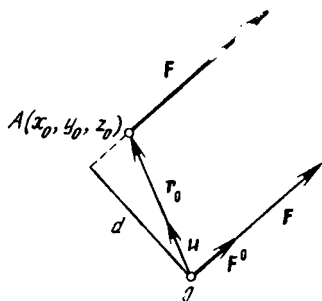
В частности, при  $u_i = u$  выражение для сосредоточенной нагрузки, эквивалентной направленному моменту

порядка  $n$ , принимает вид

$$\mathbf{Q}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{M^{(n)} \mathbf{F}^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|^n} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.2.11)$$

Если  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^0 = 0$ , то можно написать

$$\mathbf{Q}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n M^{(n)} \mathbf{F}^0 \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.2.12)$$



Фиг. 3.9.

Предположим, что в точке  $A(\mathbf{r}_0)$  действует сосредоточенная сила  $\mathbf{F}$ . Попробуем перенести эту силу в начало координат  $O$  таким образом, чтобы эффект ее действия не изменился (фиг. 3.9). Нагрузки, эквивалентные сосредоточенной силе  $\mathbf{F}$ , приложенной соответственно в точке  $A$  и в точке  $O$ , имеют вид

$$\mathbf{Q}_A(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{Q}_O(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}). \quad (3.2.13)$$

Разлагая выражение  $\mathbf{Q}_A(\mathbf{r})$  в ряд Тейлора в окрестности начала координат, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_A(\mathbf{r}) = & \mathbf{Q}_O(\mathbf{r}) + \frac{1}{1!} \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} \mathbf{Q}^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{(n-1)!} \mathbf{Q}^{(n-1)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{n!} \bar{\mathbf{Q}}^{(n)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

где введен направленный сосредоточенный момент

$$\mathbf{Q}^{(i)}(\mathbf{r}) = (-1)^i \frac{M^{(i)}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|^i} \mathbf{F}^0 \frac{\partial^i}{\partial u^i} \delta(\mathbf{r}) \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (3.2.15)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{\mathbf{F}d^n}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|^n} \mathbf{F}^0 \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \theta \mathbf{r}_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — орт вектора  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{F}^0$  — орт вектора  $\mathbf{F}$ ,  $d$  — расстояние между точкой  $O$  и линией действия силы  $\mathbf{F}$ , приложенной в точке  $A$ , а  $M^{(i)} = \mathbf{F}d^i$  — величина момента  $i$ -го порядка силы  $\mathbf{F}$ , приложенной в точке  $O$ . Выражение (3.2.14) представляет собой закон эквивалентности действия силы  $\mathbf{F}$ , приложенной в точке  $A$  или в точке  $O$ .

**Теорема 3.2.1.** Действие сосредоточенной силы  $\mathbf{F}$ , приложенной в точке  $A$ , эквивалентно действию той же силы  $\mathbf{F}$ , приложенной в точке  $O$ , к которой прибавляются действия  $n-1$  сосредоточенных моментов первого порядка, второго порядка, ...,  $(n-1)$ -го порядка, приложенных в точке  $O$ , эквивалентные сосредоточенные нагрузки которых  $\mathbf{Q}^{(i)}$  умножаются на  $1/i!$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ), и действие направленного сосредоточенного момента порядка  $n$ , приложенного в некоторой точке отрезка  $OA$ , эквивалентная нагрузка которого  $\bar{\mathbf{Q}}^{(n)}$  умножается на  $1/n!$ .

В зависимости от физических свойств среды, на которую действует сила  $\mathbf{F}$ , и от выбранной математической модели этой среды можно определить максимальный порядок направленного сосредоточенного момента, возникающего в задаче установления эквивалентности действия сил, т. е. можно определить число  $n$ . Так, например, при рассмотрении абсолютно твердых тел, расстояния между любыми точками которых постоянны во времени, сосредоточенные силы представляются скользящими векторами. В этом случае максимальный порядок моментов равен 1 (для исследования эквивалентности действия сил достаточно ввести моменты первого порядка). Другими словами, для твердых тел закон эк-

вивалентности имеет вид

$$\mathbf{Q}_A(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}). \quad (3.2.16)$$

При рассмотрении сплошных сред могут возникать моменты более высокого порядка.

### 3.2.1.2. Центр вращения

С помощью понятия направленного сосредоточенного момента можно определить *вращательный сосредоточенный момент (центр вращения)*, который представляет собой сосредоточенную нагрузку с осевой симметрией.

Пусть даны точка  $A(\mathbf{r}_0)$  и орт  $\mathbf{n}$ , перпендикулярный некоторой плоскости  $P$  и проходящий через заданную точку. Предположим, что в этой точке действуют  $n \geq 2$  направленных сосредоточенных моментов величиной  $M_i$ , определенных ортами  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{F}_i^0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $\mathbf{u}_i \times \mathbf{F}_i^0 = \mathbf{0}$ , и принадлежащих плоскости  $P$  (фиг. 3.10, а), эквивалентные нагрузки которых равны

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{r}) = - \frac{M_i \mathbf{F}_i^0}{|\mathbf{u}_i \times \mathbf{F}_i^0|} \frac{\partial}{\partial u_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.2.17)$$

Пусть  $\{\mathbf{Q}\}$  — множество эквивалентных нагрузок:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{r}) + \dots + \mathbf{Q}_n(\mathbf{r}). \quad (3.2.18)$$

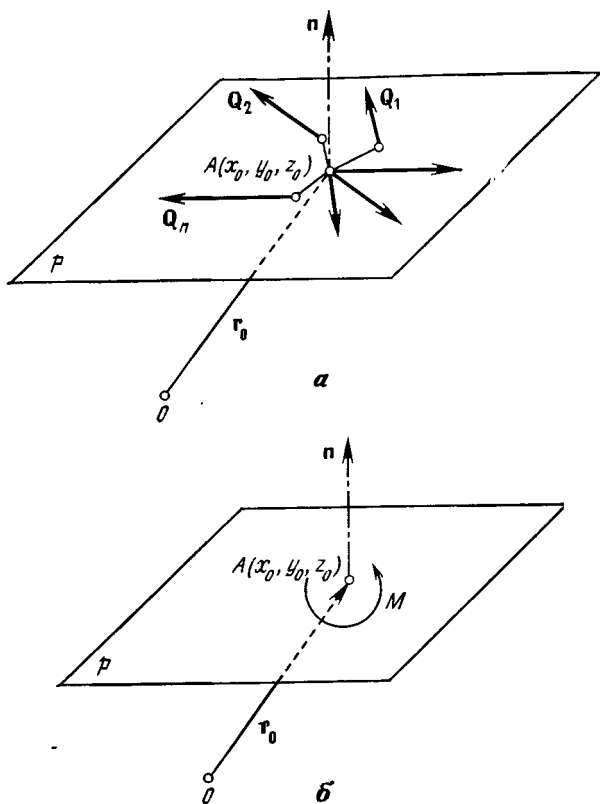
**Определение 3.2.3.** *Вращательным сосредоточенным моментом (или центром вращения)*, соответствующим точке  $A$  и плоскости  $P$ , называется элемент множества  $\{\mathbf{Q}\}$ , не зависящий от ортов  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{F}_i^0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Подставляя выражение (3.2.17) в (3.2.18) и используя условие, что  $\mathbf{Q}$  не зависит от ортов  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{F}_i^0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), получаем

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \left( \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.2.19)$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — постоянные векторы, зависящие только от величин  $M_i$ . Предположим, что этот элемент может быть





Фиг. 3.10.

записан также в виде

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \left( \mathbf{a}' \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{b}' \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{c}' \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.2.19')$$

где  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$  и  $\mathbf{c}'$  тоже являются постоянными векторами. Вычитая (3.2.19') из (3.2.19), получаем

$$\left[ (\mathbf{a} - \mathbf{a}') \frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{b} - \mathbf{b}') \frac{\partial}{\partial y} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}') \frac{\partial}{\partial z} \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}.$$

Если  $\varphi(\mathbf{r}) \in K(R^3)$  — произвольная основная функция, то можно написать

$$\left[ (a - a') \frac{\partial}{\partial x} + (b - b') \frac{\partial}{\partial y} + (c - c') \frac{\partial}{\partial z} \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \varphi(\mathbf{r}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left[ (a - a') \frac{\partial}{\partial x} + (b - b') \frac{\partial}{\partial y} + (c - c') \frac{\partial}{\partial z} \right] \varphi(\mathbf{r}_0) = 0.$$

Полученное соотношение может иметь место только тогда, когда

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

вследствие линейности дифференциального оператора, действующего на произвольную основную функцию  $\varphi(\mathbf{r})$ . Отсюда следует, что представление (3.2.19) вращательно-сосредоточенного момента единственно, что и оправдывает приведенное определение. Обозначим через  $M$  величину этого момента (фиг. 3.10, б).

Покажем, что множество  $\{\mathbf{Q}\}$  не пустое. Это позволит на основании единственности представления (3.2.19) эффективно определить коэффициенты  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , входящие в это соотношение.

Итак, пусть даны два направленных сосредоточенных момента, приложенных в точке  $A$  и принадлежащих плоскости  $P$  (фиг. 3.11, а). Допустим, что силы, составляющие эти моменты, взаимно перпендикулярны и

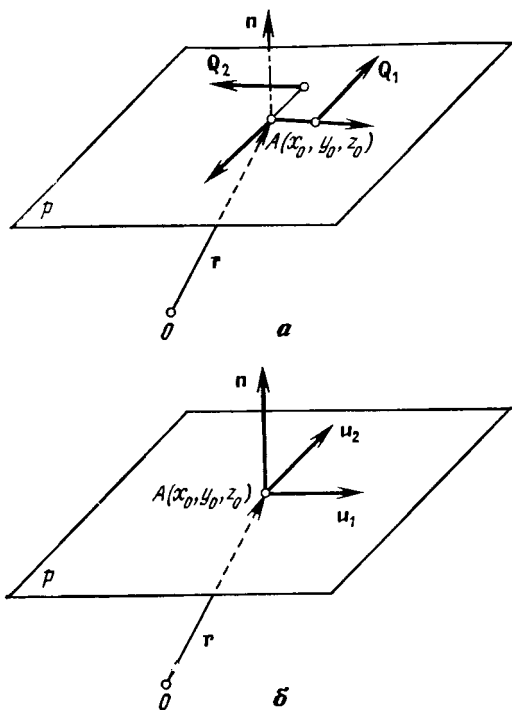
$$M_1 = M_2 = \frac{M}{2}. \quad (3.2.20)$$

Орты  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{F}_i^0$  ( $i=1, 2$ ) удовлетворяют соотношениям (фиг. 3.11, б)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^0 &= \mathbf{u}_2, & \mathbf{F}_2^0 &= -\mathbf{u}_1, \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= 0, & \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Эквивалентная нагрузка  $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$  в этом случае имеет вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{M}{2} \mathbf{F}_1^0 \frac{\partial}{\partial u_1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{M}{2} \mathbf{F}_2^0 \frac{\partial}{\partial u_2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) =$$



Фиг. 3.11.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{M}{2} \{ \mathbf{u}_2 [\mathbf{u}_1 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] - \mathbf{u}_1 [\mathbf{u}_2 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \} = \\
 &= -\frac{M}{2} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0);
 \end{aligned}$$

здесь применена формула разложения двойного векторного произведения<sup>1)</sup>. Таким образом, нагрузка, эквивалентная центру вращения, будет иметь вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} M \mathbf{n} \times \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.2.22)$$

<sup>1</sup>  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . — Прим. ред.

## Векторы

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} M \mathbf{i} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} M \mathbf{j} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2} M \mathbf{k} \times \mathbf{n}, \quad (3.2.23)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — орты координатных осей, принадлежат плоскости  $P$ .

Заметим, что вращательный сосредоточенный момент (центр вращения) характеризуется:

- а) точкой приложения  $A(x_0, y_0, z_0)$ ;
- б) направленной плоскостью  $P$ , определенной ортом нормали к ней в точке  $A$ ;
- в) его величиной  $M$ .

Вращательный сосредоточенный момент является положительным, так как для наблюдающего вдоль орта  $\mathbf{n}$  (фиг. 3.10, б) вращение в плоскости  $P$  происходит в положительном направлении. Таким образом устанавливается направление момента.

Учитывая полученные результаты, для канонического представления центра вращения можно использовать представление двух наложенных направленных сосредоточенных моментов, одинаково направленных, имеющих одинаковую величину и для которых составляющие силы взаимно перпендикулярны (фиг. 3.11, а).

В частности, рассматривая вместо плоскости  $P$  плоскость  $Oxy$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ), получим следующую эквивалентную нагрузку:

$$\mathbf{Q}(x, y) = -\frac{1}{2} M \mathbf{k} \times \text{grad } \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (3.2.24)$$

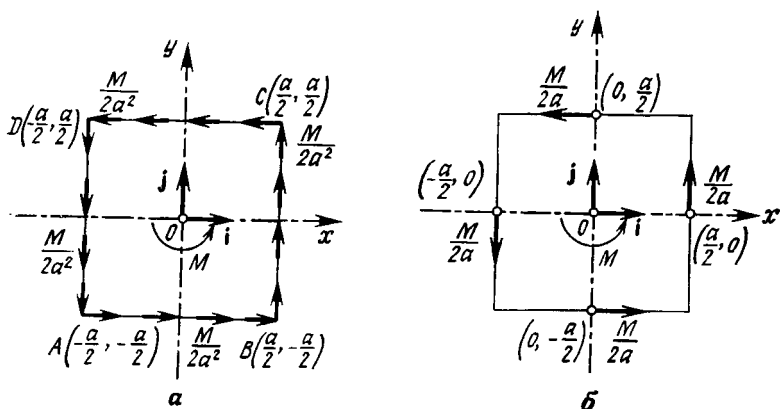
с компонентами

$$Q_x(x, y) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial y} \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (3.2.24')$$

$$Q_y(x, y) = -\frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x_0, y - y_0).$$

Пусть  $ABCD$  — квадрат со стороной  $a$ , стороны которого параллельны осям координат (фиг. 3.12, а). Предположим, что вдоль сторон квадрата действуют равномерно распределенные касательные нагрузки интенсивностью  $M/2a^2$ . Суммарный момент этих нагрузок

относительно точки  $O$  равен  $M$ . Покажем, что при  $a \rightarrow +0$  в смысле теории обобщенных функций рассматриваемые нагрузки порождают центр вращения величиной  $M$ , сосредоточенный в начале координат (фиг. 3.12, а).



Фиг. 3.12.

Соответствующие эквивалентные нагрузки могут быть выражены следующим образом:

$$\frac{M}{2a^2} \mathbf{i} \delta(\overline{AB}), \frac{M}{2a^2} \mathbf{j} \delta(\overline{BC}), \left[ -\frac{M}{2a^2} \mathbf{i} \delta(\overline{DC}) \right], \left[ -\frac{M}{2a^2} \mathbf{j} \delta(\overline{AD}) \right],$$

где введены обобщенные функции Дирака, сосредоточенные на сторонах квадрата. Суммарная эквивалентная нагрузка имеет величину

$$\mathbf{Q}_a(x, y) = \frac{M}{2a^2} \{ \mathbf{i} [\delta(\overline{AB}) - \delta(\overline{DC})] + \mathbf{j} [\delta(\overline{BC}) - \delta(\overline{AD})] \}.$$

Для произвольной основной функции  $\varphi(x, y) \in K(R^2)$  можно написать

$$(\mathbf{Q}_a(x, y), \varphi(x, y)) = \frac{M}{2a^2} \left\{ \mathbf{i} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \varphi\left(x, -\frac{a}{2}\right) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi\left(x, \frac{a}{2}\right) dx + \mathbf{j} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \varphi\left(\frac{a}{2}, y\right) - \varphi\left(-\frac{a}{2}, y\right) \right] dy \Big\} = \\
& = \frac{M}{2a} \left\{ \mathbf{i} \left[ \varphi\left(\xi, -\frac{a}{2}\right) - \varphi\left(\xi, \frac{a}{2}\right) \right] + \right. \\
& \left. + \mathbf{j} \left[ \varphi\left(\frac{a}{2}, \eta\right) - \varphi\left(-\frac{a}{2}, \eta\right) \right] \right\}, \quad -\frac{a}{2} < \xi, \eta < \frac{a}{2},
\end{aligned}$$

где использована теорема о среднем.

Используя формулу конечных приращений, имеем

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Q}_a(x, y), \varphi(x, y)) &= \frac{M}{2} \left[ -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(\xi, \bar{\eta}) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\bar{\xi}, \eta) \right], \\
-\frac{a}{2} &< \bar{\xi}, \bar{\eta} < \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

При  $a \rightarrow +0$  в смысле теории обобщенных функций получим

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow +0} (\mathbf{Q}_a(x, y), \varphi(x, y)) &= (\lim_{a \rightarrow +0} \mathbf{Q}_a(x, y), \varphi(x, y)) = \\
&= (\mathbf{Q}(x, y), \varphi(x, y)) = \frac{M}{2} \left[ -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(0, 0) \right] = \\
&= \left( \frac{M}{2} \left[ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \delta(x, y) - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, y) \right], \varphi(x, y) \right),
\end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{Q}(x, y) = \frac{M}{2} \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x, y), \quad (3.2.25)$$

что и является вращательным сосредоточенным моментом с компонентами (3.2.24').

Этот же результат можно получить, если вместо распределенных нагрузок рассматривать касательные сосредоточенные нагрузки интенсивностью  $M/2a$ , приложенные в середине сторон квадрата (фиг. 3.12, б). Предельным переходом в смысле теории обобщенных функций при  $a \rightarrow +0$  получаются именно те два направленных сосредоточенных момента, которые приводят к вращательному сосредоточенному моменту.

Можно показать, что, рассматривая касательные нагрузки, равномерно распределенные вдоль сторон правильного многоугольника или вдоль произвольной окружности, тоже можно получить вращательный сосредоточенный момент. Таким образом описывается центр вращения.

### 3.2.2. Диполи сосредоточенных сил

#### 3.2.2.1. Линейный дипольный сосредоточенный момент

Ранее был определен направленный сосредоточенный момент в предположении, что орт  $\mathbf{F}^0$  сил, составляющий момент, и орт  $\mathbf{u}$ , определяющий направление предельного перехода, не коллинеарны ( $\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0 \neq \mathbf{0}$ ). Для случая, когда эти векторы коллинеарны, вводится новый тип сосредоточенного момента: *дипольный сосредоточенный момент*<sup>1)</sup>.

Пусть  $A$  — фиксированная точка с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ , а  $B$  — подвижная точка, определяемая радиусом-вектором  $\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)$ , такие, что орт  $\mathbf{u}$  вектора  $\overrightarrow{AB}$  является постоянным. В точках  $A$  и  $B$  приложены соответственно сосредоточенные силы  $-\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}$ , такие, что орт  $\mathbf{F}^0 = \mathbf{u}$ . Общая линия действия этих сил будет линией действия диполя, который будем считать положительным, если заданные силы стремятся увеличить расстояние между точками их приложения (фиг. 3.13), и отрицательным в противном случае. Обозначим через  $d$  расстояние между точками  $A$  и  $B$ . Величина момента диполя определяется равенством

$$D = Fd. \quad (3.2.26)$$

**Определение 3.2.4.** *Линейным дипольным сосредоточенным моментом (диполем сосредоточенных сил) в точке  $A$  называется предел в смысле теории обобщенных функций пары  $(-\mathbf{F}, \mathbf{F})$ , когда расстояние  $d \rightarrow +0$ , причем точка  $A$  считается фиксированной, а  $B$  — подвижной. Предполагается, что рассматриваемые силы имеют об-*

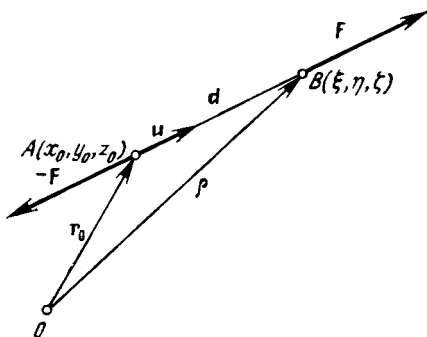
<sup>1)</sup> Такой момент обычно называется двойной силой без момента. — *Прим. ред.*

щую линию действия, орт  $\mathbf{u}$  и величина  $D$  момента диполя постоянные.

Нагрузка, эквивалентная рассматриваемой паре сосредоточенных сил, имеет вид

$$\mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{F}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{D\mathbf{u}}{d} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})].$$

В результате предельного перехода в смысле теории обобщенных функций при  $d \rightarrow +0$  получается нагрузка,



Фиг. 3.13.

эквивалентная линейному дипольному сосредоточенному моменту:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) &= \lim_{d \rightarrow +0} \mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = -D\mathbf{u} \frac{\partial}{\partial u} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ &= -D[\mathbf{u} \cdot \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

где введена производная по направлению  $\mathbf{u}$ .

Следовательно, линейный дипольный сосредоточенный момент характеризуется:

- точкой приложения  $A(x_0, y_0, z_0)$ ;
- ортом  $\mathbf{u}$  сил, образующих его;
- его величиной  $D$ .

Знак диполя определяется ортом  $\mathbf{F}^0$  силы  $\mathbf{F}$ . Если  $\mathbf{F}^0 = \mathbf{u}$  (как рассматривалось выше), то диполь является *положительным*, а если  $\mathbf{F}^0 = -\mathbf{u}$ , то он является *отрица-*



тельным и выражение (3.2.27) записывается с обратным знаком.

Рассмотрим случай периодического линейного дипольного сосредоточенного момента с периодом  $T$ , приложенного в точках  $x=nT$ ,  $n \in Z$ . Нагрузка, эквивалентная линейному дипольному сосредоточенному моменту, приложенному в начале координат, имеет вид

$$Q(x) = -DF^0 \frac{\partial}{\partial u} \delta(x). \quad (3.2.27')$$

Обозначив через  $\tilde{Q}$  периодическую обобщенную функцию, соответствующую линейному дипольному сосредоточенному моменту (3.2.27'), получим

$$\tilde{Q}(x) = -DF^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x-nT), \quad n \in Z, \quad (3.2.27'')$$

где  $\mathbf{u}$  — орт оси  $Ox$ .

Линейный дипольный сосредоточенный момент является моментом первого порядка; будем обозначать его в случае необходимости верхним индексом 1 ( $D^{(1)}$  и  $Q^{(1)}$ ).

Как и в разд. 3.2.1.1, можно вводить линейные дипольные сосредоточенные моменты высшего порядка. Таким образом, эквивалентная нагрузка линейного дипольного сосредоточенного момента порядка  $n$  будет иметь вид

$$Q^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n D^{(n)} \mathbf{u} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.2.28)$$

где  $D^{(n)}$  — величина момента,

$$D^{(n)} = F d_1 d_2 \dots d_n, \quad (3.2.29)$$

а  $d_1, d_2, \dots, d_n$  — расстояния между переменными точками приложения сил, действующих в направлении  $\mathbf{u}$ , и фиксированной точкой приложения сосредоточенной силы.

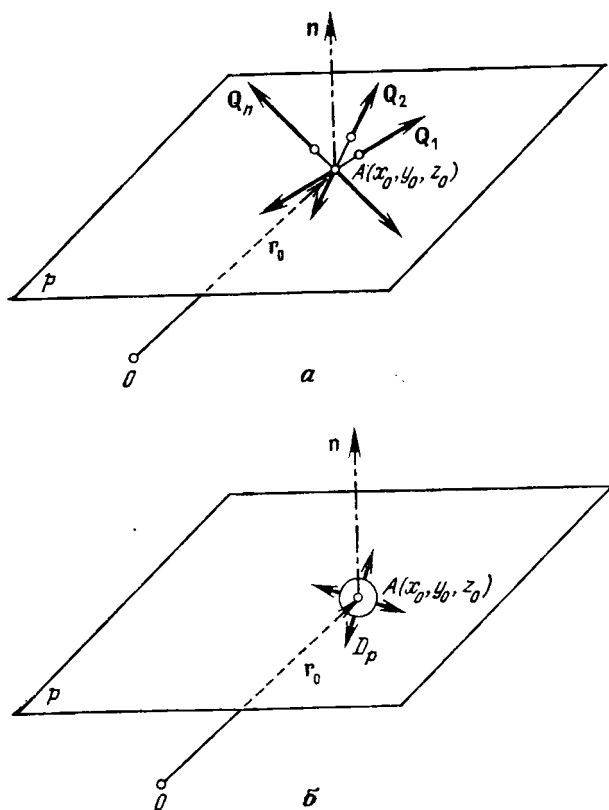
В частности, если  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ , можно написать

$$D^{(n)} = F d^n. \quad (3.2.30)$$

### 3.2.2.2. Плоский центр расширения

Используя понятие линейного дипольного сосредоточенного момента, можно определить *плоский дипольный сосредоточенный момент (плоский центр расширения)*, который является нагрузкой с *осевой симметрией*.

Пусть даны точка  $A(\mathbf{r}_0)$  и орт  $\mathbf{n}$ , перпендикулярный к плоскости  $P$  и проходящий через заданную точку. Предположим, что в этой точке действуют  $n \geq 2$  диполей сосредоточенных сил величиной  $D_i$ , определенных орта-



Фиг. 3.14.

ми  $\mathbf{u}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и лежащих в плоскости  $P$ , эквивалентные нагрузки которых равны (фиг. 3.14, *a*)

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{r}) = -D_i \mathbf{u}_i \frac{\partial}{\partial u_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.2.31)$$

Через  $\{\mathbf{Q}\}$  обозначим множество эквивалентных нагрузок вида (3.2.18).

**Определение 3.2.5.** *Плоским дипольным сосредоточенным моментом (плоским центром расширения), соответствующим точке  $A$  и плоскости  $P$ , называется элемент множества  $\{\mathbf{Q}\}$ , не зависящий от ортов  $\mathbf{u}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).*

Подставляя выражение (3.2.31) в (3.2.18) и учитывая, что  $\mathbf{Q}$  не зависит от ортов  $\mathbf{u}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), получим, что плоский дипольный сосредоточенный момент представляется в виде (3.2.19), где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — постоянные векторы, зависящие только от величин  $D_i$ . Можно показать, как это было сделано в разд. 3.2.1.2, что представление плоского центра расширения в виде (3.2.19) единственно, что и оправдывает приведенное определение. Пусть  $D_p$  — величина этого плоского диполя (фиг. 3.14, *b*). Используя единственность представления (3.2.19), определим коэффициенты  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , доказывая тем самым, что множество  $\{\mathbf{Q}\}$  не является пустым.

Итак, рассмотрим два положительных диполя, образованных взаимно перпендикулярными сосредоточенными силами. Предположим, что они приложены в точке  $A$  и принадлежат плоскости  $P$  (фиг. 3.15, *a*). Можно написать

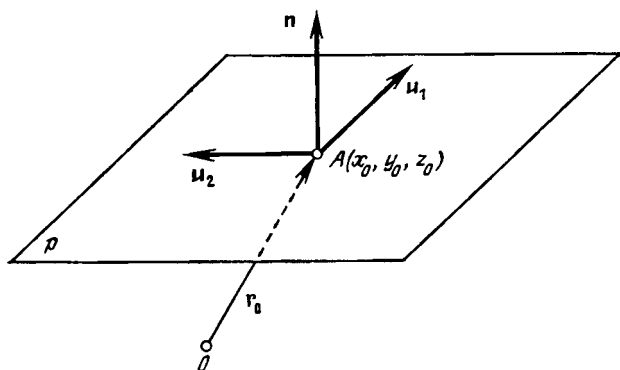
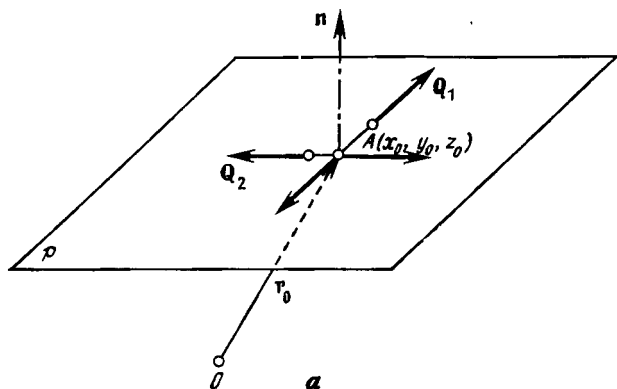
$$D_1 = D_2 = \frac{D_p}{2}. \quad (3.2.32)$$

Орты  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{n}. \quad (3.2.33)$$

Эквивалентная нагрузка  $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$  в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) = & -\frac{D_p}{2} \{ \mathbf{u}_1 [ \mathbf{u}_1 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) ] + \\ & + \mathbf{u}_2 [ \mathbf{u}_2 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) ] \} = \end{aligned}$$



Фиг. 3.15.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{D_p}{2} \mathbf{n} \times \{ \mathbf{u}_1 [ \mathbf{u}_2 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) ] - \\
 &\quad - \mathbf{u}_2 [ \mathbf{u}_1 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) ] \} = \\
 &= \frac{D_p}{2} \mathbf{n} \times [ (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) ],
 \end{aligned}$$

где использованы второе из соотношений (3.2.33) и формула разложения двойного векторного произведения. Таким образом, нагрузка, эквивалентная плоскому цент-

ру расширения, будет иметь вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} D_p \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]. \quad (3.2.34)$$

Векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  принадлежат плоскости  $P$  и определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} D_p \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{i}), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} D_p \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{j}), \\ \mathbf{c} &= \frac{1}{2} D_p \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — орты координатных осей.

Плоский дипольный сосредоточенный момент считается *положительным*, если он образован положительными линейными диполями. В этом случае он называется *плоским центром расширения*. В противном случае (если он образован отрицательными линейными диполями) он будет *отрицательным* и называться *плоским центром сжатия*; соотношения (3.2.34) и (3.2.35) при этом записываются с обратным знаком.

Отметим, что плоский дипольный сосредоточенный момент характеризуется:

- а) точкой приложения  $A(x_0, y_0, z_0)$ ;
- б) ортом  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости, в которой он действует;
- в) величиной  $D_p$  момента диполя.

Знак плоского диполя определяется так, как было указано выше.

Для канонического представления плоского центра расширения можно использовать представление, полученное сложением двух взаимно ортогональных линейных диполей с одинаковыми величинами и знаками (фиг. 3.15, а). Аналогичный результат можно получить, если рассмотреть нагрузки, нормально распределенные по окружности.

В частности, если вместо плоскости  $P$  рассмотреть плоскость  $Oxy$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ), то из формулы (3.2.34) получим следующую эквивалентную нагрузку:

$$\mathbf{Q}(x, y) = -\frac{1}{2} D_p \text{grad } \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (3.2.36)$$

где учтено соотношение

$$\mathbf{k} \cdot \text{grad} \delta(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Используя выражение (3.2.22) для вращательного сосредоточенного момента, в предположении, что  $M = D_p$ , можно написать соотношение

$$\mathbf{Q}_{D_p}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{Q}_M(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.2.37)$$

### 3.2.2.3. Пространственный центр расширения

Приемом, аналогичным изложенному в разд. 3.2.2.2, можно ввести *пространственный дипольный сосредоточенный момент (пространственный центр расширения)*, который является сосредоточенной нагрузкой с центральной симметрией.

Пусть дана точка  $A(\mathbf{r}_0)$ , в которой действуют  $n \geq 3$  диполей сосредоточенных сил. Пусть  $D_i$  — величины этих диполей, которые определены ортами  $\mathbf{u}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и имеют эквивалентные нагрузки вида (3.2.31). Через  $\{\mathbf{Q}\}$  обозначим множество эквивалентных нагрузок вида (3.2.18).

**Определение 3.2.6.** *Пространственным дипольным сосредоточенным моментом (пространственным центром расширения), соответствующим точке  $A$ , называется элемент множества  $\{\mathbf{Q}\}$ , не зависящий от ортов  $\mathbf{u}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).*

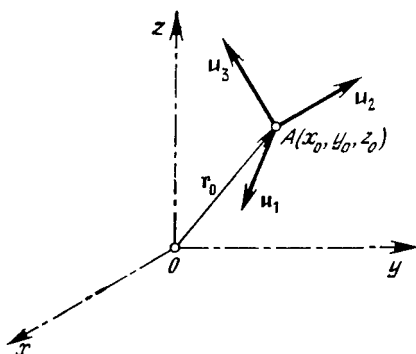
Можно показать (см. разд. 3.2.2.2), что элемент множества  $\{\mathbf{Q}\}$  может быть представлен в виде (3.2.19), где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  являются постоянными векторами, зависящими только от величин  $D_i$ . Это представление единственно, что и оправдывает приведенное определение.

Рассмотрим три диполя вида (3.2.31), образованных сосредоточенными силами, линии действия которых определены ортами  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  и  $\mathbf{u}_3$ . Орты  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  и  $\mathbf{u}_3$  взаимно перпендикулярны и образуют правильный триэдр (фиг. 3.16):

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) > 0. \quad (3.2.38)$$

Предположим, что величина  $D_s$  пространственного дипольного момента удовлетворяет соотношениям

$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{D_s}{3}. \quad (3.2.39)$$



Фиг. 3.16.

Эквивалентная нагрузка в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) = & -\frac{D_s}{3} \left[ \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \right. \\ & \left. + \mathbf{u}_3 \frac{\partial}{\partial u_3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right] = -\frac{D_s}{3} \{ \mathbf{u}_1 [\mathbf{u}_1 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] + \\ & + \mathbf{u}_2 [\mathbf{u}_2 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] + \mathbf{u}_3 [\mathbf{u}_3 \cdot \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \}. \end{aligned}$$

Таким образом, нагрузка, эквивалентная пространственному центру расширения, имеет следующее значение:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3} D_s \text{grad } \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.2.40)$$

а векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  равны

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{3} D_s \mathbf{i}, \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{3} D_s \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = -\frac{1}{3} D_s \mathbf{k}. \quad (3.2.41)$$

Пространственный дипольный сосредоточенный момент считается *положительным*, если он образован положительными линейными диполями. В этом случае он

называется *пространственным центром расширения*. Если составляющие линейные диполи отрицательны, образованный сосредоточенный момент *отрицателен* и называется *пространственным центром сжатия*. Соотношения (3.2.40) и (3.2.41) при этом записываются с обратным знаком.

Пространственный дипольный сосредоточенный момент характеризуется:

- а) точкой приложения  $A(x_0, y_0, z_0)$ ;
- б) величиной  $D_s$  момента диполя.

Знак пространственного диполя определяется так, как было указано выше.

Представление пространственного центра расширения с помощью трех взаимно перпендикулярных, одинаковых по величине и направлению линейных диполей является его *каноническим представлением*. Аналогичный результат можно получить, если рассмотреть нагрузки, нормально распределенные по некоторой сфере.

Интересно отметить, что пространственный дипольный сосредоточенный момент вводит другой тип сингулярности, отличный от вводимой сосредоточенной силы. Действительно, сосредоточенная сила может быть получена с помощью дельтообразных последовательностей, тогда как пространственный центр расширения аппроксимируется последовательностью функций, сходящихся к функции  $\delta'$ .

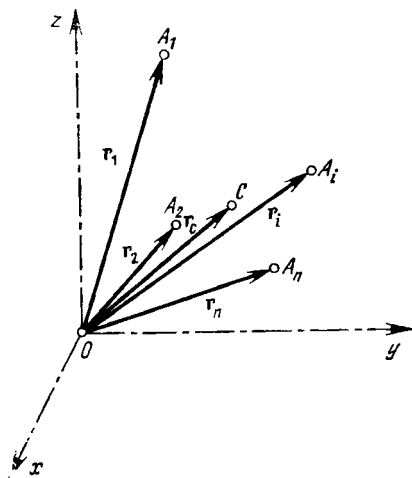
### **3.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

В динамике дискретных и непрерывных систем материальных точек (в частности, в динамике твердого тела) законы движения выражаются через некоторые величины геометрической и механической природы, называемые моментами. Важную роль играют статические моменты и моменты инерции, которые характеризуют пространственное распределение масс системы материальных точек.



### 3.3.1. Дискретные системы материальных точек

Пусть  $A_i (x_i, y_i, z_i)$  — дискретная система  $n$  материальных точек, имеющих массу  $m_i$  и радиусы-векторы  $r_i (i=1, 2, \dots, n)$  (фиг. 3.17). Величина



Фиг. 3.17.

$$I_p = \sum_{i=1}^n m_i x_i^\alpha y_i^\beta z_i^\gamma, \quad (3.3.1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma \in N$ , называется *моментом* порядка  $p = \alpha + \beta + \gamma$  *системы точек*.

При  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  получается момент нулевого порядка

$$M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (3.3.2)$$

который совпадает с *полной массой* системы материальных точек.

При  $p=1$  получаются моменты первого порядка (*статические моменты*), а при  $p=2$  — моменты второго порядка (*моменты инерции*).

### 3.3.1.1. Статические моменты

Выражения

$$S_{Oyz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad S_{Czx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad S_{Oxy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (3.3.3)$$

представляют собой статические моменты заданной системы материальных точек относительно плоскостей  $Oyz$ ,  $Ozx$  и  $Oxy$ .

Центр масс  $C(x_C, y_C, z_C)$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_C$  дается по определению соотношениями

$$Mx_C = S_{Oyz}, \quad My_C = S_{Ozx}, \quad Mz_C = S_{Oxy}, \quad (3.3.4)$$

где первое соотношение, например, показывает, что статический момент системы материальных точек относительно плоскости  $Oyz$  равен статическому моменту относительно той же плоскости центра масс, в котором предполагается сосредоточенной вся масса системы материальных точек.

Наряду с плоскими статическими моментами определим и полярный статический момент (который является вектором) выражением

$$\mathbf{S}_O = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i. \quad (3.3.5)$$

В этом случае положение центра масс дается соотношением

$$M\mathbf{r}_C = \mathbf{S}_O \quad (3.3.6)$$

и можно утверждать, что полярный статический момент системы материальных точек относительно полюса  $O$  равен статическому моменту центра масс, в котором предполагается сосредоточенной вся масса системы точек, относительно того же полюса.

Рассмотрим материальную точку  $A_i$ . С точки зрения теории обобщенных функций она характеризуется объемной плотностью

$$\rho_i(\mathbf{r}) = m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = m_i \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i). \quad (3.3.7)$$

Чтобы получить массу материальной точки, необходимо подействовать этой обобщенной функцией на функцию  $\varphi(\mathbf{r}) = 1$ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} (\rho_i(\mathbf{r}), 1) &= (m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1) = \\ &= (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), m_i) = m_i |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = m_i. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Система (S) материальных точек характеризуется объемной плотностью

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Общая масса системы точек получается действием этой плотности на функцию  $\varphi(\mathbf{r}) = 1$ ; таким образом, имеем

$$\begin{aligned} M = (\rho(\mathbf{r}), 1) &= \left( \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1) = \sum_{i=1}^n m_i. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Применяя полученные выше результаты, можно вычислить моменты любого порядка системы (S) материальных точек. Таким образом, статический момент системы (S) относительно плоскости  $Oyz$  имеет вид

$$\begin{aligned} S_{Oyz} = (\rho(\mathbf{r}), x) &= \left( \sum_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{r}), x \right) = \sum_{i=1}^n (\rho_i(\mathbf{r}), x) = \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), x) = \sum_{i=1}^n (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), m_i x) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i x |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = \sum_{i=1}^n m_i x_i. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Аналогично для статических моментов относительно плоскостей  $Ozx$  и  $Oxy$  можно написать

$$S_{Ozx} = (\rho(\mathbf{r}), y) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), y \right) = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad (3.3.11')$$

$$S_{Oxy} = (\rho(\mathbf{r}), z) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), z \right) = \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

Несмотря на то что функции  $1$ ,  $x$ ,  $y$  и  $z$  не являются основными (так как они не имеют компактных носителей), выражения (3.3.8), (3.3.10) — (3.3.11') имеют смысл, поскольку плотности  $\rho_i(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{r})$  являются обобщенными функциями с компактными носителями (образованными точкой  $A_i$  или совокупностью точек  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )).

Для полярного статического момента относительно точки  $O$  можно написать

$$\mathbf{S}_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \mathbf{r} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (3.3.12)$$

и, таким образом, плоские статические моменты являются составляющими полярного статического момента.

Радиус-вектор  $\mathbf{r}_C$  центра масс системы материальных точек определяется выражением

$$\mathbf{r}_C = \left( \rho(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{r}}{M} \right) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \frac{\mathbf{r}}{M} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (3.3.13)$$

где  $M$  — общая масса системы материальных точек.

Заметим также, что обобщенная функция

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_O = \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) &= \mathbf{r} \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

полностью характеризует статический момент системы материальных точек относительно полюса  $O$ . Действительно, действуя этой обобщенной функцией на функцию  $\varphi(\mathbf{r}) = 1$ , получаем

$$S_O = (\vec{\mathcal{E}}_O, 1) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i. \quad (3.3.12')$$

Можно, таким образом, говорить, что  $\vec{\mathcal{E}}_O$  является обобщенной функцией полярного статического момента системы материальных точек относительно полюса  $O$ .

Аналогично вводятся обобщенные функции плоских статических моментов:

$$\vec{\mathcal{E}}_{Oyz} = x\rho(\mathbf{r}), \quad \vec{\mathcal{E}}_{Ozx} = y\rho(\mathbf{r}), \quad \vec{\mathcal{E}}_{Oxy} = z\rho(\mathbf{r}). \quad (3.3.15)$$

Например, с помощью обобщенной функции  $\vec{\mathcal{E}}_{Oyz}$  можно получить

$$S_{Oyz} = (\vec{\mathcal{E}}_{Oyz}, 1) = \left( \sum_{i=1}^n m_i x_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (3.3.15')$$

Таким образом, и обобщенная функция (3.3.14), и обобщенные функции (3.3.15) позволяют вычислить положение центра масс. Например, используя обобщенную функцию  $(1/M)\vec{\mathcal{E}}_O$ , можно написать

$$\mathbf{r}_C = \left( \frac{1}{M} \vec{\mathcal{E}}_O, 1 \right) = \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i. \quad (3.3.13')$$

### 3.3.1.2. Моменты инерции

Выражение

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (3.3.16)$$

представляет собой полярный момент инерции системы  $(S)$  материальных точек относительно начала координат.

нат  $O$ . Аналогично выражения

$$I_{Oyz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad I_{Ozx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad I_{Oxy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 \quad (3.3.17)$$

представляют собой *моменты инерции* относительно плоскостей  $Oyz$ ,  $Ozx$  и  $Oxy$ . Сумма этих моментов инерции равна полярному моменту инерции

$$I_O = I_{Oyz} + I_{Ozx} + I_{Oxy}. \quad (3.3.18)$$

*Осевые моменты инерции* системы ( $S$ ) материальных точек относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  даются выражениями

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (3.3.19)$$

Введем также *центробежные моменты инерции*

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i,$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i. \quad (3.3.20)$$

Полярные моменты и моменты инерции относительно плоскостей, а также осевые и центробежные моменты инерции являются моментами второго порядка. Все они представляют собой составляющие некоторого тензора второго ранга (центробежные моменты инерции берутся с обратным знаком).

Полярный момент инерции можно выразить через обобщенные функции:

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\rho(\mathbf{r}), x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \mathbf{r}^2 \right) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (3.3.21)$$

Момент инерции  $I_{Oyz}$  относительно плоскости  $Oyz$  определяется выражением

$$I_{Oyz} = (\rho(\mathbf{r}), x^2) = \left( \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), x^2 \right) = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2. \quad (3.3.22)$$

Аналогично можно получить

$$I_{Ozx} = (\rho(\mathbf{r}), y^2) = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad (3.3.22')$$

$$I_{Oxy} = (\rho(\mathbf{r}), z^2) = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2.$$

Ниже приведены выражения для осевых моментов инерции:

$$I_x = (\rho(\mathbf{r}), y^2 + z^2) = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2),$$

$$I_y = (\rho(\mathbf{r}), z^2 + x^2) = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad (3.3.23)$$

$$I_z = (\rho(\mathbf{r}), x^2 + y^2) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

и для центробежных моментов инерции:

$$I_{yz} = (\rho(\mathbf{r}), yz) = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i,$$

$$I_{zx} = (\rho(\mathbf{r}), zx) = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i, \quad (3.3.24)$$

$$I_{xy} = (\rho(\mathbf{r}), xy) = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i.$$

Как и для статических моментов, можно ввести некоторые обобщенные функции, полностью характеризующие

ющие определенные моменты инерции. Так, выражение

$$\mathcal{Y}_O = r^2 \rho(\mathbf{r}) \quad (3.3.25)$$

представляет собой *обобщенную функцию*, соответствующую *полярному моменту инерции* относительно полюса  $O$ . Действительно, можно написать

$$\begin{aligned} I_O &= (\mathcal{Y}_O, 1) = (r^2 \rho(\mathbf{r}), 1) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \end{aligned} \quad (3.3.25')$$

Аналогично *обобщенные функции*, соответствующие *моментам инерции* относительно плоскостей, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{Oyz} &= x^2 \rho(\mathbf{r}), \quad \mathcal{Y}_{Ozx} = y^2 \rho(\mathbf{r}), \\ \mathcal{Y}_{Oxy} &= z^2 \rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Обобщенные функции, соответствующие осевым моментам инерции, будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_x &= (y^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}), \quad \mathcal{Y}_y = (z^2 + x^2) \rho(\mathbf{r}), \\ \mathcal{Y}_z &= (x^2 + y^2) \rho(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

а *обобщенные функции*, соответствующие *центробежным моментам инерции*, могут быть записаны в виде

$$\mathcal{Y}_{yz} = yz \rho(\mathbf{r}), \quad \mathcal{Y}_{zx} = zx \rho(\mathbf{r}), \quad \mathcal{Y}_{xy} = xy \rho(\mathbf{r}). \quad (3.3.28)$$

Учитывая тензорную природу моментов инерции, можно записать компоненты тензоров — обобщенные функции, соответствующие определенным моментам инерции, — в некоторой ортогональной системе  $Ox_1x_2x_3$ :

$$\mathcal{Y}_{jk} = (x_j x_k \delta_{jk} - x_j x_k) \rho(\mathbf{r}), \quad (3.3.29)$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases} \quad (3.3.30)$$



а по повторяющимся индексам осуществляется суммирование. Компоненты тензора моментов инерции имеют вид

$$I_{jk} = (J_{jk}, 1). \quad (3.3.31)$$

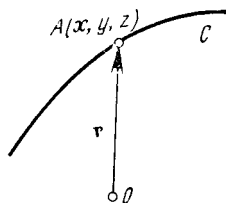
### 3.3.2. Непрерывные системы материальных точек

Моменты непрерывных систем материальных точек (в частности, моменты твердого тела) выражаются через криволинейные, поверхностные или объемные интегралы. В общем случае интегралы, используемые для определения моментов непрерывной системы материальных точек, являются *интегралами Стильбеса*. Если плотность распределения масс выражается через непрерывные функции, то эти интегралы становятся *интегралами Римана*.

При рассмотрении континуумов можно использовать методы, аналогичные изложенным выше. Вместо обобщенной функции Дирака, сосредоточенной в точке или в конечном числе точек и выражающей объемную плотность дискретной системы материальных точек, будем использовать обобщенную функцию Дирака  $\delta(C)$ , сосредоточенную на некоторой кривой, обобщенную функцию Дирака  $\delta(S)$ , сосредоточенную на некоторой поверхности, или обобщенную функцию Дирака  $\delta(V)$ , сосредоточенную в некотором объеме.

#### 3.3.2.1. Одномерный случай

Пусть  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$  — линейная плотность массы, распределенная вдоль некоторой кривой  $C$  (фиг. 3.18). Предположим, что  $\sigma(\mathbf{r})$  является интегрируемой функцией. Обозначим через  $\delta(C)$  обобщенную функцию Ди-



Фиг. 3.18.

рака, сосредоточенную на кривой  $C$  и определенную выражением вида (1.4.4). Тогда объемную плотность одномерного континуума можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \delta(C) = \sigma(x, y, z) \delta(C). \quad (3.3.32)$$

Полная масса дается выражением

$$M = (\rho(\mathbf{r}), 1) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(C), 1) = \int_C \sigma(\mathbf{r}) ds. \quad (3.3.33)$$

Заметим, что объемная плотность  $\delta(\mathbf{r})$  играет такую же роль, как и в случае дискретной системы материальных точек. Следовательно, полярный статический момент будет иметь вид

$$\mathbf{S}_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(C), \mathbf{r}) = \int_C \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) ds, \quad (3.3.34)$$

а полярный момент инерции может быть записан как

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(C), \mathbf{r}^2) = \int_C \mathbf{r}^2 \sigma(\mathbf{r}) ds. \quad (3.3.35)$$

Аналогично обобщенная функция, соответствующая полярному статическому моменту, будет иметь вид

$$\vec{\mathcal{E}}_O = \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) \delta(C), \quad (3.3.36)$$

а обобщенная функция, соответствующая полярному моменту инерции, может быть записана как

$$\mathcal{Y}_O = \mathbf{r}^2 \rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 \sigma(\mathbf{r}) \delta(C). \quad (3.3.37)$$

В этом случае центр масс определяется по формуле

$$\mathbf{r}_C = \left( \frac{1}{M} \vec{\mathcal{E}}_O, 1 \right) = \left( \frac{1}{M} \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) \delta(C), 1 \right) = \frac{1}{M} \int_C \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) ds. \quad (3.3.38)$$

### 3.3.2.2. Двумерный и трехмерный случаи

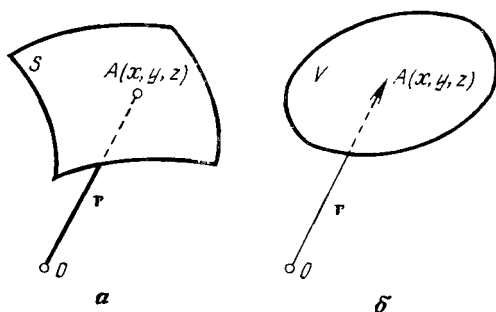
Предположим, что масса распределена на некоторой поверхности  $S$  двумерного тела (фиг. 3.19, а) с поверхностной плотностью  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$ . С помощью формулы (1.4.5) введем обобщенную функцию Дирака  $\delta(S)$ ,

распределенную на поверхности  $S$ . Тогда *объемную плотность двумерного континуума* можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \delta(S) = \sigma(x, y, z) \delta(S). \quad (3.3.39)$$

Полная масса определяется по формуле

$$M = (\rho(\mathbf{r}), 1) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(S), 1) = \int_S \sigma(\mathbf{r}) dS. \quad (3.3.40)$$



Фиг. 3.19.

Для *полярного статического момента* имеем выражение

$$S_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(S), \mathbf{r}) = \int_S \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) dS, \quad (3.3.41)$$

а *полярный момент инерции* может быть записан в виде

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(S), \mathbf{r}^2) = \int_S \mathbf{r}^2 \sigma(\mathbf{r}) dS. \quad (3.3.42)$$

Обобщенные функции, соответствующие *полярному статическому моменту* и *полярному моменту инерции*, имеют вид

$$\vec{\mathcal{E}}_O = \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) \delta(S), \quad \mathcal{I}_O = \mathbf{r}^2 \rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 \sigma(\mathbf{r}) \delta(S), \quad (3.3.43)$$

а центр масс определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_C = \left( \frac{1}{M} \vec{\mathcal{E}}_O, 1 \right) = \left( \frac{1}{M} \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) \delta(S), 1 \right) = \frac{1}{M} \int_S \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) dS. \quad (3.3.44)$$

При рассмотрении трехмерного континуума с помощью формулы (1.4.6) введем обобщенную функцию Дирака  $\delta(V)$ , сосредоточенную в некотором объеме  $V$ . Если масса тела распределена с плотностью  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$  (фиг. 3.19, б), то *объемная плотность трехмерного континуума* равна

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \delta(V) = \sigma(x, y, z) \delta(V). \quad (3.3.45)$$

*Полная масса* дается выражением

$$M = (\rho(\mathbf{r}), 1) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(V), 1) = \int_V \sigma(\mathbf{r}) dV. \quad (3.3.46)$$

*Полярный статический момент* имеет вид

$$S_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(V), \mathbf{r}) = \int_V \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) dV, \quad (3.3.47)$$

а *полярный момент инерции* определяется по формуле

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\sigma(\mathbf{r}) \delta(V), \mathbf{r}^2) = \int_V \mathbf{r}^2 \sigma(\mathbf{r}) dV. \quad (3.3.48)$$

Полярному статическому моменту и полярному моменту инерции соответствуют следующие обобщенные функции:

$$\vec{\mathcal{E}}_O = \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) \delta(V), \quad \mathcal{Y}_O = r^2 \rho(\mathbf{r}) = r^2 \sigma(\mathbf{r}) \delta(V), \quad (3.3.49)$$

и центр масс в этом случае определяется радиусом-вектором

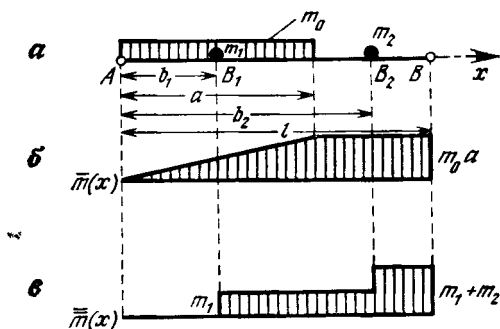
$$\mathbf{r}_C = \left( \frac{1}{M} \vec{\mathcal{E}}_O, 1 \right) = \left( \frac{1}{M} \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) \delta(V), 1 \right) = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) dV. \quad (3.3.50)$$

### 3.3.2.3. Примеры

Ниже приведены два примера задач, где имеют место как распределенные, так и сосредоточенные массы. Такие задачи возникают при рассмотрении колебаний некоторых элементов механических систем.

Рассмотрим прямую балку длиной  $l$ . Предположим, что на часть  $\overline{AA_1}$  (отрезок длиной  $a$ ) балки действует

равномерно распределенная масса с линейной плотностью  $m_0$ , а в точках  $B_1$  и  $B_2$ , расположенных на расстояниях  $b_1$  и  $b_2$  от конца  $A$  балки, действуют соответственно сосредоточенные массы  $m_1$  и  $m_2$  (фиг. 3.20, а). Выберем направление оси координат  $A$  вдоль оси балки.



Фиг. 3.20.

Заданные массы распределены по закону

$$m(x) = \bar{m}(x) + \bar{\bar{m}}(x), \quad (3.3.51)$$

где

$$\bar{m}(x) = m_0 \{ x [\theta(x) - \theta(x-a)] + a\theta(x-a) \}$$

соответствует распределенной массе (фиг. 3.20, б), а

$$\bar{\bar{m}}(x) = m_1\theta(x-b_1) + m_2\theta(x-b_2)$$

соответствует сосредоточенным массам (фиг. 3.20, в).  
Линейную плотность вычислим следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(x) &= \frac{d\bar{m}(x)}{dx} = m_0 [\theta(x) - \theta(x-a) + \\ &+ x\delta(x) - (x-a)\delta(x-a)], \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{\rho}}(x) = \frac{d\bar{\bar{m}}(x)}{dx} = m_1\delta(x-b_1) + m_2\delta(x-b_2).$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \rho(x) = & m_0 [\theta(x) - \theta(x-a)] + \\ & + m_1 \delta(x-b_1) + m_2 \delta(x-b_2). \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

Вычислим, например, момент инерции балки относительно ее конца  $A$ :

$$\begin{aligned} I_A = & (\rho(x), x^2) = (m_0 [\theta(x) - \theta(x-a)], x^2) + \\ & + (m_1 \delta(x-b_1) + m_2 \delta(x-b_2), x^2) = \\ = & \int_0^a m_0 x^2 dx + m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 = \frac{1}{3} m_0 a^3 + m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2. \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

Можно также использовать результаты, приведенные в разд. 3.3.2.1. В этом случае для плотности масс получается следующее выражение:

$$\rho(x) = m_0 \delta(\overline{AB}) + m_1 \delta(x-b_1) + m_2 \delta(x-b_2), \quad (3.3.54)$$

где использована обобщенная функция Дирака, сосредоточенная на отрезке  $\overline{AB}$ . Полная масса балки равняется

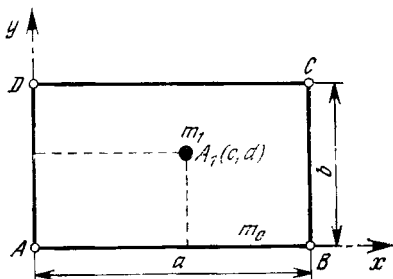
$$\begin{aligned} \int M = & (\rho(x), 1) = (m_0 \delta(\overline{AB}) + m_1 \delta(x-b_1) + \\ & + m_2 \delta(x-b_2), 1) = \int_{\overline{AB}} m_0 dx + m_1 + m_2 = \\ = & \int_0^a m_0 dx + m_1 + m_2 = m_0 a + m_1 + m_2, \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

а момент инерции балки относительно ее конца  $A$  имеет вид

$$\begin{aligned} I_A = & (\rho(x), x^2) = \\ = & (m_0 \delta(\overline{AB}) + m_1 \delta(x-b_1) + m_2 \delta(x-b_2), x^2) = \\ = & \int_{\overline{AB}} m_0 x^2 dx + m_1 x^2|_{x=b_1} + m_2 x^2|_{x=b_2}. \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с (3.3.53).

Рассмотрим теперь прямоугольную пластинку  $ABCD$  размерами  $a$  и  $b$ . Предположим, что на пластинку действуют равномерно распределенная масса с поверхностной плотностью  $m_0$  и сосредоточенная масса  $m_1$  в точке  $A_1$  с координатами  $c$  и  $d$  относительно системы координат  $Axy$  (фиг. 3.21). Плотность масс будет равна



Фиг. 3.21.

$$\rho(x, y) = m_0 \delta(S) + m_1 \delta(x - c, y - d), \quad (3.3.56)$$

где введена обобщенная функция Дирака  $\delta(S)$ , сосредоточенная на прямоугольнике  $ABCD$ .

Полная масса пластинки равняется

$$\begin{aligned} M &= (\rho(x, y), 1) = (m_0 \delta(S) + m_1 \delta(x - c, y - d), 1) = \\ &= \iint_{ABCD} m_0 dx dy + m_1 = m_0 ab + m_1, \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

а момент инерции относительно оси  $Ox$ , например, имеет следующий вид:

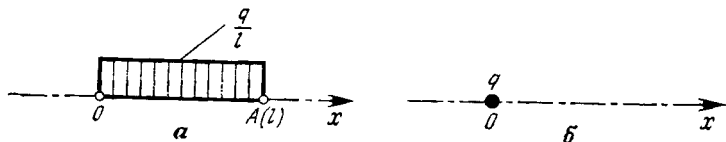
$$\begin{aligned} I_x &= (\rho(x, y), y^2) = (m_0 \delta(S) + m_1 \delta(x - c, y - d), y^2) = \\ &= \iint_{ABCD} m_0 y^2 dx dy + m_1 y^2 \Big|_{y=d} = \frac{1}{3} m_0 ab^3 + m_1 d^2. \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

### 3.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

#### 3.4.1. Электрические заряды

##### 3.4.1.1. Плотность электрического заряда

Рассмотрим электрический заряд величиной  $q/l$ , равномерно распределенный на отрезке  $OA$  длиной  $l$  оси  $Ox$  (фиг. 3.22, *a*). Линейная плотность рассматриваемого заряда выражается функцией



Фиг. 3.22.

$$q_l(x) = \begin{cases} \frac{q}{l} & \text{при } x \in [0, l], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, l]. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Функции  $q_l(x)$  соответствует обобщенная функция, определяемая соотношением

$$(q_l(x), \varphi(x)) = \frac{q}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad (3.4.2)$$

где  $\varphi(x) \in K(R)$  — основная функция. Применяя теорему о среднем для интеграла из правой части (3.4.2), при  $l \rightarrow +0$  ( $A \rightarrow 0$ ) получаем

$$\lim_{l \rightarrow +0} (q_l(x), \varphi(x)) = \lim_{l \rightarrow +0} \left[ \frac{q}{l} l \varphi(\xi) \right], \quad 0 < \xi < l,$$

и окончательно можно написать

$$\lim_{l \rightarrow +0} (q_l(x), \varphi(x)) = q \lim_{l \rightarrow +0} \varphi(\xi) = q \varphi(0) = (q\delta(x), \varphi(x)). \quad (3.4.2')$$

Отсюда следует соотношение

$$\lim_{l \rightarrow +0} q_l(x) = q\delta(x), \quad (3.4.3)$$



где предел рассматривается в смысле теории обобщенных функций.

Итак, линейная плотность точечного заряда  $q$ , находящегося в начале координат, определяется следующим соотношением (фиг. 3.22, б):

$$\rho(x) = q\delta(x). \quad (3.4.4)$$

Аналогичный результат можно получить, замечая, что соотношение (3.4.1) может быть записано в виде

$$q_l(x) = \frac{q}{l} h(x), \quad (3.4.1')$$

где

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, l] \\ 0 & \text{при } x \notin [0, l] \end{cases} = \theta(x) - \theta(x-l) \quad (3.4.5)$$

является характеристической функцией отрезка  $[0, l]$ . Предельным переходом в смысле теории обобщенных функций при  $l \rightarrow +0$  из формулы (3.4.5) получим производную обобщенной функции Хевисайда  $\theta(x)$ . Таким образом, функция  $(1/l)h(x)$  соответствует некоторой дельтообразной последовательности и полученный результат совпадает с (3.4.4).

Аналогично поверхностная плотность некоторого точечного электрического заряда величиной  $q$ , находящегося в начале координат в плоскости  $Oxy$ , выражается через обобщенную функцию (фиг. 3.22, б):

$$\rho(x, y) = q\delta(x, y). \quad (3.4.6)$$

Для объемной плотности точечного электрического заряда  $q$ , находящегося в начале ортогональной системы координат  $Oxyz$ , имеем следующее соотношение:

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x, y, z), \quad (3.4.7)$$

которое может быть записано в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}), \quad (3.4.7')$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки. Если рассматриваемый заряд находится в некоторой точке  $A$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$  (фиг. 3.23), то

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.4.8)$$

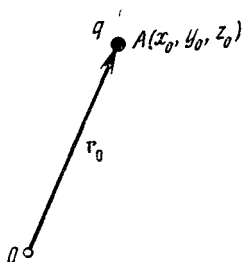
Полученная объемная плотность может быть записана и в виде

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \quad (3.4.8')$$

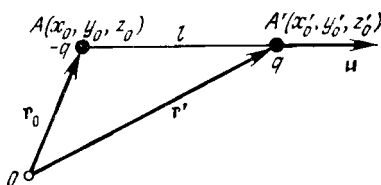
Действуя обобщенной функцией (3.4.7) на некоторую основную функцию  $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$  со значением 1 в начале координат, получим

$$\begin{aligned} (\rho(x, y, z), \varphi(x, y, z)) &= (q\delta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \\ &= q\varphi(0, 0, 0) = q. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Следовательно, полный заряд в пространстве  $R^3$  равен  $q$ , и представление (3.4.7) имеет физический смысл.



Фиг. 3.23.



Фиг. 3.24.

### 3.4.1.2. Объемная плотность электрического диполя

Электрический диполь состоит из двух точечных электрических зарядов  $-q$  и  $q$ , расположенных соответственно в точках  $A(x_0, y_0, z_0)$  и  $A'(x'_0, y'_0, z'_0)$  на расстоянии  $l$  друг от друга (фиг. 3.24). Предположим, что это расстояние мало по сравнению с расстояниями от этих зарядов до точек, в которых определяется напряженность электрического поля. Прямая, определенная точками  $A$  и  $A'$ , называется *осью диполя*. Ее направление задается ортом  $\mathbf{u}$ , направленным от отрицательного заряда к положительному. Выражение

$$D = ql \quad (3.4.10)$$

называется *моментом диполя*.

Обозначим через  $\rho_-(\mathbf{r})$  и  $\rho_+(\mathbf{r})$  соответственно плотности зарядов  $-q$  и  $q$ , а через  $\rho(\mathbf{r})$  — плотность диполя. Можно написать, что

$$\rho_l(\mathbf{r}) = \rho_+(\mathbf{r}) - \rho_-(\mathbf{r}) = q [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]$$

или

$$\rho_l(\mathbf{r}) = -\frac{D}{l} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0)]. \quad (3.4.11)$$

**Определение 3.4.1.** *Объемной плотностью электрического диполя, сосредоточенного в точке  $A$ , называется предел в смысле теории обобщенных функций плотности  $\rho_l$  при  $A' \rightarrow A$  ( $l \rightarrow +0$ ), если момент  $D$  диполя остается постоянным.*

В этом случае можно написать, что

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{l \rightarrow +0} \rho_l(\mathbf{r}) = -D \lim_{l \rightarrow +0} \frac{1}{l} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0)].$$

Используя производную по направлению обобщенной функции Дирака, введенную по формуле (3.2.6), получим

$$\rho(\mathbf{r}) = -D \frac{\partial}{\partial u} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -D \mathbf{u} \cdot \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.4.12)$$

Следовательно, объемная плотность электрического диполя характеризуется:

- а) точкой его приложения  $A(\mathbf{r}_0)$ ;
- б) ортом  $\mathbf{u}$ , определяющим предельный переход;
- в) его величиной  $D$ .

Знак объемной плотности электрического диполя зависит от направления  $\mathbf{u}$  и определяется как указано выше.

### 3.4.2. Электрический слой на кривой или на поверхности

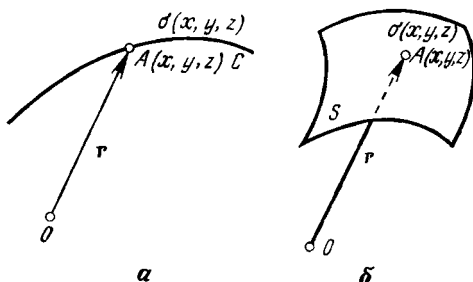
#### 3.4.2.1. Плотность электрического простого слоя на кривой или на поверхности

Рассмотрим гладкую кривую  $C$ , на которой находится электрический заряд (*электрический простой слой*) с линейной плотностью  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$  (фиг. 3.25, а).

Объемная плотность заряда  $q$ , находящегося в начале координат, определяется по формуле (3.4.7'). Обобщением этого выражения является *объемная плотность электрического простого слоя*, находящегося на кривой  $C$  с линейной плотностью  $\sigma(x, y, z)$ , выраженная через обобщенную функцию

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) = \sigma(\mathbf{r}) \delta(C), \quad (3.4.13)$$

где  $\delta(C)$  — обобщенная функция Дирака, сосредоточенная на кривой  $C$ . Обобщенная функция (3.4.13) опреде-



Фиг. 3.25.

ляется соотношением

$$(\rho(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \int_C \sigma(x, y, z) \varphi(x, y, z) ds, \quad (3.4.13')$$

$$\varphi(x, y, z) \in K(R^3).$$

Аналогично, если вместо кривой  $C$  рассматривать поверхность  $S$ , на которой распределен электрический заряд (*электрический простой слой*) с поверхностной плотностью  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$  (фиг. 3.25, б), то соответствующая объемная плотность будет определяться обобщенной функцией

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) = \sigma(\mathbf{r}) \delta(S), \quad (3.4.14)$$

описываемой соотношением

$$(\rho(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \int_S \sigma(x, y, z) \varphi(x, y, z) dS,$$

$$\varphi(x, y, z) \in K(R^3), \quad (3.4.14')$$

где  $\delta(S)$  — обобщенная функция Дирака, сосредоточенная на поверхности  $S$ .

Заметим, что объемные плотности (3.4.13) и (3.4.14) равны нулю соответственно в любой точке  $(x, y, z) \notin C$  и в любой точке  $(x, y, z) \notin S$ . Это и является проверкой правильности полученных представлений.

### 3.4.2.2. Плотность электрического двойного слоя на кривой или на поверхности

Рассмотрим кривую  $C$ , на которой распределен отрицательный электрический заряд с линейной плотностью  $-\sigma(\mathbf{r}) = -\sigma(x, y, z)$ . В каждой точке кривой рассмотрим отрезок постоянной длины  $h$ , направленный по *главной нормали*  $\mathbf{v}$ . Таким образом, каждой точке  $A$  кривой  $C$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  поставим в соответствие точку  $A'$  с радиусом-вектором

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + h\mathbf{v}. \quad (3.4.15)$$

Совокупность всех точек  $\mathbf{r}'$  составляет новую кривую  $C'$  (фиг. 3.26, а).

Обозначим через  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\tau}'$  орты касательных к кривым  $C$  и  $C'$  соответственно в точках  $A$  и  $A'$ , а через  $s$  и  $s'$  — длины дуг соответствующих кривых. Тогда можно написать

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{d\mathbf{r}'}{ds'} = \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \frac{ds}{ds'} = \left( \boldsymbol{\tau} + h \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right) \frac{ds}{ds'}. \quad (3.4.15')$$

Используя формулу Френе

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\rho'} \boldsymbol{\beta}, \quad (3.4.16)$$

где  $\boldsymbol{\beta}$  — орт бинормали к кривой  $C$ ,  $\rho$  — радиус кривизны, а  $\rho'$  — радиус кручения в точке  $A$ , получим

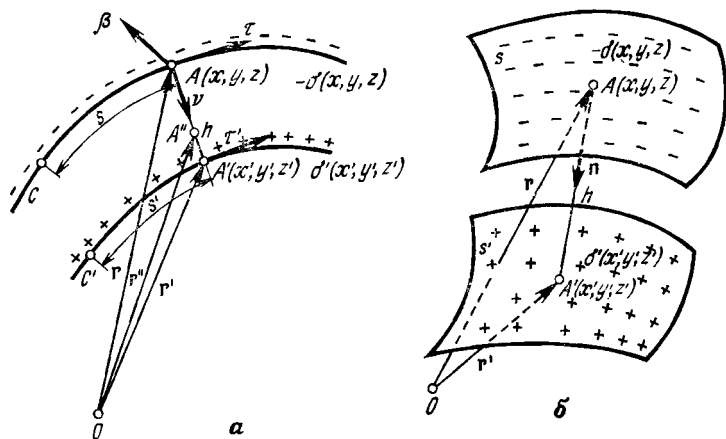
$$\boldsymbol{\tau}' = \left[ \left( 1 - \frac{h}{\rho} \right) \boldsymbol{\tau} - \frac{h}{\rho'} \boldsymbol{\beta} \right] \frac{ds}{ds'}. \quad (3.4.17)$$

Можно написать

$$ds' = \sqrt{\left(1 - \frac{h}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{h}{\rho'}\right)^2} ds, \quad (3.4.18)$$

выражая таким образом элемент дуги кривой  $C'$  через элемент дуги кривой  $C$ . В случае плоской кривой  $1/\rho' = 0$  и соотношение (3.4.18) принимает вид

$$ds' = \left(1 - \frac{h}{\rho}\right) ds. \quad (3.4.18')$$



Фиг. 3.26.

На полученной кривой  $C'$  рассмотрим распределенный электрический заряд противоположного знака (т. е. положительный) с линейной плотностью  $\sigma'(\mathbf{r}') = \sigma'(x', y', z')$  и такой, что между линейными плотностями  $\sigma$  и  $\sigma'$  существует зависимость

$$\sigma(x, y, z) ds = \sigma'(x', y', z') ds'. \quad (3.4.19)$$

**Определение 3.4.2** Электрическим двойным слоем на кривой  $C$  называется предел в смысле теории обобщенных функций при  $h \rightarrow +0$  совокупности электрических зарядов, распределенных на кривых  $C$  и  $C'$ , линейные

плотности которых удовлетворяют соотношению (3.4.19) при условии (3.4.18) (или (3.4.18')). При этом момент (или линейная интенсивность) электрического двойного слоя, определяемый соотношением

$$\mu(x, y, z) = h\sigma(x, y, z), \quad (3.4.20)$$

остается постоянным (этот момент положительный).

Если предположить, что в точке  $A$  находится отрицательный электрический заряд  $-\sigma(\mathbf{r})ds$ , а в точке  $A'$  — электрический заряд  $\sigma'(\mathbf{r}')ds'$ , которые удовлетворяют соотношению (3.4.19), то предельным переходом при  $h \rightarrow +0$  получим электрический диполь, сосредоточенный в точке  $A$ . Полученный диполь имеет плотность  $-\mu(\mathbf{r})\partial/\partial\nu\delta(A)ds$ , что и оправдывает приведенное выше определение электрического двойного слоя.

Совокупности зарядов, распределенных на кривых  $C$  и  $C'$ , соответствует обобщенная функция

$$\rho_h(\mathbf{r}) = -\sigma(\mathbf{r})\delta(C) + \sigma'(\mathbf{r}')\delta(C'). \quad (3.4.21)$$

Рассматривая основную функцию  $\varphi(\mathbf{r}) \in K(R^3)$ , можно написать равенство

$$(\rho_h(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) = -\int_C \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})ds + \int_{C'} \sigma'(\mathbf{r}')\varphi(\mathbf{r}')ds',$$

которое с учетом соотношения (3.4.19) принимает вид

$$(\rho_h(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) = -\int_C \sigma(\mathbf{r})[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')]ds.$$

Если учесть соотношение (3.4.15) и использовать формулу конечных приращений, то получим равенство

$$(\rho_h(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) = \int_C h\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi(\mathbf{r}'')ds, \quad (3.4.21')$$

где  $\partial/\partial\nu$  — производная по направлению  $\mathbf{v}$  во внутренней точке  $A''(\mathbf{r}'')$  отрезка  $AA'$ , а нормаль  $\mathbf{v}$  направлена от кривой  $C$ , на которой распределен отрицательный заряд, к кривой  $C'$ , на которой распределен положительный заряд.

Используя соотношение (3.4.20) при  $h \rightarrow +0$ , получим

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} (\rho_h(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) &= (\rho(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) = \int_C \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial v} \varphi(\mathbf{r}) ds = \\ &= \left( \delta(C), \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial v} \varphi(\mathbf{r}) \right) = \left( \mu(\mathbf{r}) \delta(C), \frac{\partial}{\partial v} \varphi(\mathbf{r}) \right), \end{aligned}$$

откуда

$$(\rho(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) = - \left( \frac{\partial}{\partial v} [\mu(\mathbf{r}) \delta(C)], \varphi(\mathbf{r}) \right).$$

Окончательно можно написать выражение

$$\rho(\mathbf{r}) = - \frac{\partial}{\partial v} [\mu(\mathbf{r}) \delta(C)], \quad (3.4.22)$$

которое и является *объемной плотностью электрического двойного слоя на кривой  $C$* . Заметим, что соотношение (3.4.22) является обобщением соотношения (3.4.12), полученного для электрического диполя.

Аналогично рассмотрим две поверхности  $S$  и  $S'$ , для которых переход от точки  $A$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  к точке  $A'$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$  проводится по формуле

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + h\mathbf{n}, \quad (3.4.23)$$

где  $\mathbf{n}$  — орт внутренней нормали к поверхности  $S$  в точке  $A$  (фиг. 3.26, б). Предположим, что на поверхности  $S$  распределен отрицательный заряд с поверхностной плотностью  $-\sigma(\mathbf{r}) = -\sigma(x, y, z)$ , на поверхности  $S'$  — положительный электрический заряд с поверхностной плотностью  $\sigma'(\mathbf{r}') = \sigma'(x', y', z')$ , такие, что

$$\sigma(\mathbf{r}) dS = \sigma'(\mathbf{r}') dS'. \quad (3.4.24)$$

Таким образом, нормаль  $\mathbf{n}$  направлена от отрицательного заряда к положительному.

**Определение 3.4.3.** *Электрическим двойным слоем на поверхности  $S$  называется предел в смысле теории обобщенных функций при  $h \rightarrow +0$  совокупности электрических зарядов, распределенных на поверхностях  $S$  и  $S'$ , поверхностные плотности которых удовлетворяют соотношению (3.4.24). При этом предполагается, что момент (или поверхностная интенсивность) электрического двойного*

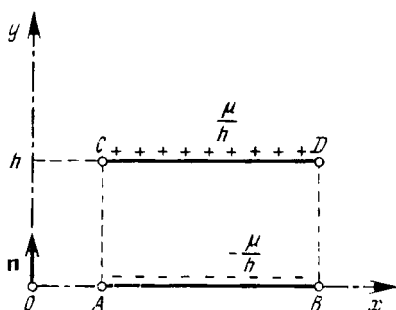


слоя, определенный соотношением вида (3.4.20), остается постоянным (этот момент положительный).

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше, можно получить выражение для *объемной плотности электрического двойного слоя на поверхности S*:

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial n} [\mu(\mathbf{r}) \delta(S)]. \quad (3.4.25)$$

Как и в случае электрического двойного слоя на кривой, обобщенная функция (3.4.25) соответствует распределе-



Фиг. 3.27.

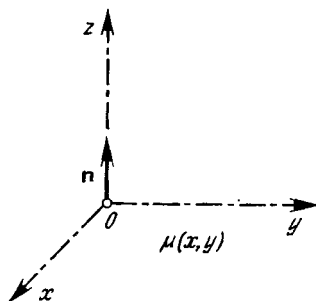
нию диполей на поверхности  $S$ , направленных по внутренней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности, а  $\mu(\mathbf{r})$  является поверхностной плотностью момента.

В плоскости  $Oxy$  рассмотрим, например, два параллельных отрезка  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$ , на первом из которых распределен отрицательный электрический заряд с плотностью  $-\sigma = -\mu/h$ , а на втором — положительный электрический заряд с плотностью  $\sigma = \mu/h$ , где  $h$  — расстояние между этими отрезками. Предположим, что отрезок  $\overline{AB}$  лежит на оси  $Ox$  (фиг. 3.27). Используя полученные выше результаты, получим плотность электрического двойного слоя на отрезке  $\overline{AB}$  в виде

$$\rho(x, y) = -\frac{\partial}{\partial n} [\mu \delta(\overline{AB})] = -\mu \frac{\partial}{\partial y} \delta(\overline{AB}), \quad (3.4.26)$$

где  $\delta(\overline{AB})$  — обобщенная функция Дирака, сосредоточенная на отрезке  $\overline{AB}$ .

Рассмотрим теперь электрический двойной слой с моментом  $\mu(x, y)$ , расположенный в плоскости  $Oxy$ , нормаль  $\mathbf{n}$  к которой направлена в положительном направлении оси  $Oz$  (фиг. 3.28). Можно написать



Фиг. 3.28.

$$\rho(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial z} [\mu(x, y) \delta(z=0)].$$

Замечая, что  $\delta(Oxy) = \delta(z=0) = \delta(z)$ , так как

$$\begin{aligned} (\delta(z=0), \varphi(x, y, z)) &= \int_{z=0} \varphi(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{R^2} \varphi(x, y, 0) dx dy = (\delta(z), \varphi(x, y, z)), \end{aligned}$$

где  $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$ , получим

$$\rho(x, y, z) = -\mu(x, y) \frac{\partial}{\partial z} \delta(z) = -\mu(x, y) \delta'(z). \quad (3.4.27)$$

## Применения теории обобщенных функций в механике

### 4.1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ МЕХАНИКИ

#### 4.1.1. Механические величины, представляемые обобщенными функциями

##### 4.1.1.1. Математическая модель механики

*Математическая модель ньютоновской механики, которую мы будем рассматривать, основана на взаимно независимых понятиях пространства, времени и массы. В основе этой механики лежат три закона, сформулированные Исааком Ньютоном, которые являются результатом многочисленных предыдущих исследований.*

*а) Любая материальная точка, на которую не действуют никакие силы, сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения (первый закон механики, или закон инерции).*

*б) Движение материальной точки описывается дифференциальным уравнением*

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}, \quad (4.1.1)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на материальную точку массы  $m$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор этой точки относительно фиксированной точки (фиг. 4.1). Если масса рассматриваемой точки постоянна во времени, как и будет предполагаться в дальнейшем, уравнение (4.1.1) принимает вид

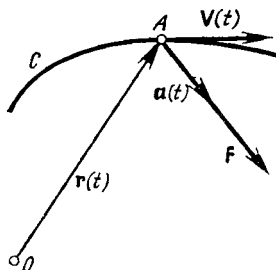
$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (4.1.1')$$

где точками обозначена производная по времени (второй закон механики).

*в) Силы действия двух тел (или двух точек) друг на друга численно равны и направлены в противоположные*

стороны (третий закон механики, или закон действия и противодействия).

Предполагается, что радиус-вектор  $\mathbf{r}(t)$  имеет непрерывные производные первого и второго порядка (его компоненты являются функциями класса  $C^2$ ). Кроме того, считается, что сила  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$  непрерывно зависит от времени, координат и скоростей. В таких случаях дифференциальные уравнения рассматриваемых задач могут



Фиг. 4.1.

быть проинтегрированы при некоторых известных начальных условиях.

Но существует большое число механических явлений, в которых условия непрерывности не соблюдаются. Отсюда и возникает необходимость расширения классических рамок ньютоновской механики и дополнения ее математической модели методами теории обобщенных функций.

#### 4.1.1.2. Скорость. Ускорение. Сила

Пусть  $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор некоторой материальной точки массы  $m$ . Уравнение траектории  $C$  (фиг. 4.1) этой точки имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (4.1.2)$$

Эта функция из физических соображений не должна иметь разрывов, т. е.  $\mathbf{r}(t)$  является непрерывной функцией от  $t$ .

Предположим, что *скорость*

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (4.1.3)$$

является непрерывной функцией на рассматриваемом интервале времени  $[t', t'']$ , за исключением конечного числа значений  $t$  ( $t = t_i, i = 1, 2, \dots, n$ ), которым соответствуют разрывы первого рода. Согласно формуле (1.2.31), можно написать

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i \delta(t - t_i), \quad (4.1.4)$$

где

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}(t_i + 0) - \mathbf{v}(t_i - 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1.5)$$

является скачком скорости, соответствующим точке разрыва  $t_i$ , а знаком  $\sim$  обозначена производная в обычном смысле.

Введем обозначения

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t), \quad \tilde{\mathbf{a}}(t) = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{a}_c(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i \delta(t - t_i), \quad (4.1.6)$$

где  $\mathbf{a}(t)$  — ускорение в смысле теории обобщенных функций (обобщенное ускорение),  $\tilde{\mathbf{a}}(t)$  — ускорение в обычном смысле,  $\mathbf{a}_c(t)$  — добавочное ускорение, возникающее из-за разрывов. Тогда соотношение (4.1.4) принимает вид

$$\mathbf{a}(t) = \tilde{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{a}_c(t). \quad (4.1.7)$$

**Теорема 4.1.1.** *Ускорение материальной точки в смысле теории обобщенных функций равно ускорению этой точки в обычном смысле там, где оно существует, плюс сумма произведений скачков скорости точки на соответствующие обобщенные функции Дирака.*

Учитывая соотношение (4.1.1'), введем обозначения

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t), \quad \tilde{\mathbf{F}}(t) = m\tilde{\mathbf{a}}(t), \quad \mathbf{F}_c(t) = m\mathbf{a}_c(t), \quad (4.1.8)$$

где  $F(t)$  — обобщенная сила (в смысле теории обобщенных функций),  $\tilde{F}(t)$  — сила в обычном смысле, а  $F_c(t)$  — добавочная сила, обусловленная разрывами. Таким образом, соотношение (4.1.7) примет вид

$$F(t) = \tilde{F}(t) + F_c(t). \quad (4.1.9)$$

**Теорема 4.1.2.** *Обобщенная сила (в смысле теории обобщенных функций), действующая на некоторую материальную точку, равна сумме силы в обычном смысле и добавочной силы (обусловленной разрывами), которые действуют на эту же точку.*

В случае несвободной материальной точки нужно применить аксиому связей, что приводит к введению реакции связей  $R = R(t)$ . Тогда можно написать

$$R(t) = \tilde{R}(t) + R_c(t), \quad (4.1.9')$$

где  $R(t)$  — обобщенная реакция связей (в смысле теории обобщенных функций),  $\tilde{R}(t)$  — обычная реакция связей, а  $R_c(t)$  — добавочная реакция связей, обусловленная разрывами.

**Теорема 4.1.2'.** *Обобщенная реакция связей (в смысле теории обобщенных функций), действующая на некоторую материальную точку, равна сумме обычной реакции связей и добавочной реакции связей (обусловленной разрывами), действующих на эту же материальную точку.*

Итак, второй закон механики можно сформулировать в обобщенных функциях, если ввести обобщенные ускорения и обобщенные силы и понимать производную в смысле теории обобщенных функций.

В самом деле, для свободной материальной точки имеем уравнение (4.1.1'), а для несвободной материальной точки

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (4.1.1'')$$

Предположим, что и для обобщенной функции  $\mathbf{F} = 0$  выполняется условие  $\mathbf{a} = 0$ , т. е.

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) + \sum_{i=1}^n V_i \delta(t - t_i) = 0. \quad (4.1.10)$$

Если  $\varphi(t)$  — основная функция, носитель которой не содержит моменты времени  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), то из формулы (4.1.10) получается

$$(\tilde{\mathbf{a}}(t), \varphi(t)) = 0,$$

откуда следует, что функция  $\tilde{\mathbf{a}}(t)$  почти всюду равна нулю (за исключением моментов времени  $t_i$ ). С другой стороны, рассмотрим основную функцию  $\varphi(t)$ , носителем которой является только точка  $t_i$ . Тогда будем иметь

$$\mathbf{V}_i \varphi(t_i) = 0,$$

откуда следует, что  $\mathbf{V}_i = 0$ . Аналогично для  $i=1, 2, \dots, n$  получим

$$\mathbf{V}_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Если подставить полученный результат в формулу (4.1.10), то оказывается, что  $\tilde{\mathbf{a}}(t) = 0$ , т. е. материальная точка описывает прямолинейное и равномерное движение. Этот результат получается путем проектирования (4.1.10) на три оси координат и применения теоремы 1.2.2. Следовательно, закон инерции сохраняет свой вид и при рассмотрении обобщенных сил. То же самое справедливо и для закона действия и противодействия.

#### 4.1.1.3. Количество движения. Момент количества движения

Произведение массы материальной точки на ее скорость является вектором, который называется *количеством движения материальной точки* и имеет вид

$$\mathbf{H}(t) = m\mathbf{v}(t). \quad (4.1.11)$$

Количество движения материальной точки является непрерывной функцией на рассматриваемом интервале времени, за исключением моментов времени  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), где возникают разрывы первого рода.

Полное количество движения системы материальных точек получается суммированием количеств движения каждой точки в отдельности. Если рассматривается сплошное тело, его полное количество движения получа-

ется интегрированием количества движения элемента массы по всей занимаемой телом области; важную роль при этом имеет интеграл Стильтеса. Такие утверждения могут быть сделаны для всех вводимых здесь величин. Мы же ограничимся утверждениями, которые касаются только материальной точки.

Скачок количества движения в момент разрыва  $t_i$ , который имеет вид

$$(\Delta \mathbf{H})_i = m \mathbf{V}_i = m [\mathbf{v}(t_i + 0) - \mathbf{v}(t_i - 0)], \quad (4.1.12)$$

выражается через скачок скорости в рассматриваемый момент разрыва.

Введем еще величины

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t) dt, \quad \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{F}}(t) dt, \quad \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}_c(t) dt, \quad (4.1.13)$$

являющиеся соответственно *импульсом обобщенной силы*, *импульсом обычной силы* и *импульсом добавочной силы* на интервале времени  $[t', t'']$ .

Для первой и третьей из введенных величин применены классические обозначения, несмотря на то что соответствующие интегралы не имеют, вообще говоря, смысла с точки зрения теории обобщенных функций.

Замечая, что

$$\begin{aligned} \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}_c(t) dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t'}^{t''} m \mathbf{V}_i \delta(t - t_i) dt = \\ &= \sum_{i=1}^n m \mathbf{V}_i, \quad t_i \in (t', t''), \end{aligned}$$

и используя формулу (4.1.9), можно написать

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t) dt = \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{F}}(t) dt + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{H})_i. \quad (4.1.14)$$

**Теорема 4.1.3.** *Импульс обобщенной силы, действующей на некоторую материальную точку на определенном интервале времени, равен импульсу обычной силы, дей-*



ствующей на ту же точку на том же интервале времени, к которому добавляется сумма скачков количества движения материальной точки, соответствующих моментам разрыва.

Момент количества движения материальной точки определяется соотношением

$$\mathbf{K}_O(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{H}(t) = \mathbf{r}(t) \times [m\mathbf{v}(t)]. \quad (4.1.15)$$

Скачок в момент разрыва момента количества движения, который имеет вид

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{K})_i &= m\mathbf{r}(t_i) \times \mathbf{v}(t_i + 0) - m\mathbf{r}(t_i) \times \mathbf{v}(t_i - 0) = \\ &= m\mathbf{r}(t_i) \times \mathbf{V}_i = \mathbf{r}(t_i) \times (\Delta \mathbf{H})_i, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

выражается через скачок количества движения (или скачок скорости) в рассматриваемый момент разрыва.

Введем еще величины

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \mathbf{F}(t) dt, \quad \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \tilde{\mathbf{F}}(t) dt, \quad \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \mathbf{F}_c(t) dt, \quad (4.1.17)$$

являющиеся соответственно интегралом момента обобщенной силы, интегралом момента обычной силы и интегралом момента добавочной силы на интервале времени  $[t', t'']$ . Для первой и третьей из введенных величин применены классические обозначения, несмотря на то что соответствующие интегралы не имеют, вообще говоря, смысла с точки зрения теории обобщенных функций.

Исходя из соотношения (4.1.9), можно написать

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \mathbf{F}(t) dt = \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \tilde{\mathbf{F}}(t) dt + \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \mathbf{F}_c(t) dt,$$

или

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \mathbf{F}(t) dt = \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \tilde{\mathbf{F}}(t) dt + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{K})_i. \quad (4.1.18)$$

**Теорема 4.1.4.** *Интеграл момента обобщенной силы, действующей на материальную точку на определенном интервале времени, равен интегралу момента обычной*

силы, действующей на ту же точку на том же интервале времени, к которому добавляется сумма скачков момента количества движения материальной точки, соответствующих моментам разрыва.

#### 4.1.1.4. Работа силы. Кинетическая энергия

Работа силы  $\mathbf{F}(t)$  на интервале времени  $[t', t'']$  определяется формулой

$$L = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r}(t), \quad (4.1.19)$$

где точкой обозначено скалярное произведение.

Введем обозначения

$$L_F = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r}(t), \quad L_{\tilde{F}} = \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{F}}(t) \cdot d\mathbf{r}(t),$$

$$L_{F_c} = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}_c(t) \cdot d\mathbf{r}(t), \quad (4.1.20)$$

где  $L_F$  — работа обобщенной силы  $\mathbf{F}(t)$ ,  $L_{\tilde{F}}$  — работа обычной силы  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ , а  $L_{F_c}$  — работа добавочной силы  $\mathbf{F}_c(t)$ . Для первой и третьей из введенных величин применены классические обозначения, несмотря на то что соответствующие интегралы не имеют, вообще говоря, смысла с точки зрения теории обобщенных функций. Можно написать

$$L_F = L_{\tilde{F}} + L_{F_c}. \quad (4.1.21)$$

**Теорема 4.1.5.** *Работа заданной обобщенной силы, действующей на свободную материальную точку на определенном интервале времени, равна сумме работы заданной обычной силы, действующей на ту же материальную точку на том же интервале времени, и работы заданной добавочной силы, действующей на материальную точку на рассматриваемом интервале времени.*

Аналогично для обобщенной реакции связей будем иметь

$$L_R = L_{\tilde{R}} + L_{R_c}. \quad (4.1.21')$$

**Теорема 4.1.5'.** *Работа обобщенной реакции связей, действующей на несвободную материальную точку на определенном интервале времени, равна сумме работы заданной обычной реакции связей, действующей на ту же материальную точку на том же интервале времени, и работы заданной добавочной реакции связей, действующей на материальную точку на рассматриваемом интервале времени.*

Введенные выше величины имеют вид

$$\begin{aligned} L_R &= \int_{t'}^{t''} \mathbf{R}(t) \cdot d\mathbf{r}(t), \quad L_{\tilde{R}} = \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{R}}(t) \cdot d\mathbf{r}(t), \quad L_{R_c} = \\ &= \int_{t'}^{t''} \mathbf{R}_c(t) \cdot d\mathbf{r}(t). \end{aligned} \quad (4.1.20')$$

Кинетическая энергия материальной точки определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} m v^2(t). \quad (4.1.22)$$

Если  $t_i$  — момент разрыва, то можно написать соотношения

$$\lim_{t \rightarrow t_i - 0} T(t) = \frac{1}{2} m \left[ \lim_{t \rightarrow t_i - 0} v(t) \right]^2 = \frac{1}{2} m v^2(t_i - 0), \quad (4.1.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i + 0} T(t) = \frac{1}{2} m \left[ \lim_{t \rightarrow t_i + 0} v(t) \right]^2 = \frac{1}{2} m v^2(t_i + 0),$$

которые служат доказательством того, что моменты разрыва скорости являются и моментами разрыва кинетической энергии.

#### 4.1.2. Общие теоремы механики материальной точки

Ниже приводятся теоремы об изменении количества движения, об изменении момента количества движения и об изменении кинетической энергии для материальной точки. Для дискретной или непрерывной механической системы можно сделать аналогичные утверждения.

### 4.1.2.1. Теорема об изменении количества движения

В рамках теории обобщенных функций второй закон механики имеет вид

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d}{dt} [m\mathbf{v}(t)]. \quad (4.1.24)$$

Если разрывов нет, этот закон записывается в виде

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} [m\mathbf{v}(t)].$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \mathbf{H}(t) + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{H})_i \delta(t - t_i),$$

где скачок количества движения определяется формулой (4.1.12). Используя соотношение

$$\mathbf{F}_c(t) = \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{H})_i \delta(t - t_i), \quad (4.1.25)$$

определяющее добавочную силу, получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{F}_c(t). \quad (4.1.26)$$

**Теорема 4.1.6.** (Теорема об изменении количества движения.) Производная по времени в смысле теории обобщенных функций количества движения свободной материальной точки равна заданной обобщенной силе, действующей на эту точку.

Для несвободной материальной точки имеем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{R}(t). \quad (4.1.26')$$

**Теорема 4.1.6'.** Производная по времени в смысле теории обобщенных функций количества движения несвободной материальной точки равна сумме заданной обобщенной силы и обобщенной реакции связей, действующих на эту точку.

### 4.1.2.2. Теорема об изменении момента количества движения

Если скорость и ускорение точки являются непрерывными функциями, то теорема об изменении момента количества движения записывается в виде

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \mathbf{K}_O(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \{ \mathbf{r}(t) \times [m\mathbf{v}(t)] \} = \mathbf{r}(t) \times \tilde{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{M}_O \tilde{\mathbf{F}}(t). \quad (4.1.27)$$

Если скорость имеет разрывы первого рода, то можно написать

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_O(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \mathbf{K}_O(t) + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{K})_i \delta(t - t_i),$$

где скачок момента количества движения определяется соотношением (4.1.16). В этом случае имеем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_O(t) = \mathbf{M}_O \mathbf{F}(t) = \mathbf{M}_O \tilde{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{M}_O \mathbf{F}_c(t), \quad (4.1.28)$$

где момент добавочной силы определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O \mathbf{F}_c(t) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}(t_i) \times (\Delta \mathbf{H})_i \delta(t - t_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{K})_i \delta(t - t_i). \end{aligned} \quad (4.1.28')$$

**Теорема 4.1.7.** (Теорема об изменении момента количества движения.) Производная по времени в смысле теории обобщенных функций момента количества движения свободной материальной точки равна моменту заданной обобщенной силы, действующей на эту точку, относительно полюса той же системы координат.

Для несвободной материальной точки выполняется следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_O(t) = \mathbf{M}_O \mathbf{F}(t) + \mathbf{M}_O \mathbf{R}(t). \quad (4.1.28'')$$

**Теорема 4.1.7'.** Производная по времени в смысле теории обобщенных функций момента количества движения несвободной материальной точки равна сумме моментов заданной обобщенной силы и реакции связей, действующих на эту точку, относительно полюса той же системы координат.

#### 4.1.2.3. Теорема об изменении кинетической энергии

Из соотношения (4.1.19) можно получить

$$L = \int_{t'}^{t''} m \frac{dv(t)}{dt} \cdot v(t) dt = \int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt} T_i(t) dt,$$

что приводит к теореме об изменении кинетической энергии (в обычном смысле) следующего вида:

$$L = T(t'') - T(t'). \quad (4.1.29)$$

Для производной по времени кинетической энергии можно написать

$$\frac{d}{dt} T(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} T(t) + \sum_{i=1}^n (\Delta T)_i \delta(t - t_i),$$

где скачок кинетической энергии, соответствующий моменту разрыва  $t_i$ , имеет вид

$$(\Delta T)_i = \frac{1}{2} m [v^2(t_i + 0) - v^2(t_i - 0)]. \quad (4.1.30)$$

Используя соотношение (4.1.21), получим

$$L_F = \int_{t'}^{t''} \frac{\tilde{d}}{dt} T(t) dt + \sum_{i=1}^n \int_{t'}^{t''} (\Delta T)_i \delta(t - t_i) dt,$$

откуда

$$L_F = T(t'') - T(t') + \sum_{i=1}^n (\Delta T)_i. \quad (4.1.31)$$

**Теорема 4.1.8.** (Теорема об изменении кинетической энергии.) Работа заданной обобщенной силы, действующей на свободную материальную точку на определенном интервале времени, равна разности между кинетической энергией в конечный момент времени и кинетической энергией в начальный момент времени, к которой добавляется сумма скачков кинетической энергии этой точки, соответствующих моментам разрыва.

В случае несвободной материальной точки следует рассмотреть также механическую работу  $L_R$  обобщенной реакции связей, т. е.

$$L_F + L_R = T(t'') - T(t') + \sum_{i=1}^n (\Delta T)_i. \quad (4.1.31')$$

**Теорема 4.1.8'.** Сумма работ заданной обобщенной силы и обобщенной реакции связей, действующих на несвободную материальную точку на определенном интервале времени, равна разности между кинетической энергией в конечный момент времени и кинетической энергией в начальный момент времени, к которой добавляется сумма скачков кинетической энергии этой точки, соответствующих моментам разрыва.

### 4.1.3. Общие теоремы механики в случае столкновений

Ниже приводятся теоремы об изменении количества движения, об изменении момента количества движения и об изменении кинетической энергии для материальной точки, участвующей в столкновениях. Для дискретной или непрерывной механической системы можно сделать аналогичные утверждения.

#### 4.1.3.1. Общие положения

Используя понятия обобщенной силы и количества движения обобщенной силы, введем понятие удара, при-

ложенного к материальной точке, с помощью формулы<sup>1</sup>

$$\mathbf{P} = \lim_{t''-t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t) dt, \quad (4.1.32)$$

где предел рассматривается в смысле теории обобщенных функций.

Очевидно, что и в этом случае интеграл не имеет смысла с точки зрения теории обобщенных функций; однако мы применим такую запись, чтобы она совпала с классической.

Предположим, что интервал  $[t', t'']$  содержит только одну точку разрыва  $t_0$  и таков, что  $|t'' - t'| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. В таком случае рассматриваемые силы являются обобщенными и удар можно считать обычным явлением, для которого применимы законы механики (см. разд. 4.1.1).

#### 4.1.3.2. Теорема об изменении количества движения. Теорема об изменении момента количества движения

Используя одну из теорем о среднем, можно написать

$$\lim_{t''-t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{F}}(t) dt = \mathbf{0}, \quad (4.1.33)$$

$$\lim_{t''-t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \tilde{\mathbf{F}}(t) dt = \mathbf{0}. \quad (4.1.33')$$

Следовательно, благодаря разрывам количеством движения обычной силы и интегралом момента обычной силы можно пренебречь по сравнению с количеством движения добавочной силы и интегралом момента добавочной силы. Таким образом, получаем

$$\lim_{t''-t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t) dt = m\mathbf{v}_0 \quad (4.1.34)$$

<sup>1</sup> Иногда вместо введенного здесь термина «удар» используется термин «ударный импульс». — Прим. ред.



и

$$\lim_{t''-t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{r}_0 \times (m\mathbf{v}_0), \quad (4.1.34')$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор в момент разрыва, а  $\mathbf{v}_0$  — скачок скорости, соответствующий этому моменту.

Теорема 4.1.6 принимает вид

$$(\Delta \mathbf{H})_0 = \mathbf{P}. \quad (4.1.35)$$

**Теорема 4.1.9.** (Теорема об изменении количества движения.) Скачок количества движения материальной точки в момент разрыва равен удару, действующему на рассматриваемую точку в этот момент.

С помощью теоремы 4.1.7 и формулы (4.1.32) получим

$$(\Delta \mathbf{K})_0 = \mathbf{r}_0 \times (\Delta \mathbf{H})_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{P}. \quad (4.1.36)$$

**Теорема 4.1.10.** (Теорема об изменении момента количества движения.) Скачок момента количества движения материальной точки в момент разрыва равен моменту удара, приложенного к точке в рассматриваемый момент разрыва.

Оба момента вычисляются относительно одного и того же полюса рассматриваемой системы координат.

#### 4.1.3.3. Теоремы об изменении кинетической энергии

Пусть  $\mathbf{v}'$  — скорость точки до столкновения, а  $\mathbf{v}''$  — ее скорость после столкновения. Теорему об изменении количества движения рассматриваемой точки можно записать в виде

$$m\mathbf{v}_0 = m(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') = \mathbf{P}. \quad (4.1.35')$$

Умножая скалярно это соотношение на  $\mathbf{v}''$ , получим

$$m\mathbf{v}''^2 - m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}''$$

или

$$T'' - T' + T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'', \quad (4.1.37)$$

где

$$T' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 \quad (4.1.38)$$

является кинетической энергией точки до столкновения,

$$T'' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}''^2 \quad (4.1.38')$$

представляет собой кинетическую энергию точки после столкновения, а

$$T_0 = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}'' - \mathbf{v}')^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 \quad (4.1.38'')$$

является кинетической энергией потерянной скорости.

Изменение кинетической энергии точки дается соотношением

$$(\Delta T)_0 = T'' - T', \quad (4.1.39)$$

и, таким образом, формулу (4.1.37) можно записать в виде

$$(\Delta T)_0 + T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}''. \quad (4.1.37')$$

**Теорема 4.1.11.** *(Теорема об изменении кинетической энергии.) Сумма изменения кинетической энергии материальной точки в момент разрыва и изменения кинетической энергии потерянной скорости в этот же момент времени равна скалярному произведению удара, приложенного к рассматриваемой точке, на ее скорость после момента разрыва.*

Если

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'' = 0 \quad (4.1.40)$$

(что может иметь место, например, когда после столкновения материальная точка останавливается), то получаем соотношение

$$(\Delta T)_0 + T_0 = 0. \quad (4.1.41)$$

**Теорема 4.1.12.** *(Теорема Карно.) Если выполняется условие (4.1.40), то сумма изменения кинетической энергии материальной точки в момент разрыва и изменения*

кинетической энергии потерянной скорости в тот же момент времени равна нулю.

Умножая скалярно соотношение (4.1.35') на  $\mathbf{v}'$ , получим

$$m\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}' - m\mathbf{v}'^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'$$

или

$$T'' - T' - T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}', \quad (4.1.42)$$

откуда

$$(\Delta T)_0 - T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'. \quad (4.1.42')$$

**Теорема 4.1.11'.** Разность между изменением кинетической энергии материальной точки в момент разрыва и изменением кинетической энергии потерянной скорости в тот же момент времени равна скалярному произведению удара, приложенного к рассматриваемой точке, на ее скорость до момента разрыва.

Приведенная теорема является аналогом теоремы об изменении кинетической энергии при ударе.

Если, в частности,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (4.1.40')$$

то  $(\Delta T)_0 = T_0$ .

**Теорема 4.1.12'.** Если выполняется условие (4.1.40'), то изменение кинетической энергии материальной точки в момент разрыва равно изменению кинетической энергии потерянной скорости в тот же момент времени.

Эта теорема является аналогом теоремы Карно при ударе.

Складывая соотношения (4.1.37') и (4.1.42') почленно, получим

$$(\Delta T)_0 = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{v}' + \mathbf{v}''). \quad (4.1.43)$$

**Теорема 4.1.13.** (Теорема Кельвина.) Изменение кинетической энергии материальной точки в момент разрыва равно скалярному произведению удара, приложенного к рассматриваемой точке, на полусумму скоростей точки до и после разрыва.

Из соотношений (4.1.37') и (4.1.42') получим

$$T_0 = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_0. \quad (4.1.43')$$

**Теорема 4.1.13'.** *Кинетическая энергия потерянной скорости в момент разрыва равна половине скалярного произведения удара, приложенного к рассматриваемой материальной точке, на скачок скорости в рассматриваемый момент разрыва.*

Эта теорема является аналогом теоремы Кельвина при ударе.

Используя понятия обобщенной реакции связей и количества движения обобщенной реакции связей, можно ввести понятие *удара связей* материальной точки с помощью определяющей формулы

$$\mathbf{P}_R = \lim_{t'' - t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} \mathbf{R}(t) dt, \quad (4.1.32')$$

где предел рассматривается в смысле теории обобщенных функций. В этом случае в сформулированных выше теоремах следует добавить соответствующие дополнительные члены.

## 4.2. ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ

### 4.2.1. Динамика материальной точки

#### 4.2.1.1. Динамика свободной материальной точки

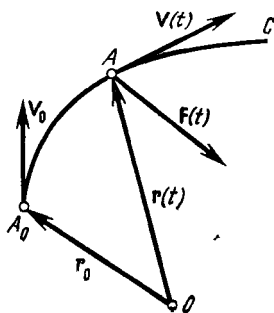
Движение свободной материальной точки описывается вторым законом Ньютона. Рассмотрим уравнение движения (4.1.1'), где  $\mathbf{F}(t)$  является обобщенной силой (4.1.9), а дифференцирование проводится в смысле теории обобщенных функций. Предположим, что вектор  $\mathbf{r}(t)$  определен при  $t \in R$ . Это один из способов представления уравнения движения в обобщенных функциях, для которого начальные условия должны быть уточнены отдельно.

Если мы хотим ввести начальные условия в уравнение движения, поступим следующим образом. Используя

уравнение движения (4.1.1'), в котором сила  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  является обычной и дифференцирование проводится в обычном смысле, можно написать

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t), \quad t > t_0. \quad (4.2.1)$$

Предположим, что в начальный момент  $t = t_0$  заданы радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  и скорость  $\mathbf{v}_0$ . Эти условия являются начальными условиями типа Коши (фиг. 4.2).



Фиг. 4.2.

Рассмотрим новую функцию  $\bar{\mathbf{r}}(t)$ , определяемую при  $t \in \mathbb{R}$  соотношением

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \theta(t - t_0) \mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } t < t_0, \\ \mathbf{r}_0 & \text{при } t = t_0, \\ \mathbf{r}(t) & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Скорость будет иметь вид

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \theta(t - t_0) \mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } t < t_0, \\ \mathbf{v}_0 & \text{при } t = t_0, \\ \mathbf{v}(t) & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Заметим, что  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$  являются скачками соответственно радиуса-вектора и скорости в начальный момент  $t = t_0$ . Дифференцируя последовательно обобщенную функцию (4.2.2), получим скорость и ускорение материальной

точки:

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}_0 \delta(t - t_0), \quad (4.2.4)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2} \bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{v}_0 \delta(t - t_0) + \mathbf{r}_0 \dot{\delta}(t - t_0). \quad (4.2.4')$$

Нетрудно заметить, что выражение (4.2.4) соответствует обобщенной функции, определяемой соотношением (4.2.3).

Подставляя полученное ускорение в уравнение (4.2.1) и предполагая, что разрыв может быть не только при  $t = t_0$ , но и в другие моменты, что обуславливает появление добавочной силы (4.1.8), можно записать основное уравнение механики в виде

$$m \frac{d^2}{dt^2} \bar{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t) + m \mathbf{v}_0 \delta(t - t_0) + m \mathbf{r}_0 \dot{\delta}(t - t_0), \quad (4.2.5)$$

где  $\mathbf{F}(t)$  — обобщенная сила. Таким образом, начальные условия введены в уравнение (4.2.5). Это уравнение включает обобщенные функции и соответствует задаче Коши для уравнения (4.2.1).

Используя соотношение (2.1.34), можно записать частное решение для оператора  $d^2/dt^2$  в виде

$$E(t) = t\theta(t) = t_+. \quad (4.2.6)$$

В этом случае решением уравнения (4.2.5) будет следующее:

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = t\theta(t) * \left[ \frac{1}{m} \mathbf{F}(t) + \mathbf{v}_0 \delta(t - t_0) + \mathbf{r}_0 \dot{\delta}(t - t_0) \right],$$

откуда следует

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{m} t\theta(t) * \mathbf{F}(t) + \mathbf{v}_0(t - t_0)_+ + \mathbf{r}_0\theta(t - t_0), \quad t \in R. \quad (4.2.7)$$

Если  $\mathbf{F}(t)$  является локально интегрируемой функцией, можно написать

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t (t-\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau + (t-t_0) \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0, \quad t \geq t_0. \quad (4.2.7')$$

Если обобщенная сила имеет общий вид  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ , то основное уравнение (4.2.5) не меняется, но для его решения нельзя воспользоваться указанным приемом. Необходимо задавать конкретный вид уравнения движения.

В случае несвободной материальной точки к заданной силе  $\mathbf{F}(t)$  прибавляется реакция связей  $\mathbf{R}(t)$ .

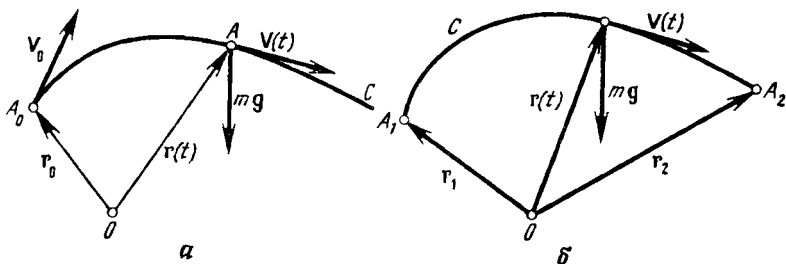
#### 4.2.1.2. Движение тяжелой материальной точки в пустоте

Рассмотрим тяжелую материальную точку, находящуюся в пустоте под действием силы  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения. Задача Коши состоит в определении радиуса-вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , когда известны радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  и скорость  $\mathbf{v}_0$  точки в начальный момент времени  $t_0$  (фиг. 4.3, а). С помощью формулы (4.2.7) получаем

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{2} (t-t_0)_+^2 \mathbf{g} + (t-t_0)_+ \mathbf{v}_0 + \theta(t-t_0) \mathbf{r}_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2.8)$$

откуда

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} (t-t_0)^2 \mathbf{g} + (t-t_0) \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0, \quad t \geq t_0. \quad (4.2.8')$$



Фиг. 4.3.

Этот результат можно использовать для решения двухточечной задачи. Если необходимо определить движение в пустоте тяжелой материальной точки, для которой удовлетворяются условия (фиг. 4.3, б)

$$\bar{\mathbf{r}}(t_1) = \mathbf{r}_1, \quad \bar{\mathbf{r}}(t_2) = \mathbf{r}_2, \quad (4.2.9)$$

можно воспользоваться соотношением вида (4.2.8), предполагая начальную (при  $t = t_1$ ) скорость известной. Следовательно,

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{2}(t - t_1)_+ \mathbf{g} + (t - t_1)_+ \mathbf{v}_1 + \theta(t - t_1) \mathbf{r}_1.$$

Используя и второе из условий (4.2.9), можно написать

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{2}(t_2 - t_1)_+^2 \mathbf{g} + (t_2 - t_1)_+ \mathbf{v}_1 + \theta(t_2 - t_1) \mathbf{r}_1 = \\ &= \frac{1}{2}(t_2 - t_1)^2 \mathbf{g} + (t_2 - t_1) \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{t_2 - t_1} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \mathbf{g}.$$

Таким образом, решение двухточечной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}(t) &= \frac{1}{2}(t - t_1)_+ [(t - t_1)_+ - (t_2 - t_1)] \mathbf{g} + \\ &+ \frac{1}{t_2 - t_1} (t - t_1)_+ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \theta(t - t_1) \mathbf{r}_1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2.10) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \frac{1}{2}(t - t_1)(t - t_2) \mathbf{g} + \\ &+ \frac{1}{t_2 - t_1} (t - t_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_1, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (4.2.10') \end{aligned}$$

Рассмотрим смешанную двухточечную задачу, для которой задаются условия

$$\bar{\mathbf{r}}(t_1) = \mathbf{r}_1, \quad \bar{\mathbf{v}}(t_2) = \mathbf{v}_2. \quad (4.2.11)$$



Если известна скорость в момент  $t = t_1$ , то можно написать

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = (t - t_1)_+ \mathbf{g} + \theta(t - t_1) \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1 \delta(t - t_1).$$

Используя второе краевое условие (4.2.11), получаем

$$\mathbf{v}_2 = (t_2 - t_1) \mathbf{g} + \mathbf{v}_1,$$

откуда

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - (t_2 - t_1) \mathbf{g}.$$

Траектория движения материальной точки описывается уравнением

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{2} (t - t_1)_+ [(t - t_1)_+ - 2(t_2 - t_1)] \mathbf{g} + (t - t_2)_+ \mathbf{v}_2 + \theta(t - t_1) \mathbf{r}_1, \quad t \in R, \quad (4.2.12)$$

или

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} (t - t_1)(t - t_2) \mathbf{g} - (t - t_1) \left[ \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \mathbf{g} - \mathbf{v}_2 \right] + \mathbf{r}_1, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (4.2.12')$$

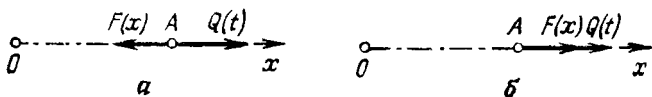
## 4.2.2. Линейные колебания

### 4.2.2.1. Общие положения

Рассмотрим вынужденные колебания материальной точки под действием *квазиупругой силы притяжения*  $F(x) = -kx$ ,  $k > 0$  (фиг. 4.4, а) или *квазиупругой силы отталкивания*  $F(x) = kx$ ,  $k > 0$  (фиг. 4.4, б), и возмущающей силы  $Q(t) = mq(t)$ ,  $t \geq 0$ , где  $m$  — масса точки, а  $k$  — коэффициент квазиупругой силы.

Используя обозначение

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad (4.2.13)$$



Фиг. 4.4.

можно записать уравнение движения материальной точки под действием квазиупругой силы притяжения в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 x(t) = q(t). \quad (4.2.14)$$

Уравнение, соответствующее квазиупругой силе отталкивания, имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) - \omega^2 x(t) = q(t). \quad (4.2.14')$$

Таким образом, операторы  $d^2/dt^2 + \omega^2$  и  $d^2/dt^2 - \omega^2$  (см. разд. 2.1.1.4) имеют глубокий механический смысл и играют важную роль при решении задач о механических колебаниях. С помощью фундаментальных решений  $E(t)$  можно записать решение уравнений (4.2.14) и (4.2.14') в виде

$$x(t) = E(t) * q(t). \quad (4.2.15)$$

Если  $q(t)$  является интегрируемой функцией, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) E(t - \tau) d\tau. \quad (4.2.15')$$

#### 4.2.2.2. Задача Коши

В начальный момент  $t=0$  зададим условия типа Коши следующего вида:

$$\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d}{dt} x(t) = v_0. \quad (4.2.16)$$

Нулевым продолжением при  $t < 0$  введем функции

$$\bar{x}(t) = \theta(t) x(t), \quad \bar{q}(t) = \theta(t) q(t). \quad (4.2.17)$$

Замечаем, что

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \bar{x}(t) + x_0 \delta(t), \quad (4.2.17')$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{x}(t) = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2} \bar{x}(t) + v_0 \delta(t) + x_0 \delta'(t). \quad (4.2.17'')$$

Уравнение (4.2.14), которое рассмотрим вначале, принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{x}(t) + \omega^2 \bar{x}(t) = \bar{q}(t) + v_0 \delta(t) + x_0 \dot{\delta}(t) = f(t). \quad (4.2.18)$$

Соответствующее уравнение в свертках записывается как

$$[\ddot{\delta}(t) + \omega^2 \delta(t)] * \bar{x}(t) = f(t). \quad (4.2.18')$$

Используя результаты, полученные в разд. 2.2.1.2, получим

$$\bar{x}(t) = \frac{\theta(t)}{\omega} \sin \omega t * [\bar{q}(t) + v_0 \delta(t) + x_0 \dot{\delta}(t)],$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{\omega} \theta(t) \sin \omega t * \bar{q}(t) + \\ &+ \frac{v_0}{\omega} \theta(t) \sin \omega t + x_0 \theta(t) \cos \omega t, \quad t \in R. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Если  $q(t)$  является локально интегрируемой функцией, то

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) q(\tau) d\tau + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t, \quad t \geq 0. \quad (4.2.19')$$

В случае когда в начальный момент действует импульсная возмущающая функция, для  $\bar{q}(t)$  получим выражение

$$\bar{q}(t) = \delta(t), \quad (4.2.20)$$

которое приводит к решению

$$\bar{x}(t) = \frac{1+v_0}{\omega} \theta(t) \sin \omega t + x_0 \theta(t) \cos \omega t. \quad (4.2.21)$$

Это выражение является решением уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{x}(t) + \omega^2 \bar{x}(t) = (1+v_0) \delta(t) + x_0 \dot{\delta}(t). \quad (4.2.22)$$

При  $t > 0$  уравнение (4.2.22) записывается как

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (4.2.22')$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = \frac{1 + v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t. \quad (4.2.21')$$

Заметим, что это решение не удовлетворяет второму из условий (4.2.16), так как начальный импульс вводит дополнительную начальную скорость, равную единице, и начальная скорость, таким образом, становится равной  $1 + v_0$ .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.2.14'), которое после аналогичных проделанных ранее преобразований принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{x}(t) - \omega^2 \bar{x}(t) = \bar{q}(t) + v_0 \delta(t) + x_0 \dot{\delta}(t) = f(t). \quad (4.2.23)$$

Используя результаты из разд. 2.2.1.2 для соответствующего уравнения в свертках

$$[\ddot{\delta}(t) + \omega^2 \delta(t)] * \bar{x}(t) = f(t), \quad (4.2.23')$$

получим

$$\bar{x}(t) = \frac{\theta(t)}{\omega} \text{sh } \omega t * [\bar{q}(t) + v_0 \delta(t) + x_0 \dot{\delta}(t)],$$

откуда

$$(t) = \frac{1}{\omega} \theta(t) \text{sh } \omega t * \bar{q}(t) + \frac{v_0}{\omega} \theta(t) \text{sh } \omega t + x_0 \theta(t) \text{ch } \omega t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.24)$$

Если  $q(t)$  — локально интегрируемая функция, то имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = & \frac{1}{\omega} \int_0^t \text{sh } \omega(t - \tau) q(\tau) d\tau + \\ & + \frac{v_0}{\omega} \text{sh } \omega t + x_0 \text{ch } \omega t, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.24')$$

Если  $q(t)$  имеет вид (4.2.20), то получается следующее решение:

$$\bar{x}(t) = \frac{1+v_0}{\omega} \theta(t) \operatorname{sh} \omega t + x_0 \theta(t) \operatorname{ch} \omega t. \quad (4.2.25)$$

а если

$$\bar{q}(t) = \ddot{\delta}(t), \quad (4.2.26)$$

то решение имеет вид

$$\bar{x}(t) = \delta(t) + \frac{1}{\omega} (\omega^2 + x_0) \theta(t) \operatorname{sh} \omega t + x_0 \theta(t) \operatorname{ch} \omega t. \quad (4.2.27)$$

И в этом случае можно сделать аналогичные замечания относительно начальных условий.

Для уравнения (4.2.14), соответствующего квазиупругой силе притяжения, можно рассматривать некоторую двухточечную задачу с условиями вида

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2. \quad (4.2.28)$$

Предполагая, что  $q(t)$  является локально интегрируемой функцией, запишем выражение (4.2.19') в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\omega} \int_{t_1}^t \sin \omega(t-\tau) f(\tau) d\tau + \\ & + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t-t_1) + x_0 \cos \omega(t-t_1), \end{aligned}$$

где использованы условия типа Коши в начальный момент  $t_1$ . Подстановка второго из условий (4.2.28) дает

$$\begin{aligned} x_2 = & \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega(t_2-\tau) f(\tau) d\tau + \\ & + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t_2-t_1) + x_0 \cos \omega(t_2-t_1), \end{aligned}$$

откуда можно определить неизвестную скорость  $v_1$  в начальный момент. Исключая скорость  $v_1$  из полученных выражений, получим решение поставленной двухточечной

задачи в виде

$$x(t) = \frac{1}{\omega \sin \omega (t_2 - t_1)} \left\{ \sin \omega (t_2 - t_1) \int_{t_1}^t \sin \omega (t - \tau) f(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \sin \omega (t - t_1) \int_{t_1}^t \sin \omega (t_2 - \tau) f(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \omega [x_1 \sin \omega (t_2 - t) + x_2 \sin \omega (t - t_1)] \right\}. \quad (4.2.29)$$

Этот результат справедлив при  $t_2 \neq t_1 + (k\pi/\omega)$ ,  $k \in N$ .

Для уравнения (4.2.14') можно учесть двухточечные условия вида (4.2.28). Прделав аналогичные выкладки, получим решение

$$x(t) = \frac{1}{\omega \operatorname{sh} \omega (t_2 - t_1)} \left\{ \operatorname{sh} \omega (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sh} \omega (t - \tau) f(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \omega (t - t_1) \int_{t_1}^t \operatorname{sh} \omega (t_2 - \tau) f(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \omega [x_1 \operatorname{sh} \omega (t_2 - t) + x_2 \operatorname{sh} \omega (t - t_1)] \right\}. \quad (4.2.29')$$

### 4.2.3. Нити. Балки

Тела, у которых один размер (длина  $l$ ) намного превышает остальные два размера  $a$  и  $b$  (соответствующие *поперечному сечению*), называются *балками*<sup>1</sup>). Следовательно, для таких тел выполняется условие

$$a, b \ll l. \quad (4.2.30)$$

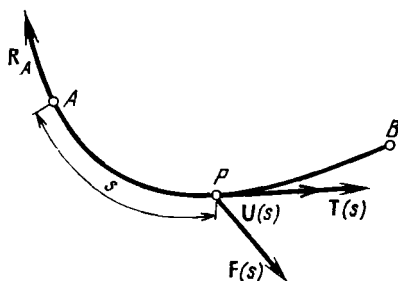
В зависимости от формы оси балки подразделяют на прямые и кривые. Ниже будет получено несколько результатов, касающихся *прямых балок*.

<sup>1</sup> Различие между балкой и стержнем определяется действующей на них нагрузкой. Если тело работает на изгиб, то оно называется балкой, если же тело подвержено продольным нагрузкам, то оно называется стержнем. — *Прим. ред.*

Если размеры поперечного сечения балки пренебрежимо малы по сравнению с ее длиной и она абсолютно гибкая, то такое тело называется *нитью*<sup>1)</sup>.

#### 4.2.3.1. Нити

Пусть  $\widehat{AB}$  — абсолютно гибкая нерастяжимая нить, закрепленная в точках  $A$  и  $B$  (фиг. 4.5). Считая положительным направление от точки  $A$  к точке  $B$ , положение



Фиг. 4.5.

произвольной точки на нити определим ее расстоянием  $s$  от точки  $A$  вдоль нити. Предположим, что на нить действуют силы, определенные векторной функцией  $\mathbf{F}(s)$ , непрерывной по  $s$  всюду, за исключением конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Для получения уравнений равновесия нити освободим ее в точке  $A$ , заменяя связь реакцией  $\mathbf{R}_A$ . В произвольной точке  $P$  сделаем разрез и заменим действие части  $\widehat{PB}$  нити на часть  $\widehat{AP}$  силой  $\mathbf{T}$  (натяжение), приложенной в выбранной точке и направленной по касательной к нити. Можно написать

$$\mathbf{u}(s) \times \mathbf{T}(s) = \mathbf{0}, \quad (4.2.31)$$

где  $\mathbf{u}(s)$  — орт касательной к уравновешенной нити.

<sup>1</sup> Если рассматриваемое тело является нерастяжимым, то оно называется нитью, если же тело растяжимо, то оно называется струной. — *Прим. ред.*

Обозначим через  $\mathbf{R}(s)$  равнодействующую сил, действующих на часть  $\widehat{AP}$ . В этом случае необходимое условие равновесия принимает вид

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{R}(s) + \mathbf{T}(s) = \mathbf{0}. \quad (4.2.32)$$

Из сделанных утверждений следует, что и равнодействующая  $\mathbf{R}(s)$ , и натяжение  $\mathbf{T}(s)$  являются непрерывными функциями вместе со своими первыми производными всюду, за исключением конечного числа точек, в которых имеются разрывы первого рода. Важно отметить, что точки разрыва равнодействующей и натяжения являются точками приложения сосредоточенных сил. Между точками разрыва натяжение  $\mathbf{T}(s)$  направлено, согласно уравнению (4.2.31), по касательной к уравновешенной нити.

Если силы, действующие на нить, выражаются через непрерывную функцию  $\mathbf{F}(s)$ , то равнодействующая  $\mathbf{R}(s)$  имеет вид

$$\mathbf{R}(s) = \int_0^s \mathbf{F}(\sigma) d\sigma, \quad (4.2.33)$$

или

$$\frac{d}{ds} \mathbf{R}(s) = \mathbf{F}(s). \quad (4.2.33')$$

Вообще говоря, равнодействующая  $\mathbf{R}(s)$  не является всюду дифференцируемой функцией, так что соотношение (4.2.33') не удовлетворяется всюду.

Дифференцируя соотношение (4.2.32) в смысле теории обобщенных функций, получим

$$\frac{d}{ds} \mathbf{T}(s) + \frac{d}{ds} \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}. \quad (4.2.34)$$

Обозначим производную в смысле теории обобщенных функций равнодействующей  $\mathbf{R}(s)$ , как и в (4.2.33'), и назовем ее обобщенной силой на единицу длины нити. Таким образом, уравнение равновесия нити примет вид

$$\frac{d}{ds} \mathbf{T}(s) + \mathbf{F}(s) = \mathbf{0}. \quad (4.2.35)$$



Условия равенства нулю моментов всех сил, действующих на дугу  $\widehat{AP}$ , относительно произвольной точки приводит к уравнению (4.2.31). Следовательно, получаем

$$\frac{d}{ds} \mathbf{T}(s) = \frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{T}(s) + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{T})_i \delta(s - s_i),$$

$$\frac{d}{ds} \mathbf{R}(s) = \frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{R}(s) + \sum_{i=1}^n (\Delta \mathbf{R})_i \delta(s - s_i),$$

где  $(\Delta \mathbf{T})_i$  и  $(\Delta \mathbf{R})_i$  — скачки натяжения и равнодействующей, соответствующие точкам разрыва  $s = s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Уравнение (4.2.34) принимает вид

$$\frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{T}(s) + \frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{R}(s) + \sum_{i=1}^n [(\Delta \mathbf{T})_i + (\Delta \mathbf{R})_i] \delta(s - s_i) = 0. \quad (4.2.36)$$

Как и в разд. 4.1.1.2, можно показать, что соотношение (4.2.34) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{T}(s) + \frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{R}(s) &= \mathbf{0}, \\ (\Delta \mathbf{T})_i + (\Delta \mathbf{R})_i &= \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

Если ввести обычную силу по формуле

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) = \frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{R}(s), \quad (4.2.33'')$$

то можно записать уравнение (4.2.35) в виде

$$\frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{T}(s) + \tilde{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{0}. \quad (4.2.35')$$

Это уравнение применяется на участках нити, заключенных между точками разрыва натяжения  $\mathbf{T}(s)$ .

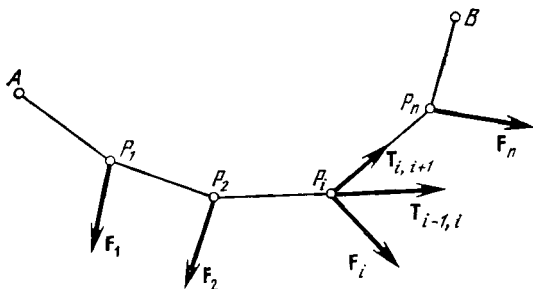
Из уравнения (4.2.36) видно, что в каждой точке разрыва сумма скачков натяжения и равнодействующей сил равна нулю.

Если в точке нити с криволинейной абсциссой  $s_0$  действует сосредоточенная сила  $\mathbf{F}$ , то равнодействующая будет иметь вид

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{F}\theta(s - s_0), \quad (4.2.38)$$

где введена обобщенная функция Хевисайда. Обобщенная сила на единицу длины имеет вид

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}\delta(s - s_0), \quad (4.2.39)$$



Фиг. 4.6.

а уравнение равновесия нити, на которую действует только эта сосредоточенная сила, записывается следующим образом:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{T}(s) + \mathbf{F}\delta(s - s_0) = 0. \quad (4.2.40)$$

Если на нить действуют сосредоточенные силы  $\mathbf{F}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), приложенные в точках  $s_1 < s_2 < \dots < s_i < \dots < s_n$ , то она принимает форму ломаной линии  $AP_1P_2 \dots P_i \dots P_nB$  (фиг. 4.6). Уравнение равновесия в обобщенных функциях имеет вид

$$\frac{d}{ds} \mathbf{T}(s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta(s - s_i) = 0, \quad (4.2.41)$$

или

$$\frac{\tilde{d}}{ds} \mathbf{T}(s) = 0, \quad (4.2.42)$$

$$(\Delta \mathbf{T})_i + \mathbf{F}_i = 0. \quad (4.2.42')$$

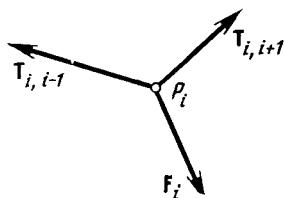
Из уравнения (4.2.42) видно, что натяжение является кусочно постоянным, а уравновешенная нить имеет форму ломаной. С другой стороны, из того, что

$$(\Delta T)_i = T_{i,i+1} - T_{i-1,i} \quad (4.2.43)$$

и

$$T_{i-1,i} + T_{i,i-1} = 0, \quad (4.2.43')$$

следует, что соотношение (4.2.42') соответствует равновесию точки  $P_i$ , на которую действует сосредоточенная сила  $F_i$  и натяжения  $T_{i,i-1}$  и  $T_{i,i+1}$  (фиг. 4.7).



Фиг. 4.7.

Интегрируя уравнение (4.2.41), получаем натяжение в произвольной точке нити, за исключением точек разрыва

$$T(s) = - \sum_{i=1}^n F_i \theta(s - s_i) - R_A. \quad (4.2.44)$$

В точках разрыва появляются соответствующие скачки.

Если  $\mathbf{r}(s)$  — радиус-вектор произвольной точки нити, то из уравнения (4.2.31) найдем

$$\frac{d}{ds} \mathbf{r}(s) = - \frac{1}{T} \left[ \sum_{i=1}^n F_i \theta(s - s_i) + R_A \right], \quad (4.2.45)$$

где

$$T = |T| = \sqrt{\left[ R_A + \sum_{i=1}^n F_i \theta(s - s_i) \right]^2}. \quad (4.2.45')$$

Замечая, что орт касательной к уравновешанной нити имеет только разрывы первого рода, и принимая точку  $A$

за начало координат, интегрированием получим

$$r(s) = \sum_{\substack{j=0 \\ (k \geq 1)}}^{k-1} \frac{\sum_{i=0}^j F_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)^2}} (s_{j+1} - s_j) + \frac{\sum_{i=0}^k F_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^k F_i\right)^2}} (s - s_k) \quad (4.2.46)$$

для  $s_k \leq s \leq s_{k+1}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ),  $s_0=0$ ,  $s_{n+1}=l$ , где  $l$  — длина нити. Предполагается также, что  $F_0 = R_A$ . Таким образом, получено уравнение равновесия нити, на которую действуют  $n$  сосредоточенных сил  $F_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

#### 4.2.3.2. Балки

Рассмотрим задачу изгиба прямой балки, принимая гипотезы сопротивления материалов (точнее, гипотезу Бернулли плоских сечений) и используя результаты, полученные при рассмотрении обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках этих гипотез рассмотрение деформации прямой балки сводится к рассмотрению деформации *срединного волокна*; деформированное срединное волокно называется еще *упругой линией балки*.

Направляя ось  $Ox$  системы координат вдоль оси балки и предполагая, что балка изгибается под действием распределенной нормально оси  $Ox$  нагрузки  $q(x)$ , запишем дифференциальное уравнение упругой линии в виде

$$\frac{d^4}{dx^4} v(x) = \frac{1}{EI} q(x), \quad (4.2.47)$$

где  $E$  — продольный модуль упругости, а  $I$  — момент инерции поперечного сечения балки относительно *нейтральной оси*<sup>1)</sup> (проходящей через ось балки перпендикулярно плоскости изгиба). Произведение  $EI$  называется изгибной жесткостью балки. Нагрузка  $q(x)$  и перемещение  $v(x)$  считаются положительными, если они направ-

<sup>1</sup> Нейтральной осью называется волокно, не испытывающее при изгибе ни растяжения, ни сжатия. — Прим. ред.

лены по оси  $Oy$  (предполагается, что изгиб балки происходит в плоскости  $Oxy$ ).

Заметим, что фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (4.2.47), такова:

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = \frac{1}{2} x^2, \\ v_4(x) = \frac{1}{6} x^3. \quad (4.2.48)$$

Используя изложенное в разд. 2.3.1.1, можно записать частное решение  $E_+(x)$  в виде

$$E_+(x) = \frac{1}{EI} v_{4+}(x) = \frac{1}{6EI} \theta(x) x^3 = \frac{1}{6EI} x_+^3. \quad (4.2.49)$$

Тогда общее решение уравнения (4.2.47) будет выражаться следующим образом:

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[ C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} C_3 x^2 + \frac{1}{6} C_4 x^3 + \frac{1}{6} x_+^3 * q(x) \right], \quad (4.2.50)$$

где постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  находятся из условий закрепления балки. Уравнение упругой линии можно записать в виде

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left( A_1 + A_2 x + \frac{1}{2} A_3 x^2 + \frac{1}{6} A_4 x^3 + \frac{1}{6} x_+^3 \right) * q(x) = \\ = v_0(x) * q(x), \quad (4.2.50')$$

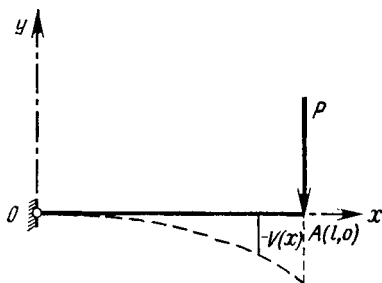
где  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — другие постоянные, которые определяются тем же путем.

Рассмотрим, например, прямую балку  $OA$  длиной  $l$  (фиг. 4.8), защемленную в точке  $O$  и со свободным концом  $A$  (консоль). Предположим, что на свободном конце  $A$  действует сосредоточенная сила  $P$ , направленная в отрицательном направлении оси  $Oy$ . Эквивалентная нагрузка будет равна

$$q(x) = -P\delta(x-l), \quad (4.2.51)$$

а уравнение изогнутой упругой оси имеет вид

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[ C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} C_3 x^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} C_4 x^3 - \frac{P}{6} (x-l)_+^3 \right], \quad x \in [0, \infty]. \quad (4.2.52)$$



Фиг. 4.8.

Уравнение (4.2.52) может быть записано и как

$$v(x) = -\frac{P}{EI} \left[ A_1 + A_2(x-l) + \frac{1}{2} A_3(x-l)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} A_4(x-l)^3 + \frac{1}{6} (x-l)_+^3 \right], \quad (4.2.52')$$

где постоянные интегрирования определяются из *условий заземления* (условий типа Коши)

$$x=0: \quad v(x)=0, \quad \frac{d}{dx} v(x)=0 \quad (4.2.53)$$

и из условий для *изгибающего момента* и *перерезывающей силы* (тоже условий типа Коши)

$$x=l: \quad \frac{d^2}{dx^2} v(x) = -\frac{Pl}{EI}, \quad \frac{d^3}{dx^3} v(x) = \frac{P}{EI}. \quad (4.2.53')$$

Таким образом, определив постоянные

$$A_1 = \frac{1}{3} l^3, \quad A_2 = \frac{1}{2} l^2, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -1,$$

получим решение в окончательном виде

$$v(x) = -\frac{P}{6EI} x^2 (3l - x), \quad x \in [0, l]. \quad (4.2.54)$$

Если в случае, когда на балку в точке  $A$  действует сосредоточенная сила  $P$ , которая выражается в виде  $q(x) = Q_A(x)$ , использовать уравнение упругой линии (4.2.50'), то представление (3.2.14) принимает вид

$$v(x) = v_0(x) * \left[ Q_0(x) + Q^{(1)}(x) + \frac{1}{2} Q^{(2)}(x) + \frac{1}{6} Q^{(3)}(x) \right], \quad x \in [0, l], \quad (4.2.55)$$

поскольку

$$v_0(x) * Q^{(i)}(x) = 0, \quad i \geq 4. \quad (4.2.56)$$

Итак, максимальный порядок  $n$  направленных моментов в этом случае равен трем.

Если рассматриваются *поперечные свободные колебания (собственные колебания)* прямой балки бесконечной длины, то начальными условиями будут тоже условия типа Коши. Предполагая, что ось координат  $Ox$  направлена вдоль оси балки, запишем дифференциальное уравнение поперечных собственных колебаний балки в плоскости  $Oxy$  в виде

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} v(x; t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v(x; t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.2.57)$$

Здесь  $c$  — скорость распространения волн

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad (4.2.58)$$

где  $EI$  — изгибная жесткость, а  $\rho$  — плотность материала балки.

Наложим начальные условия

$$\lim_{t \rightarrow +0} v(x; t) = f_1(x), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial v}{\partial t}(x; t) = g(x) = c \frac{d^2}{dx^2} f_2(x), \quad (4.2.59)$$

где дифференцирование проводится в смысле теории обобщенных функций, а  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — известные обобщенные функции.

Чтобы заменить дифференциальное уравнение (4.2.57) уравнением в обобщенных функциях, введем обобщенное перемещение

$$\bar{v}(x; t) = \theta(t) v(x; t). \quad (4.2.60)$$

Оно получено нулевым продолжением влево, а при  $t=0$  имеет разрыв первого рода. Можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(x; t) &= \frac{\tilde{\partial}}{\partial t} \bar{v}(x; t) + f_1(x) \delta(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{v}(x; t) &= \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial t^2} \bar{v}(x; t) + c \frac{d^2}{dx^2} f_2(x) \delta(t) + f_1(x) \dot{\delta}(t), \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \bar{v}(x; t) &= \frac{\tilde{\partial}^4}{\partial x^4} \bar{v}(x; t) \end{aligned}$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение (4.2.57) примет вид

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \bar{v}(x; t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{v}(x; t) &= \\ = c \frac{d^2}{dx^2} f_2(x) \delta(t) + f_1(x) \dot{\delta}(t). \end{aligned} \quad (4.2.57')$$

Это уравнение записано в обобщенных функциях и содержит заданные начальные условия.

Отметим, что такой прием может быть использован и для других уравнений движения аналогичного вида.

Чтобы найти решение уравнения (4.2.57'), применим к нему преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координате. В результате получим

$$\begin{aligned} c^2 (-i\alpha)^4 F[L[\bar{v}(x; t)]] + p^2 F[L[\bar{v}(x; t)]] &= \\ = -\alpha^2 c F[f_2(x)] + p F[f_1(x)], \end{aligned}$$

откуда

$$F[L[\bar{v}(x; t)]] = \frac{p}{p^2 + \alpha^4 c^2} F[f_1(x)] - \frac{\alpha^2 c}{p^2 + \alpha^4 c^2} F[f_2(x)]. \quad (4.2.61)$$



Применяя обратное преобразование Лапласа и учитывая соотношения (1.6.55), (1.6.55'), можно написать

$$F[\bar{v}(x; t)] = F[f_1(x)] \cos(\alpha^2 ct) - F[f_2(x)] \sin(\alpha^2 ct).$$

Обратным преобразованием Фурье последнего выражения получим

$$\begin{aligned} \bar{v}(x; t) = & F^{-1} [F[f_1(x)] \cos(\alpha^2 ct)] - \\ & - F^{-1} [F[f_2(x)] \sin(\alpha^2 ct)]. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$F \left[ \cos \frac{x^2}{4ct} + \sin \frac{x^2}{4ct} \right] = 2 \sqrt{2\pi ct} \cos(\alpha^2 ct), \quad (4.2.62)$$

$$F \left[ \cos \frac{x^2}{4ct} - \sin \frac{x^2}{4ct} \right] = 2 \sqrt{2\pi ct} \sin(\alpha^2 ct) \quad (4.2.62')$$

и применяя формулу (1.5.25) преобразования Фурье свертки для случая, когда один из множителей является обобщенной функцией медленного роста, а другой — обобщенной функцией с ограниченным носителем, можно написать решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}(x; t) = & \frac{1}{2 \sqrt{2\pi ct}} \left[ f_1(x) * \left( \cos \frac{x^2}{4ct} + \sin \frac{x^2}{4ct} \right) - \right. \\ & \left. - f_2(x) * \left( \cos \frac{x^2}{4ct} - \sin \frac{x^2}{4ct} \right) \right]. \quad (4.2.63) \end{aligned}$$

#### 4.2.4. Системы материальных точек с переменными массами

Ниже будут выведены уравнения Лагранжа для систем материальных точек с переменными массами (сначала при непрерывном изменении масс, а затем при скачкообразном изменении).

##### 4.2.4.1. Уравнения Лагранжа для системы материальных точек с непрерывным изменением масс

Рассмотрим систему  $n$  материальных точек с массами  $m_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), положение которых определяется

обобщенными координатами  $q_k$  ( $k=1, 2, \dots, h$ ). Допустим, что на систему наложены только голономные связи, которые были исключены введением обобщенных координат.

Обозначим через  $\mathbf{u}_i'(t)$  и  $\mathbf{u}_i''(t)$  соответственно скорости частиц, захваченных и испускаемых материальной точкой массы  $m_i(t)$ ; пусть  $m_i'(t)$  и  $m_i''(t)$  — соответствующие начальные массы частиц. Таким образом, имеем

$$m_i(t) = m_i'(t) + m_i''(t). \quad (4.2.64)$$

Допустим, что обобщенные силы консервативны и имеют потенциал  $U = U(q_1, q_2, \dots, q_h; t)$ . Следовательно,

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad k=1, 2, \dots, h, \quad (4.2.65)$$

где производная рассматривается в смысле теории обобщенных функций. Допустим также, что обобщенные силы, соответствующие захвату и испусканию, имеют вид

$$Q_k' = \frac{\partial U'}{\partial q_k}, \quad Q_k'' = \frac{\partial U''}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, h), \quad (4.2.66)$$

где

$$\begin{aligned} U' &= \sum_{i=1}^n \frac{dm_i'(t)}{dt} \mathbf{u}_i'(t) \cdot \mathbf{r}_i(t), \quad U'' = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{dm_i''(t)}{dt} \mathbf{u}_i''(t) \cdot \mathbf{r}_i(t), \end{aligned} \quad (4.2.66')$$

а через  $\mathbf{r}_i(t)$  обозначены радиусы-векторы частиц.

Заметим, что потенциалы  $U'$  и  $U''$  имеют смысл с точки зрения теории обобщенных функций, так как скорости  $\mathbf{u}_i'(t)$  и  $\mathbf{u}_i''(t)$  являются функциями обобщенных координат класса  $C^0$ ,  $\mathbf{r}_i(t)$  — класса  $C^1$ , а  $m_i'(t)$  и  $m_i''(t)$  — класса  $C^1$  всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Пусть, кроме того, известна кинетическая энергия  $T = T(q_1, q_2, \dots, q_h; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h; t)$ .

Тогда уравнения движения системы материальных точек с непрерывным изменением масс получаются из

условия, что функционал

$$I(q_1, q_2, \dots, q_h) = \int_{i'}^{i''} (T + U + U' + U'') dt, \quad (4.2.67)$$

допустимые линии уровня которого могут быть обобщенными функциями, является *стационарным в смысле теории обобщенных функций*. Таким образом, получаются уравнения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + Q'_k + Q''_k \quad (k=1, 2, \dots, h), \quad (4.2.68)$$

которые являются *уравнениями Лагранжа для системы материальных точек с непрерывным изменением масс*.

В случае неконсервативных сил  $\mathbf{F}_i$  можно принять

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}. \quad (4.2.69)$$

Уравнения (4.2.68) тогда принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, h), \quad (4.2.68')$$

где

$$\mathcal{L} = T + U + U' + U'' \quad (4.2.70)$$

— функция Лагранжа (лагранжиан), соответствующая консервативным силам.

Если к системе материальных точек приложены удары (добавочные силы)  $\mathbf{F}_i \delta(t-t_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), соответствующие обобщенные силы принимают вид

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta(t-t_i). \quad (4.2.69')$$

#### 4.2.4.2. Уравнения Лагранжа для системы материальных точек со скачкообразным изменением масс

Если массы  $m_i'(t)$  имеют разрывы первого рода в моменты времени  $t_j$  ( $j=1, 2, \dots, n'$ ), а массы  $m_i''(t)$  имеют

разрывы первого рода в моменты времени  $t_l$  ( $l=n'+1, \dots, n''$ ), то справедливы соотношения

$$\frac{dm'_i}{dt} = \frac{\tilde{d}m'_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n'} (\Delta m'_i)_{t_j} \delta(t - t_j) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.2.71)$$

$$\frac{dm''_i}{dt} = \frac{\tilde{d}m''_i}{dt} + \sum_{l=n'+1}^{n''} (\Delta m''_i)_{t_l} \delta(t - t_l),$$

где скачки масс имеют вид

$$(\Delta m'_i)_{t_j} = m'_i(t_j+0) - m'_i(t_j-0), \quad j=1, 2, \dots, n', \quad (4.2.72)$$

$$(\Delta m''_i)_{t_l} = m''_i(t_l+0) - m''_i(t_l-0), \quad l=n'+1, n'+2, \dots, n''.$$

При таких условиях *кинетическая энергия*  $T$  и лагранжиан  $\mathcal{L}$  будут иметь только разрывы первого рода, что приводит к равенствам

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\tilde{d}}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{i=1}^{n''} (\Delta p_k)_{t_i} \delta(t - t_i), \quad (4.2.73)$$

где

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \quad (k=1, 2, \dots, h)$$

— обобщенные импульсы.

Теорема 1.2.2 с учетом полученных результатов позволяет записать уравнение (4.2.68) в виде

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \tilde{Q}'_k + \tilde{Q}''_k \quad (k=1, 2, \dots, h), \quad (4.2.74)$$

где

$$\tilde{Q}'_k = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{d}m'_i}{dt} u'_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k}, \quad \tilde{Q}''_k =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{d}m_i^n}{dt} \mathbf{u}_i^n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, h) \quad (4.2.75)$$

являются обобщенными силами в обычном смысле, а

$$(\Delta p_k)_{t_j} = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i')_{t_j} \mathbf{u}_i' \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (j=1, 2, \dots, n'), \quad (4.2.76)$$

$$(\Delta p_k)_{t_l} = \sum_{i=1}^n (\Delta m_i'')_{t_l} \mathbf{u}_i'' \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (l=n'+1, \dots, n'')$$

представляют собой условия при скачках.

Полученные уравнения описывают движение системы материальных точек со скачкообразным изменением масс.

#### 4.2.4.3. Уравнения Лагранжа при столкновениях

Если в уравнениях (4.2.68) положить

$$Q'_k = Q''_k = 0, \quad (4.2.77)$$

то получатся уравнения Лагранжа для системы материальных точек с постоянными массами (классический случай):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1, 2, \dots, h). \quad (4.2.78)$$

При  $t \in [t', t'']$  можно записать

$$\int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) dt - \int_{t'}^{t''} \frac{\partial T}{\partial q_k} dt = \int_{t'}^{t''} Q_k dt.$$

Допустим, что в рассматриваемом интервале времени  $t = t_0$  соответствует моменту разрыва. Применяя одну из теорем о среднем, получим

$$\lim_{t''-t' \rightarrow 0} \int_{t'}^{t''} \frac{\partial T}{\partial q_k} dt = 0$$

и

$$\lim_{t''-t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) dt = (\Delta p_k)_0,$$

где введен скачок обобщенного импульса.

С помощью обобщенного удара

$$\mathcal{P}_k = \lim_{t''-t' \rightarrow +0} \int_{t'}^{t''} Q_k dt \quad (4.2.79)$$

уравнения Лагранжа принимают вид

$$(\Delta p_k)_0 = \mathcal{P}_k \quad (k=1, 2, \dots, h). \quad (4.2.80)$$

Несмотря на то что в теории обобщенных функций интеграл не имеет смысла, был использован его знак для сохранения классической записи.

**Теорема 4.1.14.** *Скачок обобщенного импульса системы материальных точек, соответствующий моменту разрыва, равен обобщенному удару, соответствующему тому же моменту.*

Эта теорема является аналогом теоремы об изменении количества движения при столкновениях, выраженной в пространстве обобщенных координат.

### 4.3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

#### 4.3.1. Статические задачи для линейных упругих тел

Чтобы построить математическую модель статической задачи для линейного упругого тела, рассмотрим некоторые аспекты геометрии деформаций и теории напряжений, а также закон Гука. В рамках математической модели ньютоновской механики будем считать, что имеют место следующие основные гипотезы:

а) Изучаемое твердое тело (рассматриваемое в покое относительно некоторой фиксированной системы координат) находится под действием *уравновешенных внешних*

*нагрузок* (системы нагрузок, статически эквивалентной нулю).

б) Твердое тело рассматривается как *сплошная среда* (без полостей, внутренних микроскопических трещин и т. д.). Предполагается, что и деформирование тела происходит непрерывным образом; следовательно, деформации и напряжения математически представляются по меньшей мере через непрерывные функции. Для некоторых точек тела (сингулярных точек), в которых деформации и напряжения стремятся к бесконечности, проводится дополнительное исследование. С другой стороны, введение обобщенных функций исключает такие точки. Тела с внутренними полостями (сплошные тела, которым соответствуют *многосвязные области*) и тела с внутренними разрезами или трещинами (частные случаи многосвязности) должны быть рассмотрены отдельно.

в) Рассматриваемое твердое тело *не имеет начальных напряжений*, которые могут возникать из-за некоторых начальных деформаций материала. Таким образом, предполагается, что ненагруженному телу (случай нулевых внешних нагрузок) соответствует нулевое напряженное состояние.

#### 4.3.1.1. Постановка пространственных задач теории упругости в перемещениях

Под влиянием внешних воздействий частицы твердого тела меняют свое положение (относительно некоторой фиксированной системы координат). Если сдвигом или вращением можно вернуть эти частицы в начальное положение, которое они имели до приложения внешних воздействий, то говорят, что рассматривается *движение абсолютно твердого тела*. В противном случае рассматриваемое тело деформируется. Совокупность деформаций, которые претерпевает частица тела, образует деформированное состояние в точке (центр массы частицы). Совокупность деформированных состояний, соответствующих всем точкам (частицам) твердого тела, образует *деформированное состояние* рассматриваемого твердого тела.

Если ввести понятие *перемещения точки*, то совокупность перемещений всех точек рассматриваемого тела составляет *поле перемещений* рассматриваемого тела.

Тела, которые перемещаются как абсолютно твердые, называются *жесткими телами*; остальные твердые тела называются *твердыми деформируемыми телами*. В дальнейшем будет предполагаться, что рассматриваемые деформации и вращения (соответствующие *градиенту перемещения*) малы по сравнению с единицей.

В процессе деформирования равновесие внутренних сил, связывающих частицы тела, нарушается и возникают дополнительные внутренние силы. Эти силы, отнесенные к единице площади, называются *напряжениями*. Совокупность напряжений, соответствующих некоторой частице, образует напряженное состояние в точке. Совокупность напряженных состояний всех точек твердого тела образует *напряженное состояние* рассматриваемого тела.

Деформированное и напряженное состояния некоторого тела вместе образуют *напряженно-деформированное* состояние тела.

Определяющие уравнения твердого деформируемого тела позволяют описать физические свойства материала. С математической точки зрения такие уравнения дают связь между деформациями и напряжениями. В дальнейшем будем считать, что выполняются следующие упрощенные гипотезы (соответствующие линейным упругим телам), позволяющие описать определяющие уравнения:

а) Твердое тело *изотропно*, т. е. механические (и физические) свойства в окрестности каждой его точки одинаковы во всех направлениях.

б) Твердое тело *однородно*, т. е. механические (и физические) свойства в каждой его точке одинаковы. Благодаря этому механические константы материала, входящие в определяющие уравнения, не зависят от координат.

в) Рассматриваемое тело *идеально упругое*. Под влиянием внешних нагрузок тело деформируется, но если внешние нагрузки перестают действовать на тело, то оно возвращается в исходное положение и принимает начальную форму (явление *гистерезиса* исключается);



явление деформирования *обратимо*. Итак, форма деформированного идеально упругого тела зависит только от внешних нагрузок, действующих на него в данный момент времени. Между напряжениями и деформациями существует взаимно однозначная связь. Напряженное состояние в произвольной точке рассматриваемого тела зависит только от деформированного состояния окрестности этой точки. В качестве определяющих уравнений таких сред будем использовать закон связи между напряжениями и деформациями (закон Гука).

Имея в виду вышеизложенное, можно перейти к построению математической модели линейного упругого однородного и изотропного тела, в котором деформации и вращения являются бесконечно малыми.

Деформированное состояние описывается *тензором деформаций* с компонентами  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Этот тензор является *симметричным* ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ). Если  $i = j$ , то соответствующие деформации называются *удлиннениями*, а случай  $i \neq j$  соответствует *сдвиговым деформациям*  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ . Поле перемещений в теле описывается вектором перемещений  $\mathbf{u}$  с компонентами  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

В рассматриваемом линейном случае тензор деформаций и вектор перемещений связаны между собой *соотношениями Коши*

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.3.1)$$

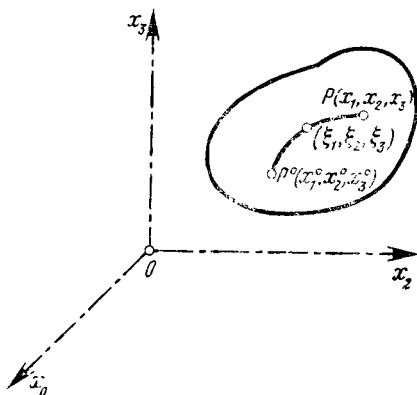
где индексы после запятой означают дифференцирование по соответствующей координате.

Уравнения (4.3.1), рассматриваемые как система из шести уравнений по отношению к неизвестным  $u_i(x_1, x_2, x_3)$ , должны быть совместными. Условия совместности этой системы, которые в то же время являются и *условиями неразрывности деформаций*, были предложены Сен-Венаном в виде (по повторяющимся индексам происходит суммирование)

$$\varepsilon_{mij} \varepsilon_{nkl} \varepsilon_{ik,jl} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad (4.3.2)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  — компоненты антисимметричного тензора Леви-Чивиты (равные 1, если индексы  $(i, j, k)$  образуют чет-

ную перестановку, равные  $-1$ , если индексы  $(i, j, k)$  образуют нечетную перестановку, и равные нулю, если среди индексов  $(i, j, k)$  есть равные между собой). Эти условия являются необходимыми и достаточными при рассмотрении односвязных областей и являются только необходимыми при рассмотрении многосвязных областей.



Фиг. 4.9.

Теперь можно проинтегрировать систему уравнений (4.3.1). Перемещения в произвольной точке рассматриваемого тела даются формулами Чезаро

$$u_i = u_i^0 - \epsilon_{ijk} (x_j - x_j^0) \omega_k^0 + \int_{P^0 P} [\epsilon_{ik}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + 2(x_j - \xi_j) \epsilon_{k[i, j]}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] d\xi_k \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.3.3)$$

где индексы в квадратных скобках означают, что рассматривается антисимметричная часть соответствующего тензора относительно соответствующих индексов, а  $u_i^0$ ,  $\omega_i^0$  ( $i=1, 2, 3$ ) являются перемещениями и вращениями в точке  $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ , соответствующими движению рассматриваемого твердого деформируемого тела как жесткого целого. Эти формулы справедливы только для односвязных тел (фиг. 4.9).

Заметим, что перемещения должны выражаться через функции класса  $C^3$ , а для деформаций достаточно, чтобы они были функциями класса  $C^2$ .

Напряженное состояние характеризуется тензором напряжений с компонентами  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Тензор напряжений является симметричным ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ). При  $i = j$  соответствующие напряжения называются *нормальными*, а при  $i \neq j$  — *касательными*. Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.4)$$

где  $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3)$  — компоненты *объемных сил*, которые должны быть непрерывными. Напряжения должны быть функциями класса  $C^1$ , а если учитывать определяющие уравнения, например, линейных упругих тел, то очевидно, что они должны быть функциями класса  $C^2$ .

*Закон Гука*, который будет использоваться в дальнейшем в качестве определяющих уравнений линейных упругих тел, имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j, l = 1, 2, 3), \quad (4.3.5)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — *упругие постоянные Ламе*, а  $\delta_{ij}$  — компоненты тензора *Кронекера* (равные 1 при  $i = j$  и равные нулю при  $i \neq j$ ). Можно написать и обратные соотношения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij} \quad (i, j, l = 1, 2, 3), \quad (4.3.5')$$

где  $E$  — *модуль Юнга*,  $G$  — *модуль сдвига*, а  $\nu$  — *коэффициент Пуассона*. Из этих упругих постоянных только две являются независимыми. Между ними существуют следующие соотношения:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.3.6)$$

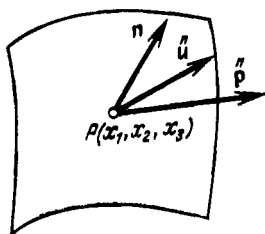
Краевыми условиями для рассматриваемых задач будут условия на границах рассматриваемых областей. Для первой основной краевой задачи (фиг. 4.10) эти условия ставятся в перемещениях и имеют вид

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.7)$$

где  $u_i^n$  — заданные перемещения точки границы с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Для второй основной краевой задачи граничные условия ставятся в напряжениях и имеют вид

$$\sigma_{ij}n_j = p_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.3.7')$$

где  $p_i^n$  — компоненты внешних нагрузок, действующих на элемент поверхности с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . При рассмотрении смешанных задач на одной части границы ус-



Фиг. 4.10.

ловия ставятся в перемещениях, а на остальной части границы — в напряжениях.

Система уравнений (4.3.1), (4.3.4) и (4.3.5) является системой из 15 уравнений с 15 неизвестными и называется основной системой уравнений статической задачи теории упругости. Доказано, что такая система всегда имеет решение и оно единственно для данных граничных условий<sup>1)</sup>.

Для постановки статической задачи теории упругости в перемещениях необходимо исключить напряжения и деформации из уравнений равновесия, выразив их через перемещения. В этом случае система уравнений равновесия в перемещениях называется системой уравнений Ламе и имеет вид

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{j,j1} + F_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.3.8)$$

<sup>1)</sup> Классическое решение существует при некоторых ограничениях на гладкость поверхности и функции  $F_i$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ ; оно единственно при  $-1 \leq \nu < 1/2$ . — Прим. ред.

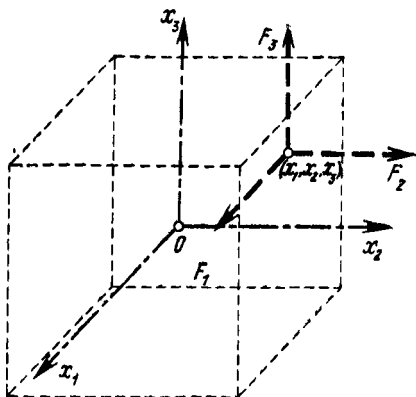
или в векторной форме

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0. \quad (4.3.8')$$

#### 4.3.1.2. Упругое пространство.

##### Фундаментальные решения

Рассмотрим упругое пространство под действием объемных сил  $F_i$ , являющихся обобщенными функциями



Фиг. 4.11.

(фиг. 4.11). Поле перемещений в пространстве можно определить из уравнений Ламе (4.38), в которых все операции будут рассматриваться в смысле теории обобщенных функций. Решения уравнений Ламе должны удовлетворять некоторым регулярным условиям на бесконечности. Если, например,  $R = \sqrt{x_i x_i}$  — радиус-вектор, то необходимо, чтобы компоненты вектора перемещений стремились к нулю при  $R \rightarrow \infty$ .

Тензор с компонентами  $u_{ij} = u_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , называется тензором фундаментальных решений для упругого пространства, если его компоненты удовлетворяют системе уравнений

$$\mu \Delta u_{ij} + (\lambda + \mu) u_{kj,ki} + \delta_{ij} \delta(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.3.9)$$

где  $\delta(x_1, x_2, x_3)$  — обобщенная функция Дирака. Должны удовлетворяться также краевые условия

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.3.10)$$

Применяя преобразование Фурье к системе (4.3.9), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mu \alpha_k \alpha_k F[u_{ij}] + (\lambda + \mu) \alpha_i \alpha_k F[u_{kj}] = \delta_{ij},$$

где  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  — комплексные величины. Умножая полученные уравнения на  $\alpha_i$  и суммируя по  $i$ , получаем

$$\alpha_j F[u_{ji}] = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\alpha_i}{\alpha_k \alpha_k}.$$

Таким образом, в фурье-изображениях будем иметь

$$F[u_{ij}] = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha_i \alpha_j}{(\alpha_k \alpha_k)^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\delta_{ij}}{\alpha_k \alpha_k} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.3.11)$$

Используя формулу (1.6.44), получаем

$$F\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{4\pi}{\alpha_k \alpha_k}, \quad (4.3.12)$$

а с учетом соотношений (1.6.44') можно написать

$$F\left[\frac{x_j}{R}\right] = 8\pi i \frac{\alpha_j}{(\alpha_k \alpha_k)^2} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4.3.12')$$

Имеем также

$$\delta_{ij} F\left[\frac{1}{R}\right] - F\left[\frac{x_i x_j}{R^3}\right] = 8\pi \frac{\alpha_i \alpha_j}{(\alpha_k \alpha_k)^2} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.3.12'')$$

Учитывая формулы (4.3.6), можно написать

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{2(1 - \nu)}, \quad \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{3 - 4\nu}{2(1 - \nu)},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
 & u_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \\
 & = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \frac{1}{R} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{R^2} \right] \quad (i, j=1, 2, 3).
 \end{aligned}
 \tag{4.3.13}$$

С помощью соотношений Коши (4.3.1), закона Гука (4.3.5) и соотношений (4.3.6) можно ввести тензор *фундаментальных решений* в виде тензора третьего ранга для задачи, поставленной в напряжениях. Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
 v_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(x_k \delta_{ij} - \right. \\
 & \left. - x_i \delta_{jk} - x_j \delta_{ki}) - 3 \frac{x_i x_j x_k}{R^2} \right] \quad (i, j, k=1, 2, 3).
 \end{aligned}
 \tag{4.3.14}$$

В этом случае поле перемещений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3) = & u_{ij}(x_1, x_2, x_3) * F_j(x_1, x_2, x_3) \\
 & (i=1, 2, 3),
 \end{aligned}
 \tag{4.3.15}$$

а для поля напряжений получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = & v_{ijk}(x_1, x_2, x_3) * F_k(x_1, x_2, x_3) \\
 & (i, j=1, 2, 3),
 \end{aligned}
 \tag{4.3.16}$$

где звездочкой обозначена свертка соответствующих функций относительно пространственных переменных.

Если на упругое пространство в точке  $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  действует *сосредоточенная сила*  $\mathbf{P}$ , то можно ввести эквивалентную нагрузку с компонентами

$$\begin{aligned}
 F_i(x_1, x_2, x_3) = & P_i \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0) \\
 & (i=1, 2, 3),
 \end{aligned}
 \tag{4.3.17}$$

где учтена формула (3.2.1).

Поле перемещений в этом случае определяется по формуле (4.3.15) и имеет вид

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = P_j u_{ij}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0)$$

$$(i=1, 2, 3), \quad (4.3.18)$$

а с помощью формулы (4.3.16) можно получить

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = P_k v_{ijk}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0) \\ (i, j=1, 2, 3). \quad (4.3.18')$$

Если сила  $\mathbf{P}$  приложена, в частности, в начале координат, то

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \frac{1}{R} \left[ (3-4\nu)P_i + P_j \frac{x_i x_j}{R^2} \right] \\ (i=1, 2, 3) \quad (4.3.19)$$

и

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[ (1-2\nu)(x_k P_k \delta_{ij} - \right. \\ \left. - x_i P_j - x_j P_i) - 3P_k \frac{x_i x_j x_k}{R^2} \right] = \\ = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left\{ x_k P_k \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} - 3 \frac{x_i x_j}{R^2} \right] - \right. \\ \left. - (1-2\nu)(x_i P_j + x_j P_i) \right\} \quad (i, j=1, 2, 3). \quad (4.3.19')$$

Используя результаты разд. 3.2.1, можно рассмотреть случаи нагружения упругого пространства, например, сосредоточенными моментами. Если в точке  $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  упругого пространства действует *направленный сосредоточенный момент*  $M$ , определяемый ортами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{F}^0$ , то для эквивалентной нагрузки можно написать

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = - \frac{M F_i^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} \frac{\partial}{\partial u} \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0) \\ (i=1, 2, 3). \quad (4.3.20)$$

Поле перемещений будет иметь вид

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \\ = - \frac{M}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} F_j^0 \frac{\partial}{\partial u} u_{ij}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0) =$$



$$= -\frac{M}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|} \frac{\partial}{\partial u} u_i^{\mathbf{F}^0} \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.3.21)$$

где  $u_i^{\mathbf{F}^0}$  — перемещения, соответствующие действию единичной сосредоточенной силы  $\mathbf{F}^0$  и определяемые формулами (4.3.18).

В частности, если направленный сосредоточенный момент действует в начале координат и  $\mathbf{F}^0 = -\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{i}_2$ , где  $\mathbf{i}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) — орты осей координат, то

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = M \frac{\partial}{\partial x_2} \delta(x_1, x_2, x_3), \quad (4.3.22)$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = F_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Поле перемещений записывается в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= M \frac{\partial}{\partial x_2} u_{11}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= -\frac{M}{16\pi(1-\nu)G} \frac{x_2}{R^3} \left( 3 - 4\nu + 3 \frac{x_1^2}{R^2} \right), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= M \frac{\partial}{\partial x_2} u_{21}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \frac{M}{16\pi(1-\nu)G} \frac{x_1}{R^3} \left( 1 - 3 \frac{x_2^2}{R^2} \right), \quad (4.3.23) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= M \frac{\partial}{\partial x_2} u_{31}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= -\frac{3M}{16\pi(1-\nu)G} \frac{x_1 x_2 x_3}{R^5}. \end{aligned}$$

Если в точке  $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  упругого пространства действует *вращательный сосредоточенный момент* (центр вращения)  $M$ , определяемый ортом  $\mathbf{n}$  с компонентами  $n_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , то эквивалентная нагрузка будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_i(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{2} M \epsilon_{ijk} n_j \delta_{,k} (x_1 - x_1^0, \\ & \quad x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0) \quad (i=1, 2, 3). \quad (4.3.24) \end{aligned}$$

Поле перемещений в этом случае записывается следующим образом:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2} M \in_{jki} n_k u_{ij, l}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0) \quad (i=1, 2, 3). \quad (4.3.25)$$

Если, в частности,  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_3$ , то получим вращательный сосредоточенный момент, приложенный в начале координат. Рассматриваемый момент обуславливает положительное вращение в плоскости  $Ox_1x_2$ . Ему соответствует следующая эквивалентная нагрузка:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial x_2} \delta(x_1, x_2, x_3),$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x_1, x_2, x_3), \quad (4.3.26)$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Поле перемещений в этом случае имеет вид

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} u_{11}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_1} u_{12}(x_1, x_2, x_3) \right] = -\frac{M}{8\pi G} \frac{x_2}{R^3},$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} u_{21}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_1} u_{22}(x_1, x_2, x_3) \right] = \frac{M}{8\pi G} \frac{x_1}{R^3},$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} u_{31}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_1} u_{32}(x_1, x_2, x_3) \right] = 0. \quad (4.3.27)$$

Аналогично можно исследовать и другие виды нагружения.

### 4.3.1.3. Постановка плоской задачи теории упругости в напряжениях

Если в некотором теле в параллельных плоскостях деформированные состояния одни и те же, то говорят, что оно находится в *плоском деформированном состоянии*. В таком деформированном состоянии находится длинный цилиндр (теоретически бесконечный), свободный от нагрузок на боковой поверхности и находящийся под действием объемных сил, не имеющих составляющих вдоль образующей.

Если в теле все элементарные площадки с фиксированной внешней нормалью свободны от напряжений, а напряженное состояние во всех точках, лежащих на одном перпендикуляре к этой плоскости, одинаково, то говорят, что тело находится в *плоском напряженном состоянии*. Последнее имеет место в пластинках и в длинных цилиндрических телах при определенных способах нагружения. Если предположить, что тонкая плоская пластинка свободна от напряжений на обеих параллельных поверхностях и нагружена только на боковой поверхности (по толщине) нагрузками, параллельными срединной плоскости, то усреднением напряжений по толщине пластинки можно добиться напряженного состояния, называемого *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

Уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad (4.3.28)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0,$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  — нормальные напряжения,  $\tau_{xy}$  — касательное напряжение, а  $X$ ,  $Y$  — составляющие *объемных сил*. В ортонормированной системе координат  $Oxy$  соотношения между деформациями и перемещениями имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (4.3.29)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.3.29')$$

В случае плоского напряженного состояния закон Гука записывается как

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad (4.3.30)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \quad (4.3.30')$$

Для случая плоского деформированного состояния можно использовать те же соотношения, только вместо *упругих констант*  $E$  и  $\nu$  нужно ввести *обобщенные упругие константы*

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (4.3.31)$$

Исключая из уравнений совместности деформации, с помощью формул (4.3.28) и некоторых преобразований получим уравнение

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right), \quad (4.3.32)$$

соответствующее плоскому напряженному состоянию. Таким образом, компоненты  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$  тензора напряжений определяются из системы уравнений (4.3.28), (4.3.32).

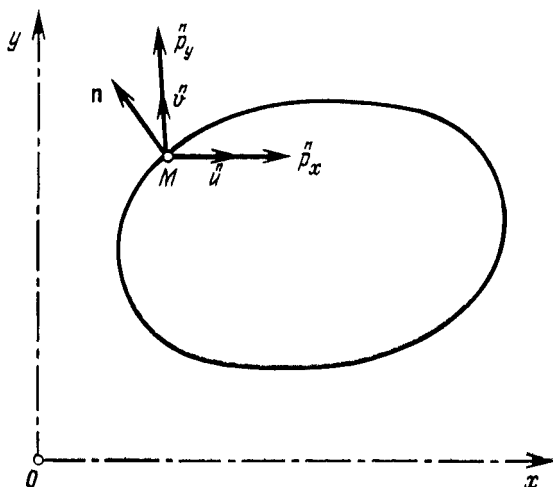
Граничные условия запишем в виде

$$p_x^n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \quad (4.3.33)$$

$$p_y^n = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y),$$

где  $p_x^n$ ,  $p_y^n$  — составляющие внешних нагрузок, приложенных к элементу поверхности границы с внешней нормалью  $n$  (фиг. 4.12).

С математической точки зрения случаи плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния совпадают; в первом случае только нужно воспользоваться обобщенными упругими константами.



Фиг. 4.12.

#### 4.3.1.4. Упругая плоскость. Фундаментальные решения

Рассмотрим *упругую плоскость*, находящуюся под действием объемных нагрузок  $X=X(x, y)$ ,  $Y=Y(x, y)$ , выраженных через обобщенные функции (фиг. 4.13). Предположим, что плоскость находится в *плоском деформированном состоянии* (объемные силы, действующие на упругое пространство, постоянны в одном направлении и равны нулю в других направлениях).

Для решения задачи в напряжениях необходимо проинтегрировать уравнения (4.3.28) и уравнение

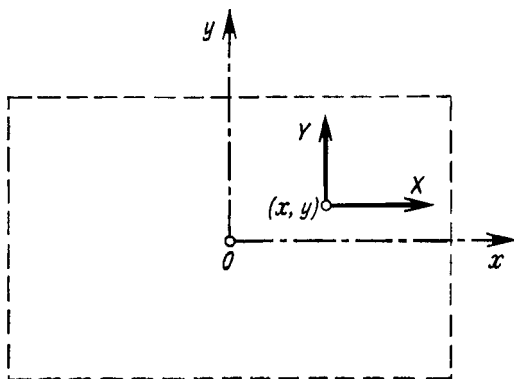
$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right), \quad (4.3.32')$$

которое получается из уравнения (4.3.32) подстановкой обобщенных упругих констант (4.3.31).

## Матрица

$$\{U\} \equiv \begin{Bmatrix} u_{11}(x, y) & u_{12}(x, y) \\ u_{21}(x, y) & u_{22}(x, y) \\ u_{31}(x, y) & u_{32}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.3.34)$$

называется *фундаментальным решением в смысле теории обобщенных функций* для упругой плоскости, если ее



Фиг. 4.13.

элементы удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial u_{31}}{\partial y} = -\delta(x, y), \quad (4.3.35)$$

$$\frac{\partial u_{31}}{\partial x} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta(u_{11} + u_{21}) = -\frac{1}{1-\nu} \delta'_x(x, y) \quad (4.3.35')$$

и уравнениям

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \frac{\partial u_{32}}{\partial y} = 0, \quad (4.3.36)$$

$$\frac{\partial u_{32}}{\partial x} + \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = -\delta(x, y),$$

$$\Delta(u_{12} + u_{22}) = -\frac{1}{1-\nu} \delta'_y(x, y). \quad (4.3.36')$$

Применяя двумерное преобразование Фурье к уравнениям (4.3.35) и (4.3.35'), получим

$$\alpha F[u_{11}] + \beta F[u_{31}] = -i,$$

$$\alpha F[u_{31}] + \beta F[u_{21}] = 0,$$

$$F[u_{11}] + F[u_{21}] = -\frac{i}{1-\nu} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — комплексные величины. Решив эту систему алгебраических уравнений, находим

$$F[u_{11}(x, y)] = -i \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{i}{1-\nu} \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2},$$

$$F[u_{21}(x, y)] = i \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{i}{1-\nu} \frac{\alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad (4.3.37)$$

$$F[u_{31}(x, y)] = -i \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{i}{1-\nu} \frac{\alpha^2 \beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Учитывая соотношение (1.6.37), получим

$$F\left[\ln \frac{1}{r}\right] = \frac{2\pi}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.3.38)$$

Соотношение (1.6.39) можно переписать в виде

$$F\left[\frac{x}{x^2 + k^2 y^2}\right] = 2\pi i \frac{k\alpha}{k^2 \alpha^2 + \beta^2}, \quad k > 0, \quad (4.3.39)$$

и, в частности,

$$F\left[\frac{x}{r^2}\right] = 2\pi i \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (4.3.39')$$

С учетом соотношения (1.6.39') имеем

$$F\left[\frac{xy^2}{r^4}\right] = \pi i \frac{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (4.3.40)$$

С помощью этих формул и соотношений, получаемых заменой переменной  $x$  на  $y$  и наоборот, элементы фунда-

ментального решения (4.3.34) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 u_{11}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x}{r^2} + \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{x}{2r^2} - \frac{xy^2}{r^4} \right) \right] = \\
 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{r^2} \left( 1 - 2\nu + 2 \frac{x^2}{r^2} \right), \\
 u_{21}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x}{r^2} - \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{x}{2r^2} + \frac{xy^2}{r^4} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{r^2} \left( 1 - 2\nu - 2 \frac{y^2}{r^2} \right), \quad (4.3.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{31}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{y}{r^2} - \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{y}{2r^2} - \frac{x^2y}{r^4} \right) \right] = \\
 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{y}{r^2} \left( 1 - 2\nu + 2 \frac{x^2}{r^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{12}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{y}{r^2} - \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{y}{2r^2} + \frac{x^2y}{r^4} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{y}{r^2} \left( 1 - 2\nu - 2 \frac{x^2}{r^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{22}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{y}{r^2} + \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{y}{2r^2} - \frac{x^2y}{r^4} \right) \right] = \\
 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{y}{r^2} \left( 1 - 2\nu + 2 \frac{y^2}{r^2} \right), \quad (4.3.41')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{32}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x}{r^2} - \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{x}{2r^2} - \frac{xy^2}{r^4} \right) \right] = \\
 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{r^2} \left( 1 - 2\nu + 2 \frac{y^2}{r^2} \right).
 \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы (4.3.36) и (4.3.36').

С помощью матриц

$$\{\sigma\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{Q\} \equiv \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (4.3.42)$$



можно определить напряженное состояние

$$\{\sigma\} = \{U\} * \{Q\}, \quad (4.3.43)$$

соответствующее объемным силам, выраженным через обобщенные функции. Для компонент тензора напряжений имеем выражения

$$\sigma_x(x, y) = u_{11}(x, y) * X(x, y) + u_{12}(x, y) * Y(x, y), \quad (4.3.44)$$

$$\sigma_y(x, y) = u_{21}(x, y) * X(x, y) + u_{22}(x, y) * Y(x, y),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = u_{31}(x, y) * X(x, y) + u_{32}(x, y) * Y(x, y). \quad (4.3.44')$$

Пусть, например, в точке  $A(x_0, y_0)$  на упругой плоскости приложена сосредоточенная сила  $F(F_x, F_y)$ . Нагрузка, эквивалентная этой силе, имеет вид

$$X(x, y) = F_x \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (4.3.45)$$

$$Y(x, y) = F_y \delta(x - x_0, y - y_0).$$

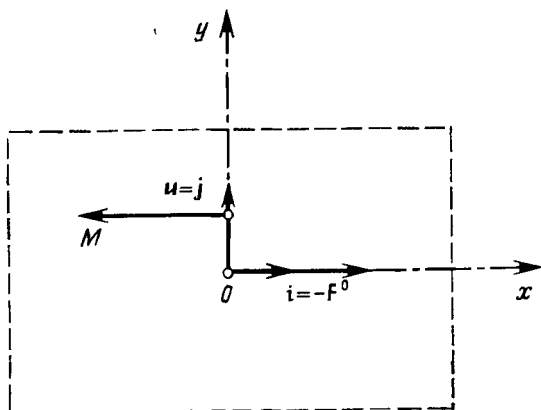
Для компонент тензора напряжений получаются выражения

$$\sigma_x(x, y) = F_x u_{11}(x - x_0, y - y_0) + F_y u_{12}(x - x_0, y - y_0), \quad (4.3.46)$$

$$\sigma_y(x, y) = F_x u_{21}(x - x_0, y - y_0) + F_y u_{22}(x - x_0, y - y_0),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = F_x u_{31}(x - x_0, y - y_0) + F_y u_{32}(x - x_0, y - y_0). \quad (4.3.46')$$

Допустим теперь, что в начале координат приложен направленный сосредоточенный момент. Пусть  $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ , а  $\mathbf{F}^0 = -\mathbf{i}$  ( $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  — орты координатных осей), т. е. приложенный момент обуславливает положительное вращение в плоскости  $Oxy$  (фиг. 4.14). Эквивалентная ему нагрузка



Фиг. 4.14.

имеет вид

$$X(x, y) = M\delta'_{y_i}(x, y), \quad Y(x, y) = 0, \quad (4.3.47)$$

а для компонент тензора напряжений получаются выражения

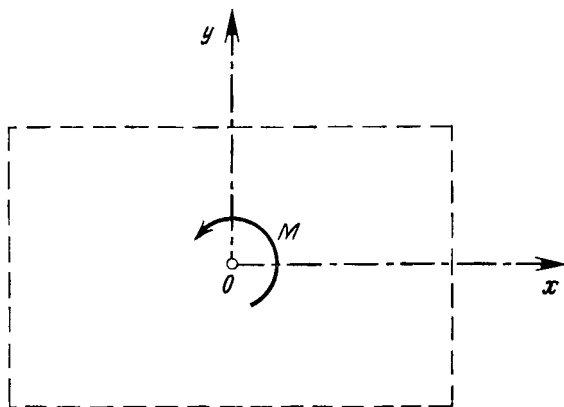
$$\sigma_x(x, y) = M \frac{\partial}{\partial y} u_{11}(x, y) = \frac{M}{2\pi(1-\nu)} \frac{xy}{r^4} \left( 1 - 2\nu + 4 \frac{x^2}{r^2} \right), \quad (4.3.48)$$

$$\sigma_y(x, y) = M \frac{\partial}{\partial y} u_{21}(x, y) = -\frac{M}{2\pi(1-\nu)} \frac{xy}{r^4} \left( 3 - 2\nu - 4 \frac{y^2}{r^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) &= M \frac{\partial}{\partial y} u_{31}(x, y) = \\ &= -\frac{M}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^4} \left[ (x^2 - y^2) \left( 1 - 2\nu + 2 \frac{x^2}{r^2} \right) - 4 \frac{x^2 y^2}{r^4} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.48')$$

Если в начале координат на упругой плоскости применен центр вращения  $M$  (Фиг. 4.15), то для эквивалентной нагрузки получаются выражения

$$X(x, y) = \frac{1}{2} M\delta'_y(x, y), \quad Y(x, y) = -\frac{1}{2} M\delta'_x(x, y), \quad (4.3.49)$$



Фиг. 4.15.

а компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{2} M \left[ \frac{\partial}{\partial y} u_{11}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} u_{12}(x, y) \right] = \frac{M}{\pi} \frac{xy}{r^4}, \quad (4.3.50)$$

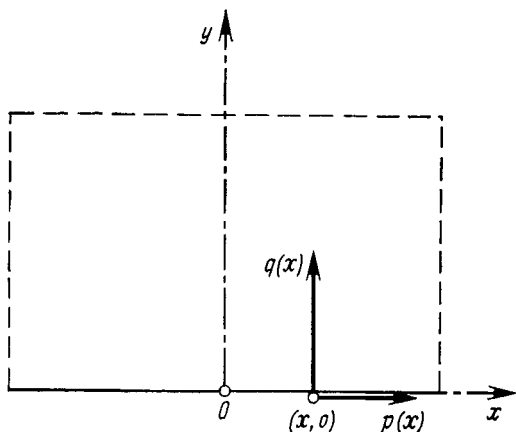
$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2} M \left[ \frac{\partial}{\partial y} u_{21}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} u_{22}(x, y) \right] = \\ &= -\frac{M}{\pi} \frac{xy}{r^4} = -\sigma_x(x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2} M \left[ \frac{\partial}{\partial y} u_{31}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} u_{32}(x, y) \right] = \\ &= -\frac{M}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (4.3.50')$$

Другие случаи нагружения можно рассмотреть аналогично.

### 4.3.1.5. Упругая полуплоскость

Пусть на упругую полуплоскость  $y \geq 0$  действуют касательная нагрузка  $p = p(x)$  и нормальная нагрузка  $q = q(x)$ , выраженные через обобщенные функции (фиг. 4.16). И в этом случае предположим, что упругая полуплоскость находится в плоском деформированном состоянии (на границе упругого полупространства действуют



Фиг. 4.16.

внешние нагрузки, постоянные в одном направлении и равные нулю в других направлениях).

При отсутствии объемных сил дифференциальные уравнения задачи, поставленной в напряжениях, принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (4.3.51)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (4.3.51')$$

Запишем граничные условия

$$\lim_{y \rightarrow +0} \tau_{y,x}(x, y) = -p(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} \sigma_y(x, y) = -q(x), \quad (4.3.52)$$

а на бесконечности потребуем, чтобы

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sigma_x(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \sigma_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \tau_{xy}(x, y) = 0. \quad (4.3.52')$$

Матрица фундаментальных решений в смысле теории обобщенных функций системы уравнений (4.3.51), (4.3.51') с граничными условиями (4.3.52) и (4.3.52') имеет вид

$$\{V\} \equiv \begin{Bmatrix} v_{11}(x, y) & v_{12}(x, y) \\ v_{21}(x, y) & v_{22}(x, y) \\ v_{31}(x, y) & v_{32}(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (4.3.53)$$

Элементы этой матрицы удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \frac{\partial v_{31}}{\partial y} = 0, \quad (4.3.54)$$

$$\frac{\partial v_{31}}{\partial x} + \frac{\partial v_{21}}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta(v_{11} + v_{21}) = 0 \quad (4.3.54')$$

и уравнениям

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial x} + \frac{\partial v_{32}}{\partial y} = 0, \quad (4.3.55)$$

$$\frac{\partial v_{32}}{\partial x} + \frac{\partial v_{22}}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta(v_{12} + v_{22}) = 0, \quad (4.3.55')$$

граничным условиям

$$\lim_{y \rightarrow +0} v_{21}(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +0} v_{31}(x, y) = -\delta(x), \quad (4.3.56)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} v_{22}(x, y) = -\delta(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} v_{32}(x, y) = 0$$

и условиям на бесконечности

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v_{i1}(x, y) = 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.3.57)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v_{i2}(x, y) = 0 \quad (i=1, 2, 3),$$

где все пределы рассматриваются в смысле теории обобщенных функций.

Применяя к уравнениям (4.3.54), (4.3.54') преобразование Фурье по  $x$  и считая  $y$  параметром, получаем

$$-isF_x[v_{11}(x, y)] + \frac{d}{dy} F_x[v_{31}(x, y)] = 0, \quad (4.3.58)$$

$$-isF_x[v_{31}(x, y)] + \frac{d}{dx} F_x[v_{21}(x, y)] = 0,$$

$$\begin{aligned} & -s^2(F_x[v_{11}(x, y)] + F_x[v_{21}(x, y)]) + \\ & + \frac{d^2}{dy^2} (F_x[v_{11}(x, y)] + F_x[v_{21}(x, y)]) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.58')$$

где  $s$  — комплексная величина. Исключая из этих уравнений  $F_x[v_{11}(x, y)]$  и  $F_x[v_{31}(x, y)]$ , получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d^4}{dy^4} F_x[v_{21}(x, y)] - 2s^2 \frac{d^2}{dy^2} F_x[v_{21}(x, y)] + \\ & + s^4 F_x[v_{21}(x, y)] = 0, \end{aligned} \quad (4.3.59)$$

общее решение которого имеет вид

$$F_x[v_{21}(x, y)] = (A + By)e^{-|s|y} + (C + Dy)e^{|s|y}, \quad (4.3.59')$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  зависят от  $s$ . Чтобы определить эти коэффициенты, применим преобразование Фурье и к условиям (4.3.56). В результате получим

$$\lim_{y \rightarrow +0} F_x[v_{21}(x, y)] = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +0} F_x[v_{31}(x, y)] = -1, \quad (4.3.60)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_x[v_{i1}(x, y)] = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (4.3.60')$$

Следовательно,

$$A=0, B=-is, C=D=0, \quad (4.3.61)$$

откуда

$$F_x[v_{21}(x, y)] = -isy e^{-|s|y}. \quad (4.3.62)$$

С помощью уравнений (4.3.58) можно найти

$$F_x[v_{11}(x, y)] = -2i \frac{|s|}{s} e^{-|s|y} + isy e^{-|s|y}, \quad (4.3.62')$$

$$F_x[v_{31}(x, y)] = -(1 - |s|y) e^{-|s|y}.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{\pi} F_x \left[ \frac{y}{r^2} \right] = e^{-|s|y}, \quad y > 0, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (4.3.63)$$

получим

$$\frac{1}{\pi} F_x \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{r^2} \right) \right] = -\frac{is}{\pi} F_x \left[ \frac{y}{r^2} \right] = -ise^{-|s|y}, \quad y > 0 \quad (4.3.63')$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} F_x \left[ \frac{y}{r^2} \right] &= \frac{1}{\pi} F_x \left[ \frac{d}{dy} \left( \frac{y}{r^2} \right) \right] = \frac{d}{dy} e^{-|s|y} = \\ &= -|s| e^{-|s|y}, \quad y > 0. \end{aligned} \quad (4.3.63'')$$

Из равенства

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\frac{y}{r^2}$$

с учетом формулы (4.3.63) находим

$$\frac{1}{\pi} F_x \left[ \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] = -e^{-|s|y}, \quad y > 0, \quad (4.3.64)$$

откуда следует

$$F_x \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] = -\frac{\pi i}{s} e^{-|s|y}, \quad y > 0. \quad (4.3.64')$$

Дифференцируя последнее соотношение по  $y$ , получаем

$$\frac{d}{dy} F_x \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] = F_x \left[ \frac{d}{dy} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] = \pi i \frac{|s|}{s} e^{-|s|y}, \quad y > 0,$$

откуда следует

$$F_x \left[ \frac{x}{r^2} \right] = \pi i \frac{|s|}{s} e^{-|s|y}, \quad y > 0. \quad (4.3.64'')$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} v_{11}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \frac{x}{r^2} - \frac{1}{\pi} y^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{\pi} \frac{x^3}{r^4}, \\ v_{21}(x, y) &= \frac{1}{\pi} y \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{r^2} \right) = -\frac{2}{\pi} \frac{xy^2}{r^4}, \\ v_{31}(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \frac{y}{r^2} - \frac{1}{\pi} y \frac{d}{dy} \left( \frac{y}{r^2} \right) = -\frac{2}{\pi} \frac{x^2 y}{r^4}. \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

Аналогично из формул (4.3.55) и (4.3.55') можно получить

$$\begin{aligned} v_{12}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \frac{x^2 y}{r^4}, \\ v_{22}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \frac{y^3}{r^4}, \\ v_{32}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \frac{xy^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (4.3.65')$$

Таким образом, фундаментальное решение в смысле теории обобщенных функций полностью определено.

Введем матрицы

$$\{\sigma\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}, \quad \{Q\} \equiv \begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix}. \quad (4.3.66)$$

С помощью свертки в предположении, что она существует, можно выразить напряженное состояние упругой полуплоскости в виде

$$\{\sigma\} = [V] * \{Q\}. \quad (4.3.67)$$

Если в точке  $A(x_0, 0)$  на упругой полуплоскости приложена сосредоточенная сила  $F(F_x, F_y)$  (фиг. 4.17), то имеем

$$p(x) = F_x \delta(x - x_0), \quad q(x) = F_y \delta(x - x_0) \quad (4.3.68)$$

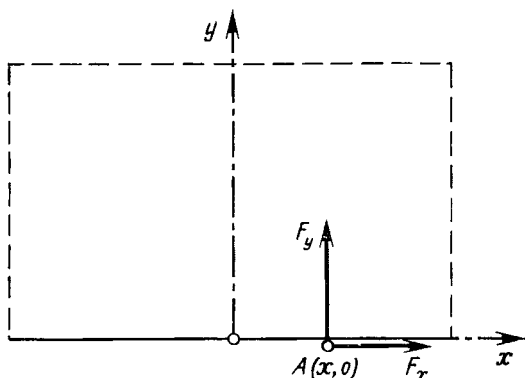


и окончательно получаем

$$\sigma_x(x, y) = F_x v_{11}(x - x_0, y) + F_y v_{12}(x - x_0, y), \quad (4.3.69)$$

$$\sigma_y(x, y) = F_x v_{21}(x - x_0, y) + F_y v_{22}(x - x_0, y),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = F_x v_{31}(x - x_0, y) + F_y v_{32}(x - x_0, y). \quad (4.3.69')$$



Фиг. 4.17.

Действие направленного сосредоточенного момента  $M$ , приложенного в начале координат, составляющие которого перпендикулярны границе плоскости (фиг. 4.18, а), выражается формулами

$$p(x) = 0, \quad q(x) = -M \frac{d}{dx} \delta(x - x_0). \quad (4.3.70)$$

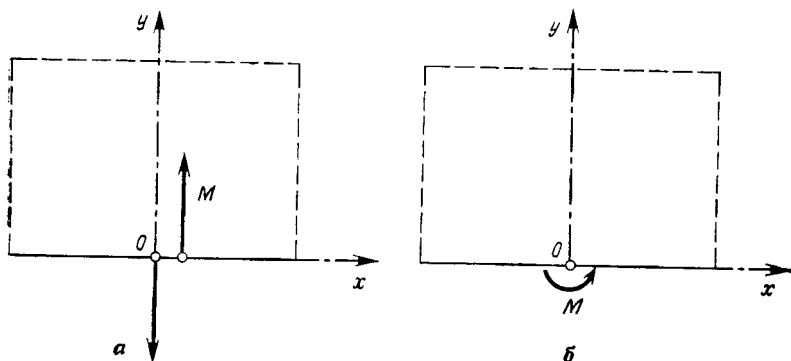
Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_x(x, y) = -M \frac{\partial}{\partial x} v_{12}(x, y) = -\frac{4M}{\pi} \frac{xy(x^2 - y^2)}{r^6}, \quad (4.3.71)$$

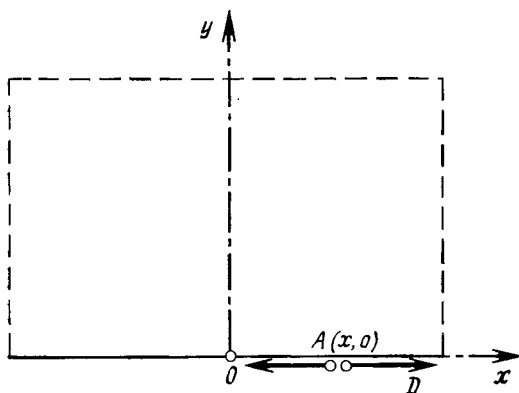
$$\sigma_y(x, y) = -M \frac{\partial}{\partial x} v_{22}(x, y) = -\frac{8M}{\pi} \frac{xy^3}{r^6},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -M \frac{\partial}{\partial x} v_{32}(x, y) = -\frac{2M}{\pi} \frac{y^2(3x^2 - y^2)}{r^6}. \quad (4.3.71')$$

Для случая вращательного сосредоточенного момента  $M$ , приложенного в начале координат (фиг. 4.18, б), получим такое же напряженное состояние, описываемое формулами (4.3.71), (4.3.71').



Фиг. 4.18.



Фиг. 4.19.

Пусть на упругую полуплоскость  $y \geq 0$  в точке  $A(x_0, 0)$  действует линейный дипольный сосредоточенный момент (фиг. 4.19). Имеем

$$p(x) = -D \frac{d}{dx} \delta(x - x_0), \quad q(x) = 0, \quad (4.3.72)$$

а для компонент тензора напряжений получаем

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= -D \frac{\partial}{\partial x} v_{11}(x - x_0, y) = \\ &= -\frac{2D}{\pi} \frac{(x - x_0)^2}{[(x - x_0)^2 + y^2]^3} [(x - x_0)^2 - 3y^2], \quad (4.3.73)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, y) &= -D \frac{\partial}{\partial x} v_{21}(x - x_0, y) = \\ &= -\frac{2D}{\pi} \frac{y^2}{[(x - x_0)^2 + y^2]^3} [3(x - x_0)^2 - y^2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x, y) &= -D \frac{\partial}{\partial x} v_{31}(x - x_0, y) = \\ &= -\frac{4D}{\pi} \frac{(x - x_0)y}{[(x - x_0)^2 + y^2]^3} [(x - x_0)^2 - y^2]. \quad (4.3.73')\end{aligned}$$

В случае периодической нагрузки, выраженной матрицей

$$\{\tilde{Q}\} \equiv \begin{Bmatrix} \tilde{p}(x) \\ \tilde{q}(x) \end{Bmatrix}, \quad (4.3.74)$$

действующей на границе полуплоскости, тензор напряжений определяется следующим образом:

$$\{\sigma\} = \{V\} * \{\tilde{Q}\}. \quad (4.3.75)$$

Предположим, что  $\tilde{p}(x)$  и  $\tilde{q}(x)$  — периодические обобщенные функции с периодами  $T$  и  $T'$  соответственно. Разложив их в ряд Фурье, получим

$$\tilde{p}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{p}) e^{in\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad n \in Z, \quad (4.3.76)$$

$$\tilde{q}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{q}) e^{in\omega' x}, \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'}, \quad n \in Z,$$

где коэффициенты разложений имеют вид

$$c_n(\tilde{p}) = \frac{1}{T} (\tilde{p}(x), e^{-in\omega x}), \quad n \in Z, \quad (4.3.76')$$

$$c_n(\tilde{q}) = \frac{1}{T} (\tilde{q}(x), e^{-in\omega' x}), \quad n \in Z.$$

Матрица  $\{\tilde{Q}\}$ , соответствующая периодическим нагрузкам, приложенным на границе полуплоскости, в этом случае принимает вид

$$\{\tilde{Q}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} c_n(\tilde{p}) e^{in\omega x} \\ c_n(\tilde{q}) e^{in\omega' x} \end{array} \right\}, \quad n \in Z. \quad (4.3.77)$$

Возникающие в упругой полуплоскости напряжения определяются сверткой

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{V\} * \left\{ \begin{array}{l} c_n(\tilde{p}) e^{in\omega x} \\ c_n(\tilde{q}) e^{in\omega' x} \end{array} \right\}, \quad n \in Z. \quad (4.3.78)$$

В частности, если нагрузки  $\tilde{p}(x)$  и  $\tilde{q}(x)$  имеют один и тот же период  $T$ , можно получить решение (4.3.78) в виде матричного ряда Фурье

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{c_n(\sigma)\} e^{in\omega x}, \quad n \in Z, \quad (4.3.79)$$

где

$$\{c_n(\sigma)\} = \{V\} * \{c_n(\tilde{Q})\}, \quad n \in Z, \quad (4.3.80)$$

и

$$\{c_n(\tilde{Q})\} = \left\{ \begin{array}{l} c_n(\tilde{p}) \\ c_n(\tilde{q}) \end{array} \right\}, \quad n \in Z. \quad (4.3.80')$$

Пусть

$$\tilde{Q}(x) = F \tilde{\delta}(x) \quad (4.3.81)$$

— периодическая сосредоточенная сила с периодом  $T$ , действующая на границе упругой полуплоскости. Испол-

зую полученные выше результаты, можно написать

$$\{c_n(\tilde{Q})\} = \left\{ \begin{array}{l} F_x c_n(\tilde{\delta}) \\ F_y c_n(\tilde{\delta}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} F_x \\ \frac{1}{T} F_y \end{array} \right\}, \quad n \in Z. \quad (4.3.82)$$

Следовательно,

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{V\} * \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} F_x \\ \frac{1}{T} F_y \end{array} \right\} e^{in\omega x}, \quad n \in Z, \quad (4.3.83)$$

или

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{V\} * \left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right\} \delta(x - nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{V\} * \left\{ \begin{array}{l} F_x \delta(x - nT) \\ F_y \delta(x - nT) \end{array} \right\}, \quad n \in Z. \end{aligned} \quad (4.3.83')$$

В явном виде получим

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x v_{11}(x - nT, y) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_y v_{12}(x - nT, y), \quad n \in Z, \end{aligned} \quad (4.3.84)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x v_{21}(x - nT, y) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_y v_{22}(x - nT, y), \quad n \in Z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x v_{31}(x - nT, y) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_y v_{32}(x - nT, y), \quad n \in Z. \end{aligned} \quad (4.3.84')$$

Предположим, что на границе упругой полуплоскости приложены периодические линейные дипольные сосредоточенные моменты с периодом  $T$ , имеющие вид (3.2.27''). Тензор напряжений определим по формуле

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{V\} * \begin{Bmatrix} -D\delta'(x-nT) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad n \in Z. \quad (4.3.85)$$

В явном виде получим

$$\sigma_x(x, y) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} Dv'_{11}(x-nT, y), \quad n \in Z, \quad (4.3.86)$$

$$\sigma_y(x, y) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} Dv'_{21}(x-nT, y), \quad n \in Z,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} Dv'_{31}(x-nT, y), \quad n \in Z, \quad (4.3.86')$$

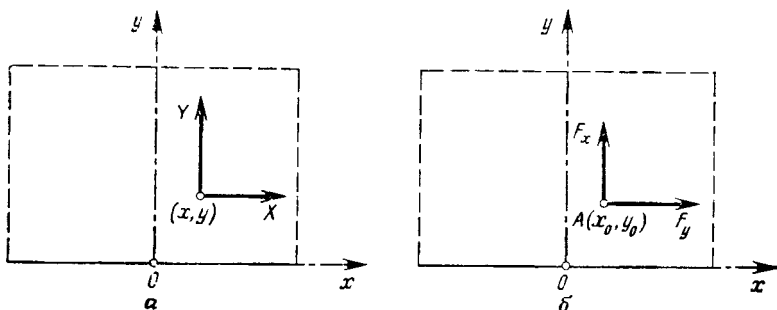
где дифференцирование по  $x$  проводится в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим упругое полупространство, находящееся под действием объемных сил  $X=X(x, y)$ ,  $Y=Y(x, y)$  (фиг. 4.20, *a*), выраженных через обобщенные функции. Чтобы получить выражения для напряженного состояния в этом случае нагружения, будем пользоваться записанным в виде формул (4.3.44) и (4.3.44') решением задачи для упругой плоскости, находящейся под действием объемных сил. При этом нужно потребовать, чтобы при  $y=0$ , т. е. на границе полуплоскости, напряжения отсутствовали. Чтобы освободиться от этих напряжений, рассмотрим упругую полуплоскость  $y \geq 0$ , находящуюся под действием противоположно направленных нагрузок, величины которых равны отмеченным напряжениям. Обозначим эти нагрузки через  $\tau^0_{xy}(x)$  и  $\sigma^0_y(x)$ . Они получаются из решения задачи для упругой плоскости предельным переходом в смысле теории обобщенных функций

при  $y \rightarrow +0$ . Искомое напряженное состояние в этом случае описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = & u_{11}(x, y) * X(x, y) + u_{12}(x, y) * Y(x, y) - \\ & - v_{11}(x, y) * \tau_{xy}^0(x) - v_{12}(x, y) * \sigma_y^0(x), \end{aligned} \quad (4.3.87)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) = & u_{21}(x, y) * X(x, y) + u_{22}(x, y) * Y(x, y) - \\ & - v_{21}(x, y) * \tau_{xy}^0(x) - v_{22}(x, y) * \sigma_y^0(x), \end{aligned}$$



Фиг. 4.20.

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) = & u_{31}(x, y) * X(x, y) + u_{32}(x, y) * Y(x, y) - \\ & - v_{31}(x, y) * \tau_{xy}^0(x) - v_{32}(x, y) * \sigma_y^0(x). \end{aligned} \quad (4.3.87')$$

Пусть, например, на упругое полупространство действует сосредоточенная сила  $\mathbf{F}(F_x, F_y)$  (фиг. 4.20, б), приложенная в точке  $A(x_0, y_0)$ . Можно выразить эту нагрузку через эквивалентные нагрузки (4.3.45). Учитывая формулы (4.3.46) и (4.3.46'), на границе получим

$$\tau_{xy}^0(x) = \lim_{y \rightarrow +0} [F_x u_{31}(x - x_0, y - y_0) + F_y u_{32}(x - x_0, y - y_0)], \quad (4.3.88)$$

$$\sigma_y^0(x) = \lim_{y \rightarrow +0} [F_x u_{21}(x - x_0, y - y_0) + F_y u_{22}(x - x_0, y - y_0)].$$

Если ввести обозначения

$$u_{2i}^0(x-x_0) = \lim_{y \rightarrow +0} u_{2i}(x-x_0, y-y_0),$$

$$(i=1, 2), \quad (4.3.89)$$

$$u_{3i}^0(x-x_0) = \lim_{y \rightarrow +0} u_{3i}(x-x_0, y-y_0)$$

то можно записать соотношения, описывающие напряженное состояние в упругой полуплоскости, находящейся под действием внутренней сосредоточенной силы  $F$ , следующим образом:

$$\sigma_x(x, y) = F_x [u_{11}(x-x_0, y-y_0) - v_{11}(x, y) * u_{31}^0(x-x_0) -$$

$$- v_{12}(x, y) * u_{21}^0(x-x_0)] + F_y [u_{12}(x-x_0, y-y_0) -$$

$$- v_{11}(x, y) * u_{32}^0(x-x_0) - v_{12}(x, y) * u_{22}^0(x-x_0)],$$

$$(4.3.90)$$

$$\sigma_y(x, y) = F_x [u_{21}(x-x_0, y-y_0) - v_{21}(x, y) * u_{31}^0(x-x_0) -$$

$$- v_{22}(x, y) * u_{21}^0(x-x_0)] + F_y [u_{22}(x-x_0, y-y_0) -$$

$$- v_{21}(x, y) * u_{32}^0(x-x_0) - v_{22}(x, y) * u_{22}^0(x-x_0)],$$

$$\tau_{xy}(x, y) = F_x [u_{31}(x-x_0, y-y_0) -$$

$$- v_{31}(x, y) * u_{31}^0(x-x_0) - v_{32}(x, y) * u_{21}^0(x-x_0)] +$$

$$+ F_y [u_{32}(x-x_0, y-y_0) -$$

$$- v_{31}(x, y) * u_{32}^0(x-x_0) - v_{32}(x, y) * u_{22}^0(x-x_0)]. \quad (4.3.90')$$

Проделав указанные вычисления, в частности при  $x_0=0$  (что несколько не умаляет общности), получим

$$\sigma_x = \frac{F_x}{4\pi} x \left\{ - \frac{5-v}{x^2 + (y+\psi_0)^2} + \right.$$

$$+ \frac{2[(3-v)y^2 + 4(2+v)y_0y + 3(1+v)\psi_0^2]}{[x^2 + (y+y_0)^2]^2} -$$

$$\left. - \frac{16(1+v)y_0y(y+\psi_0)^2}{[x^2 + (y+y_0)^2]^3} - \frac{3+v}{x^2 + (y-y_0)^2} + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(1+\nu)(y-y_0)^2}{[x^2+(y-y_0)^2]^2} \left. \right\} + \frac{F_y}{4\pi} \left\{ \frac{(7-3\nu)y+(1-5\nu)y_0}{x^2+(y+y_0)^2} + \right. \\
 & + \frac{2(y+y_0)[(3-\nu)y^2-2(3+5\nu)y_0y-3(1+\nu)y_0^2]}{[x^2+(y+y_0)^2]^2} + \\
 & + \frac{16(1+\nu)y_0y(y+y_0)^3}{[x^2+(y+y_0)^2]^3} - \\
 & \left. - \frac{(1+3\nu)(y-y_0)}{x^2+(y-y_0)^2} + \frac{2(1+\nu)(y-y_0)^3}{[x^2+(y-y_0)^2]^2} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{4.3.91}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_y &= \frac{F_x}{4\pi} x \left\{ -\frac{1-\nu}{x^2+(y+y_0)^2} - \right. \\
 & - \frac{2[(3-\nu)y^2+4y_0y-(1+\nu)y_0^2]}{[x^2+(y+y_0)^2]^2} + \frac{16(1+\nu)y_0y(y+y_0)^2}{[x^2+(y+y_0)^2]^3} + \\
 & + \frac{1-\nu}{x^2+(y-y_0)^2} - \frac{2(1+\nu)(y-y_0)^2}{[x^2+(y-y_0)^2]^2} \left. \right\} + \frac{F_y}{4\pi} \times \\
 & \times \left\{ \frac{(1-\nu)(y-y_0)}{x^2+(y+y_0)^2} - \frac{16(1+\nu)y_0y(y+y_0)^3}{[x^2+(y+y_0)^2]^3} - \right. \\
 & - \frac{2(y+y_0)[(3-\nu)y^2-2(1+3\nu)y_0y+(1+\nu)y_0^2]}{[x^2+(y+y_0)^2]^2} - \\
 & \left. - \frac{(1-\nu)(y-y_0)}{x^2+(y-y_0)^2} - \frac{2(1+\nu)(y-y_0)^3}{[x^2+(y-y_0)^2]^2} \right\}, \\
 \tau_{xy} &= \frac{F_x}{4\pi} \left\{ -\frac{(5-\nu)y+(3+\nu)y_0}{x^2+(y+y_0)^2} + \right. \\
 & + \frac{2(y+y_0)[(3-\nu)y^2+2(5+3\nu)y_0y+(1+\nu)y_0^2]}{[x^2+(y+y_0)^2]^2} - \\
 & - \frac{16(1+\nu)y_0y(y+y_0)^3}{[x^2+(y+y_0)^2]^3} - \frac{(3+\nu)(y-y_0)}{x^2+(y-y_0)^2} + \\
 & + \frac{2(1+\nu)(y-y_0)^3}{[x^2+(y-y_0)^2]^2} \left. \right\} + \frac{F_y}{4\pi} x \left\{ \frac{1-\nu}{x^2+(y+y_0)^2} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\frac{2[(3-\nu)y^2 - 4\nu y_0 y - (1+\nu)y_0^2]}{[x^2 + (y + y_0)^2]^2} - \frac{16(1+\nu)y_0 y (y + y_0)^2}{[x^2 + (y + y_0)^2]^3} - \left. \frac{1-\nu}{x^2 + (y - y_0)^2} - \frac{2(1+\nu)(y - y_0)^2}{[x^2 + (y - y_0)^2]^2} \right\}. \quad (4.3.91')$$

### 4.3.2. Динамические задачи для линейных упругих тел

Чтобы построить математическую модель динамической задачи для линейного упругого тела, будут рассмотрены некоторые особенности *кинematики деформаций* и теории напряжений с учетом закона Гука. Приведенные выше основные гипотезы должны быть дополнены и рассмотрены с учетом инерционных сил в предположении, что рассматриваемое тело находится в движении. В таком случае говорят, что внешние нагрузки находятся в *динамическом равновесии*.

#### 4.3.2.1. Постановка пространственной задачи теории упругости в перемещениях

Гипотезы из разд. 4.3.1.1 и соотношения (4.3.1) — (4.3.3) справедливы и для динамических задач. Заметим только, что рассматриваемые величины явно зависят еще и от времени, т. е.  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3; t)$  и  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3; t)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3; t)$  определяются из *уравнений движения*

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (4.3.92)$$

где  $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3; t)$ ,  $\rho$  — плотность материала. В случае когда имеет место некоторая *вязкость*, пропорциональная скорости, дифференциальный оператор  $\rho(\partial^2/\partial t^2)$  заменяется оператором  $\rho(\partial^2/\partial t^2) + k(\partial/\partial t)$ , где  $k$  — коэффициент вязкости.

К введенным выше упрощенным гипотезам, касающимся определяющих уравнений, прибавим еще одну гипотезу:

г) Скорость деформации тела не учитывается. Определяющие уравнения записываются в таком же виде; соотношения (4.3.5) — (4.3.5') остаются в силе.

Краевыми условиями для динамических задач являются *условия на границе* области и *начальные условия*. Условия на границе записываются в виде формул (4.3.7) или (4.3.7') и должны удовлетворяться при  $t \geq t_0$ , где  $t_0$  — начальный момент времени. При  $t = t_0$  условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3; t_0) &= u_i^0(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3; t_0) &= \dot{u}_i^0(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (4.3.93)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3; t_0) &= \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3; t_0) &= \dot{\sigma}_{ij}^0(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (4.3.93')$$

Система уравнений (4.3.1), (4.3.5) и (4.3.92) представляет собой *систему уравнений динамической задачи теории упругости*. Можно доказать, что эта система из 15 уравнений с 15 неизвестными всегда имеет решение, которое единственно при заданных краевых условиях<sup>1)</sup>.

Уравнения Ламе в перемещениях имеют вид

$$\mu \square_2 u_i + (\lambda + \mu) u_{j,j} + F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.94)$$

где  $\square_2$  — оператор Даламбера, определяемый соотношением (2.3.37'). Скорости распространения волн определяются по формулам

$$c_1^2 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{1}{2(1 + \nu)} \frac{E}{\rho}. \quad (4.3.95)$$

Эти скорости связаны между собой следующим образом:

$$c_1^2 = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} c_2^2 = \left( 1 + \frac{1}{1 - 2\nu} \right) c_2^2, \quad (4.3.96)$$

откуда получается, что  $c_1 \geq c_2 \sqrt{2}$ . Учитывая формулу (4.3.96), можно легко показать, что между операторами Даламбера существует соотношение

$$2(1 - \nu) \square_1 = \Delta + (1 - 2\nu) \square_2. \quad (4.3.97)$$

<sup>1</sup> См. сноску на стр. 364. — Прим. ред.

Предположив, что объемные силы отсутствуют, для поля перемещений получим

$$u_i = \frac{1}{2G} (\Omega_{,i} - 2\Phi_i) \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.3.98)$$

а напряженное состояние определим по формуле

$$\sigma_{ij} = -\nu \square_2 \Omega \delta_{ij} + \Omega_{,ij} - (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}), \quad (4.3.99)$$

где функции  $\Phi_i = \Phi_i(x_1, x_2, x_3; t)$  должны принадлежать классу  $C^3$  относительно пространственных координат и классу  $C^2$  относительно времени. Функции  $\Phi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) являются компонентами некоторого вектора  $\Phi$ , удовлетворяющего уравнению распространения поперечных волн

$$\square_2 \Phi = 0. \quad (4.3.100)$$

Функция  $\Omega = \Omega(x_1, x_2, x_3; t)$  должна принадлежать классу  $C^4$  относительно всех своих переменных; она удовлетворяет уравнению

$$\square_1 \Omega = \frac{1}{1-\nu} \operatorname{div} \Phi. \quad (4.3.101)$$

Заметим, что соотношение (4.3.98) может быть записано в следующем векторном виде:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} (\operatorname{grad} \Omega - 2\Phi). \quad (4.3.98')$$

С помощью двух *потенциальных функций перемещений* (векторной и скалярной) дается *постановка линейной динамической задачи теории упругости*. Такое представление является полным для односвязных областей (любое поле перемещений, удовлетворяющее системе уравнений динамической упругости, представляется в таком виде). Оно обобщает представление Шефера для статического случая.

Если объемные силы ненулевые, то с помощью представлений (4.3.98) и (4.3.99) можно найти частное решение уравнений движения. Вектор  $\Phi$  должен быть частным решением уравнения

$$\square_2 \Phi = \mathbf{F}, \quad (4.3.102)$$

а скаляр  $\Omega$  — частным решением уравнения

$$\square_1 \square_2 \Omega = \frac{1}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (4.3.103)$$

В случае консервативных объемных сил вида

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \chi, \quad (4.3.104)$$

где  $\chi = \chi(x_1, x_2, x_3; t)$  — функция класса  $C^2$  относительно пространственных переменных, частное решение для перемещений имеет вид

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} \operatorname{grad} \omega, \quad (4.3.105)$$

а соответствующее напряженное состояние определяется по формулам

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta \omega \delta_{ij} + \omega_{,i,j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.3.106)$$

Функция  $\omega = \omega(x_1, x_2, x_3; t)$  должна принадлежать классу  $C^3$  относительно пространственных координат и классу  $C^2$  относительно времени. Если мы хотим удовлетворить и уравнениям совместности в напряжениях, то функция  $\omega$  должна принадлежать классу  $C^4$  относительно пространственных координат. Она является частным решением уравнения

$$\square_1 \omega + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \chi = 0. \quad (4.3.107)$$

Используя результаты из разд. 2.3.2.2, можно записать частное решение уравнения (4.3.102) в виде

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} L^{-1} \left[ \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_2}} * L[\mathbf{F}] \right], \quad (4.3.108)$$

а частное решение уравнения (4.3.106) будет следующим:

$$\omega = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)\pi} L^{-1} \left[ \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_1}} * L[\chi] \right]. \quad (4.3.109)$$

В обоих случаях свертка соответствующих функций осуществляется по пространственным координатам.

Аналогично частное решение уравнения (4.3.103) можно записать в виде

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} c_2^2 L^{-1} \left[ \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right]_{,i} * L [F_i] \right], \quad (4.3.110)$$

где свертка функций также относится к пространственным переменным.

#### 4.3.2.2. Упругое пространство. Фундаментальные решения

Рассмотрим упругое пространство под действием динамических нагрузок  $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3; t)$  (фиг. 4.11). Используя нулевое продолжение влево этих функций, введем обобщенные функции

$$\bar{F}_i(x_1, x_2, x_3; t) = \theta(t) F_i(x_1, x_2, x_3; t) \quad (i=1, 2, 3). \quad (4.3.111)$$

Введем также обобщенные перемещения

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = \theta(t) u_i(x_1, x_2, x_3; t) \quad (i=1, 2, 3). \quad (4.3.112)$$

Если при  $t_0=0$  удовлетворяются начальные условия вида (4.3.93), то можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) &= \frac{\tilde{\partial}}{\partial t} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) + \\ &+ u_i^0(x_1, x_2, x_3) \delta(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) &= \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial t^2} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) + \\ &+ \dot{u}_i^0(x_1, x_2, x_3) \delta(t) + u_i^{01}(x_1, x_2, x_3) \dot{\delta}(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) &= \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial x_j \partial x_k} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения Ламе (4.3.94) с учетом начальных условий записываются через обобщенные функции следующим образом:

$$\mu \square_2 \bar{u}_i + (\lambda + \mu) \bar{u}_{j,jl} + \bar{F}_i + \rho [\dot{u}_i^0(t) + u_i^0(t)] = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (4.3.113)$$

Применяя преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по пространственным координатам, получаем

$$(\mu \alpha_k \alpha_k + \rho p^2) F [L [\bar{u}_i]] + (\lambda + \mu) \alpha_i \alpha_j F [L [u_j]] = \\ = F [L [\bar{F}_i]] + \rho (p F [u_i^0] + F [\dot{u}_i^0]) \quad (i=1, 2, 3),$$

где  $p$  — комплексная переменная, соответствующая преобразованию Лапласа, а  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — комплексные переменные, соответствующие преобразованию Фурье. Умножая полученные уравнения на  $\alpha_i$  и суммируя по  $i$ , можно написать

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; p) = \alpha_j F [L [\bar{u}_j]] = \\ = \frac{1}{(\lambda + 2\mu) \alpha_k \alpha_k + \rho p^2} \alpha_j [F [L [\bar{F}_j]] + \rho (p F [u_j^0] + F [\dot{u}_j^0])]. \quad (4.3.114)$$

В таком случае для изображений будем иметь

$$F [L [\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t)]] = \frac{1}{\mu \alpha_k \alpha_k + \rho p^2} [F [L [\bar{F}_i]] + \\ + \rho (p F [u_i^0] + F [\dot{u}_i^0]) - (\lambda + \mu) \alpha_i f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; p)] \\ (i=1, 2, 3). \quad (4.3.115)$$

Замечая, что

$$F^{-1} \left[ \frac{\lambda + \mu}{[(\lambda + 2\mu) \alpha_k \alpha_k + \rho p^2] (\mu \alpha_k \alpha_k + \rho p^2)} \right] = \\ = \frac{1}{4\pi \rho p^2 R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right),$$

где введены скорости распространения волн по формулам (4.3.95), и используя свойства свертки относительно операции дифференцирования, для изображений Лапласа

са обобщенных перемещений получим выражение

$$\begin{aligned}
 L[\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t)] = & \frac{1}{4\pi G} \left\{ [L[\bar{F}_i] + \right. \\
 & + \rho(pu_i^0 + \dot{u}_i^0)] * \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_2}} + c_2^2 [(L[\bar{F}_j])_{,j} + \\
 & \left. + \rho(pu_j^0 + \dot{u}_j^0)_{,j}] * \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right]_{,i} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{4.3.116}$$

где свертка функций осуществляется относительно пространственных координат.

Используя результаты разд. 1.6.3.1, получим поле обобщенных перемещений в виде

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{1}{4\pi G} \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_2}} \right] + \right. \\
 & + \rho \left[ u_i^0 * \frac{1}{R} \delta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) + \dot{u}_i^0 * \frac{1}{R} \delta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \right] + \\
 & + c_2^2 \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right]_{,ij} \right] \right\} + \\
 & + \rho \left\{ u_{i,j}^0 * \left\{ \frac{1}{R} \left[ \theta \left( t - \frac{R}{c_1} \right) - \theta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \right] \right\}_{,i} + \right. \\
 & \left. + \dot{u}_{i,j}^0 * \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left( t - \frac{R}{c_1} \right)_+ - \left( t - \frac{R}{c_2} \right)_+ \right] \right\}_{,i} \right\} \quad (i = 1, 2, 3).
 \end{aligned}
 \tag{4.3.117}$$

В случае однородных (нулевых) начальных условий имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{1}{4\pi G} \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_2}} \right] + \right. \\
 & \left. + c_2^2 L^{-1} \left[ L[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right]_{,ij} \right] \right\} \\
 & (i = 1, 2, 3),
 \end{aligned}
 \tag{4.3.118}$$



а при *отсутствии объемных сил* можно написать

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c_2^2} \left[ u_i^0 * \frac{1}{R} \delta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \dot{u}_i^0 * \frac{1}{R} \delta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \right] + u_{j,j}^0 * \left\{ \frac{1}{R} \left[ \theta \left( t - \frac{R}{c_1} \right) - \theta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \right] \right\}_{,i} + \right. \\ & \left. + \dot{u}_{j,j}^0 * \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left( t - \frac{R}{c_1} \right)_+ - \left( t - \frac{R}{c_2} \right)_+ \right] \right\}_{,i} \right\} \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.3.118')$$

Если начальные условия однородные, то используется представление решения через потенциалы. В таком случае соответствующие результаты будут выражаться через обобщенные функции, а производные в смысле обобщенных функций будут равны обычным производным. Пусть  $\mathbf{P}(t)$  — *сосредоточенная сила*, приложенная в начале координат. Можно написать

$$\bar{F}_i = \cos \beta_i P(t) \delta(x_1, x_2, x_3) \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.3.119)$$

где  $\cos \beta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{P}(t)$ .

С помощью формул (4.3.108) и (4.3.110) находим

$$\Phi_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{\cos \beta_i}{R} \bar{P} \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.3.120)$$

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} c_2^2 \cos \beta_j \bar{P}(t)_{(t)}^* \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left( t - \frac{R}{c_1} \right)_+ - \left( t - \frac{R}{c_2} \right)_+ \right] \right\}_{,j},$$

где свертка функций осуществляется по времени. Таким образом, получим следующее поле обобщенных перемещений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{\cos \beta_j}{4\pi G} \left\{ \frac{1}{R} \bar{P} \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + c_2^2 \bar{P}(t)_{(t)}^* \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left( t - \frac{R}{c_1} \right)_+ - \left( t - \frac{R}{c_2} \right)_+ \right] \right\}_{,ij} \right\} \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.3.121)$$

где

$$\bar{P}(t) = \theta(t) P(t). \quad (4.3.122)$$

В частности, при

$$\bar{P}(t) = P_0 \delta(t), \quad (4.3.123)$$

т. е. в случае импульсной в начальный момент времени сосредоточенной силы, будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{P_0 \cos \beta_j}{4\pi G} \left\{ \frac{1}{R} \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + c_2^2 \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+ \right] \right\}_{,ij} \right\} \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.3.124)$$

При  $P_0=1$  получается фундаментальное решение в смысле теории обобщенных функций в виде тензора с компонентами

$$\begin{aligned} u_{ij}(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{1}{R} \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + c_2^2 \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+ \right] \right\}_{,ij} \right\} \quad (i, j=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.3.125)$$

Поле обобщенных перемещений, соответствующее произвольным объемным силам и неоднородным начальным условиям, в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = & u_{ij} * \{\bar{F}_j + \\ & + \rho [\dot{u}_j^0 \delta(t) + u_j^0 \delta'(t)] \} \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.3.126)$$

где свертка функций осуществляется по всем переменным.

Интересно отметить, что Сток в 1849 г. получил формулы (4.3.121) для случая, когда  $P(t)$  является обычной функцией, в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{1}{4\pi \rho R} \left[ \frac{1}{c_1^2} \frac{x_1^2}{R^2} P\left(t - \frac{R}{c_1}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c_2^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{R^2}\right) P\left(t - \frac{R}{c_2}\right) - \left(1 - 3 \frac{x_1^2}{R^2}\right) \int_{1/c_1}^{1/c_2} \lambda P(t - \lambda R) d\lambda \right], \end{aligned}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{x_1 x_2}{4\pi\rho R} \left[ \frac{1}{c_1^2} P\left(t - \frac{R}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} P\left(t - \frac{R}{c_2}\right) + 3 \int_{1/c_1}^{1/c_2} \lambda P(t - \lambda R) d\lambda \right], \quad (4.3.121')$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{x_1 x_3}{4\pi\rho R} \left[ \frac{1}{c_1^2} P\left(t - \frac{R}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} P\left(t - \frac{R}{c_2}\right) + 3 \int_{1/c_1}^{1/c_2} \lambda P(t - \lambda R) d\lambda \right],$$

предполагая, что сила  $P(t)$  действует вдоль оси  $Ox_1$ .

Наконец, если в начальный момент мгновенно приложить в начале координат сосредоточенную силу и затем поддерживать эту силу постоянной, то можно написать

$$\bar{P}(t) = P_0 \theta(t). \quad (4.3.127)$$

Для обобщенных перемещений получается выражение

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = & \frac{P_0 \cos \beta_j}{8\pi G} \left\{ \frac{2}{R} \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + c_2^2 \left\{ \frac{1}{R} \left[ \left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+^2 - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+^2 \right] \right\}_{,ij} \right\} \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.3.128)$$

Рассмотрим действие *вращательного сосредоточенного момента*  $M(t)$  на упругое пространство в начале координат в плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$ . Начальные условия считаются однородными. Нагрузка, эквивалентная этому моменту, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3; t) = \\ = -\frac{1}{2} M(t) \mathbf{n} \times \text{grad } \delta(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (4.3.129)$$

Замечая, что

$$(L[\bar{F}_i])_{,i} = 0$$

и используя формулу (4.3.116), получаем

$$L[\bar{u}_i] = \frac{1}{4\pi G} L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_2}}.$$

Следовательно, поле обобщенных перемещений имеет вид

$$\bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{1}{8\pi G} \mathbf{n} \times \text{grad} \left[ \frac{1}{R} \bar{M} \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \right], \quad (4.3.130)$$

где

$$\bar{M}(t) = \theta(t) M(t). \quad (4.3.131)$$

В случае *импульсного в начальный момент* центра вращений вида

$$\bar{M}(t) = M_0 \delta(t) \quad (4.3.132)$$

получим

$$\bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{M_0}{8\pi G} \mathbf{n} \times \text{grad} \left[ \frac{1}{R} \delta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \right]. \quad (4.3.133)$$

Если в начальный момент времени к упругому пространству мгновенно *приложить* вращательный сосредоточенный момент и затем *поддерживать* его *постоянным*, то можно написать

$$\bar{M}(t) = M_0 \theta(t). \quad (4.3.132')$$

Для обобщенных перемещений в этом случае получим

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{M_0}{8\pi G} \mathbf{n} \times \text{grad} \left[ \frac{1}{R} \theta \left( t - \frac{R}{c_2} \right) \right]. \quad (4.3.133')$$

Рассмотрим теперь случай *пространственного центра расширения*, эквивалентная нагрузка которого имеет вид

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{1}{3} D_s(t) \text{grad} \delta(x_1, x_2, x_3). \quad (4.3.134)$$

Таким образом вводится следующая обобщенная функция:

$$\bar{D}_s(t) = \theta(t) D_s(t). \quad (4.3.135)$$

Если начальные условия однородные, то воспользуемся формулами (4.3.118). Заметим, что

$$L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_2}} = -\frac{1}{3} L[\bar{D}(t)] \left( \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_2}} \right)_{,i},$$

$$L[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right]_{,ij} =$$

$$= -\frac{1}{3p^2} L[\bar{D}(t)] \Delta \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right]_{,i},$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Можно написать

$$\Delta(fg) = ((fg)_{,i})_{,i} = (f_{,i}g + fg_{,i})_{,i} =$$

$$= f\Delta g + g\Delta f + 2f_{,i}g_{,i}, \quad (4.3.136)$$

так что

$$\Delta \left( \frac{1}{R} e^{-p \frac{R}{c_k}} \right) = e^{-p \frac{R}{c_k}} \Delta \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \Delta \left( e^{-p \frac{R}{c_k}} \right) +$$

$$+ 2 \left( \frac{1}{R} \right)_{,i} \left( e^{-p \frac{R}{c_k}} \right)_{,i} \quad (k=1, 2).$$

Здесь учтена формула (1.6.20) и

$$\Delta \left( e^{-p \frac{R}{c_k}} \right) = \left( \frac{p}{c_k} \right)^2 e^{-p \frac{R}{c_k}} R_{,i} R_{,i} -$$

$$- \frac{p}{c_k} e^{-p \frac{R}{c_k}} \Delta R \quad (k=1, 2)$$

где

$$R_{,i} = \frac{x_i}{R}, \quad R_{,i} R_{,i} = 1 \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.3.137)$$

и

$$\Delta R = (R_{,i})_{,i} = -\frac{x_i x_i}{R^3} + \frac{3}{R} = \frac{2}{R}. \quad (4.3.138)$$

Но

$$\psi(x_1, x_2, x_3) \delta(x_1, x_2, x_3) = \psi(0, 0, 0) \delta(x_1, x_2, x_3),$$

где  $\psi$  — функция класса  $C^\infty$ . Используя формулу (1.6.20), получаем

$$\begin{aligned} & \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \Delta \left( \frac{1}{R} \right) = 0, \\ & \left( \frac{1}{R} \right)_{,i} \left( e^{-p \frac{R}{c_k}} \right)_{,i} = -\frac{R_{,i}}{R^2} \left( -\frac{p}{c_k} \right) e^{-p \frac{R}{c_k}} R_{,i} = \\ & = \frac{1}{R^2} \frac{p}{c_k} e^{-p \frac{R}{c_k}} \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

Из предыдущих формул можно получить соотношение

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ \frac{1}{R} \left( e^{-p \frac{R}{c_1}} - e^{-p \frac{R}{c_2}} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{p}{c_1} \right)^2 e^{-p \frac{R}{c_1}} - \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 e^{-p \frac{R}{c_2}} \right]. \end{aligned}$$

Окончательно для поля обобщенных перемещений имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\frac{1}{12\pi G} \frac{c_1^2}{c_2^2} \text{grad} \left[ \frac{1}{R} \bar{D}_s \left( t - \frac{R}{c_1} \right) \right] = \\ &= -\frac{1-2\nu}{24\pi(1-\nu)G} \text{grad} \left[ \frac{1}{R} \bar{D}_s \left( t - \frac{R}{c_1} \right) \right]. \quad (4.3.139) \end{aligned}$$

Этот результат можно получить и другим путем. Если воспользоваться представлением перемещений через потенциальные функции, приведенным в разд. 4.3.2.1, и заметить, что эквивалентные нагрузки (4.3.134) являются консервативными, то получается выражение

$$\chi = -\frac{1}{3} \bar{D}_s(t) \delta(x_1, x_2, x_3). \quad (4.3.140)$$

В этом случае

$$\omega = -\frac{1-2\nu}{12\pi(1-\nu)} \frac{1}{R} \bar{D}_s \left( t - \frac{R}{c_1} \right), \quad (4.3.141)$$

что приводит к обобщенным перемещениям (4.3.139).

В случае *импульсного в начальный момент* пространственного центра расширения, выраженного в виде

$$\bar{D}_s(t) = D_0 \delta(t), \quad (4.3.142)$$

получаем

$$\bar{u} = -\frac{(1-2\nu)D_0}{24\pi(1-\nu)G} \text{grad} \left[ \frac{1}{R} \delta \left( t - \frac{R}{c_1} \right) \right]. \quad (4.3.143)$$

Когда пространственный центр расширения *прикладывается мгновенно* и затем *поддерживается постоянным*, т. е. имеет вид

$$\bar{D}_s(t) = D_0 \theta(t), \quad (4.3.142')$$

можно написать

$$\bar{u} = -\frac{(1-2\nu)D_0}{24\pi(1-\nu)G} \text{grad} \left[ \frac{1}{R} \theta \left( t - \frac{R}{c_1} \right) \right]. \quad (4.3.143')$$

Аналогично можно рассматривать и другие случаи нагружения упругого пространства сосредоточенными или распределенными нагрузками.

#### 4.3.2.3. Постановка плоской задачи теории упругости в перемещениях

Плоская задача теории упругости была определена в разд. 4.3.1.3. С учетом предположений, сделанных в разд. 4.3.2.1 для динамических задач, в случае плоского деформированного состояния уравнения Ламе принимают вид

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.3.144)$$

$$\mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где  $u, v$  — компоненты вектора перемещений (компонен-

та  $\omega=0$ ) в ортонормированной системе координат  $Oxyz$ , а  $X, Y$  — составляющие объемных сил.

Для постановки плоской задачи теории упругости в перемещениях граничные условия запишем в следующем виде:

$$u = \overset{n}{u}, \quad v = \overset{n}{v}, \quad (4.3.145)$$

где  $\overset{n}{u}$  и  $\overset{n}{v}$  — перемещения точки границы с внешней нормалью  $\mathbf{n}$  (см. фиг. 4.12), а начальные условия — как

$$u(x, y; t_0) = u_0(x, y), \quad v(x, y; t_0) = v_0(x, y), \quad (4.3.146)$$

$$\dot{u}(x, y; t_0) = \dot{u}_0(x, y), \quad \dot{v}(x, y; t_0) = \dot{v}_0(x, y) \quad (4.3.146')$$

при  $t=t_0$ .

В напряжениях задача ставится аналогичным образом.

#### 4.3.2.4. Упругая плоскость. Фундаментальные решения

Рассмотрим упругую плоскость, находящуюся под действием динамических нагрузок  $X=X(x, y; t)$ ,  $Y=Y(x, y; t)$  (см. фиг. 4.13). Воспользуемся начальными условиями (4.3.146), (4.3.146') при  $t_0=0$ .

Для решения задачи введем обобщенные функции

$$\bar{X}(x, y; t) = \theta(t) X(x, y; t), \quad \bar{Y}(x, y; t) = \theta(t) Y(x, y; t), \quad (4.3.147)$$

полученные нулевым продолжением влево. Аналогично вводятся и обобщенные перемещения

$$\bar{u}(x, y; t) = \theta(t) u(x, y; t), \quad \bar{v}(x, y; t) = \theta(t) v(x, y; t). \quad (4.3.148)$$

Уравнения Ламе в обобщенных функциях имеют вид (см. разд. 4.3.2.2)

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \bar{X} + \rho [\dot{u}_0 \delta(t) + u_0 \dot{\delta}(t)] = 0, \quad (4.3.149)$$

$$\mu \Delta \bar{v} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \bar{Y} + \rho [\dot{v}_0 \delta(t) + v_0 \dot{\delta}(t)] = 0$$



и содержат начальные условия.

Применяя к этим уравнениям преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координатам, получаем

$$[\mu(\alpha^2 + \beta^2) + \rho p^2] F[L[\bar{u}]] + (\lambda + \mu) \alpha (\alpha F[L[\bar{u}]] + \beta F[L[\bar{v}]]) = F[L[\bar{X}]] + \rho(pF[u_0] + F[\dot{u}_0]),$$

$$[\mu(\alpha^2 + \beta^2) + \rho p^2] F[L[\bar{v}]] + (\lambda + \mu) \beta (\alpha F[L[\bar{u}]] + \beta F[L[\bar{v}]]) = F[L[\bar{Y}]] + \rho(pF[v_0] + F[\dot{v}_0]),$$

где  $\rho$  — комплексная величина, соответствующая преобразованию Лапласа, а  $\alpha$  и  $\beta$  — комплексные величины, соответствующие преобразованию Фурье.

Умножим первое уравнение на  $\alpha$ , второе — на  $\beta$  и просуммируем их. В результате получим

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta; \rho) &= \alpha F[L[\bar{u}]] + \beta F[L[\bar{v}]] = \\ &= \frac{1}{(\lambda + 2\mu)(\alpha^2 + \beta^2) + \rho p^2} \{ \alpha F[L[\bar{X}]] + \beta F[L[\bar{Y}]] + \\ &+ \rho [p(\alpha F[u_0] + \beta F[v_0]) + \alpha F[\dot{u}_0] + \beta F[\dot{v}_0]] \}. \end{aligned} \quad (4.3.150)$$

Таким образом, для изображений имеем выражения

$$\begin{aligned} F[L[\bar{u}]] &= \frac{1}{\mu(\alpha^2 + \beta^2) + \rho p^2} [F[L[\bar{X}]] + \\ &+ \rho(pF[u_0] + F[\dot{u}_0]) - (\lambda + \mu) \alpha f(\alpha, \beta; \rho)], \end{aligned} \quad (4.3.151)$$

$$\begin{aligned} F[L[\bar{v}]] &= \frac{1}{\mu(\alpha^2 + \beta^2) + \rho p^2} [F[L[\bar{Y}]] + \\ &+ \rho(pF[v_0] + F[\dot{v}_0]) - (\lambda + \mu) \beta f(\alpha, \beta; \rho)]. \end{aligned}$$

Учитывая результаты из разд. 1.6.2 и соотношение

$$\frac{\lambda + \mu}{[(\lambda + 2\mu)(\alpha^2 + \beta^2) + \rho p^2] [\mu(\alpha^2 + \beta^2) + \rho p^2]} =$$

$$= \frac{1}{\rho p^2} \left( \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu}} - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\rho p^2}{\mu}} \right),$$

МОЖНО НАПИСАТЬ

$$\begin{aligned} L[\bar{u}] = & \frac{1}{2\pi G} \left\{ [L[\bar{X}] + \rho(pu_0 + \dot{u}_0)] * K_0\left(p \frac{r}{c_2}\right) + \right. \\ & + c_2^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} L[\bar{X}] + \frac{\partial}{\partial y} L[\bar{Y}] + \rho(p\varepsilon_p^0 + \dot{\varepsilon}_p^0) \right] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial x} \times \\ & \left. \times \left[ K_0\left(p \frac{r}{c_1}\right) - K_0\left(p \frac{r}{c_2}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.152)$$

$$\begin{aligned} L[\bar{v}] = & \frac{1}{2\pi G} \left\{ [L[\bar{Y}] + \rho(pv_0 + \dot{v}_0)] * K_0\left(p \frac{r}{c_2}\right) + \right. \\ & + c_2^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} L[\bar{X}] + \frac{\partial}{\partial y} L[\bar{Y}] + \rho(p\varepsilon_p^0 + \dot{\varepsilon}_p^0) \right] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial y} \times \\ & \left. \times \left[ K_0\left(p \frac{r}{c_1}\right) - K_0\left(p \frac{r}{c_2}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_p^0(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} v_0(x, y), \quad (4.3.153)$$

$$\dot{\varepsilon}_p^0(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \dot{u}_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \dot{v}_0(x, y). \quad (4.3.153')$$

Здесь  $\varepsilon_p^0$  — деформация в плоскости, а  $\dot{\varepsilon}_p^0$  — скорость этой деформации.

Используя результаты из разд. 1.6.3.1 и формулы

$$f_0(t; kr) = L^{-1}[K_0(pkr)] = \frac{\theta(t - kr)}{\sqrt{t^2 - k^2 r^2}}, \quad (4.3.154)$$

$$f_1(t; kr) = L^{-1}[pK_0(pkr)] = -\frac{t\theta(t - kr)}{\sqrt{(t^2 - k^2 r^2)^3}}, \quad (4.3.154')$$

$$f_{-1}(t; kr) = L^{-1}\left[\frac{1}{p} K_0(pkr)\right] = \theta(t - kr) \Pi(t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}), \quad (4.3.155)$$

$$\begin{aligned}
 f_{-2}(t; kr) &= L^{-1} \left[ \frac{1}{p^2} K_0(pkr) \right] = \\
 &= \theta(t - kr) \left[ t \ln(t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}) - \sqrt{t^2 - k^2 r^2} \right], \quad (4.3.155')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{-3}(t; kr) &= L^{-1} \left[ \frac{1}{p^3} K_0(pkr) \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \theta(t - kr) \left[ (2t^2 + k^2 r^2) \ln(t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}) - \right. \\
 &\quad \left. - 3t \sqrt{t^2 - k^2 r^2} \right], \quad (4.3.155'')
 \end{aligned}$$

МОЖНО ЗАПИСАТЬ ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ВИДЕ

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y; t) &= \frac{1}{2\pi G} \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{X}] * K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \rho \left[ u_0 * f_1 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) + \dot{u}_0 * f_0 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\} + \\
 &+ c_2^2 \left\{ L^{-1} \left[ \bar{L}[\bar{X}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + L^{-1} \left[ L[\bar{Y}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right] \right\} + \\
 &\quad + \rho \left\{ \varepsilon_p^0 * \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\varepsilon}_p^0 * \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\}, \quad (4.3.156) \\
 \bar{v}(x, y; t) &= \frac{1}{2\pi G} \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{Y}] * K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \rho \left[ v_0 * f_1 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) + \dot{v}_0 * f_0 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\} + \\
 &+ c_2^2 \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{X}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + L^{-1} \left[ L[\bar{Y}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \rho \left\{ \varepsilon_p^0 * \frac{\partial}{\partial y} \left[ f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$+\dot{\varepsilon}_p^0 * \frac{\partial}{\partial y} \left[ f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right].$$

Например, при однородных начальных условиях получим

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y; t) = & \frac{1}{2\pi G} \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{X}] * K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\} + \\ & + c_2^2 \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{X}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right] \right\} + \\ & + L^{-1} \left[ L[\bar{Y}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.157)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, y; t) = & \frac{1}{2\pi G} \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{Y}] * K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\} + \\ & + c_2^2 \left\{ L^{-1} \left[ L[\bar{X}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right] \right\} + \\ & + L^{-1} \left[ L[\bar{Y}] * \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ K_0 \left( p \frac{r}{c_1} \right) - K_0 \left( p \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если объемные силы равны нулю, а начальные условия являются ненулевыми, то

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y; t) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c_2^2} \left[ u_0 * f_1 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) + \dot{u}_0 * f_0 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\} + \\ & + \varepsilon_p^0 * \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] + \\ & + \dot{\varepsilon}_p^0 * \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \Big\}, \quad (4.3.158) \\ \bar{v}(x, y; t) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c_2^2} \left[ v_0 * f_1 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) + \right. \right. \\ & + \dot{v}_0 * f_0 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \Big\} + \varepsilon_p^0 * \frac{\partial}{\partial y} \left[ f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-1} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] + \\ & + \dot{\varepsilon}_p^0 * \frac{\partial}{\partial y} \left[ f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \Big\}. \end{aligned}$$

Отметим соотношения

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} f_0(t; kr) = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} f_0(t; kr) = \frac{k^2 \theta (t - kr)}{\sqrt{(t^2 - k^2 r^2)^3}}, \quad (4.3.159)$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} f_1(t; kr) = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} f_1(t; kr) = -\frac{3k^2 t \theta (t - kr)}{\sqrt{(t^2 - k^2 r^2)^5}}, \quad (4.3.159')$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} f_{-1}(t; kr) &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} f_{-1}(t; kr) = \\ &= \frac{k^2 \theta (t - kr)}{t^2 - k^2 r^2 + t \sqrt{t^2 - k^2 r^2}}, \end{aligned} \quad (4.3.160)$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} f_{-2}(t; kr) = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} f_{-2}(t; kr) = \frac{k^2 \theta (t - kr)}{t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}}, \quad (4.3.160')$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} f_{-3}(t; kr) &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} f_{-3}(t; kr) = \\ &= \frac{k^2}{4} \theta (t - kr) \left[ 2 \ln (t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}) + \frac{2t}{t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.3.160'')$$

Допустим, что в начале координат на упругой плоскости вдоль оси  $Ox$  действует сосредоточенная сила  $\mathbf{P}(t)$ , эквивалентная нагрузка которой имеет вид

$$\bar{X}(x, y; t) = \bar{P}(t) \delta(x, y), \quad \bar{Y}(x, y; t) = 0, \quad \bar{P}(t) = \theta(t) P(t). \quad (4.3.161)$$

В этом случае перемещения определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y; t) &= \frac{1}{2\pi G} \bar{P}(t) \Big|_{(t)}^* \left\{ f_0\left(t; \frac{r}{c_2}\right) + \right. \\ &\left. + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_1}\right) - f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.162)$$

$$v(x, y; t) = \frac{1}{2\pi\rho} \bar{P}(t)_{(t)}^* \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_1}\right) - f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) \right].$$

В частном случае (4.3.123), когда в начальный момент времени прикладывается импульс, обобщенные перемещения принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y; t) = & \frac{P_0}{2\pi G} \left\{ f_0\left(t; \frac{r}{c_2}\right) + \right. \\ & \left. + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_1}\right) - f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) \right] \right\}, \quad (4.3.163) \end{aligned}$$

$$\bar{v}(x, y; t) = \frac{P_0}{2\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_1}\right) - f_{-2}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) \right].$$

Если в начальный момент времени к плоскости мгновенно прикладывается сосредоточенная сила (4.3.127), которая затем поддерживается постоянной, то для обобщенных перемещений получаются выражения

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y; t) = & \frac{P_0}{2\pi G} \left\{ f_{-1}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) + \right. \\ & \left. + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f_{-3}\left(t; \frac{r}{c_1}\right) - f_{-3}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) \right] \right\}, \quad (4.3.164) \end{aligned}$$

$$\bar{v}(x, y; t) = \frac{P_0}{2\pi\rho} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ f_{-3}\left(t; \frac{r}{c_1}\right) - f_{-3}\left(t; \frac{r}{c_2}\right) \right].$$

Важно заметить, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{-2}(t; kr) = \\ & = \theta(t - kr) \frac{k^2 (t^2 - k^2 y^2 + t \sqrt{t^2 - k^2 r^2})}{2t (t^2 - k^2 r^2) + (2t^2 - k^2 r^2) \sqrt{t^2 - k^2 r^2}}, \end{aligned} \quad (4.3.165)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{-2}(t; kr) = \\ & = \theta(t - kr) \frac{k^2 (t^2 - k^2 x^2 + t \sqrt{t^2 - k^2 r^2})}{2t (t^2 - k^2 r^2) + (2t^2 - k^2 r^2) \sqrt{t^2 - k^2 r^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_{-2}(t; kr) = \\ & = \frac{k^{4\theta} (t - kr) xy}{2t(t^2 - k^2 r^2) + (2t^2 - k^2 r^2) \sqrt{t^2 - k^2 r^2}}, \quad (4.3.165') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{-3}(t; kr) = & \frac{1}{2} k^{2\theta} (t - kr) \left[ \ln(t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} k^2 \frac{x^2 - y^2}{2t^2 - k^2 r^2 + 2t \sqrt{t^2 - k^2 r^2}} + 1 \right], \quad (4.3.166) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{-3}(t; kr) = & \frac{1}{2} k^{2\theta} (t - kr) \left[ \ln(t + \sqrt{t^2 - k^2 r^2}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} k^2 \frac{x^2 - y^2}{2t^2 - k^2 r^2 + 2t \sqrt{t^2 - k^2 r^2}} + 1 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_{-3}(t; kr) = & -\frac{1}{2} k^{4\theta} (t - kr) \frac{xy}{2t^2 - k^2 r^2 + 2t \sqrt{t^2 - k^2 r^2}}. \\ & (4.3.166') \end{aligned}$$

Пусть на упругую плоскость в начале координат действует *вращательный сосредоточенный момент*  $M(t)$  (см. фиг. 4.15), эквивалентная нагрузка которого имеет вид

$$X(x, y; t) = \frac{1}{2} M(t) \frac{\partial}{\partial y} \delta(x, y), \quad (4.3.167)$$

$$Y(x, y; t) = -\frac{1}{2} M(t) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, y).$$

Предполагая начальные условия однородными и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} L[\bar{X}] + \frac{\partial}{\partial y} L[\bar{Y}] = 0,$$

можно записать обобщенные перемещения в виде

$$\bar{u}(x, y; t) = \frac{1}{4\pi G} \bar{M}(t) \underset{(t)}{*} \frac{\partial}{\partial y} f_0\left(t; \frac{r}{c_2}\right), \quad (4.3.168)$$

$$\bar{v}(x, y; t) = -\frac{1}{4\pi G} \bar{M}(t)_{(t)}^* \frac{\partial}{\partial x} f_0\left(t; \frac{r}{c_2}\right),$$

где использована обобщенная функция (4.3.131).

Если в начальный момент прикладывается импульс, определяемый соотношением (4.3.132), то будем иметь

$$\bar{u}(x, y; t) = \frac{M_0}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial y} f_0\left(t; \frac{r}{c_2}\right), \quad (4.3.169)$$

$$\bar{v}(x, y; t) = -\frac{M_0}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial x} f_0\left(t; \frac{r}{c_2}\right).$$

В случае когда вращательный сосредоточенный момент мгновенно прикладывается в начале координат и затем поддерживается постоянным, т. е. имеет вид (4.3.132'), получаем поле обобщенных перемещений

$$\bar{u}(x, y; t) = \frac{M_0}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial y} f_{-1}\left(t; \frac{r}{c_2}\right), \quad (4.3.170)$$

$$\bar{v}(x, y; t) = -\frac{M_0}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial x} f_{-1}\left(t; \frac{r}{c_2}\right).$$

Введем матрицу фундаментальных решений

$$\{U\} \equiv \begin{Bmatrix} u_{11}(x, y; t) & u_{12}(x, y; t) \\ u_{21}(x, y; t) & u_{22}(x, y; t) \end{Bmatrix} \quad (4.3.171)$$

и матрицы

$$\{\bar{u}\} \equiv \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}, \quad \{Q\} \equiv \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix}. \quad (4.3.172)$$

Тогда поле обобщенных перемещений будет определяться формулой

$$\{\bar{u}\} = \{U\} * \{Q\}. \quad (4.3.173)$$

С помощью формул (4.3.163), в которых  $P_0 = 1$ , и формул, соответствующих случаю, когда сосредоточенная сила действует вдоль оси  $Oy$ , получим элементы матри-



цы фундаментальных решений в виде

$$u_{11} = \frac{1}{2\pi G} \left\{ f_0 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\}, \quad (4.3.174)$$

$$u_{22} = \frac{1}{2\pi G} \left\{ f_0 \left( t; \frac{r}{c_2} \right) + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\},$$

$$u_{12} = u_{21} = \frac{1}{2\pi \rho} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_1} \right) - f_{-2} \left( t; \frac{r}{c_2} \right) \right]. \quad (4.3.174')$$

Результаты, соответствующие напряженному состоянию, получаются аналогичным образом.

### 4.3.3. Задачи линейной вязкоупругости

#### 4.3.3.1. Общие результаты для одномерного случая

Если в твердом деформируемом теле наряду с упругими свойствами проявляются и вязкие свойства, то говорят, что рассматриваемое тело является *вязкоупругим*; соответствующие определяющие уравнения в этом случае будут включать зависимость и от времени. Для одномерного *линейного вязкоупругого* тела между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$ , зависящими от времени, можно записать дифференциальное соотношение вида

$$P \left( \frac{d}{dt} \right) \sigma(t) = Q \left( \frac{d}{dt} \right) \varepsilon(t), \quad (4.3.175)$$

где  $P$  и  $Q$  — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, характеризующие рассматриваемое вязкоупругое тело.

Реологические свойства вязкоупругого тела могут быть описаны с помощью функций *ползучести* и *релаксации*. Эти функции определяются соотношениями

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \varphi(t, \sigma_0), \quad \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \psi(t, \varepsilon_0), \quad (4.3.176)$$

где  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$  — напряжение и деформация, соответствующие начальному моменту времени, когда к вязкоупруго-

му телу, находящемуся в покое, прикладывается постоянная нагрузка. В более общем случае для одномерного вязкоупругого тела можно написать *интегральные соотношения Больцмана*

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \psi(t-\tau) d\tau, \quad (4.3.177)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \varphi(t-\tau) d\tau.$$

Если  $\theta$  — функция Хевисайда, то  $\theta(t-\tau) = 0$  при  $\tau > t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \theta\psi * \frac{d\varepsilon}{dt} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \theta(t-\tau) \psi(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \psi(t-\tau) d\tau = \sigma(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\sigma = \theta\psi * \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.3.178)$$

и

$$\varepsilon = \theta\varphi * \frac{d\sigma}{dt}. \quad (4.3.178')$$

Чтобы записать уравнения (4.3.178) и (4.3.178') в пространстве обобщенных функций, предположим, что  $\sigma$  и  $\varepsilon$  являются обобщенными функциями с носителями в  $R_+ = [0, \infty)$ . Следовательно, вязкоупругое тело находится в *естественном состоянии* ( $\sigma = \varepsilon = 0$ ) при  $t \leq 0$ . В этом случае  $\varphi$  и  $\psi$  также являются обобщенными функциями, а полученные формулы принимают вид

$$\sigma = \psi * \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon * \frac{d\psi}{dt}, \quad (4.3.179)$$

$$\varepsilon = \varphi * \frac{d\sigma}{dt} = \sigma * \frac{d\varphi}{dt}, \quad (4.3.179')$$

где  $\sigma, \varepsilon, \varphi, \psi \in K'_+$ .

Таким образом, при указанных выше условиях соотношения (4.3.179) и (4.3.179') являются обобщением соотношений Больцмана в пространстве обобщенных функций. Эти соотношения образуют систему из двух уравнений в алгебре со сверткой  $K'_+$  относительно неизвестных  $\sigma$  и  $\varepsilon$ . В частности, при

$$\sigma(t) = \sigma_0 \theta(t), \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \theta(t) \quad (4.3.180)$$

получаем

$$\sigma = \psi * \varepsilon_0 \delta = \varepsilon_0 \psi, \quad \varepsilon = \varphi * \sigma_0 \delta = \sigma_0 \varphi, \quad (4.3.181)$$

где  $\delta$  — обобщенная функция Дирака. Таким образом, мы приходим к формулам (4.3.176).

**Теорема 4.3.1.** *Если при  $t \leq 0$  одномерное линейное вязкоупругое тело находится в естественном состоянии ( $\sigma = \varepsilon = 0$ ), то обобщенные функции ползучести и релаксации удовлетворяют соотношению*

$$\varphi * \psi = t_+ = t \theta(t). \quad (4.3.182)$$

Действительно, исключая  $\varepsilon$  из формул (4.3.179) и (4.3.179'), получаем

$$\sigma * [\delta - (\varphi * \psi)'] = 0.$$

Заметим, что обобщенные функции  $\varphi$  и  $\psi$  имеют носители в  $R_+$  и свертка  $\varphi * \psi$  существует. Так как обобщенные функции  $\sigma$  и  $\varepsilon$  тоже имеют носители в  $R_+$ , полученное соотношение является уравнением в свертках в  $K'_+$ . Учитывая, что  $\sigma \neq 0$ , а  $K'_+$  не имеет делителей нуля, получаем

$$(\varphi * \psi)' = \delta. \quad (4.3.183)$$

Если теперь ввести фундаментальное решение, соответствующее оператору  $d^2/dt^2$  в  $K'_+$ , то получим соотношение (4.3.182).

Соотношение (4.3.183) может быть записано в виде

$$\varphi * \psi'' = \delta, \quad \psi * \varphi'' = \delta, \quad (4.3.183')$$

$$\varphi' * \psi' = \delta. \quad (4.3.183'')$$

Таким образом, замечаем, что обобщенные функции  $\varphi$  и  $\psi$ , а также их производные первого порядка обратимы в алгебре со сверткой  $K'_+$ ; другими словами,

$$\varphi^{-1} = \psi'', \quad \psi^{-1} = \varphi'', \quad (4.3.184)$$

$$(\varphi')^{-1} = \psi', \quad (\psi')^{-1} = \varphi'. \quad (4.3.184')$$

С помощью формул (4.3.179) и (4.3.179') можно получить общие выражения для обобщенных функций ползучести и релаксации, соответствующих вязкоупругому телу, описанному определяющим уравнением (4.3.175).

**Теорема 4.3.2.** *Если одномерное линейное вязкоупругое тело находится при  $t \leq 0$  в естественном состоянии ( $\sigma = \varepsilon = 0$ ) и определяющее уравнение имеет вид (4.3.175), то обобщенные функции ползучести и релаксации определяются соотношениями*

$$\varphi(t) = \theta(t) * P\left(\frac{d}{dt}\right) E_Q(t) = E_Q(t) * P\left(\frac{d}{dt}\right) \theta(t), \quad (4.3.185)$$

$$\psi(t) = \theta(t) * Q\left(\frac{d}{dt}\right) E_P(t) = E_P(t) * Q\left(\frac{d}{dt}\right) \theta(t),$$

где  $E_P(t)$ ,  $E_Q(t)$  — фундаментальные решения для операторов  $P(d/dt)$ ,  $Q(d/dt)$  соответственно в алгебре со сверткой  $K'_+$ .

Действительно, исходя из соотношений (4.3.175), (4.3.179) и (4.3.179'), получаем

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \psi'(t) * \varepsilon(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right) \varepsilon(t).$$

Следовательно,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \psi'(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right) \delta(t),$$

так как алгебра  $K'_+$  не имеет делителей нуля.

Из того что  $E_P$  является фундаментальным решением оператора  $P(d/dt)$  в  $K'_+$ , следует

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)E_P(t) = \delta(t),$$

а  $E_P^{(l)}(0) = 0$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, k-2$ ),  $E_P^{(k-1)}(0) = 1/a_0$ ,

где  $k$  — порядок оператора  $P$ , а  $a_0$  — коэффициент при старшей производной. Таким образом, имеем

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\psi'(t) * E_P(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)E_P(t) = \psi'(t).$$

Фундаментальным решением для оператора  $d/dt$  в  $K'_+$  является обобщенная функция Хевисайда; отсюда следует справедливость второй из формул (4.3.185); первая формула (4.3.185) получается аналогичным образом.

#### 4.3.3.2. Применения

Если рассматривать *вязкоупругую модель Кельвина*, то определяющее уравнение получается в виде

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (4.3.186)$$

где  $E$  — модуль упругости, а  $\eta$  — коэффициент вязкости. Следовательно,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = 1, \quad Q\left(\frac{d}{dt}\right) = \eta \frac{d}{dt} + E.$$

Фундаментальные решения в  $K'_+$  имеют вид

$$E_P(t) = \delta(t), \quad E_Q(t) = \frac{1}{\eta} \theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t}, \quad (4.3.187)$$

и с помощью соотношений (4.3.185) можно получить

$$\varphi(t) = \frac{1}{\eta} \theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} * \theta(t) = \frac{1}{E} \theta(t) \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}\right), \quad (4.3.188)$$

$$\psi(t) = \theta(t) * \left(\eta \frac{d}{dt} + E\right) \delta(t) = \eta \delta(t) + E\theta(t).$$

Замечая, что

$$\theta(t) * \theta(t) = t_+, \quad \theta(t) * \theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} = \frac{\eta}{E} \theta(t) \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}\right),$$

можно проверить справедливость соотношения (4.3.182).

Выражения для нормального напряжения и линейной деформации принимают вид

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [\eta \delta(t) + E\theta(t)], \quad (4.3.188')$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \theta(t) \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}\right).$$

Первая из полученных формул показывает, что в момент появления линейной деформации  $\varepsilon_0$  напряжение  $\sigma(t) = \varepsilon_0 \psi(t)$  стремится к бесконечности. Действительно, благодаря вязкоупругим свойствам тело не может мгновенно получить конечную величину деформации при мгновенном изменении напряжения на конечную величину.

Для вязкоупругой модели Максвелла определяющее уравнение записывается в виде

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma(t),$$

где дифференциальные операторы имеют следующие выражения:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{1}{E} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta}, \quad Q\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}. \quad (4.3.189)$$

Фундаментальными решениями в  $K'_+$  будут

$$E_P(t) = E\theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t}, \quad E_Q(t) = \theta(t). \quad (4.3.190)$$

Отсюда следует

$$\varphi(t) = \theta(t) * \left(\frac{1}{E} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta}\right) \theta(t) = \frac{1}{E} \theta(t) + \frac{1}{\eta} t_+, \quad (4.3.191)$$

$$\psi(t) = E\theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} * \frac{d\theta(t)}{dt} = E\theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t}.$$

Замечая, что

$$t_+ * \theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} = \frac{\eta}{E} \theta(t) \left[ t - \frac{\eta}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right) \right],$$

и учитывая приведенные выше другие соотношения, можно легко проверить справедливость соотношения (4.3.182).

В этом случае выражения для нормального напряжения и линейной деформации принимают вид.

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 \theta(t) e^{-\frac{E}{\eta} t}, \quad (4.3.191')$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} \theta(t) \left( 1 + \frac{E}{\eta} t \right).$$

## Применения теории обобщенных функций в физике

### 5.1. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В АКУСТИКЕ

#### 5.1.1. Эффект Доплера для одномерной акустической волны

##### 5.1.1.1. Классический случай

*Эффект Доплера* заключается в изменении периода колебаний (или частоты), регистрируемого приемником, когда источник (или приемник) движется относительно среды.

Если акустическая волна распространяется в одном направлении (например, вдоль оси  $Ox$ ) в изотропной, однородной, линейной упругой среде, то дифференциальное уравнение ее распространения имеет вид

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} = 0, \quad (5.1.1)$$

где  $c$  — скорость распространения волны в рассматриваемой среде, а  $u(x; t)$  — смещение частиц среды. В случае продольных колебаний

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5.1.2)$$

где  $\rho$  — плотность, а  $E$  — модуль упругости среды. Для поперечных колебаний уравнение (5.1.1) описывает поведение струны<sup>1</sup>, причем скорость распространения поперечных волн

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad (5.1.2')$$

<sup>1</sup> См. сноску на стр. 342. — *Прим. ред.*



где  $T$  — постоянное натяжение, направленное по касательной к деформированной струне, а  $m$  — масса единицы длины струны.

Для двумерных или трехмерных случаев имеет место уравнение

$$c^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (5.1.3)$$

где  $\Delta$  — двумерный или трехмерный оператор Лапласа. Исследование таких уравнений гиперболического типа, включая определение соответствующих фундаментальным решений, проводилось в разд. 2.3.2.2.

Если  $c$  — скорость распространения упругой волны,  $v$  — скорость источника звука, а  $u$  — скорость приемника, то между этими величинами, частотой источника  $f$  и частотой  $f'$ , регистрируемой приемником, существует соотношение

$$f' = \frac{c + u}{c - v} f. \quad (5.1.4)$$

Предполагается, что источник излучает колебания с периодом  $T$ , т. е. с частотой  $f = 1/T = \omega/2\pi$ , а приемник регистрирует их с периодом  $T'$ , т. е. с частотой  $f' = 1/T' = \omega'/2\pi$ , где  $\omega$  и  $\omega'$  — соответствующие круговые частоты. Соотношение (5.1.4) представляет собой математическое выражение эффекта Доплера. Отметим, что в этом соотношении скорость  $v$  считается положительной, если источник приближается к приемнику, и отрицательной, если он удаляется от него. Это же замечание относится и к скорости  $u$ .

### 5.1.1.2. Анизотропный случай

Обозначив через  $c_1$  и  $c_2$  соответственно скорости распространения акустической одномерной волны вправо и влево и предположив, что при распространении волн энергия не теряется (вся кинетическая энергия превращается в потенциальную и наоборот), получим дифференциальное уравнение распространения акустической волны в упругой среде в следующем виде:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x; t) = 0. \quad (5.1.5)$$

Тот факт, что распространение акустической волны происходит неодинаково в разных направлениях, объясняется некоторой анизотропностью среды<sup>1)</sup>. Поэтому будем считать, что рассматриваемая волна распространяется в анизотропной среде.

Если учитывать влияние внешних воздействий, то уравнение (5.1.5) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x; t) = X(x; t), \quad (5.1.5')$$

где  $X(x; t)$  — величины, пропорциональные возмущающим силам. Такой случай может иметь место, например, когда акустическая волна распространяется в атмосфере при ветре.

## 5.1.2. Эффект Доплера при ветре

### 5.1.2.1. Общие положения

Для случая распространения акустической волны в атмосфере при ветре можно использовать уравнение (5.1.5') распространения акустической одномерной волны в анизотропной среде.

Предположим, что среда, в которой распространяется акустическая волна, является упругой и анизотропной. Обозначим через  $c$  скорость распространения одномерной акустической волны, а через  $w$  — скорость ветра.

Если волна распространяется по ветру, то ее скорость

$$c_1 = c + w, \quad (5.1.6)$$

а если она распространяется против ветра, то ее скорость

$$c_2 = c - w. \quad (5.1.6')$$

Следовательно, дифференциальное уравнение распространения акустических одномерных волн в атмосфере с

<sup>1)</sup> Скорости  $c_1$  и  $c_2$  в уравнении (5.1.5) не могут различаться только из-за анизотропности среды. Различие скоростей может быть объяснено гипотетической «разномодульностью» среды и вряд ли имеет место в реальных средах. — *Прим. ред.*

учетом скорости  $\omega$  ветра имеет вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (c + \omega) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} - (c - \omega) \frac{\partial}{\partial x} \right] u(x; t) = X(x; t). \quad (5.1.7)$$

С помощью этого уравнения можно исследовать эффект Доплера для рассматриваемого случая распространения акустических волн. Для этого предположим, что точечный источник, который излучает колебания с частотой  $f = \omega/2\pi$ , равномерно перемещается с постоянной скоростью  $v$ . Перемещение акустического точечного источника начинается при  $t=0$  в положительном направлении оси  $Ox$ , в котором распространяется волна. В этом случае интенсивность акустического источника обуславливается внешней силой, пропорциональной  $c^2 e^{i\omega t}$ . Можно написать

$$X(x; t) = c^2 e^{i\omega t} \delta(x - vt) \times \theta(t), \quad (5.1.7')$$

где  $\theta(t)$  — обобщенная функция Хевисайда,  $\delta(x)$  — обобщенная функция Дирака, а знак « $\times$ » означает прямое произведение.

Из того что источник перемещается равномерно со скоростью  $v > 0$  при  $t \geq 0$ , следует, что обобщенная функция Дирака  $\delta(x - vt)$  сосредоточена в точке  $x = vt \geq 0$  на оси  $Ox$ , т. е. на полуоси  $x \geq 0$ . Носителем  $\theta(t)$  является полупрямая  $t \geq 0$ . Следовательно, обе рассматриваемые обобщенные функции допускают преобразование Лапласа соответственно по  $x$  и по  $t$ .

### 5.1.2.2. Исследование дифференциального уравнения

Будем обозначать через  $p$  и  $q$  комплексные переменные, соответствующие  $x$  и  $t$ , после преобразования Лапласа. Последовательно применяя это преобразование по  $x$  и по  $t$  к уравнениям (5.1.7) и (5.1.7'), получим

$$[(c + \omega)p + q][(c - \omega)p - q] \tilde{u}(p, q) = - \frac{c^2}{q + vp - i\omega}, \quad (5.1.8)$$

где учтены соотношения (1.5.68) и (1.5.76). Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(p, q) &= -\frac{c^2}{[(c + \omega)p + q][(c - \omega)p - q][vp - i\omega + q]} = \\ &= \frac{A(p)}{q - q_1} + \frac{B(p)}{q - q_2} + \frac{C(p)}{q - q_3},\end{aligned}\quad (5.1.9)$$

где

$$q_1 = -p(c + \omega), \quad q_2 = p(c - \omega), \quad q_3 = i\omega - vp \quad (5.1.9')$$

и

$$\begin{aligned}A(p) &= \frac{c}{2p[p(c + \omega - v) + i\omega]}, \\ B(p) &= \frac{c}{2p[p(c - \omega + v) - i\omega]}, \\ C(p) &= -\frac{c^2}{[p(c + \omega - v) + i\omega][p(c - \omega + v) - i\omega]}.\end{aligned}\quad (5.1.9'')$$

Применяя обратное преобразование Лапласа по переменной  $q$ , получаем

$$\begin{aligned}\tilde{u}(p) &= [A(p)e^{q_1 t} + B(p)e^{q_2 t} + C(p)e^{q_3 t}] \theta(t) = \\ &= A(p)\theta(t)e^{-p(c + \omega)t} + B(p)\theta(t)e^{p(c - \omega)t} + \\ &\quad + C(p)\theta(t)e^{(i\omega - vp)t}.\end{aligned}$$

С помощью формулы (1.5.72) и обратного преобразования Лапласа по переменной  $p$  получим

$$\begin{aligned}u(x; t) &= \theta(t)A_1[x - (c + \omega)t] + \\ &\quad + \theta(t)B_1[x + (c - \omega)t] + \theta(t)C_1(x - vt)e^{i\omega t},\end{aligned}\quad (5.1.10)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}A_1(x) &= L^{-1}[A(p)], \quad B_1(x) = L^{-1}[B(p)], \\ C_1(x) &= L^{-1}[C(p)].\end{aligned}\quad (5.1.10')$$

Исходя из формул (5.1.9''), можно написать

$$A(p) = \frac{A'(p)}{p} + \frac{A''(p)}{p - p_1}, \quad B(p) = \frac{B'(p)}{p} + \frac{B''(p)}{p - p_2},$$

$$C(p) = \frac{C'(p)}{p - p_3} + \frac{C''(p)}{p - p_4}, \quad (5.1.11)$$

где

$$p_1 = p_3 = -\frac{i\omega}{c + \omega - v}, \quad p_2 = p_4 = \frac{i\omega}{c - \omega + v} \quad (5.1.11')$$

и

$$A' = B'' = C' = \frac{c}{2i\omega}, \quad (5.1.11'')$$

$$A'' = B' = C'' = -\frac{c}{2i\omega}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \frac{c}{2i\omega} \theta(x) \left( 1 - e^{-\frac{i\omega}{c+\omega-v}x} \right), \\ B_1(x) &= -\frac{c}{2i\omega} \theta(x) \left( 1 - e^{\frac{i\omega}{c-\omega+v}x} \right), \\ C_1(x) &= \frac{c}{2i\omega} \theta(x) \left( e^{-\frac{i\omega}{c+\omega-v}x} - e^{\frac{i\omega}{c-\omega+v}x} \right). \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Таким образом, выражение (5.1.10) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x; t) &= \frac{c\theta(t)}{2i\omega} \left\{ \theta[x - (c + \omega)t] - \theta[x + (c - \omega)t] + \right. \\ &+ \{ \theta(x - vt) - \theta[x - (c + \omega)t] \} e^{-\frac{i\omega}{c+\omega-v}[x - (c+\omega)t]} - \\ &\left. - \{ \theta(x - vt) - \theta[x + (c - \omega)t] \} e^{\frac{i\omega}{c-\omega+v}[x + (c-\omega)t]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

С помощью этого результата можно получить различные частные решения.

Предположим, что  $x > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\omega < c$  и  $v < c + \omega = c_1$ . Последнее условие показывает, что скорость акустического источника меньше скорости волны в направлении движения источника (направление по ветру). С помощью формул Эйлера (2.3.83) и (2.3.83') для действительной части выражения (5.1.13) можно написать

$$u(x; t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{x}{c+w}, \\ -\frac{c}{2\omega} \sin \frac{\omega [x - (c+w)t]}{c+w-v} & \text{при } \frac{x}{c+w} < t < \frac{x}{v}, \\ \frac{c}{2\omega} \sin \frac{\omega [x + (c-w)t]}{c-w+v} & \text{при } t > \frac{x}{v}. \end{cases} \quad (5.1.14)$$

Отсюда следует, что при  $t=x/v$  появляется разрыв, а частота меняется скачкообразно от значения

$$f' = \frac{c+w}{c+w-v} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c+w}{c-(v-w)} f \quad (5.1.15)$$

до значения

$$f'' = \frac{c-w}{c-w+v} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c-w}{c+(v-w)} f \quad (5.1.15')$$

согласно принципу Доплера. Таким образом, получено обобщение соотношения (5.1.4).

## 5.2. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ОПТИКЕ

Среди основных явлений, сопровождающих распространение волн: акустических, оптических и других, отметим отражение, преломление и дифракцию. Исследование этих явлений связано с изучением волнового уравнения в неоднородных средах. Для исследования интерференции и дифракции световых волн достаточно рассматривать просто волновой характер распространения света, не учитывая специфических особенностей электромагнитных волн. Поэтому световая волна будет характеризоваться только амплитудой, фазой, длиной волны и скоростью распространения.

Ниже будет использоваться принцип Гюйгенса, согласно которому положение фронта распространяющейся волны в любой момент времени может быть представлено огибающей всех вторичных (элементарных) волн;

источниками вторичных волн являются точки, до которых дошел фронт первичной волны в предшествующий момент времени.

### 5.2.1. Явление дифракции на бесконечности

#### 5.2.1.1. Основные результаты.

##### Случай точечного источника

Характерной особенностью распространения волн является изменение направления их распространения при переходе через некоторое отверстие в непрозрачном экране (дифракция). *Плоское дифракционное отверстие* характеризуется некоторой *функцией распределения*  $f(x, y)$  света, с помощью которой можно определить *дифракционную картину на бесконечности*.

Для определения дифракционной картины на бесконечности за плоским отверстием используется принцип Гюйгенса, согласно которому элемент площади  $dxdy$  в плоскости  $z=0$  излучает элементарную волну с амплитудой  $f(x, y)dxdy$  в направлении с направляющими косинусами  $\alpha, \beta, \gamma$  и с разностью фаз  $2\pi/\lambda (\alpha x + \beta y)$  относительно элементарной волны, излучаемой из начала координат  $O$  (здесь  $\lambda$  — длина волны).

Складывая эффекты от всех точек, получим

$$\iint_{\Omega} f(x, y) e^{\frac{2\pi i(\alpha x + \beta y)}{\lambda}} dxdy, \quad (5.2.1)$$

где  $\Omega$  — площадь плоского дифракционного отверстия. Если наблюдать дифракционную картину в фокусе некоторой линзы с фокусным расстоянием  $l$ , то направлению  $(\alpha, \beta, \gamma)$  будет соответствовать точка фокальной плоскости с координатами

$$x' = \frac{\alpha}{\gamma} l, \quad y' = \frac{\beta}{\gamma} l. \quad (5.2.2)$$

Обычно дифракционная картина на бесконечности наблюдается в окрестности оси  $Oz$ . Таким образом, можно предположить, что  $\alpha, \beta \ll 1$ , т. е.  $\gamma \sim 1$ , а

$$x' = l\alpha, \quad y' = l\beta. \quad (5.2.2')$$

Если принять длину волны  $\lambda$  за единицу длины и в фокальной плоскости ввести безразмерные координаты

$$u = \frac{x'}{l}, \quad v = \frac{y'}{l}, \quad (5.2.3)$$

которые малы по сравнению с единицей, то для дифракционной картины на бесконечности получим следующую обобщенную функцию:

$$F(u, v) = \iint_{R^2} f(x, y) e^{2\pi i(ux+vy)} dx dy. \quad (5.2.4)$$

Если  $F(u, v) = F[f(x, y)]$  — образ Фурье функции  $f(x, y)$ , то

$$F(u, v) = \tilde{F}(2\pi u, 2\pi v), \quad (5.2.4')$$

т. е. дифракционная картина на бесконечности описывается функцией  $F(u, v)$ , которая является образом Фурье функции распределения света  $f(x, y)$  в точке  $(2\pi u, 2\pi v)$ .

В некоторых случаях функция распределения света не выражается через обычную функцию. Например, если источник света точечный, то функция распределения света должна равняться нулю всюду, кроме одной точки, где она неопределенна. В этом случае функция распределения выражается через некоторую обобщенную функцию с точечным носителем, а именно через обобщенную функцию Дирака. Поэтому точечные источники представляются таким же образом, как и сосредоточенные массы. Для точечного источника света в точке  $(x_0, y_0)$  имеем следующую обобщенную функцию распределения света:

$$f(x, y) = k\delta(x - x_0, y - y_0), \quad k = \text{const}, \quad (5.2.5)$$

а дифракционная картина на бесконечности имеет распределение

$$F(u, v) = ke^{2\pi i(ux_0 + vy_0)}. \quad (5.2.6)$$

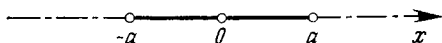
### 5.2.1.2. Примеры

Рассмотрим отверстие длины  $2a$  и пренебрежимо малой ширины, расположенное на оси  $Ox$  симметрично относительно начала координат  $O$  (фиг. 5.1). Предпо-



жим, что функция распределения света равна единице на всей длине отверстия. Следовательно, она имеет вид

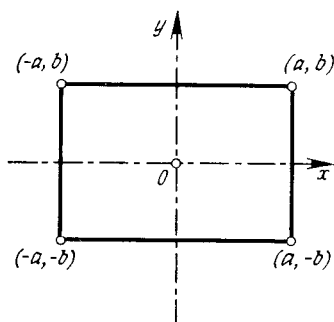
$$f(x) = h(x) = \theta(a - |x|), \quad (5.2.7)$$



Фиг. 5.1.

где  $h(x)$  — характеристическая функция на отрезке  $[-a, a]$ , определенная соотношением (1.1.98). Применяя преобразование Фурье (1.6.23''), получаем

$$F(u) = \frac{\sin 2\pi au}{\pi u}. \quad (5.2.8)$$



Фиг. 5.2.

Рассмотрим прямоугольное отверстие с размерами  $2a$  и  $2b$ . Направим оси координат вдоль осей симметрии этого отверстия (фиг. 5.2). Функция распределения света предполагается постоянной и равной единице. В этом случае можно написать

$$f(x, y) = h(x) h(y) = \theta(a - |x|) \theta(b - |y|). \quad (5.2.9)$$

Дифракционная картина на бесконечности дается функцией

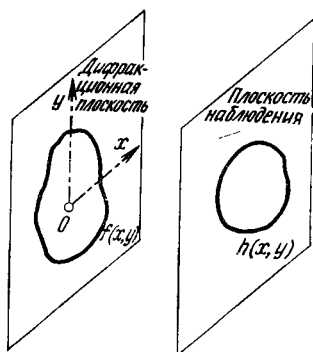
$$F(u, v) = \frac{\sin 2\pi au \sin 2\pi bv}{\pi^2 uv}. \quad (5.2.10)$$

Заметим, что сказанное выше про дифракцию света применимо и для акустических явлений, так как в обоих случаях мы имеем дело с волновыми процессами.

## 5.2.2. Дифракция Френеля

### 5.2.2.1. Общие положения

Явление дифракции имеет место при частичном перекрытии световых лучей непрозрачными экранами. Таким



Фиг. 5.3.

образом наблюдаются дифракционные картины Фраунгофера и Френеля. *Дифракцией Френеля* называется дифракция, полученная прямым путем без каких-либо оптических инструментов.

В дифракционной плоскости рассмотрим плоское отверстие. Пусть  $f(x, y)$  — функция распределения света на дифракционном отверстии. Благодаря явлению дифракции в плоскости наблюдения, которая параллельна дифракционной плоскости и находится на конечном расстоянии от нее, будет наблюдаться изображение, характеризующееся функцией  $h(x, y)$ . Функция  $h(x, y)$  представляет собой распределение света в плоскости наблюдения и соответствует функции распределения света  $f(x, y)$  на дифракционной плоскости (фиг. 5.3).

С изменением отверстия, т. е. функции  $f(x, y)$ , будет меняться и дифракционное изображение в плоскости

наблюдения, т. е. изменится и функция  $h(x, y)$ . Из линейности уравнений Максвелла, которые описывают явление дифракции, следует, что сдвиг отверстия приводит к сдвигу дифракционного изображения.

### 5.2.2.2. Определение дифракционного изображения в плоскости наблюдения

Из вышеизложенного следует, что существует некоторая функция  $g(x, y)$ , не зависящая от размеров отверстия и расстояния между рассматриваемыми плоскостями, которая связана с функциями  $h(x, y)$  и  $f(x, y)$  соотношением

$$h(x, y) = f(x, y) * g(x, y), \quad (5.2.11)$$

где введена свертка соответствующих функций.

Если точечный источник света находится в начале координат в дифракционной плоскости и имеет интенсивность, равную единице, то

$$f(x, y) = \delta(x, y). \quad (5.2.12)$$

Таким образом, функция распределения света выражается через обобщенную функцию Дирака. Замечая, что  $\delta(x, y)$  — нейтральный элемент алгебры со сверткой, получаем

$$h(x, y) = \delta(x, y) * g(x, y) = g(x, y). \quad (5.2.13)$$

Следовательно, функция (или обобщенная функция)  $g(x, y)$  соответствует точечному источнику (отверстию) с интенсивностью, равной единице. Зная  $g(x, y)$ , можно получить дифракционное изображение от отверстия произвольной формы.

Если в дифракционной плоскости имеются  $n$  точечных отверстий в точках  $A_i(x_i, y_i)$  с распределением света  $f_i(x, y) = k_i \delta(x - x_i, y - y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), для изображения получим

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y) * g(x, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^n k_i \delta(x - x_i, y - y_i) * g(x, y).$$

Следовательно,

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^n k_i g(x - x_i, y - y_i). \quad (5.2.14)$$

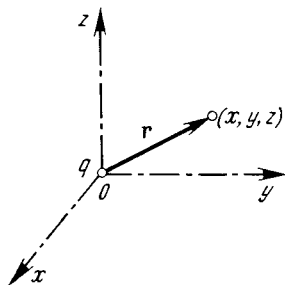
Этот случай соответствует так называемой дифракционной решетке.

### 5.3. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

#### 5.3.1. Соотношения между напряженностью и потенциалом поля, создаваемого электрическим зарядом, и объемной плотностью этого заряда

##### 5.3.1.1. Случай точечного электрического заряда

Рассмотрим точечный электрический заряд  $q$ , находящийся в начале координат (фиг. 5.4). Его *объемная*



Фиг. 5.4.

*плотность* определяется формулой (3.4.7) или (3.4.7'). Этот заряд создает вокруг себя электростатическое поле, описываемое вектором напряженности  $E$ :

$$E(x, y, z) = E(\mathbf{r}) = \frac{q}{R^2} = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.3.1)$$

Функция  $E(x, y, z)$ , хотя и имеет разрыв в начале координат, является локально интегрируемой. Следовательно, обобщенная функция, порождаемая этой функцией, регулярна.

По определению потенциал поля, создаваемого точечным электрическим зарядом  $q$ , является скалярной величиной, имеющей вид

$$V(x, y, z) = V(\mathbf{r}) = \frac{q}{R} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (5.3.2)$$

Заметим, что и эта функция является локально интегрируемой; она тоже порождает регулярную обобщенную функцию.

Между вектором напряженности  $\mathbf{E}$  и потенциалом  $V$  имеет место соотношение

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V. \quad (5.3.3)$$

Если применить к этому соотношению оператор дивергенции, то получим

$$-\text{div } \mathbf{E} = \text{div grad } V = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \quad (5.3.4)$$

Следовательно, потенциал поля и объемная плотность электрического заряда связаны уравнением Пуассона. Уравнения (5.3.3) и (5.3.4) являются фундаментальными уравнениями электростатического поля. Эти уравнения будут рассматриваться в пространстве обобщенных функций.

Из соотношения (1.4.35) можно заметить, что потенциал (5.3.2) удовлетворяет дифференциальному уравнению в обобщенных функциях (5.3.4). Если оператор Лапласа рассматривать в обычном смысле, то функция  $1/R$  будет гармонической и уравнение Пуассона не будет удовлетворяться.

В рассматриваемом случае оператор  $\text{grad}$  в смысле теории обобщенных функций совпадает с соответствующим оператором в обычном смысле, так как обобщенные

функции  $E$  и  $V$  являются регулярными. Следовательно, можно написать

$$E_x = q \frac{x}{R^3}, \quad E_y = q \frac{y}{R^3}, \quad E_z = q \frac{z}{R^3}. \quad (5.3.5)$$

### 5.3.1.2. Одномерный случай

Рассмотрим одномерное уравнение Пуассона для потенциала поля, создаваемого электрическим зарядом:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi\rho(x). \quad (5.3.6)$$

Для электрического заряда  $q$ , находящегося в начале координат на оси  $Ox$ , линейную плотность можно записать в виде (3.4.4). Соответствующий потенциал удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi q\delta(x). \quad (5.3.6')$$

Учитывая формулы (1.2.34) и (1.2.34'), получим

$$V(x) = -2\pi q |x|, \quad (5.3.7)$$

а используя соотношение (5.3.3), можно написать

$$\begin{aligned} E = -\frac{dV}{dx} = 2\pi q |x|' &= \begin{cases} -2\pi q & \text{при } x < 0 \\ 2\pi q & \text{при } x \geq 0 \end{cases} = \\ &= 2\pi q [2\theta(x) - 1] = 2\pi q \operatorname{sgn} x. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

### 5.3.1.3. Двумерный случай

В двумерном случае уравнение Пуассона принимает вид

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y). \quad (5.3.9)$$

Поверхностная плотность точечного электрического заряда  $q$ , находящегося в начале координат  $Oxy$ , определяется выражением вида (3.4.6). Потенциал соответствующий

щего электростатического поля удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -4\pi q \delta(x, y). \quad (5.3.9')$$

Учитывая формулу (1.4.36), получим

$$V(x, y) = 2q \ln \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.3.10)$$

Для вектора напряженности  $E$  можно написать

$$E_x = 2q \frac{x}{r}, \quad E_y = 2q \frac{y}{r}. \quad (5.3.11)$$

Функции  $E_x$  и  $E_y$  являются локально интегрируемыми, т. е. они порождают регулярные обобщенные функции. Несмотря на то что  $E_x^2$  и  $E_y^2$  не являются локально интегрируемыми функциями, как и их сумма

$$E_x^2 + E_y^2 = \frac{4q^2}{r^2},$$

выражение

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

является локально интегрируемой функцией, которой соответствует регулярная обобщенная функция. Напряженность двумерного электростатического поля определяется по формуле

$$E = \frac{2q}{r}. \quad (5.3.12)$$

#### 5.3.1.4. Примеры

В плоскости  $Oxy$  ( $z=0$ ) рассмотрим электрический простой слой, имеющий постоянную поверхностную плотность  $\sigma$  (фиг. 3.28). Учитывая формулу (3.4.14), для объемной плотности получим

$$\rho(x, y, z) = \sigma \delta(z). \quad (5.3.13)$$

Потенциал соответствующего электрического поля удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma\delta(z). \quad (5.3.14)$$

Отсюда, как и в разд. 5.3.1.2, следует

$$V(x, y, z) = -2\pi\sigma |z|. \quad (5.3.15)$$

Далее будем иметь

$$E_x = E_y = 0, \quad (5.3.16)$$

$$E_z = \begin{cases} -2\pi\sigma & \text{при } z < 0 \\ 2\pi\sigma & \text{при } z \geq 0 \end{cases} = 2\pi\sigma [2\theta(z) - 1] = 2\pi\sigma \operatorname{sign} z. \quad (5.3.16')$$

Таким образом, мы получили результат, аналогичный результату, рассмотренному в разд. 5.3.1.2, для случая одномерной среды.

Рассмотрим теперь электрический диполь с моментом  $D$ , расположенный в начале координат и направленный вдоль орта  $\mathbf{u}$ . Согласно формуле (3.4.12), объемная плотность рассматриваемого диполя

$$\rho(x, y, z) = -D \frac{\partial}{\partial u} \delta(x, y, z). \quad (5.3.17)$$

Применяя к соотношению (1.4.35) оператор  $\partial/\partial u$  и замечая, что он перестановочен с оператором Лапласа, получаем

$$\frac{\partial}{\partial u} \Delta \left( \frac{1}{R} \right) = \Delta \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R} \right) \right] = -4\pi \frac{\partial}{\partial u} \delta(x, y, z).$$

В этом случае уравнения (5.3.4) и (5.3.17) определяют потенциал электростатического поля, образованного электрическим диполем, расположенным в начале координат, следующего вида:

$$V(x, y, z) = -D \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R} \right) = -D \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R}. \quad (5.3.18)$$

Эта функция является локально интегрируемой, так что обобщенная функция, порожденная (5.3.18), является регулярной.



### 5.3.2.1. Электрический простой слой на поверхности

На поверхности  $S$  (см. фиг. 3.25, б) рассмотрим электрический простой слой с поверхностной плотностью  $\sigma(x, y, z)$ . Соответствующая объемная плотность определяется по формуле (3.4.14), а уравнение для определения потенциала соответствующего электростатического поля имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma(x, y, z)\delta(S). \quad (5.3.19)$$

Учитывая фундаментальное решение (2.3.77) уравнения Пуассона (5.3.19), для решения уравнения (5.3.19) имеем

$$V(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} * [-4\pi\sigma(x, y, z)\delta(S)], \quad (5.3.19')$$

где мы воспользовались сверткой.  
Окончательно получаем

$$V(x, y, z) = \frac{1}{R} * \sigma(x, y, z)\delta(S). \quad (5.3.20)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & (f(x, y, z) * \sigma(x, y, z)\delta(S), \varphi(x, y, z)) = \\ & = (f(x, y, z) \times \sigma(u, v, w)\delta(S), \varphi(x+u, y+v, z+w)) = \\ & = (\sigma(u, v, w)\delta(S), (f(x, y, z), \varphi(x+u, y+v, z+w))) = \\ & = \int_S \sigma(u, v, w) (f(x, y, z), \varphi(x+u, y+v, z+w)) dS = \\ & = \int_S \sigma(u, v, w) \left[ \int_{R^3} f(x, y, z) \varphi(x+u, y+v, \right. \\ & \quad \left. z+w) dx dy dz \right] dS = \\ & = \int_S \int_{R^3} \sigma(u, v, w) f(x-u, y-v, z-w) \varphi(x, y, z) dS dx dy dz = \\ & = \int_{R^3} \varphi(x, y, z) \left[ \int_S \sigma(u, v, w) f(x-u, y-v, z-w) dS \right] \times \end{aligned}$$

$$\times dx dy dz =$$

$$= \left( \int_S \sigma(u, v, w) f(x-u, y-v, z-w) dS, \varphi(x, y, z) \right),$$

где  $f(x, y, z)$  — локально интегрируемая функция, а  $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$  — основная функция. Имеем, таким образом, формулу

$$\begin{aligned} f(x, y, z) * \sigma(x, y, z) \delta(S) &= \\ &= \int_S \sigma(u, v, w) f(x-u, y-v, z-w) dS, \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

где  $dS$  выражается через переменные  $u, v$  и  $w$ . В этом случае можно написать

$$V(x, y, z) = \int_S \frac{\sigma(u, v, w)}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}} dS. \quad (5.3.22)$$

### 5.3.2.2. Электрический двойной слой на поверхности

На поверхности  $S$  (см. фиг. 3.26, б) рассмотрим электрический двойной слой с моментом  $\mu(x, y, z)$ . Объемная плотность определяется по формуле (3.4.25), а потенциал соответствующего электростатического поля удовлетворяет уравнению

$$\Delta V(x, y, z) = 4\pi \frac{\partial}{\partial n} [\mu(x, y, z) \delta(S)], \quad (5.3.23)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внутренней нормали к поверхности.

С помощью фундаментального решения (2.3.77), как и в предыдущем случае, получим

$$V(x, y, z) = -\frac{1}{R} * \frac{\partial}{\partial n} [\mu(x, y, z) \delta(S)]. \quad (5.3.24)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{R} * \mu(x, y, z) \delta(S) \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) * \mu(x, y, z) \delta(S), \end{aligned}$$

а согласно формуле (5.3.21), можно написать

$$\begin{aligned}
 & V(x, y, z) = \\
 & = - \int_S \mu(u, v, w) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{V(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2} \right] dS,
 \end{aligned}
 \tag{5.3.25}$$

где производная по нормали  $\mathbf{n}$  берется относительно переменных  $u, v$  и  $w$ .

## 5.4. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ФИЗИКЕ

### 5.4.1. Общие результаты

#### 5.4.1.1. Математическая постановка задачи

Колебательные явления, встречающиеся в механике, оптике, акустике, электротехнике и т. д., описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Общее решение в подпространстве  $K'_+$  обобщенных функций для линейных колебательных систем будет дано ниже в виде матричных рядов с элементами в виде обобщенных функций.

Пусть  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — обобщенные координаты колебательной системы с  $n$  степенями свободы и  $F_i(t)$  — обобщенные силы, соответствующие возмущающим силам, действующим на систему. В случае малых колебаний система уравнений Лагранжа принимает вид

$$\sum_{k=1}^n [a_{ik}\ddot{q}_k(t) + b_{ik}\dot{q}_k(t) + c_{ik}q_k(t)] = F_i(t)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).
 \tag{5.4.1}$$

Имеют место соотношения

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki} \quad (i, k=1, 2, \dots, n),
 \tag{5.4.2}$$

которые, однако, не являются необходимыми при последующем изложении.

Если добавить начальные условия

$$t=0: \quad q_k(0) = q_k^0, \quad \dot{q}_k(0) = \dot{q}_k^0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (5.4.3)$$

то получится задача Коши для линейной колебательной системы, неизвестными которой являются  $q_k(t)$ .

С помощью функции Хевисайда введем функции

$$\bar{q}_k(t) = \theta(t) q_k(t), \quad \bar{F}_k(t) = \theta(t) F_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (5.4.4)$$

которые приводят к соответствующим регулярным обобщенным функциям. После дифференцирования в смысле теории обобщенных функций получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_k(t)}{dt} &= \frac{\tilde{d}\bar{q}_k(t)}{dt} + q_k^0 \delta(t), \\ \frac{d^2\bar{q}_k(t)}{dt^2} &= \frac{\tilde{d}^2\bar{q}_k(t)}{dt^2} + \dot{q}_k^0 \delta(t) + q_k^0 \dot{\delta}(t) \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где введены и обычные производные. Учитывая эти производные и тот факт, что в системе (5.4.1) все производные рассматриваются в обычном смысле, можно записать уравнения Лагранжа в обобщенных функциях:

$$\sum_{k=1}^n [a_{ik} \ddot{\bar{q}}_k(t) + b_{ik} \dot{\bar{q}}_k(t) + c_{ik} \bar{q}_k(t)] = \mathcal{F}_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5.4.5)$$

где

$$\mathcal{F}_i(t) = \bar{F}_i(t) + \sum_{k=1}^n [(a_{ik} \dot{q}_k^0 + b_{ik} q_k^0) \delta(t) + a_{ik} q_k^0 \dot{\delta}(t)] \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.4.6)$$

Заметим, что уравнения (5.4.5) содержат начальные условия, так что решение соответствующей задачи Коши сводится к интегрированию этой системы. Несмотря на то, что эта система получена для обобщенных функций

типа обычных, она будет рассматриваться для произвольных обобщенных функций.

Обобщенная сила  $\mathcal{F}_i(t)$  является обобщенной функцией с носителем в  $[0, \infty)$ ; в этом случае можно предположить, что и  $\bar{F}_i(t)$  является обобщенной функцией с таким же носителем.

Введем дифференциальные операторы

$$D_{ik} = a_{ik} \frac{d^2}{dt^2} + b_{ik} \frac{d}{dt} + c_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (5.4.7)$$

Пусть  $X_k$  — фундаментальное решение оператора  $D_{kk}$  в алгебре со сверткой  $K'_+$ . Это решение должно быть функцией класса  $C^2 [0, \infty)$  и удовлетворять соотношению

$$D_{kk} X_k(t) = \delta(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (5.4.8)$$

Заметим, что

$$D_{kk} Z_k(t) = 0, \quad Z_k(0) = 0, \quad Z'_k(0) = \frac{1}{a_{kk}}, \quad a_{kk} \neq 0, \quad (5.4.9)$$

где

$$X_k(t) = \theta(t) Z_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (5.4.9')$$

Систему уравнений Лагранжа (5.4.5) можно написать в  $K'_+$  в матричном виде

$$A(t) * \bar{q}(t) = \mathcal{F}(t), \quad (5.4.5')$$

где  $A(t)$  — квадратная матрица порядка  $n$ :

$$A(t) = \{D_{ij} \delta(t)\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (5.4.10)$$

а матрица неизвестных  $\bar{q}(t)$  и матрица  $\mathcal{F}(t)$  являются матрицами-столбцами

$$\bar{q}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \bar{q}_1(t) \\ \bar{q}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{q}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1(t) \\ \mathcal{F}_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n(t) \end{Bmatrix}. \quad (5.4.11)$$

Матрицы обобщенных функций  $A(t)$ ,  $\bar{q}(t)$ ,  $\mathcal{F}(t) \in K'_+$  и, следовательно, уравнение (5.4.5') допускают в  $K'_+$  единственное решение для матрицы  $\bar{q}(t)$ .

Если имеют место соотношения (5.4.2), то матрица  $A(t)$  является симметричной.

В дальнейшем будем предполагать, что определитель матрицы

$$\Delta \equiv \det | a_{ij} | \quad (5.4.12)$$

отличен от нуля.

### 5.4.1.2. Уравнения в свертках

Для исследования уравнения (5.4.5') приведем другое уравнение в свертках, эквивалентное рассмотренному.

**Теорема 5.4.1.** Если  $\Delta \neq 0$  и  $a_{ii} \neq 0$ , а  $\bar{F}_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — обобщенная функция с компактным носителем в  $[0, \infty)$ , то уравнение (5.4.5') эквивалентно в  $K'_+$  уравнению

$$\bar{A}(t) * \bar{q}(t) = \bar{\mathcal{F}}(t), \quad (5.4.13)$$

где матрицы обобщенных функций  $\bar{A}(t)$ ,  $\bar{\mathcal{F}}(t) \in K'_+$  имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &\equiv \{a_{ij}\delta(t)\} + \{\theta(t)a_{ii}D_{ij}Z_i(t)\} \\ &(i, j=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}(t) &\equiv \{a_{11}X_1(t) * \bar{\mathcal{F}}_1(t), a_{22}X_2(t) * \bar{\mathcal{F}}_2(t), \dots \\ &\dots, a_{nn}X_n(t) * \bar{\mathcal{F}}_n(t)\}. \end{aligned} \quad (5.4.14')$$

Действительно, пусть  $d(t) \equiv \{a_{ii}X_i(t)\delta_{ij}\} \in K'_+$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ), где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Так как  $\bar{F}_i$  имеет компактный носитель, содержащийся в  $[0, \infty)$ , то  $\mathcal{F}(t)$  и  $A(t)$  тоже имеют компактные носители. Поэтому умножение уравнения (5.4.5') слева на диагональную матрицу  $d(t)$  имеет смысл в  $K'_+$ . Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \{a_{ii}X_i(t)\delta_{ij}\} * \{D_{ij}\delta(t)\} &= \{a_{ii}X_i(t) * D_{ij}\delta(t)\} = \\ &= \{a_{ii}D_{ij}X_i(t)\}, \quad \{a_{ii}X_i(t)\delta_{ij}\} * \mathcal{F}(t) = \bar{\mathcal{F}}(t). \end{aligned}$$

С учетом соотношений (5.4.8) — (5.4.9') и полученных формул дифференцирования будем иметь

$$\{a_{ii}D_{ij}X_i(t)\} = \{a_{ij}\delta(t)\} + \{\theta(t)a_{ii}D_{ij}Z_i(t)\}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее соотношение, получим выражения (5.4.14) и (5.4.14'), что доказывает справедливость формулы (5.4.13).

Эквивалентность уравнений (5.4.5') и (5.4.13) обусловлена тем, что диагональная матрица  $d(t)$  отлична от нуля, а алгебра со сверткой  $K'_+$  не допускает делителей нуля.

Заметим еще, что матрица  $\bar{A}(t)$ , определенная соотношением (5.4.14), является суммой двух матриц, одна из которых является матрицей сингулярных обобщенных функций, а другая — матрицей регулярных обобщенных функций.

**Теорема 5.4.2.** Если  $\Delta \neq 0$  и  $a_{ii} \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), то матрица  $\bar{A}(t) \in K'_+$  обратима в  $K'_+$  и обратная матрица имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{A}^{-1}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\{a_{ij}\delta(t)\}^{-1} * \\ &* \{\theta(t)a_{ii}D_{ij}Z_i(t)\}]^k * \{a_{ij}\delta(t)\}^{-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\{a_{ij}\}^{-1} \{\theta(t)a_{ii}D_{ij}Z_i(t)\}]^k \{a_{ij}\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Действительно, так как  $\Delta \neq 0$ , матрица  $\{a_{ij}\delta(t)\}$  обратима в  $K'_+$  и имеет место равенство

$$\{a_{ij}\delta(t)\}^{-1} = \delta(t) \{a_{ij}\}^{-1}. \quad (5.4.16)$$

Таким образом, свертка внутри квадратных скобок в соотношении (5.4.15) существует и приводит к матрице обобщенных функций типа обычных

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv \{a_{ij}\delta(t)\}^{-1} * \{\theta(t)a_{ii}D_{ij}Z_i(t)\} = \\ &= \{a_{ij}\}^{-1} \{\theta(t)a_{ii}D_{ij}Z_i(t)\}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Для этой матрицы, элементами которой являются обычные функции, норма определяется соотношением

$$\|H(t)\| = \sum_{i,j=1}^n |h_{ij}(t)|, \quad H(t) \equiv \{h_{ij}(t)\}. \quad (5.4.17')$$

В предположении, что  $H$  и  $\bar{H}$  являются квадратными непрерывными матрицами одинакового порядка, элементами которых являются обычные функции, можно написать

$$\begin{aligned} \left\| \int H(t) dt \right\| &\leq \int \|H(t)\| dt, \\ \|H(t)\bar{H}(t)\| &\leq \|H(t)\| \|\bar{H}(t)\|. \end{aligned}$$

Пусть

$$U(t) \equiv \{\delta(t)\delta_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.4.18)$$

является *единичной матрицей* в алгебре со сверткой  $K'_+$ . Матрица  $U(t) + H(t) \in K'_+$  обратима в  $K'_+$  на отрезке  $T \equiv [0, t_1]$ , и имеет место равенство

$$[U(t) + H(t)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H^{*k}(t). \quad (5.4.19)$$

Введем обозначение

$$M = \max_{t \in T} \|H(t)\|.$$

Тогда получим

$$\|H^{*2}(t)\| = \int_0^t \|H(\tau)\| \|H(t-\tau)\| d\tau \leq M^2 t \leq M^2 t_1.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$\|H^{*k}(t)\| \leq \frac{M^k t^{k-1}}{(k-1)!} \leq \frac{M^k t_1^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Следовательно, матричный ряд (5.4.19) равномерно сходится при  $t \in T$ , так как матрица  $H(t)$  непрерывна на



$[0, \infty)$ . Равенство (5.4.19) легко проверяется с помощью свертки

$$[U(t) + H(t)] * \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H^{*k}(t).$$

Так как матрица  $\bar{A}(t)$  может иметь вид

$$\bar{A}(t) = \{a_{ij} \delta(t)\} * [U(t) + H(t)],$$

причем оба сомножителя обратимы в  $K'_+$ , то с учетом формулы (5.4.19) получим

$$\bar{A}^{-1}(t) = \{a_{ij} \delta(t)\}^{-1} * [U(t) + H(t)]^{-1},$$

что и приводит к соотношению (5.4.15). Теорема, таким образом, доказана.

Следовательно, решение в  $K'_+$  уравнения (5.4.13) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) = & \{a_{ij}\}^{-1} \bar{\mathcal{F}}(t) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [ [\{a_{ij}\}^{-1} \{\theta(t) a_{ii} D_{ij} Z_i(t)\}]^{*k} \{a_{ij}\}^{-1} ] * \bar{\mathcal{F}}(t). \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Это решение в то же время является решением в  $K'_+$  уравнения в свертках (5.4.5').

## 5.4.2. Применения для исследования механических колебаний

### 5.4.2.1. Общий случай

При изучении *механических колебаний* встречается случай, когда

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (5.4.21)$$

т. е. матрица  $\{a_{ij}\}$  становится диагональной:

$$\{a_{ij}\} = \{a_{ij} \delta_{ij}\}. \quad (5.4.21')$$

Обратная матрица тоже будет диагональной:

$$\{a_{ij}\}^{-1} = \{a_{ij}^{-1} \delta_{ij}\}. \quad (5.4.21'')$$

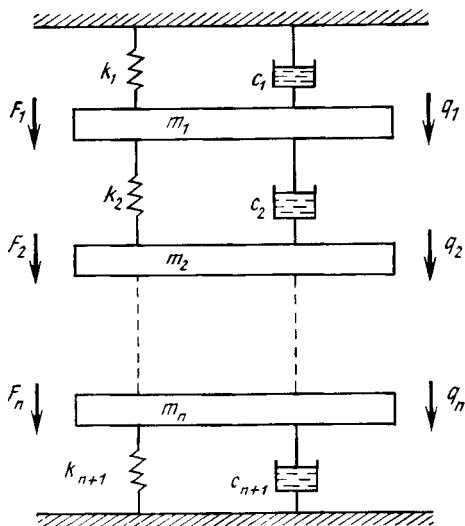
Так как

$$\{a_{ij}\}^{-1} \{\theta(t) a_{ii} D_{ij} Z_i(t)\} = \{\theta(t) D_{ij} Z_i(t)\},$$

соотношение (5.4.20) упрощается и принимает вид

$$\bar{q}(t) = \{a_{ij}^{-1} \delta_{ij}\} \bar{\mathcal{F}}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\{\theta(t) D_{ij} Z_i(t)\}^{*k} \{a_{ij}^{-1} \delta_{ij}\}^{*k} \bar{\mathcal{F}}(t)]. \quad (5.4.22)$$

Это соотношение описывает продольные колебания механической системы с  $n$  степенями свободы (фиг. 5.5).



Фиг. 5.5.

Согласно второму закону Ньютона, для точки с массой  $m_i$  можно написать уравнение

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}_i(t) = & F_i(t) - k_i [q_i(t) - q_{i-1}(t)] - \\ & - c_i [\dot{q}_i(t) - \dot{q}_{i-1}(t)] - k_{i+1} [q_i(t) - q_{i+1}(t)] - \\ & - c_{i+1} [\dot{q}_i(t) - \dot{q}_{i+1}(t)] \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

где  $c_i$  — коэффициенты затухания,  $k_i$  — квазиупругие коэффициенты,  $F_i(t)$  — возмущающие силы, действующие на точку с массой  $m_i$ . Кроме того,

$$q_0(t) = q_{n+1}(t) = 0; \quad \dot{q}_0(t) = \dot{q}_{n+1}(t) = 0. \quad (5.4.23')$$

В таком случае

$$a_{ii} = m_i, \quad (5.4.24)$$

а определитель

$$\Delta = m_1 m_2 \dots m_n \neq 0. \quad (5.4.24')$$

Дифференциальный оператор  $D_{ij}$  принимает вид

$$D_{ii} = m_i \frac{d^2}{dt^2} + (c_i + c_{i+1}) \frac{d}{dt} + k_i + k_{i+1}, \quad (5.4.25)$$

$$D_{ii-1} = -c_i \frac{d}{dt} - k_i, \quad (5.4.25')$$

$$D_{ii+1} = -c_{i+1} \frac{d}{dt} - k_{i+1}, \quad (5.4.25'')$$

$$D_{ij} = 0 \text{ при } |i - j| \geq 2. \quad (5.4.25''')$$

Функции  $Z_i(t)$  будут иметь вид

$$Z_i(t) = \frac{1}{m_i \omega_i} e^{-\alpha_i t} \operatorname{sh} \omega_i t \text{ при } \alpha_i > \sqrt{\frac{k_i + k_{i+1}}{m_i}}, \quad (5.4.26)$$

где

$$\omega_i = \sqrt{\alpha_i^2 - \frac{k_i + k_{i+1}}{m_i}}, \quad \alpha_i = \frac{1}{2} \frac{c_i + c_{i+1}}{m_i}, \quad (5.4.26')$$

$$Z_i(t) = \frac{1}{m_i \omega'_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega'_i t \text{ при } \alpha_i < \sqrt{\frac{k_i + k_{i+1}}{m_i}}, \quad (5.4.27)$$

где

$$\omega'_i = \sqrt{\frac{k_i + k_{i+1}}{m_i} - \alpha_i^2} \quad (5.4.27')$$

и

$$Z_i(t) = \frac{1}{m_i} t e^{-\alpha_i t} \text{ при } \alpha_i = \sqrt{\frac{k_i + k_{i+1}}{m_i}}, \quad (5.4.28)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ .

Если начальные условия однородные (нулевые) и возмущающие силы являются импульсными в начальный момент времени

$$\bar{F}_i(t) = F_i \delta(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5.4.29)$$

где  $F_i$  — постоянные, то получим

$$\bar{\mathcal{F}}(t) = \{m_1 F_1 X_1(t), m_2 F_2 X_2(t), \dots, m_n F_n X_n(t)\}. \quad (5.4.30)$$

#### 5.4.2.2. Частный случай

Рассмотрим полученные выше результаты для случая  $n=2$ . Мы имеем

$$\{a_{ij}\} = \begin{Bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{Bmatrix}, \quad \{a_{ij}\}^{-1} = \begin{Bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} \end{Bmatrix}. \quad (5.4.31)$$

Следовательно,

$$\{\theta(t) D_{ij} Z_i(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 & \theta(t) D_{12} Z_1(t) \\ \theta(t) D_{21} Z_2(t) & 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4.32)$$

и

$$\{\theta(t) D_{ij} Z_i(t)\}^{*k} =$$

$$= \begin{cases} \{\theta(t) D_{12} Z_1(t) * \theta(t) D_{21} Z_2(t)\}^{* \frac{k}{2}} * \begin{Bmatrix} \delta(t) & 0 \\ 0 & \delta(t) \end{Bmatrix} & (k - \text{четное}), \\ \{\theta(t) D_{12} Z_1(t) * \theta(t) D_{21} Z_2(t)\}^{* \frac{k-1}{2}} * \begin{Bmatrix} 0 & \theta(t) D_{12} Z_1(t) \\ \theta(t) D_{21} Z_2(t) & 0 \end{Bmatrix} & (k - \text{нечетное}). \end{cases} \quad (5.4.33)$$

Тогда

$$\bar{q}_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\theta(t) D_{12} Z_1(t) * \theta(t) D_{21} Z_2(t)]^{*k} * [X_1(t) * \bar{\mathcal{F}}_1(t) - \theta(t) D_{12} Z_1(t) * X_2(t) * \bar{\mathcal{F}}_2(t)], \quad (5.4.34)$$

$$\bar{q}_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\theta(t) D_{12} Z_1(t) * \theta(t) D_{21} Z_2(t)]^{*k} * [X_2(t) * \bar{\mathcal{F}}_2(t) -$$

$$-\theta(t) D_{21} Z_2(t) * X_1(t) * \mathcal{F}_1(t)].$$

В случае когда начальные условия являются однородными (нулевыми), а возмущающие силы имеют вид (5.4.29), будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{q}_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\theta(t) D_{12} Z_1(t) * \theta(t) D_{21} Z_2(t)]^{*k} * [F_1 X_1(t) - \\ - \theta(t) D_{12} F_2 Z_1(t) * X_2(t)], \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\theta(t) D_{12} Z_1(t) * \theta(t) D_{21} Z_2(t)]^{*k} * [F_2 X_2(t) - \\ - \theta(t) D_{21} F_1 Z_2(t) * X_1(t)]. \end{aligned}$$

Из изложенного выше видно преимущество приведенного метода вычислений. Если для системы с  $n$  степенями свободы используются методы операционного исчисления, то для определения начальных обобщенных функций приходится решать алгебраическое уравнение порядка  $2n$ . Выражение общего решения через  $n$  фундаментальных решений позволяет избежать некоторых трудностей (разложение на простые дроби и т. д.).

### 5.4.2.3. Свертки

Для вычисления приведенных выше сверток полезно использовать формулы

$$[\theta(t) e^{\alpha t}]^{*k} = \frac{t^{k-1} \theta(t) e^{\alpha t}}{(k-1)!}, \quad (5.4.36)$$

$$[f + e^{\alpha t}]^{*k} = \frac{t^{2k-1} \theta(t) e^{\alpha t}}{(2k-1)!}$$

и

$$[\theta(t) e^{\alpha t} \sin \omega t]^{*k} = \frac{\omega^k \theta(t) e^{\alpha t}}{[(k-1)!]^2} (I_k \cos \omega t + \mathcal{Y}_k \sin \omega t), \quad (5.4.37)$$

$$[\theta(t) e^{at} \operatorname{sh} \omega t]^{*k} = \frac{\omega^k \theta(t) e^{at}}{[(k-1)!]^2} (I'_k \operatorname{ch} \omega t - \mathcal{Y}'_k \operatorname{sh} \omega t),$$

где  $k=1, 2, 3, \dots$ .

Здесь

$$I_k = \int_0^t \tau^{k-1} (t-\tau)^{k-1} \cos 2\omega\tau d\tau, \quad (5.4.38)$$

$$\mathcal{Y}_k = \int_0^t \tau^{k-1} (t-\tau)^{k-1} \sin 2\omega\tau d\tau$$

и

$$I'_k = \int_0^t \tau^{k-1} (t-\tau)^{k-1} \operatorname{ch} 2\omega\tau d\tau, \quad (5.4.38')$$

$$\mathcal{Y}'_k = \int_0^t \tau^{k-1} (t-\tau)^{k-1} \operatorname{sh} 2\omega\tau d\tau.$$

Эти результаты получены с помощью преобразования Лапласа.

## Применения теории обобщенных функций в электротехнике

### 6.1. СИЛА ТОКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ПОЛНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### 6.1.1. Сила тока и электрический заряд

##### 6.1.1.1. Общие положения

Рассмотрим проводник с поперечным сечением  $A$ , через который при  $t \geq t_0$ , где  $t_0$  — начальный момент, проходит электрический заряд  $q = q(t)$ ; при  $t < t_0$  предполагается отсутствие тока. Сила тока определяется соотношением

$$i(t) = \frac{\tilde{d}q(t)}{dt}, \quad (6.1.1)$$

которое справедливо при  $t \geq t_0$ , а дифференцирование рассматривается в обычном смысле.

Нулевым продолжением влево вводится функция

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \\ q(t) & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} = \theta(t - t_0)q(t), \quad (6.1.2)$$

где  $\theta(t)$  — обобщенная функция Хевисайда (фиг. 6.1). Дифференцируя (6.1.2) в смысле теории обобщенных функций, получаем

$$\begin{aligned} \bar{i}(t) &= \frac{d\bar{q}(t)}{dt} = \theta(t - t_0)\tilde{q}'(t) + q(t)\delta(t - t_0) = \\ &= \theta(t - t_0)\tilde{q}'(t) + q(t_0)\delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

где  $q(t)$  — функция класса  $C^1$ . Заметим, что  $\bar{i}(t) = \tilde{q}'(t) = i(t)$  при  $t > t_0$ . Таким образом, обобщенная функция

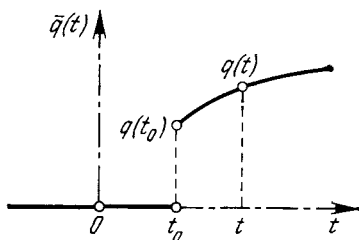
(6.1.3) правильно описывает силу тока. В частности, при

$$q(t) = q_0 = \text{const}, \quad t \geq t_0, \quad (6.1.4)$$

имеем

$$\bar{i}(t) = q_0 \delta(t - t_0). \quad (6.1.4')$$

При рассмотрении электрических цепей важное значение имеют два закона *Кирхгофа*:



Фиг. 6.1.

1) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю. Положительными считаются токи, приходящие к узлу, отрицательными — токи, уходящие от него.

2) В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма э. д. с. равняется алгебраической сумме падений напряжений.

На сопротивлении  $R$  напряжение падает на величину

$$\bar{E}_R(t) = R\bar{i}(t). \quad (6.1.5)$$

Это соотношение является выражением *закона Ома*. Аналогично при прохождении электрического тока  $i(t)$  через катушку происходит падение напряжения

$$\bar{E}_L(t) = L \frac{d}{dt} \bar{i}(t), \quad (6.1.5')$$

где  $L$  — индуктивность катушки. Падение напряжения при прохождении электрического тока через конденсатор емкостью  $C$  будет

$$\bar{E}_C(t) = \frac{1}{C} \bar{q}(t). \quad (6.1.5'')$$



Рассмотренные падения напряжений на активном сопротивлении  $R$ , индуктивном сопротивлении  $L$  и емкостном сопротивлении  $C$  являются обобщенными функциями, равными нулю при  $t < t_0$ . Следовательно, носителем этих обобщенных функций является полупрямая  $[0, \infty)$ , и к ним можно применить, помимо преобразования Фурье, преобразование Лапласа.

Для случая *взаимной индукции* двух катушек можно написать соотношение, аналогичное (6.1.5'). Рассмотрим две индуктивно связанные катушки с взаимными индуктивностями  $L_{12}$  и  $L_{21}$ , соответствующими силам токов  $\bar{i}_1$  и  $\bar{i}_2$ . Будут иметь место следующие падения напряжений:

$$\bar{E}_1(t) = L_{12} \frac{d}{dt} \bar{i}_2(t), \quad \bar{E}_2(t) = L_{21} \frac{d}{dt} \bar{i}_1(t), \quad (6.1.6)$$

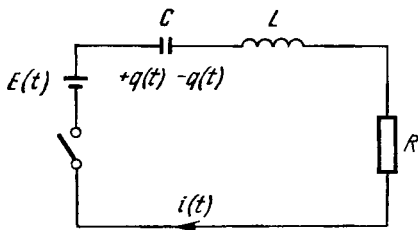
причем предполагается, что

$$L_{12} = L_{21} = M. \quad (6.1.7)$$

### 6.1.1.2. Исследование цепи RLC

Важным применением алгебры со сверткой  $K'_+$  является исследование цепи RLC, образованной *сопротивлением, индуктивностью* (катушкой) и *емкостью* (конденсатором), которые соединены последовательно с генератором, имеющим э. д. с.  $E(t)$  (фиг. 6.2).

Предполагая начальные условия однородными (нулевыми), применим к этой замкнутой цепи второй закон



Фиг. 6.2.

Кирхгофа. Учитывая соотношения (6.1.5) — (6.1.5''), получим

$$\bar{E}(t) = L \frac{d}{dt} \bar{i}(t) + R \bar{i}(t) + \frac{1}{C} \bar{q}(t), \quad (6.1.8)$$

где  $\bar{E}(t)$  — обобщенная функция, определяемая формулой

$$\bar{E}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \\ E(t) & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} = \theta(t - t_0) E(t). \quad (6.1.9)$$

Здесь  $t = t_0$  — начальный момент замыкания цепи, а  $E(t)$  — функция, определенная при  $t \geq t_0$  и представляющая э. д. с.

Дифференциальное уравнение (6.1.8) содержит неизвестные обобщенные функции  $\bar{q}(t)$  и  $\bar{i}(t)$ , которые зависят от э. д. с.  $\bar{E}(t)$  посредством коэффициентов  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Учитывая соотношение (6.1.3), получим дифференциальное уравнение

$$L \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}(t) + R \frac{d}{dt} \bar{q}(t) + \frac{1}{C} \bar{q}(t) = \bar{E}(t), \quad (6.1.10)$$

которое содержит только неизвестную обобщенную функцию  $\bar{q}(t)$ . Если ввести обозначение

$$D_q = L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C}, \quad (6.1.11)$$

то уравнение (6.1.10) примет вид

$$D_q \bar{q}(t) = \bar{E}(t). \quad (6.1.12)$$

В алгебре со сверткой это уравнение записывается как

$$D_q \delta(t) * \bar{q}(t) = \bar{E}(t). \quad (6.1.12')$$

Согласно изложенному в разд. 2.2.1.2, фундаментальное решение этого уравнения удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{E}(t) = [D_q \delta(t)]^{-1}, \quad \mathcal{E}^{-1}(t) = D_q \delta(t). \quad (6.1.13)$$

Решение  $\mathcal{E}(t) \in K'_+$  является единственным, и, таким образом, можно записать решение уравнения (6.1.12') в виде

$$\bar{q}(t) = \mathcal{E}(t) * \bar{E}(t). \quad (6.1.14)$$

Следовательно, получены функциональные соотношения (6.1.12') и (6.1.14) между э. д. с.  $\bar{E}(t)$  и зарядом  $\bar{q}(t)$ .

### 6.1.2. Полное сопротивление и проводимость электрических цепей

Как было показано, фундаментальное решение  $\mathcal{E}(t) \in K'_+$  позволяет с помощью соотношения (6.1.14) определить заряд  $\bar{q}(t)$ , когда известна э. д. с.  $\bar{E}(t)$ . Величина, обратная  $\mathcal{E}(t)$ , т. е.  $\mathcal{E}^{-1}(t) \in K'_+$ , позволяет определить э. д. с., когда задается электрический заряд, с помощью соотношения

$$\bar{E}(t) = \mathcal{E}^{-1}(t) * \bar{q}(t). \quad (6.1.15)$$

#### 6.1.2.1. Обобщенное полное сопротивление и обобщенная проводимость электрических цепей

По определению соответствующее заряду  $\bar{q}(t)$  обобщенное полное сопротивление электрической цепи имеет вид

$$Z_q(t) = D_q \delta(t) = \mathcal{E}^{-1}(t) = L \delta''(t) + R \delta'(t) + \frac{1}{C} \delta(t). \quad (6.1.16)$$

В этом случае для э. д. с. имеем

$$\bar{E}(t) = Z_q(t) * \bar{q}(t). \quad (6.1.17)$$

По аналогии соответствующая заряду  $\bar{q}(t)$  обобщенная проводимость электрической цепи определяется соотношением

$$\begin{aligned} A_q(t) &= Z_q^{-1}(t) = \mathcal{E}(t) = [D_q \delta(t)]^{-1} = \\ &= \left[ L \delta''(t) + R \delta'(t) + \frac{1}{C} \delta(t) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.1.16')$$

а электрический заряд имеет вид

$$\bar{q}(t) = A_q(t) * \bar{E}(t). \quad (6.1.17')$$

Между обобщенным полным сопротивлением и обобщенной проводимостью, соответствующими заряду  $\bar{q}(t)$ , имеет место соотношение

$$Z_q(t) * A_q(t) = \delta(t). \quad (6.1.18)$$

Замечая, что элементарное решение  $\mathcal{E}(t) \in K'_+$  единственно, заключаем, что рассматриваемая цепь имеет единственную обобщенную проводимость, соответствующую заряду  $q(t)$ .

Обобщенное полное сопротивление  $Z_q(t)$  и обобщенная проводимость  $A_q(t)$ , соответствующая заряду  $\bar{q}(t)$ , рассмотренному в (6.1.10), введены для цепи  $RLC$ . Исключая из соотношений (6.1.3) и (6.1.8) заряд  $\bar{q}(t)$ , получим уравнение для  $\bar{i}(t)$ .

Обобщенные функции  $\theta(t)$  и  $\bar{i}(t)$  принадлежат алгебре со сверткой  $K'_+$ ; можно записать произведение

$$\begin{aligned} \theta(t) * \bar{i}(t) &= \theta(t) * \frac{d}{dt} \bar{q}(t) = \frac{d}{dt} [\theta(t) * \bar{q}(t)] = \\ &= \frac{d}{dt} \theta(t) * \bar{q}(t) = \delta(t) * \bar{q}(t), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\theta(t) * \bar{i}(t) = \bar{q}(t). \quad (6.1.19)$$

Исходя из соотношений (6.1.3) и (6.1.8), получим уравнение

$$L \frac{d}{dt} \bar{i}(t) + R \bar{i}(t) + \frac{1}{C} \theta(t) * \bar{i}(t) = \bar{E}(t), \quad (6.1.20)$$

которое является интегро-дифференциальным, если  $\bar{i}(t)$  — регулярная обобщенная функция. Введем оператор

$$D_i = L \frac{d}{dt} + R + \frac{1}{C} \theta(t) *. \quad (6.1.21)$$

Тогда уравнение (6.1.20) примет вид

$$D_i \bar{i}(t) = \bar{E}(t) \quad (6.1.22)$$

или, замечая, что

$$D_i \delta(t) = L \delta'(t) + R \delta(t) + \frac{1}{C} \theta(t) * \delta(t) =$$

$$=L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\theta(t), \quad (6.1.21')$$

в свертках получим

$$D_i\delta(t) * \bar{i}(t) = \bar{E}(t). \quad (6.1.22')$$

Обобщенное полное сопротивление, соответствующее силе тока  $\bar{i}(t)$ , определяется соотношением

$$Z_i(t) = D_i\delta(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\theta(t), \quad (6.1.23)$$

а обобщенная проводимость, соответствующая силе тока  $\bar{i}(t)$ , будет иметь вид

$$A_i(t) = Z_i^{-1}(t) = [D_i\delta(t)]^{-1} = \left[ L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\theta(t) \right]^{-1}. \quad (6.1.23')$$

Справедливо соотношение

$$Z_i(t) * A_i(t) = \delta(t). \quad (6.1.24)$$

Обобщенное полное сопротивление и обобщенная проводимость, соответствующие силе тока  $\bar{i}(t)$ , в алгебре со сверткой  $K'_+$  определяются единственным образом. Можно написать

$$\bar{E}(t) = Z_i(t) * \bar{i}(t), \quad \bar{i}(t) = A_i(t) * \bar{E}(t). \quad (6.1.25)$$

Обобщенное полное сопротивление  $Z_i(t)$  обозначается через  $Z(t)$  и называется *полным сопротивлением цепи RLC*. Мы не уточняем, что оно соответствует силе тока  $\bar{i}(t)$ . Аналогично обобщенная проводимость  $A_i(t)$  обозначается через  $A(t)$  и называется *проводимостью цепи RLC*. Из соотношений (6.1.3), (6.1.17) и (6.1.25) следует

$$\begin{aligned} Z_q(t) * \bar{q}(t) &= Z_i(t) * \bar{i}(t) = Z_i(t) * \frac{d}{dt} \bar{q}(t) = \\ &= \frac{d}{dt} Z_i(t) * \bar{q}(t), \end{aligned}$$

откуда получается соотношение

$$Z_q(t) = \frac{d}{dt} Z_i(t). \quad (6.1.26)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A_i(t) * \bar{E}(t) &= \frac{d}{dt} \bar{q}(t) = \frac{d}{dt} [A_q(t) * \bar{E}(t)] = \\ &= \frac{d}{dt} A_q(t) * \bar{E}(t), \end{aligned} \quad (6.1.26')$$

так что можно написать

$$A_i(t) = \frac{d}{dt} A_q(t).$$

### 6.1.2.2. Операторное полное сопротивление и операторная проводимость электрических цепей

Изображение по Лапласу обобщенного полного сопротивления, соответствующего заряду  $\bar{q}(t)$ , имеет вид

$$\tilde{Z}_q(p) = L[Z_q(t)] = Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}, \quad (6.1.27)$$

где  $p$  — новая комплексная переменная. Так определяется операторное полное сопротивление, соответствующее заряду  $\bar{q}(t)$ . Аналогично обобщенная проводимость, соответствующая заряду  $\bar{q}(t)$ , приводит к операторной проводимости, соответствующей заряду  $\bar{q}(t)$ :

$$\bar{A}_q(p) = L[A_q(t)] = \frac{1}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}. \quad (6.1.27')$$

Применяя преобразование Лапласа к соотношениям (6.1.17) и (6.1.17'), можно написать

$$\tilde{\bar{E}}(p) = \tilde{Z}_q(p) \tilde{\bar{q}}(p), \quad (6.1.28)$$

$$\tilde{\bar{q}}(p) = \tilde{A}_q(p) \tilde{\bar{E}}(p).$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\tilde{Z}_q(p) \tilde{A}_q(p) = 1. \quad (6.1.29)$$

Изображение по Лапласу обобщенного полного сопротивления, соответствующего силе тока  $\bar{i}(t)$ , записывается в виде

$$\tilde{Z}_i(p) = L[Z_i(t)] = Lp + R + \frac{1}{Cp}. \quad (6.1.30)$$

Это соотношение определяет *операторное полное сопротивление, соответствующее силе тока  $\bar{i}(t)$* . Аналогично обобщенная проводимость, соответствующая силе тока  $\bar{i}(t)$ , приводит к *операторной проводимости, соответствующей той же силе тока*:

$$\tilde{A}_i(p) = L[A_i(t)] = \frac{1}{Lp + R + \frac{1}{Cp}}. \quad (6.1.30')$$

Справедливо соотношение

$$\tilde{Z}_i(p) \tilde{A}_i(p) = 1. \quad (6.1.31)$$

Аналогично соотношения (6.1.25) приводят к равенствам

$$\tilde{\tilde{E}}(p) = \tilde{Z}_i(p) \tilde{\tilde{i}}(p), \quad (6.1.32)$$

где

$$\tilde{\tilde{i}}(p) = \tilde{A}_i(p) \tilde{\tilde{E}}(p).$$

Запишем соотношения

$$\tilde{Z}_q(p) = p\tilde{Z}_i(p), \quad \tilde{A}_i(p) = p\tilde{A}_q(p). \quad (6.1.33)$$

Замечаем, что соотношение (6.1.32) формально аналогично закону Ома (6.1.5).  $Z_i(p)$  обозначается через  $Z(p)$  и называется *операторным полным сопротивлением цепи*, а  $A_i(p)$  обозначается через  $A(p)$  и называется *операторной проводимостью цепи*. Мы не уточняем, что они соответствуют силе тока  $\bar{i}(t)$ .

Активным операторным полным сопротивлением, соответствующим активному сопротивлению  $R$ , будет

$$\tilde{Z}_R(p) = R, \quad (6.1.34)$$

что и оправдывает аналогию между соотношением (6.1.32) и законом Ома. Аналогично индуктивное сопро-

тивление  $L$  приводит к *индуктивному операторному полному сопротивлению*

$$\tilde{Z}_L(p) = Lp, \quad (6.1.34')$$

а емкостное сопротивление  $C$  приводит к *емкостному операторному полному сопротивлению*

$$\tilde{Z}_C(p) = \frac{1}{Cp}. \quad (6.1.34'')$$

Операторным полным сопротивлением цепи будет

$$\tilde{Z}(p) = \tilde{Z}_R(p) + \tilde{Z}_L(p) + \tilde{Z}_C(p). \quad (6.1.35)$$

Учитывая соотношение (6.1.32), можно написать

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{E}}_R(p) &= \tilde{Z}_R(p) \tilde{\tilde{i}}(p), \\ \tilde{\tilde{E}}_L(p) &= \tilde{Z}_L(p) \tilde{\tilde{i}}(p), \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

$$\tilde{\tilde{E}}_C(p) = \tilde{Z}_C(p) \tilde{\tilde{i}}(p)$$

и

$$\tilde{\tilde{E}}(p) = \tilde{\tilde{E}}_R(p) + \tilde{\tilde{E}}_L(p) + \tilde{\tilde{E}}_C(p). \quad (6.1.37)$$

Таким образом, выявлено значение каждого члена изображения по Лапласу (6.1.30).

Пусть  $\tilde{Z}_1(p)$ ,  $\tilde{Z}_2(p)$  — операторные полные сопротивления двух последовательно соединенных элементов. Можно написать

$$\tilde{\tilde{E}}_1(p) = \tilde{Z}_1(p) \tilde{\tilde{i}}(p), \quad \tilde{\tilde{E}}_2(p) = \tilde{Z}_2(p) \tilde{\tilde{i}}(p).$$

Но

$$\bar{E}(t) = \bar{E}_1(t) + \bar{E}_2(t).$$

Таким образом,

$$\tilde{\tilde{E}}(p) = \tilde{\tilde{E}}_1(p) + \tilde{\tilde{E}}_2(p) = [\tilde{Z}_1(p) + \tilde{Z}_2(p)] \tilde{\tilde{i}}(p).$$

Следовательно, выражение для операторного полного сопротивления двух элементов, соединенных последовательно, будет иметь вид

$$\tilde{Z}(p) = \tilde{Z}_1(p) + \tilde{Z}_2(p). \quad (6.1.38)$$



Аналогично операторное полное сопротивление двух элементов, соединенных параллельно, определяется соотношением

$$\frac{1}{\tilde{Z}(p)} = \frac{1}{\tilde{Z}_1(p)} + \frac{1}{\tilde{Z}_2(p)}, \quad (6.1.39)$$

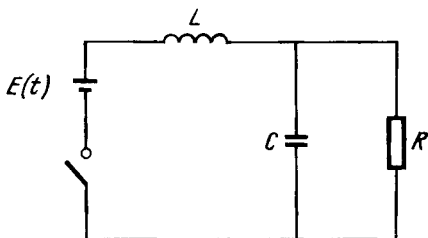
которое соответствует соотношению

$$\tilde{A}(p) = \tilde{A}_1(p) + \tilde{A}_2(p), \quad (6.1.39')$$

действительному для операторной проводимости.

### 6.1.2.3. Примеры

Рассмотрим, например, цепь, представленную на фиг. 6.3. Заметим, что сопротивление  $R$  и емкость  $C$  со-



Фиг. 6.3.

единены параллельно. Таким образом, соответствующее операторное полное сопротивление определяется из соотношения

$$\frac{1}{\tilde{Z}_1(p)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = Cp + \frac{1}{R},$$

откуда

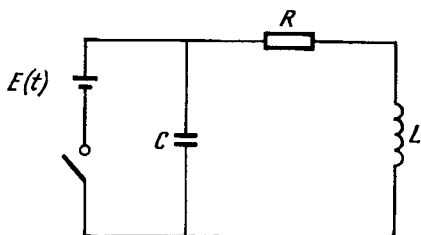
$$\tilde{Z}_1(p) = \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}}. \quad (6.1.40)$$

Сопротивление и емкость соединены последовательно с индуктивностью  $L$ , для которой

$$\tilde{Z}_2(p) = Lp.$$

Следовательно, операторным полным сопротивлением рассматриваемой цепи будет

$$\tilde{Z}(p) = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{RCp + 1}. \quad (6.1.41)$$



Фиг. 6.4.

Рассмотрим по аналогии и цепь на фиг. 6.4. В этом случае сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  соединены последовательно и параллельно к ним присоединена емкость  $C$ . Можно написать

$$\frac{1}{\tilde{Z}(p)} = \frac{1}{\frac{1}{Cp}} + \frac{1}{R + Lp} = Cp + \frac{1}{R + Lp},$$

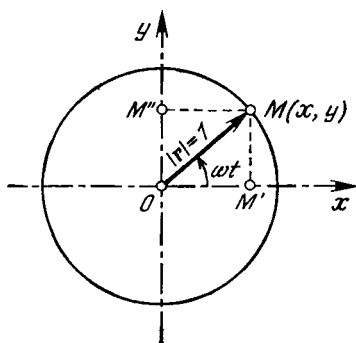
откуда следует

$$\tilde{Z}(p) = \frac{1}{Cp + \frac{1}{R + Lp}} = \frac{Lp + R}{LCp^2 + RCp + 1}. \quad (6.1.42)$$

### 6.1.3. Отрицательные частоты

#### 6.1.3.1. Общие результаты

При изучении электрических величин используются периодические функции  $\cos(\omega t - \varphi)$  и  $\sin(\omega t - \varphi)$ . Таким образом, если рассматривать замкнутую цепь, состоящую из сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$ , к которой приложена э. д. с.  $E(t) = E_0 \sin \omega t$ , то сила тока будет иметь вид  $i(t) = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$ , где постоянные  $i_0$  и  $\varphi$  зависят от



Фиг. 6.5.

сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$ , круговой частоты  $\omega$  и э. д. с.  $E_0$ .

В дальнейшем будем пользоваться комплексными функциями. Каждой действительной функции действительной переменной будем ставить в соответствие комплексную функцию действительной переменной. Рассмотрим функцию

$$x(t) = \cos \omega t. \quad (6.1.43)$$

С кинематической точки зрения эта функция описывает движение материальной точки вдоль оси  $Ox$  с периодом  $T = 2\pi/\omega$  и частотой  $f = 1/T = \omega/2\pi$ .

Пусть точка  $M(x, y)$  совершает равномерное круговое движение по единичной окружности в положительном направлении (против часовой стрелки) с угловой скоростью  $\omega$  (фиг. 6.5). Проекции  $M'$  и  $M''$  точки  $M$  на

оси координат совершают колебательные движения с той же частотой  $f = \omega/2\pi$ .

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$x(t) = \cos \omega t, \quad y(t) = \sin \omega t. \quad (6.1.44)$$

Предполагается, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) точка находилась на оси  $Ox$  (разность фаз  $\varphi$  равна нулю).

Если вместо плоскости  $Oxy$  рассматривать комплексную плоскость, то единичному вектору  $\vec{OM} = \mathbf{r}$  будет соответствовать комплексная функция действительной переменной:

$$f(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}. \quad (6.1.45)$$

Таким образом, действительная функция  $\cos \omega t$  будет выражаться через две комплексные функции следующим образом:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (6.1.45')$$

а действительная функция  $\sin \omega t$  будет иметь вид

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \quad (6.1.45'')$$

где  $i$  — мнимая единица.

Таким образом, комплексной функции  $e^{-i\omega t}$  соответствует равномерное круговое движение единичного вектора по часовой стрелке с фазой  $-\omega t$ , что приводит к отрицательным частотам  $f = -\omega/2\pi$ . Следовательно, функцию  $\cos \omega t$ , например, можно получить сложением равномерных вращений с одинаковой угловой скоростью, но в противоположных направлениях, т. е. сложением двух векторов. Движение вектора против часовой стрелки порождает положительную частоту, а движение вектора по часовой стрелке — отрицательную частоту.

Понятие отрицательной частоты, формально введенное выше, играет важную роль в различных задачах электротехники. Мы введем это понятие и другим путем.

Пусть  $f(t)$  — функция, удовлетворяющая условиям Дирихле (периодическая и кусочно непрерывная, имеющая конечное число точек разрыва на каждом интерва-

ле). В таком случае ее можно представить в виде ряда Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (6.1.46)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \quad (6.1.46')$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt, \quad n \in N_0, \quad (6.1.46'')$$

а  $T$  — период этой функции. Заметим, что круговая частота  $\omega = 2\pi/T$  и частота  $f = \omega/2\pi$  являются положительными величинами.

С помощью формул Эйлера (6.1.45) и (6.1.45') этот ряд Фурье может быть представлен в комплексном виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (6.1.47)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n \in Z. \quad (6.1.47')$$

Заметим, что и в этом комплексном представлении ряда Фурье число  $n$  принимает отрицательные значения, что приводит к существованию отрицательных частот.

### 6.1.3.2. Спектр частот обобщенной функции

Исследования спектра частот обобщенной функции  $f(t)$  показали необходимость введения отрицательных частот. Введем образ Фурье  $F(s; \omega)$  обобщенной функции с помощью соотношения

$$(F(s; \omega), \tilde{\varphi}(s)) = 2\pi (f(t), \varphi(t)), \quad (6.1.48)$$

где  $\varphi(t) \in K(R)$  — основная функция,  $\tilde{\varphi}(s) = F[\varphi(t)]$ ,

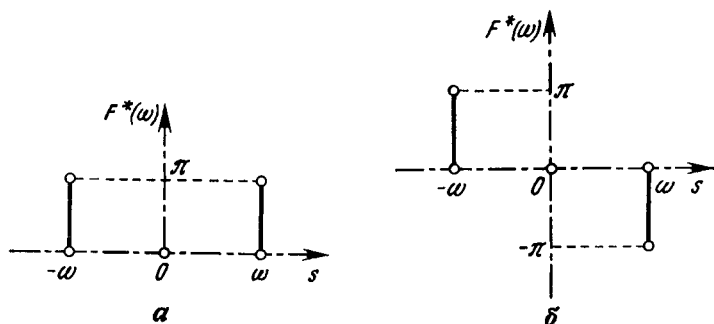
$F(s; \omega) = F[f(t)]$ . Переменная  $\omega$  предполагается действительной.

Спектр частот обобщенной функции  $f(t)$  описывается комплексным сопряжением  $F^*(\omega) = \overline{F}(s; \omega)$  фурье-образа  $F(s; \omega)$ . Таким образом, если

$$F(s; \omega) = a(s; \omega) + ib(s; \omega), \quad (6.1.49)$$

то спектр частот обобщенной функции  $f(t)$  имеет вид

$$F^*(\omega) = \overline{F}(s; \omega) = a(s; \omega) - ib(s; \omega). \quad (6.1.49')$$



Фиг. 6.6.

Исследуем теперь комплексный спектр функции  $\cos \omega t$ . Эта функция не является абсолютно интегрируемой и поэтому не имеет преобразования Фурье в классическом смысле; преобразование Фурье функции  $\cos \omega t$  рассмотрим в пространстве обобщенных функций. Учитывая соотношение (1.6.31'), можно написать

$$F^*(\omega) = \overline{F}[\cos \omega t] = \pi [\delta(s - \omega) + \delta(s + \omega)]. \quad (6.1.50)$$

Это выражение показывает, что комплексный спектр функции  $\cos \omega t$  является действительным и состоит из двух линий, одна из которых проходит через точку  $\omega$ , а другая — через точку  $-\omega$ . Обе спектральные линии имеют амплитуду  $\pi$  (фиг. 6.6, а).

Для спектра частот функции  $\sin \omega t$  получим

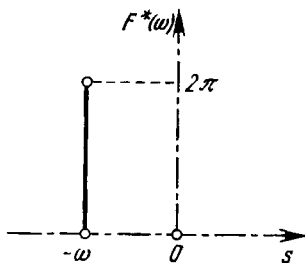
$$F^*(\omega) = \overline{F}[\sin \omega t] = -i\pi [\delta(s - \omega) - \delta(s + \omega)], \quad (6.1.50')$$

где использована формула (1.6.31). Отсюда следует, что соответствующий спектр частот является мнимым и состоит тоже из двух линий, одна из которых проходит через точку  $\omega$  и имеет амплитуду  $-\pi$ , а другая — через точку  $-\omega$  и имеет амплитуду  $\pi$  (фиг. 6.6, б).

Аналогично для спектра функции  $e^{i\omega t}$  имеем

$$F^*(\omega) = \bar{F}[e^{i\omega t}] = 2\pi\delta(s + \omega). \quad (6.1.50'')$$

Этот спектр является действительным и образован одной линией, проходящей через точку  $-\omega$  и имеющей амплитуду  $2\pi$  (фиг. 6.7).



Фиг. 6.7.

## 6.2. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 6.2.1. Задача Коши для цепи $RLC$

#### 6.2.1.1. Общие результаты

Цепь  $RLC$  состоит из активного сопротивления  $R$ , катушки индуктивности  $L$  и конденсатора емкости  $C$ , соединенных последовательно с генератором, имеющим э. д. с.  $E(t)$  (фиг. 6.2). Эта э. д. с. начинает действовать при  $t=0$ , т. е. когда замыкается электрическая цепь. При  $t>0$  в цепи устанавливается ток силой  $i(t)$  и зарядом  $q(t)$ .

Принимая за неизвестную функцию заряд  $q(t)$  и учитывая результаты из разд. 6.1.1.2, можно записать сле-

дующее дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L \frac{\tilde{d}^2}{dt^2} q(t) + R \frac{\tilde{d}}{dt} q(t) + \frac{1}{C} q(t) = E(t), \quad t > 0, \quad (6.2.1)$$

которое соответствует второму закону Кирхгофа.

Задача Коши состоит в определении при  $t > 0$  функции  $q(t)$  из уравнения (6.2.1), удовлетворяющей начальным условиям

$$q(t)|_{t=0} = q_0, \quad \left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=0} = i_0, \quad (6.2.2)$$

где  $q_0$  и  $i_0$  — соответственно заряд и сила тока при  $t=0$ . Если ввести функции

$$\bar{q}(t) = \theta(t) q(t), \quad \bar{E}(t) = \theta(t) E(t) \quad (6.2.3)$$

и соответствующие обобщенные функции, полученные нулевым продолжением функций  $q(t)$  и  $E(t)$  при  $t < 0$ , то можно написать

$$\frac{d}{dt} \bar{q}(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \bar{q}(t) + q_0 \delta(t), \quad (6.2.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{q}(t) = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2} \bar{q}(t) + i_0 \delta(t) + q_0 \delta'(t),$$

где учтены начальные условия (6.2.2). В этом случае дифференциальное уравнение (6.2.1) записывается в обобщенных функциях и с учетом начальных условий (6.2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} L \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}(t) + R \frac{d}{dt} \bar{q}(t) + \frac{1}{C} \bar{q}(t) &= \\ &= \bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0) \delta(t) + Lq_0 \delta'(t). \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

С помощью дифференциального оператора  $D_q$ , определенного соотношением (6.1.11), можно записать уравнение (6.2.5) в виде уравнения в свертках из  $K'_+$ :

$$D_q \delta(t) * \bar{q}(t) = F(t), \quad (6.2.6)$$



где введена обобщенная функция

$$F(t) = \bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0)\delta(t) + Lq_0\delta'(t). \quad (6.2.6')$$

Фундаментальное решение  $\mathcal{E}(t)$  этого уравнения удовлетворяет условиям (6.1.13). В таком случае решение уравнения (6.2.6) с учетом (6.2.6') может быть записано в виде

$$\bar{q}(t) = \mathcal{E}(t) * F(t), \quad (6.2.7)$$

где свертка функций осуществляется по переменной  $t$ .

### 6.2.1.2. Случай интегрируемости

Фундаментальное решение удовлетворяет уравнению

$$\left[ L\delta''(t) + R\delta'(t) + \frac{1}{C}\delta(t) \right] * \mathcal{E}(t) = \delta(t). \quad (6.2.8)$$

Применяя преобразование Лапласа, получаем

$$\left( Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) L[\mathcal{E}(t)] = 1,$$

откуда

$$L[\mathcal{E}(t)] = \frac{1}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{1}{L(p-p_1)(p-p_2)}, \quad (6.2.9)$$

где введены обозначения  $p_1 = -\alpha + \beta$ ,  $p_2 = -\alpha - \beta$ ,  $\alpha = R/2L$  и  $\beta = (1/2L)\sqrt{R^2 - (4L/C)}$ .

Рассмотрим три случая интегрируемости.

а) Если

$$R^2 > \frac{4L}{C}, \quad (6.2.10)$$

то  $\beta^2 > 0$ , а  $\beta$  — действительная величина. Изображение по Лапласу (6.2.9) принимает вид

$$L[\mathcal{E}(t)] = \frac{1}{2L\beta} \left( \frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right),$$

откуда

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\theta(t)}{2L\beta} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{1}{L\beta} \theta(t) e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t. \quad (6.2.11)$$

Для решения (6.2.7) уравнения (6.2.6) с учетом формулы (6.2.6') получается выражение

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L\beta} \theta(t) e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t * [\bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0) \delta(t) + Lq_0 \delta'(t)],$$

откуда

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L\beta} \theta(t) e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t * \bar{E}(t) + \frac{1}{2L\beta} \theta(t) e^{-\alpha t} [(2Li_0 + Rq_0) \operatorname{sh} \beta t + 2L\beta q_0 \operatorname{ch} \beta t]. \quad (6.2.12)$$

Если  $\bar{E}(t)$  — локально интегрируемая функция, то можно написать

$$q(t) = \frac{1}{L\beta} \int_0^t e^{-\alpha \tau} E(t - \tau) \operatorname{sh} \beta \tau d\tau + \frac{1}{2L\beta} e^{-\alpha t} [(2Li_0 + Rq_0) \operatorname{sh} \beta t + 2L\beta q_0 \operatorname{ch} \beta t], \quad t \geq 0. \quad (6.2.12')$$

б) Если

$$R^2 < \frac{4L}{C}, \quad (6.2.13)$$

то имеем  $\beta^2 < 0$ , а  $\beta$  — мнимая величина. Если ввести обозначение

$$\beta = i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}, \quad (6.2.14)$$

то получим фундаментальное решение

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{L\omega} \theta(t) e^{-\alpha t} \sin \omega t. \quad (6.2.15)$$

В этом случае решение задачи Коши имеет вид

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L\omega} \theta(t) e^{-\alpha t} \sin \omega t * \bar{E}(t) + \frac{1}{2L\omega} \theta(t) e^{-\alpha t} [(2Li_0 + Rq_0) \sin \omega t + 2L\omega q_0 \cos \omega t]. \quad (6.2.16)$$

Если  $\bar{E}(t)$  — локально интегрируемая функция, то можно написать

$$q(t) = \frac{1}{L\omega} \int_0^t e^{-\alpha\tau} E(t-\tau) \sin \omega\tau d\tau + \\ + \frac{1}{2L\omega} e^{-\alpha t} [(2Li_0 + Rq_0) \sin \omega t + 2L\omega q_0 \cos \omega t], \quad t \geq 0. \quad (6.2.16')$$

Этот случай соответствует *колебательному контуру*.

в) Если

$$R^2 = \frac{4L}{C}, \quad (6.2.17)$$

то  $\beta=0$ , так что

$$L[\mathcal{G}(t)] = \frac{1}{L(p+\alpha)^2}. \quad (6.2.18)$$

Фундаментальное решение имеет вид

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{L} t\theta(t) e^{-\alpha t}. \quad (6.2.19)$$

Для решения краевой задачи имеем следующее выражение:

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L} t\theta(t) e^{-\alpha t} * \bar{E}(t) + \\ + \frac{1}{2L} \theta(t) e^{-\alpha t} [2Lq_0 + (2Li_0 + Rq_0)t]. \quad (6.2.20)$$

Если  $\bar{E}(t)$  — локально интегрируемая функция, то получим

$$q(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \tau e^{-\alpha\tau} E(t-\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2L} e^{-\alpha t} [2Lq_0 + (2Li_0 + Rq_0)t], \quad t \geq 0. \quad (6.2.20')$$

### 6.2.1.3. Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда начальные условия однородные (равны нулю):  $q_0 = i_0 = 0$ . Будем считать,

что э. д. с. при  $t > 0$  постоянна, т. е.

$$\bar{E}(t) = E_0 \theta(t). \quad (6.2.21)$$

Рассмотрим все три случая интегрируемости.

а) Если удовлетворяется условие (6.2.10), то, используя соотношение (6.2.12'), получим

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{E_0}{L\beta} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \operatorname{sh} \beta\tau d\tau = \\ &= \frac{E_0}{2L\beta} \left[ \frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta} - \frac{e^{-(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta} - \frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{E_0}{L\beta(\alpha^2 - \beta^2)} [e^{-\alpha t} (\alpha \operatorname{sh} \beta t + \beta \operatorname{ch} \beta t) - \beta] = \\ &= -\frac{CE_0}{\beta} [e^{-\alpha t} (\alpha \operatorname{sh} \beta t + \beta \operatorname{ch} \beta t) - \beta], \quad t \geq 0. \quad (6.2.22) \end{aligned}$$

С учетом соотношения (6.1.1) имеем

$$i(t) = \frac{E_0}{L\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t, \quad t \geq 0. \quad (6.2.22')$$

б) Если удовлетворяется условие (6.2.13), то с помощью формулы (6.2.16') получим

$$q(t) = \frac{E_0}{L\omega} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau d\tau.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{E_0}{L\omega(\alpha^2 + \omega^2)} [e^{-\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) - \omega] = \\ &= -\frac{CE_0}{\omega} [e^{-\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) - \omega], \quad t \geq 0. \quad (6.2.23) \end{aligned}$$

Можно также написать

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad t \geq 0. \quad (6.2.23')$$

в) Если удовлетворяется условие (6.2.17) то, используя формулу (6.2.20'), получаем

$$q(t) = \frac{E_0}{L} \int_0^t \tau e^{-a\tau} d\tau,$$

откуда

$$q(t) = \frac{E_0}{aL} [1 - (1 + at) e^{-at}]. \quad (6.2.24)$$

Аналогично будем иметь

$$i(t) = \frac{\sqrt{E_0}}{L} t e^{-at}. \quad (6.2.24')$$

## 6.2.2. Установившиеся процессы.

### Переходные процессы

#### 6.2.2.1. Переходные процессы

Процессы, рассмотренные для цепей с сосредоточенными параметрами  $R$ ,  $L$  и  $C$  (параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$  постоянные), являются, вообще говоря, *установившимися* процессами. Такие процессы могут иметь место, например, когда э. д. с. прикладывается в начальный момент и затем поддерживается постоянной во времени [вида (6.2.21)]. При переходе от одного установившегося режима к другому возникает некоторый *переходный процесс*. Такой процесс имеет место, например, при замыкании и размыкании цепи, а также при изменении параметров цепи.

Рассмотрим сначала цепь  $RLC$  под действием импульсного напряжения. Предположим, что начальные условия являются однородными ( $q_0 = i_0 = 0$ ), т. е. ток в цепи отсутствует. При таких условиях в момент  $t=0$  приложим к цепи импульсное напряжение  $E_0 \delta(t)$ . Дифференциальное уравнение (6.2.5) примет вид

$$L \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}(t) + R \frac{d}{dt} \bar{q}(t) + \frac{1}{C} \bar{q}(t) = E_0 \delta(t). \quad (6.2.25)$$

Оно может быть записано как уравнение в свертках в  $K'_+$ :

$$\left[ L\delta''(t) + R\delta'(t) + \frac{1}{C}\delta(t) \right] * \bar{q}(t) = E_0\delta(t). \quad (6.2.25')$$

Следовательно, решением поставленной задачи является фундаментальное решение уравнения (6.2.25'), умноженное на  $E_0$ .

Рассмотрим исследованные три случая интегрируемости.

а) Если удовлетворяется условие (6.2.10), то имеем

$$\bar{q}(t) = \frac{E_0}{L\beta} \theta(t) e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t, \quad (6.2.26)$$

откуда

$$q(t) = \frac{E_0}{L\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t, \quad t \geq 0, \quad (6.2.26')$$

где учтено, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} q(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0. \quad (6.2.26'')$$

Используя соотношение (6.1.1), получим

$$i(t) = \frac{E_0}{L\beta} e^{-\alpha t} (\beta \operatorname{ch} \beta t - \alpha \operatorname{sh} \beta t), \quad t \geq 0. \quad (6.2.27)$$

В пределе можно написать

$$\lim_{t \rightarrow +0} i(t) = \frac{E_0}{L}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0. \quad (6.2.27')$$

Следовательно, если приложить к цепи  $RLC$ , по которой не течет ток, импульсное напряжение  $E_0\delta(t)$ , то мгновенно возникнет ток силой  $E_0/L$ . Этот результат хорошо подтверждается экспериментальными наблюдениями.

б) Если удовлетворяется условие (6.2.13), то можно написать

$$\bar{q}(t) = \frac{E_0}{L\omega} \theta(t) e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (6.2.28)$$

откуда следует

$$q(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad t \geq 0. \quad (6.2.28')$$

В пределе будем иметь соотношения (6.2.26'').

Дифференцированием получим

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-at} (\omega \cos \omega t - a \sin \omega t), \quad t \geq 0, \quad (6.2.29)$$

а в пределе будем иметь равенства (6.2.27').

в) Если справедливо соотношение (6.2.17), то

$$\bar{q}(t) = \frac{E_0}{L} t \theta(t) e^{-at}, \quad (6.2.30)$$

откуда

$$q(t) = \frac{E_0}{L} t e^{-at}, \quad t \geq 0. \quad (6.2.30')$$

В пределе получатся соотношения (6.2.26''). Отсюда следует, что

$$i(t) = \frac{E_0}{L} (1 - at) e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad (6.2.31)$$

а в пределе имеют место соотношения (6.2.27').

Заметим, что и в случаях б) и в) можно сделать выводы относительно мгновенного тока, возникающего под действием импульсного напряжения, аналогичные сделанным в случае а).

### 6.2.2.2. Колебательный контур

Ниже будет рассматриваться разряд конденсатора через катушку индуктивности  $L$  и сопротивление  $R$ . Благодаря разности потенциалов на обкладках конденсатора при отсутствии катушки ( $L=0$ ) через провод, связывающий обкладки, будет протекать ток до тех пор, пока потенциалы обкладок не станут равными. Но если в цепи есть и катушка, то, когда разность потенциалов обкладок станет нулевой, э. д. с. индукции будет поддерживать в цепи убывающий ток. В результате произойдет перезарядка конденсатора. Возникнет ток противоположного направления, и в дальнейшем перезарядка конденсатора будет происходить периодически; в цепи возникнут колебания.

Часть энергии тока будет тратиться на преодоление сопротивления  $R$ , и колебания со временем будут затухать. При  $R=0$  в цепи *возникнут незатухающие колебания*.

Предположим, что э. д. с. в цепи равна нулю ( $E(t) = 0$ ), а заряженный напряжением  $U$  конденсатор разряжается в начальный момент времени. Таким образом, начальные условия имеют вид

$$q_0 = CU, \quad i_0 = 0. \quad (6.2.32)$$

Используем результаты, полученные при рассмотрении случаев интегрируемости.

а) Если удовлетворяется условие (6.2.10), то с помощью формулы (6.2.12') можно написать

$$q(t) = \frac{CU}{\beta} e^{-\alpha t} (\alpha \operatorname{sh} \beta t + \beta \operatorname{ch} \beta t), \quad t \geq 0. \quad (6.2.33)$$

В этом случае имеет место *апериодический разряд* конденсатора, при котором в цепи не возникают электрические колебания.

Дифференцируя полученное выражение по  $t$ , получим

$$i(t) = \frac{CU}{\beta} (\beta^2 - \alpha^2) e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t = -\frac{U}{L\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t, \quad t \geq 0. \quad (6.2.34)$$

В пределе можно написать

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0. \quad (6.2.35)$$

б) Если удовлетворяется условие (6.2.13), то получим

$$q(t) = \frac{CU}{\omega} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t), \quad t \geq 0. \quad (6.2.36)$$

В этом случае происходит *колебательный разряд* конденсатора. Колебательный процесс разряда происходит, пока выполняется условие (6.2.13).

Заметим, что колебания заряда  $q(t)$  затухают. В самом деле, амплитуда колебаний

$$\frac{CU}{\omega} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} = \frac{U}{L\omega} e^{-\alpha t} \quad (6.2.37)$$



стремится к нулю при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Затухание тем меньше, чем меньше сопротивление  $R$ . При  $R=0$  получаются незатухающие колебания. Этот случай соответствует *колебательному контуру*. Для силы тока имеем выражение

$$i(t) = -\frac{CU}{\omega} (\alpha^2 + \omega^2) e^{-\alpha t} \sin \omega t = -\frac{U}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad t \geq 0, \quad (6.2.38)$$

а в пределе будут выполняться условия (6.2.35).

в) Если выполняется условие (6.2.17), то получим *предельные апериодические колебания*. В этом случае заряд имеет вид

$$q(t) = CU(1 + \alpha t) e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0; \quad (6.2.39)$$

сила тока

$$i(t) = -CU\alpha^2 t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (6.2.40)$$

и в пределе получают соотношения (6.2.35).

При наличии в цепи периодической э. д. с.  $E(t)$ , которая может быть разложена в ряд Фурье, имеют место некоторые специфические явления. Например, в случае б) наблюдается явление резонанса, которое соответствует некоторой периодической возмущающей силе, круговая частота колебаний которой стремится к собственной круговой частоте  $\omega$  контура.

### 6.2.2.3. Связанный колебательный контур

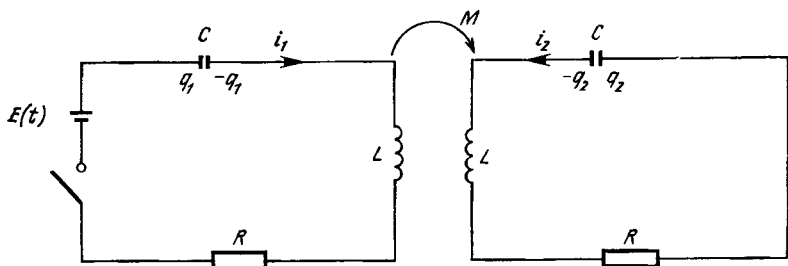
Связанный колебательный контур состоит из двух цепей  $RLC$ , соединенных индуктивно, для которых взаимная индуктивность равна  $M$ . Предположим, что рассматриваемые цепи одинаковы и состоят из сопротивления  $R$ , собственной индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (фиг. 6.8).

Пусть  $E(t)$  — э. д. с., которая начинает действовать при замыкании цепи в начальный момент  $t=0$ . Начальные условия, таким образом, будут однородными (нулевыми). Ставится задача определения зарядов  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  на обкладках обоих конденсаторов и токов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ .

Применяя второй закон Кирхгофа к обеим цепям, получим систему уравнений

$$R\bar{i}_1(t) + L \frac{d\bar{i}_1(t)}{dt} + M \frac{d\bar{i}_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \bar{q}_1(t) = \bar{E}(t), \quad (6.2.41)$$

$$R\bar{i}_2(t) + L \frac{d\bar{i}_2(t)}{dt} + M \frac{d\bar{i}_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} \bar{q}_2(t) = 0.$$



Фиг. 6.8.

Здесь обобщенные функции соответствуют искомым функциям и заданным величинам, продолженным нулевыми значениями влево. Если начальные условия не являются нулевыми, они будут содержаться в выражении для функции  $\bar{E}(t)$ , которая будет известной обобщенной функцией. Замечая, что

$$\bar{i}_1(t) = \frac{d\bar{q}_1(t)}{dt}, \quad \bar{i}_2(t) = \frac{d\bar{q}_2(t)}{dt}, \quad (6.2.42)$$

получим уравнения

$$L \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}_1(t) + M \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}_2(t) + R \frac{d}{dt} \bar{q}_1(t) + \frac{1}{C} \bar{q}_1(t) = \bar{E}(t), \quad (6.2.41')$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}_1(t) + L \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}_2(t) + R \frac{d}{dt} \bar{q}_2(t) + \frac{1}{C} \bar{q}_2(t) = 0.$$

Применяя преобразование Лапласа, будем иметь

$$\left( Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) \tilde{\bar{q}}_1(p) + Mp^2 \tilde{\bar{q}}_2(p) = \tilde{\bar{E}}(p),$$

$$Mp^2\tilde{q}_1(p) + \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)\tilde{q}_2(p) = 0,$$

где  $p$  — новая комплексная переменная. Отсюда следует

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1(p) &= -\frac{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}{M^2p^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2}\tilde{E}(p), \\ \tilde{q}_2(p) &= \frac{Mp^2}{Mp^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2}\tilde{E}(p).\end{aligned}\quad (6.2.43)$$

Корнями знаменателей являются величины

$$p_{1,2} = -\alpha_1 \pm i\omega_1, \quad p_{3,4} = -\alpha_2 \pm i\omega_2, \quad (6.2.44)$$

где

$$\alpha_{1,2} = \frac{R}{2(L \pm M)}, \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{2(L \pm M)} \sqrt{\frac{4(L \pm M)}{C} - R^2}.$$

В предположении, что удовлетворяется условие

$$R^2 < \frac{4(L \pm M)}{C}, \quad (6.2.45)$$

были получены комплексно сопряженные значения для  $p_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ). В этом случае цепь становится *колебательным контуром*. Вообще необходимо, чтобы выполнялось условие

$$R^2 < \frac{4(L - M)}{C}, \quad (6.2.45')$$

потому что постоянные  $R$ ,  $L$ ,  $M$  и  $C$  положительные. Заметим, что еще *необходимо*, чтобы  $L > M$ . При отсутствии сопротивления  $R$  ( $R=0$ ) это условие становится и *достаточным*. Можно написать

$$\frac{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}{Mp^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(L+M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}} + \frac{1}{(L-M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}} \right], \\
&\quad \frac{Mp^2}{Mp^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(L+M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}} - \frac{1}{(L-M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}} \right].
\end{aligned}$$

Используя результаты из разд. 6.2.1.2. (случай б) и учитывая формулу (1.5.84), получаем

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1(t) = \bar{E}(t) * \frac{1}{2} \theta(t) &\left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t + \right. \\
&\left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right], \tag{6.2.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_2(t) = \bar{E}(t) * \frac{1}{2} \theta(t) &\left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t - \right. \\
&\left. - \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right].
\end{aligned}$$

Для сил токов  $\bar{i}_1(t)$  и  $\bar{i}_2(t)$  имеем

$$\begin{aligned}
\bar{i}_1(t) &= \frac{d\bar{E}(t)}{dt} * \frac{1}{2} \theta(t) \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right] = \\
&= \bar{E}(t) * \frac{1}{2} \theta(t) \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} (\omega_1 \cos \omega_1 t - \alpha_1 \sin \omega_1 t) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} (\omega_2 \cos \omega_2 t - \alpha_2 \sin \omega_2 t) \right], \tag{6.2.47}
\end{aligned}$$

$$\bar{i}_2(t) = \frac{d\bar{E}(t)}{dt} * \frac{1}{2} \theta(t) \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \Big] = \\
 = & \bar{E}(t) * \frac{1}{2} \theta(t) \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} (\omega_1 \cos \omega_1 t - \alpha_1 \sin \omega_1 t) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} (\omega_2 \cos \omega_2 t - \alpha_2 \sin \omega_2 t) \right].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда в начальный момент прикладывается э. д. с.  $E_0$ , которая затем поддерживается постоянной, т. е. имеет вид (6.2.21). В этом случае получаем

$$\begin{aligned}
 q_1(t) = & - \frac{1}{2} CE_0 \left[ \frac{1}{\omega_1} e^{-\omega_1 t} (\omega_1 \cos \omega_1 t + \alpha_1 \sin \omega_1 t) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\omega_2} e^{-\omega_2 t} (\omega_2 \cos \omega_2 t + \alpha_2 \sin \omega_2 t) - 2 \right], \quad t \geq 0,
 \end{aligned} \tag{6.2.48}$$

$$\begin{aligned}
 q_2(t) = & - \frac{1}{2} CE_0 \left[ \frac{1}{\omega_1} e^{-\omega_1 t} (\omega_1 \cos \omega_1 t + \alpha_1 \sin \omega_1 t) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\omega_2} e^{-\omega_2 t} (\omega_2 \cos \omega_2 t + \alpha_2 \sin \omega_2 t) \right], \quad t \geq 0,
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 i_1(t) = & \frac{1}{2} E_0 \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right], \quad t \geq 0,
 \end{aligned} \tag{6.2.49}$$

$$\begin{aligned}
 i_2(t) = & \frac{1}{2} E_0 \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right], \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

В пределе можно написать

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = CE_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = 0. \tag{6.2.50}$$

Этот результат объясняется тем, что при  $t > 0$  процесс является установившимся.

В случае импульсной в начальный момент времени э. д. с. вида

$$\bar{E}(t) = E_0 \delta(t) \quad (6.2.51)$$

имеет место переходный процесс, для которого

$$q_1(t) = \frac{1}{2} E_0 \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t + \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right], \quad t \geq 0, \quad (6.2.52)$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2} E_0 \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t - \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right], \quad t \geq 0,$$

и

$$i_1(t) = \frac{1}{2} E_0 \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} (\omega_1 \cos \omega_1 t - \alpha_1 \sin \omega_1 t) + \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} (\omega_2 \cos \omega_2 t - \alpha_2 \sin \omega_2 t) \right], \quad t \geq 0, \quad (6.2.53)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{2} E_0 \left[ \frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} (\omega_1 \cos \omega_1 t - \alpha_1 \sin \omega_1 t) - \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} (\omega_2 \cos \omega_2 t - \alpha_2 \sin \omega_2 t) \right], \quad t \geq 0.$$

В пределе будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = 0. \quad (6.2.54)$$

### 6.3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ЛИНЕЙНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

#### 6.3.1. Четырехполюсники

##### 6.3.1.1. Общие положения

Четырехполюсником называется электрическая система, имеющая два входных (1 и 1') и два выходных (2 и 2') зажима (фиг. 6.9). На фиг. 6.9 представлена блок-схема цепи, состоящей из сопротивления, индуктивности и емкости, которые характеризуют *структуру цепи* (обоб-



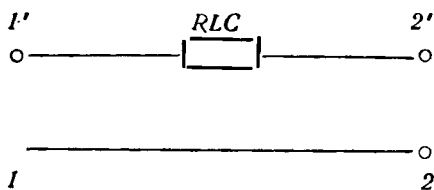
Фиг. 6.9.

ценную функцию веса). Обозначим через  $i_1(t)$  и  $E_1(t)$  соответственно силу тока и э. д. с. на входе (зажимы 1 и 1'); эти *входные величины* являются *возбудителями рассматриваемой электрической системы*. Силу тока и э. д. с. на выходе (зажимы 2 и 2') обозначим через  $i_2(t)$  и  $E_2(t)$ ; эти величины представляют *отклик рассматриваемой электрической системы*.

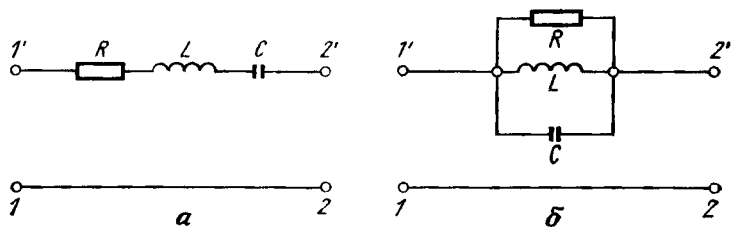
При исследовании электрической системы ставится задача нахождения зависимости между входными величинами и величинами на выходе с учетом структуры системы. Если ищется отклик системы на заданное возбуждение, то говорят, что проводится *анализ системы*. Если задан отклик системы и ищется возбуждение и структура системы, соответствующие этому отклику, то говорят, что проводится *синтез системы*. Для исследования этих задач широко используются законы Кирхгофа.

В качестве примеров четырехполюсников отметим *фильтры*, которые пропускают сигналы определенной частоты, блокируя сигналы других частот.

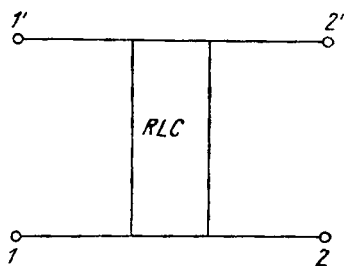
При исследовании конкретной структуры четырехполюсников с *пассивными элементами* (для которых коэф-



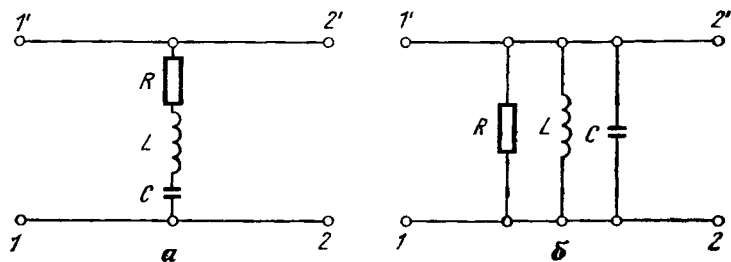
Фиг. 6.10.



Фиг. 6.11.



Фиг. 6.12.



Фиг. 6.13



фициенты  $R$ ,  $L$  и  $C$  постоянны), будем рассматривать элементарные четырехполюсники четырех типов, разделенные на две группы в зависимости от того, как соединены сопротивление, катушка и конденсатор: последовательно или параллельно. Таким образом будет рассмотрена система, представленная на фиг. 6.10, где  $R$ ,  $L$  и  $C$  соединены последовательно. В этом случае рассматриваемая система может иметь структуру типа  $I_s$  (фиг. 6.11, а) или структуру типа  $II_s$  (фиг. 6.11, б). На фиг. 6.12 представлена цепь, где  $R$ ,  $L$ ,  $C$  соединены параллельно. В этом случае имеется структура типа  $I_p$  (фиг. 6.13, а) или структура типа  $II_p$  (фиг. 6.13, б). С помощью элементарных четырехполюсников могут быть образованы различные, более сложные системы.

### 6.3.1.2. Элементарные четырехполюсники. Сложные четырехполюсники

Для четырехполюсника типа  $I_s$  (фиг. 6.11, а) можно записать соотношение между  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$  и  $i(t)$  в виде

$$E_1(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} q(t) + E_2(t), \quad (6.3.1)$$

где использован второй закон Кирхгофа. Исключив заряд  $q(t)$ , получим

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t) + \frac{d}{dt} E_2(t). \quad (6.3.1')$$

Аналогично для четырехполюсника типа  $I_p$  (фиг. 6.13, а) имеем

$$E_1(t) = E_2(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} q(t) \quad (6.3.2)$$

или

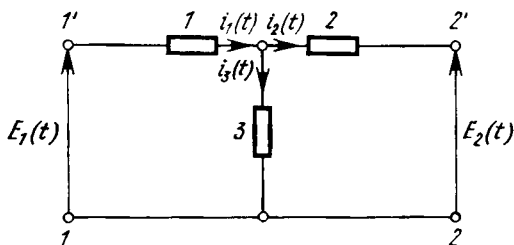
$$\frac{d}{dt} E_1(t) = \frac{d}{dt} E_2(t) = L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t). \quad (6.3.2')$$

Примером сложного четырехполюсника может служить четырехполюсник с сечением вида Т (фиг. 6.14),

составленный из двух структур типа  $I_s$  (структуры 1 и 2) и структуры типа  $I_p$  (структура 3), соединенных цепочкой. Рассматриваемые структуры характеризуются коэффициентами  $R_j$ ,  $L_j$  и  $C_j$  ( $j=1, 2, 3$ ).

С помощью первого закона Кирхгофа получим

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t), \quad (6.3.3)$$



Фиг. 6.14.

а из второго закона Кирхгофа следует

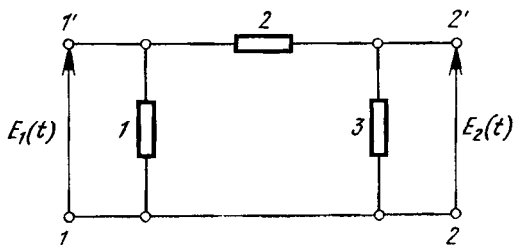
$$\begin{aligned} E_1(t) &= (L_1 + L_3) \frac{di_1(t)}{dt} + (R_1 + R_3) i_1(t) + \\ &+ \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) q_1(t) - L_3 \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{C_3} q_2(t) - R_3 i_2(t), \\ -E_2(t) &= -L_3 \frac{di_3(t)}{dt} - R_3 i_3(t) - \frac{1}{C_3} q_3(t) + \\ &+ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2} q_2(t). \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Исключая электрические заряды и учитывая соотношение (6.3.3), можно написать

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) &= (L_1 + L_3) \frac{d^2}{dt^2} i_1(t) + (R_1 + R_3) \frac{d}{dt} i_1(t) + \\ &+ \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) i_1(t) - L_3 \frac{d^2}{dt^2} i_2(t) - R_3 \frac{d}{dt} i_2(t) - \frac{1}{C_3} i_2(t), \end{aligned} \quad (6.3.4')$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dt} E_2(t) &= (L_2 + L_3) \frac{d^2}{dt^2} i_2(t) + (R_2 + R_3) \frac{d}{dt} i_2(t) + \\
 &+ \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) i_2(t) - L_3 \frac{d^2}{dt^2} i_1(t) - R_3 \frac{d}{dt} i_1(t) - \frac{1}{C_3} i_1(t).
 \end{aligned}$$

Другим сложным четырехполюсником является четырехполюсник, изображенный на фиг. 6.15. Он состоит из двух структур типа  $I_p$  (структуры 1 и 2) и структуры



Фиг. 6.15.

типа  $I_s$  (структура 2), соединенных цепочкой. Можно получить и другие сложные четырехполюсники, для которых могут быть записаны соответствующие соотношения.

### 6.3.2. Стационарные системы

#### 6.3.2.1. Линейные четырехполюсники

Обозначим через  $\varphi_1(t)$  одну из входных величин ( $E_1(t)$  или  $i_1(t)$ ) и через  $\varphi_2(t)$  — соответствующую величину на выходе динамической системы (в частности, четырехполюсника). Если входной величине

$$\varphi_1'(t) = \varphi_1(t + \bar{t}) \quad (6.3.5)$$

соответствует величина на выходе

$$\varphi_2'(t) = \varphi_2(t + \bar{t}), \quad (6.3.5')$$

то говорят, что рассматриваемая динамическая система (соответственно четырехполюсник) является *стационар-*

ной; она соответствует сохранению временной переменной.

*Четырехполюсник* (в общем случае динамическая система) называется *линейным*, если входная величина  $\varphi_1(t)$  связана с величиной на выходе  $\varphi_2(t)$  соотношением

$$\varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau. \quad (6.3.6)$$

Это соотношение определяет некоторый интегральный оператор  $U$ . Тогда можно написать

$$\varphi_2(t) = U\varphi_1(t), \quad (6.3.6')$$

т. е. этот оператор линейный. Функция  $K(t, \tau)$  называется *ядром* интегрального преобразования.

В частности, если входной величиной является э. д. с.  $E_1(t)$ , то напряжение на выходе дается соотношением

$$E_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_E(t, \tau) E_1(\tau) d\tau. \quad (6.3.7)$$

В случае *стационарного линейного четырехполюсника*, для которого входной величине (6.3.5) соответствует величина на выходе (6.3.5'), можно написать

$$\begin{aligned} \varphi_2'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau) \varphi_1(\tau + \bar{t}) d\tau = \varphi_2(t + \bar{t}) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t + \bar{t}, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Произведя замену переменных, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K(t, \tau - \bar{t}) - K(t + \bar{t}, \tau)] \varphi_1(\tau) d\tau = 0.$$

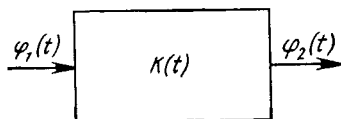
Так как  $\varphi_1(t)$  является произвольной функцией, а ядро  $K$  интегрируемо, то получим

$$K(t, \tau - \bar{t}) = K(t + \bar{t}, \tau). \quad (6.3.8)$$

Следовательно, ядро  $K$  интегрального преобразования является ядром разностного типа и имеет вид  $K(t-\tau)$ <sup>1</sup>. В этом случае между входными и выходными величинами имеет место соотношение

$$\varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) \varphi_1(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \varphi_1(t-\tau) d\tau. \quad (6.3.9)$$

Таким образом, для установления соотношения между ними с помощью алгебры со сверткой из  $K'_+$  удобно, чтобы входные и выходные величины, характеризующие структуру системы, выражались через обобщенные функции.



Фиг. 6.16.

Таким образом, для блок-схемы, представленной на фиг. 6.16, с помощью свертки можно написать

$$\varphi_2(t) = K(t) * \varphi_1(t). \quad (6.3.10)$$

Это соотношение описывает процессы в линейных стационарных четырехполюсниках. Обобщенная функция  $K(t)$  называется *обобщенной функцией веса*.

Например, э. д. с. на выходе  $E_2(t)$  будет иметь вид

$$E_2(t) = K_E(t) * E_1(t), \quad (6.3.10')$$

где  $K_E(t)$  — обобщенная функция веса, соответствующая э. д. с. Аналогично сила тока на выходе

$$i_2(t) = K_i(t) * i_1(t), \quad (6.3.10'')$$

где  $K_i(t)$  — обобщенная функция веса, соответствующая силе тока.

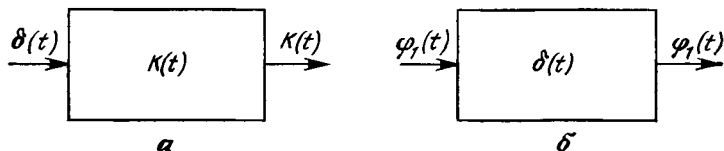
<sup>1</sup> Это видно из решения дифференциального уравнения, получающегося дифференцированием равенства (6.3.8) по  $t$ . — Прим. ред.

Предположим, что возбуждение имеет вид

$$\varphi_1(t) = \delta(t). \quad (6.3.11)$$

Замечая, что обобщенная функция Дирака является единственным элементом алгебры со сверткой  $K'_+$ , можно написать

$$\varphi_2(t) = K(t). \quad (6.3.11')$$



Фиг. 6.17.

Следовательно, обобщенная функция веса  $K(t)$  является откликом линейного стационарного четырехполюсника на возбуждение (6.3.11) (фиг. 6.17, а). В частности, обобщенная функция веса  $K_E(t)$ , соответствующая э. д. с., является откликом четырехполюсника на единичный импульс напряжения, а обобщенная функция веса  $K_i(t)$ , соответствующая силе тока, является откликом четырехполюсника на единичный импульсный ток. Если

$$K(t) = \delta(t), \quad (6.3.12)$$

то получим частный стационарный четырехполюсник, который не преобразует входной сигнал (фиг. 6.17, б). Для него можно написать

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t).$$

### 6.3.2.2. Распределитель напряжения

Распределителем напряжения является стационарный фильтр, структура которого показана на фиг. 6.18. С помощью второго закона Кирхгофа получим

$$E_1(t) = (R_1 + R_2) i(t), \quad E_2(t) = R_2 i(t), \quad (6.3.13)$$

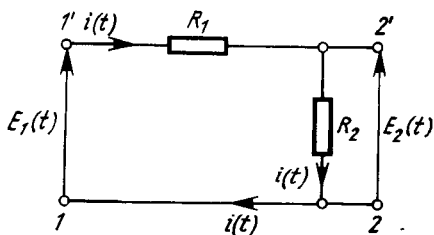
откуда

$$E_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1(t). \quad (6.3.13')$$

С учетом результатов, полученных в разд. 6.3.2.1, имеем

$$K_E(t) = \delta\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} t\right) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t). \quad (6.3.14)$$

Вообще для определения обобщенной функции веса можно применить преобразование Фурье или преобразо-



Фиг. 6.18.

вание Лапласа к сверткам (6.3.10) — (6.3.10''). Для рассмотренного выше случая можно написать

$$\tilde{K}_E(p) = \frac{\tilde{E}_2(p)}{\tilde{E}_1(p)}, \quad (6.3.14')$$

где  $p$  — новая комплексная переменная. Таким образом, получается такой же результат.

### 6.3.2.3. Фильтр RC нижних частот

Рассмотрим *фильтр RC нижних частот*, изображенный на фиг. 6.19. Применив к нему закон Ома и второй закон Кирхгофа, будем иметь

$$E_1(t) = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t), \quad E_2(t) = \frac{1}{C} q(t). \quad (6.3.15)$$

Исключая электрический заряд  $q(t)$ , получим дифференциальное уравнение

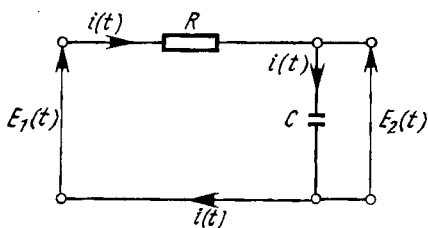
$$RC \frac{d}{dt} E_2(t) + E_2(t) = E_1(t), \quad (6.3.16)$$

которое в свертках имеет вид

$$[RC\delta'(t) + \delta(t)] * E_2(t) = E_1(t). \quad (6.3.16')$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению

$$[RC\delta'(t) + \delta(t)] * \mathcal{E}(t) = \delta(t), \quad (6.3.17)$$



Фиг. 6.19.

которому удовлетворяет фундаментальное решение, получим

$$(RCp + 1)\tilde{\mathcal{E}}(p) = 1,$$

откуда

$$\tilde{\mathcal{E}}(p) = \frac{1}{RCp + 1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}. \quad (6.3.18)$$

Фундаментальное решение имеет вид

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{RC} \theta(t) e^{-\frac{1}{RC} t}, \quad (6.3.19)$$

а для э. д. с. на выходе можно написать

$$E_2(t) = \frac{1}{RC} \theta(t) e^{-\frac{1}{RC} t} * E_1(t). \quad (6.3.20)$$

Если  $E_1(t)$  — интегрируемая функция, то

$$E_2(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC} \tau} E_1(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (6.3.20')$$



Заметим, что найденное фундаментальное решение является откликом фильтра на единичный импульс входного напряжения. Следовательно, обобщенная функция веса будет иметь вид

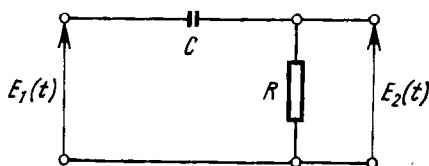
$$K_E(t) = \frac{1}{RC} \theta(t) e^{-\frac{1}{RC} t} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t} & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.3.21)$$

Изображение по Лапласу обобщенной функции веса называется переходной функцией фильтра  $RC$  нижних частот, имеющей вид

$$\tilde{K}_E(p) = \frac{1}{RCp + 1}. \quad (6.3.21')$$

#### 6.3.2.4. Фильтр $RC$ верхних частот

Рассмотрим теперь *фильтр  $RC$  верхних частот*, изображенный на фиг. 6.20. Соответствующие дифференци-



Фиг. 6.20.

альные уравнения имеют вид

$$E_1(t) = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t), \quad E_2(t) = R \frac{dq(t)}{dt}. \quad (6.3.22)$$

Исключая электрический заряд, получаем

$$RC \frac{d}{dt} E_2(t) + E_2(t) = RC \frac{d}{dt} E_1(t). \quad (6.3.23)$$

Соответствующее уравнение в свертках имеет вид

$$[RC\delta'(t) + \delta(t)] * E_2(t) = RC \frac{d}{dt} E_1(t). \quad (6.3.23')$$

Применяя преобразование Лапласа, получим образ решения в виде (6.3.18). Фундаментальное решение будет иметь такой же вид, как и в (6.3.19), т. е. оно будет удовлетворять уравнению (6.3.17). Таким образом, получим э. д. с. на выходе

$$E_2(t) = \mathcal{E}(t) * RC \frac{d}{dt} E_1(t) = RC \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) * E_1(t).$$

Это позволяет записать обобщенную функцию веса как

$$K_E(t) = RC \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \theta(t) e^{-\frac{1}{RC} t} \right],$$

или

$$K_E(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} \theta(t) e^{-\frac{1}{RC} t}. \quad (6.3.24)$$

Переходная функция будет иметь вид

$$\tilde{K}_E(p) = \frac{RCp}{RCp + 1} = 1 - \frac{1}{RCp + 1}, \quad (6.3.24')$$

а э. д. с. на выходе

$$E_2(t) = E_1(t) - \frac{1}{RC} \theta(t) e^{-\frac{1}{RC} t} * E_1(t). \quad (6.3.25)$$

Если, например, входная э. д. с. имеет вид

$$E_1(t) = E_0 \theta(t), \quad (6.3.26)$$

то получим

$$E_2(t) = RC \mathcal{E}(t) * \frac{d}{dt} E_1(t) = RC E_0 \mathcal{E}(t) * \delta(t),$$

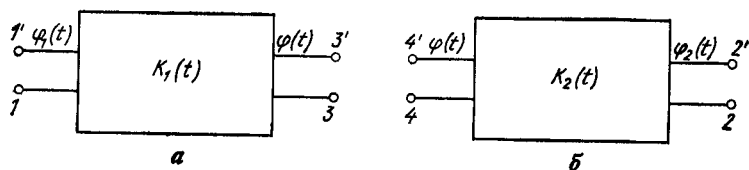
или

$$E_2(t) = E_0 \theta(t) e^{-\frac{1}{RC} t} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E_0 e^{-\frac{1}{RC} t} & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.3.27)$$

Этот результат полезен для дифференцирующих цепочек.

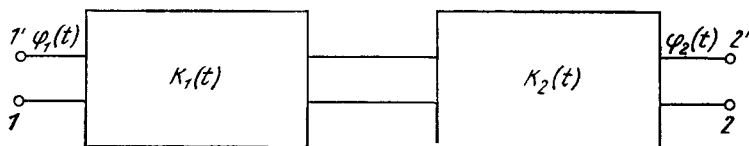
### 6.3.2.5. Соединение стационарных фильтров цепочкой

Рассмотрим два стационарных фильтра, изображенных на фиг. 6.21. Первый из них имеет обобщенную функцию веса  $K_1(t)$ , которая преобразует входную величину  $\varphi_1(t)$  в величину на выходе  $\varphi(t)$ , а второй имеет



Фиг. 6.21.

обобщенную функцию веса  $K_2(t)$ , которая преобразует входную величину  $\varphi(t)$  в выходную  $\varphi_2(t)$ . Под соединением цепочкой этих двух фильтров будем понимать кон-



Фиг. 6.22.

струкцию, изображенную на фиг. 6.22, у которой входными остаются зажимы 1 и 1', а на выходе — зажимы 2 и 2'.

Величины  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  и  $\varphi(t)$  связаны соотношением

$$\varphi(t) = K_1(t) * \varphi_1(t), \quad \varphi_2(t) = K_2(t) * \varphi(t), \quad (6.3.28)$$

откуда следует

$$\varphi_2(t) = K_2(t) * [K_1(t) * \varphi_1(t)] = [K_1(t) * K_2(t)] * \varphi_1(t). \quad (6.3.28')$$

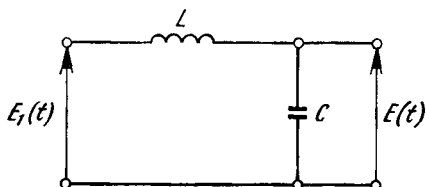
В этом случае может быть записано соотношение вида (6.3.10), соответствующее блок-схеме на фиг. 6.16, для которой

$$K(t) = K_1(t) * K_2(t). \quad (6.3.29)$$

Применяя преобразование Лапласа, можно найти переходную функцию фильтров, соединенных цепочкой, в виде

$$\tilde{K}(p) = \tilde{K}_1(p) \tilde{K}_2(p). \quad (6.3.30)$$

Рассмотрим, в частности, фильтр, изображенный на фиг. 6.23. Можно написать уравнения



Фиг. 6.23.

$$E_1(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t), \quad E(t) = \frac{1}{C} q(t), \quad (6.3.31)$$

откуда, исключив электрический заряд, получим дифференциальное уравнение

$$LC \frac{d^2}{dt^2} E(t) + E(t) = E_1(t) \quad (6.3.32)$$

и соответствующее уравнение в свертках

$$[LC\delta''(t) + \delta(t)] * E(t) = E_1(t). \quad (6.3.32')$$

Применяя преобразование Лапласа, получаем переходную функцию

$$\tilde{K}_{E_1}(p) = \frac{1}{LCp^2 + 1}. \quad (6.3.33)$$

Записывая эту функцию в виде

$$\tilde{K}_{E_1}(p) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2},$$

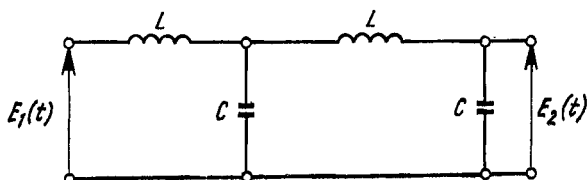
для обобщенной функции веса будем иметь

$$K_{E_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t. \quad (6.3.34)$$

Э. д. с.  $E(t)$  определяется соотношением

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t * E_1(t). \quad (6.3.35)$$

Если соединить эти фильтры цепочкой (фиг. 6.24), то для обобщенной функции веса, согласно соотношению (6.3.29), будем иметь



Фиг. 6.24.

$$\begin{aligned} K_E(t) &= K_{E_1}(t) * K_{E_2}(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t * \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t, \end{aligned}$$

откуда с помощью формулы (1.3.29) получим

$$K_E(t) = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \left( \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t - \frac{1}{\sqrt{LC}} t \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right). \quad (6.3.36)$$

Э. д. с. на выходе определяется соотношением

$$E_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \left( \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t - \frac{1}{\sqrt{LC}} t \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) * E_1(t) \quad (6.3.37)$$

и выражается через входную э. д. с.

### 6.3.3. Дифференцирующая цепочка

В случае дифференцирующей цепочки входная величина  $E_1(t)$  (э. д. с) и величина на выходе должны удовлетворять равенству

$$E_2(t) = \tau \frac{d}{dt} E_1(t), \quad (6.3.38)$$

где  $\tau$  — некоторая постоянная.

#### 6.3.3.1. Реальная дифференцирующая цепочка

Цепь, изображенная на фиг. 6.20, может быть использована для получения дифференцирующей цепочки. Используя обозначение

$$\tau = RC, \quad (6.3.39)$$

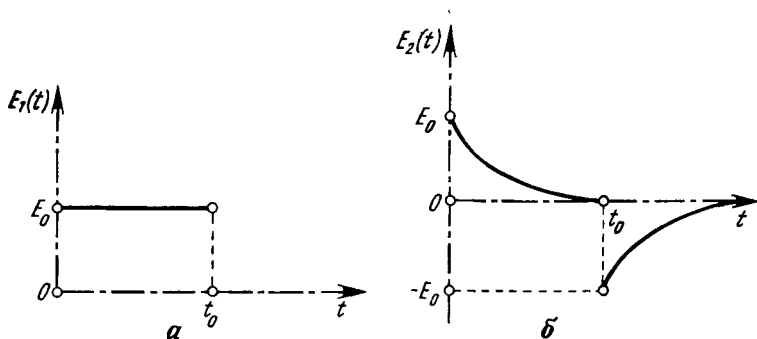
можно записать переходную функцию в виде

$$\tilde{K}_E(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}. \quad (6.3.40)$$

Рассмотрим входную э. д. с. вида

$$E_1(t) = E_0 [\theta(t) - \theta(t - t_0)], \quad (6.3.41)$$

постоянную на интервале времени  $t_0$  (фиг. 6.25, а). Ее изображение по Лапласу будет следующим:



Фиг. 6.25.

$$\tilde{E}_1(p) = \frac{E_0}{p} (1 - e^{-pt_0}).$$

С учетом соотношения (6.3.40) изображение по Лапласу э. д. с. на выходе будет иметь вид

$$\tilde{E}_2(p) = \frac{\tau E_0}{1 + \tau p} (1 - e^{-pt_0})$$

или после обратного преобразования Лапласа

$$E_2(t) = E_0 \left( 1 - e^{-\frac{1}{\tau} t_0} \right) e^{-\frac{1}{\tau} t}. \quad (6.3.42)$$

Из фиг. 6.25, б следует, что напряжение  $E_2(t)$  является быстро затухающим.

### 6.3.3.2. Идеальная дифференцирующая цепочка

Замечая, что обобщенная функция веса  $K_E(t)$  равняется э. д. с. на выходе, соответствующей импульсному входному напряжению, и учитывая условие (6.3.38), которому должна удовлетворять дифференцирующая цепочка, получаем

$$K_E(t) = \tau \frac{d}{dt} \delta(t) = \tau \delta'(t). \quad (6.3.43)$$

Для переходной обобщенной функции можно написать

$$\tilde{K}_E(p) = \tau p. \quad (6.3.44)$$

Сравнение этого результата с формулой (6.3.40), соответствующей реальной дифференцирующей цепочке, используемой на практике, показывает, что реальная дифференциальная цепочка тем ближе к идеальной, чем меньше  $\tau$ , причем

$$\tau \ll 1. \quad (6.3.45)$$

Следовательно, постоянные коэффициенты  $R$  и  $C$  связанные с соотношением (6.3.39), должны удовлетворять условию (6.3.45).

## ЛИТЕРАТУРА <sup>1</sup>

1. Arsac J., Transformation de Fourier et théorie des distributions, Dunod, Paris, 1961.
2. Bateman H., Erdélyi A., Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill, New York — Toronto — London, 1954.
3. Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932; есть русский перевод: Бохнер С., Лекции об интеграле Фурье, Физматгиз, М., 1962.
4. Bouix M., Les fonctions généralisées ou distributions, Masson et C<sup>ie</sup>, 1964.
5. Bremermann H., Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, 1965; есть русский перевод: Бремсман Г., Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, изд-во «Мир», М., 1968.
6. Cristescu R., Elemente de analiză funcțională și introducere în teoria distribuțiilor, Editura tehnică, București, 1966.
7. Cristescu R., Analiză funcțională, Ed. 2, Editura didact. și ped., București, 1970.
8. Cristescu R., Marinescu Gh., Applications of the theory of distributions, Editura Academiei, București; Wiley, London, New York — Sydney — Toronto, 1973.
9. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, Ed. 3, N. Y., 1947; есть русский перевод: Дирак П., Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.
10. Диткин В. А. Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2-е изд., Физматгиз, М., 1974.

---

<sup>1</sup> Звездочкой отмечена литература, добавленная редактором перевода. — *Прим. ред.*



11. Doetsch G., *Handbuch der Laplace Transformation*, Vol. I—III, Verlag Birkhäuser, Basel, 1950—1956.
12. Dunford N., Schwartz J., *Linear Operators*, N. Y., 1968; есть русский перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Т., *Линейные операторы*, изд-во «Мир», М., 1974.
13. Fodor G., *Laplace Transforms in Engineering*, Akadémiai Kiado, Budapest, 1965.
14. Garsoux J., *Espaces vectoriels topologiques et distributions*, Dunod, Paris, 1963.
15. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е., *Обобщенные функции*, т. I—IV, Физматгиз, М., 1958—1961.
16. Halperin I., *Introduction to the Theory of Distributions*, Toronto, 1952.
17. Hörmander L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1964; есть русский перевод: Хёрмандер А., *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, изд-во «Мир», М., 1968.
18. Иваненко Д., Соколов А., *Классическая теория поля (новые проблемы)*, Гостехиздат, М. — Л., 1951.
19. Jantscher L., *Distributionen*, Walter de Gruyter, Berlin — New York, 1971.
20. Kecs W., Teodorescu P. P., *Applications of the Theory of Distributions in Mechanics*, Editura Academiei, București; Abacus Press, Tunbridge, Wells, Kent, 1974.
21. Kneschke A., *Differentialgleichungen und Randwertprobleme*, Vol. I—III, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960—1962.
22. Lavoine J., *Calcul symbolique des distributions et des pseudofonctions*, Paris, 1962.
23. Marinescu Gh., *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1963.
24. Mikusiński J., *Operational Calculus*, Pergamon Press — PWN Polish Sci. Publ., Oxford — London — Edinburgh — New York, Toronto — Sydney — Paris — Braunschweig, 1959; есть русский перевод: Микусинский Я., *Операторное исчисление*, ИЛ, М., 1956.
25. Nicolescu M., *Analiză matematică*, Vol. I—III, Editura tehnica, București, 1957—1960.
26. Alariu V., *Ecuatii cu derivate parțiale. Soluții generalizate*, Vol. I—II, Editura Universității, București, 1970—1971.
27. Pol B. van der, Bremmer H., *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral*, Cambridge at the Univ. Press, 1959.
28. Schwartz L., *Théorie des distributions*, Vol. I—II, Hermann, Paris, 1950—1951.

29. Schwartz L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1961.
30. Sneddon J., *Fourier Transforms* McGraw-Hill, New York — Toronto — London, 1951; есть русский перевод: Снеддон И., *Преобразование Фурье*, ИЛ, М., 1957.
31. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Л., 1950.
32. Sommerfeld A., *Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Ed. 5, Akad. Verlagsgesellschaft Geest Portig K. — G., Leipzig, 1962.
33. Teodorescu N., Olariu V., *Ecuatiile fizicii matematice*, Editura didactică pedagogică, București, 1970.
34. Teodorescu P. P., *Probleme spatiale in teoria elasticității*, Editura Academiei, București, 1970.
35. Teodorescu P. P., *Dynamics of Linear Elastic Bodies*, Editura Academiei, București; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, 1975.
36. Tocaci E., *Fenomene discontinue in mecanica și rezistența materialelor*, Editura Academiei, București, 1974.
37. Владимиров В. С., *Уравнения математической физики*, изд-во «Наука», М., 1971.
38. Yosida K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1965; есть русский перевод: Йосида К., *Функциональный анализ*, изд-во «Мир», М., 1967.
39. Zemanian A. H., *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill, New York — Saint Louis — San Francisco — Toronto — London — Sydney, 1965.
40. Zemanian A. H., *Generalized Integral Transformations*, Intersci Publ., Wiley, New York — London — Sydney — Toronto, 1968; есть русский перевод: Земаян А. Г., *Интегральные преобразования обобщенных функций*, изд-во «Наука», М., 1974.
41. Kecs W., *Produsul de convoluție și unele aplicații ale lui*, Editura Academiei, București, 1978.
42. Teodorescu P. P., Ilie V., *Teoria elasticității, și introducerea în mecanica solidelor deformabile*, Vol. I Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
43. Годунов С. К., *Уравнения математической физики*, изд-во «Наука», М., 1971.
44. Розенберг А. С., Яхинсон Б. И., *Переходные процессы и обобщенные функции*, изд-во «Наука», М., 1966.
45. Диткин В. А., Прудников А. П., *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, 2-е изд., изд-во «Наука», М., 1974.
46. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, изд-во «Наука», М., 1976.

47. Штоколо И. З., Операционное исчисление, изд-во «Наукова думка», Киев, 1972.
48. Aptosik P., Mikusiński J., Sikorski R., Theory of Distributions, Elsevier Scientific Publishing Co., PWN, Amsterdam — Warszawa, 1973; есть русский перевод: Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р., Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход, М., изд-во «Мир», 1976.
49. Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, изд-во «Наука», М., 1976.
50. Лазарян В. А., Конащенко С. И., Обобщенные функции в задачах механики, изд-во «Наукова думка», Киев, 1974.
- 51\*. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования, изд-во «Наука», М., 1971.
- 52\*. Шварц Л., Математические методы для физических наук, изд-во «Мир», М., 1965.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра 191  
— коммутативная 192  
— с единицей 192  
— со сверткой 193  
Анализ системы 487  
Апериодический разряд (конденсатора) 480
- Балка 342  
— прямая 342  
Бинормаль 309  
Больцмана интегральное соотношение 418  
— — в пространстве обобщенных функций 419
- Вариации постоянных метод 182  
Вектор напряженности 436  
— свободный 265  
— связанный 254  
— скользящий 265  
Векторное поле, эквивалентное связанному вектору 255  
— пространство 17  
Векторы эквиполентные 261  
Взаимная индукция 457  
Винт 259  
Возбудители электрической системы 487  
Вращательный сосредоточенный момент 272, 369, 407, 415  
Вронскиан 178  
Входные величины 487  
Вязкость 394  
Вязкоупругая модель Кельвина 421  
— — Максвелла 422  
Вязкоупругое тело 417
- Гиперповерхность 115  
Гипотеза плоских сечений 343  
Гистерезис 360  
Главная нормаль 309
- Главное значение в смысле Коши 43  
Голономные связи 354  
Градиент перемещения 360  
Гюйгенса принцип 431
- Движение абсолютно твердого тела 359  
Дельта-функция ( $\delta$ -функция Дирака) 14  
Дельтообразная последовательность 87  
Деформируемое твердое тело 360  
Динамическое равновесие 394  
Диполь сосредоточенных сил 279  
— — — отрицательный 280, 281  
— — — положительный 280  
Дипольный сосредоточенный момент линейный 279  
— — — плоский 282, 283  
— — — — отрицательный 285  
— — — — положительный 285  
— — — — пространственный 286  
— — — — отрицательный 288  
— — — — положительный 287  
Дифракционная картина на бесконечности 431  
— решетка 436  
Дифракционное плоское отверстие 431  
Дифракция 431  
— Френеля 434  
Дифференциал обобщенной функции 53  
Дифференцирующая цепочка 502  
— — идеальная 503  
Доплера эффект 424
- Евклидово пространство 16  
— — действительное 16  
Емкость конденсатора 456

- Жесткие тела 360
- Задача двухточечная 215  
— Коши 215, 239, 444  
— многоточечная 215, 219  
— смешанная 221
- Закон Гука 358, 363  
— Ома 456  
— эквивалентности действия силы 271
- Законы Кирхгофа 456
- Идеально упругое тело 360
- Изображение (по Лапласу) 146
- Изотропное тело 360
- Импульс силы добавочной 320  
— — обобщенной 320  
— — обычной 320
- Индуктивность катушки 456
- Интеграл момента силы добавочной 321  
— — — обобщенной 321  
— — — обычной 321
- Интегралы Римана 297  
— Стильеса 297
- Интегральные уравнения Вольтерры второго рода 202, 206  
— — — первого рода 201, 203  
— — нелинейные 201  
— — однородные 202
- Интегро-дифференциальные уравнения типа свертки 212
- Каноническое представление центра вращения 276  
— — — расширения плоского 285  
— — — расширения пространственного 288
- Квазиупругая сила отталкивания 337  
— — притяжения 337
- Кельвина вязкоупругая модель 421
- Кинетическая энергия материальной точки 323  
— — системы материальных точек 356
- Компактное множество 17
- Компактный посетитель 17
- Колебания апериодические 481  
— незатухающие 480
- Колебательный контур 475, 481, 483
- Количество движения материальной точки 319
- Консоль 349
- Коэффициент Пуассона 363  
— теплопроводности 232
- Коэффициенты затухания 451  
— квазиупругие 451
- Краевые условия 214
- Лапласа преобразование 145, 189  
— — итерированное 154  
— — обобщенной функции 148  
— — обобщенной функции медленного роста 155  
— — обратное 147  
— — функции 146, 152
- Линейное вязкоупругое тело 417  
— пространство 17
- Максвелла вязкоупругая модель 422
- Масса полная 116, 289, 298, 299, 300
- Матрица обобщенных функций регулярных 447  
— — — сингулярных 447  
— фундаментальных решений плоской динамической задачи теории упругости 416
- Меры 28
- Метод вариации постоянных 182  
— интегральных преобразований 188
- Механические колебания 449
- Множество компактное 16  
— натуральных чисел  $N$  42  
— нулевой меры 39  
— пренебрежимое 39  
— целых неотрицательных чисел  $N_0$  42
- Модуль сдвига 363

- Юнга 363  
 Момент диполя 306  
 — системы точек порядка  $p$  289  
 Моменты инерции осевые 294  
 — — относительно плоскостей 294  
 — — полярные 293  
 — — центробежные 294  
 — порядка второго 289  
 — порядка первого 289  
 Мотор 259
- Направленный сосредоточенный момент** 265, 266, 368  
 — — — первого порядка 269  
 — — — порядка  $n$  269  
 Напряжения 358, 360  
 — касательные 363  
 — начальные 359  
 — нормальные 363, 371  
 Начальные условия типа Коши 333  
 Нейтральная ось 348  
 Нить 343  
 Норма 16  
 Носитель компактный 17  
 — обобщенных функций 48  
 — основных функций 16
- Область** 23  
 Обобщенная производная 53  
 — реакция связей 318  
 — сила 318  
 Обобщенная функция 13, 27  
 — — бесконечного порядка 28  
 — — Грина 250  
 — — действительная 28  
 — — Дирака 28  
 — — комплексная 28  
 — — комплексно-сопряженная 31  
 — — конечного порядка 28  
 — — медленного роста 28, 137  
 — — нулевая 47  
 — — однородная степени  $\lambda$  124  
 — — первообразная 171  
 — — периодическая 85  
 — — полярного статического момента (соответствующая полярному статическому моменту) 293, 298, 299
- — плоских статических моментов 293  
 — — положительная 50  
 — — регулярная 34  
 — — — медленного роста 34  
 — — сигулярная 35  
 — — с ограниченным носителем 29, 137  
 — — соответствующая полярному моменту инерции 298, 299  
 — — сосредоточенная на гиперповерхности 116, 117  
 — — — — кривой 116, 298  
 — — — — множестве 48, 115, 116  
 — — — — области 117  
 — — типа обычной функции 34  
 — — Хевисайда 41  
 — — четная 43  
 — —  $P \frac{1}{r}$  46  
 — —  $P \frac{1}{x}$  46  
 — —  $P \frac{1}{x^2 + y^2}$  46  
 — —  $V_p \frac{1}{x}$  43  
 — —  $V_p \frac{1}{x^2}$  43
- Обобщенное решение дифференциального уравнения 179  
 — — — — операторного 222  
 Обобщенные координаты 354, 443  
 — функции сложные 53  
 Обратимость явления 361  
 Однородное тело 360  
 Оператор Даламбера 225  
 — Лапласа 225  
 — линейный дифференциальный 222  
 — Николеску 232  
 Оригинал (функция) 146  
 Осевые моменты инерции 294  
 Основная краевая задача теории упругости вторая 364  
 — — — — — первая 363  
 — — — — — смешанная 364  
 Основное пространство 16

- — — —  $K^m$  16  
 — —  $K$  21  
 — —  $S$  24  
 — —  $\Phi$  27  
 Основные функции (класса  $C^m$ ) 16  
 Отклик электрической системы 487  
  
 Падение напряжений 456  
 Первообразная обобщенной функции 171  
 — — — — первого порядка 171  
 — — — — порядка  $m$  171  
 Перемещение точки 360  
 Перемещения обобщенные 393 408  
 Плоские статические моменты 290  
 Плотность 232  
 — объемная континуума двумерного 299  
 — — — — одномерного 298  
 — — — — трехмерного 300  
 — — электрического двойного слоя на кривой 312  
 — — — — — поверхности 313  
 — — — — диполя 307  
 — — простого слоя 308  
 — связанного вектора линейная 255  
 — — — — объемная 257  
 Показатель роста функции 143  
 Поле перемещений 360  
 Полярный момент инерции 293 298, 299, 300  
 — — статический 290, 298, 299, 300  
 Последовательность дельтообразная 87, 88  
 Постановка задачи теории упругости линейной динамической 396  
 — — — — плоской в перемещениях 408  
 Потенциал электрического поля 437  
 Предел в смысле теории обобщенных функций 91 (см. также Сходимость в пространстве обобщенных функций)  
 Преобразование Карсона (Лапласа — Карсона) 145  
 — Лапласа 145 (см. Лапласа преобразование)  
 — подобия 37  
 — симметрии 38  
 — Фурье 130 (см. также Фурье-преобразование)  
 — — косинус 132  
 — — обратное 131  
 — — синус 131  
 — — экспоненциальное 130  
 Принцип Гюйгенса 431  
 Проводимость обобщенная, соответствующая заряду 459  
 — — — — силе тока 461  
 — — цепи  $RLC$  461  
 — операторная, соответствующая заряду 462  
 — — — — силе тока 463  
 — — цепи  $RLC$  463  
 Производная в смысле теории обобщенных функций 57  
 — обобщенной функции 53  
 — — — — по направлению 267  
 — — — — смешанная 269  
 Произведение прямое обобщенных функций 105, 136  
 Пространство векторное 17  
 — — топологическое 17  
 — евклидово 16  
 — линейное 17  
 — основное  $K^m$  16  
 — —  $K$  21  
 — —  $S$  24  
 — —  $\Phi$  27  
 — — комплексное  $Z$  135  
 — — полное 30  
 — — сопряженное 28  
 — — топологическое 17  
 — — упругое 365  
 Процесс переходный 477  
 — установившийся 477  
  
 Работа силы добавочной 322  
 — — обобщенной 322  
 — — обычной 322  
 Радиус-вектор 316  
 Радиус кривизны 309  
 — кручения 309  
 Разбиения единичцы теорема 24  
 Распределитель напряжения 494  
 Реакция связей 335  
 Регуляризация 45

- Решение задачи Коши фундаментальное 239  
 — уравнения дифференциального общее 180  
 — — — фундаментальное 180  
 — — — — общее 180  
 — — — — частное 180  
 — — — частное 180  
 — — — элементарное 180  
 — — в свертках фундаментальное 196  
 — — — — элементарное 196  
 Ряд Фурье 87
- Свертка функций 108  
 — — обобщенных 110, 137  
 Свертки единица 111  
 Свободные колебания поперечные 351  
 Собственные колебания поперечные 351  
 Сдвиг обобщенной функции 32, 36  
 Сдвиговые деформации 361  
 Сила тока 455  
 Силы консервативные 397  
 — объемные 363  
 Сингулярная часть обобщенной функции Грина 251  
 Синтез системы 487  
 Скалярное произведение 16, 322  
 Скорость 317  
 — распространения волн поперечных 227  
 — — — продольных 227  
 Соотношения Коши 361  
 Сопrotивление (электрическое) 456  
 — полное цепи  $RLC$  461  
 — — операторное активное 463  
 — — — двух элементов, соединенных параллельно 465  
 — — — — последовательно по 464  
 — — — емкостное 464  
 — — — индуктивное 464  
 — — — цепи  $RLC$  463  
 Сосредоточенная сила 264, 367, 401  
 — — импульсная 402  
 — — периодическая 264  
 Сосредоточенные нагрузки 264
- Состояние деформированное 359  
 — — — плоское 371, 373, 380  
 — — естественное 418  
 — — напряженно-деформированное 360  
 — — напряженное 360  
 — — — плоское 371  
 — — — — обобщенное 371  
 Сохоцкого соотношения 65  
 Сплошная среда 359  
 Срединное волокно 348  
 Статические моменты 289, 290  
 — — — плоские 290  
 — — — полярные 290  
 Статический момент кривой 118  
 Стационарная система 491, 492  
 Стержень 342  
 Структура цепи 487  
 Струна 343  
 Сходимость в обобщенном смысле 92  
 — — — пространстве обобщенных функций 30  
 — — слабая 30
- Температуропроводность 232  
 Тензор деформаций 361  
 — Кронекера 363  
 — Леви-Чевиты 361  
 — напряжений 363  
 — симметричный 361  
 — фундаментальных решений для задачи, поставленной в напряжениях 367  
 — — — упругого пространства 365  
 Тензорное умножение 104  
 Теорема дифференцирования 148  
 — — — изображения 146, 154  
 — — — запаздывания 148  
 — — — затухания 149  
 — Карно 330  
 — Кельвина 331  
 — об изменении количества движения 324  
 — — — кинетической энергии 326  
 — — — момента количества движения 325





- релаксации 417
- Стильеса 93
- ультраобобщенная 135
- характеристическая отрезка 49
- четная 131
- Функции кусочно дифференцируемые** 58
- равные почти всюду 39
- Фурье-преобразование** 130, 189
- функций 130
- — обобщенной 136
- — — медленного роста 137
- — — с ограниченным носителем 137
- — —  $\delta(y)$  по двум переменным 144
- — косинус 131
- — обратное 131
- — синус 131
- — экспоненциальное 130
  
- Характеристическая функция отрезка** 49
  
- Центр вращения** 272, 369
- расширения плоский 282, 283
- — пространственный 286, 288, 404
- сжатия плоский 285
- — пространственный 288
- Центробежные моменты инерции** 294
- Цепи с сосредоточенными параметрами** 477
  
- Частота отрицательная** 468, 469
- положительная 468
- Четырехполюсник** 487
- линейный 492
- — стационарный 492
- сложный 489
- с пассивными элементами 483
- с сечением вида T 489
  
- Эйлера уравнение** 123
- формула 133
- Электрический двойной слой на кривой** 310
- — — поверхности 312
- заряд 304, 455
- Элементарное решение уравнения в свертках** 196
- — — дифференциального 180
- Эффект Доплера** 424
  
- Юнга модуль** 363
  
- Ядро интегрального преобразования** 492

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие авторов к русскому изданию . . . . .	8
Предисловие . . . . .	10
<b>Глава 1. Элементы теории обобщенных функций . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Понятие обобщенной функции. Свойства. Операции . . . . .	13
1.1.1. Введение . . . . .	13
1.1.2. Основные функции и основные пространства . . . . .	16
1.1.3. Пространство обобщенных функций . . . . .	27
1.1.4. Примеры обобщенных функций . . . . .	31
1.1.5. Линейные преобразования переменных . . . . .	35
1.1.6. Равенство обобщенных функций . . . . .	38
1.2. Дифференцирование обобщенных функций. Дельта-образные последовательности . . . . .	52
1.2.1. Дифференцирование обобщенных функций . . . . .	52
1.2.2. Формулы разложения некоторых обобщенных функций . . . . .	75
1.2.3. Обобщенные функции с компактным носителем. Периодические обобщенные функции . . . . .	81
1.2.4. Дельтаобразные последовательности . . . . .	87
1.3. Прямое произведение. Свертка . . . . .	104
1.3.1. Прямое произведение . . . . .	104
1.3.2. Свертка . . . . .	108
1.4. Обобщенные функции, сосредоточенные на кривых, поверхностях и объемах. Однородные обобщенные функции . . . . .	115
1.4.1. Обобщенные функции, сосредоточенные на кривых, поверхностях и объемах . . . . .	115
1.4.2. Однородные обобщенные функции . . . . .	123

1.5.	Интегральные преобразования обобщенных функций	130
1.5.1.	Преобразование Фурье . . . . .	130
1.5.2.	Преобразование Лапласа . . . . .	145
1.6.	Некоторые полезные формулы . . . . .	158
1.6.1.	Производные некоторых часто используемых обобщенных функций . . . . .	158
1.6.2.	Преобразование Фурье некоторых часто используемых обобщенных функций . . . . .	161
1.6.3.	Преобразование Лапласа некоторых часто используемых обобщенных функций . . . . .	165
<b>Глава 2.</b>	<b>Дифференциальные уравнения в обобщенных функциях . . . . .</b>	<b>168</b>
2.1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .	168
2.1.1.	Общие результаты. Фундаментальные решения	168
2.1.2.	Методы решения . . . . .	182
2.2.	Уравнения в свертках . . . . .	191
2.2.1.	Свойства уравнений в свертках . . . . .	191
2.2.2.	Интегральные уравнения . . . . .	201
2.3.	Задача Коши и многоточечные задачи для дифференциальных уравнений . . . . .	214
2.3.1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	214
2.3.2.	Дифференциальные уравнения в частных производных . . . . .	222
2.3.3.	Функции Грина. Обобщенные функции Грина	250
<b>Глава 3.</b>	<b>Представление некоторых механических и физических величин обобщенными функциями . . . . .</b>	<b>254</b>
3.1.	Представление связанных векторов обобщенными функциями . . . . .	254
3.1.1.	Представление связанного вектора . . . . .	254
3.1.2.	Сложение связанных векторов . . . . .	260
3.2.	Представление сосредоточенных нагрузок и непрерывно распределенных нагрузок обобщенными функциями . . . . .	264
3.2.1.	Сосредоточенные моменты . . . . .	265
3.2.2.	Диполи сосредоточенных сил . . . . .	279
3.3.	Представление моментов системы материальных точек обобщенными функциями . . . . .	288
3.3.1.	Дискретные системы материальных точек . . . . .	289
3.3.2.	Непрерывные системы материальных точек . . . . .	297
3.4.	Представление некоторых электрических величин обобщенными функциями . . . . .	304
3.4.1.	Электрические заряды . . . . .	304
3.4.2.	Электрический слой на кривой или на поверхности . . . . .	307

**Глава 4. Применении теории обобщенных функций в механике 315**

4.1. Общие теоремы механики . . . . .	315
4.1.1. Механические величины, представляемые обобщенными функциями . . . . .	315
4.1.2. Общие теоремы механики материальной точки . . . . .	323
4.1.3. Общие теоремы механики в случае столкновений . . . . .	327
4.2. Задачи типа Коши . . . . .	332
4.2.1. Динамика материальной точки . . . . .	332
4.2.2. Линейные колебания . . . . .	337
4.2.3. Нити, Балки . . . . .	342
4.2.4. Системы материальных точек с переменными массами . . . . .	353
4.3. Краевые задачи теории упругости . . . . .	358
4.3.1. Статические задачи для линейных упругих тел . . . . .	358
4.3.2. Динамические задачи для линейных упругих тел . . . . .	394
4.3.3. Задачи линейной вязкоупругости . . . . .	417

**Глава 5. Применения теории обобщенных функций в физике 424**

5.1. Применения теории обобщенных функций в акустике . . . . .	424
5.1.1. Эффект Доплера для одномерной акустической волны . . . . .	424
5.1.2. Эффект Доплера при ветре . . . . .	426
5.2. Применения теории обобщенных функций в оптике . . . . .	430
5.2.1. Явление дифракции на бесконечности . . . . .	431
5.2.2. Дифракция Френеля . . . . .	434
5.3. Напряженность и потенциал электростатического поля . . . . .	436
5.3.1. Соотношения между напряженностью и потенциалом поля, создаваемого электрическим зарядом, и объемной плотностью этого заряда . . . . .	436
5.4. Линейные колебания в физике . . . . .	443
5.4.1. Общие результаты . . . . .	443
5.4.2. Применения для исследования механических колебаний . . . . .	449

**Глава 6. Применения теории обобщенных функций в электротехнике . . . . . 455**

6.1. Сила тока и электрический заряд. Полное сопротивление и проводимость электрических цепей . . . . .	455
6.1.1. Сила тока и электрический заряд . . . . .	455
6.1.2. Полное сопротивление и проводимость электрических цепей . . . . .	459
6.1.3. Отрицательные частоты . . . . .	467

---

6.2. Применения теории обобщенных функций в электрических цепях . . . . .	471
6.2.1. Задачи Коши для цепи <i>RLC</i> . . . . .	471
6.2.2. Установившиеся процессы. Переходные процессы	477
6.3. Применение теории обобщенных функций к линейным динамическим системам . . . . .	487
6.3.1. Четырехполюсники . . . . .	487
6.3.2. Стационарные системы . . . . .	491
6.3.3. Дифференцирующая цепочка . . . . .	502
Литература . . . . .	503
Предметный указатель . . . . .	508

**Уважаемый читатель!**

**Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении,  
качестве перевода и другие  
просим присылать по адресу:**

**129820, Москва, И-110, ГСП,  
1 Рижский пер., 2, издательство «Мир»**

**В. Кеч, П. Теодореску**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ  
ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ  
В ТЕХНИКЕ**

Редактор Л. Якименко  
Художник Б. Федоров  
Художественный редактор Л. Безрученков  
Технический редактор Е. Потапенкова  
Корректор В. Соколов

ИБ 1406

Сдано в набор 19.12.77.  
Подписано к печати 27.07.78  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага типо-  
графская № 1. Гарнитура ла-  
тинская. Печать высокая. Объ-  
ем 8,13 бум. л. Усл. печ. л. 27,30.  
Уч.-изд. л. 22,36 Изд. № 20/9526.  
Тираж 9 000 экз. Зак. 3677.  
Цена 1 р. 90 к.

Издательство «Мир»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Минист-  
ров СССР по делам издательств, полиграфии и  
книжной торговле, Хохловский пер., 7.