ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

ВЫПУСК 1

И. М. ГЕЛЬФАНД и Г. Е. ШИЛОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-5-4

АННОТАЦИЯ

Теория обобщенных функций — оформившаяся в последние годы область функционального анализа; она возникла в связи с потребностями математической физики и позволила правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения. В настоящем выпуске рассматриваются главным образом основные понятия теории обобщенных функций, действия над обобщенными функциями и т. д. Первые две главы представляют собой элементарное введение в эту теорию. Третья глава несколько труднее для чтения и содержит более специальный материал. Выпуск рассчитан на научных работников в различных областях математики, физики и смежных наук, на аспирантов и студентов (математиков и физиков) старших курсов университетов. Он будет также интересен и полезен для инженеров.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Глава III

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обобщенные функции получают сейчас все более широкое распространение в различных разделах математики. В нестрогой форме обобщенные функции по существу уже давно применялись физиками.

Важную роль в формировании теории обобщенных функций сыграли работы Ж. Адамара, в которых в связи с изучением фундаментальных решений волновых уравнений рассмотрены расходящиеся интегралы, а также работы М. Рисса. Мы не говорим здесь о более ранних математических работах, в которых тоже можно было бы найти элементы будущей теории обобщенных функций.

Впервые обобщенные функции в явной и теперь общепринятой форме ввел С. Л. Соболев в 1936 г. Он применил обобщенные функции к выяснению вопроса о единственности решения задачи Коши для линейных гиперболических уравнений.

С другой стороны, к теории обобщенных функций вплотную подводит теория С. Бохнера преобразований Фурье функций степенного роста. Эти преобразования Фурье являются по существу обобщенными функциями и выступают у С. Бохнера как формальные производные непрерывных функций.

В 1950—1951 гг. появилась монография Л. Шварца «Теория распределений». В этой книге Л. Шварц систематизировал теорию обобщенных функций, связал воедино все прежние подходы, привлек к ее обоснованию теорию линейных топологических пространств и получил ряд существенных и далеко идущих результатов. После выхода в свет «Теории распределений» обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года, приобрели чрезвычайно широкую популярность. Достаточно

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обобщенные функции получают сейчас все более широкое распространение в различных разделах математики. В нестрогой форме обобщенные функции по существу уже давно применялись физиками.

Важную роль в формировании теории обобщенных функций сыграли работы Ж. Адамара, в которых в связи с изучением фундаментальных решений волновых уравнений рассмотрены расходящиеся интегралы, а также работы М. Рисса. Мы не говорим здесь о более ранних математических работах, в которых тоже можно было бы найти элементы будущей теории обобщенных функций.

Впервые обобщенные функции в явной и теперь общепринятой форме ввел С. Л. Соболев в 1936 г. Он применил обобщенные функции к выяснению вопроса о единственности решения задачи Коши для линейных гиперболических уравнений.

С другой стороны, к теории обобщенных функций вплотную подводит теория С. Бохнера преобразований Фурье функций степенного роста. Эти преобразования Фурье являются по существу обобщенными функциями и выступают у С. Бохнера как формальные производные непрерывных функций.

В 1950—1951 гг. появилась монография Л. Шварца «Теория распределений». В этой книге Л. Шварц систематизировал теорию обобщенных функций, связал воедино все прежние подходы, привлек к ее обоснованию теорию линейных топологических пространств и получил ряд существенных и далеко идущих результатов. После выхода в свет «Теории распределений» обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года, приобрели чрезвычайно широкую популярность. Достаточно указать хотя бы на тот факт, что количество математических работ, в которых встречается дельта-функция, возросло во много раз.

В выпусках этой серии будет дано систематическое изложение теории обобщенных функций и ряда примыкающих к ней вопросов анализа. Авторы не ставили себе при этом целью собрать весь материал, в котором в той или иной мере участвуют обобщенные функции. С другой стороны, очень многие из рассматриваемых здесь проблем можно было бы трактовать и без обобщенных функций. Однако понятие обобщенной функции является удобным связующим звеном для ряда вопросов анализа, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории представлений локально компактных групп Ли и теории вероятностей. Поэтому, быть может, название «Обобщенные функции» для данной серии выпусков по функциональному анализу является наиболее подходящим.

Перечислим вкратце содержание первых четырех выпусков серии.

Первый выпуск посвящен в основном алгорифмическим вопросам теории обобщенных функций. Его первые две главы представляют собой элементарное введение в теорию обобщенных функций. В этом выпуске читатель встретится со многими приложениями обобщенных функций к различным вопросам анализа. В нескольких его местах теоремы приведены без доказательств, со ссылками на второй выпуск. Наряду с книгой Шварца в этом выпуске широко использована статья И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро «Однородные функции» (УМН, 1955, № 3). З. Я. Шапиро написала также несколько пунктов для настоящего выпуска.

Во втором выпуске развиваются понятия, введенные в первом выпуске, обосновываются при помощи топологических средств теоремы, приведенные в нем без доказательств, а также строится и изучается большое количество конкретных пространств обобщенных функций. Базой для всего этого является изложение в главе I второго выпуска одного из наиболее элементарных и удобных для аналитиков разделов общей теории линейных топологических пространств — теории счетно-нормированных пространств.

Третий выпуск посвящен некоторым приложениям обобщенных функций к теории дифференциальных уравнений, а именно к построению классов единственности и классов корректности решений задачи Коши для уравнений в частных производных и к разложениям по собственным функциям дифференциальных операторов. Здесь систематически используются результаты, полученные во втором выпуске.

В четвертом выпуске рассматриваются связанные с теорией обобщенных функций вопросы теории вероятностей (обобщенные случайные процессы) и теории представлений групп Ли. Объединяющими здесь являются вопросы гармонического анализа (аналога теории интеграла Фурье) обобщенных функций, в частности, вопросы представления положительно определенных функций. В этом же выпуске излагается играющая существенную роль в его построениях теорема Л. Шварца о ядре.

Выпуски 1—3 написаны Г. Е. Шиловым и мною, выпуск 4 — Н. Я. Виленкиным и мною.

В конце первого выпуска для ориентации читателя приводится краткое оглавление выпусков 2—4. В конце каждого следующего выпуска также будет дано оглавление написанных к этому времени остальных выпусков.

В разделе «Примечания и литературные указания» даются исторические сведения, указания на первоисточники и библиография. По ходу же изложения никаких ссылок на первоисточники не делается; указания на учебную литературу даются в подстрочных примечаниях.

Пятый выпуск, по-видимому, будет посвящен дальнейшему развитию методов теории функций комплексного переменного в теории обобщенных функций. Уже в первом выпуске намечено рассмотрение обобщенных функций как функционалов над аналитическими функциями; в пятом выпуске предполагается подробно развить эту точку зрения и рассмотреть ее связь с работами Ж. Лерея.

Конечно, все это далеко не исчерпывает всех возможностей применений обобщенных функций. Несомненно, чувствуется потребность в углублении связей с дифференциальными уравнениями (краевые задачи, уравнения с переменными коэффициентами, ряд вопросов квазилинейных уравнений). Кроме того, теория обобщенных функций является наиболее удобной базой для построения общей теории представлений групп Ли и, в частности, общей теории сферических и обобщенных автоморфных функций. Мы надеемся, что эти вопросы можно будет также впоследствии осветить.

Авторы первого выпуска выражают признательность своим сотрудникам и ученикам, в той или иной мере принимавшим участие в создании этого выпуска, в особенности В. А. Боровикову, Н. Я. Виленкину, М. И. Граеву и З. Я. Шапиро. Авторы благодарны также М. С. Аграновичу, который отредактировал всю рукопись и внес в нее ряд улучшений.

И. М. Гельфанд

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ВЫПУСКА

Во втором издании первого выпуска произведена некоторая перестановка материала для облегчения чтения. Две первые главы «Определение и простейшие свойства обобщенных функций» и «Преобразования Фурье обобщенных функций» можно рекомендовать при первоначальном ознакомлении; они содержат стандартный минимум, который необходим всем математикам и физикам, имеющим дело с обобщенными функциями.

План дальнейшего чтения зависит от интересов читателя. Читатели, интересующиеся алгорифмической стороной, могут обращаться к главе III этого выпуска, которая посвящена рассмотрению специальных классов обобщенных функций: дельта-функций на поверхностях различного числа измерений, обобщенных функций, связанных с многомерной квадратичной формой (любой сигнатуры), однородных функций и функций, эквивалентных однородным, а также к началу главы IV вып. 4, в которой рассмотрены однородные обобщенные функции в комплексной области. Читателю, интересующемуся общей теорией, мы рекомендуем после первых двух глав этого выпуска перейти к чтению первых трех глав вып. 2, которые содержат, в частности, необходимые сведения из теории линейных топологических пространств, и затем к главе I вып. 4, где описываются ядерные пространства и меры в них. Читатели, желающие ознакомиться с применениями обобщенных функций к теории уравнений в частных производных, могут обратиться к главам II и III вып. 3, просмотрев предварительно главы о пространствах типа S и типа W (гл. IV вып. 2 и гл. I вып. 3). Спектральной теории и ее применениям посвящены глава IV вып. 3 и глава I вып. 4; они требуют предварительного ознакомления с двумя первыми главами вып. 2. Возможны и иные планы чтения; например, вопросы, концентрирующиеся вокруг применений преобразования Фурье обобщенных функций, развиваются после главы II вып. 1 в главах III и IV вып. 2, в первых трех главах вып. 3, во второй и дальнейших главах вып. 4; как работают обобщенные функции в теории представлений и преобразования Фурье на группах, рассказано в трех последних главах вып. 4, для чтения которых достаточно знакомства с первыми двумя главами вып. 1.

В конце первого выпуска для удобства пользования им дана сводка основных определений и формул и сводная таблица преобразований Фурье обобщенных функций.

Авторы

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. ОСНОВНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Вводные замечания. Уже давно в физике употребляются так называемые сингулярные функции, которые не могут быть корректно определены в рамках классической теории функций.

Простейшей сингулярной функцией является дельта-функция $\delta(x-x_0)$: она, по определению физиков, «равна нулю всюду, кроме одной точки x_0, в этой точке равна бесконечности и обладает интегралом, равным единице». Излишне указывать, что эти условия несовместимы с точки зрения классического определения функции и интеграла.

Но мы можем попробовать проанализировать понятие сингулярной функции с тем, чтобы выявить действительное его содержание.

Прежде всего мы замечаем, что при решении конкретных задач математической физики дельта-функции (и другие сингулярные функции) встречаются, как правило, только на промежуточных этапах; в окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией. Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно ответить на вопрос, что означает интеграл от произведения сингулярной функции и «хорошей» функции. Например, вместо того чтобы отвечать на вопрос, что такое дельта-функция, нам достаточно указать, что для предварительного ознакомления с двумя первыми главами вып. 2. Возможны и иные планы чтения; например, вопросы, концентрирующиеся вокруг применений преобразования Фурье обобщенных функций, развиваются после главы II вып. 1 в главах III и IV вып. 2, в первых трех главах вып. 3, во второй и дальнейших главах вып. 4; как работают обобщенные функции в теории представлений и преобразования Фурье на группах, рассказано в трех последних главах вып. 4, для чтения которых достаточно знакомства с первыми двумя главами вып. 1.

В конце первого выпуска для удобства пользования им дана сводка основных определений и формул и сводная таблица преобразований Фурье обобщенных функций.

Авторы

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. ОСНОВНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Вводные замечания. Уже давно в физике употребляются так называемые сингулярные функции, которые не могут быть корректно определены в рамках классической теории функций.

Простейшей сингулярной функцией является дельта-функция $\delta(x-x_0)$: она, по определению физиков, «равна нулю всюду, кроме одной точки x_0, в этой точке равна бесконечности и обладает интегралом, равным единице». Излишне указывать, что эти условия несовместимы с точки зрения классического определения функции и интеграла.

Но мы можем попробовать проанализировать понятие сингулярной функции с тем, чтобы выявить действительное его содержание.

Прежде всего мы замечаем, что при решении конкретных задач математической физики дельта-функции (и другие сингулярные функции) встречаются, как правило, только на промежуточных этапах; в окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией. Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно ответить на вопрос, что означает интеграл от произведения сингулярной функции и «хорошей» функции. Например, вместо того чтобы отвечать на вопрос, что такое дельта-функция, нам достаточно указать, что для любой достаточно хорошей функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(x_0).$$

Иными словами, мы связываем с каждой сингулярной функцией функционал, который ставит в соответствие этой сингулярной функции и каждой «достаточно хорошей» функции некоторое вполне определенное число. Например, для дельта-функции $\delta(x-x_0)$ число, которое ставится в соответствие каждой «достаточно хорошей» функции $\varphi(x)$, есть значение $\varphi(x_0)$.

Но если так, то мы можем и не задумываться больше над смыслом понятия «сингулярная функция»: мы можем теперь отождествить «сингулярную функцию» с тем функционалом, о котором конкретно идет речь, — это и будет вполне достаточным ее определением (при условии, что точно указан и тот класс «достаточно хороших» функций, на котором задан этот функционал).

Обыкновенные интегрируемые функции, разумеется, также укладываются в эту схему: для каждой такой функции $f(x)$ мы умеем ответить на вопрос, чему равен интеграл от произведения $f(x)$ на «хорошую функцию». Таким образом, представление об обобщенных функциях как о функционалах охватывает как «сингулярные», так и обыкновенные функции.

Перейдем теперь к формулировке точных определений.

2. Основные функции. Прежде всего нужно задать совокупность тех функций, которые мы называли условно «достаточно хорошими», на которых будут действовать в дальнейшем наши функционалы,

В качестве этой совокупности мы рассмотрим множество K всех вещественных функций $\varphi(x)$ *), каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т. е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой из функций $\varphi(x)$).

*) Как правило, $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ означает точку n-мерного пространства R_n. Читатель может при первом чтении представлять себе точку x на прямой.

Эти функции будем называть *основными*, а всю их совокупность K назовем *основным пространством*.

Основные функции можно складывать друг с другом и умножать на вещественные числа, причем снова будут получаться основные функции; таким образом, совокупность K есть линейное пространство.

Далее, мы будем говорить, что *последовательность* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x), \ldots$ основных функций *стремится к нулю в пространстве* K, если все эти функции обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю (в обычном смысле) так же, как и их производные любого порядка.

Примером основной функции, обращающейся в нуль при $r\equiv|x|=\sqrt{\sum x_i^2}\geqslant a$, может служить функция

$$\varphi(x, a)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}} & \text{при } r<a, \\ 0 & \text{при } r\geqslant a. \end{cases} \tag{1}$$

Последовательность функций $\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi(x, a)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ стремится к нулю в пространстве K. Последовательность функций $\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{x}{\nu}, a\right)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ стремится к нулю равномерно вместе со всеми производными, но не стремится к нулю в пространстве K, поскольку нет общей ограниченной области, вне которой эти функции обращаются в нуль.

Существует много разнообразных основных функций. Например (см. добавление 1 к этой главе, п. 1), для заданной финитной непрерывной функции $f(x)$ всегда можно указать как угодно близкую к ней основную функцию $\varphi(x)$, т. е. такую основную функцию, что при всех x и заданном $\varepsilon>0$

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

3. Обобщенные функции. Мы говорим, что нам задан *линейный непрерывный функционал* f на пространстве K, если указано правило, в силу которого с каждой основной функцией $\varphi(x)$ сопоставлено некоторое вещественное число (f, φ), и при этом выполнены следующие условия:

а) для любых двух вещественных чисел α_1, α_2 и любых двух основных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ имеет место равенство $(f, \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f, \varphi_1)+\alpha_2(f, \varphi_2)$ (свойство линейности функционала f);

б) если последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ стремится к нулю в пространстве K, то последовательность чисел $(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \ldots, (f, \varphi_\nu), \ldots$ сходится к нулю (свойство непрерывности функционала f).

Например, пусть задана некоторая функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая в каждой конечной области пространства R_n (такие функции будем в дальнейшем называть *локально интегрируемыми*). С помощью этой функции мы можем каждой основной функции $\varphi(x)$ поставить в соответствие число

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \varphi(x)\, dx, \tag{1}$$

где интегрирование фактически совершается по ограниченной области, вне которой функция $\varphi(x)$ обращается в нуль. Легко проверить, что для функционала f условия а) и б) выполнены; в частности, выполнение условия б) вытекает из возможности перехода к пределу под знаком интеграла в случае равномерной сходимости подынтегральных функций в ограниченной области.

Функционал вида (1) есть весьма частный пример линейного непрерывного функционала на пространстве K. Легко можно указать и функционалы иного типа. Например, функционал, который ставит в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ ее значение в точке $x_0 = 0$, очевидно, линеен и непрерывен. Но легко показать, что он не может быть представлен в виде (1) ни при какой локально интегрируемой функции $f(x)$.

Действительно, предположим, что для некоторой локально интегрируемой функции $f(x)$ и любой основной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\int_{R_n} f(x) \varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

В частности, для рассмотренной в предыдущем пункте функции $\varphi(x, a)$, равной $e^{-\frac{a^2}{a^2 - r^2}}$ при $r < a$ и нулю при $r \geqslant a$,

$$\int_{R_n} f(x) \varphi(x, a)\, dx = \varphi(0, a) = e^{-1}. \tag{2}$$

Но при $a \to 0$ интеграл слева стремится к нулю, что противоречит равенству (2).

Указанный функционал мы будем называть *дельта-функцией* в соответствии с установившейся терминологией (хотя и не точной, поскольку дельта-функция не есть функция в классическом смысле слова) и обозначать через $\delta(x)$; таким образом,

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Часто встречается также «сдвинутая» дельта-функция — функционал $\delta(x - x_0)$, определяемый равенством

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

Обобщенной функцией мы будем теперь называть каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве K. Обобщенные функции, задаваемые формулами вида (1), будем называть *регулярными*, все остальные (в том числе дельта-функцию) — *сингулярными*.

Регулярную обобщенную функцию f, действующую по формуле *)

$$(f, \varphi) = C \int \varphi(x)\, dx = \int C \varphi(x)\, dx,$$

будем называть *постоянной* C. Например, обобщенная функция *единица* действует по формуле

$$(1, \varphi) = \int \varphi(x)\, dx.$$

Можно показать (см. вып. 2, гл. II, § 1, п. 5), что значения регулярного функционала на основных функциях позволяют однозначно определить соответствующую функцию $f(x)$ с точностью до ее значений на множестве меры нуль. Это означает, что *различным функциям* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *соответствуют различные* (т. е. имеющие различные значения на некоторых основных функциях) *обобщенные функции*. Поэтому всю совокупность обычных локально интегрируемых функций можно рассматривать как некоторую часть совокупности всех обобщенных функций.

*) Условимся при интегрировании по всему пространству значок R_n у знака интеграла опускать.

По этой же причине иногда удобно и для обобщенных функций сохранить обозначение $f(x)$, как для дельта-функции, хотя теперь уже нельзя говорить о значениях обобщенной функции в отдельных точках (так что запись $f(x_0)$ для обобщенной функции, вообще говоря, не имеет смысла). Кроме того, вместо (f, φ) мы иногда будем писать $\int f(x)\varphi(x)\,dx$, хотя с точки зрения обычного анализа такая запись не имеет, вообще говоря, смысла. Например, мы будем иногда вместо $(\delta(x), \varphi(x))$ писать $\int \delta(x)\varphi(x)\,dx$. Таким образом, $\int \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$.

Совокупность всех обобщенных функций обозначим через K'.

4. Локальные свойства обобщенных функций. Мы уже знаем, что обобщенные функции не имеют значений в отдельных точках. Нельзя, например, говорить, что обобщенная функция f «равна нулю в точке x_0». Но высказыванию «обобщенная функция f равна нулю в окрестности U точки x_0» можно придать уже вполне четкий смысл: именно, оно означает, что для каждой основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в пределах окрестности U, имеет место равенство $(f, \varphi) = 0$.

Так, обобщенная функция f, отвечающая обычной функции $f(x)$, равна нулю в окрестности U точки x_0, если в этой окрестности обращается в нуль (почти всюду) сама функция $f(x)$. Сингулярная обобщенная функция $\delta(x - x_1)$ равна нулю в некоторой окрестности любой точки $x_0 \neq x_1$.

Условимся также говорить, что обобщенная функция f равна нулю в открытой области G, если она равна нулю в некоторой окрестности каждой точки этой области.

Можно доказать (см. добавление 1), что обобщенная функция, равная нулю в окрестности любой точки, и в целом равна нулю, т. е. для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(f, \varphi) = 0.$$

Если обобщенная функция f не равна нулю ни в какой окрестности точки x_0, то x_0 называется *существенной точкой* для функционала f. Так, например, на прямой точка $x_0 = 0$ — существенная точка для функционала $f(x) = x^2$ (хотя в ней сама функция x^2 обращается в нуль!). Конечно, все остальные точки оси x также являются существенными для $f(x) = x^2$. Совокупность всех существенных точек называется *носителем* обобщенной функции f. Носитель обобщенной функции f, отвечающей обычной непрерывной (или кусочно непрерывной) функции $f(x)$, есть замыкание множества, на котором $f(x) \neq 0$. Носитель обобщенной функции $\delta(x - x_0)$ есть одна точка x_0. Если множество F содержит носитель функционала f, то говорят также, что функционал f *сосредоточен на множестве* F.

Название «существенные точки» оправдывается следующим свойством (которое будет доказано в п. 3 добавления 1): если основная функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в некоторой окрестности носителя функционала f, то $(f, \varphi) = 0$. Отсюда следует, что произвольное изменение основной функции φ вне окрестности носителя обобщенной функции f не влияет на значение величины (f, φ); действительно, указанное изменение равносильно добавлению к основной функции φ другой основной функции ψ, равной нулю в окрестности носителя функционала f, поэтому $(f, \psi) = 0$ и, следовательно, $(f, \varphi + \psi) = (f, \varphi)$.

Теперь перейдем к локальному сравнению двух произвольных обобщенных функций. Будем говорить, что обобщенные функции f и g *совпадают в открытой области* G, если разность $f - g$ в этой области равна нулю. Можно показать, что если f и g совпадают в окрестности каждой точки, то они совпадают и в целом, т. е. $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ при любой φ; отсюда следует, что обобщенная функция f однозначно определяется по своим локальным свойствам. Более того, можно даже п о с т р о и т ь обобщенную функцию по заданным ее локальным значениям (добавление 1, п. 3).

В частности, мы будем говорить, что обобщенная функция f *регулярна в области* G, если в этой области она совпадает с некоторой обычной локально интегрируемой функцией.

Например, дельта-функция $\delta(x - x_0)$ вне точки x_0 всюду регулярна (и равна нулю).

Одна из важных проблем теории обобщенных функций состоит в следующем: дана (обычная) функция $f(x)$, вообще не являющаяся локально интегрируемой, например $\frac{1}{x}$ на прямой. Существует ли обобщенная функция f, совпадающая с $f(x)$ во всех точках локальной интегрируемости $f(x)$? Можно ли соответствие $f(x) \to f$ устроить таким образом, чтобы обычные операции сложения, умножения на функцию, дифференцирования, которые мы определим ниже и для обобщенных функций, сохранялись бы при этом соответствии? Ясно, что положительный ответ на подобные вопросы весьма существенен: он приводит к включению в схему обобщенных функций обычных функций, имеющих неинтегрируемые особенности.

Ответы на эти вопросы имеются пока лишь частичные. См. далее п. 7 § 1, а также § 3.

5. Операции сложения и умножения на число и на функцию. Пусть даны две обобщенные функции f и g; определим их *сумму* $f+g$ как функционал на пространстве K, действующий по формуле

$$(f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Легко проверить, что определенный по этой формуле функционал $f+g$ снова является линейным непрерывным функционалом. В частности, если f и g — регулярные функционалы, соответствующие функциям $f(x)$ и $g(x)$, то $f+g$ есть также регулярный функционал, соответствующий функции $f(x)+g(x)$. Это подтверждает естественность принятого определения суммы обобщенных функций.

Произведение обобщенной функции f на число α определяется формулой

$$(\alpha f, \varphi) = \alpha (f, \varphi) = (f, \alpha\varphi).$$

Очевидно, что и этот функционал линеен и непрерывен. Для регулярного функционала f, соответствующего локально интегрируемой функции $f(x)$, введенная операция отвечает умножению функции $f(x)$ на число α.

По-видимому, невозможно определить сколько-нибудь естественным образом произведение любых двух обобщенных функций. Но вполне естественно определяется *произведение любой обобщенной функции f на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$*. Заметим вначале, что произведение бесконечно дифференцируемой функции $a(x)$ на основную функцию $\varphi(x)$ есть снова основная функция $\psi(x) = a(x)\varphi(x)$; при этом если последовательность основных функций $\varphi_\nu(x)$ стремится к нулю в пространстве K, то последовательность произведений $a(x)\varphi_\nu(x)$ также стремится к нулю в пространстве K. Пусть теперь дана любая обобщенная функция f; определим функционал af по формуле

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi).$$

Функционал af, очевидно, линеен. Он является также и непрерывным функционалом: если $\varphi_\nu(x) \to 0$, то, как было указано, также и $a(x)\varphi_\nu(x) \to 0$, следовательно,

$$(af, \varphi_\nu) = (f, a\varphi_\nu) \to 0.$$

Для регулярного функционала f, отвечающего локально интегрируемой функции $f(x)$, умножение на функцию $a(x)$ соответствует умножению функции $f(x)$ на функцию $a(x)$. Действительно, мы имеем в этом случае

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi) = \int f(x)\,[a(x)\varphi(x)]\,dx = \int [a(x)f(x)]\,\varphi(x)\,dx,$$

что и требуется.

6. Сдвиги, повороты и другие линейные преобразования в области независимых переменных. При $h>0$ функция $f(x-h)$ на оси называется в анализе *сдвигом вправо функции $f(x)$ на величину h*. Обратим внимание на то, что операция, которая производится здесь с независимым переменным, есть *сдвиг влево на величину h* — обратная операция по отношению к операции, произведенной с функцией.

Мы можем следующим образом обобщить эти построения на случай функции n переменных. Пусть u означает некоторое невырожденное линейное преобразование n-мерного пространства R_n и u^{-1} есть обратное преобразование. Тогда соответствующую операцию u в области функций $f(x)$ мы определим формулой

$$uf(x) = f(u^{-1}x). \qquad (1)$$

Операцию u можно перенести и на обобщенные функции. Заметим прежде всего, что вместе со всякой основной функцией $\varphi(x)$ функция $\varphi(ux)$ также является основной. Далее, выясним, какому равенству в функционалах отвечает равенство (1). Считая, что $f(x)$ локально интегрируема, и применяя это равенство к основной функции $\varphi(x)$, находим:

$$(uf(x),\ \varphi(x)) = (f(u^{-1}x),\ \varphi(x)) = \int f(u^{-1}x)\varphi(x)\,dx.$$

В полученном интеграле сделаем замену переменных $u^{-1}x = y$, т. е. $x = uy$, $dx = |u|\,dy$, где $|u|$ означает определитель матрицы преобразования u. Мы получим:

$$(uf,\ \varphi) = |u| \int f(y)\varphi(uy)\,dy = |u|(f(x),\ \varphi(ux)).$$

Это равенство приводит к определению операции u, которую можно применять уже ко всем обобщенным функциям: uf есть функционал, действующий по формуле

$$(uf,\ \varphi) = |u|(f,\ \varphi(ux)). \tag{2}$$

Функционал uf можно также обозначить через $f(u^{-1}x)$ (как для обычных функций), что часто делает формулы более прозрачными. В силу нашего соглашения о символике (см. конец п. 3) мы тогда вместо (2) можем написать:

$$\int f(u^{-1}x)\varphi(x)\,dx = |u| \int f(x)\varphi(ux)\,dx, \tag{2'}$$

где f — любая обобщенная функция.

Особенно простая формула получается для унимодулярных преобразований ($|u| = 1$), в частности для поворотов:

$$(f(u^{-1}x),\ \varphi(x)) \equiv (uf,\ \varphi) = (f,\ \varphi(ux)). \tag{3}$$

Примеры операций:

1. С д в и г н а в е к т о р h: $ux = x + h$. Сдвиг обобщенной функции f на вектор h задается формулой

$$(uf,\ \varphi) = (f,\ \varphi(ux)) = (f,\ \varphi(x+h)).$$

Можно записать эту формулу также в виде

$$(f(x-h),\ \varphi) = (f,\ \varphi(x+h)),$$

или

$$\int f(x-h)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(x+h)\,dx$$

(f — обобщенная функция).

2. О т р а ж е н и е в н а ч а л е к о о р д и н а т: $ux = -x$. Отражение обобщенной функции f задается формулой

$$(f(-x),\ \varphi(x)) \equiv (uf,\ \varphi) = (f,\ \varphi(-x)),$$

или

$$\int f(-x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(-x)\,dx.$$

3. П р е о б р а з о в а н и е п о д о б и я: $ux = \alpha x$. Преобразование подобия обобщенной функции f задается формулой

$$(f(u^{-1}x),\ \varphi(x)) \equiv (uf,\ \varphi) = \alpha^n (f(x),\ \varphi(\alpha x)).$$

Обобщенная функция f называется, естественно, *инвариантной относительно операции* u, если $uf = f$.

Например, обобщенная функция может быть инвариантной относительно отражения в начале координат (т. е. удовлетворяющей уравнению $(f,\ \varphi(-x)) = (f,\ \varphi))$; ее естественно называть *центрально симметричной*. Обобщенные функции, инвариантные относительно всех поворотов, мы будем называть *сферически симметричными*. Примерами таковых являются все регулярные функционалы, соответствующие функциям, зависящим только от $r = \sqrt{\sum x_j^2}$, а также δ-функция. Функцию, инвариантную относительно сдвига на вектор h, будем называть *периодической* с периодом h. Можно показать, что обобщенная функция, инвариантная относительно всех сдвигов, есть постоянная (см. § 2, п. 6).

Обобщенная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x) \tag{4}$$

при любом вещественном $\alpha > 0$, называется, естественно, *однородной функцией степени* λ. Условие (4) может быть записано также в виде

$$\alpha^{-n}\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^\lambda (f(x),\ \varphi(x)),$$

или, что то же,

$$\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f(x),\ \varphi(x)).$$

Так, $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ есть однородная функция степени $-n$. Кроме того, разумеется, обычные однородные функции (локально интегрируемые) являются однородными и как обобщенные функции с той же степенью. Подробнее об однородных обобщенных функциях мы будем говорить далее в § 4 и затем в гл. III.

7. Проблема регуляризации расходящихся интегралов. Пусть $f(x)$ — функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки x_0, а в этой точке имеющая неинтегрируемую особенность $\left(\text{например, } f(x) = \frac{1}{x} \text{ на оси}\right)$. Тогда интеграл

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ — основная функция, вообще говоря, расходится. Но он сходится, если $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности точки x_0. Поставим вопрос, нельзя ли доопределить возникающий при этом функционал, т. е. построить функционал $f \in K'$, который на основные функции $\varphi(x)$, равные нулю в окрестности точки x_0, действует по формуле (1). Всякий такой функционал f называется *регуляризацией расходящегося интеграла* (1) (или *регуляризацией функции* $f(x)$).

Так, для $f(x) = \frac{1}{x}$ можно положить

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx + \int_{b}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \qquad (2)$$

с любыми $a, b > 0$.

Определение регуляризации можно дать и в несколько иной форме: регуляризация функции $f(x)$ есть линейный непрерывный функционал f, который совпадает с функцией $f(x)$ всюду вне точки x_0 (см. п. 4).

Действительно, если имеется функционал f, который для всех основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности точки x_0, задается интегралом (1), то f совпадает с функцией $f(x)$ в некоторой окрестности любой точки $x_1 \neq x_0$, а именно в окрестности, не содержащей x_0 ни внутри, ни на границе. С другой стороны, если функционал f совпадает с функцией $f(x)$ всюду вне точки x_0, то для любой основной функции, равной нулю в окрестности точки x_0, имеет место формула (1) и, следовательно, f определяет регуляризацию функции $f(x)$.

Приведем некоторые общие соображения, касающиеся разрешимости проблемы регуляризации. Для простоты будем считать, что $x_0 = 0$.

1°. *Если при некотором* $m > 0$ *функция* $f(x) \cdot r^m$ *локально интегрируема, то интеграл* (1) *допускает регуляризацию.*

Действительно, в этом случае мы можем построить регуляризацию f по формуле

$$(f, \varphi) = \int f(x) \Big\{\varphi(x) - \\ - \left[\varphi(0) + \frac{\partial\varphi(0)}{\partial x_1} x_1 + \ldots + \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_n^m} \frac{x_n^m}{m!}\right] \theta(1 - r)\Big\}\,dx \qquad (3)$$

(из функции $\varphi(x)$ вычитается столько членов ее ряда Тейлора, чтобы остаток имел порядок выше r^m). Функция $\theta(1-r)$ равна единице при $r < 1$ и равна нулю при $r > 1$.

Очевидно, что интеграл (3) сходится при любой основной функции $\varphi(x)$ и представляет собой линейный непрерывный функционал. Если функция $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности начала координат, то выражение (3) превращается в

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx,$$

так что функционал f вне начала координат совпадает с функцией $f(x)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае проблема регуляризации имеет решение.

2°. *Если* f_0 — *частное решение проблемы регуляризации интеграла* (1), *то общее решение* f *получается прибавлением к* f_0 *любого функционала, сосредоточенного в точке* $x_0 = 0$.

Действительно, пусть f_0 — регуляризация, а g — функционал, сосредоточенный в этой точке. Тогда для основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности точки $x_0 = 0$,

$$(f_0 + g, \varphi) = (f_0, \varphi) + (g, \varphi) = (f_0, \varphi),$$

так что и $f_0 + g$ является регуляризацией. Обратно, если f_0 и f_1 — две различные регуляризации, то для таких же $\varphi(x)$

$$(f_1 - f_0, \varphi) = (f_1, \varphi) - (f_0, \varphi) = 0,$$

т. е. разность $f_1 - f_0$ сосредоточена в точке $x_0 = 0$, Например, в случае $f(x)=\frac{1}{x}$ разность двух любых регуляризаций, определяемых формулой (2), как легко вывести из самой этой формулы, есть просто $C\delta(x)$, где C — постоянный множитель.

Вопросом о выборе среди многочисленных регуляризаций данной функции естественной ее регуляризации мы займемся позднее, в § 3.

3°. *Если в некотором телесном угле с вершиной в начале координат функция $f(x)$ допускает оценку*

$$f(x)\geqslant F(r), \tag{4}$$

где $F(r)$ возрастает при $r\to 0$ быстрее любой степени $\frac{1}{r}$, то интеграл (1) *не допускает регуляризации.*

Для простоты будем считать, что телесный угол, о котором идет речь, содержит область $H=(x_1>0, \ldots, x_n>0)$. В общем случае доказательство проводится аналогично. Рассмотрим основную функцию $\varphi(x)$, неотрицательную, обращающуюся в нуль при $|x|\geqslant 1$ и обладающую интегралом, равным 1. Пусть, далее, $\varepsilon_\nu>0$ — произвольная последовательность чисел, стремящихся к 0 быстрее любой степени $\frac{1}{\nu}$.

Функция $\psi_\nu(x)$, полученная из функции $\varepsilon_\nu\varphi(\nu x)$ смещением вдоль биссектрисы $x_1=\ldots=x_n$ на отрезок $\frac{\sqrt{n}}{\nu}$, обращается в нуль вне области H и при достаточно большом ν обращается в нуль вне пересечения этой области с произвольно малым шаром с центром в начале координат. Далее, последовательность функций $\psi_\nu(x)$, как легко видеть, при $\nu\to\infty$ стремится к нулю в пространстве K. Поэтому если бы существовал функционал f, регуляризирующий интеграл (1), мы должны были бы иметь

$$(f, \psi_\nu)\to 0. \tag{5}$$

Но так как в окрестности точки $x=0$ функция $\psi_\nu(x)$ обращается в нуль, а вне начала функционал f совпадает с функцией $f(x)$, удовлетворяющей неравенству (4), то

$$(f, \psi_\nu)=\int f(x)\,\psi_\nu(x)\,dx\geqslant\varepsilon_\nu\int F(r)\,\varphi(\nu x)\,dx.$$

Интеграл от функции $\varphi(\nu x)$ равен, очевидно, $\frac{1}{\nu^n}$; мы получаем, таким образом, оценку

$$(f, \psi_\nu)>\frac{\varepsilon_\nu}{\nu^n}F\left(\frac{2}{\nu}\sqrt{n}\right). \tag{6}$$

Числа ε_ν мы еще пока не фиксировали. Положим

$$\varepsilon_\nu=\frac{\nu^n}{F\left(\frac{2}{\nu}\sqrt{n}\right)}; \tag{7}$$

так как $F(r)$ возрастает быстрее любой степени $\frac{1}{r}$, то числа ε_ν, заданные по формуле (7), стремятся к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{\nu}$, что нам и нужно. Но тогда, как показывает неравенство (6), числа (f, ψ_ν) превосходят единицу и, следовательно, не стремятся к нулю в противоречие с соотношением (5).

Поэтому в данном случае интеграл (1) не может быть регуляризован.

Замечание. Этот результат не означает, что в анализе обобщенных функций вообще нужно отказаться от рассмотрения функций с особенностями выше степенных. Мы рассматриваем пока только основные функции специального вида (пространство K). Во втором выпуске будут указаны иные пространства основных функций; среди этих пространств всегда можно будет найти такие, для которых будут иметь смысл, как функционалы, и функции с как угодно сильными особенностями.

В заключение отметим, что определение регуляризации аналогичным образом можно дать тогда, когда $f(x)$ имеет не одну, а несколько или даже счетное число изолированных особых точек, конечное в любом конечном интервале.

Такую функцию $f(x)$ всегда можно представить в виде суммы

$$f(x)=\sum f_k(x),$$

где $f_k(x)$ имеет только одну особую точку (см. добавление 1, п. 2); поэтому случай со счетным числом изолированнных особенностей по существу не представляет ничего нового.

8. Предельный переход. Последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, по определению, *сходится к обобщенной функции* f, если для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{\nu\to\infty}(f_\nu, \varphi)=(f, \varphi).$$

Можно, разумеется, считать, что индекс ν пробегает и непрерывное множество значений; определение предельного перехода при этом остается таким же.

Аналогично ряд из обобщенных функций $h_1 + h_2 + \ldots$ $\ldots + h_\nu + \ldots$ называется *сходящимся к обобщенной функции* g, если последовательность частичных сумм этого ряда

$$g_1 = h_1, \ g_2 = h_1 + h_2, \ \ldots, \ g_\nu = h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu, \ \ldots$$

сходится к обобщенной функции g в указанном выше смысле.

Легко проверить, что предел сходящейся последовательности обобщенных функций определен однозначно.

Далее, операция предельного перехода линейна: если $f = \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu$, а α — число (или бесконечно дифференцируемая функция), то $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha f_\nu$ существует и равен $\alpha \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu = \alpha f$; если $f = \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu$, $g = \lim\limits_{\nu\to\infty} g_\nu$, то $\lim\limits_{\nu\to\infty} (f_\nu + g_\nu)$ существует и равен $f + g$.

Если локально интегрируемые функции $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ в каждой ограниченной области равномерно сходятся к локально интегрируемой функции $f(x)$, то соответствующие функционалы f_ν сходятся к регулярному функционалу f. Действительно, пусть $\varphi(x)$ — некоторая основная функция и G — та область, вне которой функция $\varphi(x)$ равна нулю; тогда, в силу известной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла,

$$(f_\nu, \varphi) = \int\limits_G f_\nu(x) \varphi(x)\, dx \to \int\limits_G f(x) \varphi(x)\, dx = (f, \varphi),$$

что и требуется.

Впрочем, требование равномерной сходимости функций $f_\nu(x)$ в каждой ограниченной области можно, конечно, ослабить; возможность предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается и менее сильными требованиями, как, например:

а) $f_\nu(x) \to f(x)$ почти всюду, $|f_\nu(x)|$ ограничены фиксированной постоянной (или даже локально интегрируемой функцией);

б) $f_\nu(x) \to f(x)$ монотонно возрастая или убывая, $f(x)$ локально интегрируема.

Пример. Последовательность регулярных функционалов может иметь пределом сингулярный функционал. Так, функционал

$$(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

совпадает при $x \neq 0$ с обычной функцией $\frac{1}{x}$, не интегрируемой в любой окрестности начала координат, и потому не является регулярным. Но из самого построения видно, что этот функционал есть предел (при $\varepsilon \to 0$) регулярных функционалов, отвечающих функциям, равным $\frac{1}{x}$ при $|x| > \varepsilon$ и равным нулю при $|x| < \varepsilon$.

Вообще можно показать (это будет доказано во втором выпуске), что *каждый сингулярный функционал есть предел регулярных.*

Легко проверить, что *каждая обобщенная функция есть предел обобщенных функций, сосредоточенных в ограниченных множествах.*

Рассмотрим для доказательства бесконечно дифференцируемую функцию $g_\nu(x)$, равную единице в шаре $|x| \leqslant \nu$ и нулю вне шара $|x| \leqslant 2\nu$. Для любой основной функции φ очевидно, что $g_\nu \varphi = \varphi$, начиная с некоторого ν. Отсюда следует, что для любого функционала f произведения $g_\nu f$ стремятся к f; действительно, для любой основной функции φ мы имеем $(g_\nu f, \varphi) = (f, g_\nu \varphi) = (f, \varphi)$, начиная с некоторого ν, т. е. условие $(g_\nu f, \varphi) \to (f, \varphi)$ заведомо выполняется. Функционал $g_\nu f$, как легко видеть, равен нулю в области $|x| > 2\nu$ и, следовательно, сосредоточен на ограниченном множестве $|x| \leqslant 2\nu$. Итак, обобщенная функция f является пределом обобщенных функций $g_\nu f$, сосредоточенных на ограниченных множествах, что и утверждалось.

Важным фактом является полнота пространства обобщенных функций относительно введенной сходимости. Иными словами, если последовательность функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ такова, что для каждой основной функции φ существует предел числовой последовательности (f_ν, φ), то этот предел определяет снова линейный непрерывный функционал на пространстве K.

Доказательство этого предложения дано в добавлении в конце этого выпуска.

9. Комплексные основные и обобщенные функции. В предыдущем изложении предполагалось, что основные функции $\varphi(x)$ принимают только вещественные значения и что значения функционалов (f, φ) также вещественны.

Можно определить и комплексные обобщенные функции. Для этого мы перейдем от пространства вещественных основных функций к пространству комплексных основных (т. е. бесконечно дифференцируемых и финитных) функций с прежним определением операций.

Комплексной обобщенной функцией мы будем теперь называть всякий линейный непрерывный функционал на этом новом пространстве, принимающий, возможно, и комплексные значения.

Каждой комплекснозначной локально интегрируемой функции $f(x)$ мы поставим в соответствие функционал

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx, \tag{1}$$

где черта сверху означает переход к комплексно сопряженной величине.

Обозначения для пространств комплексных основных и обобщенных функций мы оставим прежние: K и K'.

Действия сложения и умножения на (комплексное) число в пространстве комплексных обобщенных функций задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} (f_1+f_2, \varphi) &= (f_1, \varphi)+(f_2, \varphi), \\ (\alpha f, \varphi) &= \bar\alpha(f, \varphi) = (f, \bar\alpha\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Умножение на комплексную бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ производится по формуле

$$(a(x) f, \varphi) = (f, \overline{a(x)}\, \varphi(x)). \tag{3}$$

Каждой обобщенной функции f можно сопоставить комплексно сопряженную обобщенную функцию $\bar f$ по формуле

$$(\bar f, \varphi) = \overline{(f, \bar\varphi)}. \tag{4}$$

Легко проверить, что для обычной функции $f(x)$, рассматриваемой в качестве обобщенной, операция комплексного сопряжения отвечает переходу к обычной комплексно

сопряженной функции. В дальнейшем мы будем, как правило, рассматривать вещественный случай. Впрочем, результаты, полученные для вещественных обобщенных функций, большей частью автоматически переносятся на комплексный случай с очевидными изменениями, вытекающими из формул (1) — (4).

10. Другие основные пространства. Функционалы, определенные на основном пространстве K, во многих случаях удобно распространять на более широкие пространства функций и изучать уже на этих пространствах.

Одним из наиболее часто встречающихся в применениях является пространство S, образованное из таких бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, которые при $|x| \to \infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, так же как и их производные любого порядка (например, e^{-x^2}). Таким образом, на оси $-\infty < x < \infty$ функции $\varphi(x) \in S$ удовлетворяют неравенствам вида

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \tag{1}$$

при любых $k, q = 0, 1, 2, \ldots$

Для случая нескольких независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ неравенства (1) заменяются неравенствами

$$\left| x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}} \right| \leqslant C_{k_1, \ldots, k_n, q_1, \ldots, q_n}$$

$$(k_1, \ldots, q_n = 0, 1, 2, \ldots),$$

что можно символически записать в более простой форме:

$$|x^k D^q \varphi(x)| \leqslant C_{kq},$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$,

$$D^q = \frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}}.$$

Сходимость в пространстве S вводится следующим образом. Последовательность $\varphi_\nu(x)$ называется *сходящейся к функции* $\varphi(x)$, если производные любого порядка от функции

$\varphi_\nu(x)$ в любой ограниченной области равномерно сходятся к соответствующей производной от функции $\varphi(x)$ и в оценках

$$|x^k D^q \varphi_\nu(x)| \leqslant C_{kq} \tag{2}$$

постоянные C_{kq} можно выбрать не зависящими от ν. В этом случае предельная функция $\varphi(x)$ также принадлежит к пространству S, что вытекает из неравенства (2) в результате предельного перехода при $\nu \to \infty$.

Очевидно, что каждая финитная бесконечно дифференцируемая функция, т. е. основная функция из пространства K, принадлежит и к пространству S. Более того, *финитные функции образуют в пространстве S плотное множество*. Для доказательства построим функцию $e_\nu(x) \in K$, равную единице в кубе $|x_j| \leqslant \nu$, равную нулю вне куба $|x_j| \leqslant 2\nu$ и такую, чтобы производные любого фиксированного порядка у всех функций $e_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ были бы ограничены одним и тем же числом, не зависящим от ν *).

Если теперь $\varphi(x)$ — любая функция из пространства S, то произведения $\varphi_\nu(x) = \varphi(x) e_\nu(x)$ финитны и, как легко убедиться, сходятся к функции $\varphi(x)$ в пространстве S, что и утверждается.

Отметим еще, что если $\varphi_\nu, \varphi \in K$ и $\varphi_\nu \to \varphi$ в K, то, очевидно, $\varphi_\nu \to \varphi$ и в смысле сходимости в S; иными словами, сходимость в пространстве K более сильная, чем сходимость в пространстве S.

Совокупность линейных непрерывных функционалов на пространстве S обозначается через S'. Очевидно, что каждый линейный непрерывный функционал на пространстве S есть тем самым и линейный непрерывный функционал на пространстве K, так что $S' \subset K'$. Но, конечно, далеко не все линейные непрерывные функционалы на K могут быть распространены на пространство S. (Заметим, во всяком случае, что если такое распространение для данного функционала f возможно, то оно единственно в силу плотности K в S.) Однако на пространство S распространяются все финитные функционалы (сосредоточенные в ограниченной области), все регулярные функционалы, отвечающие функциям $f(x)$, растущим не быстрее какой-нибудь степени $|x|$ при $|x| \to \infty$, и некоторые другие.

*) Например, можно как угодно построить $e_1(x)$ и затем положить $e_\nu(x) = e_1\left(\frac{x}{\nu}\right)$.

Очевидно, что S' есть линейное пространство: если $f, g \in S'$, то $\alpha f + \beta g \in S'$ для любых чисел α и β. Следовательно, S' — линейное подпространство в пространстве K'.

В пространстве S' можно определить сходимость аналогично тому, как это было сделано в K': будем говорить, что последовательность функционалов f_ν из S' *сходится* к функционалу f из S', если для любой функции $\varphi(x) \in S$

$$(f_\nu, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Так как S содержит K, то ясно, что если f_ν, f принадлежат S' и $f_\nu \to f$ в S', то $f_\nu \to f$ в K'. Таким образом, пространство S' вложено в пространство K' вместе со своей сходимостью.

Кроме пространства S, существует много иных типов основных пространств, определяемых разными типами условий убывания основных функций на бесконечности. Мы будем рассматривать такие пространства во втором выпуске.

В этом выпуске пространства S и S' будут играть второстепенную роль. Как правило, мы будем рассматривать пространства K и K'; в тех случаях, когда нам понадобятся другие пространства, это будет специально оговариваться.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Основные определения. Известно, что операция дифференцирования не всегда выполнима для обычных функций: существует большое количество функций, не имеющих производных в обычном смысле слова. В противоположность этому мы покажем, что *обобщенные функции имеют производные* (и притом всех порядков), *которые представляют собой также обобщенные функции*.

Для того чтобы подойти к определению производной обобщенной функции, рассмотрим вначале случай обычных функций одного переменного.

Если функция $f(x)$ непрерывна и обладает непрерывной производной (в обычном смысле), то мы можем построить функционал

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$, мы получаем:

$$(f', \varphi) = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = (f, -\varphi'). \quad (1)$$

Это равенство мы и положим в основу общего определения производной от обобщенной функции. Пусть f — произвольный линейный непрерывный функционал на основном пространстве K. Тогда *функционал g, заданный формулой*

$$(g, \varphi) = (f, -\varphi'), \quad (2)$$

мы будем называть производной от функционала f и обозначать через f' или $\frac{df}{dx}$.

В силу нашего соглашения о символике (§ 1, конец п. 3) определение производной f' обобщенной функции f можно записать очень наглядной формулой:

$$\int f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int f(x)\varphi'(x)\,dx. \quad (2')$$

Чтобы убедиться в корректности определения производной, покажем, что функционал g также является линейным непрерывным функционалом на основном пространстве K. Проверим это утверждение.

Во-первых, функционал g определен *на всех функциях* $\varphi(x)$, поскольку $-\varphi'(x)$ вместе с $\varphi(x)$ есть основная функция. Очевидно, что функционал g линеен. Остается проверить, что он непрерывен.

Пусть дана последовательность основных функций $\varphi_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), стремящаяся к нулю в пространстве K. Тогда, согласно определению сходимости в пространстве K, последовательность производных $-\varphi_\nu'(x)$ также стремится

к нулю в пространстве K. Поэтому, в силу непрерывности функционала f,

$$(g, \varphi_\nu) = (f, -\varphi_\nu') \to 0,$$

что и требуется.

Итак, каждая обобщенная функция f имеет производную.

Легко проверить, что выполняются обычные правила дифференцирования: производная суммы равна сумме производных, и постоянный множитель выносится за знак производной.

Для произведения бесконечно дифференцируемой функции $a(x)$ на обобщенную функцию f остается справедливой классическая формула дифференцирования

$$(af)' = a'f + af'. \quad (3)$$

Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned}((af)', \varphi) &= -(af, \varphi') = -(f, a\varphi') = -(f, (a\varphi)' - a'\varphi) = \\ &= -(f, (a\varphi)') + (f, a'\varphi) = (f', a\varphi) + (a'f, \varphi) = \\ &= (af', \varphi) + (a'f, \varphi) = (af' + a'f, \varphi),\end{aligned}$$

что и требуется.

Переходим теперь к случаю нескольких независимых переменных. В этом случае мы можем определить для каждой обобщенной функции f ее частные производные по каждому из независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по формулам вида

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (4)$$

Так же, как и выше, легко проверяется корректность этого определения: если функционал f регулярен и соответствующая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна и обладает непрерывной производной по переменному x_j, то интегрирование по частям, как и выше, приводит нас к выводу, что функционал $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ есть функционал типа функции $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j}$.

Поскольку результат дифференцирования обобщенной функции есть снова обобщенная функция, мы можем продолжать дифференцирование и определить производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ и т. д. любого порядка.

Таким образом, *все обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.*

В частности, каждая локально интегрируемая функция имеет производные в обобщенном смысле всех порядков. (При этом, если функция f имеет обычную производную, то определяемый последней функционал не обязан совпадать с производной от f в смысле обобщенных функций.)

Во втором выпуске (гл. II, § 4) будет доказана обратная теорема: *каждая обобщенная функция является производной некоторого порядка в обобщенном смысле от некоторой локально интегрируемой функции (и даже от непрерывной функции), или, может быть, конечной суммой таких производных.*

Смешанные производные обобщенных функций не зависят от порядка дифференцирования: так, например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2},\ \varphi\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_2},\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)=\left(f,\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2\,\partial x_1}\right)=\left(f,\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1},\ \varphi\right).$$

Замечание. Можно определить производную обобщенной функции и как предел некоторого отношения — это ближе к обычному определению производной. Ограничимся для простоты случаем функций одного переменного.

Напомним, что для всякой обобщенной функции f можно построить ее сдвиг, например на величину Δx, по формуле (см. § 1, п. 6)

$$(f(x+\Delta x),\ \varphi(x))=(f(x),\ \varphi(x-\Delta x)). \tag{5}$$

Покажем теперь, что для всякой обобщенной функции существует предел (в смысле обобщенных функций) отношения

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{6}$$

при $\Delta x\to 0$, и этот предел совпадает с определенной выше производной $\frac{df}{dx}$. Действительно, применяя (6) к основной функции $\varphi(x)$ и используя формулу (5), находим:

$$\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ \varphi(x)\right)=\left(f(x),\ \frac{\varphi(x-\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right).$$

Но отношение $\frac{\varphi(x-\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$ имеет при $\Delta x\to 0$ своим пределом основную функцию $-\varphi'(x)$ в смысле сходимости, установленной в пространстве K. Так как функционал f непрерывен, то

$$\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ \varphi(x)\right)\to(f(x),\ -\varphi'(x))=(f',\ \varphi),$$

где f' — определенная выше производная обобщенной функции f. Таким образом, отношение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ действительно имеет пределом в пространстве K' функционал $f'(x)$, что и утверждалось.

2. Примеры для случая функций одного независимого переменного. Выше мы видели, что функционал f' соответствует функции $f'(x)$, если функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны. Нетрудно убедиться, что это верно и тогда, когда $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ только кусочно непрерывна (и может отсутствовать в конечном числе точек). Действительно, в этом случае остается справедливым равенство (1) предыдущего пункта.

Еще более общим условием, при котором сохраняется равенство (1) п. 1, является абсолютная непрерывность $f(x)$, которая, как известно, влечет существование $f'(x)$ почти всюду, локальную интегрируемость ее и выполнение формулы интегрирования по частям, соответствующей равенству (1) п. 1.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\theta(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Отвечающий ей функционал будем также обозначать через $\theta(x)$. Согласно общей формуле (2) из п. 1, функционал $\theta'(x)$ действует на основную функцию $\varphi(x)$ так:

$$(\theta'(x),\ \varphi(x))=(\theta(x),\ -\varphi'(x))=-\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx=\varphi(0);$$

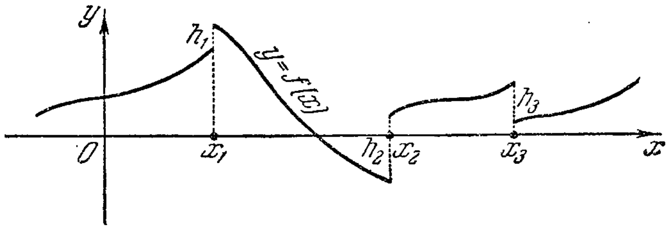
таким образом, в силу определения дельта-функции (§ 1, п. 3),

$$\theta'(x)=\delta(x).$$

Аналогично, как легко проверить,

$$\theta'(x-h)=\delta(x-h).$$

П р и м е р 2. Пусть теперь $f(x)$ — кусочно непрерывная функция с кусочно непрерывной производной $f'(x)$, имеющая в точках $x_1, x_2, \ldots$ разрывы 1-го рода со скачками $h_1, h_2, \ldots$ (черт. 1). Производная $f'(x)$ определена всюду, кроме



Черт. 1.

конечного числа точек. Найдем производную от ф у н к ц и о н а л а f, соответствующего функции $f(x)$.

Введем функцию

$$f_1(x)=f(x)-\sum_k h_k\,\theta(x-x_k). \tag{1}$$

Очевидно, что она всюду непрерывна и имеет, исключая конечное число точек, производную, равную $f'(x)$. Производная от регулярного функционала f_1, соответствующего функции $f_1(x)$, в силу сказанного в начале этого пункта, совпадает с регулярным функционалом, определяемым функцией $f'(x)$. Таким образом, дифференцируя равенство (1), мы находим:

$$f_1'=f'-\sum_k h_k\,\delta(x-x_k),$$

откуда

$$f'=f_1'+\sum_k h_k\,\delta(x-x_k).$$

Итак, *если $f(x)$ — кусочно непрерывная функция с кусочно непрерывной производной, то при дифференцировании каждая точка разрыва 1-го рода x_k функции $f(x)$ со скачком h_k добавляет в выражение производной слагаемое $h_k\,\delta(x-x_k)$.*

Своеобразное положение возникает, когда дифференцированию подлежит обычная функция $f(x)$, производная которой $f'(x)$ существует в обычном смысле, за исключением, возможно, отдельных точек, но не является локально интегрируемой функцией $\left(\text{например, } f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}} \text{ или } f(x)=\ln|x|\right)$. Здесь обобщенная функция f' формально должна быть задана интегралом

$$(f',\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Но этот интеграл, вообще говоря, расходится и тем самым не определяет функционала.

В п. 4 добавления 1 будет показано, что искомый функционал f' должен совпадать с функцией $f'(x)$ во всех точках, где $f'(x)$ локально интегрируема. Таким образом, искомый функционал f' представляет собой одну из возможных регуляризаций (см. § 1, п. 7) интеграла (2), а именно регуляризацию, определяемую формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx=(f',\varphi)=-(f,\varphi')=-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx. \tag{3}$$

В п. 7 § 1 мы видели, что регуляризация f функции $f(x)$ с неинтегрируемыми особенностями в отдельных точках определена (если она существует) лишь с точностью до прибавления произвольного функционала, сосредоточенного в этих точках. Формула же (3) определяет одну конкретную регуляризацию. Можно показать, что именно эта регуляризация является в известном смысле естественной. Ср. § 3, пп. 1 и 7.

Желательно упростить формулу (3) так, чтобы в окончательном результате фигурировала сама функция $\varphi(x)$, а не ее производная. Такое упрощение часто удается проделать, используя конкретный вид функции $f(x)$ и соответственно преобразуя правую часть равенства (3).

П р и м е р 3. Найдем производную от обобщенной функции

$$x_+^\lambda=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x^\lambda & \text{при } x\geqslant 0,\end{cases}\quad -1<\lambda<0.$$

Эта функция локально интегрируема, но ее производная в обычном смысле $\lambda x^{\lambda-1}$ не является локально интегрируемой, и мы приходим к задаче о регуляризации расходящегося интеграла

$$\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Согласно общему правилу дифференцирования обобщенной функции,

$$((x_+^\lambda)', \varphi) = -(x_+^\lambda, \varphi') = -\int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx.$$

Интегрируем по частям, полагая $\varphi'(x)\,dx = du$, $x^\lambda = v$, $u = \varphi(x) + C$; мы получим:

$$((x_+^\lambda)', \varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[x^\lambda(\varphi(x)+C)\Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)+C]\,dx\right].$$

Первое слагаемое под знаком предела само имеет предел при $\varepsilon\to 0$, и притом равный нулю, если C положить равным $-\varphi(0)$. Будем считать, что C выбрано именно так; тогда мы имеем:

$$((x_+^\lambda)', \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx =$$
$$= \int_0^\infty [\varphi(x)-\varphi(0)]\,\lambda x^{\lambda-1}\,dx, \tag{5}$$

что и представляет собой искомое правило для придания смысла расходящемуся интегралу (4). Это правило, как мы видим, в данном случае состоит в том, что функция $\varphi(x)$ под знаком интеграла (4) заменяется на $\varphi(x)-\varphi(0)$, что обеспечивает сходимость интеграла при $x=0$ (и не нарушает его сходимости на бесконечности). Определяемую равенством (5) обобщенную функцию естественно обозначить через $\lambda x_+^{\lambda-1}$; таким образом,

$$(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}.$$

Функционал $\lambda x_+^{\lambda-1}$ уже не является регулярным. Но все же при $x\neq 0$ он совпадает с регулярным функционалом: из формулы (5) ясно, что на основные функции $\varphi(x)$, отличные от нуля только при $x\neq 0$, он действует как обычная функция $\lambda x_+^{\lambda-1}$.

Пример 4. Несколько сложнее подсчитывается производная от обобщенной функции

$$\ln x_+ = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0,\\ \ln x & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Здесь формальное дифференцирование

$$((\ln x_+)', \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \tag{6}$$

приводит снова к расходящемуся интегралу. Этот расходящийся интеграл уже не регуляризуется заменой $\varphi(x)$ на $\varphi(x)-\varphi(0)$, так как полученный после этой замены интеграл становится расходящимся на бесконечности.

Действуя по схеме предыдущего примера, мы получаем:

$$((\ln x_+)', \varphi) = -(\ln x_+, \varphi') = -\int_0^\infty \ln x\,\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \ln x\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln x\,\varphi(x)\Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right].$$

Выражение $-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon$ можно заменить более простым выражением $-\varphi(0)\ln\varepsilon$, поскольку разность между ними $[\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)]\ln\varepsilon$ имеет пределом нуль. Далее, можно написать:

$$-\varphi(0)\ln\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(0)\,\theta(1-x)}{x}\,dx,$$

где, как и выше,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

В результате мы получаем:

$$((\ln x_+)', \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(1-x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(1-x)}{x}\,dx,$$

что и представляет собой искомое правило придания смысла расходящемуся интегралу (6). Мы видим, что оно обеспечивает сходимость интеграла при $x=0$ и не нарушает его сходимости на бесконечности.

Так же, как и в предыдущем примере, полученный функционал не является регулярным в целом; при $x>0$ он совпадает с функцией $\frac{1}{x}$.

Пример 5. Найдем производную обобщенной функции $\ln|x|$. Здесь мы встречаемся с необходимостью регуляризации расходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$.

Можно было бы получить правило регуляризации, комбинируя уже известные правила для дифференцирования обобщенных функций $\ln x_+$ и $\ln(-x)_+$. Но проще дать прямое построение:

$$\left(\frac{d\ln|x|}{dx}, \varphi(x)\right) = (\ln|x|, -\varphi'(x)) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \ln|x|\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x|\,\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Как известно, полученный предел называется *главным значением по Коши* интеграла от $\frac{\varphi(x)}{x}$; мы сохраним для

него обозначение $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$. Соответствующую обобщенную функцию мы будем обозначать $\frac{1}{x}$. Итак,

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Функционал $\frac{1}{x}$ не регулярный, но совпадает с функцией $\frac{1}{x}$ всюду при $x\neq 0$.

Можно определить этот функционал также и другой формулой, очевидным образом совпадающей по результату с полученной выше, но содержащей только сходящийся интеграл:

$$\left(\frac{d\ln|x|}{dx}, \varphi\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx.$$

Пример 6. Найдем производную от обобщенной функции $\ln(x+i0)$, определяемой равенством

$$\ln(x+i0) = \lim_{y\to+0} \ln(x+iy).$$

Записывая $\ln(x+iy)$ в виде $\ln|x+iy| + i\arg(x+iy)$ и переходя к пределу, мы видим, что

$$\ln(x+i0) = \ln|x| + i\pi\,\theta(-x).$$

Согласно примеру 2, $\theta'(x) = \delta(x)$; так как $\theta(x) + \theta(-x) = 1$, то $\theta'(-x) = -\delta(x)$. Поэтому

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \frac{d}{dx}\ln|x| + i\pi\frac{d}{dx}\theta(-x) = \frac{1}{x} - i\pi\,\delta(x),$$

где обобщенная функция $\frac{1}{x}$ определена в примере 5. Ср. также ниже пример 4 в п. 4.

Пример 7. В заключение этого пункта построим производные от дельта-функции. Мы имеем, очевидно,

$$(\delta'(x-h), \varphi) = (\delta(x-h), -\varphi') = -\varphi'(h)$$

и вообще

$$\left(\delta^{(k)}(x-h), \varphi\right) = (-1)^k \varphi^{(k)}(h) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

или в символике, принятой в п. 3 § 1,

$$\int \delta^{(k)}(x-h)\varphi(x)\,dx = (-1)^k \varphi^{(k)}(h).$$

3. Примеры для случая функций нескольких независимых переменных. Отметим прежде всего, что для непрерывных функций $f(x)$ с кусочно непрерывными частными производными дифференцирование соответствующих регулярных функционалов приводит снова к регулярным функционалам, соответствующим указанным производным.

Пример 1. Пусть $f(x)$ — функция с непрерывными производными в области G, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, на плоскости x_1, x_2. Вне области G функция $f(x)$ предполагается равной нулю; при переходе через границу Γ она испытывает скачок. Найдем функционал $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. По общему правилу для любой основной функции φ имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = -\int_G\int f(x_1, x_2)\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_2.$$

Интегрируя по частям по переменному x_1, находим:

$$\int_G\int f(x_1, x_2)\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1}\,dx_1 dx_2 = \int_{x_2}\left\{ f(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2)\Big|_{x_1^0}^{x_1^1} - \right.$$

$$\left. - \int_{x_1^0}^{x_1^1}\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\right\} dx_2 =$$

$$= \int_\Gamma f(x_1, x_2)\cos(n, x_2)\varphi(x_1, x_2)\,d\gamma -$$

$$- \int_G\int \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

где (n, x_2) — угол в точке (x_1, x_2) на границе Γ области G между внешней нормалью n и осью x_2. Таким образом, функционал $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ составляется из суммы регулярного функционала, соответствующего функции $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$, и сингулярного, отвечающего скачку функции $f(x_1, x_2)$ при переходе через границу Γ области G. Аналогичный результат имеет место в пространстве любого числа измерений.

Известная формула Грина (Δ — оператор Лапласа)

$$\int_G\int f(x_1, x_2)\Delta\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int_G\int \Delta f(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 + \int_\Gamma\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}\varphi\right)d\gamma$$

с учетом равенства $(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta\varphi)$ может быть истолкована следующим образом: *если f есть обобщенная функция, совпадающая в области G с обычной локально интегрируемой функцией $f(x_1, x_2)$ и с нулем вне G, то обобщенная функция Δf есть сумма регулярного функционала, соответствующего функции $\Delta f(x_1, x_2)$ внутри G, и двух сингулярных функционалов, отвечающих скачкам функций f и $\frac{\partial f}{\partial n}$ при переходе через граничную линию.* Аналогичный результат имеет место в пространстве любого числа измерений.

В гл. III (§ 1, п. 4) будет дан непосредственный вывод такого рода соотношений, опирающийся на символику обобщенных функций $\delta(P)$ и аналогичных ей.

Пример 2. Найдем в трехмерном пространстве результат применения оператора Лапласа Δ к регулярному функционалу, определяемому функцией $\frac{1}{r}$ $(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

Заметим, что функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая в любой области, не содержащей начала координат, так что выражение $\Delta\frac{1}{r}$ при $r \neq 0$ обращается в нуль (в обычном смысле). Рассматривая операцию Δ в пространстве обобщенных функций, мы находим:

$$\left(\Delta\frac{1}{r}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{r}, \Delta\varphi\right) = \int\int\int\frac{\Delta\varphi}{r}\,dv = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\int_{r\geqslant\varepsilon}\int\frac{\Delta\varphi}{r}\,dv.$$

К полученному интегралу применим формулу Грина (пример 1), беря в качестве области G шаровой слой $\varepsilon \leqslant r \leqslant a$, где a настолько велико, что вне шара $r \leqslant a$ функция $\varphi(x)$ тождественно равна нулю:

$$\iiint_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r}\, dv =$$

$$= \iiint_{r \geqslant \varepsilon} \varphi \cdot \Delta \frac{1}{r}\, dv - \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r}\, ds + \iint_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}\, ds,$$

где ds есть элемент сферы $r = \varepsilon$. Мы имеем, далее,

$$\iiint_{r \geqslant \varepsilon} \varphi \Delta \frac{1}{r}\, dv = 0,$$

так как $\frac{1}{r}$ вне шара $r \leqslant \varepsilon$ есть гармоническая функция;

$$\iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{1}{r}\, ds = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, ds = O(\varepsilon)\,^{*)},$$

$$\iint_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}\, ds = -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{r=\varepsilon} \varphi\, ds = -4\pi S_\varepsilon(\varphi),$$

где $S_\varepsilon(\varphi)$ — среднее значение функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса ε. В пределе при $\varepsilon \to 0$ мы находим $S_\varepsilon(\varphi) \to \varphi(0)$, и, следовательно,

$$\left(\Delta \frac{1}{r}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r}\, dv = -4\pi\varphi(0) = -4\pi(\delta(x), \varphi(x)).$$

Отсюда

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(x). \tag{1}$$

Аналогичное вычисление при любом числе измерений $n \geqslant 3$ приводит к результату

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\,\Omega_n\,\delta(x),$$

где Ω_n — поверхность сферы радиуса 1 в n-мерном пространстве. При $n = 2$

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi\delta(x).$$

*) Здесь $y = O(x)$ означает, что отношение $\frac{y}{x}$ ограничено.

В дальнейшем (гл. III, § 3, п. 3) будут даны некоторые общие правила для дифференцирования функций в случае локально не интегрируемых производных. С помощью этих правил формулы, подобные формуле (1), можно будет получать автоматически, т. е. подсчетом $\Delta\frac{1}{r}$ как суммы вторых производных от $\frac{1}{r}$.

4. Дифференцирование как непрерывная операция. Пусть дана последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, сходящаяся к обобщенной функции f; мы утверждаем, что *последовательность производных* $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}$ *сходится к производной* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Действительно, для любой основной функции $\varphi(x)$ имеем:

$$\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f_\nu, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) \to \left(f, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right),$$

что и требуется.

Аналогично *ряд обобщенных функций* $h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu + \ldots$, *сходящийся к обобщенной функции* g, *допускает почленное дифференцирование*; иными словами, *имеет место равенство*

$$h_1' + h_2' + \ldots + h_\nu' + \ldots = g'.$$

В классическом анализе подобные теоремы не имеют места: сходящуюся последовательность дифференцируемых функций, вообще говоря, нельзя почленно дифференцировать. Рассмотрим, например, последовательность функций $f_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\sin\nu x$ на оси, равномерно сходящуюся к нулю; производные $f_\nu'(x) = \cos\nu x$ в классическом смысле ни к чему не сходятся, в частности, не сходятся к производной от предельной функции. Но в нашем смысле функционалы $f_\nu'(x)$ сходятся, и именно к нулю; это, помимо общих соображений, получается и прямой выкладкой:

$$(f_\nu', \varphi) = \int_{-a}^{a} \cos\nu x\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\nu}\int_{-a}^{a} \sin\nu x\,\varphi'(x)\,dx \to 0,$$

где $[-a, a]$ — отрезок, вне которого функция $\varphi(x)$ равна нулю. Более того, последовательности $f''_\nu = -\nu \sin \nu x$, $f'''_\nu = -\nu^2 \cos \nu x$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и т. д. также сходятся к нулю в нашем смысле.

Пример 1. Разложение периодической функции в ряд Фурье. Пусть $f(x)$ — периодическая (с периодом 2π) локально интегрируемая функция и числа c_n (коэффициенты Фурье) определены классическими формулами

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

Мы утверждаем, что *ряд Фурье* $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ *имеет своей суммой* (в смысле обобщенных функций) *функцию* $f(x)$. В самом деле, по хорошо известной теореме анализа *) формально проинтегрированный ряд

$$\sum_{-\infty}^{-1} \frac{c_n}{in} e^{inx} + c_0 x + \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

равномерно сходится к абсолютно непрерывной функции $F(x)$, производная которой почти всюду совпадает с $f(x)$. Дифференцируя почленно равенство

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{c_n}{in} e^{inx} + c_0 x + \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx},$$

находим $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, что и требовалось.

Пример 2. *Любой ряд вида* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, *коэффициенты которого возрастают при* $|n| \to \infty$ *не быстрее некоторой степени* n, *является сходящимся в совокупности обобщенных функций*, так как он получается почленным дифференцированием ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{(in)^k} e^{inx}$, который заведомо равномерно сходится при достаточно большом k.

*) А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, Гостехиздат, 1939, 2.621, стр. 33.

Пример 3. Хорошо известно, что ряд $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$ сходится к функции $f(x)$, равной $\frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$ и продолженной с периодом 2π на всю ось, причем частичные суммы этого ряда равномерно ограничены *). Таким образом, ряд сходится и в смысле обобщенных функций (см. § 1, п. 8, а). Дифференцируя этот ряд, находим следующие суммы:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n),\\
&\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n \sin nx + \ldots = -\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2\pi n),\\
&\cos x + 4\cos 2x + \ldots + n^2 \cos nx + \ldots = -\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta''(x - 2\pi n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Раскрывая в первой из этих формул косинусы по формуле Эйлера, мы получаем также равенство

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{-ix} + e^{-2ix} + \ldots = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n). \quad (2)$$

Применяя его к основной функции $\varphi(x)$ и используя тот факт, что

$$(e^{inx}, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-inx}\, dx = \psi(-n) \text{ **)}$$

есть значение в точке $-n$ преобразования Фурье функции $\varphi(x)$, мы получаем равенство

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \psi(n) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n),$$

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III (Гостехиздат, 1949), п. 664, стр. 539. В дальнейших ссылках мы будем называть эту книгу кратко: «Г. М. Фихтенгольц, Курс».

**) Так как e^{inx} — комплексная функция, то она применяется к основной функции $\varphi(x)$ по формуле (1) п. 9 § 1.

которое называется *формулой суммирования Пуассона* *). Оно доказано у нас для функций $\varphi(x)$, принадлежащих к пространству K; но с помощью предельного перехода его можно перенести на более широкий класс функций, например на функции $\varphi(x)$, абсолютно интегрируемые вместе со своей производной.

Аналогично известное равенство **)

$$\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\ \dots\ =-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \tag{3}$$

позволяет вычислить путем дифференцирования новые тригонометрические суммы. Дифференцируя формально, находим:

$$\left.\begin{aligned} &\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\dots=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2},\\ &\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\dots=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},\\ &\sin x+4\sin 2x+9\sin 3x+\dots=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)''=\frac{1}{4}\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Однако уже функция $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ не является локально интегрируемой и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,\varphi(x)\,dx,$$

вообще говоря, расходится. В п. 7 § 3 будут построены обобщенные функции, отвечающие обычным функциям, стоящим справа в (4). При этом обобщенная функция, отвечающая обычной функции $-\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$, будет производной обобщенной функции $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ и т. д. Другими словами, равенствам (4) будет придан смысл с точки зрения теории обобщенных функций.

*) См., например, Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье (Гостехиздат, 1948), стр. 82.

**) Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. III (1949), п. 664, стр. 550.

Формулы (1) и (4) позволяют выделять особенности у суммы тригонометрического ряда $\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, коэффициенты которого устроены, например, следующим образом:

$$a_n=\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\ \dots\ +\alpha_0+\frac{\alpha_{-1}}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2},$$
$$b_n=\beta_j n^j+\beta_{j-1}n^{j-1}+\ \dots\ +\beta_0+\frac{\beta_{-1}}{n}+\frac{\delta_n}{n^2},$$

где α_i и β_i — постоянные, а $\{\gamma_n\}$ и $\{\delta_n\}$ — ограниченные последовательности чисел *).

Пример 4. Рассмотрим функционал f, определяемый функцией

$$\ln(x+i0)=\begin{cases}\ln|x|+i\pi & \text{при}\quad x<0,\\ \ln x & \text{при}\quad x>0.\end{cases}$$

Как видно из определения, это предельные значения аналитической в верхней полуплоскости функции $\ln(x+iy)$ при $y\to 0$. Проверим, что

$$\ln(x+i0)=\lim_{y\to 0}\ln(x+iy)$$

в смысле сходимости обобщенных функций. Действительно, при фиксированном $y>0$

$$\ln(x+iy)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

при $y\to 0$ эта функция стремится к $\ln(x+i0)$, причем:

а) первое слагаемое $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, монотонно убывая, стремится к $\ln|x|$;

б) второе слагаемое $i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, оставаясь по модулю ограниченным (числом π), стремится к функции

$$h(x)=\begin{cases} i\pi & \text{при}\quad x<0,\\ 0 & \text{при}\quad x>0.\end{cases}$$

*) Ср. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II (Гостехиздат, 1957), п. 158, стр. 461. В дальнейшем будем писать: «В. И. Смирнов, Курс».

Поэтому сходимость $\ln(x+iy) \to \ln(x+i0)$ в смысле обобщенных функций имеет место в силу условий, отмеченных в п. 8 § 1.

Производная от $\ln|x|$, как мы знаем, есть $\frac{1}{x}$ (п. 2, пример 5); производная от функции $h(x)$ равна $-i\pi\delta(x)$ (там же, пример 2). Таким образом, заново получается результат примера 6 п. 2:

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

С другой стороны, в силу непрерывности операции дифференцирования,

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \lim_{y\to+0}\frac{d}{dx}\ln(x+iy) = \lim_{y\to+0}\frac{1}{x+iy}.$$

Мы получаем интересную формулу:

$$\lim_{y\to+0}\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \tag{5}$$

которая имеет следующий смысл: для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+iy}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - i\pi\varphi(0),$$

где интеграл справа нужно понимать в смысле главного значения по Коши (см. п. 2, пример 5).

5. Дельта-образные последовательности. Можно многими способами строить последовательности регулярных функционалов, сходящиеся к δ-функции. Для этого нужно только, чтобы соответствующие функции $f_\nu(x)$, как говорят, имели «дельта-образный вид».

Точно это выражается следующими условиями:

а) каково бы ни было $M>0$, при $|a|\leqslant M$, $|b|\leqslant M$ величины

$$\left|\int_a^b f_\nu(\xi)\,d\xi\right|$$

ограничены постоянной, не зависящей от a, b, ν (зависящей только от M);

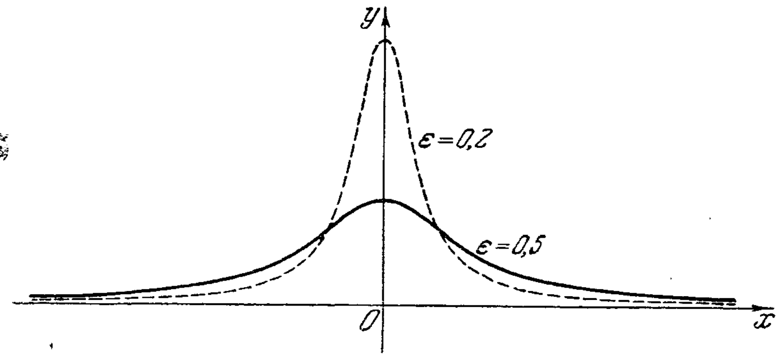
б) при любых фиксированных a и b, отличных от нуля,

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f_\nu(\xi)\,d\xi = \begin{cases}0 & \text{при } a<b<0 \text{ и } 0<a<b,\\ 1 & \text{при } a<0<b.\end{cases}$$

Пусть $f_\nu(x)$ — такая дельта-образная последовательность. Рассмотрим последовательность первообразных функций

$$F_\nu(x) = \int_{-1}^{x} f_\nu(\xi)\,d\xi.$$

Как легко получается из определения дельта-образной последовательности, с возрастанием ν функция $F_\nu(x)$ имеет пределом постоянную, равную нулю при $x<0$, и постоянную, равную единице при $x>0$, и в то же время равномерно (по ν) ограничена в каждом промежутке. Отсюда следует, что



Черт. 2.

функции $F_\nu(x)$ в смысле обобщенных функций имеют пределом функцию $\theta(x)$, равную 0 при $x<0$ и 1 при $x>0$. А тогда функции $f_\nu(x) = F'_\nu(x)$ имеют в смысле обобщенных функций пределом функцию $\theta'(x) = \delta(x)$, что и требуется.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad (\varepsilon>0).$$

График ее показан на черт. 2. Равенство

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{b}{\varepsilon} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\varepsilon}\right]$$

при различных a и b позволяет легко проверить, что при $\varepsilon \to 0$ функции $f_\varepsilon(x)$ образуют дельта-образную последовательность. Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \delta(x). \tag{1}$$

Тот же результат получается, если вспомнить, что

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon};$$

тогда, в силу формулы (5) предыдущего пункта,

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon} \to \delta(x),$$

как и выше.

Дифференцируя по x дельта-образную последовательность, будем получать последовательности, сходящиеся к производным от дельта-функции. Например, из соотношения (1) следует предельное соотношение

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} \to \delta'(x) \tag{2}$$

и т. д. На черт. 3 представлены функции, стоящие слева в (2).

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0).$$

Покажем, что при $t \to 0$ эта функция стремится к δ-функции.

Заметим прежде всего, что $f_t(x) > 0$; поэтому при любых a и b

$$\int_a^b f_t(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx = 1\ ^{*)}.$$

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. II (1948), п. 455, стр. 624—625.

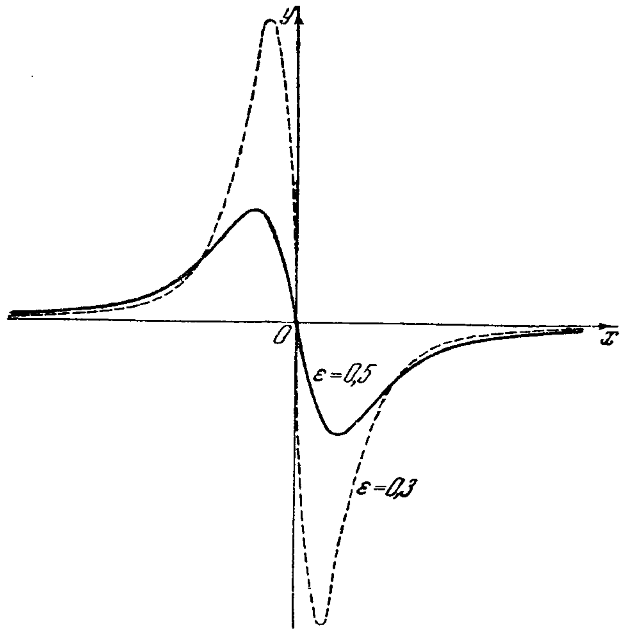
Сделав замену $\frac{x}{\sqrt{t}} = y$, мы видим, что при $a < 0 < b$

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b f_t(x)\,dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{b}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy = 1.$$

Далее, для любого $b > 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx < \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\frac{x}{2t}\frac{2t}{b}\,dx = \frac{\sqrt{t}}{b\sqrt{\pi}} e^{-\frac{b^2}{4t}} \to 0$$

при $t \to 0$, так что интегралы по любому промежутку



Черт. 3.

(b, ∞), $b > 0$, стремятся к нулю. Аналогичный факт имеет место для промежутков $(-\infty, a)$, $a < 0$. Таким образом,

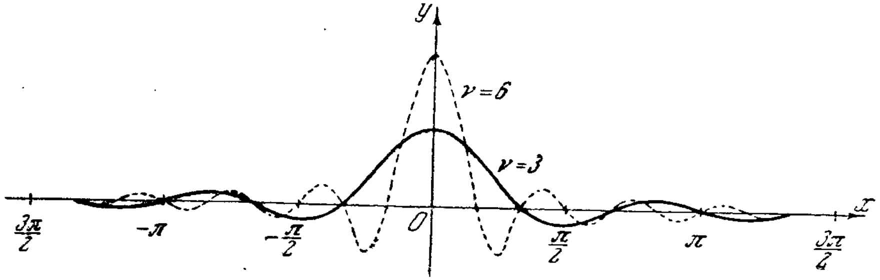
$f_t(x)$ есть дельта-образная последовательность, и, значит,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \delta(x). \tag{3}$$

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin \nu x}{x} \quad (0 < \nu < \infty)$$

(черт. 4). Покажем, что при $\nu \to \infty$ эта функция стремится к δ-функции.



Черт. 4.

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin \nu x}{x}\,dx = 1\ ^{*)}.$$

Далее, для любых $b > a > 0$

$$\int_a^b f_\nu(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin \nu x}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a\nu}^{b\nu}\frac{\sin y}{y}\,dy \to 0 \text{ при } \nu\to\infty;$$

такая же картина, очевидно, имеет место для интеграла от a до b при $a < b < 0$. Наконец, величина

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin \nu x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{a\nu}^{b\nu}\frac{\sin y}{y}\,dy\right|$$

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. II (1948), п. 455, стр. 625—627.

ограничена равномерно по a и b для всех ν. Отсюда следует, что при $\nu \to \infty$ функции $f_\nu(x)$ образуют дельта-образную последовательность, так что

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin \nu x}{x} = \delta(x). \tag{4}$$

Функция $\frac{1}{\pi}\frac{\sin \nu x}{x}$ в свою очередь может быть представлена как результат интегрирования функции $\frac{1}{2\pi}e^{i\xi x}$ по параметру ξ в пределах от $-\nu$ до ν. Поэтому наш результат может быть сформулирован еще и так: имеет место предельное соотношение в смысле сходимости в пространстве K':

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} e^{i\xi x}\,d\xi = 2\pi\,\delta(x). \tag{5}$$

Слева стоит преобразование Фурье единицы. (Подробнее и с другой точки зрения о преобразовании Фурье мы будем говорить в гл. II. Ср. замечание в конце § 3 гл. II.)

Дифференцируя по x полученное соотношение, мы приходим к новым, еще более интересным равенствам:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} i\xi e^{i\xi x}\,d\xi = 2\pi\,\delta'(x), \tag{6}$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} (i\xi)^2 e^{i\xi x}\,d\xi = 2\pi\,\delta''(x) \tag{7}$$

и т. д. Можно утверждать вообще, что *для любой локально интегрируемой функции $f(x)$, растущей при $|x| \to \infty$ не быстрее некоторой степени $|x|$, существует в смысле обобщенных функций преобразование Фурье — предел выражения*

$$\int_{-\nu}^{\nu} f(\xi)\,e^{i\xi x}\,d\xi$$

при $\nu\to\infty$. Действительно, запишем функцию $f(\xi)$ в форме $(\xi^2+1)^m f_0(\xi)$, где $f_0(\xi)$ — интегрируемая функция. Так как функция $f_0(\xi)$ обладает обычным преобразованием Фурье, то существует предел

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} f_0(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = G_0(x).$$

При этом сходимость равномерна по x в любой конечной области; следовательно, сходимость имеет место в смысле обобщенных функций. Применяя к обеим частям равенства операцию $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)^m$ и используя непрерывность операции дифференцирования, заключаем, что существует предел

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} f(\xi)\,e^{i\xi x}\,d\xi = \left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)^m G_0(x),$$

что и утверждалось.

6. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями. Операции, которые установлены для обобщенных функций — дифференцирование, умножение на функцию, сложение — позволяют строить дифференциальные выражения вида

$$a_0(x)\,y^{(n)}(x)+a_1(x)\,y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\,y(x)-b(x),$$

где $a_0(x),\ a_1(x),\ \ldots,\ a_n(x)$ — заданные бесконечно дифференцируемые функции, а $y(x)$ и $b(x)$ — обобщенные функции. Приравнивая такое выражение нулю, мы получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно обобщенной функции $y(x)$. Возникает вопрос о том, как описывается совокупность всех решений такого уравнения.

Рассмотрим сначала простейшее уравнение

$$\frac{dy}{dx}=0. \tag{1}$$

Покажем, что *это уравнение в классе обобщенных функций имеет своим общим решением* $y=C\ (=\text{const})$.

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(y',\ \varphi)=(y,\ -\varphi')=0 \tag{2}$$

для любой основной функции $\varphi(x)$. Но тем самым функционал y уже задан на совокупности Φ_0 тех основных функций, которые могут быть представлены как производные от других основных функций. Нам необходимо выяснить, какими способами функционал y может быть распространен с совокупности Φ_0 на всё основное пространство K.

Легко проверить, что основная функция $\varphi_0(x)$ может быть представлена как производная от некоторой основной функции тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx=0. \tag{3}$$

Действительно, если $\varphi_0(x)=\varphi_1'(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx=\varphi_1(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0;$$

с другой стороны, при выполнении условия (3) мы полагаем

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(\xi)\,d\xi,$$

и остается только проверить, что $\varphi_1(x)$ есть основная функция; но это очевидно, поскольку $\varphi_1(x)$ вместе с $\varphi_0(x)$ бесконечно дифференцируема и, в силу условия (3), финитна.

Пусть теперь $\varphi_1(x)$ — фиксированная основная функция, обладающая свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)\,dx=1.$$

Для любой основной функции $\varphi(x)$ можно написать равенство

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx+\varphi_0(x),$$

где функция $\varphi_0(x)$, очевидно, удовлетворяет условию (3).

Отсюда видно, что если задать значение искомого функционала y на основной функции $\varphi_1(x)$, то значение его на любой функции $\varphi(x)$ будет однозначно определено:

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Пусть, например, $(y, \varphi_1) = C_1$ — произвольное фиксированное число. Тогда равенство (4) дает

$$(y, \varphi) = C_1\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}C_1\,\varphi(x)\,dx,$$

т. е. обобщенная функция y есть постоянная C_1, что и утверждалось. Мы видим, что дифференциальное уравнение (1) не имеет иных решений в классе обобщенных функций, кроме классических.

Пример. Покажем, что на прямой *обобщенная функция f, инвариантная относительно сдвигов, сводится к постоянной.* Мы имеем в этом случае

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 0,$$

откуда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0;$$

по доказанному, $f(x) = \text{const}$, что и требуется.

Можно показать, что и любая однородная система уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_m, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mm}y_m, \end{array}\right\} \tag{5}$$

где $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ — бесконечно дифференцируемые функции от x, также не имеет иных решений $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ в обобщенных функциях, кроме классических решений. Аналогично обстоит дело для одного уравнения высшего порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = 0$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, а также для системы таких уравнений.

Наметим доказательство этих утверждений. Систему (5) для удобства запишем в векторном виде*)

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad A = \|a_{ij}\|.$$

Рассмотрим матрицу $U = \left\|u_j^k(x)\right\|$ фундаментальной системы (обычных) решений системы (5); известно, что матрица U обратима. Перейдем от неизвестных y к неизвестным z по формуле $y = Uz$; подставляя это выражение в систему (5), получаем:

$$\frac{dU}{dx}z + U\frac{dz}{dx} = AUz$$

или, поскольку $\dfrac{dU}{dx} = AU$,

$$U\frac{dz}{dx} = 0.$$

Умножение на U^{-1} приводит к системе распавшихся уравнений

$$\frac{dz}{dx} = 0;$$

по доказанному, $z = \text{const}$, откуда следует, что $y = Uz$ есть вектор, являющийся линейной комбинацией векторов фундаментальной системы.

Остальные утверждения вытекают из доказанного, так как любое уравнение высшего порядка и систему таких уравнений можно заменить эквивалентной системой первого порядка.

Замечание. В отличие от рассмотренного случая для уравнений с особенностями в коэффициентах могут появляться новые решения в обобщенных функциях, а также могут исчезать классические решения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение 1-го порядка

$$x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Его решение должно совпадать с постоянной как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Отсюда следует, что это уравнение имеет два линейно независимых решения:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \theta(x).$$

Пример 2. Уравнение

$$-2x^3y' = y$$

*) См. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1954, стр. 371 и дальше.

имеет единственное решение в обобщенных функциях:

$$y = 0.$$

Действительно, при $x \neq 0$ обобщенное решение должно совпадать с классическим решением $y = Ce^{\frac{1}{x^2}}$, где $C \neq 0$ или $C = 0$. Но первое невозможно, так как, согласно п. 7 § 1, интеграл

$$\int e^{\frac{1}{x^2}} \varphi(x)\, dx$$

не допускает регуляризации.

Существование первообразной. Рассмотрим простейшее неоднородное уравнение

$$\frac{dg}{dx} = f, \tag{6}$$

где f — данная обобщенная функция, а g — искомая.

Покажем, что *уравнение* (6) *при любой правой части f имеет решение в классе обобщенных функций*. Естественно называть это решение *первообразной* или *неопределенным интегралом* от обобщенной функции f:

$$g = \int f\, dx.$$

Уравнение (6) эквивалентно уравнению

$$(g, -\varphi') = (f, \varphi)$$

для любой основной функции φ. Но тем самым функционал g задан на любой основной функции ψ, являющейся производной от какой-либо другой основной функции φ, т. е. он задан на многообразии Φ_0, рассмотренном в начале этого пункта. Мы должны продолжить функционал g на всё пространство K. Это можно осуществить, например, так: рассмотрим основную функцию $\varphi_1(x)$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx = 1$, и снова представим любую основную функцию φ в форме

$$\varphi = \varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dx + \varphi_0,$$

где φ_0 принадлежит Φ_0. Тем самым мы с каждой основной функцией φ однозначно сопоставим ее «проекцию» φ_0 на подпространство Φ_0. Полагаем теперь

$$(g_0, \varphi) = (g, \varphi_0). \tag{7}$$

Легко проверить, что построенный функционал g_0 линеен и непрерывен. Общее решение уравнения (7) получается прибавлением к найденному частному решению общего решения однородного уравнения, которым, в силу сказанного в начале этого пункта, является $g_1 = C = \text{const}$.

Итак, все решения уравнения (6) описываются формулой

$$g = g_0 + C,$$

где функционал g_0 задан формулой (7).

Отыскание общего решения неоднородной системы

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

где f_i — обобщенные, а a_{ij} — обычные бесконечно дифференцируемые функции, сводится к решению уравнений вида (6).

Действительно, если выполнить уже применявшуюся выше подстановку $y = Uz$, где U — матрица фундаментальных решений соответствующей однородной системы ($f_i = 0$), то мы получим $U\frac{dz}{dx} = f$, или $\frac{dz}{dx} = U^{-1}f$. В этой системе неизвестные «разделились»: каждое ее уравнение имеет вид (6).

Наконец, неоднородное уравнение высшего порядка

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \ldots + a_m y = f, \tag{9}$$

где a_i — бесконечно дифференцируемые функции, а f — произвольная обобщенная функция, сводится к системе вида (8) при помощи подстановки

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \ \ldots, \ y_{m-1} = \frac{dy_{m-2}}{dx}.$$

Следовательно, отыскание общего решения уравнения вида (9) также сводится к решению уравнений вида (6).

7. Дифференцирование в пространстве S. Мы ввели в конце первого параграфа новое основное пространство S.

Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \quad (k, q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Мы видели, что совокупность линейных непрерывных функционалов S', определенных на пространстве S, есть подпространство пространства K' линейных непрерывных функционалов на пространстве K.

Покажем, что *операция дифференцирования не выводит функционал $f \in S'$ из этого подпространства.* Ограничимся для простоты случаем одного независимого переменного. Заметим сначала, что для всякой функции $\varphi(x) \in S$ ее производная $\varphi'(x)$ также лежит в S и из сходимости $\varphi_\nu \to 0$ в S следует также сходимость $\varphi'_\nu(x) \to 0$ в S. Поэтому функционал f', определенный по формуле

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'),$$

снова является линейным непрерывным функционалом на S.

Но очевидно, что в пределах основного пространства K он совпадает с производной функционала f в указанном выше (п. 1) смысле. Иными словами, производная f' функционала f, понимаемая как функционал на K, распространяется на пространство S вместе с функционалом f, что и утверждалось. Распространение этого результата на высшие производные и на случай нескольких переменных не требует особых пояснений.

Мы указали выше, что все регулярные функционалы, отвечающие функциям степенного роста, распространяются с пространства K на пространство S. Теперь мы видим, что тем же свойством обладают и производные таких функционалов. Во втором выпуске (гл. II, § 4) мы увидим, что всякий линейный непрерывный функционал на S есть результат применения некоторой дифференциальной операции к функции степенного роста.

§ 3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

1. Постановка вопроса. Из функций, имеющих неинтегрируемые особенности в отдельных точках, наиболее важны функции *со степенными особенностями*, т. е. растущие при приближении x к особой точке x_0 не быстрее

некоторой степени $\frac{1}{|x-x_0|}$. В этом параграфе для широкого класса таких функций будут построены отвечающие им обобщенные функции.

Напомним определение регуляризации, данное в п. 7 § 1. Регуляризацией интеграла

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

или регуляризацией функции $f(x)$, имеющей, вообще говоря, точки локальной неинтегрируемости, мы назвали функционал f, который для основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности особых точек функции $f(x)$, выражается интегралом (1). В п. 7 § 1 было показано, что функция $f(x)$ со степенными особенностями (в точках, число которых конечно в каждой конечной области) обладает регуляризацией. При этом регуляризация определена с точностью до прибавления функционала, сосредоточенного в особых точках функции $f(x)$.

С этой точки зрения содержание большей части этого параграфа можно описать следующим образом. Для широкого класса функций одного переменного со степенными особенностями будет указана регуляризация, *естественная* в следующем смысле: сумме двух обычных функций отвечает сумма их регуляризаций; обычной производной функции — производная ее регуляризации; произведению функции на бесконечно дифференцируемую функцию $h(x)$ — произведение ее регуляризации на $h(x)$.

Но начнем мы с регуляризации конкретных, наиболее важных функций, откладывая более общие определения и полную проверку указанных свойств регуляризации до п. 7.

Примером функции со степенной особенностью может служить функция

$$x_+^{-3/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^{-3/2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Соответствующую ей обобщенную функцию мы фактически уже построили в примере 3 п. 2 § 2:

$$(x_+^{-3/2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}\,dx. \tag{2}$$

Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \quad (k,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Мы видели, что совокупность линейных непрерывных функционалов S', определенных на пространстве S, есть подпространство пространства K' линейных непрерывных функционалов на пространстве K.

Покажем, что *операция дифференцирования не выводит функционал $f \in S'$ из этого подпространства.* Ограничимся для простоты случаем одного независимого переменного. Заметим сначала, что для всякой функции $\varphi(x) \in S$ ее производная $\varphi'(x)$ также лежит в S и из сходимости $\varphi_\nu \to 0$ в S следует также сходимость $\varphi'_\nu(x) \to 0$ в S. Поэтому функционал f', определенный по формуле

$$(f',\ \varphi) = -(f,\ \varphi'),$$

снова является линейным непрерывным функционалом на S.

Но очевидно, что в пределах основного пространства K он совпадает с производной функционала f в указанном выше (п. 1) смысле. Иными словами, производная f' функционала f, понимаемая как функционал на K, распространяется на пространство S вместе с функционалом f, что и утверждалось. Распространение этого результата на высшие производные и на случай нескольких переменных не требует особых пояснений.

Мы указали выше, что все регулярные функционалы, отвечающие функциям степенного роста, распространяются с пространства K на пространство S. Теперь мы видим, что тем же свойством обладают и производные таких функционалов. Во втором выпуске (гл. II, § 4) мы увидим, что всякий линейный непрерывный функционал на S есть результат применения некоторой дифференциальной операции к функции степенного роста.

§ 3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

1. Постановка вопроса. Из функций, имеющих неинтегрируемые особенности в отдельных точках, наиболее важны функции *со степенными особенностями*, т. е. растущие при приближении x к особой точке x_0 не быстрее

некоторой степени $\dfrac{1}{|x - x_0|}$. В этом параграфе для широкого класса таких функций будут построены отвечающие им обобщенные функции.

Напомним определение регуляризации, данное в п. 7 § 1. Регуляризацией интеграла

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

или регуляризацией функции $f(x)$, имеющей, вообще говоря, точки локальной неинтегрируемости, мы назвали функционал f, который для основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности особых точек функции $f(x)$, выражается интегралом (1). В п. 7 § 1 было показано, что функция $f(x)$ со степенными особенностями (в точках, число которых конечно в каждой конечной области) обладает регуляризацией. При этом регуляризация определена с точностью до прибавления функционала, сосредоточенного в особых точках функции $f(x)$.

С этой точки зрения содержание большей части этого параграфа можно описать следующим образом. Для широкого класса функций одного переменного со степенными особенностями будет указана регуляризация, *естественная* в следующем смысле: сумме двух обычных функций отвечает сумма их регуляризаций; обычной производной функции — производная ее регуляризации; произведению функции на бесконечно дифференцируемую функцию $h(x)$ — произведение ее регуляризации на $h(x)$.

Но начнем мы с регуляризации конкретных, наиболее важных функций, откладывая более общие определения и полную проверку указанных свойств регуляризации до п. 7.

Примером функции со степенной особенностью может служить функция

$$x_+^{-3/2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ x^{-3/2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Соответствующую ей обобщенную функцию мы фактически уже построили в примере 3 п. 2 § 2:

$$\left(x_+^{-3/2},\ \varphi\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}}\,dx. \tag{2}$$

При этом мы исходили из того, что *обобщенная функция* $-\frac{3}{2}x_+^{-3/2}$ *должна быть производной обобщенной функции* $x_+^{-1/2}$, т. е. регулярного функционала, определяемого обычной функцией

$$x_+^{-1/2}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ x^{-1/2} & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$$

В § 2 мы и на других примерах видели, что аналогичные соображения часто позволяют построить обобщенную функцию, отвечающую данной обычной функции со степенной особенностью.

Другой метод получения определений типа (2) — это *метод аналитического продолжения*. Им мы и будем преимущественно пользоваться. Прежде чем объяснить его идею, введем следующее определение. Рассмотрим обобщенную функцию f_λ, зависящую от параметра λ, пробегающего открытую область Λ в плоскости комплексного переменного λ. Эта обобщенная функция f_λ называется *аналитической функцией от* λ в области Λ, если в этой области аналитичны все числовые функции (f_λ, φ) при любой основной функции φ.

Обобщенные аналитические функции от λ по своим свойствам аналогичны обычным аналитическим функциям от λ. Так, если определить *производную* $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ *функционала* f_λ *по параметру* λ как предел

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f_{\lambda+\Delta\lambda}-f_\lambda}{\Delta\lambda}$$

(в смысле п. 8 § 1), то можно утверждать, что обобщенная функция f_λ аналитична по λ в области Λ тогда и только тогда, когда в каждой точке этой области существует производная $\frac{df_\lambda}{d\lambda}$. Имеют также место аналоги классических теорем о разложениях в ряд Тейлора и в ряд Лорана, об аналитическом продолжении и т. д.; они собраны в добавлении 2 к этой главе.

Идея метода аналитического продолжения состоит в следующем. Пусть дана функция $f_\lambda(x)$, которая локально интегрируема, когда λ пробегает некоторую область Λ в комплексной плоскости, и, вообще, не является таковой,

когда λ находится вне области Λ. Пусть, далее, при $\lambda\in\Lambda$ и любой основной функции $\varphi(x)$ числовая функция (f_λ, φ) аналитична в области Λ и может быть аналитически продолжена в некоторую более широкую область Λ_1, не зависящую от выбора $\varphi(x)$. Тогда с функцией $f_{\lambda_0}(x)$ при $\lambda_0\in\Lambda_1-\Lambda$ мы можем сопоставить функционал (f_{λ_0}, φ), получаемый аналитическим продолжением функционала (f_λ, φ) из области Λ; иными словами, мы полагаем

$$\int f_{\lambda_0}(x)\varphi(x)\,dx=\underset{\lambda\to\lambda_0}{\text{анал. прод.}}\int f_\lambda(x)\varphi(x)\,dx.$$

Например, чтобы определить обобщенную функцию $x_+^{-3/2}$, мы рассматриваем функцию

$$x_+^\lambda=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ x^\lambda & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$$

Для $\operatorname{Re}\lambda>-1$ она определяет регулярный функционал

$$(x_+^\lambda, \varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Числовая функция (3), очевидно, аналитична по λ: она имеет производную по λ, равную

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln x\,\varphi(x)\,dx.$$

Правую часть формулы (3) перепишем в виде

$$\int_0^1 x^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx+\frac{\varphi(0)}{\lambda+1}.$$

Первое слагаемое определено для $\operatorname{Re}\lambda>-2$, второе — для любых λ, третье — для $\lambda\neq-1$. Следовательно, функционал (3) аналитически продолжается на область $\operatorname{Re}\lambda>-2$,

$\lambda \neq -1$. В частности, при $\lambda = -3/2$ получаем:

$$(x_+^{-3/2}, \varphi(x)) =$$
$$= \int_0^1 x^{-3/2}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_1^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx - 2\varphi(0). \quad (4)$$

Правая часть формулы (4) совпадает с правой частью формулы (2), так как вообще

$$-\frac{1}{\lambda+1} = \int_1^\infty x^\lambda\,dx.$$

Разумеется, при ином вводе параметра аналитическое продолжение может привести к совершенно иному результату. Например,

$$x_+^\lambda + \frac{1}{\pi}\,\frac{(\lambda + 3/2)}{x^2 + (\lambda + 3/2)} \to x_+^{-3/2} + \delta(x) \quad \text{при} \quad \lambda \to -3/2$$

(см. § 2, п. 5).

Подчеркнем, что тот или иной метод, приводящий к определениям типа (2) или (4), играет для нас второстепенную, вспомогательную роль; он представляет собой лишь *средство*, тогда как *цель* — это сами определения, которые, как формулы (2) или (4), имеют смысл и вне всякой связи с этим методом.

2. Обобщенные функции x_+^λ и x_-^λ. Рассмотрим функцию x_+^λ, равную x^λ при $x > 0$ и 0 при $x \leqslant 0$. Мы хотим построить и изучить отвечающую ей обобщенную функцию. Как уже сказано в предыдущем пункте, регулярный функционал

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx, \quad (1)$$

определяемый функцией x_+^λ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$, продолжается на область $\operatorname{Re}\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$ при помощи справедливого для $\operatorname{Re}\lambda > -1$ тождества

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_0^1 x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}. \quad (2)$$

А именно, при $\operatorname{Re}\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$ правая часть существует и определяет регуляризацию интеграла, стоящего слева: если $-2 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$, $\lambda \neq -1$ и если основная функция равна нулю в окрестности начала, то справа остается интеграл $\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx$.

Аналогичным способом строится продолжение функционала x_+^λ на область $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$:

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx +$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)}. \quad (3)$$

И здесь правая часть дает регуляризованное значение интеграла, стоящего слева. Тем самым обобщенная функция x_+^λ определяется для всех $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

В полосе $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ формула (3) может быть преобразована к более простому виду:

$$(x_+^\lambda, \varphi) =$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx \quad (4)$$

в силу того, что в этом случае при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\int_1^\infty x^{\lambda+k-1}\,dx = -\frac{1}{\lambda+k}. \tag{5}$$

Формула (3) показывает, что (x_+^λ, φ) как функция от λ имеет полюсы 1-го порядка в точках $\lambda=-1, -2, \ldots$, причем ее вычет в точке $\lambda=-k$ равен $\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$. Так как $\varphi^{(k-1)}(0)=(-1)^{(k-1)}(\delta^{(k-1)}(x), \varphi(x))$, то, следовательно, сам *функционал x_+^λ имеет при $\lambda=-k$ полюс 1-го порядка с вычетом* $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Подсчитаем производную $\frac{dx_+^\lambda}{dx}$. При $\operatorname{Re}\lambda>0$ мы имеем очевидное равенство $\frac{dx_+^\lambda}{dx}=\lambda x_+^{\lambda-1}$, т. е. $(x_+^\lambda, \varphi'(x)) = -(\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi(x))$. Так как обе части последнего равенства аналитически продолжаются в плоскость (с исключенными точками $-1, -2, \ldots$), то, в силу свойства единственности, равенство будет справедливо и во всей плоскости. Таким образом,

$$\frac{dx_+^\lambda}{dx}=\lambda x_+^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq -1, -2, \ldots).$$

Например, при $-1<\lambda<0$ мы имеем:

$$\left(\frac{d}{dx}x_+^\lambda, \varphi\right)=(\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi)=\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx.$$

Эту формулу мы вывели иным путем в п. 2 § 2.

В § 4 будет построено разложение функции x_+^λ в ряд Тейлора в окрестности регулярной точки и в ряд Лорана в окрестности полюса.

Перейдем теперь к построению и изучению обобщенной функции, отвечающей функции

$$x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & \text{при} \quad x<0, \\ 0 & \text{при} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Для $\operatorname{Re}\lambda>-1$ эта функция определяет регулярный функционал

$$(x_-^\lambda, \varphi)=\int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Этот функционал можно продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$ таким же образом, как x_+^λ. При этом проще всего, заменив x на $-x$, представить (x_-^λ, φ) в виде

$$(x_-^\lambda, \varphi(x))=\int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\,dx=(x_+^\lambda, \varphi(-x)).$$

Это позволяет немедленно перенести все результаты, полученные для функционала x_+^λ, на функционал x_-^λ, заменив в соответствующих формулах функцию $\varphi(x)$ на $\varphi(-x)$. При этом фигурирующие в формулах выражения $\varphi^{(j)}(0)$ заменятся на $(-1)^j\varphi^j(0)$.

В частности, мы видим, что обобщенная функция x_-^λ, так же как и x_+^λ, существует и аналитична во всей плоскости λ, за исключением точек $\lambda=-1, -2, \ldots$; в точке $\lambda=-k$ обобщенная функция x_-^λ имеет простой полюс с вычетом $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$.

Формула для регуляризованного значения интеграла

$$(x_-^\lambda, \varphi)=\int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)\,dx$$

в полосе $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$ приводится к виду

$$\int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)\,dx=\int_0^\infty x^\lambda\varphi(-x)\,dx=\int_0^\infty x^\lambda\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+ \\ +x\varphi'(0)-\ldots-\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]\,dx. \tag{7}$$

В § 4 будут приведены разложения функции x_-^λ в ряд Тейлора и ряд Лорана.

3. Четная и нечетная комбинации функций x_+^λ и x_-^λ. Обобщенная функция f называется *четной*, если

$$(f(x),\ \varphi(-x)) = (f(x),\ \varphi(x)),$$

и *нечетной*, если

$$(f(x),\ \varphi(-x)) = -(f(x),\ \varphi(x)).$$

Из введенных в п. 2 обобщенных функций составим следующие четную и нечетную комбинации:

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \tag{1}$$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda. \tag{2}$$

Изучим особенности обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Так как обобщенная функция x_+^λ имеет при $\lambda = -k$ полюс с вычетом $\frac{(-1)^{(k-1)}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$, а функция x_-^λ — полюс с вычетом $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$, то обобщенная функция $|x|^\lambda$ имеет полюсы только при $\lambda = -1,\ -3,\ -5,\ \ldots$ $\ldots,\ -2m-1,\ \ldots$ Вычет $|x|^\lambda$ при $\lambda = -2m-1$ равен $2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}$. В точках $\lambda = -2m$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots)$ обобщенная функция $|x|^\lambda$ *определена*; при этих λ мы, естественно, будем вместо $|x|^{-2m}$ писать x^{-2m}.

Аналогично обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ имеет полюсы в точках $\lambda = -2,\ -4,\ \ldots,\ -2m,\ \ldots$ с вычетом при $\lambda = -2m$, равным $-2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}$. При $\lambda = -2m-1$ $(m=1,$ $2,\ \ldots)$ обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ определена, и мы вместо $|x|^{-2m-1}\operatorname{sgn} x$ будем писать x^{-2m-1}. Таким образом, обобщенные функции x^{-n} определены у нас для всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Дадим непосредственные определения обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Для этого воспользуемся регуляризованными значениями интегралов $\int\limits_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)\,dx$,

т. е. формулами (4) и (7) п. 2: в полосе $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$

$$(x_+^\lambda,\ \varphi) = \\ = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx,$$

$$(x_-^\lambda,\ \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \right. \\ \left. \ldots - \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx.$$

Заменяя здесь n на $2m$, складывая и вычитая, находим:

$$(|x|^\lambda,\ \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left\{\varphi(x) + \varphi(-x) - \right. \\ \left. -2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\right\} dx; \tag{3}$$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x,\ \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left\{\varphi(x) - \varphi(-x) - \right. \\ \left. -2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\right\} dx. \tag{4}$$

Первое разложение сходится при $-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda <$ $< -2m+1$, второе — при $-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m$. В частности,

$$(x^{-2m},\ \varphi) = \int\limits_0^\infty x^{-2m} \left\{\varphi(x) + \varphi(-x) - \right. \\ \left. -2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\right\} dx, \tag{5}$$

$$(x^{-2m-1},\ \varphi) = \int\limits_0^\infty x^{-2m-1} \left\{\varphi(x) - \varphi(-x) - \right. \\ \left. -2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\right\} dx, \tag{6}$$

так что, например,

$$(x^{-2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2}\, dx, \tag{7}$$

$$(x^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx; \tag{8}$$

последнее выражение совпадает с главным значением по Коши интеграла от $\frac{\varphi(x)}{x}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right\}.$$

Приведем еще формулы дифференцирования обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Мы имеем:

$$\frac{d}{dx}|x|^\lambda = \frac{d}{dx}(x_+^\lambda + x_-^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1} - \lambda x_-^{\lambda-1} = \lambda |x|^{\lambda-1} \operatorname{sgn} x; \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = \frac{d}{dx}(x_+^\lambda - x_-^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1} + \lambda x_-^{\lambda-1} = \lambda |x|^{\lambda-1}. \tag{10}$$

В частности, при $\lambda = -n$ получаем:

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1}. \tag{11}$$

В § 4 будут приведены разложения функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в ряд Тейлора и в ряд Лорана.

Заметим в заключение, что функционалы x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ как регулярные функционалы, отвечающие функциям степенного роста, продолжаются на пространство S бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$ вместе со всеми производными (§ 1, п. 10). Функционалы $x_+^\lambda, \ldots$ при прочих значениях λ, полученные аналитическим продолжением предыдущих, также продолжаются на пространство S; это следует как из самих формул аналитического продолжения, так и из формул дифференцирования $\frac{d}{dx}(x_+^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1}$ и замечания в конце § 2 о том, что функционалы на S допускают дифференцирование. Поэтому функционалы $x_+^\lambda, \ldots$ можно применять по обычным формулам не только к финитным функциям, но и ко всем функциям пространства S, например e^{-x^2} и т. п.

Пример 1. Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x}\, dx,$$

сходящимся при $\operatorname{Re}\lambda > -1$. Мы можем рассматривать этот интеграл как результат применения функционала $x_+^{\lambda-1}$ к основной функции, равной e^{-x} при $0 \leqslant x < \infty$ (такая основная функция заведомо имеется в пространстве S). Применяя регуляризационные формулы п. 2, получаем выражение гамма-функции в области, где $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$: при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, \ldots, -n$,

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^1 x^{\lambda-1} \left[e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right] dx + \\ + \int_1^\infty x^{\lambda-1} e^{-x}\, dx + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\lambda)},$$

при $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} \left[e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right] dx.$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty x^\lambda [e^{-ax} - e^{-bx}]\, dx.$$

Заметим, что он является сходящимся при $\operatorname{Re}\lambda > -2$. Его можно трактовать как результат применения функционала x_+^λ к основной функции $e^{-ax} - e^{-bx}$; поэтому

$$\int_0^\infty x^\lambda [e^{-ax} - e^{-bx}]\, dx = \int_0^\infty x^\lambda e^{-ax}\, dx - \int_0^\infty x^\lambda e^{-bx}\, dx,$$

где каждое из слагаемых справа также есть результат применения функционала к соответствующей основной функции. Но при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ можно совершить замену переменной $ax = \xi$, что дает

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{\xi}{a}\right)^\lambda e^{-\xi}\frac{d\xi}{a} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{a^{\lambda+1}};$$

эта формула остается справедливой при всех λ в силу единственности аналитического продолжения. В результате мы получаем

$$\int_0^\infty x^\lambda\,[e^{-ax} - e^{-bx}]\,dx = \left(\frac{1}{a^{\lambda+1}} - \frac{1}{b^{\lambda+1}}\right)\Gamma(\lambda+1).$$

При $\operatorname{Re}\lambda > -2$ эта формула дает величину сходящегося интеграла в левой части. Любопытно, что мы получили ее с помощью расходящихся интегралов. Можно было бы, конечно, ее найти и обычными приемами (например, дифференцированием по параметрам a и b).

4. Неопределенные интегралы от функций x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Так как операция неопределенного интегрирования обратна к операции дифференцирования (§ 2, п. 6), то при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$\int x_+^\lambda\,dx = \frac{x_+^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_1(\lambda);$$

$$\int x_-^\lambda\,dx = -\frac{x_-^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_2(\lambda);$$

далее, при $\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots$

$$\int |x|^\lambda\,dx = \frac{|x|^{\lambda+1}\operatorname{sgn} x}{\lambda+1} + C_3(\lambda)$$

и при $\lambda \neq -2, -4, -6, \ldots$ (а также при $\lambda \neq -1$, поскольку при $\lambda = -1$ у нас нет соответствующей формулы для производной)

$$\int |x|^\lambda \operatorname{sgn} x\,dx = \frac{|x|^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_4(\lambda). \tag{1}$$

Функции $C_1(\lambda), \ldots, C_4(\lambda)$ могут быть взяты произвольно.

Пользуясь этой свободой выбора, мы можем найти и результат неопределенного интегрирования $x^{-1} = |x|^{-1}\operatorname{sgn} x$ предельным переходом. Первое слагаемое правой части формулы (1) имеет при $\lambda = -1$ полюс с вычетом 1. Положим $C_4(\lambda) = -\frac{1}{\lambda+1} + C$; тогда правая часть будет допускать аналитическое продолжение в точку $\lambda = -1$ и по непрерывности формула интегрирования сохранит свой смысл. Таким образом,

$$\int |x|^\lambda \operatorname{sgn} x\,dx = \frac{|x|^{\lambda+1} - 1}{\lambda+1} + C;$$

при $\lambda \to -1$

$$\lim_{\lambda\to-1}\frac{|x|^{\lambda+1}-1}{\lambda+1} = \ln|x|$$

и, следовательно,

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C. \tag{2}$$

Можно сосчитать также и повторные интегралы от указанных функций. Так, q-кратный интеграл от $|x|^\lambda$ имеет вид

$$\underbrace{\int\ldots\int}_{q} |x|^\lambda\,dx^q = \frac{|x|^{\lambda+q}(\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)} + Q_\lambda(x), \tag{3}$$

где $Q_\lambda(x)$ — произвольный полином от x степени $< q$.

Подынтегральная функция слева имеет полюсы в точках $\lambda = -1, -3, \ldots$ Функция $\frac{|x|^{\lambda+q}(\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)}$, кроме них, имеет полюсы в точках $\lambda = -2, -4, \ldots, |\lambda| \leqslant q$. Естественно устранить последние за счет специального выбора полинома $Q_\lambda(x)$. Так как вычет первого слагаемого правой части при $\lambda = -2k$ $(2k < q)$ равен, очевидно,

$$\frac{|x|^{-2k+q}(\operatorname{sgn} x)^q}{(-2k+1)(-2k+2)\ldots(-1)\cdot 1\cdot 2\ldots(-2k+q)} = \\ = \frac{-x^{q-2k}}{(2k-1)!\,(q-2k)!},$$

то для этого можно положить

$$Q_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{x^{-2k+q}}{(2k-1)!\,(q-2k)!}\,\frac{1}{\lambda+2k}$$

(можно было бы еще добавить к $Q_\lambda(x)$ произвольный полином от x степени $< q$, аналитически зависящий от λ). Итак,

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{q} |x|^\lambda\, dx^q =$$

$$= \frac{|x|^{\lambda+q}(\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{x^{-2k+q}}{(2k-1)!\,(q-2k)!}\,\frac{1}{\lambda+2k}. \qquad (4)$$

В частности, двукратный интеграл записывается в виде

$$\int\int |x|^\lambda\, dx^2 = \frac{|x|^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{\lambda+2}.$$

5. Нормировка функций x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Функции x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, как мы видели, имеют в λ-плоскости полюсы 1-го порядка. Естественно попытаться устранить их, разделив каждую из этих функций на обычную функцию от λ, имеющую полюсы 1-го порядка в тех же точках. Такую функцию от λ проще всего построить, применив интересующую нас обобщенную функцию $\left(x_+^\lambda\right.$ и т. д.$\left.\right)$ к фиксированной основной функции $\varphi_0(x)$. При этом мы воспользуемся тем, что, как сказано в конце п. 3, функционалы x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ продолжаются на пространство S; это позволяет брать в качестве $\varphi_0(x)$ функции из S.

Рассмотрим функцию x_+^λ. Она имеет полюсы в точках $-1, -2, \ldots$ с вычетом в точке $-n$, равным $\frac{(-1)^{n-1}\,\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}$. Основная функция $\varphi_0(x)$ должна быть такой, чтобы вычеты функции $\left(x_+^\lambda, \varphi_0(x)\right)$ от λ в точках $-1, -2, \ldots$ были отличными от нуля. Это значит, что у функции $\varphi_0(x)$ должны быть отличны от нуля все производные при $x=0$.

В качестве такой функции $\varphi_0(x)$ естественно взять e^{-x}, что приводит к нормирующему знаменателю

$$\left(x_+^\lambda, e^{-x}\right) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x}\, dx = \Gamma(\lambda+1).$$

Аналогично подбираем нормирующие знаменатели для обобщенных функций x_-^λ, $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Для функции x_-^λ нужно функцию $\varphi_0(x)$ взять снова такой, чтобы ее производные при $x=0$ были бы отличными от нуля; естественно положить $\varphi_0(x) = e^x$, так что

$$\left(x_-^\lambda, e^x\right) = \int_{-\infty}^0 |x|^\lambda e^x\, dx = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x}\, dx = \Gamma(\lambda+1).$$

Функция $|x|^\lambda$ имеет полюсы в точках $-1, -3, \ldots$, и ее вычет в точке $\lambda = -2m-1$ равен $\frac{2\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}$; поэтому функцию $\varphi_0(x)$ следует выбрать так, чтобы ее четные производные при $x=0$ были отличными от нуля. Естественно положить $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$, так что нормирующий знаменатель приобретает вид

$$\left(|x|^\lambda, e^{-x^2}\right) = \int_{-\infty}^\infty |x|^\lambda e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^\infty x^\lambda e^{-x^2} dx =$$

$$= \int_0^\infty t^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right).$$

Наконец, функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ имеет полюсы в точках -2, $-4, \ldots$, и ее вычет в точке $-2m$ равен $-2\,\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}$. Таким образом, функция $\varphi_0(x)$ должна быть выбрана с таким расчетом, чтобы ее нечетные производные при $x=0$ были отличными от нуля. Можно принять для этого $\varphi_0(x) = xe^{-x^2}$; мы получим нормирующий знаменатель

$$\left(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x,\ xe^{-x^2}\right) = 2\int_0^\infty x^{\lambda+1} e^{-x^2}\, dx = \Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right).$$

Итак, мы можем построить целые функции от λ:

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}.$$

Значения этих функций в особых точках числителя и знаменателя можно найти как отношение соответствующих вычетов. Таким образом, мы получаем:

$$\left.\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\ x_+^\lambda}{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\left(x_+^\lambda, e^{-x}\right)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\,\delta^{(n-1)}(x)\,(n-1)!}{(-1)^{n-1}\left(\delta^{(n-1)}(x), e^{-x}\right)(n-1)!} = \delta^{(n-1)}(x); \qquad (1)$$

$$\left.\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\ x_-^\lambda}{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\left(x_-^\lambda, e^{x}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}}{\dfrac{\left(\delta^{(n-1)}(x), e^{x}\right)}{(n-1)!}} = (-1)^{n-1}\,\delta^{(n-1)}(x); \qquad (2)$$

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m-1} = \frac{\underset{\lambda=-2m-1}{\text{выч.}}\ |x|^\lambda}{\underset{\lambda=-2m-1}{\text{выч.}}\left(|x|^\lambda, e^{-x^2}\right)} = \frac{\dfrac{2}{(2m)!}\,\delta^{(2m)}(x)}{\dfrac{2}{(2m)!}\left(\delta^{(2m)}(x), e^{-x^2}\right)}.$$

Результат применения функционала $\delta^{(2m)}(x)$ к e^{-x^2} равен $\left(e^{-x^2}\right)^{(2m)}\Big|_{x=0}$. Так как

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!} + \ldots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-x^2}\right)^{(2m)}\Big|_{x=0} \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

то, очевидно,

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(2m)}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^m\,(2m)!}{m!}.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m-1} = \frac{(-1)^m\,\delta^{(2m)}(x)\,m!}{(2m)!}. \qquad (3)$$

Наконец,

$$\left.\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m} = \frac{\underset{\lambda=-2m}{\text{выч.}}\ |x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\underset{\lambda=-2m}{\text{выч.}}\left(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, xe^{-x^2}\right)} =$$

$$= \frac{-\dfrac{2}{(2m-1)!}\,\delta^{(2m-1)}(x)}{-\dfrac{2}{(2m-1)!}\left(\delta^{(2m-1)}(x), xe^{-x^2}\right)}.$$

Результат применения функционала $\delta^{(2m-1)}(x)$ к xe^{-x^2} равен $-\left(xe^{-x^2}\right)^{(2m-1)}\Big|_{x=0}$. Так как

$$xe^{-x^2} = x - x^3 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^7}{3!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(m-1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(xe^{-x^2}\right)^{(2m-1)}\Big|_{x=0} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

то, очевидно,

$$\left(xe^{-x^2}\right)^{(2m-1)}\Big|_{x=0} = (-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!}{(m-1)!};$$

поэтому

$$\left.\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m} = (-1)^m\,\frac{\delta^{(2m-1)}(x)\,(m-1)!}{(2m-1)!}. \qquad (4)$$

Формулы (1) — (4) можно было бы получить, и иначе используя известные вычеты гамма-функции в соответствующих точках.

Формула дифференцирования по x для функционала

$$f_+^\lambda = \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

проще, чем для функционала x_+^λ; действительно,

$$\frac{d}{dx} f_+^\lambda = \frac{d}{dx}\,\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\lambda x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = f_+^{\lambda-1}; \qquad (5)$$

таким образом, дифференцирование функционала

$$f_+^\lambda = \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

равносильно уменьшению индекса λ на 1. Аналогично для функционала

$$f_-^\lambda = \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

получается следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} f_-^\lambda = -f_-^{\lambda-1}; \tag{6}$$

иными словами дифференцирование функционала

$$f_-^\lambda = \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

равносильно уменьшению индекса λ на 1 с изменением знака.

Функция $\dfrac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$ при дифференцировании переходит в функцию $\dfrac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$ с индексом, на 1 меньшим, и с некоторым числовым множителем. При двукратном дифференцировании функция $\dfrac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$ воспроизводится с индексом, на две единицы меньшим:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} = 2\lambda \frac{|x|^{\lambda-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)}. \tag{7}$$

Формулу

$$\frac{|x|^{\lambda-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)} = \frac{1}{2\lambda} \frac{d^2}{dx^2} \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \tag{8}$$

можно было бы положить в основу аналитического продолжения функции $\dfrac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$.

6. Обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$. Определим теперь новые обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$. В отличие от обобщенных функций x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, определенных в пп. 2 и 3, эти новые обобщенные функции не будут нуждаться в нормировке: они будут *целыми аналитическими функциями от* λ. Другие преимущества обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ выяснятся в главе о преобразованиях Фурье (гл. II).

Как известно, выражение $(x+iy)^\lambda$ определяется следующим образом:

$$(x+iy)^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln}(x+iy)} = e^{\lambda [\ln|x+iy| + i \operatorname{Arg}(x+iy)]}.$$

Возьмем здесь

$$\operatorname{Arg}(x+iy) = \arg(x+iy)$$

($-\pi < \arg z < \pi$). Тогда $(x+iy)^\lambda$ будет однозначной аналитической функцией комплексного переменного $z = x+iy$ в верхней полуплоскости $y>0$ и точно так же $(x+iy)^\lambda$ будет однозначной аналитической функцией в нижней полуплоскости $y<0$. Нас будут интересовать предельные значения этих двух функций на вещественной прямой. Их нетрудно сосчитать:

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to+0} (x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{i\lambda \arg(x+iy)} = \begin{cases} e^{i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0; \end{cases} \tag{1}$$

$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y\to-0} (x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{i\lambda \arg(x+iy)} = \begin{cases} e^{-i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0. \end{cases} \tag{2}$$

Эти функции определены при любом комплексном λ.

Нашей задачей теперь будет сопоставить этим обычным функциям обобщенные. Последние мы также обозначим через $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$.

Используя функции x_+^λ и x_-^λ, определенные в п. 2, мы при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ можем написать:

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda, \tag{3}$$

$$(x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda. \tag{4}$$

Но отсюда видно, что при любом $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ (обычным) функциям (1) и (2) можно сопоставить обобщенные функции, написанные справа в (3) и (4) (см. п. 2). Тем самым обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ определяются для $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

Но если при $\lambda = -n$ сравнить вычеты обобщенных функций x_+^λ и x_-^λ, (полученные в п. 2) то видно, что особенности слагаемых справа в (3) и (4) взаимно уничтожаются; таким образом, обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ — целые функции переменного λ. В § 4 мы получим, в частности, формулы

$$(x+i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x),$$

$$(x-i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

Отсутствие полюсов у обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ можно пояснить еще и следующим образом. Предположим, что основная функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству S и аналитически продолжается в некоторую окрестность вещественной оси. Рассмотрим интеграл

$$\int_{L_\varepsilon} z^\lambda \varphi(z)\,dz \qquad (z = x+iy)$$

по линии L_ε, которая составляется из луча $(-\infty, -\varepsilon)$ вещественной оси ($\varepsilon > 0$), полуокружности радиуса ε с центром в начале, лежащей в верхней полуплоскости (мы ограничимся рассмотрением $(x+i0)^\lambda$), и луча $(\varepsilon, +\infty)$ вещественной оси. По теореме Коши, величина этого интеграла не зависит от ε. Так как на линии L_ε у подынтегральной функции нет особенностей и $\varphi(x)$ при $|x| \to \infty$ убывает быстрее любой степени x, то интеграл существует при всех λ и представляет собой, как легко видеть, аналитическую функцию от λ. При $\operatorname{Re}\lambda > -1$ эта функция, очевидно, совпадает с функцией

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x+i0)^\lambda \varphi(x)\,dx;$$

таким образом, аналитическое продолжение последней не имеет полюсов.

7. Каноническая регуляризация. В предыдущих пунктах мы сопоставили ряду конкретных функций со степенными особенностями обобщенные функции (и тем самым научились вычислять многие расходящиеся интегралы). В этом пункте будет рассмотрено единое правило регуляризации, которое годится для функций, образующих уже довольно обширный подкласс в классе функций со степенными особенностями. Для удобства мы назовем эту регуляризацию *канонической* и введем временно обозначение

$$f = \text{к. р. } f(x)$$

(f — функционал, являющийся регуляризацией функции $f(x)$). Мы покажем, что эта каноническая регуляризация является естественной в том смысле, что выполняются условия:

1°. к. р. $[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1$ к. р. $f_1(x) + \alpha_2$ к. р. $f_2(x)$.

2°. к. р. $\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] = \frac{d}{dx}$[к. р. $f(x)$].

Здесь слева $\frac{d}{dx}$ — производная от функции в обычном смысле, а справа — производная от функционала.

3°. к. р. $[h(x) f(x)] = h(x) \cdot$ к. р. $f(x)$

для любой бесконечно дифференцируемой функции $h(x)$.

Рассмотрим сначала функции, имеющие неинтегрируемую особенность только в одной точке $x = 0$.

Ограничимся функциями, представимыми в виде конечных сумм

$$f(x) = \sum p_i(x) q_i(x), \tag{1}$$

где $p_i(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, а $q_i(x)$ — одна из следующих функций: x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}, причем параметру λ не разрешается принимать значения $-1, -2, \ldots$ Всем указанным функциям сопоставлены в пп. 2 и 3 обобщенные функции, причем показано, что для этих обобщенных функций сохраняются естественные формулы дифференцирования по x. Отметим, что операции сложения, умножения на бесконечно дифференцируемую функцию и обычного дифференцирования не выводят за пределы класса (1).

Так как для обобщенных функций определены операции умножения на бесконечно дифференцируемую функцию и сложения (см. § 1), то мы сразу получим искомое правило регуляризации функции $f(x)$, подставив справа в (1) вместо $q_i(x)$ соответствующие обобщенные функции.

Таким образом, канонической регуляризацией функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} мы будем считать соответствующие обобщенные функции, определенные в пп. 2 и 3, а каноническую регуляризацию функции $f(x)$ определим формулой

$$\text{к. р. } f(x) = \sum p_i(x) \cdot \text{к. р. } q_i(x). \tag{2}$$

Так как, в частности, $|x|^0 = 1$, то канонической регуляризацией бесконечно дифференцируемой функции мы считаем отвечающий ей регулярный функционал.

Очевидно, что условия 1° и 3° выполняются. Проверим условие 2°. Достаточно сделать это в случае одного слагаемого, т. е. когда

$$f(x) = p(x)\,q(x).$$

Для удобства обозначим символом $\frac{d}{dx}$ дифференцирование в смысле обобщенных функций и штрихом обычное дифференцирование. Согласно формуле (3) п. 1 § 2

$$\frac{d}{dx}\text{к. р. } f(x) = p'(x) \cdot \text{к. р. } q(x) + p(x)\frac{d}{dx}\text{к. р. } q(x).$$

Но, как уже отмечено,

$$\frac{d}{dx}\text{к. р. } q(x) = \text{к. р. } q'(x),$$

и, пользуясь условиями 1° и 3°, мы получаем:

$$\frac{d}{dx}\text{к. р. } f(x) = \text{к. р. } [p'(x)\,q(x) + p(x)\,q'(x)] = \text{к. р. } f'(x).$$

Но возникает вопрос, однозначно ли наше определение канонической регуляризации. Покажем, что это определение действительно однозначно. Для этого заметим, что, разлагая бесконечно дифференцируемые функции $p_i(x)$ по формуле Тейлора, мы можем представить $f(x)$ в виде конечной суммы:

$$f(x) = \sum c_i r_i(x) + h(x), \tag{1'}$$

где $r_i(x)$ — снова одна из функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} (только λ принимает, вообще говоря, другие значения), c_i — уже постоянные множители, а $h(x)$ — локально интегрируемая функция. Предположим, что в сумме $\sum c_i r_i(x)$ «приведены подобные члены» и оставлены лишь те $r_i(x)$, у которых $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$, а остальные отнесены в $h(x)$. Тогда представление (1′) будет однозначным, так как разные слагаемые имеют разные порядки при $x \to 0$. По формуле (1′) естественно написать регуляризацию

$$\sum c_i \cdot \text{к. р. } r_i(x) + h(x). \tag{2'}$$

Покажем, что регуляризации (2) и (2′) совпадают; этим и будет доказана однозначность нашего определения канонической регуляризации.

Достаточно предположить, что сумма в формуле (1) состоит из одного слагаемого $p(x)\,q(x)$, так как не только регуляризация (2), но и регуляризация (2′) обладает свойством 1°. Рассмотрим случай, когда $q(x) = x_+^\lambda$; остальные два случая рассматриваются аналогично. Пусть $-m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -m-1$. Разложим $p(x)$ по формуле Тейлора:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} p^{(j)}(0) + x^{m+1} s(x).$$

Нам надо показать, что для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(x_+^\lambda,\ p(x)\,\varphi(x)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{p^{(j)}(0)}{j!}(x_+^{\lambda+j},\ \varphi(x)) + \int_0^\infty x^{\lambda+m+1} s(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Для проверки этого равенства преобразуем его левую часть:

$$(x_+^\lambda,\ p(x)\varphi(x)) =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ p(x)\varphi(x) - \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}\,[p(x)\varphi(x)]^{(k)}\big|_{x=0} \right\} dx =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) \left[\sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!} p^{(j)}(0) + x^{m+1} s(x) \right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) \cdot \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!} p^{(j)}(0) \right\} dx =$$

$$= \sum_{j=0}^m \frac{p^{(j)}(0)}{j!} \int_0^\infty x^{\lambda+j} \left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) \right] +$$

$$+ \int_0^\infty x^{\lambda+m+1} s(x)\varphi(x)\,dx,$$

что совпадает с правой частью равенства (3).

Отметим, что мы могли бы положить формулу (2′) в основу определения канонической регуляризации. В конкретных случаях можно пользоваться как формулой (2), так и формулой (2′).

Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(x)$ имеет не одну, а несколько особенностей такого же вида, как в (1), или даже счетное число таких особенностей, но конечное в любом конечном интервале. В этом случае мы воспользуемся тем, что, как будет доказано в п. 2 добавления 1, единицу можно представить в виде

$$1 = \sum_{i=1}^\infty e_i(x),$$

где функции $e_i(x)$ бесконечно дифференцируемы, причем каждый интервал оси пересекается с носителями *) только

*) *Носителем* непрерывной функции $e(x)$ называется замыкание множества точек x, где $e(x) \neq 0$ (см. § 1, п. 4).

конечного числа функций $e_i(x)$ и в границах носителя одной функции $e_i(x)$ имеется только одна особая точка функции $f(x)$. Умножая последнее равенство на $f(x)$, мы видим, что можно исходить из представления

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty p_i(x)\,q_i(x), \tag{4}$$

где $q_i(x)$ — сдвиги тех же функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}, а $p_i(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, такие, что в пределах любого конечного интервала ряд (4) оказывается конечной суммой. Тогда мы снова можем положить

$$\text{к. р. } f(x) = \sum_{i=1}^\infty p_i(x)\cdot \text{к. р. } q_i(x), \tag{5}$$

т. е.

$$(\text{к. р. } f(x),\ \varphi(x)) = \sum_{i=1}^\infty (\text{к. р. } q_i(x),\ p_i(x)\varphi(x)); \tag{6}$$

здесь уже ряд всегда будет конечным, так как основные функции финитны. Операции сложения, умножения на бесконечно дифференцируемую функцию и дифференцирования снова не выводят за пределы класса (4). Разумеется, представление (4) данной функции $f(x)$, так же, как и представление (1), не будет единственным; но можно показать, что определение (5) не зависит от выбора этого представления.

Свойства 1°—3° проверяются без труда.

Обозначение «к. р. $f(x)$» в дальнейшем употребляться не будет: мы условимся обозначать каноническую регуляризацию функции $f(x)$ — или, лучше сказать, обобщенную функцию, отвечающую обычной функции $f(x)$, — тем же символом $f(x)$, подобно тому как в пп. 2 и 3 это было сразу принято для функций x_+^λ и др.

В частности, в соответствии с символикой, принятой в п. 3 § 1, под записью $\int f(x)\varphi(x)\,dx$, где $f(x)$ — обычная функция, допускающая каноническую регуляризацию, мы будем понимать результат применения этой канонической регуляризации к основной функции $\varphi(x)$.

Пример. В п. 4 § 2 мы встретились с функцией $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Ее можно представить при $|x|<\frac{\pi}{2}$ в виде

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=x\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{x}=\frac{p(x)}{x},$$

где $p(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Аналогично $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ записывается в окрестностях точек $k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ Мы видим, что $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ допускает каноническую регуляризацию. На основных функциях, отличных от нуля лишь в малой окрестности нуля, эта регуляризация записывается следующим образом:

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2},\ \varphi(x)\right)=\left(\frac{p(x)}{x},\ \varphi(x)\right)=\left(\frac{1}{x},\ p(x)\varphi(x)\right)=$$
$$=\int_0^\infty \frac{p(x)\varphi(x)-p(-x)\varphi(-x)}{x}\,dx=$$
$$=\int_0^\infty [\varphi(x)-\varphi(-x)]\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx.$$

В силу свойства 2° производной от этого функционала будет каноническая регуляризация функции

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

т. е., в соответствии с определением x^{-2}, функционал, выражаемый формулой

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},\ \varphi\right)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{4\varphi(0)}{x^2}\right]dx$$

(снова в предположении, что $\varphi(x)=0$ вне малой окрестности нуля). Аналогично можно подсчитать следующие производные от обобщенной функции $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

8. Регуляризация других интегралов. В предыдущем пункте было показано, что следует понимать с точки зрения теории обобщенных функций под (расходящимся в обычном смысле) интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — фиксированная функция с довольно общими степенными особенностями, а $\varphi(x)$ — *произвольная* основная функция. В частности, фиксируя эту основную функцию, мы получаем способ вычисления конкретных расходящихся интегралов.

Однако при этом остались в стороне уже такие простые, но важные интегралы, как $\int_0^b x^\lambda\,dx$ и $\int_0^\infty x^\lambda\,dx$ (первый из этих интегралов расходится при $\operatorname{Re}\lambda\leqslant -1$, второй — при всех λ), и многие другие. В этом пункте мы постараемся придать таким интегралам естественный смысл.

Регуляризация в конечном промежутке. В предыдущих пунктах мы рассматривали функционалы, определяемые функциями x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} на полупрямой или на всей прямой. Можно рассматривать функционалы, определяемые интегралами по конечному отрезку, как, например,

$$(x^\lambda_{0\leqslant x\leqslant b},\ \varphi)=\int_0^b x^\lambda\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Мы взяли здесь отрезок $0\leqslant x\leqslant b$ как наиболее типичный: на нем имеется одна точка возможной расходимости, причем концевая ($x=0$). Случай отрезка $a\leqslant x\leqslant b$, на котором нет особых точек, не представляет интереса; если же точка расходимости находится в середине отрезка, то мы разобьем его на два отрезка так, что каждый из них будет иметь точку расходимости на конце.

Итак, рассматриваем интеграл (1). Он сходится при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ и представляет собой при этом аналитическую функцию λ. Совершая преобразование

$$\int_0^b x^\lambda \varphi(x)\,dx =$$

$$=\int_0^b x^\lambda \left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ \ldots\ -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx+$$

$$+\varphi(0)\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\varphi'(0)\frac{b^{\lambda+2}}{(\lambda+2)}+\ldots+\varphi^{(n-1)}(0)\frac{b^{\lambda+n}}{(n-1)!\,(\lambda+n)}, \quad (2)$$

мы видим, что наш интеграл как функция от λ аналитически продолжается во всю плоскость λ, за исключением значений $\lambda=-1, -2, \ldots, -n, \ldots$, где он имеет полюсы 1-го порядка. Формулу (2) мы примем за определение регуляризации стоящего слева интеграла при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ Обозначим этот функционал через $x^\lambda_{0\leqslant x\leqslant b}$.

В качестве $\varphi(x)$ здесь можно фактически брать любую бесконечно дифференцируемую при $0\leqslant x\leqslant b$ функцию, так как такую функцию всегда можно продолжить за точки 0 и b так, чтобы получилась финитная бесконечно дифференцируемая функция.

Возьмем, в частности, $\varphi(x)\equiv 1$ при $0\leqslant x\leqslant b$. Мы получим равенство

$$\int_0^b x^\lambda\,dx=\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad (3)$$

справедливое при всех $\lambda\neq -1, -2, \ldots$ Излишне указывать, что интеграл в левой части здесь понимается (при $\operatorname{Re}\lambda\leqslant -1$) не в обычном смысле, а как регуляризованный по нашему правилу *).

Рассмотрим теперь любую функцию $f(x)$ вида

$$f(x)=\begin{cases} x^\lambda p(x) & \text{при } 0<x\leqslant b, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases} \quad (4)$$

*) В данном случае правая часть, а вместе с ней и левая имеют единственную особенность при $\lambda=-1$.

где $p(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция. По аналогии с п. 7 мы рассмотрим регуляризацию функции $f(x)$, определяемую формулой

$$(\text{рег. } f(x),\ \varphi(x))=(x^\lambda_{0\leqslant x\leqslant b},\ p(x)\varphi(x)). \quad (5)$$

Следующее замечание будет полезно в дальнейшем. *Справедливое при* $\operatorname{Re}\lambda>-1$ *равенство*

$$\int_0^b x^\lambda\varphi(x)\,dx=\int_0^c x^\lambda\varphi(x)\,dx+\int_c^b x^\lambda\varphi(x)\,dx, \quad (6)$$

где $0<c<b$, *сохраняется при всех* $\lambda\neq -1, -2, \ldots$, *если под первыми двумя интегралами понимать указанные выше регуляризации.* Действительно, все три интеграла допускают независимые аналитические продолжения в полную плоскость λ с исключенными точками $-1, -2, \ldots$, причем последний интеграл существует даже при всех λ в обычном смысле, и равенство (6) сохраняется в силу теоремы единственности.

Теперь рассмотрим функцию $f(x)$ со степенными особенностями в точках a и b, так что в окрестности точки a имеет место представление

$$f(x)=(x-a)^\lambda p_a(x),$$

а в окрестности точки b — представление

$$f(x)=(b-x)^\mu p_b(x),$$

где $p_a(x)$ и $p_b(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, первая — в интервале $a\leqslant x<b$, вторая — в интервале $a<x\leqslant b$. Определим теперь регуляризацию функции $f(x)$, т. е. интеграла

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

равенством

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\int_a^c f(x)\varphi(x)\,dx+\int_c^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

где c — точка между a и b, а интегралы справа определены как соответствующие регуляризации.

Результат прежде всего не зависит от выбора точки c. Действительно, если $c' > c$ — любая другая точка на отрезке $[a, b]$, то, по сказанному выше,

$$\int_a^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^c f(x)\varphi(x)\,dx + \int_c^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_c^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_c^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{c'}^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$\int_a^{c'} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{c'}^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^c + \int_c^{c'} + \int_{c'}^b = \int_a^c + \int_c^b,$$

что и требуется.

В качестве примера рассмотрим B-функцию Эйлера

$$B(\lambda, \mu) = \int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx.$$

Этот интеграл сходится в обычном смысле при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$; по доказанному, он аналитически продолжается во всю плоскость λ и во всю плоскость μ, кроме значений $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$, и $\mu = 0, -1, -2, \ldots$ Формула регуляризации при $\operatorname{Re}\lambda > -k$, $\operatorname{Re}\mu > -s$ имеет вид

$$B(\lambda, \mu) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\lambda-1}\left[(1-x)^{\mu-1} - \sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r \frac{\Gamma(\mu)\,x^r}{r!\,\Gamma(\mu-r)}\right]dx +$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\mu-1}\left[x^{\lambda-1} - \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r \frac{\Gamma(\lambda)\,(1-x)^r}{r!\,\Gamma(\lambda-r)}\right]dx +$$
$$+ \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^r\,\Gamma(\mu)}{2^{r+\lambda}\,r!\,\Gamma(\mu-r)\,(r+\lambda)} + \sum_{r=0}^{s-1} \frac{(-1)^r\,\Gamma(\lambda)}{2^{r+\mu}\,r!\,\Gamma(\lambda-r)\,(r+\mu)}.$$

Регуляризация на бесконечности. Выше мы придали смысл интегралу

$$\int_0^b x^\lambda\,dx$$

при всех $\lambda \neq -1$, понимая его как результат применения функционала $x^\lambda_{0 \leqslant x \leqslant b}$ к основной функции $\varphi(x)$, равной 1 в промежутке $0 \leqslant x \leqslant b$. Было бы желательно осмыслить подобным образом интеграл по бесконечному промежутку

$$\int_b^\infty x^\lambda\,dx \qquad (b > 0).$$

Но у нас нет основной функции, равной 1 в промежутке от b до ∞. Поэтому мы примем следующее условие. Мы будем рассматривать класс $K(b, \infty)$ всех функций $\varphi(x)$, каждая из которых определена и бесконечно дифференцируема при всех $x \geqslant b$ и притом такова, что преобразование инверсии $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \psi(x)$ переводит ее в основную функцию на интервале $\left(0, \frac{1}{b}\right)$; точнее, в функцию, которая совпадает на этом интервале с некоторой основной функцией пространства K. Тогда мы определяем функционал

$$\int_b^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx$$

формулой, отвечающей подстановке $\frac{1}{x} = y$:

$$\int_b^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{b}} y^{-\lambda-2}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)dy,$$

причем получающийся интеграл, если нужно, понимается в указанном выше регуляризованном смысле; он существует, следовательно, при $-\lambda-2 \neq -1, -2, \ldots$, т. е. при $\lambda \neq -1, 0, +1, \ldots$

Для функции $F(x)$, определенной в промежутке $[b, \infty)$ и имеющей вид $F(x) = x^\lambda f(x)$, где $f(x)$ — функция класса

$K(b, \infty)$, примем в качестве формулы регуляризации следующую формулу:

$$(\text{рег. } F, \varphi) = \int_b^\infty F(x)\varphi(x)\,dx = \int_b^\infty x^\lambda [f(x)\varphi(x)]\,dx.$$

Очевидно, что для функционала рег. F, определенного на функциях $\varphi(x)$ класса $K(b, \infty)$, выполнены условия:

$$\text{рег. } [\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2] = \alpha_1 \cdot \text{рег. } F_1 + \alpha_2 \cdot \text{рег. } F_2,$$
$$\text{рег. } [g(x) F(x)] = g(x) \cdot \text{рег. } F(x)$$

для любой бесконечно дифференцируемой функции $g(x)$.

Перейдем теперь к самому общему случаю, когда функция $F(x)$ имеет несколько (конечное число) степенных особенностей. Перенумеровав особенности в порядке возрастания аргумента, для определенности, $-\infty < b_1 < \ldots < b_n < \infty$, мы разложим ось на конечное число промежутков:

$$(-\infty, a_1), (a_1, b_1), (b_1, a_2), (a_2, b_2), \ldots, (b_n, a_{n+1}), (a_{n+1}, \infty),$$

на каждом из которых остается лишь по одной особой точке на том или ином конце, в каждом из этих промежутков применим соответствующую формулу регуляризации и сложим результаты. Так же как и выше, легко показать, что общий результат не зависит от выбора промежуточных точек $a_1, \ldots, a_n$.

Отметим, далее, что вместе с регуляризациями функции $F(x)$ на каждом из этих промежутков полученная регуляризация на оси удовлетворяет условиям:

$$\text{рег. } [\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2] = \alpha_1 \cdot \text{рег. } F_1 + \alpha_2 \cdot \text{рег. } F_2,$$
$$\text{рег. } [g(x) F(x)] = g(x) \cdot \text{рег. } F(x)$$

($g(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция).

Примеры.

1. Найдем $\int_0^\infty x^\lambda\,dx$.

Как отмечено выше, при $b > 0$

$$\int_0^b x^\lambda\,dx = \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} \quad (\lambda \neq -1).$$

С другой стороны,

$$\int_b^\infty x^\lambda\,dx = -\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} \quad (\lambda \neq -1).$$

Поэтому

$$\int_0^\infty x^\lambda\,dx = \int_0^b x^\lambda\,dx + \int_b^\infty x^\lambda\,dx = 0 \quad (\lambda \neq -1).$$

Так как результат есть аналитическая функция λ, то он справедлив и в исключенной точке $\lambda = -1$.

2. Интеграл

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-\lambda-\mu}\,dx$$

при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$ сходится в обычном смысле и, как легко проверить подстановкой $\frac{x}{1+x} = y$, совпадает с $\mathrm{B}(\lambda, \mu)$. Поэтому его аналитическое продолжение совпадает с $\mathrm{B}(\lambda, \mu)$ при всех λ, $\mu \neq -1, -2, \ldots$

3. Найдем

$$I = \int_0^\infty [(x+1)^\lambda - x^\mu]^n\,dx.$$

Разлагая подынтегральную функцию по формуле бинома и применяя первое свойство канонической регуляризации, находим:

$$I = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^\infty (x+1)^{(n-k)\lambda} x^{k\mu}\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \mathrm{B}(k\mu + 1,\ k(\lambda - \mu) - n\lambda - 1)$$

в силу результата предыдущего примера.

Заметим, что при $\lambda=\mu$, $-\frac{1}{n}<\lambda<1-\frac{1}{n}$ интеграл I сходится в обычном смысле; мы получаем, таким образом, следующую «классическую» формулу

$$\int_0^\infty [(x+1)^\lambda - x^\lambda]^n\,dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \mathrm{B}(k\lambda+1,\ -n\lambda-1)$$
$$\left(-\frac{1}{n}<\lambda<1-\frac{1}{n}\right).$$

9. Обобщенная функция r^λ. Полагая $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, рассмотрим функционал r^λ, действующий по формуле

$$(r^\lambda,\ \varphi)=\int_{R_n} r^\lambda\,\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

которая имеет смысл при $\operatorname{Re}\lambda>-n$. В силу возможности дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(r^\lambda,\ \varphi)=\int r^\lambda \ln r\,\varphi(x)\,dx$$

функционал r^λ представляет собой аналитическую функцию от λ в области $\operatorname{Re}\lambda>-n$. Для $\operatorname{Re}\lambda\leqslant -n$ функция r^λ локально неинтегрируема; мы определим функционал r^λ методом аналитического продолжения. Можно это сделать, обобщая схему предыдущих пунктов (эта идея впоследствии будет рассмотрена в применении к более широкому классу функций вида $P^\lambda(x)$, где $P(x)$ — положительная однородная функция; см. гл. III, § 3). Мы здесь используем более простой прием, основанный на сведе́нии функции r^λ к x_+^λ.

Переходя в интеграле (1) к сферическим координатам, приводим его к виду

$$(r^\lambda,\ \varphi)=\int_0^\infty r^\lambda\left\{\int_\Omega \varphi(r\omega)\,d\omega\right\} r^{n-1}\,dr,$$

где $d\omega$ — элемент единичной сферы Ω. Внутренний интеграл можно представить в форме

$$\int_\Omega \varphi(r\omega)\,d\omega=\Omega_n S_\varphi(r),$$

где Ω_n означает поверхность единичной сферы в n-мерном пространстве, а $S_\varphi(r)$ есть среднее из значений функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса r. Итак, мы приходим к формуле

$$(r^\lambda,\ \varphi)=\Omega_n\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}S_\varphi(r)\,dr. \tag{2}$$

Установим некоторые свойства функции $S_\varphi(r)$. Мы утверждаем, что *функция $S_\varphi(r)$* (определенная при $r\geqslant 0$) *финитна, бесконечно дифференцируема и все ее производные нечетного порядка обращаются в нуль при $r=0$.*

При достаточно большом r функция $\varphi(x)$ обращается в нуль; поэтому и ее среднее $S_\varphi(r)$ обращается в нуль; таким образом, $S_\varphi(r)$ — финитная функция.

Очевидно также, что $S_\varphi(r)$ бесконечно дифференцируема при $r>0$.

Чтобы убедиться в наличии всех производных у функции $S_\varphi(r)$ и при $r=0$, разложим функцию $\varphi(x)$ по формуле Тейлора. Тогда будем иметь:

$$\Omega_n S_\varphi(r)=\int_\Omega\left[\varphi(0)+\sum\frac{\partial\varphi(0)}{\partial x_j}x_j+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial x_i\,\partial x_j}x_ix_j+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3!}\sum\frac{\partial^3\varphi(0)}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}x_ix_jx_k+\ldots\right]d\omega.$$

Ясно, что каждое слагаемое подынтегральной суммы (кроме остаточного члена), содержащее нечетное число множителей x_j, после интегрирования обращается в нуль. Слагаемые подынтегральной суммы, содержащие четное число, скажем $2m$, множителей x_j, после интегрирования и суммирования дадут член вида $a_m r^{2m}$. Итак, мы получаем:

$$S_\varphi(r)=\varphi(0)+a_1r^2+a_2r^4+\ldots+a_nr^{2k}+o(r^{2k})\,^{*}). \tag{3}$$

Это выражение показывает, что при $r=0$ функция $S_\varphi(r)$ имеет производные до порядка $2k$, причем нечетные производные равны нулю. Так как k можно взять произвольным, то $S_\varphi(r)$ бесконечно дифференцируема при $r=0$ и все ее нечетные производные при $r=0$ обращаются в нуль.

*) $y(x)=o(x)$ означает, что отношение $\frac{y}{x}$ стремится к нулю.

Отсюда следует, что функцию $S_\varphi(r)$ можно рассматривать как четную основную функцию переменного r. Интеграл (2) в таком случае можно понимать как результат применения функционала $\Omega_n x_+^\mu$ ($\mu=\lambda+n-1$) к основной функции $S_\varphi(x)$. Но мы хорошо знаем, что функция x_+^μ, аналитическая при $\operatorname{Re}\mu>-1$ (т. е. $\operatorname{Re}\lambda>-n$) допускает аналитическое продолжение на всю плоскость $\mu(\lambda)$ с исключенными точками $\mu=-1, -2, \ldots$ ($\lambda=-n, -n+1, \ldots$), в которых она имеет полюсы 1-го порядка; при этом вычет в полюсе $\mu=-m$ ($\lambda=-n-m+1$) равен

$$\frac{((-1)^{m-1}\delta^{(m-1)}(x),\ S_\varphi(x))}{(m-1)!}=\frac{S_\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}.$$

Но так как нечетные производные функции $S_\varphi(x)$ обращаются в нуль при $x=0$, то полюсов, отвечающих четным значениям m, на самом деле нет. Остается серия полюсов, отвечающих значениям $m=1, 3, 5, \ldots$ или, что то же, $\lambda=-n, -n-2, -n-4, \ldots$

Заметим, что вычет функции $(r^\lambda, S_\varphi(x))$ при $\lambda=-n-2k$ ($k=0, 1, \ldots$), как вытекает из вышесказанного, равен

$$\Omega_n\frac{\left(\delta^{(2k)}(x),\ S_\varphi(x)\right)}{(2k)!}=\Omega_n\frac{S_\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!}. \tag{4}$$

В частности, в точке $\lambda=-n$ функция (r^λ, S_φ) имеет полюс 1-го порядка с вычетом $\Omega_n S_\varphi(0)=\Omega_n\varphi(0)$. Это означает, что обобщенная функция r^λ при $\lambda=-n$ имеет полюс 1-го порядка с вычетом $\Omega_n\delta(x)$.

Величину $S_\varphi^{(2k)}(0)$ можно выразить непосредственно через функцию φ, минуя ее усреднение.

Для этого мы построим иное выражение вычета обобщенной функции r^λ при $\lambda=-n-2k$. Воспользуемся формулой дифференцирования

$$\Delta(r^{\lambda+2})=(\lambda+2)(\lambda+n)r^\lambda,$$

где Δ — оператор Лапласа. (При $\operatorname{Re}\lambda>0$ эта формула доказывается непосредственным подсчетом левой части, для остальных λ она остается справедливой в силу аналитического продолжения.) Итерируя эту формулу, можно получить при любом целом k равенство

$$r^\lambda=\frac{\Delta^k r^{\lambda+2k}}{(\lambda+2)(\lambda+4)\ldots(\lambda+2k)(\lambda+n)(\lambda+n+2)\ldots(\lambda+n+2k-2)}.$$

Вычет функции r^λ при $\lambda=-n-2k$ можно теперь сосчитать как вычет правой части при этом значении λ. Так как знаменатель

правой части при $\lambda=-n-2k$ не обращается в нуль, то достаточно найти вычет числителя. Но для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(\Delta^k r^{\lambda+2k},\ \varphi(x))=(r^{\lambda+2k},\ \Delta^k\varphi(x)),$$

т. е. мы должны взять вычет функции $(r^\lambda, \Delta^k\varphi(x))$ при $\mu=-n$. Такой вычет мы выше вычислили для любой основной функции; он равен значению этой основной функции в точке $x=0$, умноженному на Ω_n. В данном случае мы получаем значение вычета, равное $\Omega_n\Delta^k\varphi(0)$. Отсюда следует, что вычет функции (r^λ, φ) при $\lambda=-n-2k$ равен

$$\frac{\Omega_n\Delta^k\varphi(0)}{(-2k-n+2)\ldots(-n)(-2k)\ldots(-2)}=\frac{\Omega_n(\Delta^k\delta(x),\ \varphi(x))}{2^k k!\,n(n+2)\ldots(n+2k-2)}, \tag{5}$$

а вычет обобщенной функции r^λ при том же λ равен

$$\frac{\Omega_n\Delta^k\delta(x)}{2^k k!\,n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{5'}$$

Сравнивая величину (5) с найденным выше выражением вычета (4), находим, что

$$S_\varphi^{(2k)}(0)=\frac{(2k)!\,\Omega_n\Delta^k\varphi(0)}{2^k k!\,n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{6}$$

Этот результат дает возможность написать разложение Тейлора для функции $S_\varphi(r)$:

$$S_\varphi(r)=\varphi(0)+\frac{1}{2!}S''_\varphi(0)r^2+\ldots+\frac{1}{(2k)!}S_\varphi^{(2k)}(0)r^{2k}+\ldots=$$
$$=\Omega_n\sum_{k=0}^{m}\frac{\Delta^k\varphi(0)}{2^k k!\,n(n+2)\ldots(n+2k-2)}+\ldots \tag{7}$$

(формула Пицетти*)).

Для дальнейшего нам удобно нормировать обобщенную функцию r^λ так же, как это было сделано выше для степеней x на прямой. Для этого разделим r^λ на

$$(r^\lambda,\ e^{-r^2})=\int r^\lambda e^{-r^2}r^{n-1}\,d\Omega\,dr=\frac{\Omega_n}{2}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right).$$

Функция

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

*) Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1951, гл. IV, § 3.

является, очевидно, целой аналитической функцией λ. Значение этой функции в особых точках числителя и знаменателя можно найти как отношение соответствующих вычетов. Таким образом, мы получаем:

$$\frac{2}{\Omega_n}\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-n-2k}=\frac{\underset{\lambda=-n-2k}{\text{выч.}}\ r^\lambda}{\underset{\lambda=-n-2k}{\text{выч.}}\ (r^\lambda,\ e^{-r^2})}=$$

$$=\frac{\dfrac{\Omega_n\,\Delta^k\delta(x)}{2^k k!\,n(n+2)\ldots(n+2k-2)}}{\dfrac{(\Omega_n\delta^{(2k)}(x),\ e^{-x^2})}{(2k)!}}=(-1)^k\frac{\Delta^k\delta(x)}{2^k k!\,n\ldots(n+2k-2)}. \tag{8}$$

В частности, при $k=0$ получаем:

$$\frac{2}{\Omega_n}\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-n}=\delta(x). \tag{9}$$

10. Разложение функции r^λ на плоские волны. Пусть $\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)$ — точка единичной сферы в пространстве R_n. Пусть $\operatorname{Re}\lambda>-1$; построим обобщенную функцию $F_\lambda(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)$ по формуле

$$(F_\lambda(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n),\ \varphi(x))=\int\frac{|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Совершая поворот осей $y=ux$, при котором точка ω приобретает координаты $(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ и полагая $\psi(y)=\varphi(u^{-1}y)=\varphi(x)$, мы преобразуем этот интеграл к виду

$$\int\frac{|y_1|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\psi(y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{y_1=-\infty}^{\infty}\frac{|y_1|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\left\{\int\limits_{y_2,\ldots,y_n}\psi(y)\,dy_2\ldots dy_n\right\}dy_1. \tag{2}$$

Выражение в фигурных скобках есть некоторая функция $\varphi_0(y_1)$, бесконечно дифференцируемая и финитная, т. е. основная функция переменного y_1. Но в таком случае выражение (2) может быть аналитически продолжено на все значения λ; вместе с ним определяется для всех λ и функционал $F_\lambda(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)$.

Легко видеть, что функционал $F_\lambda(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)$ непрерывно зависит от точки ω. Действительно, вместе с точкой ω непрерывно меняется подпространство, ортогональное к вектору ω, непрерывно меняется интеграл от функции $\psi(y)$ по этому подпространству и, следовательно, непрерывно меняется функция $\varphi_0(y_1)$; более того, она меняется непрерывно в смысле сходимости в основном пространстве K. Поэтому при каждом фиксированном λ непрерывно меняется величина $(F_\lambda(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n),\ \varphi(x))$, что и означает непрерывность функционала F_λ по параметру ω (ср. § 1, п. 8).

Поэтому можно *проинтегрировать функционал* F_λ *по параметру* ω, пробегающему единичную сферу Ω, т. е. построить такой функционал G_λ, что для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(G_\lambda,\ \varphi(x))=\int\limits_\Omega(F_\lambda,\ \varphi(x))\,d\omega$$

(подробнее об интегрировании по параметру см. в добавлении 2).

Вычислим этот интеграл вначале для $\operatorname{Re}\lambda>-1$. В этом случае, как легко видеть,

$$\int\limits_\Omega|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda\,d\omega$$

есть сферически симметричная функция от $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, однородная степени λ, и с точностью до множителя равная r^λ. Иными словами,

$$\int\limits_\Omega|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda\,d\omega=C(n,\ \lambda)\,r^\lambda. \tag{3}$$

Чтобы найти значение постоянной $C(n,\ \lambda)$, положим $x_n=1$,

$x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$. Мы получим тогда *)

$$C(n,\ \lambda)=\int\limits_{\Omega}|\omega_n|^\lambda\,d\omega=2\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}.$$

Подставляя значение $C(n,\ \lambda)$ в формулу (3) и деля на $\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$, получаем формулу

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int\limits_{\Omega}|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^\lambda\,d\omega=\frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},\quad (4)$$

основную для дальнейшего. Эта формула, установленная для $\operatorname{Re}\lambda>-1$, остается справедливой и при остальных значениях λ в силу единственности аналитического продолжения (см. добавление 2). Она дает разложение функции $\frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ на так называемые «плоские волны» и тем самым, как будет показано ниже, часто позволяет сводить пространственные задачи к плоским и одномерным.

---

*) Для вычисления интеграла переходим к сферическим координатам $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{n-1}$. При этом

$$\omega_n=\cos\theta_{n-1},\quad\text{а}\quad d\omega=\sin^{n-2}\theta_{n-1}\,d\omega_{n-1},$$

где $d\omega_{n-1}$ — элемент поверхности сферы в $(n-1)$-мерном пространстве. Интеграл приобретает вид

$$2\Omega_{n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\cos^\lambda\theta\,d\theta=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},$$

поскольку

$$\Omega_{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},\quad\text{а}\quad\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\cos^\lambda\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\,B\left(\frac{n-1}{2},\frac{\lambda+1}{2}\right).$$

Рассмотрим частный случай этой формулы при $\lambda=-n$. Если n нечетно, то по формуле (3) п. 5

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

С другой стороны, по формуле (9) п. 9

$$\left.\frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=\Omega_n\delta(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

где Ω_n — площадь поверхности единичной сферы. Подставив эти значения в формулу (4) и разделив обе части равенства на Ω_n, получаем:

$$\delta(x_1,\ \ldots,\ x_n)=$$
$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\pi^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!\,\Omega_n}\int\limits_{\Omega}\delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\,d\omega.$$

В пространстве нечетного числа измерений

$$\Omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)}.$$

Подставляя это значение Ω_n и упрощая коэффициент, находим окончательную формулу:

$$\delta(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Omega}\delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\,d\omega.\quad (5)$$

Выведем теперь формулу, дающую разложение δ-функции на плоские волны в пространстве четного числа измерений. Правая часть формулы (4) по-прежнему при $\lambda=-n$ обратится в $\Omega_n\delta(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. С другой стороны, при четном n

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}x^{-n},$$

где выражение x^{-n} определено формулой (5) п. 3. Подставляя эти значения в (4), мы получаем, что при четном n

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{n-1}{2}}\Omega_n}\int\limits_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n}\,d\omega.$$

Вспоминая, что $\Omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, мы получаем, что в случае четного n

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n}\,d\omega^{*)}. \tag{6}$$

Для пояснения формулы (5) применим обе части равенства к функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы получим:

$$\varphi(0, \ldots, 0) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_\Omega d\omega \int\limits_{\sum \omega_k x_k = 0} \frac{\partial^{n-1}\varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial\nu^{n-1}}\,d\sigma_0, \tag{7}$$

где $d\sigma_0$ — элементарная площадка в плоскости $\sum \omega_k x_k = 0$, а $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ — дифференцирование по направлению ортогонального к ней вектора ω. Аналогично можно записать формулу (6). Положим для основной функции $\varphi(x)$

$$\psi(\xi, \omega) \equiv \psi(\xi) = \int\limits_{\sum \omega_k x_k = \xi} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,d\sigma_\xi,$$

где $d\sigma_\xi$ — элементарная площадка в плоскости $\sum \omega_k x_k = \xi$ (величина этого интеграла зависит от направления вектора ω). Очевидно, что $\psi(\xi)$ — бесконечно дифференцируе-

---

*) Случай четного n можно было бы объединить со случаем нечетного n в единой формуле

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n - i0)^{-n}\,d\omega$$

в силу определения функции $(x - i0)^{-n}$ (см. п. 6).

мая финитная функция. Согласно формуле (5) п. 3

$$(\xi^{-n}, \psi(\xi)) = \int\limits_0^\infty \xi^{-n}\left\{\psi(\xi) + \psi(-\xi) - 2\left[\psi(0) + \frac{\xi^2}{2!}\psi''(0) + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots + \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!}\psi^{(n-2)}(0)\right]\right\}d\xi.$$

Теперь можно записать результат применения формулы (6) к основной функции $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(0, \ldots, 0) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\times$$
$$\times\int\limits_\Omega ((\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n}, \psi(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n))\,d\omega. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) дают решение так называемой *проблемы Радона* о восстановлении функции $\varphi(x)$ (или $\psi(x)$) по известным её интегралам по гиперплоскостям $(\omega, x) = C$.

11. Однородные функции. Рассмотрим теперь введенные выше обобщенные функции x_+^λ, x_-^λ и др. еще с новой точки зрения — именно, в аспекте понятия однородной функции. Мы определили в § 1, п. 6 однородную обобщенную функцию степени λ уравнением

$$f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x), \tag{1}$$

или, что то же,

$$\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f(x), \varphi(x))$$

для любой основной функции $\varphi(x)$ и любого положительного α.

Установим некоторые простые свойства обобщенных однородных функций.

1. *Сумма двух однородных функций степени λ есть снова однородная функция той же степени λ.*

2. *Произведение однородной обобщенной функции f степени λ на бесконечно дифференцируемую однородную функцию $a(x)$ степени μ есть однородная обобщенная функция степени $\lambda + \mu$.*

Доказательства свойств 1 и 2 получаются непосредственно применением определения (1).

3. *Производная по x_j однородной обобщенной функции f степени λ есть однородная обобщенная функция степени $\lambda - 1$.*

Действительно, мы имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = -\frac{1}{\alpha}\alpha^{\lambda+n}\left(f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \\ = \alpha^{\lambda-1+n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right).$$

4. *Однородные функции различной степени линейно независимы.* Предположим, что имеет место равенство

$$c_1 f_1(x) + \ldots + c_m f_m(x) = 0,$$

где $f_k(x)$ — однородная обобщенная функция степени λ_k, причем все числа λ_k различны. Согласно определению, при любом положительном α и любой основной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$c_1\alpha^{\lambda_1}(f_1, \varphi) + c_2\alpha^{\lambda_2}(f_2, \varphi) + \ldots + c_m\alpha^{\lambda_m}(f_m, \varphi) = 0.$$

Так как показатели λ_k по предположению различны, то при любом k и при любой φ мы имеем $c_k(f_k, \varphi) = 0$. Если $f_k \neq 0$, то функцию $\varphi(x)$ можно взять так, чтобы было $(f_k, \varphi) \neq 0$; отсюда $c_k = 0$ при каждом k, что и требуется.

5. *Пусть f_λ — однородная обобщенная функция степени λ, аналитическая по λ в области Λ. Пусть, далее, f_λ допускает аналитическое продолжение по λ в более широкую область $\Lambda_1 \supset \Lambda$. Тогда функционал f_λ и в более широкой области Λ_1 остается однородным степени λ.*

Действительно, при любом фиксированном λ и любой основной функции $\varphi(x)$ в области Λ выполняется равенство

$$\left(f_\lambda, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f_\lambda, \varphi).$$

Справа и слева стоят аналитические в области Λ функции от λ. В силу единственности аналитического продолжения, они совпадают и в области Λ_1, что нам и требуется.

Рассмотренная в предыдущих пунктах обобщенная функция x_+^λ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ является однородной функцией степени λ. Далее, мы знаем, что функция x_+^λ допускает аналитическое продолжение во всю плоскость λ с исключенными точками $-1, -2, \ldots$ В силу свойства 5 *функция x_+^λ является однородной функцией степени λ при всех комплексных $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots$* То же относится к функции x_-^λ. Функции $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, $(x+i0)^\lambda$, $(x-i0)^\lambda$, как линейные комбинации функций x_+^λ и x_-^λ, также однородные функции степени λ; при этом каждая из них однородна в полной области своего существования: функция $|x|^\lambda$ однородна при $\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots$, функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ однородна при $\lambda \neq -2, -4, \ldots$, функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ однородны при всех λ без исключений. В частности, обобщенная функция x^{-m} однородна степени $-m$ при любом целом m. Имеется еще одна однородная функция степени $-m$, именно $\delta^{(m-1)}(x)$; действительно,

$$\left(\delta^{(m-1)}(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = (-1)^{m-1}\frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{\alpha^{m-1}} = \\ = \alpha^{-m+1}(\delta^{(m-1)}(x), \varphi(x)).$$

Найдем все однородные обобщенные функции порядка λ на прямой. Согласно определению такие функции удовлетворяют уравнению

$$f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x) \tag{2}$$

при любом $\alpha > 0$. Дифференцируя это соотношение по α и полагая затем $\alpha = 1$, получаем:

$$xf'(x) = \lambda f(x). \tag{3}$$

Найдем все решения этого уравнения. При $x \neq 0$ можно интегрировать обычным образом; это приводит нас к выводу, что искомая обобщенная функция $f(x)$ должна совпадать с $C_1 x^\lambda$ при $x > 0$ и $C_2|x|^\lambda$ при $x < 0$. Такого рода обобщенные функции имеются уже у нас: это функции $C_1x_+^\lambda$ и $C_2x_-^\lambda$ при $\lambda \neq -n$, $n = 1, 2, \ldots$ Предполагая, что эти неравенства выполнены, рассмотрим обобщенную функцию $f_0(x) = f(x) - C_1x_+^\lambda - C_2x_-^\lambda$. Она вместе с каждым слагаемым удовлетворяет уравнению (2) и в то же время равна нулю при $x \neq 0$. Таким образом, функция $f_0(x)$ сосредоточена в одной точке.

Во втором выпуске будет доказана следующая теорема, которую мы сейчас примем без доказательства. *Если* *обобщенная функция f_0 сосредоточена в одной точке, скажем $x_0=0$, то она имеет вид*

$$f_0(x)=\sum_{k=0}^{m} c_k\,\delta^{(k)}(x)$$

с некоторым (конечным) m.

В силу этой теоремы мы имеем

$$f(x)-C_1x_+^\lambda-C_2x_-^\lambda-\sum_{k=0}^{m} c_k\,\delta^{(k)}(x)=0.$$

Применяя свойство 4, получаем $c_0=c_1=\ldots=c_m=0$, и, следовательно,

$$f(x)=C_1x_+^\lambda+C_2x_-^\lambda$$

есть общее решение поставленной задачи при $\lambda\neq-1,-2,\ldots$

Пусть теперь $\lambda=-n$ есть целое отрицательное число. Будем предполагать, что $f(x)$ — четная функция при четном n и нечетная функция при нечетном n. При $x\neq0$ функция $f(x)$ должна совпадать с функцией Cx^{-n}. Обобщенная однородная функция, обладающая этим свойством, известна, именно, Cx^{-n}. Разность $f_0(x)=f(x)-Cx^{-n}$, как и выше, сосредоточена в точке $x=0$ и есть линейная комбинация δ-функции и ее производных. Снова применяя свойство 4, получаем, что общее решение уравнения (2) при $\lambda=-n$ имеет вид

$$f(x)=Cx^{-n}+C_1\delta^{(n-1)}(x).$$

Во всех случаях получаются две линейно независимые однородные обобщенные функции порядка λ.

В n-мерном пространстве обобщенная функция r^λ при $\operatorname{Re}\lambda>-n$, очевидно, однородная функция степени λ. В силу свойства 5 она остается однородной всюду, куда она аналитически продолжается, т. е. всюду в плоскости λ, кроме точек $\lambda=-n,\ -n-2,\ldots$ Функция $\delta(x_1,\ldots,x_n)$ — однородная функция степени $-n$, что можно получить как непосредственно из ее определения, так и с помощью формулы (9) п. 9.

Используя однородность функций $\delta^{(n-1)}(x)$ и x^{-n}, мы можем преобразовать формулы разложения δ-функции на плоские волны (п. 10, формулы (5) и (6)) к аффинно-инвариантному виду. Рассмотрим произвольную поверхность S, звездную относительно точки O; она получается из единичной сферы умножением радиуса-вектора, идущего в точку

$\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, на положительное число $f(\omega)$. Положим $\rho_k=f(\omega)\,\omega_k$. В силу однородности функции $\delta^{(n-1)}(x)$ мы имеем $\delta^{(n-1)}(\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n)=[f(\omega)]^{-n}\,\delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)$; с другой стороны, произведение $[f(\omega)]^n\,d\omega$ есть элемент dS поверхности S; поэтому при нечетном n имеет место равенство

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=c_n\int_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\,d\omega=$$
$$=c_n\int_S \delta^{(n-1)}(\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n)\,ds. \qquad (4)$$

Аналогично, при четном n

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=c_n\int_\Omega (\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)^{-n}\,d\omega=$$
$$=c_n\int_S (\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n)^{-n}\,ds. \qquad (5)$$

Формулы (4) — (5) имеют уже афинно-инвариантную запись.

§ 4. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ *)

1. Присоединенные функции. Однородные функции, как это следует из их определения, являются собственными функциями оператора подобного преобразования u:

$$uf(x)=f(\alpha x).$$

Действительно, если $f(x)$ — однородная функция степени λ, то

$$uf(x)=f(\alpha x)=\alpha^\lambda f(x).$$

У произвольного линейного преобразования, наряду с собственной функцией f_0, отвечающей данному собственному значению, имеются обычно так называемые присоединенные функции различных порядков. Функции $f_1, f_2,\ldots,f_k,\ldots$ называются *присоединенными к собственной функции f_0 преобразования u*, если они удовлетворяют соотношениям:

$$uf_0=af_0,$$
$$uf_1=af_1+bf_0,$$
$$uf_2=af_2+bf_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$uf_k=af_k+bf_{k-1},$$

*) Этот параграф при первом чтении можно пропустить.

т. е. линейное преобразование u воспроизводит присоединенную функцию k-го порядка с точностью до присоединенной функции $(k-1)$-го порядка.

Заметим при этом, что, как легко проверить, сумма присоединенной функции k-го порядка и присоединенной функции низшего порядка снова представляет собой присоединенную функцию k-го порядка. В конечномерном пространстве, в базисе, состоящем из собственных и присоединенных векторов линейного преобразования, матрица этого преобразования имеет жорданову нормальную форму. Присоединенные векторы выбираются при этом так, чтобы постоянная b равнялась единице.

Возвращаясь к функциям и к оператору подобного преобразования в области независимых переменных, мы скажем, что *присоединенной функцией* 1-*го порядка степени* λ называется функция $f_1(x)$, которая для любого $\alpha>0$ удовлетворяет равенству

$$f_1(\alpha x)=\alpha^\lambda f_1(x)+h(\alpha)f_0(x),$$

где $f_0(x)$ — однородная функция степени λ. Функция $h(\alpha)$ однозначно определяется из тождества

$$h(\alpha\beta)=\alpha^\lambda h(\beta)+\beta^\lambda h(\alpha),$$

вытекающего из рассмотрения $f_1(\alpha\beta x)$. Деля обе части этого тождества на $\alpha^\lambda\beta^\lambda$, получаем, что функция $h_1(\alpha)=\frac{h(\alpha)}{\alpha^\lambda}$ удовлетворяет уравнению

$$h_1(\alpha\beta)=h_1(\alpha)+h_1(\beta).$$

Как известно, единственным непрерывным решением этого уравнения является логарифмическая функция. Учитывая еще, что $h(1)=0$, мы получаем:

$$h(\alpha)=\alpha^\lambda\ln\alpha.$$

Окончательно мы будем называть $f_1(x)$ *присоединенной функцией* 1-*го порядка степени* λ, если для любого $\alpha>0$ выполняется условие

$$f_1(\alpha x)=\alpha^\lambda f_1(x)+\alpha^\lambda\ln\alpha f_0(x), \tag{1}$$

где $f_0(x)$ — однородная функция степени λ. Например, $\ln|x|$ есть присоединенная функция 1-го порядка нулевой степени, так как для $\alpha>0$

$$\ln|\alpha x|=\ln|x|+\ln\alpha.$$

Аналогично тому, как это было сделано для обобщенных однородных функций, определим теперь обобщенные присоединенные функции. Обобщенная функция f_1 называется *присоединенной однородной функцией 1-го порядка степени* λ, если для любого $\alpha>0$

$$\left(f_1,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+1}(f_1,\ \varphi)+\alpha^{\lambda+1}\ln\alpha\,(f_0,\ \varphi), \tag{2}$$

где f_0 — обобщенная однородная функция степени λ. Вообще, для любого k обобщенная функция f_k называется *присоединенной однородной функцией k-го порядка степени* λ, если для всякого $\alpha>0$

$$\left(f_k,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+1}(f_k,\ \varphi)+\alpha^{\lambda+1}\ln\alpha\,(f_{k-1},\ \varphi), \tag{3}$$

где f_{k-1} — присоединенная функция $(k-1)$-го порядка.

Выясним теперь, что представляют собой присоединенные обобщенные функции различных порядков и произвольной степени λ. Для этого заметим, что *если f_λ — обобщенная однородная функция степени λ, дифференцируемая по λ, то ее производная по λ будет присоединенной функцией 1-го порядка.*

Действительно, продифференцировав по λ тождество

$$\left(f_\lambda,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+1}(f_\lambda,\ \varphi),$$

имеем:

$$\left(\frac{df_\lambda}{d\lambda},\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+1}\left(\frac{df_\lambda}{d\lambda},\ \varphi\right)+\alpha^{\lambda+1}\ln\alpha\,(f_\lambda,\ \varphi),$$

т. е. $\frac{df_\lambda}{d\lambda}$ — присоединенная функция 1-го порядка. Аналогично производная по λ от присоединенной функции k-го порядка есть присоединенная функция $(k+1)$-го порядка.

2. Разложение функций x_+^λ и x_-^λ в ряд Тейлора и ряд Лорана. Естественно, что при разложении однородных функций x_+^λ и им аналогичных в ряд Тейлора или ряд Лорана получаются присоединенные функции.

Разложение функции x_+^λ в окрестности регулярной точки λ_0 в ряд Тейлора имеет вид

$$x_+^\lambda=x_+^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda}x_+^{\lambda_0}+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}x_+^{\lambda_0}+\ldots=$$
$$=x_+^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)x_+^{\lambda_0}\ln x_++\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2x_+^{\lambda_0}\ln^2x_++\ldots \tag{1}$$

В этом разложении участвуют новые обобщенные функции

$$x_+^\lambda \ln^m x_+ = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m} x_+^\lambda \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Здесь m-я функция является присоединенной функцией m-го порядка. Явные определения этих функций можно получить либо тем же путем, что и определения обобщенной функции x_+^λ, либо m-кратным дифференцированием по λ формул (3) и (4) п. 2 § 3; так при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$ имеем:

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+,\ \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx +$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda \ln^m x\, \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^m m!\, \varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\, (\lambda+k)^{m+1}}; \qquad (2)$$

при $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ имеем:

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\, \varphi(x)\, dx =$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx. \quad (3)$$

В окрестности полюса $\lambda = -n$ функция x_+^λ разлагается в ряд Лорана с главной частью степени -1. Чтобы написать это разложение в явном виде, выделим из регуляризованного значения интеграла

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx =$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx,$$

то слагаемое, которое перестает сходиться при $\lambda = -n$, т. е. запишем этот интеграл в таком виде *):

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx +$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)\right] dx + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}.$$

Сумма интегралов в правой части этого равенства есть правильная часть ряда Лорана, к которому мы вскоре придем. Она представляет собой аналитическую функцию от λ в полосе $|\operatorname{Re}\lambda + n| < 1$. Мы обозначим этот функционал через $F_{-n}(x_+, \lambda)$. Таким образом,

$$(F_{-n}(x_+, \lambda),\ \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\right] dx,$$

где $\theta(x)$ — функция, равная 0 при $x < 0$ и 1 при $x > 0$. Иначе говоря, последнее слагаемое под знаком интеграла принимается во внимание лишь при $0 < x < 1$, а при $x > 1$ заменяется нулем; таким образом, написанный интеграл оказывается сходящимся и при $x = 0$, и при $x = \infty$.

Особую роль играет значение этого функционала при $\lambda = -n$, которое мы обозначим через x_+^{-n}, т. е. значение при $\lambda = -n$ правильной части лорановского разложения для x_+^λ в окрестности $\lambda = -n$:

$$x_+^{-n} = \lim_{\lambda \to -n} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda+n)\, x_+^\lambda\right].$$

---

*) Вместо $\int_1^\infty x^{\lambda+n-1}\,dx$ мы могли бы вычислить интеграл $\int_a^\infty x^{\lambda+n-1}\,dx$ для любого $a > 0$. При этом пришлось бы разлагать в ряд Тейлора $a^{\lambda+n}$ и дальнейшие формулы стали бы более громоздкими.

Отсюда видно, что обобщенная функция x_+^{-n} есть присоединенная функция 1-го порядка степени $-n$. Этот функционал действует на основную функцию φ по формуле

$$(x_+^{-n}, \varphi) = \\ = \int_0^\infty x^{-n}\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\right]dx. \tag{4}$$

Подчеркнем, что обобщенная функция x_+^{-n} не есть значение функции x_+^λ при $\lambda = -n$; последняя функция при $\lambda \to -n$ имеет полюс и, следовательно, при $\lambda = -n$ не существует. Тем не менее, функционал x_+^{-n} является некоторой регуляризацией обычной функции x_+^{-n}.

Отметим любопытную формулу дифференцирования функции x_+^{-n} по x. Мы имеем:

$$\left(\frac{d}{dx}x_+^{-n}, \varphi(x)\right) = -\left(x_+^{-n}, \varphi'(x)\right) = \\ = -\int_0^\infty x^{-n}\left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(0)\,\theta(1-x)\right]dx = \\ = -\int_0^1 x^{-n}\left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(0)\right]dx - \\ - \int_1^\infty x^{-n}\left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx.$$

Произведем в каждом из слагаемых интегрирование по частям; в результате получим

$$\left(\frac{d}{dx}x_+^{-n}, \varphi\right) = \\ = -\int_0^\infty nx^{-n-1}\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)\,\theta(1-x)\right]dx + \\ + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}x_+^{-n} = -nx_+^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(x). \tag{5}$$

Таким образом, хотя мы с обычной функцией x_+^{-n} и сопоставили обобщенную, нам пришлось при этом «пожертвовать» обычной формулой дифференцирования; регуляризация (4) не есть каноническая регуляризация функции x_+^{-n}.

Полезны также производные по λ функции $F_{-n}(x_+, \lambda)$ при $\lambda = -n$. Мы обозначим их соответственно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}F_{-n}(x_+, \lambda)\Big|_{\lambda=-n} = x_+^{-n}\ln x_+,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}F_{-n}(x_+, \lambda)\Big|_{\lambda=-n} = x_+^{-n}\ln^2 x_+,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

легко проверить, что явные определения этих обобщенных функций получаются заменой в формуле (5) x^{-n} соответственно на $x^{-n}\ln x$, $x^{-n}\ln^2 x$ и т. д.

Как мы видим, эти обобщенные функции суть присоединенные функции степени $-n$ и порядков 2, 3, 4, ...

Теперь, после того как введены обобщенные функции x_+^{-n}, $x_+^{-n}\ln x_+$, ..., мы можем выписать разложение в ряд Лорана обобщенной функции x_+^λ в окрестности точки $\lambda = -n$. Для этого функцию $F_{-n}(x_+, \lambda)$ нужно разложить в ряд Тейлора, и мы получаем:

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + x_+^{-n} + \\ + (\lambda+n)\,x_+^{-n}\ln x_+ + \ldots + \frac{(\lambda+n)^k}{k!}x_+^{-n}\ln^k x_+ + \ldots$$

Тейлорово разложение функции x_-^λ в окрестности регулярного значения λ_0 имеет вид

$$x_-^\lambda = x_-^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\,x_-^{\lambda_0}\ln x_- + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_-^{\lambda_0}\ln^2 x_- + \ldots$$

Здесь фигурируют новые обобщенные функции $x_-^\lambda \ln^k x_-$ ($k = 1, 2, \ldots$); k-я функция есть присоединенная функция степени λ и порядка k. Все они аналитичны по λ при

$\lambda \neq -1, -2, \ldots$ и определяются в полосе $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ формулами

$$(x_-^\lambda \ln^k x_-, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\right] dx. \qquad (6)$$

Чтобы выписать разложение функции x_-^λ в окрестности полюса $\lambda = -n$ в ряд Лорана, выделим и здесь слагаемое, перестающее сходиться при $\lambda = -n$:

$$\int_{-\infty}^0 x_-^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\right] dx +$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \varphi^{(n-2)}(0)\right] dx + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{\lambda+n}.$$

Сумма интегралов справа — это правильная часть искомого ряда Лорана. Она аналитична при $|\operatorname{Re}\lambda + n| < 1$. Обозначим этот функционал через $F_{-n}(x_-, \lambda)$. Таким образом,

$$(F_{-n}(x_-, \lambda), \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\right] dx.$$

Значение этой функции при $\lambda = -n$, т. е. значение при $\lambda = -n$ правильной части лоранова разложения для x_-^λ, обозначим через x_-^{-n}, так что

$$x_-^{-n} = \lim_{\lambda \to -n} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda+n)\,x_-^\lambda\right].$$

Эта обобщенная функция действует на основные функции φ по формуле

$$(x_-^{-n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n} \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\right] dx \qquad (7)$$

и является регуляризацией обычной функции x_-^{-n}. Подчеркнем еще раз, что обобщенная функция x_-^{-n} не есть значение аналитической обобщенной функции x_-^λ при $\lambda = -n$.

Производные по λ функции $F_{-n}(x_-, \lambda)$ при $\lambda = -n$ обозначим соответственно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} F_{-n}(x_-, \lambda)\Big|_{\lambda=-n} = x_-^{-n} \ln x_-,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} F_{-n}(x_-, \lambda)\Big|_{\lambda=-n} = x_-^{-n} \ln^2 x_-,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Явные определения этих обобщенных функций получаются из формулы (7) заменой x^{-n} на $x^{-n}\ln x$, $x^{-n}\ln^2 x, \ldots$

Разложив аналитическую функцию $F_{-n}(x_-, \lambda)$ в ряд по степеням $\lambda+n$, получаем ряд Лорана для функции x_-^λ:

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + x_-^{-n} + (\lambda+n)\,x_-^{-n}\ln x_- + \ldots \qquad (8)$$

В этом ряду коэффициент при $(\lambda+n)^{-1}$ есть однородная функция степени $-n$, а коэффициент при $(\lambda+n)^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ есть присоединенная функция степени $-n$ и порядка $m+1$.

3. Разложение функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Выпишем тейлоровы и лорановы разложения функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Мы получим их, естественно, комбинированием соответствующих разложений для функций x_+^λ и x_-^λ. При этом мы опять введем ряд новых обобщенных функций.

Если λ_0 — регулярное значение для обобщенной функции $|x|^\lambda$, то

$$|x|^\lambda = |x|^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\,|x|^{\lambda_0}\ln|x| +$$
$$+ \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,|x|^{\lambda_0}\ln^2|x| + \ldots \qquad (1)$$

Здесь введены новые обобщенные функции $|x|^\lambda \ln^k |x|$; k-я функция есть присоединенная функция степени λ и порядка k. Все они аналитичны по λ при $\lambda \neq -1, -3, \ldots$ и определяются при $-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1$ формулами

$$(|x|^\lambda \ln^k |x|, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \Big\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - \\ - 2\Big[\varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\} dx. \quad (2)$$

Аналогично, если λ_0 — регулярное значение обобщенной функции $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, то тейлорово разложение этой функции в окрестности точки λ_0 записывается в виде

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x + (\lambda - \lambda_0)|x|^{\lambda_0} \ln |x| \operatorname{sgn} x + \\ + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 |x|^{\lambda_0} \ln^2 |x| \operatorname{sgn} x + \ldots \quad (3)$$

Здесь $|x|^\lambda \ln^k |x| \operatorname{sgn} x$ — новые обобщенные функции; k-я из них — присоединенная функция степени λ и порядка k. Все они аналитичны по λ при $\lambda \neq -2, -4, \ldots$ и определяются при $-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m$ формулами

$$(|x|^\lambda \ln^k |x| \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \Big\{\varphi(x) - \varphi(-x) - \\ - 2\Big[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\} dx. \quad (4)$$

Если $\lambda_0 = -2m-1$, так что λ_0 — полюс 1-го порядка обобщенной функции $|x|^\lambda$, то разложение Лорана этой функции в окрестности точки λ_0 записывается следующим образом:

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\frac{1}{\lambda+2m+1} + x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1} + \\ + (\lambda + 2m + 1)[x_+^{-2m-1}\ln x_+ + x_-^{-2m-1}\ln x_-] + \ldots \quad (5)$$

Аналогично, если $\lambda_0 = -2m$ (полюс 1-го порядка функции $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$), то лораново разложение $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в окрестности этой точки имеет вид

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda+2m} + x_+^{-2m} - x_-^{-2m} + \\ + (\lambda+2m)[x_+^{-2m}\ln x_+ - x_-^{-2m}\ln x_-] + \ldots \quad (6)$$

Обобщенную функцию $x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1}$ мы будем обозначать через $|x|^{-2m-1}$. Результат ее применения к основной функции $\varphi(x)$ выражается формулой

$$(|x|^{-2m-1}, \varphi) = \\ = \int_0^\infty x^{-2m-1}\Big\{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots \\ \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0) + \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\Big\} dx \\ (-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m), \quad (7)$$

где $\theta(x)$ имеет тот же смысл, что и выше.

Аналогично обобщенную функцию $x_+^{-2m} - x_-^{-2m}$ мы будем обозначать через $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$; она применяется к основной функции $\varphi(x)$ по формуле

$$(|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x, \varphi) = \\ = \int_0^\infty x^{-2m}\Big\{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots \\ \ldots + \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!}\varphi^{(2m-3)}(0) + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\Big\} dx \\ (-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1) \quad (8)$$

и т. д. Окончательно требуемые лорановы разложения записываются в форме

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\frac{1}{\lambda+2m+1} + |x|^{-2m-1} + \\ + (\lambda+2m+1)|x|^{-2m-1}\ln|x| + \ldots; \quad (9)$$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda+2m} + |x|^{-2m}\operatorname{sgn} x + \\ + (\lambda+2m)|x|^{-2m}\ln|x|\operatorname{sgn} x + \ldots \quad (10)$$

В этих рядах первые коэффициенты $\delta^{(2m)}(x)$ и $\delta^{(2m-1)}(x)$ суть однородные функции степени соответственно $-2m-1$ и $-2m-2$, а следующие коэффициенты — присоединенные функции той же степени и порядков 1, 2, 3, ...

В частности, полагая в равенстве (5) $m=0$, получаем разложение функции $|x|^\lambda$ в окрестности полюса $\lambda=-1$:

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta(x)}{\lambda+1} + |x|^{-1} + (\lambda+1)|x|^{-1}\ln|x| + \ldots \tag{11}$$

При этом функционал $|x|^{-1}$ определяется формулой

$$(|x|^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)\,\theta(1-x)}{x}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\,\theta(1-x^2)}{x}\,dx, \tag{12}$$

где множитель $\theta(1-x^2)$ указывает, что слагаемое $\varphi(0)$ нужно учитывать только при $|x|\leqslant 1$, а при $|x|>1$ заменить на нуль.

Введенные выше обобщенные функции

$$|x|^{-2m-1} = x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1},$$
$$|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x = x_+^{-2m} - x_-^{-2m}$$

не являются значениями аналитических функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ при соответствующих значениях λ ($-2m-1$ и $-2m$). В указанных точках функции $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ имеют полюсы 1-го порядка, и величины $|x|^{-2m-1}$ и $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$ суть значения правильных частей соответствующих рядов Лорана в этих полюсах.

Можно рассмотреть и обобщенные функции

$$x_+^{-2m} + x_-^{-2m},$$
$$x_+^{-2m-1} - x_-^{-2m-1};$$

легко убедиться, что первая из них совпадает с обобщенной функцией x^{-2m} (значением $|x|^\lambda$ в регулярной точке $\lambda=-2m$), вторая — с обобщенной функцией x^{-2m-1}.

Мы ввели в п. 5 § 3 нормированные функции

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}. \tag{13}$$

Эти обобщенные функции уже не имеют особенностей. Разлагая числители и знаменатели дробей (13) в ряды Тейлора (или Лорана) и производя по обычным правилам деление рядов, можно построить разложения полученных функций в ряды Тейлора в окрестности любой точки λ.

Разложение $\Gamma(\lambda+1)$ по степеням λ

$$\Gamma(\lambda+1) = 1 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \ldots,$$

хорошо известно *); здесь $c_1 = c = 0{,}505\ldots$ — постоянная Эйлера, а коэффициенты $c_2, c_3, \ldots$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}c_{n-k}s_{k+1}, \quad s_1 = c, \quad s_n = \zeta(n).$$

В частности, при $\lambda=0$ получается разложение

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\theta(x)+\lambda\ln x_+ + \ldots}{1+c\lambda+\ldots} =$$
$$= \theta(x) + \lambda(\ln x_+ - c\,\theta(x)) + \ldots \tag{14}$$

4. Функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$. Эти обобщенные функции были введены в п. 6 § 3. Мы рассмотрим их здесь более подробно. Указанные обобщенные функции для $\operatorname{Re}\lambda > -1$ были определены как пределы выражений $(x+iy)^\lambda$ и $(x-iy)^\lambda$ при $y\to+0$; это привело нас к формулам

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda, \tag{1}$$
$$(x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda. \tag{2}$$

Правые части формул (1), (2) допускают аналитическое продолжение во всю плоскость λ; этим аналитическим

*) И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (изд. 3-е, Гостехиздат, 1951), стр. 331, формула (6.321). В дальнейших ссылках на эту книгу будем писать кратко: «И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы».

продолжением мы *определяем* для $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$ и левые части равенств (1), (2). Мы уже заметили, что при аналитическом продолжении правых частей особенности в точках $\lambda = -1, -2, \ldots$ исчезают; теперь мы найдем в этих точках и сами значения функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$.

В п. 2 мы записывали лорановы разложения обобщенных функций x_+^λ и x_-^λ в окрестности точки $\lambda = -n$ следующим образом:

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + F_{-n}(x_+, \lambda), \tag{3}$$

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + F_{-n}(x_-, \lambda). \tag{4}$$

Здесь $F_{-n}(x_+, \lambda)$ и $F_{-n}(x_-, \lambda)$ — правильные части рядов Лорана; их значения при $\lambda = -n$ обозначены в п. 2 соответственно через x_+^{-n} и x_-^{-n}.

Напишем еще

$$e^{\pm i\lambda\pi} = (-1)^n e^{\pm i(\lambda+n)\pi} = (-1)^n [1 \pm i(\lambda+n)\pi + \ldots]. \tag{5}$$

Подставляя выражения (3)—(5) в правые части формул (1) и (2), сокращая члены с особенностями и переходя к пределу при $\lambda \to -n$, мы получаем:

$$(x \pm i0)^{-n} = x_+^{-n} + (-1)^n x_-^{-n} \mp \frac{(-1)^{n-1} i\pi}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

В п. 3 мы отмечали, что при четном $n = 2m$

$$x_+^{-2m} + x_-^{-2m} = x^{-2m} = |x|^\lambda \big|_{\lambda=-2m},$$

а при нечетном $n = 2m+1$

$$x_+^{-2m-1} - x_-^{-2m-1} = x^{-2m-1} = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x \big|_{\lambda=-2m-1}.$$

Таким образом, окончательно

$$(x+i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), \tag{6}$$

$$(x-i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x). \tag{7}$$

В частности, при $n = 2$

$$\left(\frac{1}{(x+i0)^2}, \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx - i\pi\varphi'(0); \tag{8}$$

$$\left(\frac{1}{(x-i0)^2}, \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx + i\pi\varphi'(0). \tag{9}$$

Отметим, что, как видно из формул (1) и (2) при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ и из формул (6) и (7) при $\lambda = -n = -1, -2, \ldots$,

$$\frac{d}{dx}(x+i0)^\lambda = \lambda(x+i0)^{\lambda-1}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}(x-i0)^\lambda = \lambda(x-i0)^{\lambda-1}. \tag{11}$$

Так как при дифференцировании индекс понижается на единицу, то формулы (10) и (11) можно было бы положить в основу определения обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ Например, $(x+i0)^{-3/2}$ можно было бы определить как $-2\frac{d}{dx}(x+i0)^{-1/2}$, где $\frac{d}{dx}$ — дифференцирование в смысле обобщенных функций, а $(x+i0)^{-1/2}$ — локально интегрируемая функция, определенная формулой (1) при $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Формулы (10) и (11) указывают еще и на следующее важное обстоятельство: при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$\lim_{y\to+0}(x+iy)^\lambda = (x+i0)^\lambda, \tag{12}$$

$$\lim_{y\to-0}(x+iy)^\lambda = (x-i0)^\lambda \tag{13}$$

в смысле обобщенных функций. Действительно, для достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda$ это следует из самого определения этих функций, а при дифференцировании в смысле обобщенных функций сходящаяся последовательность переходит в сходящуюся.

В целых отрицательных точках $-n$ функции $(x+i0)^{-n}$ и $(x-i0)^{-n}$ можно также вводить при помощи дифференцирования. Напомним, что выше (§ 2, п. 2, пример 6) была введена (локально интегрируемая) функция

$$\ln(x+i0)=\lim_{y\to+0}\ln(x+iy)=\ln|x|+i\pi\,\theta(-x), \tag{14}$$

производная которой равна

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0)=\frac{1}{x}-i\pi\,\delta(x). \tag{15}$$

Отсюда и из формулы (6) при $n=1$ мы видим, что

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0)=\frac{1}{x+i0}. \tag{16}$$

Аналогично (14) можно ввести

$$\ln(x-i0)=\lim_{y\to-0}\ln(x+iy)=\ln|x|-i\pi\,\theta(-x). \tag{17}$$

Производная этой функции равна

$$\frac{d}{dx}\ln(x-i0)=\frac{1}{x}+i\pi\,\delta(x), \tag{18}$$

т. е. в силу формулы (7) при $n=1$,

$$\frac{d}{dx}\ln(x-i0)=\frac{1}{x-i0}. \tag{19}$$

Таким образом, обобщенные функции $(x\pm i0)^{-1}$ мы могли бы определить формулами (16) и (19), а $(x\pm i0)^{-n}$ в остальных целых отрицательных точках — снова при помощи формул (10) и (11).

Так как предельные соотношения (14) и (17) имеют место и в смысле обобщенных функций, то мы получаем, что предельные соотношения (12) и (13) *при всех* λ выполняются в смысле обобщенных функций.

Это позволяет, например, вместо формул (8) и (9) написать:

$$\lim_{y\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{(x+iy)^2}\,dx=\int_0^\infty\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx-i\pi\,\varphi'(0),$$

$$\lim_{y\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{(x-iy)^2}\,dx=\int_0^\infty\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx+i\pi\,\varphi'(0).$$

5. Разложение функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ в ряд Тейлора. Обобщенная функция $(x+i0)^\lambda$ как целая функция параметра λ при любом значении λ_0 разлагается в ряд Тейлора по степеням $\lambda-\lambda_0$, сходящийся при всех λ:

$$(x+i0)^\lambda=(x+i0)^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)(x+i0)^{\lambda_0}\ln(x+i0)+\\+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2(x+i0)^{\lambda_0}\ln^2(x+i0)+\ \dots \tag{1}$$

Написанные в равенстве (1) новые обобщенные функции $(x+i0)^{\lambda_0}\ln(x+i0),\ \dots$ суть последовательные производные по λ от $(x+i0)^\lambda$ при $\lambda=\lambda_0$. Явные выражения этих обобщенных функций можно получить, если сравнить разложение (1) с аналогичным разложением по степеням $\lambda-\lambda_0$ развернутого выражения

$$(x+i0)^\lambda=x_+^\lambda+e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda. \tag{2}$$

Мы имеем при этом для $\lambda_0\neq-1,\ -2,\ \dots$

$$x_+^\lambda=x_+^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)\,x_+^{\lambda_0}\ln x_++\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,x_+^{\lambda_0}\ln^2x_++\dots, \tag{3}$$

$$e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda=e^{i\lambda_0\pi}\left(1+i\pi(\lambda-\lambda_0)-\frac{\pi^2}{2}(\lambda-\lambda_0)^2+\ \dots\right)\times\\\times\left(x_-^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)\,x_-^{\lambda_0}\ln x_-+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,x_-^{\lambda_0}\ln^2x_-+\dots\right). \tag{4}$$

Сравнивая коэффициенты ряда (1) и ряда, получаемого подстановкой рядов (3) и (4) в формулу (2), получаем, заменяя снова λ_0 на λ:

$$(x+i0)^\lambda\ln(x+i0)=x_+^\lambda\ln x_++i\pi e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda+e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda\ln x_-, \tag{5}$$

$$(x+i0)^\lambda\ln^2(x+i0)=\\=x_+^\lambda\ln^2x_++e^{i\lambda\pi}\left[x_-^\lambda\ln^2x_-+2i\pi x_-^\lambda\ln x_--\pi^2x_-^\lambda\right] \tag{6}$$

и т. д.

Эти формулы справедливы при $\lambda\neq-1,\ -2,\ \dots$

Разложение функции $(x-i0)^\lambda$ в ряд Тейлора по степеням $\lambda-\lambda_0$ имеет вид

$$(x-i0)^\lambda=(x-i0)^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)(x-i0)^{\lambda_0}\ln(x-i0)+\\+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2(x-i0)^{\lambda}\ln^2(x-i0)+\ \dots \tag{7}$$

Мы обозначили здесь через

$$(x-i0)^\lambda \ln(x-i0),\quad (x-i0)^\lambda \ln^2(x-i0),\ \ldots$$

последовательные производные по λ целой функции $(x-i0)^\lambda$. Таким же путем, как и выше, можно получить формулы

$$(x-i0)^\lambda \ln(x-i0) = x_+^\lambda \ln x_+ - i\pi e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_-, \tag{8}$$

$$(x-i0)^\lambda \ln^2(x-i0) = \\ = x_+^\lambda \ln^2 x_+ + e^{-i\lambda\pi}\left[x_-^\lambda \ln^2 x_- - 2i\pi x_-^\lambda \ln x_- - \pi^2 x_-^\lambda\right] \\ (\lambda \neq -1,\ -2,\ \ldots) \tag{9}$$

и т. д.

Для получения соответствующих формул при λ_0, равном целому отрицательному числу $-n$, мы вместо формул (3) и (4) рассмотрим соответствующие ряды Лорана:

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + x_+^{-n} + (\lambda+n)\,x_+^{-n}\ln x_+ + \\ + \frac{1}{2}(\lambda+n)^2 x_+^{-n}\ln^2 x_+ + \ldots, \tag{10}$$

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)} + x_-^{-n} + (\lambda+n)\,x_-^{-n}\ln x_- + \\ + \frac{1}{2}(\lambda+n)^2 x_-^{-n}\ln^2 x_- + \ldots, \tag{11}$$

$$e^{i\lambda\pi} = (-1)^n\left[1 + i\pi(\lambda+n) - \frac{\pi^2}{2}(\lambda+n)^2 - i\frac{\pi^3}{6}(\lambda+n)^3 + \ldots\right]. \tag{12}$$

Умножая (11) на (12) и складывая с (10), находим:

$$x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda = \left[x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^n}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x)\right] + \\ + (\lambda+n)\left[i\pi(-1)^n x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|\right] + \\ + \frac{(\lambda+n)^2}{2}\left[(-1)^{n-1} i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \right. \\ \left. + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} + 2i\pi(-1)^n x_-^{-n}\ln x_- + x^{-n}\ln^2|x|\right]. \tag{13}$$

Таким образом, мы получаем:

$$(x+i0)^{-n}\ln(x+i0) = \\ = (-1)^n i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|, \tag{14}$$

$$(x+i0)^{-n}\ln^2(x+i0) = \\ = (-1)^{n-1} i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} + \\ + 2i\pi(-1)^n x_-^{-n}\ln x_- + x^{-n}\ln^2|x| \tag{15}$$

и т. д.

Формулы (14) и (15), как следует из общих соображений, представляют собой результаты предельного перехода при $\lambda_0 \to -n$ в формулах (5) и (6). Аналогично

$$(x-i0)^{-n}\ln(x-i0) = (-1)^{n-1} i\pi x_-^{-n} + \\ + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|, \tag{16}$$

$$(x-i0)^{-n}\ln^2(x-i0) = (-1)^n i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} + \\ + 2i\pi(-1)^{n-1}x_-^{-n}\ln x_- + x^{-n}\ln^2|x|. \tag{17}$$

Читателю предоставляется самому определить, какие из введенных функций однородные или присоединенные той или иной степени и порядка.

6. Разложение функции r^λ. Обобщенная функция r^λ была введена в п. 9 § 3 по формуле

$$(r^\lambda, \varphi) = \int r^\lambda \varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

пригодной при $\operatorname{Re}\lambda > -n$. Очевидно, что функция r^λ при этих значениях λ есть однородная функция степени λ. Мы преобразовали в п. 9 § 3 формулу (1) к виду

$$(r^\lambda, \varphi) = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_\varphi(r)\,dr,$$

где

$$S_\varphi(r) = \frac{1}{\Omega_n}\int_\Omega \varphi(x)\,d\Omega$$

есть среднее значение основной функции $\varphi(x)=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на сфере радиуса r. Таким образом, (r^λ, φ) совпадает с результатом применения функционала $\Omega_n x_+^\mu$ $(\mu=\lambda+n-1)$ к четной основной функции $S_\varphi(r)$ и, следовательно аналитически продолжается в плоскость λ, за исключением лишь точек $\lambda=-n, -n-2, \ldots$ Очевидно, что при этом продолжении r^λ остается однородной функцией степени λ.

Разложение функции r^λ в ряд Тейлора или ряд Лорана можно получить непосредственно из соответствующих разложений функции $\Omega_n x_+^\mu$. Например, ряд Тейлора в окрестности регулярной точки λ_0 имеет вид

$$r^\lambda = r^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0) r^{\lambda_0} \ln r + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 r^{\lambda_0} \ln^2 r + \ldots,$$

где под $r^{\lambda_0} \ln^k r$ понимается функционал, действующий по формуле

$$(r^{\lambda_0} \ln^k r, \varphi) =$$
$$= \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda_0+n-1} \ln^k r \left[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots - \frac{r^{m-1}}{(m-1)!} S_\varphi^{(m-1)}(0)\right] dr$$

при $-m-n < \operatorname{Re}\lambda_0 < -m-n+1$.

Выпишем разложение функции r^λ в ряд Лорана в окрестности точки $\lambda=-n-2k$. Это разложение, естественно, совпадает с разложением в ряд Лорана для функции $\Omega_n x_+^\mu$ в окрестности точки $\mu=-2k-1$ (п. 3), так что мы имеем:

$$r^\lambda = \Omega_n \frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!} \frac{1}{\lambda+n+2k} + \Omega_n r^{-2k-n} +$$
$$+ \Omega_n (\lambda+n+2k) r^{-2k-n} \ln r + \ldots \quad (2)$$

Здесь под $r^{-2k-n} \ln^m r$ понимается функционал

$$(r^{-2k-n} \ln^m r, S_\varphi(r)) = \int_0^\infty r^{-n-2k} \ln^m r \left[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - \frac{r^{2k-2}}{(2k-2)!} S_\varphi^{(2k-2)}(0) - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0)\,\theta(1-r)\right] dr. \quad (3)$$

Заметим, что r^{-2k-n} не есть значение обобщенной функции r^λ при $\lambda=-2k-n$ (последняя функция имеет полюс при этом значении λ), а значение при $\lambda=-2k-n$ главной части лоранова разложения r^λ.

В приведенных выше разложениях обобщенная функция $r^{\lambda_0} \ln^k r$ является присоединенной функцией степени λ_0 и порядка k, а $r^{-2k-n} \ln^m r$ — присоединенной функцией степени $-2k-n$ и порядка m.

§ 5. СВЕРТКА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В классическом анализе часто используется операция свертки двух функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) * g(x) = \int f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi. \quad (1)$$

В анализе обобщенных функций аналогичная операция имеет, пожалуй, еще более существенное значение.

Определение операции свертки в области обобщенных функций опирается на понятие *прямого произведения* обобщенных функций. Поэтому мы начинаем с описания прямых произведений (п. 1). В остальных пунктах этого параграфа будет введена и изучена операция свертки и будут указаны примеры ее применения.

1. Прямое произведение обобщенных функций. Пусть даны обобщенная функция $f(x)$, определенная на пространстве X_k основных функций от k независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, и обобщенная функция $g(y)$, определенная на пространстве Y_m основных функций от m независимых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$. С помощью этих обобщенных функций мы определим обобщенную функцию $h(z)$ на пространстве Z_n основных функций от $n=k+m$ независимых переменных $z_1=x_1$, $z_2=x_2, \ldots, z_k=x_k$, $z_{k+1}=y_1$, $z_{k+2}=y_2, \ldots, z_n=y_m$. Для этого поступим следующим образом. Основную функцию $\varphi(x)$ будем обозначать теперь через $\varphi(x, y)$. Зафиксируем x и рассмотрим $\varphi(x, y)$ как функцию только от y. Очевидно, это основная функция в пространстве Y_m. Применим к ней функционал $g(y)$; в результате получим некоторую функцию $\psi(x)$. Эта функция есть среднее значение основной функции $\varphi(x)=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на сфере радиуса r. Таким образом, (r^λ, φ) совпадает с результатом применения функционала $\Omega_n x_+^\mu$ $(\mu=\lambda+n-1)$ к четной основной функции $S_\varphi(r)$ и, следовательно аналитически продолжается в плоскость λ, за исключением лишь точек $\lambda=-n, -n-2, \ldots$ Очевидно, что при этом продолжении r^λ остается однородной функцией степени λ.

Разложение функции r^λ в ряд Тейлора или ряд Лорана можно получить непосредственно из соответствующих разложений функции $\Omega_n x_+^\mu$. Например, ряд Тейлора в окрестности регулярной точки λ_0 имеет вид

$$r^\lambda = r^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0) r^{\lambda_0} \ln r + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 r^{\lambda_0} \ln^2 r + \ldots,$$

где под $r^{\lambda_0}\ln^k r$ понимается функционал, действующий по формуле

$$(r^{\lambda_0}\ln^k r, \varphi) =$$
$$= \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda_0+n-1} \ln^k r \left[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots - \frac{r^{m-1}}{(m-1)!} S_\varphi^{(m-1)}(0)\right] dr$$

при $-m-n < \operatorname{Re}\lambda_0 < -m-n+1$.

Выпишем разложение функции r^λ в ряд Лорана в окрестности точки $\lambda=-n-2k$. Это разложение, естественно, совпадает с разложением в ряд Лорана для функции $\Omega_n x_+^\mu$ в окрестности точки $\mu=-2k-1$ (п. 3), так что мы имеем:

$$r^\lambda = \Omega_n \frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!} \frac{1}{\lambda+n+2k} + \Omega_n r^{-2k-n} +$$
$$+ \Omega_n (\lambda+n+2k) r^{-2k-n} \ln r + \ldots \quad (2)$$

Здесь под $r^{-2k-n}\ln^m r$ понимается функционал

$$(r^{-2k-n}\ln^m r, S_\varphi(r)) = \int_0^\infty r^{-n-2k} \ln^m r \left[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - \frac{r^{2k-2}}{(2k-2)!} S_\varphi^{(2k-2)}(0) - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0)\,\theta(1-r)\right] dr. \quad (3)$$

Заметим, что r^{-2k-n} не есть значение обобщенной функции r^λ при $\lambda=-2k-n$ (последняя функция имеет полюс при этом значении λ), а значение при $\lambda=-2k-n$ главной части лоранова разложения r^λ.

В приведенных выше разложениях обобщенная функция $r^{\lambda_0}\ln^k r$ является присоединенной функцией степени λ_0 и порядка k, а $r^{-2k-n}\ln^m r$ — присоединенной функцией степени $-2k-n$ и порядка m.

§ 5. СВЕРТКА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В классическом анализе часто используется операция свертки двух функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) * g(x) = \int f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi. \quad (1)$$

В анализе обобщенных функций аналогичная операция имеет, пожалуй, еще более существенное значение.

Определение операции свертки в области обобщенных функций опирается на понятие *прямого произведения* обобщенных функций. Поэтому мы начинаем с описания прямых произведений (п. 1). В остальных пунктах этого параграфа будет введена и изучена операция свертки и будут указаны примеры ее применения.

1. Прямое произведение обобщенных функций. Пусть даны обобщенная функция $f(x)$, определенная на пространстве X_k основных функций от k независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, и обобщенная функция $g(y)$, определенная на пространстве Y_m основных функций от m независимых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$. С помощью этих обобщенных функций мы определим обобщенную функцию $h(z)$ на пространстве Z_n основных функций от $n=k+m$ независимых переменных $z_1=x_1$, $z_2=x_2, \ldots, z_k=x_k$, $z_{k+1}=y_1$, $z_{k+2}=y_2, \ldots, z_n=y_m$. Для этого поступим следующим образом. Основную функцию $\varphi(x)$ будем обозначать теперь через $\varphi(x, y)$. Зафиксируем x и рассмотрим $\varphi(x, y)$ как функцию только от y. Очевидно, это основная функция в пространстве Y_m. Применим к ней функционал $g(y)$; в результате получим некоторую функцию $\psi(x)$. Эта функция бесконечно дифференцируема по x, так как

$$\frac{\psi(x+\Delta x_j)-\psi(x)}{\Delta x_j}=$$

$$=\left(g(y),\ \frac{\varphi(x+\Delta x_j,\ y)-\varphi(x,\ y)}{\Delta x_j}\right)\to\left(g(y),\ \frac{\partial\varphi(x,\ y)}{\partial x_j}\right)$$

в силу того, что последовательность $\frac{\varphi(x+\Delta x_j,\ y)-\varphi(x,\ y)}{\Delta x_j}$ сходится к $\frac{\partial\varphi(x,\ y)}{\partial x_j}$ в смысле сходимости в пространстве Y_m и функционал $g(y)$ непрерывен. Очевидно также, что функция $\psi(x)$ финитна. Таким образом, $\psi(x)$ — основная функция в пространстве X_k, и к ней можно применять функционал $f(x)$. Итак, выражение

$$(f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,\ y)))\tag{2}$$

имеет смысл. Это некоторый функционал на пространстве Z_n; из непрерывности функционалов $g(y)$ и $f(x)$ можно вывести, что этот функционал непрерывен *). Мы обозначим его через $h(z)=f(x)\times g(y)$ и назовем *прямым произведением функционала $f(x)$ на функционал $g(y)$.*

*) Пусть последовательность функций $\varphi_\nu(x,\ y)$ стремится к нулю в пространстве Z_n; нам нужно показать, что числа

$$(f(x),\ (g(y),\ \varphi_\nu(x,\ y)))$$

стремятся к нулю. Для этого достаточно показать, что функции $\psi_\nu(x)=(g(y),\varphi_\nu(x,y))$ остаются равными нулю вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю вместе со всеми производными. Первое — очевидно, поскольку $\varphi_\nu(x,\ y)$ равны нулю вне фиксированной области в пространстве переменных $x_1,\ldots,y_m$. Допустим, что $\psi_\nu(x)$ не сходятся равномерно к нулю. Это означает, что для некоторого $\varepsilon>0$ найдется последовательность точек $x^{(1)},\ldots,x^{(\nu)},\ldots$ такая, что

$$|\psi_\nu(x_\nu)|=|(g(y),\ \varphi_\nu(x_\nu,\ y))|\geqslant\varepsilon.$$

Но так как последовательность $\varphi_\nu(x,\ y)$ равномерно сходится к нулю вместе со всеми производными, то функции $\varphi_\nu^*(y)=\varphi_\nu(x_\nu,\ y)$ сходятся к нулю, как основные функции в пространстве Y_m. В силу непрерывности функционала $g(y)$ мы должны иметь

$$\left(g(y),\ \varphi_\nu^*(y)\right)=(g(y),\ \varphi_\nu(x_\nu,\ y))\to 0$$

в противоречие с предположением. Итак, $\psi_\nu(x)$ равномерно сходятся к нулю; аналогично доказывается равномерная сходимость к нулю и всех производных этой последовательности, чем доказательство и завершается.

Особенно просто выглядит прямое произведение в применении к основной функции $\varphi(x,\ y)$, являющейся произведением основных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$. В этом случае, согласно определению прямого произведения,

$$(f(x)\times g(y),\ \ \varphi_1(x)\varphi_2(y))=(f(x),\ \ (g(y),\ \ \varphi_1(x)\varphi_2(y)))=$$
$$=(f(x),\ \varphi_1(x)(g(y),\ \varphi_2(y)))=(f,\ \varphi_1)(g,\ \varphi_2).\tag{3}$$

Примеры. Прямое произведение $\delta(x)\times\delta(y)$ есть $\delta(x,\ y)$. Прямое произведение $\delta(x)\times 1(y)$ есть функционал, действующий по формуле $(\delta(x)\times 1(y),\ \varphi(x,\ y))=\int\limits_Y\varphi(0,\ y)\,dy$.

Прямое произведение двух регулярных функционалов $f(x)$ и $g(y)$ есть регулярный функционал, отвечающий функции $f(x)\,g(y)$.

Носитель прямого произведения. Напомним, что совокупность всех точек, из которых каждая обладает тем свойством, что ни в какой ее окрестности обобщенная функция f не равна нулю, мы назвали в п. 4 § 1 носителем обобщенной функции f. Пусть нам известны носители F и G функционалов f и g; спрашивается, как описать носитель функционала $h=f\times g$. Ответ следующий: *носитель H функционала h есть прямое произведение $F\times G$ носителей f и g*; иначе говоря, совокупность H состоит из тех и только из тех пар $(x,\ y)$, у которых первая координата x принадлежит множеству F, а вторая y — множеству G.

Действительно, рассмотрим точку $(x_0,\ y_0)$, у которой одна из координат — для определенности x_0 — не принадлежит соответствующему носителю. Это означает, что функционал f обращается в нуль на всякой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль вне некоторой фиксированной окрестности U точки x_0. Рассмотрим произвольную основную функцию $\varphi(x,\ y)$, отличную от нуля только при $x\in U$, и покажем, что $(f\times g,\ \varphi(x,\ y))=0$. Согласно определению,

$$(f\times g,\ \varphi(x,\ y))=(f(y),\ (g(x),\ \ \varphi(x,\ y)))=(f(y),\ 0)=0;$$

следовательно, функционал $f\times g$ обращается в нуль в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$.

С другой стороны, если x_0 и y_0 принадлежат к множествам F и G, то для любой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, очевидно, можно указать функцию вида $\varphi(x)\psi(y)$, обращающуюся в нуль вне этой окрестности, на которой функционал $f\times g$ имеет ненулевое значение. Тем самым справедливость нашего утверждения установлена.

Коммутативность и ассоциативность. *Имеют место формулы*

$$\left.\begin{aligned} f(x)\times g(y)&=g(y)\times f(x),\\ f(x)\times\{g(y)\times h(z)\}&=\{f(x)\times g(y)\}\times h(z).\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Для доказательства заметим, что поскольку в обеих частях равенств стоят непрерывные функционалы, достаточно проверить эти равенства на плотном множестве основных функций. Для проверки первого равенства мы возьмем плотное множество функций вида $\sum_{j=1}^{\nu}\varphi_j(x)\psi_j(y)$, где $\varphi_j(x)$, $\psi_j(y)$ ($j=1, 2, \ldots, \nu$; $\nu=1, 2, \ldots$) — основные функции соответствующих переменных *). Мы будем иметь тогда

$$(f(x)\times g(y), \sum\varphi_j(x)\psi_j(y))=$$
$$=\sum(f(x)\times g(y), \varphi_j(x)\psi_j(y))=\sum(f(x), \varphi_j(x))(g(y), \psi_j(y))$$

и аналогично

$$(g(y)\times f(x), \sum\varphi_j(x)\psi_j(y))=\sum(g(y), \psi_j(y))(f(x), \varphi_j(x)),$$

что и требуется.

Для проверки второго равенства аналогичная выкладка проводится с основными функциями вида $\sum_j\varphi_j(x)\psi_j(y)\chi_j(z)$.

2. Свертка обобщенных функций. Если $f(x)$ и $g(x)$ — две абсолютно интегрируемые функции на прямой и $h(x)=f(x)*g(x)$ — их свертка, то выражение функционала,

*) Множество таких функций действительно плотно в пространстве K. Если, например, основная функция $\varphi(x, y)$ обращается в нуль вне квадрата $Q=\{|x|\leqslant a, |y|\leqslant a\}$, то для заданного $\varepsilon=1/\nu$, пользуясь теоремой Вейерштрасса, мы построим многочлен $P_\nu(x, y)$, который в квадрате $Q'=\{|x|\leqslant 2a, |y|\leqslant 2a\}$ отличается от $\varphi(x, y)$ меньше чем на ε вместе с производными до порядка ν. Пусть, далее, $b(x)$ — фиксированная основная функция, равная 1 при $|x|\leqslant a$ и равная 0 при $|x|\geqslant 2a$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ функции $P_\nu(x, y)$, $b(x)b(y)$ стремятся к функции $\varphi(x, y)$ в пространстве K.

определяемого функцией (также абсолютно интегрируемой) $h(x)$, мы можем преобразовать следующим образом:

$$(h(x), \varphi(x))=\int h(x)\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int\left\{\int f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi\right\}\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int\int f(\xi)g(\eta)\varphi(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Иными словами, искомый результат есть результат применения функционала $f(x)g(y)$, который можно считать прямым произведением функций $f(x)$ и $g(y)$, к функции $\varphi(x+y)$.

Естественно общее определение свертки любых обобщенных функций f и g задать формулой

$$(f*g, \varphi)=(f(x)\times g(y), \varphi(x+y)).\qquad(1)$$

Но здесь следует иметь в виду, что $\varphi(x+y)$ — уже не финитная функция в пространстве переменных x, y и поэтому формула (1), вообще говоря, не имеет смысла.

Однако в довольно общих предположениях, которые мы сейчас укажем, формула (1) все же имеет смысл.

Как мы видели в предыдущем пункте, носитель прямого произведения функционалов $f(x)$ и $g(y)$ есть прямое произведение носителей этих функционалов. Равенство (1) будет иметь смысл, если полоса $|x+y|\leqslant a$, в которой заключен носитель функции $\varphi(x+y)$, имеет лишь ограниченное пересечение с носителем прямого произведения $f\times g$. В этом случае функцию $\varphi(x+y)$ можно заменить в полосе $|x+y|\leqslant a$ финитной функцией $\varphi(x, y)$, не изменяя ее значений в точках пересечения полосы с носителем функционала $f\times g$; но тогда уже определено значение

$$(f\times g, \varphi(x, y))$$

и, как легко проверить, оно не зависит от выбора значений функции $\varphi(x, y)$ вне указанного пересечения.

В частности, равенство (1) имеет смысл в следующих случаях:

а) *один из функционалов f, g имеет ограниченный носитель;*

б) *носители обоих функционалов f, g ограничены с одной и той же стороны* (например, $f=0$ при $x<a$, $g=0$ при $y<b$).

Рассмотрим сначала случай а). Пусть, например, $f(x)$ — *финитный функционал*, т. е. имеющий ограниченный носитель, а $g(y)$ — произвольный функционал. Тогда

$$(f*g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x+y)) = \\ = (g(y), (f(x), \varphi(x+y))). \qquad (2)$$

Функция $(f(x), \varphi(x+y))$ бесконечно дифференцируема и обращается при достаточно больших $|y|$ в нуль, так как при больших $|y|$ носители функции $\varphi(x+y)$ и функционала $f(x)$ не пересекаются. Поэтому функция $(f(x), \varphi(x+y))$ — основная по y и применение к ней функционала $g(y)$ имеет смысл.

Если, наоборот, $g(y)$ — финитный функционал, а $f(x)$ — произвольный, то функция $(f(x), \varphi(x+y))$ бесконечно дифференцируема, но, вообще говоря, не финитна; но так как функционал $g(y)$ финитный, то возможная нефинитность $(f(x), \varphi(x+y))$ не играет роли и результат (2) по-прежнему имеет смысл.

Рассмотрим теперь случай б): предположим, что носители функционалов $f(x)$ и $g(y)$ ограничены, скажем, слева. Рассмотрим функцию $(f(x), \varphi(x+y))$. Как и ранее, это бесконечно дифференцируемая функция от y. При достаточно больших положительных y носитель функции $\varphi(x+y)$ не пересекается с носителем функционала $f(x)$; поэтому при таких y функция $(f(x), \varphi(x+y))$ обращается в нуль. Таким образом, функция $(f(x), \varphi(x+y))$ имеет носитель, ограниченный справа. Так как носитель функционала $g(y)$ по условию ограничен слева, то пересечение носителей ограничено и правая часть формулы (2) имеет смысл.

Таким образом, *в указанных случаях* а), б) *свертка функционалов* f, g *имеет смысл*. В частности, всегда определена свертка $\delta * f$, $D\delta * f$, где D — любой дифференциальный оператор; это вытекает из того, что функционалы δ, $D\delta$ сосредоточены в одной точке.

Найдем свертку $\delta * f$. Согласно определению

$$(\delta * f, \varphi) = (\delta(x) \times f(y), \varphi(x+y)) = \\ = (f(y), (\delta(x), \varphi(x+y))) = (f(y), \varphi(y)) = (f, \varphi).$$

Таким образом, для любого функционала f

$$\delta * f = f. \qquad (3)$$

Аналогично

$$D\delta * f = Df. \qquad (4)$$

В силу общих свойств прямого произведения функционалов свертка функционалов коммутативна, по крайней мере, в случаях а) и б):

$$f * g = g * f.$$

Аналогично можно написать равенство, выражающее свойство ассоциативности:

$$(f * g) * h = f * (g * h),$$

предположив, что носители двух из трех функционалов f, g, h ограничены с обеих сторон или что носители всех трех функционалов ограничены с одной и той же стороны.

Выведем следующую *формулу дифференцирования свертки*:

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg. \qquad (5)$$

В дальнейшем эта формула будет часто применяться.

Имеем:

$$(D(f * g), \varphi) = (f * g, D^* \varphi),$$

где, например, $D^* = (-1)^\nu D$, если D — однородный дифференциальный оператор порядка ν. Далее согласно определению свертки,

$$(f * g, D^*\varphi) = (g(y), (f(x), D^*\varphi(x+y))) = \\ = (g(y), (Df(x), \varphi(x+y))) = (Df * g, \varphi),$$

откуда $D(f * g) = Df * g$. Далее, поскольку свертка коммутативна,

$$D(f * g) = D(g * f) = Dg * f = f * Dg,$$

и тем самым формула (5) установлена.

Установим полезную лемму о непрерывности свертки.

Лемма. *Из* $f_\nu \to f$ *следует* $f_\nu * g \to f * g$ *при каждом из следующих предположений*:

а) *все функционалы* f_ν *сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве*;

б) *функционал* g *сосредоточен на ограниченном множестве*;

в) *носители функционалов* f_ν *и* g *ограничены с одной и той же стороны и притом не зависящей от* ν *константой*.

Доказательство. По определению свертки, для любой основной функции φ

$$(f_\nu * g,\ \varphi) = (f_\nu(y),\ (g(x),\ \varphi(x+y))). \qquad (6)$$

В случае а) функцию $(g(x),\ \varphi(x+y))$ можно заменить основной функцией $\psi(y)$, равной нулю вне области, в которой сосредоточены все функционалы $f_\nu(y)$; поэтому

$$(f_\nu * g,\ \varphi) = (f_\nu(y),\ \psi(y)) \to (f,\ \psi) = (f * g,\ \varphi),$$

т. е.

$$f_\nu * g \to f * g,$$

что и утверждалось.

В случае б) $\psi(y) = (g(x),\ \varphi(x+y))$ есть основная функция; отсюда, так же как и выше, получаем требуемое.

В случае в), если для определенности предположить, что носители функционалов f_ν и g ограничены слева, то функция $\psi(y) = (g(x),\ \varphi(x+y))$ имеет ограниченный справа носитель; ее можно заменить основной функцией, обращающейся в нуль вне области, в которой сосредоточены все функционалы $f_\nu(y)$; отсюда, как и выше, получаем требуемое. Лемма доказана.

Следствие. *Если функционал $f = f_t$ зависит от параметра t и существует производная $\frac{\partial}{\partial t} f_t$* *), *то формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t * g) = \frac{\partial f_t}{\partial t} * g$$

справедлива в каждом из следующих предположений:

а) *функционалы f_t сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве;*

б) *функционал g сосредоточен на ограниченном множестве;*

в) *носители функционалов f_t и g ограничены с одной и той же стороны и притом не зависящей от t константой.*

*) Подробнее о дифференцировании по параметру мы будем говорить в добавлении 2.

Доказательство легко приводится к доказательству леммы, если учесть, что производная $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ есть предел отношения

$$\frac{f_{t+\Delta t} - f_t}{\Delta t}$$

при $\Delta t \to 0$.

3. Ньютоновский потенциал и фундаментальные решения дифференциальных уравнений. Классическая формула ньютоновского потенциала для распределения массы с кусочно гладкой финитной плотностью $\mu(x_1,\ x_2,\ x_3)$ имеет вид

$$u(x_1,\ x_2,\ x_3) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\mu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}. \qquad (1)$$

Известно, что $u(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — функция, обладающая производными до 2-го порядка и удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\Delta u(x_1,\ x_2,\ x_3) = \mu(x_1,\ x_2,\ x_3).$$

Формулу (1) можно записать в виде свертки

$$u = \mu * \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Здесь μ может быть уже любой финитной обобщенной функцией. При этом в общем случае u есть *обобщенная функция*. Оказывается, что формула Пуассона имеет место и в общем случае; действительно, вспоминая формулу $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta$ (§ 2, п. 3), мы можем написать:

$$\Delta u = \Delta\left(\mu * \left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\right) = \mu * \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \mu * \delta = \mu.$$

Пусть теперь

$$P(D)\, u = \mu \qquad (2)$$

— любое линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и произвольной обобщенной функцией μ в правой части. Назовем *фундаментальным решением* дифференциального уравнения (2) функционал $E(x)$, удовлетворяющий уравнению

$$P(D)E=\delta$$

(функционал E определен с точностью до решения однородного уравнения). Когда фундаментальное решение E известно, решение уравнения (2) может быть записано в форме свертки

$$u=\mu * E,$$

если, например, μ — финитная обобщенная функция. Действительно,

$$P(D)u=\mu * P(D)E=\mu * \delta=\mu.$$

Так, для оператора Лапласа в трехмерном пространстве фундаментальным решением служит регулярный функционал $E=-\frac{1}{4\pi r}$. В n-мерном пространстве фундаментальным решением для оператора Лапласа при $n>2$ служит регулярный функционал $-\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\frac{1}{r^{n-2}}$, где Ω_n — поверхность единичной сферы, а при $n=2$ — регулярный функционал $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$.

В качестве примера покажем еще, как строится фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами *):

$$a_0E^{(n)}+a_1E^{(n-1)}+\ldots+a_nE=\delta(x). \tag{3}$$

Пусть $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$a_0u^{(n)}(x)+a_1u^{(n-1)}(x)+\ldots+a_nu(x)=0. \tag{4}$$

Положим

$$E(x)=\begin{cases} A(x)\equiv\alpha_1u_1(x)+\ldots+\alpha_nu_n(x) & \text{при } x<0,\\ B(x)\equiv\beta_1u_1(x)+\ldots+\beta_nu_n(x) & \text{при } x>0\end{cases}$$

и подберем постоянные α_i и β_j так, чтобы удовлетворялось уравнение (3). Поскольку дельта-функция является производной функции $\theta(x)$, равной 1 при $x>0$ и 0 при $x<0$, достаточно потребовать, чтобы в точке $x=0$ выполнялись условия:

$$\left.\begin{aligned} A(0)=B(0),\ A'(0)=B'(0),\ \ldots,\ A^{(n-2)}(0)=B^{(n-2)}(0),\\ a_0\left[A^{(n-1)}(0)-B^{(n-1)}(0)\right]=1.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Полагая $\alpha_i-\beta_i=\gamma_i$ $(i=1,\ldots,n)$, получаем для чисел γ_i систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1u_1(0)+\ldots+\gamma_nu_n(0)&=0,\\ \gamma_1u_1'(0)+\ldots+\gamma_nu_n'(0)&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \gamma_1u_1^{(n-2)}(0)+\ldots+\gamma_nu_n^{(n-2)}(0)&=0,\\ \gamma_1u_1^{(n-1)}(0)+\ldots+\gamma_nu_n^{(n-1)}(0)&=\frac{1}{a_0}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Эта система всегда разрешима, так как ее определитель есть вронскиан фундаментальной системы решений $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ и, следовательно, нигде не равен нулю.

Таким образом, фундаментальное решение строится с большим произволом: однозначно определяются только разности γ_i. Этот произвол объясняется очень просто: фундаментальное решение определено с точностью до прибавления любого решения однородного уравнения (4). Он используется для построения функций Грина — фундаментальных решений, удовлетворяющих тем или иным граничным условиям**).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$E''=\delta(x). \tag{7}$$

В этом случае можно взять $u_1=1$, $u_2=x$, следовательно,

$$A(x)=\alpha_1+\alpha_2x, \quad B(x)=\beta_1+\beta_2x.$$

Для $\gamma_i=\alpha_i-\beta_i$ получаем значения

$$\gamma_1=0, \quad \gamma_2=1.$$

Таким образом,

$$E=\beta_1+\beta_2x+x_+.$$

Это, разумеется, можно было сразу увидеть из уравнения (7).

*) По существу, используется лишь наличие фундаментальной системы решений, которое имеет место и для переменных коэффициентов — лишь бы только коэффициент a_0 не обращался в нуль.

**) См., например, М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.

В § 6, а также в § 2 гл. III мы построим фундаментальные решения для широкого класса уравнений в частных производных.

4. Интеграл Пуассона и фундаментальное решение задачи Коши. Классическая формула Пуассона в теории теплопроводности имеет вид

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\mu(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где $\mu(\xi)$, скажем, — финитная интегрируемая функция. Известно *), что $u(x,\ t)$ обладает производной по t и двумя производными по x и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(x,\ 0)=\mu(x). \tag{3}$$

Функция $u(x,\ t)$ выражает температуру точки x бесконечного стержня в момент t, если известна начальная температура $\mu(x)$ при $t=0$. Формулу (1) можно записать в виде свертки

$$u(x,\ t)=\mu(x)*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{4}$$

Здесь в качестве μ можно взять уже любую финитную обобщенную функцию. При этом в общем случае функция $u(x,\ t)$, определенная формулой (4), есть, конечно, обобщенная функция (зависящая от параметра t). Докажем, что *эта обобщенная функция снова удовлетворяет уравнению теплопроводности* (2) *с начальным условием* (3).

Прежде всего заметим, что при $t>0$ дифференцирование функции

$$v(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

*) В. И. Смирнов, Курс, т. II, 1957, п. 204, стр. 606.

рассматриваемой как обобщенная функция, по x и по параметру t равносильно ее обычному дифференцированию по x и t. В силу следствия из леммы о непрерывности свертки (п. 2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu(x)*v(x,\ t))=\mu(x)*\frac{\partial}{\partial t}v(x,\ t)$$

и в силу формулы дифференцирования свертки (п. 2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu*v)=\mu*\frac{\partial^2}{\partial x^2}v.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\mu*v)=\mu*\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v.$$

Но

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\equiv 0,$$

так что $\mu*v$ действительно является решением уравнения теплопроводности.

С другой стороны, поскольку $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ при $t\to 0$ имеет пределом в смысле обобщенных функций дельта-функцию $\delta(x)$ (см. § 2, п. 5, пример 2), мы имеем при $t\to 0$, согласно лемме о непрерывности свертки (п. 2),

$$u(x,\ t)=\mu*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\to\mu*\delta=\mu,$$

что и утверждалось.

Пусть теперь

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

— любое дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Поставим задачу Коши: найти решение этого уравнения (обобщенную функцию, зависящую от t как от параметра), обращающееся при $t=0$ в заданную обобщенную функцию $u_0(x)$.

То частное решение задачи Коши, которое обращается при $t=0$ в $\delta(x)$, называется *фундаментальным решением* этой задачи и обозначается через $E(x,t)$. Для уравнения теплопроводности им является функция $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Если известно фундаментальное решение, то решение задачи Коши с начальным условием $u_0(x)$ — в предположении, что функционал $u_0(x)$ финитен — можно выразить сверткой

$$u(x, t) = E(x, t) * u_0(x).$$

Действительно, мы имеем, с одной стороны, при $t > 0$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u(x, t) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}[E(x, t) * u_0(x)] - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[E(x, t) * u_0(x)] =$$
$$= \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} * u_0(x) - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, t) * u_0(x) =$$
$$= \left[\frac{\partial E}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E\right] * u_0(x) = 0 * u_0(x) = 0;$$

с другой стороны,

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = [\lim_{t\to 0} E(x, t)] * u_0(x) = \delta(x) * u_0(x) = u_0(x),$$

что и утверждается.

Можно рассмотреть и более общий случай линейного уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \tag{5}$$

некоторого, например m-го, порядка по t, также с постоянными коэффициентами. Задача Коши здесь состоит в том, чтобы найти решение $u(x, t)$ уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{m-1}(x, 0)}{\partial t} = u_{m-1}(x). \tag{6}$$

Фундаментальным решением уравнения (5) называется решение $E(x, t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} E(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial E(x, 0)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} E(x, 0)}{\partial t^{m-2}} = 0, \\ \frac{\partial^{(m-1)} E(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = \delta(x). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Если обобщенная функция $u_{m-1}(x)$ финитна, то решение задачи Коши для уравнения (5) с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-2} u(x, 0)}{\partial t^{m-2}} = 0, \\ \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

можно записать в виде

$$u(x, t) = E(x, t) * u_{m-1}(x). \tag{9}$$

Эта формула годится и для любой $u_{m-1}(x)$, если финитно фундаментальное решение $E(x, t)$.

Действительно, построенная функция $u(x, t)$, с одной стороны, есть решение уравнения (5), поскольку дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ можно отнести к $E(x, t)$; далее, при $t \to 0$ мы имеем:

$$u(x, t) \to E(x, 0) * u_{m-1}(x) = 0,$$
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \to \frac{\partial E(x, 0)}{\partial t} * u_{m-1}(x) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^{m-1} u(x, t)}{\partial t^{m-1}} \to \frac{\partial^{m-1} E(x, 0)}{\partial t^{m-1}} * u_{m-1}(x) = u_{m-1}(x).$$

Пример. Рассмотрим уравнение струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{10}$$

и покажем, что фундаментальным решением задачи Коши для этого уравнения служит функция

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } |x| < t, \\ 0 & \text{при } |x| > t. \end{cases}$$

Действительно, при фиксированном $t > 0$ мы имеем:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\delta(x + t) - \frac{1}{2}\delta(x - t),$$
$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\delta'(x + t) - \frac{1}{2}\delta'(x - t),$$

а при фиксированном x, дифференцируя $E(x, t)$ по параметру t, находим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\delta(x+t) + \frac{1}{2}\delta(x-t),\\ \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}\delta'(x+t) - \frac{1}{2}\delta'(x-t),\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

так что уравнение (10) удовлетворяется.

Далее, устремляя в формуле (11) t к нулю, получаем:

$$\left.\frac{\partial E(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x),$$

так что удовлетворяется и начальное условие, определяющее фундаментальное решение задачи Коши (очевидно, что сама $E(x, t)$ при $t \to 0$ имеет пределом 0).

Отсюда получаем формулу решения задачи Коши для уравнения струны (10) с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x).$$

Согласно формуле (9) мы имеем (считая $u_1(x)$ локально интегрируемой функцией)

$$u(x, t) = E(x, t) * u_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi, t)\, u_1(x-\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} u_1(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\eta)\, d\eta.$$

В данном случае фундаментальное решение $E(x, t)$ — финитная функция; поэтому свертка $E(x, t) * u_1(x)$ существует для любой обобщенной функции $u_1(x)$.

Теперь можно перейти к самому общему случаю, когда заданы функции

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x)$$

и все они финитны (если финитно фундаментальное решение $E(x, t)$, то последнее условие можно отбросить). Для этого

заметим, что если u — решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-2),$$

$$\frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x),$$

то функция $u_1(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ удовлетворяет тому же уравнению и начальным условиям, в которых отличны от нуля только $\frac{\partial^{m-2} u_1(x, 0)}{\partial t^{m-2}}$ и $\frac{\partial^{m-1} u_1(x, 0)}{\partial t^{m-1}}$. Вычитая из $u_1(x, t)$ решение $u_2(x, t)$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^k u_2(x, 0)}{\partial t^k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-2),$$

$$\frac{\partial^{m-1} u_2(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = \frac{\partial^{m-1} u_1(x, 0)}{\partial t^{m-1}},$$

мы получим решение u_3, у которого при $t = 0$ отлична от нуля только производная $\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}$, причем она равна заданной функции $u_{m-2}(x)$. Аналогично при любом $k \leqslant m-1$ можно получить решение, у которого при $t = 0$ из первых $m-1$ производных по t отлична от нуля и равна заданной функции $u_k(x)$ только производная $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$. Сумма построенных частных решений дает решение общей задачи.

Решение задачи Коши для уравнения струны (10) при общих начальных данных

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \qquad (12)$$

получается по этому методу следующим образом. Находим решение $u_1(x, t)$, отвечающее начальным условиям

$$u_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = u_0(x).$$

По доказанному, оно имеет вид

$$u_1(x, t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_0(\xi)\,d\xi.$$

Дифференцируя $u_1(x, t)$ по t, находим новое решение

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t}=u_2(x, t)=\frac{1}{2}[u_0(x+t)+u_0(x-t)],$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u_2(x, 0)=\frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t}=u_0(x),$$

$$\frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_0(x)}{\partial t}-\frac{\partial u_0(x)}{\partial t}\right]=0.$$

Отсюда видно, что решением, отвечающим начальным условиям (12), служит функция

$$u(x, t)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)\,d\xi.$$

Мы получили известную формулу Даламбера.

В дальнейшем (§ 6) аналогичными методами мы найдем фундаментальные решения задачи Коши для широкого класса уравнений в частных производных.

5. Интегрирование и дифференцирование произвольного порядка. Хорошо известная формула Коши

$$g_n(x)=\int_0^x\int_0^{\xi_{n-1}}\cdots\int_0^{\xi_2}\int_0^{\xi_1} g(\xi)\,d\xi\,d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x g(\xi)(x-\xi)^{n-1}\,d\xi$$

сводит вычисление n-кратной первообразной от функции $g(x)$, определенной при $x\geqslant 0$, к вычислению однократного интеграла. Эта формула может быть записана в виде

$$g_n(x)=g(x)*\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=g(x)*\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

где функции $g(x)$ и x^{n-1} при $x<0$ заменяются нулем.

Представляется естественным обобщить эту формулу на случай любого показателя λ и любой обобщенной функции g, сосредоточенной на полуоси $x\geqslant 0$, определив *первообразную порядка* λ *от функции* g как свертку

$$g_\lambda(x)=g(x)*\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}. \qquad (1)$$

Непосредственно эта формула действует при $\operatorname{Re}\lambda>0$. Для остальных значений λ под $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ следует понимать обобщенную функцию, построенную в п. 5 § 3; так как она остается сосредоточенной на полупрямой $x\geqslant 0$, то корректность определения свертки сохраняется. Удобно обозначить $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}=\Phi_\lambda$, так что

$$g_\lambda(x)=g(x)*\Phi_\lambda. \qquad (2)$$

Из равенства

$$\Phi_{-k}=\delta^{(k)}(x)\quad(k=0, 1, 2, \ldots)$$

(§ 3, п. 5) мы выводим, что

$$g_0(x)=g(x)*\Phi_0=g(x)*\delta(x)=g(x),$$

$$g_1(x)=g(x)*\Phi_{-1}=g(x)*\delta'(x)=g'(x)$$

и т. д.; таким образом, формула (2) дает при различных значениях λ не только интегралы, но и все производные функции $g(x)$. В связи с этим мы условимся также говорить, что свертка

$$g_{-\lambda}=g*\Phi_{-\lambda}$$

есть производная порядка λ *обобщенной функции* g и обозначать это так:

$$g_{-\lambda}=\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}g.$$

Для функционалов Φ_λ имеет место формула

$$\Phi_\lambda*\Phi_\mu=\Phi_{\lambda+\mu}, \qquad (3)$$

или

$$\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}*\frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}=\frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)}. \qquad (3')$$

Докажем сначала, что она верна при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$. Так как

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \int_0^x \frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\, d\xi,$$

$$\Phi_{\lambda+\mu} = \frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)},$$

то требует доказательства лишь соотношение

$$\int_0^x \xi^{\lambda-1}(x-\xi)^{\mu-1}\, d\xi = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\, x^{\lambda+\mu-1}.$$

Положим в левой части $\xi = xt$; тогда интеграл слева приведется к интегралу

$$x^{\lambda+\mu-1}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\, dt$$

и нужное соотношение оказывается следствием известного соотношения

$$B(\lambda, \mu) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\, dt = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{(\lambda+\mu)}.$$

Для остальных λ, μ формула (3) остается справедливой в силу единственности аналитического продолжения.

Из формулы (3) вытекает, что для любой обобщенной функции g (сосредоточенной на полуоси $x \geqslant c$)

$$(g * \Phi_\lambda) * \Phi_\mu = g * (\Phi_\lambda * \Phi_\mu) = g * \Phi_{\lambda+\mu}. \tag{4}$$

При $\mu = -\lambda$ отсюда видно, что дифференцирование и интегрирование одного и того же порядка — взаимно обратные операции. Далее, из формулы (4) видно, что

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(\frac{d^\gamma g}{dx^\gamma}\right) = \frac{d^{\beta+\gamma} g}{dx^{\beta+\gamma}} \tag{5}$$

при любых β и γ.

Отметим еще другие следствия формулы (3). Заменяя в ней λ на $-\lambda$, можем написать:

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right) = \frac{x_+^{\mu-\lambda-1}}{\Gamma(\mu-\lambda)}. \tag{6}$$

В частности, при $\mu = 1$ имеем:

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\,\theta(x) = \frac{x_+^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda+1)}. \tag{6'}$$

Если в формуле (6) μ является целым отрицательным числом или нулем, $\mu = -k$, то мы получаем, что

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\delta^{(k)}(x)\right) = \frac{x_+^{-k-\lambda-1}}{\Gamma(-k-\lambda)}. \tag{7}$$

С другой стороны, если $\mu - \lambda = -k$ является целым отрицательным числом или нулем, то из формулы (6) следует, что

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\lambda-k-1}}{\Gamma(\lambda-k)}\right) = \delta^{(k)}(x). \tag{8}$$

П р и м е р ы. 1. Рассмотрим так называемое *интегральное уравнение Абеля*

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{f(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^\alpha}. \tag{9}$$

Здесь g — заданная, f — искомая функция.

В классической теории *) число α предполагается меньшим 1; это условие обеспечивает сходимость интеграла в правой части. Однако мы в этом предположении не нуждаемся, так как при любом α можем понимать правую часть уравнения (9) как интеграл порядка $\lambda = -\alpha + 1$ от обобщенной функции f, т. е. как свертку

$$g(x) = f(x) * \Phi_\lambda. \tag{9'}$$

Для получения выражения функции f через g нужно, очевидно, применить к последней дифференцирование порядка λ.

*) См. Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. III, п. 592, стр. 290 (случай $\alpha = 1/2$).

Таким образом, $f(x)=\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}g(x)$. Решение получается сверткой с функционалом $\Phi_{-\lambda}$:

$$g(x)*\Phi_{-\lambda}=(f(x)*\Phi_\lambda)*\Phi_{-\lambda}=f(x)*(\Phi_\lambda*\Phi_{-\lambda})=$$
$$=f(x)*\delta=f(x). \tag{10}$$

Пусть, в частности, $0<\alpha<1$; тогда Φ_λ приводится к обычной функции $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x_+^{-\alpha}$ и уравнение (9′) записывается в виде (9). В этом случае $-\lambda=\alpha-1$ и функционал $\Phi_{-\lambda}$ сингулярен, так что, вообще говоря, решение уравнения (9) не приводится к классической формуле. Если дополнительно предположить, что функция $g(x)$ дифференцируема, то запись решения в классической форме уже возможна. Именно, мы имеем:

$$g(x)*\Phi_{\alpha-1}=g(x)*\frac{d}{dx}\Phi_\alpha=\frac{d}{dx}g(x)*\Phi_\alpha=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{g'(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}},$$

т. е.

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{g'(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}. \tag{11}$$

Формула (11) для значения $\alpha=\frac{1}{2}$ и была фактически получена Абелем при решении уравнения (9).

2. Многие специальные функции могут быть выражены как производные дробного порядка от элементарных функций. Для *гипергеометрической функции* *) существуют два таких выражения. Гипергеометрическая функция $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ определяется при $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\beta>0$ и $|x|<1$ как интеграл следующего вида:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt. \tag{12}$$

При остальных значениях β,γ ($\gamma\neq0,-1,-2,\ldots$) и $|x|<1$ она определяется как аналитическое продолжение, т. е. как регуляризация этого интеграла (см. § 3, п. 8). Сделаем в этом интеграле подстановку $w=tx$. Мы получим:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)x^{\gamma-1}}\int_0^x w^{\beta-1}(1-w)^{-\alpha}(x-w)^{\gamma-\beta-1}\,dw; \tag{13}$$

эту формулу можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}}\left(\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right). \tag{14}$$

Таким образом, *функция* $\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ *является производной порядка* $\beta-\gamma$ *от функции* $\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}$. Это можно записать также в виде формулы

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}}{\Gamma(\gamma-\beta)}*\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}. \tag{15}$$

Другое выражение для гипергеометрической функции в виде производной дробного порядка получается, если сделать в интеграле (12) подстановку $w=\frac{x(1-t)}{1-tx}$. Мы получаем, что

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)x^{\gamma-1}}\int_0^x w^{\gamma-\beta-1}(1-w)^{\alpha-\gamma}(x-w)^{\beta-1}\,dw. \tag{16}$$

Иными словами,

$$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}\left[\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}(1-x)_+^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)}\right]. \tag{17}$$

Сравнивая формулы (14) и (17), мы получаем известную формулу

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x). \tag{18}$$

*) См. Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. II, 1948, п. 495, стр. 793.

Любопытные соотношения для гипергеометрической функции вытекают из равенства (5), т. е. из формулы

$$\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}\left(\frac{d^{\gamma}g}{dx^{\gamma}}\right)=\frac{d^{\beta+\gamma}g}{dx^{\beta+\gamma}}. \tag{19}$$

Возьмем от равенства (14) производную порядка $-\delta$. Мы получим, что

$$\frac{d^{-\delta}}{dx^{-\delta}}\left[\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x)\right]=\frac{d^{\beta-\gamma-\delta}}{dx^{\beta-\gamma-\delta}}\left[\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right]=$$
$$=\frac{x^{\gamma+\delta-1}}{\Gamma(\gamma+\delta)}F(\alpha,\beta,\gamma+\delta;x). \tag{20}$$

Если изобразить это равенство в интегральной форме, то мы получаем:

$$F(\alpha,\beta,\gamma+\delta;x)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)x^{\gamma+\delta-1}}\int_0^x w^{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma;x)(x-w)^{\delta-1}\,dw=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}\int_0^1 w^{\gamma-1}(1-w)^{\delta-1}F(\alpha,\beta,\gamma,xw)\,dw. \tag{21}$$

Эта формула верна при всех значениях α, β, γ, δ, если понимать интеграл в правой части равенства как регуляризованное значение интеграла (§ 3, п. 8).

Представления (14) и (17) гипергеометрической функции в виде производной дробного порядка позволяют установить случаи, в которых эта функция является многочленом или же многочленом, умноженным на $(1-x)^p$.

Пусть β — отрицательное целое число или нуль, $\beta=-k$. Тогда $\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}=\delta^{(k)}(x)$. Следовательно, формула (14) принимает вид

$$\frac{x^{\gamma-1}F(\alpha,-k,\gamma,x)}{\Gamma(\gamma)}=\frac{d^{-k-\gamma}}{dx^{-k-\gamma}}\left[(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)\right]. \tag{22}$$

Но функция *) $(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)$ является линейной комбинацией δ-функции и ее производных:

$$(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\delta^{(k-r)}(x). \tag{23}$$

По формуле (7)

$$\frac{d^{-k-\gamma}}{dx^{-k-\gamma}}\left[\delta^{(k-r)}(x)\right]=\frac{x^{r+\gamma-1}}{\Gamma(r+\gamma)}.$$

Внося выражение для $(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)$ в формулу (22), выполняя дифференцирование и сокращая на $\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$, мы получаем:

$$F(\alpha,-k,\gamma;x)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+r)}x^r \tag{24}$$

(при этом γ не должно быть целым отрицательным числом или нулем). Многочлен $F(\alpha,-n,\gamma;x)$ называется *многочленом Якоби* и обозначается $G(\alpha,-n,\gamma;x)$. Из формул (18) и (24) вытекает, что в случае, когда $\gamma-\beta$ является целым отрицательным числом или нулем, $\gamma-\beta=-n$, гипергеометрическая функция принимает следующий вид:

$$F(\alpha,\gamma+n,\gamma;x)=(1-x)^{-\alpha-n}G(\gamma-\alpha,-n,\gamma;x).$$

Из равенства $F(\alpha,\beta,\gamma;x)=F(\beta,\alpha,\gamma;x)$ вытекают аналогичные утверждения для случаев, когда α или $\gamma-\alpha$ являются целыми отрицательными числами или нулями.

Рассмотрим теперь гипергеометрическую функцию как функцию от γ. Из равенства (14) видно, что эта функция может иметь особенность, если γ является целым отрицательным числом или нулем. Функция $\Gamma(\gamma)$ имеет при $\gamma=-n$ полюс с вычетом $\frac{(-1)^n}{n!}$. Если α или β также являются целыми

*) Очевидно, что такое произведение определено: так как $\delta^{(k)}(x)$ сосредоточено в нуле, то $(1-x)^{-\alpha}$ можно заменить бесконечно дифференцируемой функцией, равной $(1-x)^{-\alpha}$ в окрестности нуля.

отрицательными числами или нулями, например $\beta=-m$, причем $m<n$, то, согласно сказанному выше, гипергеометрическая функция вырождается в многочлен. Если же это условие не выполняется, то гипергеометрическая функция, рассматриваемая как функция от γ, имеет полюс с вычетом

$$\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}\frac{d^{\beta+n}}{dx^{\beta+n}}\left(\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right)=$$
$$=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}\frac{d^{n+1}\Gamma(\alpha,\beta,1;x)}{dx^{n+1}}. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь *бесселевы функции* *) и покажем, что функцию $u^{p/2}J_p(\sqrt{u})$ также можно представить производной дробного порядка от элементарной функции. Функция $J_p(z)$ имеет при $\operatorname{Re} p>-\frac{1}{2}$ следующее интегральное представление:

$$J_p(z)=\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^1(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}\cos zt\,dt. \quad (26)$$

Для остальных p этот интеграл можно понимать в регуляризованном смысле. Полагая здесь $zt=w$, мы получаем:

$$J_p(z)=\frac{2}{(2z)^p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^z(z^2-w^2)^{p-\frac{1}{2}}\cos w\,dw, \quad (27)$$

или

$$2^p\sqrt{\pi}\,u^{p/2}J_p(\sqrt{u})=\int_0^u\frac{(u-v)^{p-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\frac{\cos\sqrt{v}}{\sqrt{v}}\,dv. \quad (28)$$

Это равенство можно записать в следующем виде:

$$2^p\sqrt{\pi}\,u^{p/2}J_p(\sqrt{u})=\frac{d^{-p-\frac{1}{2}}}{du^{-p-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]. \quad (29)$$

*) См. В. И. Смирнов, Курс, т. III, ч. 2, 1951, гл. 6, § 2.

Возьмем от обеих частей этого равенства производную порядка $-q-1$; мы получим:

$$\frac{d^{-q-1}}{du^{-q-1}}[2^p\sqrt{\pi}\,u^{p/2}J_p(\sqrt{u})]=\frac{d^{-p-q-\frac{3}{2}}}{du^{-p-q-\frac{3}{2}}}\left(\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right)=$$
$$=2^{p+q+1}\sqrt{\pi}\,u^{\frac{p+q+1}{2}}J_{p+q+1}(\sqrt{u}). \quad (30)$$

Записывая это равенство в интегральной форме, мы находим:

$$2^{q+1}u^{\frac{p+q+1}{2}}J_{p+q+1}(\sqrt{u})=\int_0^u v^{p/2}J_p(\sqrt{v})\frac{(u-v)^q}{\Gamma(q+1)}\,dv. \quad (31)$$

Подстановка $u=x^2$, $v=x^2\sin\theta$ приводит формулу (31) к виду

$$J_{p+q+1}(x)=\frac{x^{q+1}}{\Gamma(q+1)2^q}\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_p(x\sin\theta)\sin^{p+1}\theta\cos^{2q+1}\theta\,d\theta. \quad (32)$$

Этот интеграл называется *интегралом Сонина*, так как Н. Я. Сонин доказал формулу (32) для целых p и q, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$.

§ 6. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Фундаментальные решения эллиптических уравнений. Пусть дан линейный дифференциальный оператор $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ порядка $2m$ с постоянными коэффициентами. Обозначим через L_0 его главную часть, т. е. часть, содержащую только производные порядка $2m$. Оператор L называется *эллиптическим*, если при замене в L_0 каждого из дифференциалов $\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ числами $\omega_1,\ldots,\omega_n$ мы получаем многочлен $L_0(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, не обращающийся в нуль при $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\neq 0$.

Мы должны решить уравнение

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x_1, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

Применим для этого следующий метод.

1°. Мы заменяем δ-функцию в правой части рассматриваемого уравнения функцией $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$, которая равна дельта-функции при $\lambda = -n$ (§ 3, п. 9, (9)).

2°. Функцию $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ разлагаем на плоские волны, т. е. представляем ее, согласно формуле (4) п. 10 § 3, как среднее по всем направлениям $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ от функций вида $C\,|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda$ и решаем уравнение для правой части вида $|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda$, что уже элементарно.

Итак, заменяем уравнение (1) уравнением

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}, \qquad (2)$$

из которого уравнение (1) получается при $\lambda = -n$.

Представим теперь правую часть по формуле (4) п. 10 § 3 в виде

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_{\Omega} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda \, d\Omega. \qquad (3)$$

Если найти решение v уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) v = \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \qquad (4)$$

зависящее только от $\xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$, то решение уравнения (2) запишется в виде

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega} v(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)\, d\Omega.$$

Решение уравнения (4) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Так как для функции $v(\xi) = v(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \omega_k \frac{d}{d\xi},$$

то, подставляя функцию $v(\xi)$ в уравнение (4), мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2m$:

$$L\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) v = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}. \qquad (5)$$

Правая часть этого уравнения, помимо ξ, зависит от λ, а коэффициенты слева зависят от $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Следовательно, решение v зависит от ξ, λ и ω. Поэтому мы будем писать:

$$v = v_\omega(\xi, \lambda).$$

Пусть $G(\xi, \omega)$ есть фундаментальное решение уравнения (5), т. е. решение уравнения

$$L\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) G(\xi, \omega) = \delta(\xi).$$

Тогда

$$v_\omega(\xi, \lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\xi - \eta, \omega)\, |\eta|^\lambda \, d\eta \qquad (6)$$

и

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega} v_\omega(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n, \lambda)\, d\Omega. \qquad (7)$$

Чтобы получить искомое фундаментальное решение, нужно положить в последних формулах $\lambda = -n$.

Особенно простой результат получится в случае нечетного числа измерений. В этом случае

$$\left.\frac{|\eta|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = C\,\delta^{(n-1)}(\eta)$$

и, значит,

$$v_\omega(\xi, -n) = C\,\frac{\partial^{n-1} G(\xi, \omega)}{\partial \xi^{n-1}}. \qquad (8)$$

Таким образом, в случае нечетного числа измерений фундаментальное решение эллиптического уравнения (1) может быть представлено в виде

$$u(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \int_\Omega \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} G(\xi, \omega)\, d\Omega. \qquad (9)$$

Здесь $\xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$, а $G(\xi, \omega)$ есть фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения с левой частью $L\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right)$. Можно проверить, что

$$C_1 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_n (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (n-2)}.$$

Строго говоря, существование свертки в формуле (6) и возможность интегрирования в формуле (7) нуждаются в обосновании. Прямой путь для этого — получение формул для $G(\xi, \omega)$ в явном виде. Вместо этого мы здесь, обходя вопрос о существовании свертки (6), приведем другой способ получения функции $v_\omega\left(\sum \omega_i x_i\right)$, не оставляющий сомнений в возможности ее интегрирования по единичной сфере.

Заметим, что если обобщенная функция $v(\xi)$ непрерывно зависит от некоторых параметров, то ее производная любого порядка по ξ также непрерывно зависит от этих параметров (см. § 2). Далее, если обобщенная функция $v(\xi)$ является решением уравнения $L_\xi v(\xi) = f(\xi)$ (L_ξ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами), то производная $w(\xi) = \frac{dv(\xi)}{d\xi}$ является решением уравнения $L_\xi w(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}$. Отметим еще, что если обобщенные функции $v_\lambda(\xi)$ и $f_\lambda(\xi)$ непрерывно зависят от параметра λ и при $\lambda \neq \lambda_0$ (в окрестности точки λ_0) $v_\lambda(\xi)$ является решением уравнения $L_\xi v_\lambda(\xi) = f_\lambda(\xi)$, то $v_{\lambda_0}(\xi)$ будет решением уравнения $L_\xi v_{\lambda_0}(\xi) = f_{\lambda_0}(\xi)$.

Предположим сначала, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда правая часть уравнения (5) — непрерывная функция от ξ, и решение существует в силу классических теорем существования. Далее, при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ правая часть зависит непрерывно и от λ, поэтому v непрерывно зависит от λ. Наконец, коэффициенты уравнения (5), стоящие в левой части, непрерывно зависят от ω $\left(\sum \omega_i^2 = 1\right)$, причем модуль старшего коэффициента $L_0(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, в силу эллиптичности исходного уравнения, имеет положительный минимум. Следовательно, v непрерывно зависит и от ω. В частности, v зависит от ω и λ непрерывно в смысле обобщенных функций.

Заметим теперь, что при двукратном дифференцировании по ξ правая часть уравнения (5) воспроизводится (с точностью до множителя 2λ) с индексом, на две единицы меньшим, если только $\lambda \neq 0$. В силу предыдущих замечаний мы можем найти непрерывно зависящее от ω решение уравнения (5) при всех λ многократным дифференцированием решения $v_\omega(\xi, \lambda)$ для $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и, если нужно, предельным переходом.

В случае нечетного n нужно начать с дифференцирования $v_\omega(\xi, \lambda)$ при $\lambda = 1$. После двукратного дифференцирования получится с точностью до множителя функция $G(\xi, \omega)$, так как правая часть уравнения (5) при $\lambda = -1$ обращается с точностью до множителя в $\delta(\xi)$. Дальнейшим дифференцированием мы получим формулу (8).

В случае четного n мы определим решение $v_\omega(\xi, \lambda)$ при малых положительных λ, затем дважды продифференцируем его по ξ, разделим на λ и устремим λ к нулю. В результате получится решение уравнения (5), отвечающее значению $\lambda = -2$. Дальнейшим дифференцированием получим $v_\omega(\xi, \lambda)$ при $\lambda = -4, -6, \ldots$

Разберем более подробно случай однородного эллиптического дифференциального оператора $L (= L_0)$. Обыкновенное дифференциальное уравнение (5) в этом случае приобретает вид

$$L(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, v^{(2m)}(\xi) = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$$

и, значит,

$$v^{(2m)}(\xi) = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Для того чтобы найти $v(\xi)$, достаточно $2m$ раз проинтегрировать правую часть полученного уравнения. Как мы показали в § 3, п. 4, результат следует считать равным

$$v(\xi) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} \left\{ \frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + Q_\lambda(\xi) \right\},$$

где

$$Q_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi^{2m-2k}}{(2k-1)!\,(2m-2k)!\,(\lambda+2k)}.$$

Таким образом, решение однородного эллиптического уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

задается формулой

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_\Omega \left\{ \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + Q_\lambda\left(\sum \omega_k x_k\right)\right\} \frac{d\Omega}{L(\omega_1 \ldots \omega_n)}. \quad (10)$$

В частности, при $\lambda = -n$ получается фундаментальное решение однородного эллиптического дифференциального уравнения порядка $2m$.

Заметим, что так как интеграл по единичной сфере Ω от каждого слагаемого в выражении $Q_\lambda\left(\sum_{k=1}^n \omega_k x_k\right)$ является многочленом степени меньше $2m$ и поэтому удовлетворяет уравнению $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$, то мы можем в фундаментальное решение включить только то слагаемое этого выражения, которое нужно, чтобы полученная функция не имела полюса при $\lambda = -n$, отбросив все остальные слагаемые.

Разберем более подробно вид фундаментального решения. При этом будем исследовать отдельно случай, когда порядок уравнения не меньше размерности пространства, т. е. $2m \geqslant n$, и случай, когда $2m < n$. Рассмотрим сначала первый случай $2m \geqslant n$. Приходится различать еще случай пространства нечетной размерности n и случай четного n. При n нечетном и $2m > n$ предельный переход в формуле (10) дает для фундаментального решения выражение

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^n (2m-n)!} \int_\Omega \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{2m-n}}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} d\Omega. \quad (11)$$

Многочлен $Q_\lambda(\xi)$ здесь отброшен, так как для предельного перехода он не нужен.

В случае четного n и $2m \geqslant n$ при $\lambda = -n$ для получения конечного значения приходится добавлять к функции $\frac{\left|\sum \omega_k x_k\right|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)}$ то слагаемое многочлена $Q_\lambda\left(\sum \omega_k x_k\right)$, коэффициент которого содержит множитель $\frac{1}{\lambda+n}$, а именно $\frac{\xi^{2m-n}}{(n-1)!\,(2m-n)!\,(\lambda+n)}$. При этом сумма

$$\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + \frac{\xi^{-n+2m}}{(n-1)!\,(2m-n)!\,(\lambda+n)}$$

при $\lambda \to -n$ стремится к $-\frac{\xi^{2m-n} \ln|\xi|}{(n-1)!\,(2m-n)!}$, и мы получаем следующее выражение для фундаментального решения:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi)^n (2m-n)!} \times$$

$$\times \int_\Omega \frac{(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{2m-n} \ln|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} d\Omega. \quad (12)$$

Заметим, что когда порядок уравнения не меньше размерности пространства, интегралы по сфере сходятся, и функция Грина представляет собой обычную (необобщенную) функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, непрерывную в точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Перейдем к случаям, когда порядок уравнения меньше размерности пространства ($2m < n$).

В этих случаях

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-2m-1)!} \delta^{(n-2m-1)}(x)$$

для нечетного n и

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{|\xi|^{-n+2m}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

для четного n.

Отсюда для фундаментального решения получается при нечетном n $(2m < n)$ выражение

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Omega} \delta^{(n-2m-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) \frac{d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} \quad (13)$$

и при четном n $(2m < n)$ выражение

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{-n+2m} \frac{d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}. \quad (14)$$

Можно показать, что фундаментальное решение $u(x_1, \ldots, x_n)$, выраженное формулами (11)—(14), всегда представляет собой обычную (не обобщенную) функцию, притом обладающую следующими свойствами: при $x \neq 0$ она аналитична, а в окрестности начала координат удовлетворяет соотношению

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} O(r^{2m-n}), & \text{если } n \text{ нечетно или} \\ & \text{если } n \text{ четно и } 2m < n, \\ O(r^{2m-n} \ln r), & \text{если } n \text{ четно и } 2m \geqslant n, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{\sum x_i^2}$; при этом в случае $2m > n$ функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в начале координат непрерывные производные до порядка $2m - n - 1$.

Пример. Пусть $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m$ есть m-я итерация оператора Лапласа. Многочлен $L_0(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \left(\sum \omega_i^2\right)^m$ на единичной сфере Ω обращается в единицу. Интегралы (8), (10) и (11) можно вычислить теперь по формуле (3) и при $2m < n$, а также при n нечетном и $2m \geqslant n$ мы получаем с точностью до коэффициента пропорциональности

$$u(x) = C_{mn} r^{2m-n}.$$

Если $2m \geqslant n$ и n четно, то, переходя в интеграле (12) к сферическим координатам, мы получаем:

$$u(x) = C'_{mn} r^{2m-n} \ln r + C''_{mn} r^{2m-n}.$$

Последнее слагаемое можно отбросить, так как оно является решением однородного уравнения $\Delta^m u = 0$.

2. Фундаментальные решения однородных регулярных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x_1, \ldots, x_n), \quad (1)$$

где L — такой дифференциальный оператор, что если мы заменим в нем $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на ω_i, то получим однородный полином степени m *). *Мы предположим, что конус* $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ *не имеет особых точек* (кроме начала координат), *т. е. что при* $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ и $\sum \omega_j^2 \neq 0$ *градиент* $L(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *не обращается в нуль*. В этом случае уравнение $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \delta(x)$ и сам оператор $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ будем называть *регулярными*.

В п. 1 мы рассмотрели эллиптический случай, когда m четно и, что самое главное, $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) \neq 0$ при $\sum \omega_j^2 \neq 0$. В общем случае тем же путем можно формально прийти к выражению

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\Omega} \frac{f_{mn}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}, \quad (2)$$

где Ω — единичная сфера $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 1$, $d\Omega$ — элемент поверхности этой сферы, а функция f_{mn} имеет следующие значения: если n четно и $m \geqslant n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi)^n (m-n)!} x^{m-n} \ln |x|; \quad (3)$$

*) В п. 1 порядок оператора L обозначался через $2m$.

если n четно и $m<n$, то

$$f_{mn}(x)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+m}(n-m-1)!}{(2\pi)^n}x^{m-n}; \tag{4}$$

если n нечетно и $m\geqslant n$, то

$$f_{mn}(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^{n-1}(m-n)!}x^{m-n}\operatorname{sgn}x; \tag{5}$$

если n нечетно и $m<n$, то

$$f_{mn}(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\delta^{(n-m-1)}(x). \tag{6}$$

Но теперь интеграл (2), вообще говоря, расходится, поскольку на единичной сфере Ω имеется в общем случае многообразие P, на котором $L(\omega_1, \ldots, \omega_n)=0$.

Однако, если оператор L регулярен и, следовательно, многообразие P не имеет особых точек, то интеграл (2) можно регуляризировать следующим образом:

$$u(x_1, \ldots, x_n)=\int\limits_{\Omega}\frac{f_{mn}\left(\sum x_i\omega_i\right)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}d\Omega=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$u_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{f_{mn}\left(\sum x_i\omega_i\right)d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}. \tag{7}$$

Здесь через Ω_ε обозначено множество тех точек на единичной сфере, для которых $|L(\omega_1, \ldots, \omega_n)|>\varepsilon$.

Нам надо прежде всего показать, что существует предел для обобщенной функции u_ε, т. е. что для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u_\varepsilon, \varphi(x_1, \ldots, x_n))=(u, \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Заметим, что если $f_{mn}\left(\sum x_i\omega_i\right)$ определена по одной из формул (3)—(6), то (f_{mn}, φ) является бесконечно дифференцируемой функцией от $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Это проверяется простой заменой переменных в интеграле, выражающем (f_{mn}, φ), переводящей зависимость от $\omega_1, \ldots, \omega_n$ в аргумент φ.

Обозначим $\left(f_{mn}\left(\sum x_i\omega_i\right), \varphi\right)$ через $r(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ и покажем, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)\,d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}=(u, \varphi).$$

Чтобы доказать это, представим $r(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ в виде $r=\sum\limits_{i=1}^{n}r_i$, где функция $r_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вне достаточно малой области S_i. Надо рассмотреть интегралы лишь для тех функций r_i, для которых замыкание области S_i пересекается с многообразием P, где $L(\omega_1, \ldots, \omega_n)=0$. Таким образом, можно предположить, что функция $r_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, для которой надо установить существование предела $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{r\,d\Omega}{\tau}$, обращается в нуль вне достаточно малой окрестности точки A, принадлежащей многообразию P. В этой точке, как и на всем многообразии P, градиент L не обращается в нуль. Поэтому в точке A одна из производных $\frac{\partial L}{\partial\omega_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ не обращается в нуль. Кроме того, в точке A мы имеем $\sum\omega_i^2=1$ и хотя бы одна из координат ω_i отлична от нуля. Пусть для определенности $\frac{\partial L}{\partial\omega_1}\neq 0$ и $\omega_n\neq 0$. Тогда в окрестности точки A на P можно ввести систему координат $L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. В этих координатах $d\Omega$ выразится в виде

$$d\Omega=I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})\,dL\,d\omega_2\ldots d\omega_{n-1},$$

где $I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})$ — гладкая функция. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}\, d\Omega =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \ldots \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_i(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})\, I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})}{L}\, dL\, d\omega_2 \ldots d\omega_{n-1} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \left[\int\limits_{|L|>\varepsilon} \frac{r_i(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})\, I(L, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})\, dL}{L} \right] \times$$
$$\times\, d\omega_2 \ldots d\omega_{n-1}.$$

Так как интеграл $\int\limits_{|L|>\varepsilon} \frac{r_i I\, dL}{L}$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к главному значению по Коши, то существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)},$$

а следовательно, и предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} = \lim_{\varepsilon \to 0} (u_\varepsilon, \varphi).$$

Мы доказали, что существует регуляризация по Коши интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}. \qquad (8)$$

По каждой регуляризации интеграла (8) мы можем определить обобщенную функцию (2)

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega} \frac{f_{mn}\left(\sum x_i\omega_i\right) d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}$$

следующим образом:

$$(u, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = \int\limits_{\Omega} \frac{(f_{mn}, \varphi)\, d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)},$$

где интеграл понимается в смысле нашей регуляризации.

Для наших целей годится любая регуляризация интеграла (8), подчиняющаяся тому условию, что если функция r имеет вид

$$r(\omega_1, \ldots, \omega_n) = L(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, r_1(\omega_1, \ldots, \omega_n),$$

где r и r_1 — бесконечно дифференцируемые функции, то

$$\int\limits_{\Omega} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} = \int\limits_{\Omega} r_1(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\Omega. \qquad (9)$$

Две регуляризации, подчиняющиеся условию (9), отличаются друг от друга на следующее выражение:

$$\int\limits_{P} r(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, d\mu, \qquad (10)$$

где P — снова многообразие нулей полинома $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ на единичной сфере Ω, а μ — некоторая мера на этом многообразии.

Действительно, так как для функции r, обращающейся в нуль на многообразии P, все регуляризации интеграла (8), подчиняющиеся условию (9), дают один и тот же результат (поскольку такую функцию можно представить в виде $r = r_1 L$), разница между двумя регуляризациями не может зависеть ни от значений функции $r(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ вне многообразия P, ни от значений производных ее на самом многообразии P, а значит, имеет вид (10).

Покажем теперь, что две различные регуляризации интеграла (2), подчиняющиеся условию (9), отличаются друг от друга на решение однородного уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0.$$

Действительно, разность между этими обобщенными функциями мы можем по (10) представить в виде следующего функционала:

$$s(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{P} f_{mn}\left(\sum x_i\omega_i\right) d\mu.$$

Применяя к полученному выражению оператор L, мы имеем:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) s(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{P} L(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, f_{mn}^{(m)}\left(\sum x_i\omega_i\right) d\mu,$$

и так как интегрирование идет по многообразию P, где $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$, последний интеграл обращается в нуль.

Нам осталось показать, что интеграл (2) действительно дает решение уравнения (1). Для проверки этого факта применим к интегралу (2) дифференциальный оператор

$L\left(\frac{\partial}{dx_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Мы будем иметь:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_\Omega f_{mn}^{(m)}\left(\sum x_i\omega_i\right) d\Omega.$$

Используя формулы (3) — (6) для функции f_{mn}, а также формулы для разложения δ-функций на плоские волны (§ 3), мы получаем: если n четно, то

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int\limits_\Omega \left(\sum x_i\omega_i\right)^{-n} d\Omega = \delta(x_1, \ldots, x_n);$$

если n нечетно, то

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_\Omega \delta^{(n-1)}\left(\sum x_i\omega_i\right) d\Omega = \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом, если конус $L(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ не имеет особых точек, то формулы (2) — (6) действительно выражают решение уравнения $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \delta(x)$.

3. Фундаментальное решение задачи Коши. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0 \tag{1}$$

порядка m по переменному t.

Несколько позже мы сформулируем ограничения, наложенные на это уравнение. Мы ставим себе целью построить фундаментальное решение задачи Коши для этого уравнения (см. § 5, п. 4). Иными словами, мы должны найти решение $u(t, x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial^{m-1} u(0, x)}{\partial t} = \delta(x).$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) при произвольном числе независимых переменных мы проведем сведе́нием к задаче Коши для двух независимых переменных. Относительно уравнения (1) сделаем следующее предположение: *дифференциальный оператор*

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1\frac{\partial}{\partial \xi}, \ldots, \omega_n\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tag{2}$$

обладает тем свойством, что для уравнения

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_\omega = 0 \tag{3}$$

задача Коши корректна.

Перейдем теперь к разысканию фундаментального решения задачи Коши для уравнения (1).

Учитывая, что

$$\delta(x) = \left.\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}$$

(§ 3, п. 9), рассмотрим это уравнение (1)

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u = 0$$

при начальных данных

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-2), \\ &\left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Разложим $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ по формуле

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda d\Omega.$$

Будем искать решение уравнения (1) с начальными условиями (4), в которых правую часть последнего равенства заменим выражением

$$\frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda.$$

Если искать решение этой задачи в виде функции

$$u_\omega(t, \xi, \lambda) = u_\omega(t, \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n, \lambda),$$

то мы придем к следующей двумерной задаче: найти решение $u_\omega(t, \xi, \lambda)$ уравнения (3)

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_\omega = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 \frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) u_\omega = 0$$

при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^k u_\omega(t, \xi, \lambda)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-2), \\ &\left.\frac{\partial^{m-1} u_\omega(t, \xi, \lambda)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} |\xi|^\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Искомое фундаментальное решение задачи Коши для уравнения (1) представляется в виде

$$u(t, x) = \int\limits_\Omega u_\omega(t, x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n, -n)\, d\Omega. \tag{6}$$

Мы положили $\lambda = -n$, поскольку именно при этом значении λ функция $\dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ обращается в $\delta(x_1, \ldots, x_n)$.

Функция $u_\omega(t, \xi, \lambda)$ в свою очередь выражается через фундаментальное решение $G_\omega(t, \xi)$ задачи Коши для уравнения (3), а именно:

$$u_\omega(t, \xi, \lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t, \xi - \eta) |\eta|^\lambda\, d\eta. \tag{7}$$

Особенно простая формула получается в случае нечетного числа измерений: в этом случае

$$u_\omega(t, \xi, -n) = C \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} G_\omega(t, \xi). \tag{8}$$

Таким образом, фундаментальное решение $u(t, x)$ задачи Коши для уравнения (1) выражается через фундаментальное решение $G_\omega(t, \xi)$ задачи Коши для уравнения (3) по формуле

$$u(t, x) = \left.\frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_\Omega \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t, \xi - \eta) |\eta|^\lambda\, d\eta \right\} d\omega \right|_{\lambda=-n}; \tag{9}$$

в случае нечетного числа измерений получается более простая формула:

$$u(t, x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!} \int\limits_\Omega \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} G_\omega(t, \xi)\, d\Omega. \tag{10}$$

Дифференцирование здесь нужно понимать как дифференцирование в смысле обобщенных функций, а интегрирование — как интегрирование обобщенных функций, непрерывно зависящих от параметра.

Подчеркнем, что указанные формулы справедливы для всех уравнений, для которых корректна задача Коши, например для любых параболических и гиперболических уравнений.

При желании обойти вопрос о существовании свертки в формуле (7) и получить функцию $v_\omega(t, \xi, -n)$ в такой форме, чтобы была очевидной возможность ее интегрирования по единичной сфере, следует провести рассуждения, аналогичные приведенным в п. 1 (мелким шрифтом). Мы не будем на этом останавливаться.

Решение задачи Коши для однородных гиперболических уравнений. Формулы Герглотца — Петровского. Разберем более подробно случай гиперболического уравнения, не содержащего производных порядка $< m$.

Однородный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)=P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ называется *гиперболическим*, если при любых значениях $\omega_1, \ldots, \omega_n$, $\sum \omega_j^2=1$, уравнение m-го порядка относительно v

$$P(v, \omega_1, \ldots, \omega_n)=0 \tag{11}$$

имеет m вещественных и различных корней.

Мы имеем задачу

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u=0 \tag{12}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0 \quad (k=0, 1, \ldots, m-2), \\ &\left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Как мы уже говорили, решение этой задачи сводится к решению следующей одномерной задачи Коши:

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)u_\omega=P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1\frac{\partial}{\partial \xi}, \ldots, \omega_n\frac{\partial}{\partial \xi}\right)u_\omega=0 \tag{14}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^k u_\omega}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0 \quad (k=0, 1, \ldots, m-2), \\ &\left.\frac{\partial^{m-1} u_\omega}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=\frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Как легко проверить, уравнению (12) удовлетворяет всякая функция $f\left(\sum x_k\omega_k+v_jt\right)$, где v_j — какой-либо корень алгебраического уравнения (11). Все корни этого уравнения вещественны и различны в силу гиперболичности уравнения (12). Решение $f\left(\sum x_k\omega_k+v_jt\right)$ представляет собой плоскую волну, распространяющуюся со скоростью $-v_j$.

Будем искать решение задачи Коши (14) — (15) в виде суммы одинаковых плоских волн

$$u_\omega\left(t, \sum \omega_k x_k\right)=\sum_{j=1}^m c_j f\left(\sum_{k=1}^n x_k\omega_k+v_jt\right), \tag{16}$$

распространяющихся со скоростями v_j. Суммирование в формуле (16) ведется по всем корням уравнения (11). По начальным условиям определяем c_j и f из уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum c_j=0, \ \sum c_jv_j=0, \ \ldots, \ \sum c_jv_j^{m-2}=0, \ \sum c_jv_j^{m-1}=1, \\ &f^{(m-1)}(\xi)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}|\xi|^\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Отсюда

$$c_j=\frac{1}{(v_j-v_1)\ldots(v_j-v_{j-1})(v_j-v_{j+1})\ldots(v_j-v_m)}. \tag{18}$$

Для определения $f(\xi)$ нужно $m-1$ раз проинтегрировать $|\xi|^\lambda$. Мы получаем:

$$f(\xi)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\left\{\frac{|\xi|^{\lambda+m-1}(\operatorname{sgn}\xi)^{m-1}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-1)}+Q_\lambda(\xi)\right\}, \tag{19}$$

где

$$Q_\lambda(\xi)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{\xi^{m-2k-1}}{(2k-1)!\,(m-2k-1)!\,(\lambda-2k)} \tag{20}$$

(ср. § 3, п. 4).

Итак, в рассматриваемом случае решение задачи Коши (14) и (15) найдено в явном виде:

$$u_\omega\left(t, \sum \omega_k x_k\right)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^m c_j\left\{\frac{\left|\sum\omega_kx_k+v_jt\right|^{\lambda+m-1}\left[\operatorname{sgn}\left(\sum\omega_kx_k+v_jt\right)\right]^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)}+\right.$$

$$\left.+Q_\lambda\left(\sum\omega_ix_i+v_jt\right)\right\}, \tag{21}$$

где c_j определяются по формулам (18), а $Q_\lambda(\xi)$ — по формуле (20).

Решение исходной задачи Коши (12) и (13) получается из (21) интегрированием по единичной сфере $\omega_1^2+\ldots+\omega_n^2=1$:

$$u(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \lambda)=\int\limits_{\Omega} u_\omega\left(t,\ \sum \omega_k x_k\right)d\Omega. \qquad (22)$$

При $\lambda=-n$ из этой формулы, как и раньше, получается фундаментальное решение задачи Коши.

В формуле (22) интегрирование проводится по единичной сфере. Выбор сферы в качестве поверхности интегрирования является здесь по существу случайным; поэтому мы сейчас преобразуем эту формулу к виду, более отвечающему существу задачи.

В формуле (22) u_ω есть сумма m слагаемых, выражаемая формулой (21). Рассмотрим j-е слагаемое:

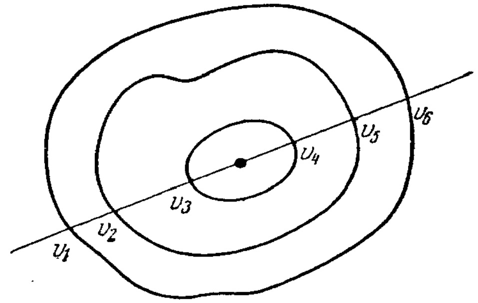
$$c_j\left\{\frac{\left|\sum x_k\omega_k+v_jt\right|^{\lambda+m-1}\left[\operatorname{sgn}\left(\sum x_k\omega_k+v_jt\right)\right]^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)}+\right.$$
$$\left.+Q\left(\sum x_k\omega_k+v_jt\right)\right\}.$$

Сделаем в интеграле по единичной сфере Ω от этого слагаемого замену переменных, а именно положим $\frac{\omega_j}{v_i}=\xi_j$. Мы стремимся к тому, чтобы заменить интегрирование по Ω интегрированием по поверхности $P(1,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)\equiv\equiv H(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=0$. При каждом фиксированном наборе значений $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n$ уравнение $P(v,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)=0$ имеет n различных корней v_j. Поскольку эти корни непрерывно зависят от параметров ω_i, мы можем при изменении ω_i следить за одним корнем. Когда точка $(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$ пробегает единичную сферу Ω, точка $(1,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$ описывает некоторую компоненту поверхности $P(1,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=0$.

Каждая компонента может быть двух типов: 1) при переходе от $(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$ к $(-\omega_1,\ \ldots,\ -\omega_n)$ соответствующий корень v_j переходит в некоторый другой корень v_k; 2) при таком переходе v_j переходит в себя. Компоненты 1-го типа назовем «овалами», компоненты 2-го типа — «непарными кусками». Можно доказать, что если уравнение — четного порядка, то поверхность $P(1,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=0$ состоит из $\frac{m}{2}$ овалов, а если m нечетно, то имеется $\frac{m-1}{2}$

овалов и один непарный кусок. Мы ограничимся разбором первого случая (черт. 5); второй разбирается аналогично.

Таким образом, нужно учесть, что когда точка $(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$ пробегает Ω, точка $(1,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$ пробегает овал, отвечающий двум различным корням v_j и v_k. Поэтому, когда мы



Черт. 5.

сложим интегралы по Ω, отвечающие разным слагаемым в формуле (21), мы получим удвоенный интеграл по поверхности $H(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=0$. Если обозначить через $d\sigma$ элемент поверхности $H(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=0$, заключенный в телесном угле, опирающемся на $d\Omega$, и через φ — угол между нормалями к площадкам $d\sigma$ и $d\Omega$, то, очевидно,

$$d\Omega=\frac{|\cos\varphi|\,d\sigma}{|\xi|^{n-1}}=\frac{\left|\sum \xi_i H_{\xi_i}\right|d\sigma}{|\xi|^n\,|\operatorname{grad} H|}.$$

Коэффициент c_j равен

$$c_j=\frac{1}{(v_j-v_1)\ldots(v_j-v_{j-1})(v_j-v_{j+1})\ldots(v_j-v_m)}=\frac{1}{\left.\frac{\partial P}{\partial v}\right|_{v=v_j}}.$$

В силу однородности многочлена $P(v,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$

$$v_j\left.\frac{\partial P}{\partial v}\right|_{v=v_j}+\sum \omega_k\frac{\partial P}{\partial\omega_k}=mP\quad(v_j,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)=0$$

(так как v_j — корень уравнения $P(v,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)=0$);

поэтому

$$c_j = \frac{1}{\left.\frac{\partial P}{\partial v}\right|_{v=v_j}} = -\frac{v_j}{\sum \omega_k \left.\frac{\partial P}{\partial \omega_k}\right|_{v=v_j}}.$$

Заменяя ω_k на $v_j\xi_k$ и $P(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ на $H(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, получаем:

$$c_j = -\frac{v_j^{1-m}}{\sum_{k=1}^{m} \xi_k H_{\xi_k}} = -\frac{(\operatorname{sgn} v_j)^{m-1} |\xi|^{m-1}}{\sum \xi_k H_{\xi_k}}.$$

Далее,

$$|\sum x_k\omega_k + v_j t|^{\lambda+m-1}[\operatorname{sgn}(\sum x_k\omega_k + v_j t)]^{m-1} =$$
$$= |v_j|^{\lambda+m-1}(\operatorname{sgn} v_j)^{m-1} |\sum x_k\xi_k + t|^{\lambda+m-1}[\operatorname{sgn}(\sum x_k\xi_k + t)]^{m-1},$$

и для любого j имеем:

$$(\sum x_k\omega_k + t v_j)^{m-2k-1} = v_j^{m-2k-1}(\sum x_k\xi_k + t)^{m-2k-1} =$$
$$= \left(\frac{\sum \xi_k x_k + t}{|\xi|}\right)^{m-2k-1} (\operatorname{sgn} v_j)^{m-1}.$$

Подставляя значения c_j, $d\Omega$ и функции от $\sum x_k\omega_k + v_j t$ в формулу (22), мы получаем:

$$u(t, x_1, \ldots, x_n; \lambda) = -\frac{2}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \times$$
$$\times \int\limits_{H=0} \left\{ \frac{|\xi|^{-\lambda-n} |\sum x_k\xi_k + t|^{\lambda+m-1} \operatorname{sgn}(\sum x_k\xi_k + t)^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)} + \right.$$
$$\left. + Q\left(\frac{\sum x_k\xi_k + t}{|\xi|}\right)\right\} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sgn}(\sum \xi_k H_{\xi_k})}. \qquad (23)$$

Предельный переход при $\lambda \to -n$ дает нам формулы Герглотца — Петровского для фундаментального решения задачи Коши. При этом, если n нечетно, полученная формула

имеет вид

$$u(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!} \times$$
$$\times \int\limits_{H=0} \left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{m-n-1} \left[\operatorname{sgn}\left(\sum x_k\xi_k + t\right)\right]^{m-1} \omega, \qquad (24)$$

где через ω обозначено выражение $\dfrac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k H_{\xi_k}\right)}$.

Формы подобной структуры будут подвергнуты детальному изучению в гл. III.

Многочлен $Q\left(\frac{\sum \xi_k x_k + t}{|\xi|}\right)$ здесь при предельном переходе отброшен, так как интеграл от него равен нулю. При четном n получается формула

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{2(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n (m-n-1)!} \times$$
$$\times \int\limits_{H=0} \left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{m-n-1} \ln\left|\frac{\sum x_k\xi_k + t}{\sum x_k\xi_k}\right| \omega. \qquad (25)$$

Когда порядок уравнения m меньше $n-1$, формулы для фундаментального решения задачи Коши приобретают вид: при нечетном n

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{H=0} \delta^{(n-m)}\left(\sum x_k\xi_k + t\right)\omega \qquad (26)$$

и при четном n

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-m)!}{(2\pi)^n} \int\limits_{H=0} \frac{\omega}{\left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{n-m+1}}. \qquad (27)$$

Используя аффинно-инвариантную запись разложения дельта-функции на плоские волны (§ 3, п. 11, формулы (4) и (5)), и выбирая в качестве области интегрирования поверхность $H = 0$, можно было бы получить формулы (24)—(27) более прямым путем, не обращаясь к интегрированию по единичной сфере.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Мы указывали в § 1, что обобщенные функции можно задавать локально, т. е. на основных функциях, отличных от нуля только в заданных произвольно малых окрестностях каждой точки.

В этом добавлении мы получим этот результат вместе с другими, касающимися локальных свойств обобщенных функций; такие результаты имеют многочисленные применения в теории.

Вначале мы вернемся к изучению пространства K основных функций. Мы покажем, что в числе основных функций имеются такие, которые в заданных непересекающихся ограниченных замкнутых множествах принимают заданные постоянные значения. Наличие таких основных функций позволит наиболее простым образом подойти к изучению локальных свойств обобщенных функций.

1. Построение основных функций путем усреднения непрерывных. Покажем, что *для заданной* (не обязательно финитной) *непрерывной функции* $f(x)$ *можно построить бесконечно дифференцируемые функции* $f_\delta(x)$ *так, что при* $\delta \to 0$

$$f_\delta(x) \to f(x)$$

равномерно в любой ограниченной области.

В качестве $f_\delta(x)$ возьмем усреднение функции $f(x)$ вида

$$f_\delta(x) = C_\delta \int\limits_{|x-\xi| \leqslant \delta} f(\xi)\, \varphi(x-\xi, \delta)\, d\xi, \tag{1}$$

где $\varphi(x, \delta)$ — функция, с которой мы встретились в п. 2 § 1:

$$\varphi(x, \delta) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - |x|^2}} & \text{при } |x| < \delta, \\ 0 & \text{при } |x| > \delta; \end{cases} \quad \frac{1}{C_\delta} = \int\limits_{|x| \leqslant \delta} \varphi(x, \delta)\, dx.$$

Из выражения (1) видно, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема вместе с функцией $\varphi(x, \delta)$. Далее, мы имеем:

$$f(x) - f_\delta(x) = C_\delta \int\limits_{|x-\xi| < \delta} f(x)\, \varphi(x-\xi, \delta)\, d\xi - C_\delta \int\limits_{|x-\xi| < \delta} f(\xi)\, \varphi(x-\xi, \delta)\, d\xi = C_\delta \int\limits_{|x-\xi| < \delta} [f(x) - f(\xi)]\, \varphi(x-\xi, \delta)\, d\xi.$$

Так как $f(x)$ — непрерывная функция x, то в любой фиксированной ограниченной области для достаточно малого δ величина $|f(x) - f(\xi)|$ при $|x-\xi| < \delta$ становится меньше заданного ε. Поэтому, выбирая δ указанным образом, мы получаем:

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leqslant \varepsilon \cdot C_\delta \int\limits_{|x-\xi| < \delta} \varphi(x-\xi, \delta)\, d\xi = \varepsilon,$$

что и утверждается.

В частности, *если функция* $f(x)$ *финитна, то и* $f_\delta(x)$ *финитна*: $f_\delta(x) = 0$ *вне* δ-*окрестности носителя функции* $f(x)$.

Если функция $f(x)$ постоянна в шаре радиуса δ с центром в точке x_0:

$$f(x) \equiv f(x_0) \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leqslant \delta,$$

то

$$f_\delta(x_0) = f(x_0)\, C_\delta \int\limits_R \varphi(x-\xi, \delta)\, d\xi = f(x_0).$$

Следовательно, *если функция* $f(x)$ *постоянна в области* G, *то* $f_\delta(x)$ *постоянна* (и равна $f(x)$) *в области* G_δ, состоящей из тех точек $x \in G$, которые содержатся в G вместе с шаром радиуса δ.

Отметим еще, что если значения функции $f(x)$ всюду заключены между 1 и 0, то этим же свойством обладает и функция $f_\delta(x)$.

Покажем теперь, что *если F — ограниченное замкнутое множество и U — содержащая его открытая область, то существует основная функция $\varphi(x)$, равная* 1 *на F,* 0 *вне U и заключенная между* 1 *и* 0 *в остальных точках.*

Действительно, так как F ограничено, то оно содержится в U вместе со своей ε-окрестностью при некотором $\varepsilon > 0$. Обозначим через F_1 замыкание $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестности множества F, через U_1 открытую $\frac{2\varepsilon}{3}$-окрестность множества F и через W ее замкнутое дополнение до всего пространства R_n. Непрерывная функция точки x

$$\rho(x, W) = \min_{y \in W} \rho(x, y)$$

положительна в области U_1 и на множестве F_1 обладает положительным минимумом μ. Функция

$$f(x) = \min\left\{\frac{1}{\mu}\rho(x, W),\ 1\right\}$$

также непрерывна, равна нулю вне области U_1 и единице на множестве F_1, а в остальных точках заключена между 0 и 1. В качестве искомой основной функции $\varphi(x)$ достаточно взять $f_\delta(x)$ с $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

2. Разложение единицы. Пусть имеется некоторое счетное покрытие n-мерного пространства R_n открытыми ограниченными областями $U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots$, локально конечное в том смысле, что каждая точка покрывается лишь конечным числом множеств из совокупности $U_1, U_2, \ldots$ $\ldots, U_m, \ldots$; требуется построить бесконечно дифференцируемые функции $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_m(x), \ldots$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) $0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1$;

б) $e_k(x) = 0$ вне области U_k $(k = 1, 2, \ldots)$;

в) $e_1(x) + e_2(x) + \ldots + e_m(x) + \ldots \equiv 1$.

Слева при каждом x, в силу б), отлично от нуля лишь конечное число слагаемых. Совокупность функций $\{e_i(x)\}$ называется *разложением единицы*, точнее, разложением единицы, соответствующим покрытию $\{U_i\}$.

Конструкцию разложения единицы можно осуществить следующим образом. Прежде всего можно указать открытые области $V_1, V_2, \ldots, V_m, \ldots$, также образующие покрытие всего пространства R_n и такие, что область V_k содержится в области U_k вместе со своим замыканием $\overline{V}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Действительно, пусть области $V_1, \ldots, V_{k-1}$ уже построены так, что $\overline{V}_j \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, k-1)$ и $V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots$ есть локально конечное покрытие пространства R_n. Дополнение к области $V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup \ldots$ есть замкнутое множество F_k, которое целиком покрывается областью U_k. В качестве V_k можно взять любую из открытых областей, содержащих F_k и содержащихся в U_k вместе со своим замыканием, и т. д.

Так как множество $\overline{V}_k$ ограничено, то, в силу последнего результата п. 1, существует бесконечно дифференцируемая функция $h_k(x)$, всюду заключенная между 0 и 1, равная 1 в V_k и 0 вне U_k. Положим

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x);$$

эта функция существует при всех x и заведомо не меньше 1.

Теперь остается положить

$$e_k(x) = \frac{h_k(x)}{h(x)} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

очевидно, что функции $e_k(x)$ удовлетворяют поставленным требованиям.

Замечание. Пусть $\{e_i(x)\}$ — разложение единицы, соответствующее (локально конечному) покрытию $\{U_i\}$ пространства R_n. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ мы имеем:

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_i(x), \tag{1}$$

где

$$\varphi_i(x) = \varphi(x)\, e_i(x)$$

— основная функция, равная нулю вне области U_i. При этом число слагаемых справа в (1) будет конечным, если дополнительно предположить, что каждый шар $|x| \leqslant n$ пересекается лишь с конечным числом областей U_i. Отметим еще, что если функции $\varphi_\nu(x)$ стремятся к нулю при $\nu \to \infty$ в пространстве K, то и каждая последовательность $\varphi_{\nu i}(x) = \varphi_\nu(x)\, e_i(x)$ стремится к нулю при $\nu \to \infty$ в пространстве K.

Это замечание использовалось в предыдущих параграфах и неоднократно будет нам полезно и в дальнейшем.

3. Локальные свойства обобщенных функций. В п. 4 § 1 мы ввели такое определение: обобщенная функция f равна нулю в окрестности данной точки, если для всякой основной функции φ, отличной от нуля только в пределах этой окрестности, имеет место равенство $(f, \varphi) = 0$.

Далее, мы говорили, что обобщенная функция f равна нулю в открытой области G, если она равна нулю в некоторой окрестности каждой точки области G. Это — типичное *локальное* определение.

Можно дать и иное, *нелокальное* определение равенства нулю обобщенной функции f в области G: обобщенная функция f *равна нулю в области* G, если для любой основной функции φ, отличной от нуля только на множестве Q, содержащемся в G вместе со своим замыканием, имеет место равенство $(f, \varphi) = 0$.

Наметим доказательство эквивалентности этих определений. Достаточно проверить, что равенство нулю в смысле нелокального определения вытекает из равенства нулю в смысле локального определения (обратное очевидно). Допустим, что обобщенная функция f равна нулю в области G в смысле локального определения, и пусть $\varphi(x)$ — основная функция, отличная от нуля только на множестве Q, замыкание которого $\overline{Q}$ содержится в G. У каждой точки $x \in \overline{Q}$ можно найти, по условию, окрестность U, в которой функционал f равен нулю. Без ограничения общности можно считать ее ограниченной. Совокупность этих окрестностей образует покрытие множества $\overline{Q}$, из которого, пользуясь леммой Гейне — Бореля, мы можем выбрать счетное покрытие $U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots$, обладающее тем свойством, что каждый шар $|x| \leqslant n$ пересекает лишь конечное число окрестностей U_i. Согласно замечанию в конце п. 2 функцию $\varphi(x)$

можно представить в виде (конечной) суммы основных функций

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x) + \ldots,$$

где $\varphi_k(x)$ обращается в нуль вне U_k. Тогда, по условию, $(f, \varphi_k) = 0$, откуда и $(f, \varphi) = \sum (f, \varphi_k) = 0$, что и требуется.

Приведем очевидное, но весьма важное следствие этого предложения: *обобщенная функция f, равная нулю в окрестности каждой точки, есть нулевая функция, т. е. для любой основной функции* φ

$$(f, \varphi) = 0.$$

Отметим еще одно следствие: *если основная функция $\varphi(x)$ равна нулю в некоторой окрестности U носителя F обобщенной функции f*, то $(f, \varphi) = 0$. Действительно, согласно локальному определению, $f = 0$ вне F, и остается сослаться на нелокальное определение.

Мы говорили, далее, что две обобщенные функции f и g совпадают в окрестности точки x_0, если их разность $f - g$ в окрестности этой точки равна нулю. Доказанное выше предложение показывает, что *обобщенные функции, совпадающие в окрестности каждой точки, равны друг другу*. Таким образом, каждая обобщенная функция определена однозначно своими локальными значениями.

Можно использовать это свойство для построения обобщенной функции в целом, когда она задана локально. А именно, предположим, что у каждой точки x_0 имеется окрестность $U(x_0)$, такая, что для всех основных функций $\varphi(x)$, обращающихся в нуль вне этой окрестности, заданы числа (f, φ), линейно и непрерывно зависящие от φ. Предположим, кроме того, что число (f, φ) при этом зависит только от самой функции φ и не зависит от выбора точки x_0, вне окрестности $U(x_0)$ которой $\varphi(x)$ равна нулю. Тогда можно утверждать, что *существует функционал на пространстве K, совпадающий с функционалом f на тех $\varphi(x)$, на которых функционал f определен*.

Для доказательства поступим следующим образом.

Окрестности $U(x_0)$ указанного вида, по условию, существуют у каждой точки и образуют, следовательно, покрытие пространства R. Без ограничения общности можно считать эти окрестности ограниченными. Как и выше, пользуясь леммой Гейне — Бореля, из этого покрытия можно выбрать счетное покрытие $U_1, \ldots, U_m, \ldots$, обладающее тем свойством, что каждый шар $|x| \leqslant n$ пересекает лишь конечное число окрестностей U_i. Согласно замечанию в п. 2 всякая основная функция $\varphi(x)$ представима в виде

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \varphi_i(x), \tag{1}$$

где $\varphi_i(x)$ — основная функция, равная нулю вне U_i, причем сумма на самом деле всегда конечна. Для всех слагаемых определены значения функционала f. Положим, по определению,

$$(f, \varphi) = \sum_1^\infty (f, \varphi_i). \tag{2}$$

Мы получили, очевидно, линейный функционал на пространстве основных функций. Он является и непрерывным функционалом. Действительно, если последовательность основных функций φ стремится к нулю в пространстве K, то, как отмечено в п. 2, $\varphi_m(x) \to 0$ в K при каждом фиксированном m. При этом сумма справа в (1) содержит фиксированное число слагаемых, поскольку носители функций φ заключены в фиксированном шаре. Поэтому и $(f, \varphi) \to 0$.

Очевидно, что на основных функциях φ, равных нулю вне окрестности U_m, значения построенного функционала совпадают со значениями исходного, так как в этом случае все φ_i справа в (1) равны нулю вне U_m.

Отсюда следует, что определение функционала f не зависит от выбора покрытия $\{U_i\}$ с указанными выше свойствами: если $\{V_i\}$ — другое покрытие с этими свойствами и g — получаемый с его помощью функционал, то $f = g$ локально, а потому и в целом.

4. Дифференцирование как локальная операция. Мы говорили, что обобщенная функция f равна нулю в окрестности точки x_0, если она обращается в нуль на всякой основной функции, отличной от нуля только в пределах этой окрестности. Покажем, что *в этом случае и все производные обобщенной функции f равны нулю в этой окрестности*. В самом деле, если основная функция φ отлична от нуля только в пределах окрестности $U(x_0)$, то и все ее производные отличны от нуля только в пределах этой окрестности; поэтому для любой такой функции

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = 0,$$

что и утверждается.

Отсюда следует, что *функционалы, совпадающие в области G, имеют в этой области и совпадающие производные любого порядка.*

Пусть, например, функционал f в области G совпадает с регулярным функционалом, соответствующим дифференцируемой функции $f(x)$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ совпадает в области G с регулярным функционалом, порожденным функцией $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$. Таким образом, даже для сингулярных обобщенных функций *там, где можно дифференцировать обычным образом, мы получаем и обычные производные.*

Другим выводом из сказанного является следующий факт: *если функционал f сосредоточен на множестве F, то его производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ и т. д. также сосредоточены на множестве F.*

Например, производные дельта-функции $\delta(x - x_0)$ сосредоточены в точке x_0 (что, впрочем, и непосредственно очевидно); любая производная от непрерывной функции, обращающейся в нуль вне замкнутого множества F, сосредоточена на этом множестве F.

Замечательно, что эти предложения допускают обращения:

1°. *Всякая обобщенная функция, сосредоточенная в одной точке x_0, может быть представлена как (конечная) линейная комбинация функции $\delta(x - x_0)$ и ее производных.*

2°. *Всякая обобщенная функция, сосредоточенная на ограниченном замкнутом множестве F, может быть представлена при любом $\varepsilon > 0$ как (конечная) линейная комбинация производных от непрерывных функций, обращающихся в нуль вне ε-окрестности множества F.*

Доказательства утверждений 1°—2° будут даны во втором выпуске (гл. II, § 4).

ДОБАВЛЕНИЕ 2

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В этом добавлении будут рассмотрены свойства обобщенных функций, зависящих от параметра, в частности свойства обобщенных функций, аналитически зависящих от параметра. Эти свойства во многом аналогичны свойствам обычных аналитических функций и доказываются по большей части путем сведéния к обычным функциям. Существенной является теорема о полноте пространства обобщенных функций: если дана последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, такая, что каждая числовая последовательность (f_ν, φ) имеет предел, то величина $\lim\limits_{\nu\to\infty}(f_\nu, \varphi)=(f, \varphi)$ определяет обобщенную функцию. Доказательство этой теоремы дается в Добавлении, помещенном в конце этого выпуска.

1. Непрерывные функции. Пусть каждому значению вещественного или комплексного параметра λ, пробегающего некоторую область Λ, поставлена в соответствие обобщенная функция f_λ. В соответствии с определением, данным в п. 8 § 1, обобщенная функция f называется *пределом* f_λ *при* $\lambda\to\lambda_0$, если числовая функция (f_λ, φ) стремится к (f, φ) *при любом* φ. Функция f_λ называется *непрерывной по* λ *в области* Λ, если при любом $\lambda_0\in\Lambda$ имеет место соотношение $f_{\lambda_0}=\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda$.

Рассмотрим весьма важный вопрос о *доопределении обобщенной функции* f_λ *по непрерывности по параметру* λ. Представим себе, что обобщенная функция f_λ определена и непрерывна на множестве Λ, имеющем предельную точку λ_0, в которой обобщенная функция f_λ заранее не задана. Спрашивается, возможно ли доопределить обобщенную функцию f_λ в точке λ_0 так, чтобы получилась обобщенная функция, непрерывная на множестве $\Lambda+\lambda_0$.

Очевидно, что необходимым условием для возможности такого доопределения является возможность доопределения по непрерывности всех числовых функций (f_λ, φ) в точке λ_0. *Это условие является и достаточным*; действительно, если для любой основной функции φ и любой последовательности $\lambda_\nu\to\lambda_0$, $\lambda_\nu\in\Lambda$, существует предел последовательности чисел $(f_{\lambda_\nu}, \varphi)$, то, согласно теореме о полноте пространства обобщенных функций, существует обобщенная функция $f=f_{\lambda_0}$, которая является пределом последовательности f_{λ_ν}. Обычным путем доказывается, что эта обобщенная функция не зависит от выбора последовательности $\lambda_\nu\to\lambda_0$.

Заметим, далее, что производные (по x) обобщенной функции f_λ, непрерывно зависящей от параметра λ, также непрерывно зависят от параметра λ. Действительно, как мы видели в п. 4 § 2, из $f_{\lambda_\nu}\to f_{\lambda_0}$ следует

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_{\lambda_\nu}\to\frac{\partial}{\partial x_j} f_{\lambda_0}.$$

Непрерывные по параметру обобщенные функции f_λ можно интегрировать по этому параметру (ср. § 3, п. 10). Пусть, например, функционал f_λ непрерывен по λ на спрямляемой кривой Γ. Составим интегральную сумму

$$s_n=\sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j'}\Delta\lambda_j,$$

взяв разбиение кривой Γ на n частей точками деления $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и выбрав произвольно точки λ_j' на интервалах $[\lambda_{j-1}, \lambda_j]$. При $\max|\Delta\lambda_j|\to 0$ для любой основной функции φ, в силу непрерывности выражения (f_λ, φ), существует предел выражений

$$(s_n, \varphi)=\sum_{j=1}^{n}\left(f_{\lambda_j'}, \varphi\right)\Delta\lambda_j,$$

не зависящий от способа разбиения Γ и выбора промежуточных точек λ_j', равный интегралу от функции (f_λ, φ). Этот предел определяет линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций; он называется *интегралом от обобщенной функции* f_λ *по кривой* Γ.

Разумеется, интегрировать можно не только по кривой, но и по области любого числа измерений.

2. Дифференцируемые функции. В п. 1 § 3 было введено определение: обобщенная функция g называется *производной от обобщенной функции* f_λ *по параметру* λ при $\lambda=\lambda_0$, если

$$g = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}.$$

Для существования производной $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ *при* $\lambda = \lambda_0$ *необходимо и достаточно, чтобы все числовые функции* (f_λ, φ) *были дифференцируемы по* λ *при* $\lambda = \lambda_0$. Необходимость этого условия очевидна; проверим его достаточность. По условию, для каждой φ и любой последовательности $\lambda_\nu \to \lambda_0$ существует предел отношения

$$\frac{(f_\lambda, \varphi) - (f_{\lambda_0}, \varphi)}{\lambda - \lambda_0} = \left(\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}, \varphi\right).$$

Но тогда, как было указано выше, обобщенная функция $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$, определенная при $\lambda \neq \lambda_0$, может быть доопределена по непрерывности и при $\lambda = \lambda_0$; иными словами, существует обобщенная функция, являющаяся пределом отношения $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ при $\lambda \to \lambda_0$, что и утверждается.

Если f_λ имеет производную по λ при любом $\lambda \in \Lambda$, то функция f_λ называется *дифференцируемой по* λ *в области* Λ.

Аналогично определяются высшие производные по параметру и многократная дифференцируемость функций.

Легко проверить, что если функция f_λ дифференцируема по λ в области Λ, то и все производные f_λ по x дифференцируемы по λ и имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda. \tag{1}$$

Действительно, для любой основной функции φ числовая функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda, \varphi\right) = \left(f_\lambda, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$$

дифференцируема по λ и имеет производную

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(f_\lambda, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda, \varphi\right).$$

Это означает, что функционал $\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda$ имеет производную по λ и справедлива формула (1), что и утверждается.

3. Аналитические функции. Если λ — комплексный параметр, пробегающий открытую область Λ, то дифференцируемая в области Λ обобщенная функция f_λ называется *аналитической функцией от* λ. В этом случае все числовые функции (f_λ, φ) являются обычными аналитическими функциями от λ в области Λ. И обратно, *если для обобщенной функции* f_λ *все числовые функции* (f_λ, φ) *являются аналитическими функциями от* λ *в области* Λ, *то и* f_λ *есть аналитическая функция от* λ (ср. § 3, п. 1). *В этом случае в каждой точке* λ *области* Λ *существуют все производные* $\frac{\partial f}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}, \ldots$, и в окрестности точки $\lambda_0 \in \Lambda$ *имеет место разложение в ряд Тейлора*

$$f_\lambda = f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2} + \ldots \tag{2}$$

Действительно, обобщенная функция $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}$ существует, так как по условию при $\lambda = \lambda_0$ существуют производные по λ у всех числовых функций (f_λ, φ); по такой же причине существуют и все высшие производные $\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2}, \ldots$ Далее, для каждой основной функции $\varphi(x)$ справедливо разложение Тейлора обычной аналитической функции (f_λ, φ):

$$\begin{aligned}(f_\lambda, \varphi) &= (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial}{\partial \lambda} (f_\lambda, \varphi)\Big|_{\lambda=\lambda_0} + \\ &\qquad + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (f_\lambda, \varphi)\Big|_{\lambda=\lambda_0} + \ldots = \\ &= (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0)\left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}, \varphi\right) + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \left(\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2}, \varphi\right) + \ldots = \\ &= \left(f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2} + \ldots, \varphi\right),\end{aligned}$$

откуда следует справедливость разложения (2).

Две аналитические функции f_λ и g_λ, определенные в области Λ и совпадающие на множестве значений λ, имеющем предельную точку внутри Λ, совпадают при всех значениях $\lambda \in \Lambda$. Действительно, для любой основной функции $\varphi(x)$ выражения (f_λ, φ) и (g_λ, φ) совпадают в области Λ в силу классической теоремы единственности для аналитических функций.

На этом свойстве основан важный метод аналитического продолжения функционала f_λ по параметру λ. Допустим, что функционал f_λ аналитичен в области Λ. Предположим, далее, что все числовые функции (f_λ, φ) допускают аналитическое продолжение в более широкую область Λ_1. Тогда мы можем утверждать, что числа (f_{λ_1}, φ) при любом $\lambda_1 \subset \Lambda_1$ также задают линейный непрерывный функционал на пространстве K. Действительно, аналитическое продолжение в любую точку области Λ_1, как известно, всегда может быть осуществлено при помощи конечного числа переразложений в ряд Тейлора. Но каждый ряд Тейлора

$$(f_\lambda, \varphi) = (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0)\left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}, \varphi\right) + \\ + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2\left(\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2}, \varphi\right) + \ldots,$$

поскольку он сходится при любой основной функции φ и поскольку радиус его круга сходимости определяется конфигурацией областей Λ и Λ_1 и не зависит от φ, имеет своей суммой в круге сходимости снова линейный непрерывный функционал, что нам и требуется.

Очевидно, что производные (по x) аналитической обобщенной функции f_λ суть также аналитические обобщенные функции от λ. Отметим, далее, что аналитическое продолжение сохраняет многие свойства функционала f_λ. Например, если функционал f_λ в области Λ инвариантен относительно операции u, так что $f_\lambda(ux) = f_\lambda(x)$, то и его аналитическое продолжение в область Λ_1 инвариантно относительно этой операции. Действительно, равенство

$$(f_\lambda(ux),\ \varphi(x)) = (f_\lambda(x),\ \varphi(x)) = (f_\lambda(x),\ \varphi(u^{-1}x)),$$

справедливое в области Λ, в силу единственности аналитического продолжения, остается справедливым и в области Λ_1.

Так, например, сферически симметричные аналитические функционалы имеют и сферически симметричные аналитические продолжения.

Заметим в заключение, что аналитическое продолжение обобщенной функции, зависящей от параметра, так же, как и аналитическое продолжение обычной аналитической функции, может привести к функции с изолированными особенностями (полюсами или существенно особыми точками), а также к многозначным функциям.

В окрестности изолированной особой точки λ_0 аналитическая обобщенная функция f_λ допускает разложение в ряд Лорана в классической форме

$$f_\lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

где c_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — фиксированные (не зависящие от λ) функционалы. Действительно, разложение в ряд Лорана имеет место для каждой основной функции φ:

$$(f_\lambda, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\varphi)(\lambda - \lambda_0)^n,$$

причем коэффициенты $c_n(\varphi)$ выражаются по формулам Коши

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(f_\lambda, \varphi)\, d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{3}$$

где Γ — контур в области аналитичности функции f_λ, заключающий внутри себя точку λ_0. Интеграл (3) может быть представлен в форме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{f_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}},\ \varphi\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (g_\lambda, \varphi)\, d\lambda, \quad g_\lambda = \frac{f_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}$$

и, по доказанному, снова является линейным непрерывным функционалом от φ. Мы можем положить поэтому $c_n(\varphi) = (c_n, \varphi)$, где c_n — линейный непрерывный функционал. Итак, $f_\lambda = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n (\lambda - \lambda_0)^n$, что и утверждалось.

ГЛАВА II

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Преобразования Фурье функций из пространства K. Начиная с этого момента, будем рассматривать пространство K комплексных основных функций (гл. I, § 1, п. 9) и соответствующее комплексное пространство K' обобщенных функций.

Рассмотрим вначале случай одного переменного.

Пусть $\varphi(x)$ — некоторая основная функция. Построим ее преобразование Фурье:

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{i\sigma x}\,dx. \tag{1}$$

Функцию $\psi(\sigma)$ будем обозначать также символами $\widetilde{\varphi(x)}$ и $F[\varphi(x)]$.

В действительности, поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция, интеграл (1) распространен на конечную область, например $-a\leqslant x\leqslant a$; поэтому функция $\psi(\sigma)$ может быть определена и для комплексных значений $s=\sigma+i\tau$:

$$\psi(\sigma+i\tau)=\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,e^{isx}\,dx=\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,e^{i\sigma x}\,e^{-\tau x}\,dx. \tag{2}$$

Так как интеграл (2) допускает дифференцирование по комплексному параметру $s=\sigma+i\tau$, то $\psi(\sigma+i\tau)$ — целая аналитическая функция. Дифференцирование функции $\varphi(x)$ приводит к умножению $\psi(s)$ на $-is$: действительно,

$$\int_{-a}^{a}\varphi'(x)\,e^{ixs}\,dx=\varphi(x)\,e^{ixs}\Big|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}is\,\varphi(x)\,e^{ixs}\,dx=-is\,\psi(s).$$

Продолжая дифференцирование, получим, далее, для любого $q=0,\ 1,\ 2,\ \dots$

$$F[\varphi^{(q)}(x)]=(-is)^q\,F[\varphi(x)] \tag{3}$$

и вообще

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]=P(-is)\,F[\varphi(x)], \tag{4}$$

где $P(t)$ — любой многочлен с постоянными коэффициентами. Вместе с тем мы получаем оценку

$$|s|^q\,|\psi(s)|=\left|\int_{-a}^{a}\varphi^{(q)}(x)\,e^{ixs}\,dx\right|\leqslant C_q\,e^{a|\tau|}.$$

Таким образом, *преобразование Фурье $\psi(s)$ каждой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x|\geqslant a$, есть целая аналитическая функция переменного $s=\sigma+i\tau$, удовлетворяющая при каждом $q=0,\ 1,\ 2,\ \dots$ неравенству*

$$|s^q\,\psi(s)|\leqslant C_q\,e^{a|\tau|}. \tag{5}$$

Мы утверждаем, что верно и обратное: *всякая целая функция $\psi(s)$, удовлетворяющая при каждом q неравенству* (5), *есть преобразование Фурье некоторой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x|\geqslant a$.*

Функцию $\varphi(x)$ мы, естественно, определим формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{-i\sigma x}\,d\sigma.$$

Используя формулу Коши, можно заменить интегрирование по вещественной оси интегрированием по параллельной прямой:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau)\,e^{-i(\sigma+i\tau)x}\,d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,e^{\tau x}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau)\,e^{-i\sigma x}\,d\sigma,$$

причем интеграл, в силу неравенства (5), продолжает оставаться абсолютно сходящимся. Он продолжает оставаться абсолютно сходящимся также при формальном дифференцировании подынтегрального выражения по x; поэтому функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема и

$$\varphi^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-is)^q \psi(s) e^{-isx} d\sigma.$$

Пусть $|x| > a$; зададим некоторое число $t > 0$ и найдем τ из условия $x\tau = -t|x|$. Используя неравенство (5) при $q = 0$ и $q = 2$, находим:

$$|\psi(s)| \leqslant e^{a|\tau|} \min\left\{C_0, \frac{C_2}{|s|^2}\right\} \leqslant C \frac{e^{a|\tau|}}{1+|s|^2} \leqslant C \frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2};$$

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} e^{\tau x} \int_{-\infty}^{\infty} C \frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2} d\sigma = C' e^{-t|x|+at} = C' e^{t(a-|x|)}.$$

Так как C' не зависит от t, то, устремляя t к ∞, находим, что $\varphi(x) = 0$. Таким образом, при $|x| > a$ функция $\varphi(x)$ обращается в нуль. Итак, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем высказанным условиям. В силу известной теоремы об интеграле Фурье *) ее преобразование Фурье совпадает с функцией $\psi(\sigma)$, что и требовалось.

Отметим еще одну полезную формулу: для любой основной функции $\varphi(x)$

$$FF[\varphi(x)] = 2\pi\varphi(-x). \tag{6}$$

Действительно, если $F[\varphi(x)] = \psi(\sigma)$, то мы имеем:

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma = \varphi(x),$$

откуда

$$\int \psi(\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma \equiv F[\psi(\sigma)] = 2\pi\varphi(-x),$$

что и утверждается.

2. Пространство Z. Изучение преобразований Фурье функций из пространства K, начатое в предыдущем пункте,

*) В. И. Смирнов, Курс, т. II, 1957, п. 160, стр. 467.

естественно приводит к следующему определению. Введем *пространство* Z всех целых функций $\psi(s)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|s|^q |\psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

(где постоянные a и C_q зависят от функции ψ), с очевидным определением основных линейных операций — сложения и умножения на число.

Как показано в п. 1, *преобразование Фурье устанавливает между пространствами K и Z взаимно однозначное соответствие*. Очевидно, что это соответствие сохраняет указанные линейные операции.

Отсюда следует, что каждой линейной операции, определенной в пространстве K, отвечает некоторая «двойственная» линейная операция, определенная в пространстве Z. Так, например, операции дифференцирования в пространстве K соответствует, в силу формулы (3) п. 1, операция умножения на $-is$ в пространстве Z. С другой стороны, формула

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{isx} \varphi(x)\, dx$$

показывает, что операции умножения на ix в пространстве K соответствует операция дифференцирования в пространстве Z; повторяя эту операцию, приходим к формуле, справедливой при любом $q = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\frac{d^q}{ds^q} F[\varphi] = F\left[(ix)^q \varphi(x)\right]. \tag{2}$$

Из существования правой части следует существование левой; поэтому в пространстве Z функции $\psi(s)$ можно неограниченно дифференцировать, не выходя за пределы этого пространства. Можно написать и несколько более общую формулу:

$$P\left(\frac{d}{ds}\right) F[\varphi] = F[P(ix)\varphi(x)], \tag{3}$$

где $P(t)$ — любой многочлен с постоянными коэффициентами.

Операции сдвига $\varphi(x) \to \varphi(x-h)$ в пространстве K отвечает операция умножения на e^{ish} в пространстве Z;

действительно,

$$F[\varphi(x-h)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\varphi(x-h)\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma(y+h)}\varphi(y)\,dy = e^{i\sigma h}F\,[\varphi(x)].$$

Обратно, операции умножения на e^{ixh} (при любом, может быть и комплексном, h) в пространстве K отвечает операция сдвига в пространстве Z:

$$F[e^{ixh}\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixh}e^{i\sigma x}\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(h+\sigma)}\varphi(x)\,dx = \psi(\sigma+h).$$

В частности, мы видим, что в пределах пространства Z функции $\psi(s)$ допускают всевозможные сдвиги.

Можно перенести в пространство Z и операцию предельного перехода, считая, что функции $\psi_\nu(s)$ стремятся к нулю, если их образы $\varphi_\nu(x)$ стремятся к нулю в смысле, установленном для пространства K. Впрочем, эту сходимость в Z можно описать и внутренним образом. Именно, последовательность $\psi_\nu(s)$ стремится к нулю в Z, если, во-первых, выполняются неравенства

$$|s^q\psi_\nu(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}$$

с постоянными C_q и a, не зависящими от ν, и если эти функции стремятся к нулю равномерно на каждом интервале оси σ.

Отметим, что разложение в ряд Тейлора

$$\sum_{q=0}^{\infty}\psi^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!} = \psi(s+h)$$

с любым фиксированным (комплексным) h имеет место в смысле указанной сходимости; это следует из справедливости двойственной формулы

$$\sum_{q=0}^{\infty}(ix)^q\frac{h^q}{q!}\varphi(x) = e^{ixh}\varphi(x)$$

в смысле сходимости в пространстве K.

3. Случай нескольких переменных. Наши построения могут быть почти без изменений перенесены на случай n независимых переменных. Преобразование Фурье основной функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определяется по формуле

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,e^{i(x_1\sigma_1+\ldots+x_n\sigma_n)}\,dx_1\ldots dx_n$$

или, короче,

$$\psi(\sigma) = \int_{R_n}\varphi(x)\,e^{i(x,\sigma)}\,dx, \tag{1}$$

где через (x, σ) обозначена величина $x_1\sigma_1+\ldots+x_n\sigma_n$. Вследствие финитности функции $\varphi(x)$ функция ψ может быть распространена и на комплексные значения аргумента $s = (s_1, \ldots, s_n) = (\sigma_1+i\tau_1, \ldots, \sigma_n+i\tau_n)$:

$$\psi(s) = \int_{R_n}\varphi(x)\,e^{i(x,s)}\,ds. \tag{2}$$

Полученная функция $\psi(s)$, определенная теперь в n-мерном комплексном пространстве C_n, непрерывна и аналитична по каждому из аргументов $s_1, \ldots, s_n$. Если функция $\varphi(x)$ обращается в нуль при $|x_k| > a_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), то ее преобразование Фурье $\psi(s)$ допускает оценку

$$|s_1^{q_1}\ldots s_n^{q_n}\psi(\sigma_1+i\tau_1, \ldots, \sigma_n+i\tau_n)| \leqslant C_q e^{a_1|\tau_1|+\ldots+a_n|\tau_n|}. \tag{3}$$

Обратно, всякая целая функция $\psi(s_1, \ldots, s_n)$, удовлетворяющая неравенству (3), является преобразованием Фурье основной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обращающейся в нуль при $|x_k| > a_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). (Доказательство проводится так же, как и для одного переменного.) Имеют место формулы, аналогичные формулам (4) п. 1 и (3) п. 2:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right)F[\varphi] = F[P(ix_1, \ldots, ix_n)\varphi(x)], \tag{4}$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x)\right] = P(-is_1, \ldots, -is_n)F[\varphi], \tag{5}$$

где P — любой многочлен с постоянными коэффициентами.

Пространство всех целых функций $\psi(s)$, удовлетворяющих неравенствам вида (3), в котором естественным образом определены линейные операции — сложение и умножение на число, по-прежнему, будем обозначать через Z. Преобразование Фурье устанавливает между пространствами K и Z взаимно однозначное соответствие с сохранением линейных операций. Предельный переход в пространстве Z определяется следующим образом: последовательность $\psi_\nu(s)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) называется *сходящейся к нулю*, если последовательность соответствующих основных функций $\varphi_\nu(x)$ стремится к нулю в пространстве K. Внутренним образом эта сходимость описывается так: выполняются неравенства

$$|s^q \psi_\nu(s)| \leqslant C_q e^{a_1|\tau_1| + \ldots + a_n|\tau_n|}$$

с постоянными C_q и a, не зависящими от ν, и функции $\psi_\nu(\sigma)$ стремятся равномерно к нулю на каждом ограниченном множестве вещественного пространства R_n.

4. Функционалы на пространстве Z. На пространстве Z, как и на пространстве K, можно строить линейные непрерывные функционалы — обобщенные функции. Рассмотрим снова случай одного независимого переменного. *Регулярными функционалами* мы и здесь будем называть функционалы, заданные выражениями вида

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(\sigma)\,\psi(\sigma)\,d\sigma. \tag{1}$$

Функционалы вида

$$(g, \psi) = \int_L g(s)\,\psi(s)\,ds, \tag{2}$$

где L — некоторая линия, будем называть *аналитическими функционалами*. Так, дельта-функция $(\delta(s - s_0), \psi) = \psi(s_0)$ (где s_0 — уже произвольное комплексное число) есть не регулярный, но аналитический функционал, поскольку, в силу формулы Коши,

$$\psi(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(s)\,ds}{s - s_0},$$

где L — любой контур, заключающий внутри себя точку s_0; таким образом, $\delta(s - s_0)$ является аналитическим функционалом, отвечающим функции $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{s - s_0}$.

Совокупность всех обобщенных функций на пространстве Z обозначается через Z'. С обобщенными функциями на пространстве Z можно производить операции, аналогичные операциям, введенным нами для обобщенных функций на пространстве K. Ясно, что определения линейных операций — сложения и умножения на число, а также предельного перехода не содержат ничего нового. Умножение на функцию $\overline{h}(s)$, формально определяемое равенством

$$(\overline{h}(s)\,g, \psi) = (g, h\psi), \tag{3}$$

теперь становится выполнимым уже для значительно более узкого круга функций $h(s)$. Действительно, для корректности этого определения нужно, чтобы произведение функции $h(s)$ на любую основную функцию $\psi(s)$ приводило снова к основной функции. Функции $h(s)$, обладающие этим свойством, мы будем называть *мультипликаторами в Z*. Функция $h(s)$ обладает этим свойством, если она сама является целой аналитической функцией и удовлетворяет неравенству вида $|h(s)| \leqslant Ce^{b|\tau|}(1 + |s|)^q$ при некоторых b, q и C.

Производная функционала $g \in Z'$ определяется формулой

$$\left(\frac{dg}{ds}, \psi\right) = -\left(g, \frac{d\psi}{ds}\right);$$

можно определить ее и как предел отношения $\frac{g(s+h) - g(s)}{h}$.

Так же как и в пространстве K', обобщенные функции $g \in Z'$ допускают неограниченное дифференцирование. Но, в отличие от первых, обобщенные функции $g \in Z'$ не только бесконечно дифференцируемы, но и аналитичны; это означает, что для каждой $g \in Z'$

$$\sum_{q=0}^{\infty} g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!} = g(s+h), \tag{4}$$

где ряд слева сходится в смысле сходимости в пространстве Z', а $g(s+h)$ — сдвиг функции $g(s)$ на число h, Действительно, для любой $\psi(s) \in Z$

$$\left(g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!},\ \psi(s)\right) = \left(g(s),\ \frac{(-1)^q h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)\right)$$

и ряд $\sum \frac{(-1)^q h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)$ сходится в смысле сходимости в Z, как мы уже отмечали, к функции $\psi(s-h)$; таким образом,

$$\left(\sum g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!},\ \psi(s)\right) = (g(s),\ \psi(s-h)) = (g(s+h),\ \psi(s)),$$

что и требовалось.

Отметим, в частности, разложение

$$\delta(s+h) = \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!}, \tag{5}$$

справедливое при любом (комплексном) h; при этом сдвинутая дельта-функция $\delta(s+h)$ определяется равенством

$$(\delta(s+h),\ \psi(s)) = (\delta(s),\ \psi(s-h)) = \psi(-h). \tag{6}$$

В случае нескольких независимых переменных пространство Z' строится аналогично. В нем, как и выше, определяются сложение, умножение на число, предельный переход и умножение на функцию $\bar{h}(s) = \bar{h}(s_1, \ldots, s_n)$. Функция $h(s)$ будет мультипликатором в Z, если она непрерывна, аналитична (т. е. аналитична по каждому s_i при фиксированных $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$), и если

$$|h(s)| \leqslant Ce^{b_1|\tau_1| + \ldots + b_n|\tau_n|}(1+|s_1|)^{q_1} \ldots (1+|s_n|)^{q_n}.$$

Аналогично предыдущему определяются частные производные функционала $g \in Z'$. Каждый функционал из Z' не только бесконечно дифференцируем, но и аналитичен, т. е. допускает разложение в ряд Тейлора, сходящийся в смысле сходимости в Z'.

5. Аналитические функционалы. В предыдущем пункте мы назвали функционал g на пространстве Z аналитическим, если он представлен в виде

$$(g,\ \psi) = \int_\Gamma g(s)\psi(s)\,ds,$$

где $g(s)$ — некоторая функция, а Γ — контур в комплексной плоскости (мы сначала рассматриваем случай одного независимого переменного).

Согласно общим правилам теории аналитических функций, в случае, когда $g(s)$ — аналитическая функция, контур Γ можно непрерывно деформировать без изменения величины $(g,\ \psi)$; при этом начало и конец контура должны оставаться закрепленными и контур не должен переходить через особые точки функции $g(s)$. Так, функционал единица

$$1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \psi(s)\,ds$$

может быть задан не только с помощью интегрирования вдоль вещественной оси, но и с помощью интегрирования вдоль любой линии, идущей из $-\infty$ и $+\infty$ в пределах некоторой полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant C$, например вдоль любой прямой, параллельной вещественной оси. Такие линии, т. е. линии, интегралы вдоль которых от любой основной функции ψ равны, мы назовем *эквивалентными*. Если же мы будем интегрировать 1 по какому-нибудь иному контуру Γ, то получим уже иной функционал. Например, если Γ — замкнутый контур или петля, идущая в пределах полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant C$ из $-\infty$ снова в $-\infty$ (или из $+\infty$ в $+\infty$), то получающийся функционал, очевидно, равен нулю. Такие контуры, т. е. контуры, вдоль которых интегралы от любой основной функции ψ равны нулю, будем называть *нулевыми* или *обобщенными замкнутыми*.

Рассмотрим функцию $g(s) = \frac{1}{s}$. Можно построить с ее помощью два различных аналитических функционала:

$$(g_+,\ \psi) = \int_{-\infty+ai}^{+\infty+ai} \frac{\psi(s)}{s}\,ds \qquad (a > 0),$$

$$(g_-,\ \psi) = \int_{-\infty-ai}^{+\infty-ai} \frac{\psi(s)}{s}\,ds \qquad (a > 0).$$

В обоих случаях интегрирование ведется вдоль прямой, параллельной вещественной оси и расположенной в первом случае в верхней полуплоскости, а во втором — в нижней. Оба эти функционала удовлетворяют уравнению

$$\bar{s}g = 1.$$

Разность между этими функционалами может быть приведена к виду

$$(g_+ - g_-, \psi) = \int_{|s|=1} \frac{\psi(s)}{s}\, ds$$

с интегрированием, например, вдоль единичной окружности по часовой стрелке. В силу формулы Коши

$$(g_+ - g_-, \psi) = -2\pi i\, \psi(0),$$

откуда

$$g_+ - g_- = -2\pi i\, \delta(s).$$

Функционал $g_0 = g_+ - g_-$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\bar{s}g_0 = 0.$$

Рассмотрим общую дробно-рациональную функцию

$$g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Различные корни многочлена $Q(s)$ обозначим через $s_1, \ldots, s_n$. Интегрирование по любой линии Γ, эквивалентной вещественной оси, приводит к функционалу

$$(\bar{g}, \psi) = \int_\Gamma g(s)\psi(s)\, ds,$$

зависящему, вообще, от контура Γ; всякий такой функционал удовлетворяет уравнению

$$Qg = P.$$

Интегрирование по любому нулевому контуру Γ_0 приводит к функционалу

$$(\bar{g}_0, \psi) = \int_{\Gamma_0} g(s)\psi(s)\, ds,$$

также зависящему от контура Γ_0. Все эти функционалы удовлетворяют уравнению

$$Qg_0 = 0.$$

Например, если Γ_0 — контур, обходящий в положительном направлении простой корень s_1 многочлена $Q(s)$, то

$$(\bar{g}_0, \psi) = \int_{\Gamma_0} g(s)\psi(s)\, ds = 2\pi i \text{ выч.}_{s=s_1}[g(s)\psi(s)] = C\psi(s_1),$$

так что $g_0 = C\delta(s - s_1)$. Если Γ_0 обходит k-кратный корень s_1 многочлена $Q(s)$, то

$$(g_0, \psi) = 2\pi i \text{ выч.}_{s=s_1}[g(s)\psi(s)] = \\ = \frac{2\pi i}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[(s-s_1)^k g(s)\psi(s)\right]_{s=s_1}.$$

Рассмотрим аналитические функционалы, связанные с функцией

$$g(s) = e^{s^n}.$$

В силу равенства

$$\left|e^{s^n}\right| = e^{\operatorname{Re} s^n} = e^{|s|^n \cos n\theta}, \quad \text{где} \quad \theta = \arg s$$

плоскость комплексного переменного s можно разделить на $2n$ равных секторов раствором в $\frac{\pi}{n}$ каждый, так что функция $\left|e^{s^n}\right|$ в этих секторах поочередно то экспоненциально возрастает, то экспоненциально убывает. Секторы первого типа назовем «отрогами», секторы второго типа — «долинами». Рассмотрим произвольный путь Γ_k, ведущий из ∞ в первой долине в ∞ какой-либо другой, например k-й, долине ($k = 2, \ldots, n$). Для этого пути можно образовать функционал

$$(F_k, \psi) = \int_{\Gamma_k} e^{s^n}\psi(s)\, ds,$$

причем интеграл заведомо сходится в силу экспоненциального убывания $\left|e^{s^n}\right|$ в обеих долинах и более медленного возрастания основной функции $\psi(s)$.

Мы получим таким образом $n-1$ различных функционалов, которые обозначим соответственно через $e_1^{s^n}, \ldots, e_{n-1}^{s^n}$. Все они удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению 1-го порядка, которое легко получить следующим образом. Продифференцируем функционал $e_k^{s^n}$:

$$\left(\frac{d}{ds}\, e_k^{s^n},\ \psi\right)=\left(e_k^{s^n},\ -\frac{d\psi}{ds}\right)=-\int\limits_{\Gamma_k} e^{s^n}\,\frac{d\psi}{ds}\,ds.$$

Это выражение проинтегрируем по частям; внеинтегральный член исчезнет (по причине сильного убывания функции e^{s^n} в долинах), и мы получим:

$$\left(\frac{d}{ds}\, e_k^{s^n},\ \psi\right)=\int\limits_{\Gamma_k} ns^{n-1}e_k^{s^n}\psi(s)\,ds=\left(ns^{n-1}e_k^{s^n},\ \psi\right).$$

Таким образом, функционалы $e_k^{s^n}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{ds}\, e_k^{s^n}=ns^{n-1}e_k^{s^n}.$$

Мы видим, что *в области функционалов над пространством Z линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка может иметь любое число линейно независимых решений.*

Большой интерес представляют также аналитические функционалы в области нескольких переменных $s_1, \ldots, s_n$. Здесь аналитические функционалы строятся по формулам

$$(g,\ \psi)=\int\limits_{\Gamma} g(s)\,\psi(s)\,ds,$$

где Γ — некоторая $(2n-1)$-мерная поверхность в $2n$-мерном пространстве n комплексных переменных $s_1, \ldots, s_n$.

В силу теоремы Пуанкаре *), обобщающей интегральную теорему Коши на аналитические функции n переменных, поверхность Γ может быть также произвольным образом деформирована (без изменения результата) при условии, что ее граница фиксирована, а в процессе изменения Γ не переходит через особые точки функции $g(s)$.

*) См. Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 1948, стр. 299.

Будем называть поверхность Γ *эквивалентной вещественной*, если для любой основной функции

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(s)\,ds=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\,d\sigma$$

(интеграл справа — по всем вещественным переменным). Примером поверхности, эквивалентной вещественной, служит «лестница Хормандера»; геометрическое место всех точек $s_1, \ldots, s_n$, где $s_2, \ldots, s_n$ вещественны и при каждом выборе их значений s_1 пробегает контур, эквивалентный (в плоскости s_1) вещественной оси. Функционал g, определенный формулой

$$(g,\ \psi)=\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{P(s)}\,\psi(s)\,ds,$$

где Γ — лестница Хормандера, на которой многочлен (или целая функция) $P(s)$ не обращается в нуль, удовлетворяет уравнению

$$Pg=1. \tag{1}$$

Во втором выпуске (гл. II, § 3, п. 3), будет показано, что для всякого многочлена $P(s)$ такую лестницу можно построить и, следовательно, в пространстве Z' уравнение (1) всегда разрешимо. Будем называть, далее, поверхность Γ *нулевой* или *обобщенной замкнутой*, если для всякой основной функции $\psi(s)$

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(s)\,ds=0.$$

Примером нулевой поверхности может служить многообразие, являющееся произведением нулевого контура в плоскости s_1 на любую поверхность в пространстве остальных переменных.

Для каждого многочлена $P(s)$, обратная величина которого $\frac{1}{P(s)}$ ограничена на нулевом контуре Γ, определяется функционал

$$(g,\ \psi)=\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{P(s)}\,\psi(s)\,ds;$$

он является решением уравнения

$$Pg=0. \tag{2}$$

Замечание. Переходя в уравнениях (1) и (2) к преобразованиям Фурье (см. ниже, § 2), мы получаем решения уравнений

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)f=\delta(x) \tag{3}$$

и

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)f=0, \tag{4}$$

где под записью $i\frac{\partial}{\partial x}$ нужно понимать $\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Таким образом, во втором выпуске мы сможем доказать, что любое уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами обладает фундаментальным решением.

Мы используем в дальнейшем эти простые соображения также для фактического построения решений подобных уравнений.

6. Преобразования Фурье функций пространства S. Мы ввели в конце § 1 гл. I пространство S бесконечно дифференцирумых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k D^q\varphi(x)| \leqslant C_{kq}. \tag{1}$$

Найдем класс функций, являющихся преобразованиями Фурье функций класса S *). Каждая функция $\varphi(x)\in S$ обладает, очевидно, классическим преобразованием Фурье

$$\psi(\sigma)=\int\varphi(x)\,e^{i(x,\sigma)}\,dx,$$

причем функция $\psi(\sigma)$ бесконечно дифференцируема в силу абсолютной сходимости интегралов

$$D^q\psi(\sigma)=\int(ix)^q\varphi(x)\,e^{i(x,\sigma)}\,dx.$$

Так как функция $(ix)^q\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема вместе с $\varphi(x)$ и все ее производные являются абсолютно интегрируемыми, то функция $D^q\psi(\sigma)$ стремится к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{|\sigma|}$. Таким образом, функция $\psi(\sigma)$ как функция переменных $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ обладает теми же

*) Излагаемые в этом абзаце соображения будут подробно развиты в § 1 гл. III второго выпуска.

свойствами, что и функция $\varphi(x)$ как функция переменных x. Мы видим, что пространство S преобразованием Фурье переводится в себя. Более того, так как такие же рассуждения проходят для обратного преобразования Фурье, то преобразованием Фурье пространство S отображается *на себя*, т. е. каждая функция $\psi(\sigma)\in S$ имеет прообраз. Можно проверить, что всякая сходящаяся в S последовательность функций $\varphi_\nu(x)$ переводится преобразованием Фурье в последовательность функций $\psi_\nu(\sigma)$, также сходящуюся в S.

Из сказанного, в частности, следует, что каждый элемент $\psi(\sigma)$ пространства Z есть элемент пространства S. (Это можно получить и непосредственно: из определения пространства Z следует, что всякая функция $\psi(\sigma)\in Z$ бесконечно дифференцируема и стремится при $|\sigma|\to\infty$ к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{|\sigma|}$; далее, применяя для вычисления производных интегральную формулу Коши, мы можем получить то же свойство для любой производной от $\psi(\sigma)$.) Кроме того, из сказанного вытекает, что если последовательность $\psi_\nu(\sigma)$ функций из Z сходится в смысле сходимости в Z, то она сходится и в смысле сходимости в S. Далее, поскольку пространство K вложено в пространство S плотно, его образ — пространство Z — также располагается плотно в S, так что любую функцию $\psi(\sigma)\in S$ можно получить как предел (по сходимости в S) последовательности функций $\psi_\nu(\sigma)\in Z$.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИИ. СЛУЧАЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Определение. Поскольку между пространствами K и Z существует взаимно однозначное соответствие с сохранением линейных операций и сходимости, аналогичное соответствие можно установить и между линейными непрерывными функционалами на этих пространствах. Мы установим это соответствие так, чтобы на функционалах, отвечающих абсолютно интегрируемым функциям, оно переходило бы в соответствие между функцией и ее классическим преобразованием Фурье.

Вначале опять рассмотрим случай одного независимого переменного.

Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция и $g(\sigma)$ — ее преобразование Фурье. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье $\psi(\sigma)$ имеет место соотношение

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{-ix\sigma}\,d\sigma\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)\,e^{ix\sigma}}\,dx\right\}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}(g, \psi),$$

которое называют обычно *равенством Парсеваля*; оно остается справедливым и тогда, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$, а следовательно, и их преобразования Фурье $g(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$, лишь интегрируемы в квадрате на оси. Равенство Парсеваля показывает, что $g(\sigma)$ как обобщенная функция действует на основную функцию по формуле

$$(g, \psi) = 2\pi(f, \varphi). \tag{1}$$

В этой форме оно может служить определением обобщенной функции g на пространстве Z при любой заданной обобщенной функции f на пространстве K. Будем называть функционал g, определенный равенством (1), *преобразованием Фурье функционала* f и обозначать символами $F[f]$ или $\tilde{f}$.

Подчеркнем, что функционал $F[f]$ действует уже не в пространстве K, а в двойственном пространстве Z.

Для преобразования Фурье обобщенных функций сохраняются формулы дифференцирования обычных преобразований Фурье:

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[f] = F[P(ix)f], \tag{2}$$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right] = P(-is)\,F[f], \tag{3}$$

так что, в частности, умножению на ix в пространстве K' соответствует дифференцирование в пространстве Z' и дифференцированию в пространстве K' отвечает умножение на $-is$ в пространстве Z.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}$. Мы имеем в этом случае

$$(F[ixf], F[\varphi]) = 2\pi(ixf, \varphi) = 2\pi(f, -ix\varphi) =$$

$$= (F[f], F[-ix\varphi]) = \left(F[f], -\frac{d}{ds}F[\varphi]\right) = \left(\frac{d}{ds}F[f], F[\varphi]\right),$$

что дает формулу (2); аналогично устанавливается (3).

Обратный оператор F^{-1} определен на пространстве Z' и переводит функционал g в функционал f по той же формуле (1) (читаемой справа налево), так что

$$\left.\begin{aligned} &F^{-1}[F[f]] = f, \quad F\left[F^{-1}[g]\right] = g, \\ &\left(F^{-1}[g], \varphi\right) = \frac{1}{2\pi}(g, F[\varphi]). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отметим еще, что формула $FF[\varphi(x)] = 2\pi\varphi(-x)$ (§ 1, п. 1, формула (6)) легко переносится на обобщенные функции. Действительно, для функций φ, принадлежащих пространству S:

$$(FF[f], FF[\varphi(x)]) = 2\pi(F[f], F[\varphi(x)]) = (2\pi)^2(f, \varphi(x)).$$

Но слева вместо $FF[\varphi(x)]$ можно подставить $2\pi\varphi(-x)$. Сокращая на 2π и заменяя x на $-x$, мы получаем:

$$(FF[f], \varphi(x)) = (2\pi f, \varphi(-x)),$$

т. е.

$$FF[f(x)] = 2\pi f(-x), \tag{5}$$

что и требуется.

2. Примеры. 1. Найдем $F[\delta]$. Согласно определению

$$(\tilde{\delta}, \tilde{\varphi}) = 2\pi(\delta, \varphi) = 2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,d\sigma = (1, \psi),$$

откуда

$$F[\delta] \equiv \tilde{\delta} = 1, \quad F^{-1}[1] = \delta. \tag{1}$$

2. Аналогично найдем $F[1]$:

$$(\widetilde{1},\ \widetilde{\varphi}) = 2\pi(1,\ \varphi) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,e^{-ix\cdot 0}\,dx = \\ = 2\pi\psi(0) = 2\pi(\delta,\ \psi),$$

откуда

$$F[1] = \widetilde{1} = 2\pi\delta,\quad F^{-1}[\delta] = \frac{1}{2\pi}. \tag{2}$$

3. Преобразование Фурье от многочлена. Используя формулы (2)—(3) п. 1, находим:

$$F[P(x)] = F[P(x)\cdot 1] = \\ = P\left(-i\frac{d}{ds}\right)\widetilde{1} = 2\pi P\left(-i\frac{d}{ds}\right)\delta(s), \tag{3}$$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right] = P(-is)\widetilde{\delta} = P(-is)\cdot 1 = P(-is). \tag{4}$$

В частности,

$$\left.\begin{aligned} F\left[\delta^{(2m)}(x)\right] &= (-1)^m s^{2m}, \\ F\left[\delta^{(2m+1)}(x)\right] &= (-1)^{m+1} i s^{2m+1}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

4. Дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка

$$ny^{(n-1)}(x) = xy(x) \tag{6}$$

после преобразования Фурье переходит в уравнение 1-го порядка

$$n(-i\sigma)^{n-1}u(\sigma) = -i\frac{du(\sigma)}{d\sigma}\quad (u = \widetilde{y}). \tag{7}$$

Так как уравнение $(n-1)$-го порядка (6) имеет $n-1$ линейно независимых (обычных) решений, то и уравнение 1-го порядка (7) имеет $n-1$ линейно независимых решений в пространстве обобщенных функций над Z. Мы уже рассмотрели эти решения в п. 5 § 1.

5. Преобразование Фурье от показательной функции e^{bx}. Воспользуемся тем, что ряд

$$e^{bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n x^n}{n!}$$

сходится в смысле сходимости в пространстве K'; это позволит вычислить $\widetilde{e^{bx}}$ путем почленного применения оператора F к этому ряду. Мы получим (см. формулы (5)—(6) п. 4 § 1)

$$\widetilde{e^{bx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}\widetilde{x^n} = 2\pi \sum_{0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}\left(-i\frac{d}{ds}\right)^n \delta(s) = 2\pi\,\delta(s - ib). \tag{8}$$

Формула (8) позволяет легко получить преобразования Фурье у часто встречающихся функций $\sin bx$, $\cos bx$, $\operatorname{sh} bx$, $\operatorname{ch} bx$:

$$F[\sin bx] = F\left[\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}\right] = i\pi[\delta(s-b) - \delta(s+b)], \tag{9}$$

$$F[\cos bx] = F\left[\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}\right] = \pi[\delta(s-b) + \delta(s+b)], \tag{10}$$

$$F[\operatorname{sh} bx] = F\left[\frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}\right] = \pi[\delta(s-ib) - \delta(s+ib)], \tag{11}$$

$$F[\operatorname{ch} bx] = F\left[\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\right] = \pi[\delta(s-ib) + \delta(s+ib)]. \tag{12}$$

6. Преобразование Фурье обобщенных функций, продолжаемых на пространство S. Предположим, что функционал f, определенный первоначально на пространстве K, может быть распространен по непрерывности на пространство S (см. гл. I, § 1, п. 10). Покажем, что преобразование Фурье $g = \widetilde{f}$ функционала f также распространяется (с пространства Z) на пространство S.

Действительно, формула

$$(g,\ \psi) = 2\pi(f,\ \varphi),\quad \psi = \widetilde{\varphi}, \tag{13}$$

определяет функционал g сразу на всех функциях ψ, являющихся преобразованиями Фурье функций φ; поскольку φ пробегает все пространство S, функция ψ также пробегает все пространство S. Так как из сходимости к нулю функций $\psi_\nu(\sigma) \in S$ следует сходимость к нулю их прообразов $\varphi_\nu(x) \in S$ (обе в смысле пространства S), то получаемый функционал g непрерывен на S. Действительно, если $\psi_\nu(\sigma) \to 0$, то $(g,\ \psi_\nu) = 2\pi(f,\ \varphi_\nu) \to 0$.

Итак, формулой (13) определен непрерывный функционал g на S. Но для $\psi \in Z$ он совпадает, очевидно, с преобразованием Фурье $\tilde{f}$ функционала f, действующего на пространстве K. Тем самым $\tilde{f}$ распространяется с Z на S, что и требовалось.

В частности, преобразования Фурье периодических функций, финитных обобщенных функций и всех обычных функций степенного роста, а также их производных можно считать функционалами на S. Таковы, например, обобщенные функции $\widetilde{x_+^\lambda}$, $\widetilde{x_-^\lambda}$, $\widetilde{|x|^\lambda}$ и $\widetilde{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}$, которые мы подробно рассмотрим в пункте 3.

7. Преобразование Фурье от периодической функции. Всякая периодическая (с периодом 2π) локально интегрируемая функция $f(x)$, как мы видели в п. 4 § 2 гл. I, представляется в виде суммы ряда Фурье

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{14}$$

сходящегося в смысле обобщенных функций (даже в пространстве S').

Применяя к равенству (14) преобразование Фурье почленно (что законно в силу его непрерывности) и используя результат примера 5, находим:

$$\widetilde{f(x)}=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \delta(s+n). \tag{15}$$

Таким образом, функционал $\widetilde{f(x)}$, рассматриваемый как элемент пространства S', сосредоточен на счетной последовательности точек $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Преобразования Фурье обобщенных функций x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Подсчитаем преобразование Фурье обобщенной функции x_+^λ. Ограничимся сначала значениями λ, для которых $-1<\operatorname{Re}\lambda<0$.

Рассмотрим выражение

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}]=\int_0^\infty x^\lambda e^{i\sigma x} e^{-\tau x}\,dx=\int_0^\infty x^\lambda e^{isx}\,dx \tag{1}$$

для $\tau=\operatorname{Im} s>0$, так что $0<\arg s<\pi$. Этот интеграл заведомо сходится. Когда $\tau\to+0$, $x_+^\lambda e^{-\tau x}$ сходится к x_+^λ в смысле обобщенных функций, поэтому преобразование Фурье от $x_+^\lambda e^{-\tau x}$ стремится к искомому преобразованию Фурье от x_+^λ.

Вычислим интеграл (1) с помощью подстановки

$$isx=-\xi, \quad is\,dx=-d\xi, \quad x=-\frac{\xi}{is}, \quad dx=-\frac{d\xi}{is}.$$

Мы получим при этом

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}]=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{s}\right)^{\lambda+1}\int_L \xi^\lambda e^{-\xi}\,d\xi,$$

где путь интегрирования L представляет собой луч, идущий из 0 в ∞, с аргументом $\arg\xi=\arg s-\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\xi<\frac{\pi}{2}.$$

Но в правой полуплоскости $e^{-\xi}$ экспоненциально убывает. Пользуясь теоремой Коши, получаем, что последний интеграл равен интегралу по полуоси $\xi>0$, т. е.

$$\int_0^\infty \xi^\lambda e^{-\xi}\,d\xi=\Gamma(\lambda+1),$$

так что

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}]=ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma+i\tau)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1).$$

Так как по предположению $-1<\operatorname{Re}\lambda<0$, то и

$$-1<\operatorname{Re}(-\lambda-1)<0.$$

Совершая предельный переход при $\tau\to+0$, мы получаем (см. гл. I, § 3, п. 6)

$$F[x_+^\lambda]=ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}. \tag{2}$$

В силу единственности аналитического продолжения *) эта формула верна при любом $\lambda\neq-1, -2, \ldots$ Если разделить

*) Здесь (и часто дальше) используются следующие простые соображения. Пусть f_λ и g_λ — обобщенные функции, аналитически зависящие от λ в области G, и пусть известно, что в меньшей области $G_1\subset G$ обобщенная функция g_λ является преобразованием

обе части равенства на $\Gamma(\lambda+1)$, мы получим справа и слева целые функции от λ, и следовательно, при всех значениях λ

$$F\left[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right]=ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma+i0)^{-\lambda-1}. \qquad (3)$$

Можно еще подставить в правую часть выражение функции $(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ (см. гл. I, § 3). Тогда получим при $\lambda\neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$$F[x_+^\lambda]=i\,\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}\right]; \qquad (4)$$

при $\lambda=n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$

$$F[x_+^n]=i^{n+1}[n!\sigma^{-n-1}+(-1)^{n+1}i\pi\,\delta^{(n)}(\sigma)]. \qquad (5)$$

В частности,

$$F[x_+^0]\equiv F[\theta(x)]=i\sigma^{-1}+\pi\,\delta(\sigma), \qquad (6)$$

$$F[x_+^1]\equiv F[x_+]=-\sigma^{-2}-i\pi\delta'(\sigma) \qquad (7)$$

и т. д.

Аналогично можно подсчитать и преобразование Фурье от x_-^λ. Для этого нужно, предположив сначала, что $-1<\operatorname{Re}\lambda<0$, вычислить $F[x_-^\lambda e^{-\tau x}]$, где $\tau<0$, а затем перейти к пределу при $\tau\to-0$. При этом получается:

$$F[x_-^\lambda e^{-\tau x}]=\int_\infty^0|x^\lambda|e^{i\sigma x}e^{-\tau x}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty t^\lambda e^{-ist}\,dt=\left(-\frac{i}{s}\right)^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1).$$

Фурье обобщенной функции $f_\lambda: g_\lambda=\tilde{f}_\lambda$. Первое означает, что числовые функции от λ

$$(f_\lambda, \varphi) \quad\text{и}\quad (g_\lambda, \psi), \qquad (*)$$

где φ и ψ — основные функции, аналитичны в области G, а второе, — что в области G_1, если $\psi=\tilde{\varphi}$, функции $(*)$ связаны равенством

$$(g_\lambda, \psi)=2\pi(f_\lambda, \varphi). \qquad (**)$$

В силу единственности аналитического продолжения равенство $(**)$ сохраняется в области G и, следовательно, в области G обобщенная функция g_λ также является преобразованием Фурье обобщенной функции f_λ.

Отсюда для $\lambda\neq-1, -2, \ldots$

$$F[x_-^\lambda]=-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1} \qquad (8)$$

и при всех λ

$$F\left[\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right]=-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma-i0)^{-\lambda-1}. \qquad (9)$$

При $\lambda\neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$, подставляя выражение $(\sigma-i0)^{-\lambda-1}$, находим:

$$F[x_-^\lambda]=i\,\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}\right]. \qquad (10)$$

При $\lambda=n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ получаем:

$$F[x_-^n]=i^{n+1}[(-1)^{n+1}n!\sigma^{-n-1}-i\pi\,\delta^{(n)}(\sigma)]. \qquad (11)$$

Перейдем теперь к обобщенным функциям $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$. Складывая и вычитая формулы (4) и (10), мы находим: при $\lambda\neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$$F[|x|^\lambda]\equiv F[x_+^\lambda]+F[x_-^\lambda]=-2\,\Gamma(\lambda+1)\sin\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1}, \qquad (12)$$

$$F[|x|^\lambda\operatorname{sgn}x]\equiv F[x_+^\lambda]-F[x_-^\lambda]=$$

$$=2i\,\Gamma(\lambda+1)\cos\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma. \qquad (13)$$

Разделяя обе части равенства (12) на $\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$ и применяя формулу удвоения для гамма-функции*), получаем следующую изящную формулу преобразования Фурье для целой функции $f_\lambda(x)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$:

$$F[f_\lambda(x)]=F\left[\frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right]=\sqrt{2\pi}\,\frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}|\sigma|^{-\lambda-1}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{2\pi}f_{-\lambda-1}(\sigma). \qquad (12')$$

---

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. 2, 1949, стр. 784.

Преобразуя аналогично формулу (13) и полагая $g_\lambda(x) = \dfrac{2^{-\frac{\lambda}{2}}\,|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$, находим

$$F[g_\lambda(x)] = \sqrt{2\pi}\, i\, \frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}\,|\sigma|^{-\lambda-1} \operatorname{sgn}\sigma}{\Gamma\left(\frac{-\lambda+1}{2}\right)} = \sqrt{2\pi}\, i g_{-\lambda-1}(\sigma). \qquad (13')$$

Аналогично, при $\lambda = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ из формул (5) и (11) находим

$$F[|x|^n] \equiv F[x_+^n] + F[x_-^n] = i^{n+1}[(1 + (-1)^{n+1})\sigma^{-n-1}\, n! + ((-1)^{n+1} - 1)\, i\pi\,\delta^{(n)}(\sigma)], \qquad (14)$$

$$F[|x|^n \operatorname{sgn} x] \equiv F[x_+^n] - F[x_-^n] = i^{n+1}[(1 - (-1)^{n+1})\sigma^{-n-1} n! + ((-1)^{n+1} + 1)\, i\pi\,\delta^{(n)}(\sigma)]. \qquad (15)$$

В частности, для n четного, $n = 0, 2, \ldots, 2k, \ldots,$

$$F[x^{2k}] = (-1)^k\, 2\pi\,\delta^{(2k)}(\sigma), \qquad (16)$$

$$F[|x|^{2k} \operatorname{sgn} x] = 2i(-1)^k (2k)!\,\sigma^{-2k-1}, \qquad (17)$$

а для n нечетного, $n = 1, 3, \ldots, 2k+1, \ldots,$

$$F[x^{2k+1}] = 2\pi i\,(-1)^{k+1}\,\delta^{(2k+1)}(\sigma), \qquad (18)$$

$$F[|x|^{2k+1}] = 2(-1)^{k+1}(2k+1)!\,\sigma^{-2k-2}. \qquad (19)$$

Обобщенные функции $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ сохраняют непрерывность и при целых отрицательных λ; первая — при четных значениях $\lambda = -2k-2$, вторая — при нечетных значениях $\lambda = -2k-1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Формулы преобразования Фурье для этих обобщенных функций получаются непосредственно из формул (12) и (13), если применить к ним еще раз оператор F, использовать формулу $FF[f(x)] = 2\pi f(-x)$ (§ 2, п. 1, формула (5)) и в результате заменить x на σ и σ на x. Мы получим, таким образом,

$$F[x^{-2k-2}] = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{(2k+1)!}\,|\sigma|^{2k+1}, \qquad (20)$$

$$F[x^{-2k-1}] = \frac{(-1)^k\, i\pi}{(2k)!}\,|\sigma|^{2k} \operatorname{sgn}\sigma. \qquad (21)$$

Таблица 1

№№ п/п	Обобщенная функция	Ее преобразование Фурье
1	$\|x\|^\lambda \quad (\lambda \neq -1, -3, \ldots)$	$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\,\|\sigma\|^{-\lambda-1}$
2	$f_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{\|x\|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}\, f_{-\lambda-1}(\sigma)$
3	$\|x\|^\lambda \operatorname{sgn} x \ (\lambda \neq -2, -4, \ldots$	$2i\cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\,\|\sigma\|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$
4	$g_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{\|x\|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}\, i\, g_{-\lambda-1}(\sigma)$
5	x^m	$2(-i)^m\,\pi\,\delta^{(m)}(\sigma)$
6	x^{-m}	$\dfrac{i^m\pi}{(m-1)!}\,\sigma^{m-1}\operatorname{sgn}\sigma$
7	x^{-1}	$i\pi\operatorname{sgn}\sigma$
8	x^{-2}	$-\pi\,\|\sigma\|$
9	$x_+^\lambda \ (\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}\right] \doteq ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ *)
10	x_+^n	$i^{n+1}n!\,\sigma^{-n-1} + (-i)^n\,\pi\delta^{(n)}(x)$
11	$\theta(x)$	$i\sigma^{-1} + \pi\delta(\sigma)$
12	$x_-^\lambda \ (\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}\right] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} \times \Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}$ *)
13	$(x+i0)^\lambda$	$\dfrac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)}\,e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}$
14	$(x-i0)^\lambda$	$\dfrac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)}\,e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}$

*) Первое — при $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Мы видим, что эти формулы получаются из формул (12) и (13) подстановкой $\lambda=-2k-2$ и $\lambda=-2k-1$ соответственно.

Этим же приемом, применяя вторично оператор F к формулам (3) и (9) и заменяя $-\lambda-1$ на λ, можно получить формулы преобразований Фурье для обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$:

$$F[(x+i0)^\lambda]=\frac{2\pi e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_-^{-\lambda-1}; \qquad (22)$$

$$F[(x-i0)^\lambda]=\frac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_+^{-\lambda-1}. \qquad (23)$$

Полученные нами здесь формулы сведены в таблицу на стр. 219.

4. Преобразования Фурье обобщенных функций $x_+^\lambda \ln x_+$ и аналогичных*). Дифференцируя по λ преобразования Фурье, найденные в предыдущем пункте, мы получаем новые формулы преобразований Фурье. Так, дифференцируя формулу (2) предыдущего пункта, мы находим: при $\lambda\neq-1,-2,\ldots$

$$F[x_+^\lambda \ln x_+]=ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Gamma'(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}-\\ -\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)+\\ +i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\Big\}=ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)+\\ +i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\Big\}. \qquad (1)$$

Аналогично, дифференцируя формулу (8) п. 3, находим, что при $\lambda\neq-1,-2,\ldots$

$$F[x_-^\lambda \ln x_-]=-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1}-\\ -\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\Big\}. \qquad (2)$$

*) При первом чтении можно этот пункт пропустить. Результаты его приведены в конце книги в сводной таблице преобразований Фурье.

В частности, полагая $\lambda=0$, получаем:

$$F[\ln x_+]=i\Big\{\Big(\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\Big)(\sigma+i0)^{-1}-\\ -(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)\Big\}; \qquad (3)$$

$$F[\ln x_-]=-i\Big\{\Big(\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\Big)(\sigma-i0)^{-1}-\\ -(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0)\Big\}. \qquad (4)$$

Складывая и вычитая формулы (1)—(2), находим:

$$F[|x|^\lambda \ln|x|]=\\ =ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-\\ -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1}-\\ -ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)+\\ +ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0), \qquad (5)$$

$$F[|x|^\lambda \ln|x|\operatorname{sgn}x]=\\ =ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1}+\\ +ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1}-\\ -ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)-\\ -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0). \qquad (6)$$

В частности, при $\lambda=0$ имеем:

$$F[\ln|x|]=i\left[\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\right](\sigma+i0)^{-1}-i\left[\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\right](\sigma-i0)^{-1}-$$
$$-i(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)+i(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0), \qquad (7)$$

$$F[\ln|x|\operatorname{sgn}x]=$$
$$=i\left[\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\right](\sigma+i0)^{-1}+i\left[\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\right](\sigma-i0)^{-1}-$$
$$-i(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)-i(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0). \qquad (8)$$

Предельный переход $\lambda\to-2k$ в формуле (5) и $\lambda\to-2k-1$ в формуле (6) позволяет найти выражения $F[x^{-2k}\ln|x|]$ и $F[x^{-2k-1}\ln|x|]$. Мы найдем эти выражения ниже несколько иным путем.

Преобразования Фурье обобщенных функций x_+^{-n}, x_-^{-n}, $x_+^{-n}\ln x_+$, $x_-^{-n}\ln x_-$ могут быть найдены с помощью рядов Лорана функций x_+^λ и x_-^λ в окрестности значения $\lambda=-n$. Как мы помним, разложение Лорана функции x_+^λ в окрестности значения $\lambda=-n$ имеет вид

$$x_+^\lambda=\frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}+x_+^{-n}+(\lambda+n)\,x_+^{-n}\ln x_+ + \ldots$$

Почленное применение преобразования Фурье приводит к разложению

$$F[x_+^\lambda]=F\left[\frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}\right]+$$
$$+F[x_+^{-n}]+(\lambda+n)\,F[x_+^{-n}\ln x_+]+\ldots \qquad (9)$$

Поэтому, разлагая по степеням $\lambda+n$ функцию

$$F[x_+^\lambda]=ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\lambda+1)\,(\sigma+i0)^{-\lambda-1} \qquad (10)$$

и приравнивая коэффициенты получающегося ряда соответствующим коэффициентам ряда (9), мы найдем выражения преобразований Фурье от x_+^{-n}, $x_+^{-n}\ln x_+, \ldots$ Заметим, что $e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}$ и $(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ — целые функции, а $\Gamma(\lambda+1)$ имеет при $\lambda=-1$ полюс 1-го порядка; следовательно, искомое

разложение функции (10) по степеням $\lambda+n$ может быть получено как произведение ряда Тейлора функции $(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ и ряда Лорана функции

$$A(\lambda)=ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\lambda+1).$$

Первый из этих рядов имеет вид

$$(\sigma+i0)^{-\lambda-1}=\sigma^{n-1}-(\lambda+n)\,\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0)+$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda+n)^2\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0)+\ldots, \qquad (11)$$

а второй мы запишем в форме

$$A(\lambda)=\frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+a_0^{(n)}+a_1^{(n)}(\lambda+n)+\ldots \qquad (12)$$

Коэффициенты $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}, \ldots$ можно вычислить явно; ниже приведены их значения. Перемножая ряды (11) и (12), находим:

$$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}=$$
$$=\frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}\sigma^{n-1}+[a_0^{(n)}\sigma^{n-1}-a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0)]+$$
$$+(\lambda+n)\,[a_1^{(n)}\sigma^{n-1}-a_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0)+$$
$$+\frac{1}{2}a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0)]+\ldots \qquad (13)$$

Приравнивая коэффициенты разложений (9) и (13), получаем:

$$F[x_+^{-n}]=a_0^{(n)}\sigma^{n-1}-a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0), \qquad (14)$$

$$F[x_+^{-n}\ln x_+]=a_1^{(n)}\sigma^{n-1}-a_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0)+$$
$$+\frac{1}{2}a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0). \qquad (15)$$

Аналогичные вычисления проводятся для определения преобразований Фурье обобщенных функций x_-^{-n}, $x_-^{-n}\ln x_-$ и т. д. Исходим из разложения Лорана

$$x_-^\lambda=\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}+x_-^{-n}+(\lambda+n)\,x_-^{-n}\ln x_-+\ldots,$$

к которому применяем почленно преобразование Фурье

$$F[x_-^\lambda]=F\left[\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}\right]+ \\ +F[x_-^{-n}]+(\lambda+n)F[x_-^{-n}\ln x_-]+\dots \quad (16)$$

Поскольку

$$F[x_-^\lambda]=-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1},$$

мы можем получить интересующие нас формулы разложением последней функции по степеням $(\lambda+n)$ и приравниванием соответствующих коэффициентов получающегося ряда и ряда (16). Мы имеем:

$$(\sigma-i0)^{-\lambda-1}=\sigma^{n-1}-(\lambda+n)\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0)+ \\ +\frac{1}{2}(\lambda+n)^2\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma-i0)+\dots, \quad (17)$$

$$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)\equiv B(\lambda)=\frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+b_0^{(n)}+b_1^{(n)}(\lambda+n)+\dots, \quad (18)$$

откуда

$$F[x_-^\lambda]=\frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}\sigma^{n-1}+\left[b_0^{(n)}\sigma^{n-1}-b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0)\right]+ \\ +(\lambda+n)\left[b_1^{(n)}\sigma^{n-1}-b_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0)\right]+ \\ +\frac{1}{2}b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma-i0)+\dots \quad (19)$$

Приравнивая коэффициенты в (16) и (19), получаем:

$$F[x_-^{-n}]=b_0^{(n)}\sigma^{n-1}-b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0), \quad (20)$$

$$F[x_-^{-n}\ln x_-]=b_1^{(n)}\sigma^{n-1}-b_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0)+ \\ +\frac{1}{2}b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma-i0). \quad (21)$$

. . . .

Найдем теперь преобразования Фурье обобщенных функций:

$$|x|^{-n},\quad |x|^{-n}\operatorname{sgn}x,\quad |x|^{-n}\ln|x| \quad \text{и} \quad |x|^{-n}\ln|x|\operatorname{sgn}x.$$

Разложим функцию $|x|^\lambda$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda=-2k$:

$$|x|^\lambda=x^{-2k}+(\lambda+2k)x^{-2k}\ln|x|+\dots$$

Применим почленно преобразование Фурье:

$$F\left[|x|^\lambda\right]=F[x^{-2k}]+(\lambda+2k)F[x^{-2k}\ln|x|]+\dots \quad (22)$$

С другой стороны, имеем:

$$F[|x|^\lambda]=-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)|\sigma|^{-\lambda-1}.$$

Положим

$$C(\lambda)=-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1). \quad (23)$$

Эта функция при $\lambda=-2k$ регулярна, так что

$$C(\lambda)=c_0^{(2k)}+(\lambda+2k)c_1^{(2k)}+\dots \quad (24)$$

Далее, в окрестности точки $\lambda=-2k$

$$|\sigma|^{-\lambda-1}=|\sigma|^{2k-1}-(\lambda+2k)|\sigma|^{2k-1}\ln|\sigma|+\dots \quad (25)$$

Перемножая разложения (24) и (25) и сравнивая результат с разложением (22), находим:

$$F[x^{-2k}]=c_0^{(2k)}|\sigma|^{2k-1} \quad (26)$$

(ср. выше формулу (20) п. 3),

$$F\left[x^{-2k}\ln|x|\right]=c_1^{(2k)}|\sigma|^{2k-1}-c_0^{(2k)}|\sigma|^{2k-1}\ln|\sigma|. \quad (27)$$

Продолжив разложения (22), (24) и (25), можно было бы аналогично найти $F[x^{-2k}\ln^2|x|]$ и т. д.

Аналогично разложим $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$ в окрестности точки $\lambda=-2k-1$:

$$|x|^\lambda\operatorname{sgn}x=x^{-2k-1}+(\lambda+2k+1)x^{-2k-1}\ln|x|+\dots$$

Применяя почленно преобразование Фурье, получаем:

$$F[|x|^\lambda\operatorname{sgn}x]= \\ =F[x^{-2k-1}]+(\lambda+2k+1)F[x^{-2k-1}\ln|x|]+\dots \quad (28)$$

С другой стороны,

$$F[|x|^\lambda\operatorname{sgn}x]=i\cdot D(\lambda)|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma,$$

где

$$D(\lambda)=2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1). \quad (29)$$

Разложим функции $D(\lambda)$ и $|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$ по степеням $\lambda+2k+1$:

$$D(\lambda)=d_0^{(2k+1)}+(\lambda+2k+1)\,d_1^{(2k+1)}+\ldots, \tag{30}$$

$$|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma=|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma-(\lambda+2k+1)|\sigma|^{2k}\ln|\sigma|\operatorname{sgn}\sigma+\ldots \tag{31}$$

Перемножая (30) и (31) и сравнивая с (28), находим:

$$F\left[x^{-2k-1}\right]=id_0^{(2k+1)}|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma \tag{32}$$

(ср. формулу (21) п. 3),

$$F\left[x^{-2k-1}\ln|x|\right]=id_1^{(2k+1)}|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma-i\,d_0^{(2k+1)}|\sigma|^{2k}\ln|\sigma|\operatorname{sgn}\sigma \tag{33}$$

и т. д.

Теперь нам нужно подсчитать преобразования Фурье обобщенных функций $|x|^{-n}$ и $|x|^{-n}\ln|x|$ при нечетных n и преобразования Фурье обобщенных функций $|x|^{-n}\operatorname{sgn}x$ и $|x|^{-n}\ln|x|\operatorname{sgn}x$ при четных n. Мы найдем эти преобразования Фурье тем же путем, только в отличие от предыдущего вместо рядов Тейлора воспользуемся рядами Лорана.

Разложим функцию $|x|^{\lambda}$ в ряд Лорана в окрестности значения $\lambda=-2k-1$:

$$|x|^{\lambda}=2\,\frac{\delta^{(2k)}(x)}{(2k)!}\,\frac{1}{\lambda+2k+1}+|x|^{-2k-1}+(\lambda+2k+1)|x|^{-2k-1}\ln|x|+\ldots$$

Применим почленно преобразование Фурье:

$$F[|x|^{\lambda}]=2\,\frac{F[\delta^{(2k)}(x)]}{(2k)!}\,\frac{1}{\lambda+2k+1}+F\left[|x|^{-2k-1}\right]+(\lambda+2k+1)F\left[|x|^{-2k+1}\ln|x|\right]+\ldots \tag{34}$$

С другой стороны, перемножая разложения

$$C(\lambda)=\frac{c_{-1}^{(2k+1)}}{\lambda+2k+1}+c_0^{(2k+1)}+(\lambda+2k+1)\,c_1^{(2k+1)}+\ldots \tag{35}$$

и

$$|\sigma|^{-\lambda-1}=\sigma^{2k}-(\lambda+2k+1)\,\sigma^{2k}\ln|\sigma|+\frac{1}{2}(\lambda+2k+1)^2\sigma^{2k}\ln^2|\sigma|+\ldots, \tag{36}$$

получаем:

$$F\left[|x|^{\lambda}\right]=\frac{c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}}{\lambda+2k+1}+\left[c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k}-c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma|\right]+(\lambda+2k+1)\left[c_1^{(2k+1)}\sigma^{2k}-c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma|+\frac{1}{2}c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln^2|\sigma|\right]+\ldots \tag{37}$$

Следовательно,

$$F\left[|x|^{-2k-1}\right]=c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k}-c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma|, \tag{38}$$

$$F\left[|x|^{-2k-1}\ln|x|\right]=c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k}-c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma|+\frac{1}{2}c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln^2|\sigma|, \tag{39}$$

. . . .

Аналогичные вычисления производим с обобщенной функцией $|x|^{\lambda}\operatorname{sgn}x$ в окрестности значения $\lambda=-2k$:

$$|x|^{\lambda}\operatorname{sgn}x=2\,\frac{\delta^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}\,\frac{1}{\lambda+2k}+|x|^{-2k}\operatorname{sgn}x+(\lambda+2k)|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn}x+\ldots,$$

$$F\left[|x|^{\lambda}\operatorname{sgn}x\right]=2\,\frac{F[\delta^{(2k-1)}(x)]}{(2k-1)!}\,\frac{1}{\lambda+2k}+F\left[|x|^{-2k}\operatorname{sgn}x\right]+(\lambda+2k)F\left[|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn}x\right]+\ldots \tag{40}$$

С другой стороны, перемножая разложения

$$|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma=\sigma^{2k-1}-(\lambda+2k)\,\sigma^{2k-1}\ln|\sigma|+\frac{1}{2}(\lambda+2k)^2\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|, \tag{41}$$

и

$$D(\lambda)=\frac{d_{-1}^{(2k)}}{\lambda+2k}+d_0^{(2k)}+(\lambda+2k)\,d_1^{(2k)}+\ldots, \tag{42}$$

находим:

$$D(\lambda)|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma = \frac{d_{-1}^{(2k)}}{\lambda+2k}\sigma^{2k-1} + \left[d_0^{(2k)}\sigma^{2k-1} - d_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma|\right] +$$
$$+(\lambda+2k)\left[d_1^{(2k)}\sigma^{2k-1} - d_0^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma| + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}d_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|\right] + \ldots \quad (43)$$

Сравнивая (40) и (43), получаем формулы:

$$F\left[|x|^{-2k}\operatorname{sgn} x\right] = id_0^{(2k)}\sigma^{2k-1} - id_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma|,$$

$$F\left[|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn} x\right] =$$
$$= id_1^{(2k)}\sigma^{2k-1} - id_0^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma| + \frac{i}{2}d_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|,$$

. . . .

В ходе вычислений мы ввели следующие функции:

$$A(\lambda) = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$B(\lambda) = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$C(\lambda) = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \frac{c_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + c_0^{(n)} + c_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$D(\lambda) = 2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \frac{d_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + d_0^{(n)} + d_1^{(n)}(\lambda+n).$$

Заметим, что $B(\lambda) = \overline{A(\lambda)}$ при вещественных λ, т. е. $B(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ заменой i на $-i$. Далее, $C(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda)$, т. е. $C(\lambda) = 2\operatorname{Re} A(\lambda)$ при вещественных λ, а $D(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda)$, т. е. $D(\lambda) = 2i\operatorname{Im} A(\lambda)$ при вещественных λ.

Значения $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}$ и $a_1^{(n)}$ мы приведем без вывода:

$$a_{-1}^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$a_0^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1) + i\frac{\pi}{2}\right];$$

$$a_1^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2} + \sum_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j,\, k\leqslant n-1}}\frac{1}{jk} - \frac{\pi^2}{8} + \right.$$
$$+\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)\Gamma'(1) + \Gamma''(1) +$$
$$\left. + i\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1)\right]\right\};$$

$$b_i^{(n)} = \overline{a}_i^{(n)};\quad c_i^{(n)} = 2\operatorname{Re} a_i^{(n)};\quad d_i^{(n)} = 2\operatorname{Im} a_i^{(n)}.$$

В частности,

$$b_{-1}^{(n)} = \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!};\quad c_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(n-1)\frac{\pi}{2};$$

$$d_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^n}{(n-1)!}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}.$$

5. Преобразование Фурье обобщенной функции $(ax^2+bx+c)_+^\lambda$. Рассмотрим функцию $(ax^2+bx+c)_+^\lambda$, равную $(ax^2+bx+c)^\lambda$ при тех x, при которых $ax^2+bx+c>0$, и равную нулю при остальных x. Соответствующая обобщенная функция определяется равенством

$$\left((ax^2+bx+c)_+^\lambda,\ \varphi(x)\right) = \int\limits_{ax^2+bx+c>0}(ax^2+bx+c)^\lambda\varphi(x)\,dx \quad (1)$$

при тех λ, при которых интеграл существует, а при других λ — как аналитическое продолжение этого интеграла.

Область, в которой $ax^2+bx+c>0$, если она существует, может иметь один из следующих видов:

1) интервал $\alpha<x<\beta$;
2) вся прямая;
3) лучи $x<\alpha$ и $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$;
4) вся прямая за исключением одной точки $x=\alpha$.

Линейным преобразованием переменного x (сдвигом и растяжением) можно свести функцию $(ax^2+bx+c)_+^\lambda$ к одному из следующих типов: в случае 1) к $(1-x^2)_+^\lambda$; в случае 2) к $(1+x^2)_+^\lambda=(1+x^2)^\lambda$; в случае 3) к $(x^2-1)_+^\lambda$; в случае 4) к $x_+^{2\lambda}$. Последний случай нас интересовать не будет, так как функция $x_+^{2\lambda}$ и ее преобразование Фурье изучены выше.

В первом случае интеграл

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\lambda\varphi(x)\,dx$$

сходится при $\operatorname{Re}\lambda>-1$; при других λ его регуляризация (аналитическое продолжение) получается по формулам, указанным в § 3 гл. I. При этом выясняется, что обобщенная функция $(1-x^2)_+^\lambda$ аналитична всюду, за исключением точек $\lambda=-1, -2, \ldots, -k, \ldots$, в которых она имеет полюсы; вычет в полюсе $\lambda=-k$ равен $\dfrac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(1-x^2)}{(k-1)!}$. Здесь $\delta^{(k-1)}(1-x^2)$ — обобщенная функция, определяемая формулой

$$\delta^{(k-1)}(1-x^2)=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k x^{k-1}}\left[\delta^{(k-1)}(x-1)-\delta^{(k-1)}(x+1)\right].$$

Аналогично обобщенная функция $(1+x^2)^\lambda$, определенная сходящимся при $\operatorname{Re}\lambda<-\frac{1}{2}$ интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^\lambda\varphi(x)\,dx,$$

аналитична при всех λ, а обобщенная функция $(x^2-1)_+^\lambda$, определенная как сумма сходящихся при $-1<\operatorname{Re}\lambda<-\frac{1}{2}$ интегралов

$$\int_{-\infty}^{-1}(1-x^2)^\lambda\varphi(x)\,dx+\int_{1}^{\infty}(1-x^2)^\lambda\varphi(x)\,dx,$$

аналитична при $\lambda\neq-1, -2, \ldots$ и имеет в точке $\lambda=-k$ полюс с вычетом $\dfrac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x^2-1)}{(k-1)!}$. Здесь $\delta^{(k-1)}(x^2-1)$ — обобщенная функция, определяемая формулой

$$\delta^{(k-1)}(x^2-1)=(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(1-x^2)=$$
$$=\frac{1}{2^k x^{k-1}}\left[\delta^{(k-1)}(x-1)-\delta^{(k-1)}(x+1)\right].$$

В связи с приведенными определениями дадим общее определение обобщенных функций $\delta(f(x))$ и $\delta^{(k)}(f(x))$.

Пусть сначала $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственный и притом простой корень при $x=x_0$, причем $f'(x_0)>0$. Сделаем в интеграле

$$\int\delta(t)\,\varphi(t)\,dt=\varphi(0) \tag{I}$$

подстановку $t=f(x)$. Формула (I) перепишется в виде

$$\int\delta(f(x))\,\varphi(f(x))\,f'(x)\,dx=\varphi(0);$$

положив $\varphi(f(x))\,f'(x)=\psi(x)$, получим:

$$\int\delta(f(x))\,\psi(x)\,dx=\frac{\psi(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если $f'(x_0)<0$, то чтобы слева интегрирование производилось в сторону возрастания x, надо поставить перед интегралом знак минус; таким образом, в общем случае

$$\int\delta(f(x))\,\psi(x)\,dx=\frac{\psi(x_0)}{|f'(x_0)|}. \tag{II}$$

Эти наводящие соображения делают естественным следующее определение. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция, имеющая один и притом простой корень $x=x_0$. Обобщенная функция $\delta(f(x))$ есть функционал, определяемый формулой (II), где $\psi(x)$ — любая основная функция.

Пусть теперь $f(x)$ имеет произвольное число простых корней. В этом случае естественно определить $\delta(f(x))$ формулой

$$\int\delta(f(x))\,\psi(x)\,dx=\sum_n\frac{\psi(x_n)}{|f'(x_n)|}, \tag{III}$$

где суммирование производится по всем корням уравнения $f(x)=0$; можно переписать ее в виде

$$\delta(f(x))=\sum_n \frac{1}{|(f'(x_n)|}\delta(x-x_n). \qquad \text{(IV)}$$

Например, $\delta(\sin x)=\sum_n \delta(x-\pi n)$.

Определение $\delta^{(k)}(f(x))$ легко получить из (IV) формальным дифференцированием. Дифференцируя формулу (IV) один раз, получим:

$$\delta'(f(x))f'(x)=\sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\frac{d}{dx}\delta(x-x_n).$$

На $f'(x)$ можно разделить, так как $f'(x)$ в точках $x=x_n$ не обращается в нуль:

$$\delta'(f(x))=\sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\frac{1}{f'(x)}\frac{d}{dx}\delta(x-x_n).$$

Продолжая дифференцирование, приходим к следующему определению:

$$\delta^{(k)}(f(x))=\sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\left(\frac{1}{f'(x)}\frac{d}{dx}\right)^k\delta(x-x_n). \qquad \text{(V)}$$

Найдем преобразования Фурье обобщенных функций $(1-x^2)_+^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$, $(x^2-1)_+^\lambda$. Эти преобразования Фурье при тех λ, при которых соответствующие интегралы сходятся, выражаются через бесселевы функции; в силу единственности аналитического продолжения эти выражения сохраняются и при других λ. Интересно, что при целых значениях параметра λ удается выразить эти преобразования Фурье через элементарные функции и через производные от δ-функции. Тем самым устанавливаются связи между бесселевыми функциями, с одной стороны, и производными от δ-функции, с другой.

Мы начнем с вывода преобразования Фурье обобщенной функции $(1-x^2)^\lambda$. При $\operatorname{Re}\lambda>-1$ имеет место формула *)

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\lambda e^{ixs}\,dx=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{s}{2}\right)^{-\lambda-\frac12}J_{\lambda+\frac12}(s). \qquad (2)$$

*) И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 345, формула 6.413, 3.

Функция, стоящая справа, а следовательно и функция слева, аналитична при всех λ, кроме $\lambda=-1,\ -2,\ \ldots$; в этих точках рассматриваемое выражение имеет простые полюсы.

Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции $(1-x^2)_+^\lambda$ выражается формулой

$$F\left[(1-x^2)_+^\lambda\right]=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{s}{2}\right)^{-\lambda-\frac12}J_{\lambda+\frac12}(s), \qquad (2')$$

оно существует при всех $\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots$

Вычет написанного выражения при $\lambda=-n$ равен

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-\frac12}J_{-n+\frac12}(s). \qquad (3)$$

Этот вычет можно выразить и иначе. Для этого разделим обе части равенства (2) на $\Gamma(\lambda+1)$ и найдем предел при $\lambda\to-n$. Так как

$$\lim_{\lambda\to-n}\frac{(1-x^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}=\delta^{(n-1)}(1-x^2),$$

то

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-\frac12}J_{-n+\frac12}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n-1)}(1-x^2)\,e^{ixs}\,dx. \qquad (4)$$

Последний интеграл, как нетрудно подсчитать, равен

$$\frac{1}{2^{n-1}}s^{2n-1}\frac{d^{n-1}}{(s\,ds)^{n-1}}\left(\frac{\cos s}{s}\right). \qquad (5)$$

Это и есть второе выражение вычета при $\lambda=-n$.

При целых $\lambda=n>0$ легко получается формула

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n e^{ixs}\,dx=2^{n+1}n!\,(-1)^n\frac{d^n}{(s\,ds)^n}\left(\frac{\sin s}{s}\right). \qquad (6)$$

Для доказательства этой формулы заметим, что она справедлива при $n=0$. Пусть формула (6) справедлива для некоторого n. Применяя к обеим частям равенства (6) оператор $2\frac{d}{s\,ds}$ и интегрируя по частям, можно убедиться в справедливости этой формулы и при $n+1$.

Из полученных формул легко вывести выражение бесселевой функции полуцелого аргумента через элементарные функции. Сравнивая формулы (3) — (5), находим:

$$J_{-n+\frac{1}{2}}(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(s)^{n-\frac{1}{2}}\frac{d^{n-1}}{(s\,ds)^{n-1}}\left(\frac{\cos s}{s}\right). \qquad (7)$$

Указанное выражение применимо, если индекс бесселевой функции отрицателен. Чтобы найти выражение бесселевой функции с положительным полуцелым индексом через элементарные функции, положим в формуле (2) $\lambda=n$:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n e^{ixs}\,dx=n!\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(s). \qquad (8)$$

Сравнивая (6) и (8), находим

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^n}{(x\,dx)^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right). \qquad (7')$$

Таким образом, мы доказали, что как при отрицательных, так и при положительных полуцелых значениях r функция $J_r(x)$ выражается через элементарные функции.

Рассмотрим теперь функцию $(1+x^2)^\lambda$. Преобразование Фурье этой функции при $\operatorname{Re}\lambda<0$ равно *)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^\lambda e^{ixs}\,dx=\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{|s|}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|). \qquad (9)$$

Формула (9) сохраняется при всех λ. При целых неотрицательных $\lambda=n$ искомое преобразование Фурье легко находится непосредственно: функция $(1+x^2)^\lambda$ является многочленом $(1+x^2)^n$, а функция $|s|^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|)$ имеет

*) И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 281, формула 5.116, 1.

полюс. Преобразование Фурье функции $(1+x^2)^n$, как мы знаем, равно $\left(1-\frac{d^2}{ds^2}\right)^n\delta(s)$.

Отсюда следует, что

$$\lim_{\lambda\to-n}\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left|\frac{s}{2}\right|^{\lambda-\frac{1}{2}}K_{\lambda-\frac{1}{2}}(|s|)=\sqrt{\pi}\left(1-\frac{d^2}{ds^2}\right)^n\delta(s). \qquad (10)$$

Наконец, рассмотрим преобразование Фурье обобщенной функции $(x^2-1)_+^\lambda$. Оно равно

$$\int_{-\infty}^{-1}(x^2-1)^\lambda e^{isx}\,dx+\int_{1}^{\infty}(x^2-1)^\lambda e^{isx}\,dx=$$
$$=2\int_{1}^{\infty}(x^2-1)^\lambda\cos sx\,dx. \qquad (11)$$

Но при $-1<\operatorname{Re}\lambda<0$ имеет место равенство *)

$$\int_{1}^{\infty}(x^2-1)^\lambda\cos sx\,dx=-\frac{\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}}{2\left|\frac{s}{2}\right|^{\lambda+\frac{1}{2}}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|). \qquad (12)$$

Отсюда следует, что для всех $\lambda\neq-1,-2,\ldots$ преобразование Фурье обобщенной функции $(x^2-1)_+^\lambda$ равно

$$2\int_{1}^{\infty}(x^2-1)^\lambda\cos sx\,dx=$$
$$=-\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left|\frac{s}{2}\right|^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|)=$$
$$=\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left|\frac{s}{2}\right|^{-\lambda-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\frac{\cos\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|)-J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|s|)}{\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (13)$$

*) Там же, стр. 347, формула 6.422.

Особенно просто подсчитывается преобразование Фурье функции $(x^2-1)^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. В этом случае

$$2\int_1^\infty (x^2-1)^n \cos sx\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2-1)^n e^{isx}\,dx + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n e^{isx}\,dx =$$

$$= 2\pi(-1)^n\left(1+\frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s) + (-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s). \tag{14}$$

Таким образом, преобразование Фурье функции $(x^2-1)_+^n$ равно

$$2\pi(-1)^n\left(1+\frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s) + (-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s). \tag{15}$$

6. Преобразование Фурье аналитических функционалов. Рассмотрим аналитический функционал в пространстве Z

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s)\psi(s)\,ds. \tag{1}$$

Контур интегрирования Γ предполагается конечным или бесконечным, но заведомо таким, вдоль которого функция $g(s)e^{\tau b}$ абсолютно интегрируема при любом вещественном b. Мы утверждаем, что функционал g является преобразованием Фурье регулярного функционала над пространством K, определенного функцией

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_\Gamma g(s)e^{isx}\,ds}. \tag{2}$$

Прежде всего заметим, что функция $f(x)$ определена формулой (2) для всех x в силу предположения о контуре Γ. Пусть $\varphi(x)$ — основная функция, преобразованием

Фурье которой служит функция $\psi(s)$; тогда, подставляя в формулу (1) выражение $\psi(s)$ через $\varphi(x)$, мы находим:

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{isx}\,dx\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\left\{\int_\Gamma g(s)e^{isx}\,ds\right\}dx =$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}\varphi(x)\,dx = 2\pi(f, \varphi),$$

где $f(x)$ определена формулой (2), что и утверждается.

Пусть, например, Γ есть ограниченный замкнутый контур, внутри которого имеется изолированная особая точка s_0 функции $g(s)$. В этом случае функция $\overline{f(x)}$, согласно теореме о вычетах, имеет вид

$$\overline{f(x)} = \int_\Gamma g(s)e^{-isx}\,dx = 2\pi i\cdot \text{выч.}_{s=s_0}[g(s)e^{-isx}].$$

Пример. Рассмотрим аналитический функционал

$$(g(s), \psi(s)) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}}\psi(s)\,ds \tag{3}$$

с интегрированием по мнимой оси (или по любому эквивалентному пути). По доказанному, функционал g есть преобразование Фурье функции f, определяемой равенством

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}}e^{isx}\,ds.$$

Этот интеграл легко вычисляется. Заменим в нем s на $i\tau$, он перейдет тогда в интеграл

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}-\tau x}\,d\tau=\frac{i}{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\tau+x)^2}\,d\tau=$$

$$=\frac{i}{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Таким образом, аналитический функционал (3) является преобразованием Фурье функции

$$f(x)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Обращая этот результат, получаем, что преобразованием Фурье функции $e^{\frac{x^2}{2}}$ служит аналитический функционал, определяемый функцией $i\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{s^2}{2}}$ и контуром $(-i\infty,\ i\infty)$.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определения. Преобразование Фурье функционала f, действующего на пространстве K основных функций $\varphi(x)$ от нескольких независимых переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$, определяется как функционал g на пространстве Z основных функций $\psi(s)$, $s=(s_1, \ldots, s_n)$, действующий по формуле

$$(g,\ \psi)=(2\pi)^n(f,\ \varphi), \tag{1}$$

где $\psi=\tilde{\varphi}$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Функционал g линеен и непрерывен; он обозначается через $\tilde{f}$ или $F[f]$. Результаты § 2 переносятся на этот случай без особых изменений. Формулы (2) — (3) п. 1 приобретают следующий вид: если P — многочлен от n переменных

с постоянными коэффициентами, то

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial s_n}\right)F[f]=F[P(ix_1,\ \ldots,\ ix_n)f], \tag{2}$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right]=P(-is_1,\ \ldots,\ -is_n)\tilde{f}. \tag{3}$$

Обратный оператор F^{-1} действует в пространстве Z' и переводит его в пространство K' по формуле

$$(F^{-1}g,\ \varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}(g,\ F\varphi). \tag{4}$$

Если $f(x)$ — функция, обладающая преобразованием Фурье в классическом смысле, то функционал $\tilde{f}$ есть регулярный функционал, соответствующий преобразованию Фурье функции $f(x)$.

Из сингулярных функционалов простейшим является дельта-функция: для нее имеют место формулы

$$\widetilde{\delta(x)}=1,\quad \tilde{1}=(2\pi)^n\delta(s), \tag{5}$$

аналогичные формулам (2) п. 2 § 2.

Формула *преобразования Фурье от многочлена* получается комбинированием формул (2) и (5):

$$F[P(x_1,\ \ldots,\ x_n)]=F[P(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,1]=$$

$$=(2\pi)^n P\left(-i\frac{\partial}{\partial s_1},\ \ldots,\ -i\frac{\partial}{\partial s_n}\right)\delta(s). \tag{6}$$

Выясним, как выглядит преобразование Фурье от обобщенной функции f, к которой применена некоторая операция u линейного преобразования независимых переменных (гл. I, § 1, п. 6). Для основной функции $\varphi(x)$ мы имеем, полагая $u^{-1}x=y$, $x=uy$, $dx=|u|\,dy$:

$$F[\varphi(u^{-1}x)]=\int\varphi(u^{-1}x)\,e^{i(\sigma,\,x)}\,dx=|u|\int\varphi(y)\,e^{i(\sigma,\,uy)}\,dy=$$

$$=|u|\int\varphi(y)\,e^{i(u'\sigma,\,y)}\,dy=|u|\,\tilde{\varphi}(u'\sigma),$$

т. е. *преобразованию u^{-1} в области переменных x отвечает сопряженное преобразование u' в области* *переменных* σ *и умножение результата на* $|u|$. Далее для обобщенной функции f мы будем иметь, обозначая, как всегда, $\psi(\sigma)=F[\varphi(x)]$:

$$\begin{aligned}(F[f(ux)],\ F[\varphi(x)])&=(2\pi)^n(f(ux),\ \varphi(x))=\\&=(2\pi)^n(f(x),\ \varphi(u^{-1}x))=(F[f(x)],\ F[\varphi(u^{-1}x)])=\\&=(F[f(x)],\ |u|\varphi(u'\sigma))=|u|(F[f(x)],\ F[\varphi(u'\sigma)]).\end{aligned}$$

Обозначая, далее, $g(\sigma)=F[f(x)]$, $g_u(\sigma)=F[\varphi(ux)]$, мы получаем:

$$(g_u(\sigma),\ \psi(\sigma))=(g(\sigma),\ \psi(u'\sigma))=(g(u'^{-1}\sigma),\ \psi(\sigma)),$$

откуда

$$g_u(\sigma)=|u|\,g(u'^{-1}\sigma).$$

Таким образом, *преобразованию* $f(x)\to f(ux)$ *в пространстве обобщенных функций отвечает преобразование* $g(\sigma)\to|u|\,g(u'^{-1}\sigma)$ *в пространстве преобразований Фурье.*

В частности, если обобщенная функция f инвариантна относительно преобразования u, так что $f(ux)=f(x)$, то ее преобразование Фурье инвариантно относительно преобразования u'^{-1} и умножения на $|u|$, так что $|u|\,g(u'^{-1}\sigma)=g(\sigma)$. Например, если обобщенная функция f сферически симметрична, т. е. для каждого поворота u мы имеем $f(ux)=f(x)$, то и ее преобразование Фурье сферически симметрично, поскольку для поворота выполняются соотношения $u'^{-1}=u$, $|u|=1$.

2. Преобразование Фурье прямого произведения. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — данные обобщенные функции соответственно, по переменным $x=(x_1,\ldots,x_k)$ и $y=(y_1,\ldots,y_m)$, и $\tilde f(\xi)$, $\tilde g(\eta)$ — их преобразования Фурье. Тогда *преобразование Фурье прямого произведения* $f(x)g(y)$ (по всем переменным) *выражается по формуле*

$$F[f\times g]=\tilde f(\xi)\times\tilde g(\eta),$$

т. е. *равно прямому произведению преобразований Фурье функционалов f и g.* Для доказательства достаточно (см. гл. I, § 4, п. 1) проверить требуемое равенство на основных функциях $\varphi(x,y)$ вида $\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\psi_j(y)$. Мы имеем в этом случае

$$\begin{aligned}(\widetilde{f\times g},\ \widetilde{\textstyle\sum\varphi_j\psi_j})&=(2\pi)^{m+k}(f\times g,\ \textstyle\sum\varphi_k\psi_k)=\\&=(2\pi)^{m+k}\textstyle\sum(f,\varphi_j)(g,\psi_j)=\sum(\tilde f,\tilde\varphi_j)(\tilde g,\tilde\psi_j)=\\&=(\tilde f\times\tilde g,\ \textstyle\sum\tilde\varphi_j\tilde\psi_j)=(\tilde f\times\tilde g,\ \sum\widetilde{\varphi_j\psi_j}),\end{aligned}$$

что и утверждается.

Примеры. 1. Если $f(x)=\delta(x)$, то наша формула приводится к виду

$$F[\delta(x)\times g(y)]=1(\xi)\times\tilde g(\eta).$$

В частности,

$$F[\delta(x)\times 1(y)]=1(\xi)\times(2\pi)^m\delta(\eta).$$

Иными словами, преобразование Фурье характеристической функции подпространства R_y есть характеристическая функция подпространства R_ξ, умноженная на $(2\pi)^m$.

2. Построим преобразование Фурье функции $f(x,y)$ двух переменных, равной 1 при $x>0$, $y>0$ и равной 0 при остальных значениях x, y. Эта функция есть произведение (и, следовательно, прямое произведение) функций $\theta(x)$ и $\theta(y)$. Отсюда в соответствии с формулой (6) п. 3 § 2 получаем:

$$\widetilde{f(x,y)}=\widetilde{\theta(x)}\times\widetilde{\theta(y)}=[\pi\delta(\xi)+i\xi^{-1}]\times[\pi\delta(\eta)+i\eta^{-1}].$$

3. Преобразование Фурье обобщенной функции r^λ. Обобщенная функция r^λ, согласно п. 9 § 3 гл. I, определена при $\lambda\neq-n,\ -n-2,\ \ldots$ и сферически симметрична. Поэтому ее преобразование Фурье $g_\lambda(\sigma)$ есть также сферически симметричная обобщенная функция. Интеграл Фурье

$$g_\lambda(\sigma)=\int r^\lambda e^{i(\sigma,x)}\,dx$$

сходится при $-n<\operatorname{Re}\lambda<0$ и представляет собой сферически симметричную функцию, т. е. функцию от $\rho=\sqrt{\sum\sigma_j^2}$.

Далее, при любом $t>0$

$$g_\lambda(t\sigma)=\int r^\lambda e^{i(t\sigma,\,x)}\,dx=\int r^\lambda e^{i(\sigma,\,tx)}\,dx;$$

совершая преобразование координат $tx=y$, $x=t^{-1}y$, $dx=t^{-n}dy$, $r=|x|=t^{-1}|y|$, мы получаем:

$$g_\lambda(t\sigma)=\int |y|^\lambda t^{-\lambda-n}e^{i(\sigma,\,y)}\,dy=t^{-\lambda-n}g_\lambda(\sigma).$$

Это означает, что $g_\lambda(\sigma)$ есть однородная функция степени $-\lambda-n$. Поэтому она имеет вид $g_\lambda(\sigma)=C_\lambda\rho^{-\lambda-n}$. Вычислим постоянную C_λ. Для этого используем формулу $(g_\lambda,\psi)=(2\pi)^n(r^\lambda,\varphi)$, в которой положим *) $\varphi(x)=e^{-\frac{r^2}{2}}=e^{-\frac{x_1^2}{2}}\dots e^{-\frac{x_n^2}{2}}$. Тогда $\psi(\sigma)=\left(\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}}\right)\dots\left(\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}}\right)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\rho^2}{2}}$, и мы получим:

$$C_\lambda(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{-n-\lambda}\,d\sigma=(2\pi)^n\int r^\lambda e^{-\frac{r^2}{2}}\,dx.$$

Интегралы справа и слева вычисляются переходом к сферическим координатам; при этом можно разделить на площадь единичной сферы с обеих сторон и заменить интегралы однократными, записывая $\rho^{n-1}d\rho$ вместо $d\sigma$ и $r^{n-1}dr$ вместо dx. Получившиеся выражения вычисляются теперь с помощью гамма-функции:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{-\lambda-1}\,d\rho=2^{-\frac{\lambda}{2}-1}\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}r^{\lambda+n-1}\,dr=2^{\frac{\lambda+n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right).$$

*) Мы пользуемся формулой $F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ $(n=1)$. См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 281, формула 5.119.

Отсюда находим:

$$C_\lambda=2^{\frac{n}{2}+\frac{\lambda+n-2}{2}+\frac{\lambda}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}=2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\qquad(1)$$

и, следовательно,

$$F[r^\lambda]=2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\rho^{-\lambda-n}.\qquad(2)$$

Это равенство, выведенное для $-n<\operatorname{Re}\lambda<0$, остается справедливым в полной области существования аналитической функции r^λ, т. е. при всех $\lambda\neq-n,\ -n-2,\dots$ (в исключенных точках функция r^λ имеет полюсы).

Разделяя формулу (2) на $\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$, приходим к следующей простой формуле преобразования Фурье для целой функции $f_\lambda(r)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$:

$$F[f_\lambda(r)]=(2\pi)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{\lambda+n}{2}}\frac{r^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}=(2\pi)^{\frac{n}{2}}f_{-\lambda-n}(\rho).\qquad(2')$$

Разложение функции r^λ в ряд Тейлора или Лорана приводит к новым формулам преобразований Фурье.

Мы знаем из п. 6 § 4 гл. I, что в окрестности регулярной точки λ_0

$$r^\lambda=r^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)r^{\lambda_0}\ln r+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2r^{\lambda_0}\ln^2r+\dots$$

Отсюда

$$\widetilde{r^\lambda}=\widetilde{r^{\lambda_0}}+(\lambda-\lambda_0)F[r^{\lambda_0}\ln r]+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2F[r^{\lambda_0}\ln^2 r]+\dots\qquad(3)$$

С другой стороны, разлагая функцию $\widetilde{r^\lambda}=C_\lambda\rho^{-\lambda-n}$ в окрестности точки λ_0 в ряд Тейлора, мы получим:

$$C_\lambda\rho^{-\lambda-n}=C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}+(\lambda-\lambda_0)\left[C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}+C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho\right]+$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\left[C''_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}+2C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho+C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln^2\rho\right]+\dots\qquad(4)$$

Сравнивая коэффициенты в разложениях (4) и (3), получаем:

$$F\left[r^{\lambda_0}\ln r\right]=C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}+C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho, \tag{5}$$

$$F\left[r^{\lambda_0}\ln^2 r\right]=C''_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}+2C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho+C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln^2\rho \tag{6}$$

и т. д.

В окрестности особой точки $\lambda=-n-2m$

$$r^\lambda=\frac{a_{-1}}{\lambda+n+2m}+a_0+a_1(\lambda+n+2m)+\ldots, \tag{7}$$

где коэффициенты $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ имеют выражения (гл. I, § 4, п. 6)

$$a_{-1}=\Omega_n\frac{\delta^{(2m)}(r)}{(2m)!},\quad a_0=\Omega_n r^{-2n-m},\quad a_1=\Omega_n r^{-2n-m}\ln r,\ \ldots; \tag{8}$$

применяя к обеим частям равенства (7) почленно преобразование Фурье, находим:

$$\widetilde{r^\lambda}=\frac{\Omega_n}{(2m)!}\frac{F[\delta^{(2m}(r)]}{\lambda+n+2m}+\Omega_n F[r^{-2n-m}]+ \\ +\Omega_n(\lambda+n+2m)F[r^{-2n-m}\ln r]+\ldots \tag{9}$$

С другой стороны, в окрестности этой же точки

$$C_\lambda\rho^{-\lambda-n}=\left(\frac{c_{-1}^{(n+2m)}}{\lambda+n+2m}+c_0^{(n+2m)}+c_1^{(n+2m)}(\lambda+n+2m)+\ldots\right)\times \\ \times(\rho^{2m}+(\lambda+n+2m)\rho^{2m}\ln\rho+\ldots)=\frac{c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}}{\lambda+n+2m}+ \\ +\left(c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+c_0^{(n+2m)}\rho^{2m}\right)+(\lambda+n+2m)\times \\ \times\left(\frac{1}{2}c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln^2\rho+c_0^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+c_1^{(n+2m)}\rho^{2m}\right)+\ldots \tag{10}$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты разложений (10) и (8), получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Omega_n}{(2m)!}F[\delta^{(2m)}(r)]=c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m},\\ &\Omega_n F[r^{-2n-m}]=c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+c_0^{(n+2m)}\rho^{2m},\\ &\Omega_n F[r^{-2m-n}\ln r]=\frac{1}{2}c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln^2\rho+\\ &\qquad+c_0^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+c_1^{(n+2m)}\rho^{2m},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Здесь числовые коэффициенты $c_{-1}^{(n+2m)}$, $c_0^{(n+2m)}$ и т. д. суть коэффициенты разложения в ряд Лорана функции $C_\lambda(1)$ в окрестности $\lambda=-n-2m$.

4. Преобразование Фурье обобщенной функции, сосредоточенной в ограниченной области. Покажем, что преобразование Фурье всякой обобщенной функции f, сосредоточенной в ограниченной области, есть функционал типа следующей функции от σ:

$$(\overline{f(x)},\ e^{i(x,\sigma)}).$$

Понимать это выражение нужно следующим образом: функция $e^{i(x,\sigma)}$ заменяется основной функцией $\varphi_0(x)$, равной $e^{i(x,\sigma)}$ в той области, где сосредоточен функционал f, и обращающейся в нуль вне достаточно большой области; затем к ней применяется функционал $\bar{f}$:

$$(\bar{f},\ \varphi_0(x))=\overline{(f,\ \overline{\varphi_0(x)})}.$$

Полученное при этом число не зависит от выбора функции $\varphi_0(x)$ с указанными свойствами (см. добавление 1 к гл. I, п. 3). Мы должны проверить, что справедливо равенство

$$\int\overline{(\overline{f(x)},\ e^{i(x,\sigma)})}\,\psi(\sigma)\,d\sigma=(2\pi)^n(f,\ \varphi)$$

для любой основной функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье $\psi(\sigma)$. Но

$$(f,\ \varphi)=\left(f,\ \frac{1}{(2\pi)^n}\int\psi(\sigma)\,e^{-i(\sigma,x)}\,d\sigma\right).$$

Если мы внесем теперь функционал f под знак интеграла, то наше утверждение будет доказано:

$$(f,\ \varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\psi(\sigma)(f,\ e^{-i(\sigma,x)})\,d\sigma=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\overline{(\overline{f(x)},\ e^{i(\sigma,x)})}\,\psi(\sigma)\,d\sigma. \tag{1}$$

Нам остается поэтому проверить законность внесения функционала f под знак интеграла. Покажем сначала, что это справедливо для интеграла по ограниченной области:

$$\left(f,\ \int_G\psi(\sigma)\,e^{-i(\sigma,x)}\,d\sigma\right)=\int_G\psi(\sigma)\,(f,\ e^{-i(\sigma,x)})\,d\sigma.$$

Интеграл по ограниченной области G есть предел интегральных сумм

$$s_N(x) = \sum_{j=1}^{N} \psi(\sigma_j) e^{-i(\sigma_j, x)} \Delta\sigma_j.$$

Суммы $s_N(x)$ стремятся к интегралу по области G равномерно в каждой ограниченной области изменения x, так же как и любые их производные по x. Поэтому, превращая их обычным способом в основные функции (умножением на фиксированную основную функцию, равную 1 в окрестности носителя f), мы получим последовательность, сходящуюся в пространстве K. Отсюда следует, что

$$(f, s_N) = \sum \psi(\sigma_j)\left(f, \sigma^{-i(\sigma_j, x)}\right)\Delta\sigma_j$$

имеет пределом

$$\left(f, \int_G \psi(\sigma) e^{-i(\sigma, x)} d\sigma\right).$$

Но, с другой стороны, (f, s_N) есть интегральная сумма для непрерывной функции от σ

$$\psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma, x)});$$

она имеет пределом интеграл от этой функции. Таким образом, равенство (1) для ограниченной области G установлено.

Далее, интеграл по всему пространству есть предел интегралов по ограниченным областям:

$$\int_{R_n} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma, x)} d\sigma = \lim_{N\to\infty} \int_{|\sigma| \leqslant N} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma, x)} d\sigma.$$

Функции от x, стоящие под знаком предела, сходятся к своему пределу, т. е. к левой части, снова равномерно вместе со всеми производными в каждой ограниченной области изменения переменного x, и таким же образом можно считать, что эта сходимость есть сходимость в пространстве K. Поэтому

$$\left(f, \int_{R_n} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma, x)} d\sigma\right) = \lim_{N\to\infty}\left(f, \int_{|\sigma| \leqslant N} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma, x)} d\sigma\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{|\sigma| \leqslant N} \psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma, x)}) d\sigma = \int_{R_n} \psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma, x)}) d\sigma,$$

что и требуется.

В качестве примера найдем преобразование Фурье от сингулярной обобщенной функции $\delta(r-a)$, отвечающей однородному распределению массы с плотностью 1 по

сфере U_a радиуса a с центром в начале координат:

$$(\delta(r-a), \varphi) = \int_{U_a} \varphi(x)\, dx.$$

Функция $\delta(r-a)$ сосредоточена в ограниченной области; по доказанному, ее преобразование Фурье есть функция

$$F[\delta(r-a)] = (\delta(r-a), e^{i(x, \sigma)}) = \int_{U_a} e^{i(x, \sigma)}\, dx.$$

Переходя к сферическим координатам ($r = |x| = a$, $\rho = |\sigma|$, θ — угол между векторами x и σ), находим:

$$F[\delta(r-a)] = \int e^{ia\rho\cos\theta} a^{n-1} \sin^{n-1}\theta\, d\theta\, d\omega =$$

$$= a^{n-1}\Omega_{n-1} \int_0^{\pi} e^{ia\rho\cos\theta} \sin^{n-1}\theta\, d\theta,$$

где $d\omega$ — элемент поверхности сферы в $(n-2)$-мерном подпространстве, ортогональном к вектору ρ.

Как известно, полученный интеграл выражается через бесселевы функции *):

$$F[\delta(r-a)] = a^{n-1}\Omega_{n-1}(a\rho)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho) =$$

$$= \Omega_{n-1} a^{\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho). \qquad (2)$$

При n нечетном, $n = 2m+3$, бесселеву функцию можно выразить через тригонометрические функции (§ 2, п. 6, формула (7′))

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z,$$

. . . .

$$J_{m+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^m z^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{z}} J_{\frac{1}{2}}(z)\right).$$

*) И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 165, формула 3.227,3 (положить $x = \cos\theta$).

Таким образом, при $n=2m+3$ мы имеем:

$$F[\delta(r-a)]=$$
$$=\Omega_{n-1}a^{\frac{n}{2}}\rho^{1-\frac{n}{2}}(-1)^m(a\rho)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left(\frac{1}{\sqrt{z}}J_{\frac{1}{2}}(z)\right)\Bigg|_{z=a\rho}. \qquad (3)$$

В частности, при $n=3$, $m=0$

$$F[\delta(r-a)]=2\pi a^2 J_{\frac{1}{2}}(a\rho)=4\pi a\frac{\sin\rho a}{\rho}. \qquad (4)$$

С другой стороны, при любом $n=2m+3$ можно использовать известную формулу *)

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m\left[z^{m+\frac{1}{2}}J_{m+\frac{1}{2}}(z)\right]=\sqrt{z}\,J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z. \qquad (5)$$

Заменим в (2) аргумент $a\rho$ на z; тогда мы получим:

$$\rho^{n-2}\frac{1}{a}F[\delta(r-a)]=\Omega_{n-1}J_{\frac{n}{2}-1}(z)\,z^{\frac{n}{2}-1}$$

и по формуле (5)

$$\rho^{n-2}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m\frac{1}{a}F[\delta(r-a)]=\Omega_{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z,$$

или, произведя обратную подстановку $z=a\rho$, $dz=\rho\,da$,

$$\rho\left(\frac{d}{a\,da}\right)^m\frac{1}{a}F[\delta(r-a)]=\Omega_{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin a\rho.$$

Так как преобразование Фурье совершается по переменным x, а дифференцирование — по параметру a, то

$$\left(\frac{d}{a\,da}\right)^m\frac{1}{a}F[\delta(r-a)]=F\left[\left(\frac{d}{a\,da}\right)^m\frac{1}{a}\delta(r-a)\right].$$

В результате получается интересная формула

$$F\left[\left(\frac{d}{a\,da}\right)^m\frac{\delta(r-a)}{a}\right]=\Omega_{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\rho}{\rho}. \qquad (6)$$

*) И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 359, формула 6.482,3.

5. Преобразование Фурье как предел последовательности функций. Метод, изложенный в п. 4, может помочь и при разыскании преобразований Фурье произвольных обобщенных функций (не обязательно финитных).

Пусть f — произвольная обобщенная функция. Как мы знаем (гл. I, § 1, п. 8), функционал f можно представить как предел функционалов f_ν, каждый из которых сосредоточен в ограниченной области. Преобразование Фурье функционала f_ν, по доказанному, есть функция $g_\nu(s)$. Так как оператор Фурье переводит сходящуюся последовательность функционалов снова в сходящуюся последовательность, то можно получить искомое преобразование Фурье функционала f как предел (по сходимости в Z') последовательности функций $g_\nu(s)$ при $\nu\to\infty$.

В частности, для любой (обычной) функции $f(x)$ (как угодно быстро растущей) преобразование Фурье может быть определено как предел (в смысле сходимости в Z') последовательности обычных функций

$$g_\nu(\sigma)=\int\limits_{|x|\leqslant\nu}f(x)\,e^{i(x,\sigma)}\,dx. \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ имеет рост не выше степенного и определяет тем самым функционал на пространстве S, то интеграл (1) сходится к преобразованию Фурье функции $f(x)$ также в смысле сходимости, установленной для пространства S' (т. е. на всех основных функциях $\psi(\sigma)\in S$). В частности, функционалы $g_\nu(\sigma)$ сходятся к своему пределу $g(\sigma)$ на всех финитных бесконечно дифференцируемых функциях в смысле сходимости в пространстве K'. Мы встречались уже с такими фактами в примерах, приведенных в гл. I, § 2, п. 5.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Предварительные замечания. Преобразование Фурье в его классической форме является одним из важных методов при решении задач, относящихся к дифференциальным уравнениям. Но область применимости метода преобразования Фурье ограничивалась, в основном, классом интегрируемых во всем пространстве функций или их степеней. Использование преобразования Фурье в комплексной плоскости позволило включить в область применимости метода Фурье и функции экспоненциального роста, но с обязательным условием равенства этих функций нулю при отрицательных значениях аргумента. Это относится и к преобразованию Лапласа *), которое представляет собой модификацию преобразования Фурье. В двустороннем преобразовании Лапласа, которое положено в основу известной книги Ван-дер-Поля **), допустимым функциям разрешается при экспоненциальном росте в сторону $x \to +\infty$ быть отличными от нуля при $x < 0$, но с экспоненциальным убыванием, обеспечивающим наличие полосы существования преобразования Лапласа в комплексной плоскости. Другой изящный метод построения операционного исчисления предложен Я. Микусинским ***); этот метод (развитый пока что только для функций одного переменного) позволяет рассматривать функции произвольного роста в сторону $x \to +\infty$, равные нулю при отрицательных x.

Метод преобразований Фурье обобщенных функций, излагаемый в этой книге, не требует никаких предположений относительно характера роста рассматриваемых функций как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ и годится для функции любого числа переменных. Поэтому естественно, что этот метод, в частности, позволяет решать все типы задач, к которым можно применять классические преобразования Фурье и Лапласа или метод Микусинского, а также и многие задачи, которые недоступны для этих методов.

Мы ограничимся в этом выпуске рассмотрением только некоторых простых примеров.

2. Итерированное уравнение Лапласа $\Delta^m u = f$. Решение этого уравнения будет найдено, когда будет известно фундаментальное решение E по формуле $u = f * E$. Фундаментальное решение есть решение уравнения

$$\Delta^m E = \delta(x). \tag{1}$$

Будем искать фундаментальное решение в пространстве K'.

---

*) См., например, Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.

**) Б. Ван-дер-Поль и Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.

***) Ян Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ, 1956.

После преобразования Фурье, примененного к уравнению (1), мы получим:

$$(-1)^m \rho^{2m} V = 1 \qquad \left(\rho^2 = \sum \sigma_j^2\right), \tag{2}$$

где V означает преобразование Фурье функции E. Вопрос, следовательно, упирается в решение уравнения (2).

Если $2m < n$, то решением служит (локально интегрируемая) функция $\frac{(-1)^m}{\rho^{2m}}$. Далее, если значение $n = -2m < 0$ не есть полюс аналитической функции ρ^λ (гл. I, § 3, п. 9) — напомним, что полюсы функции ρ^λ расположены в точках $-n$, $-n-2, \ldots$, — то решением является функционал $(-1)^m \rho^{-2m}$, что получается предельным переходом из равенства $\rho^{2m}\rho^\lambda = \rho^{2m+\lambda}$ при $\lambda \to -2m$.

Пусть, наконец, $\lambda = -2m$ является полюсом аналитической функции ρ^λ. Рассмотрим разложение функции ρ^λ в окрестности этой точки в ряд Лорана:

$$\rho^\lambda = \frac{a_{-1}}{\lambda + 2m} + a_0 + a_1(\lambda + 2m) + \ldots, \tag{3}$$

где $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ — обобщенные функции (гл. I, § 4, п. 6).

Умножим это равенство почленно на функцию ρ^{2m} и перейдем затем к пределу при $\lambda \to -2m$. Левая часть имеет пределом, так же как и выше, единицу. В правой части все члены, начиная с третьего, в пределе обратятся в нуль; второй член $\rho^{2m}a_0$ остается постоянным, первый при $\rho^{2m}a_{-1} \neq 0$ должен был бы иметь пределом бесконечность, но так как это противоречило бы полученному предельному соотношению, где все остальные члены конечны, то мы делаем вывод, что $\rho^{2m}a_{-1} = 0$ и, следовательно,

$$\rho^{2m}a_0 = 1.$$

Итак, решением уравнения $(-1)^m \rho^{2m} V = 1$ оказывается в данном случае $(-1)^m a_0$, где a_0 — значение правильной части ряда Лорана (3) при $\lambda = -2m$ *). В первом и во втором случаях результатом обратного преобразования Фурье в соответствии с формулой (2) п. 3 § 3 является функция

---

*) Этот коэффициент есть обобщенная функция $\Omega_n r^{-n-2m}$. Но явное его выражение здесь не будет играть роли.

$C_{2m}r^{2m-n}$. В третьем случае в соответствии с формулой (5) п. 3 § 3 решением служит функция

$$Ar^{2m-n}\ln r + Br^{2m-n}.$$

Но второе слагаемое в данном случае излишне, так как оператором Δ^m оно переводится в нуль. Поэтому фундаментальное решение E во всех случаях может быть записано в виде

$$E(x) = \begin{cases} Cr^{2m-n}\ln r, & \text{если } 2m > n \text{ и } n \text{ четное,} \\ Cr^{2m-n} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Волновое уравнение в нечетномерном пространстве. Частными решениями волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

являются бегущие волны

$$e^{-i[(\sigma, x) \pm \rho t]} \quad \left(\rho = |\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}\right),$$

из которых мы будем комбинировать любое решение в форме

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \Psi_1(\sigma) e^{-i(\sigma, x) + i\rho t}\, d\sigma + \frac{1}{(2\pi)^n}\int \Psi_2(\sigma) e^{-i(\sigma, x) - i\rho t}\, d\sigma.$$

Решение $u(x, t)$ должно быть определено из начальных условий, которые мы возьмем (ср. п. 4 § 5 гл. I) в форме

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \delta(x). \tag{2}$$

Первое из этих условий приводит к уравнению

$$\int [\Psi_1(\sigma) + \Psi_2(\sigma)]\, e^{-i(\sigma, x)}\, d\sigma = 0$$

и удовлетворяется, если $\Psi_2(\sigma) \equiv -\Psi_1(\sigma) \equiv \frac{1}{2i}\Psi(\sigma)$, так что

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \Psi(\sigma)\, e^{-i(\sigma, x)} \sin\rho t\, d\sigma = F^{-1}[\Psi(\sigma)\sin\rho t]. \tag{3}$$

Второе начальное условие приводится к виду

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \Psi(\sigma)\, e^{-i(\sigma, x)}\rho\, d\sigma = \delta(x)$$

или

$$F^{-1}[\rho\Psi(\sigma)] = \delta(x).$$

Отсюда

$$\rho\Psi(\sigma) = \widetilde{\delta(x)} = 1$$

и, следовательно, по формуле (3)

$$u(x, t) = F^{-1}\left[\frac{\sin\rho t}{\rho}\right].$$

Но обратное преобразование Фурье от $\frac{\sin\rho t}{\rho}$ мы уже знаем: согласно формуле (6) п. 4 § 3 при $n = 2m + 3$

$$F^{-1}\left[\frac{\sin\rho t}{\rho}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m \frac{\delta(r-t)}{t}.$$

Для решения задачи Коши с заданной начальной функцией $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f(x)$ мы получаем формулу

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m \frac{\delta(r-t)}{t} * f(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m t^{n-2}\Omega_n M_t[f],$$

где $M_t[f]$ означает среднее от функции $f(x-\xi)$ по сфере $|\xi| \leqslant t$.

В частности, при $n = 3$, $m = 0$

$$u(x, t) = t\, M_t[f].$$

Обычным способом спуска можно получить решение волнового уравнения и в четномерном пространстве *).

4. Связь между фундаментальным решением уравнения и фундаментальным решением задачи Коши для него. Фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f, \tag{1}$$

*) См. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, 1951, гл. VI, § 5, п. 2, стр. 372.

согласно определению, есть обобщенная функция $E(x, t)$ (из пространства K'), удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, t) = \delta(x, t). \tag{2}$$

Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \tag{3}$$

есть обобщенная функция $u(x, t)$, определенная при $t \geqslant 0$ на основных функциях $\varphi(x)$ (зависящая от t как от параметра), удовлетворяющая уравнению (2) и обращающаяся в $\delta(x)$ при $t = 0$.

Зная обобщенную функцию $u(x, t)$, можно построить фундаментальное решение $E(x, t)$; именно, справедлива теорема:

Пусть известно фундаментальное решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения (3). *Положим*

$$E(x, t) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad t < 0, \\ u(x, t) & \textit{при} \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда $E(x, t)$ есть фундаментальное решение уравнения (1).

Определение (4) требует еще некоторых пояснений при $t \geqslant 0$. Мы должны ведь определить обобщенную функцию над основными функциями, зависящими от x и t, а $u(x, t)$ определена как обобщенная функция над функциями от x и зависит от t как от параметра. Мы придаем функции $u(x, t)$ следующий смысл как обобщенной функции над основными функциями $\varphi(x, t)$:

$$(u(x, t), \varphi(x, t)) = \int_0^\infty (u(x, t), \varphi(x, t))\, dt.$$

Под знаком интеграла $u(x, t)$ при фиксированном t применяется к основной функции $\varphi(x, t)$ как функции от x при том же значении t; результат есть финитная функция по t, и интегрирование по t допустимо.

Покажем, что полученная обобщенная функция $E(x, t)$ есть решение уравнения (2). Достаточно показать, что удовлетворяется двойственное уравнение (полученное из (2) преобразованием Фурье по x и t). Считая, что координаты

$x_1, \ldots, x_n$ переходят при преобразовании Фурье в координаты $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, а координата t — в координату σ_0, получаем двойственное уравнение в форме

$$[-i\sigma_0 - P(\sigma)]\, V(\sigma, \sigma_0) = 1. \tag{5}$$

Совершим преобразование Фурье функционала $E(x, t)$, определенного формулами (4) сначала только по координатам x при фиксированном t. Обозначая результат этого преобразования через $v(\sigma, t)$, получаем из (3):

$$\left.\begin{aligned} v(\sigma, t) &= 0 \quad (t < 0), \\ v(\sigma, 0) &= 1 \quad (t = 0), \\ \frac{d}{dt} v(\sigma, t) - P(\sigma)\, v(\sigma, t) &= 0 \quad (t > 0). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Производная $\frac{d}{dt}$, понимаемая в обычном смысле, может быть заменена на производную в смысле обобщенных функций, если добавить скачок функции $v(\sigma, t)$ при $t = 0$, равный нулю (гл. I, § 2, п. 2, пример 2); поэтому уравнения (6) могут быть заменены уравнением

$$\frac{d}{dt} v(\sigma, t) - P(\sigma)\, v(\sigma, t) - \delta(\sigma) = 0,$$

где $\frac{d}{dt}$ — символ производной от обобщенной функции $v(\sigma, t)$. Совершая преобразование Фурье по t, приходим к уравнению

$$-i\sigma_0 V(\sigma, \sigma_0) - P(\sigma)\, V(\sigma, \sigma_0) = 1,$$

что и требуется.

5. Классическое операционное исчисление. В классическом операционном исчислении рассматриваются дифференциальные уравнения и системы вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$$

при $t > 0$ с некоторыми начальными (для $t = 0$) и граничными условиями (в области изменения x). При помощи преобразования Лапласа по t задача сводится к дифференциальному уравнению только по x (или к алгебраической задаче в случае обыкновенных уравнений).

Рассмотрим эти задачи с точки зрения теории обобщенных функций. Введем обобщенную функцию $U(x, t)$ (обобщенную по переменной t, зависящую от x как от параметра), равную $u(x, t)$ при $t > 0$ и нулю при $t < 0$. Так как при переходе от значений $t < 0$ к значениям $t > 0$ функция $u(x, t)$ испытывает скачок, равный заданному значению $u(x, 0)$, то

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, 0)\,\delta(t).$$

Поэтому $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению (системе)

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x, t) + u(x, 0)\,\delta(t). \qquad (1)$$

Совершая преобразование Фурье по t и обозначая новую переменную через $p = p_1 + ip_2$, получаем уравнение

$$-ip\,V(x, p) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x, p) + u(x, 0)\cdot 1. \qquad (2)$$

Для корректных задач полученное уравнение с учетом граничных условий по x имеет единственное решение $V(x, p)$, которое представляет собой аналитическую функцию от p (в случае обыкновенного уравнения — даже рациональную функцию от p), обладающую некоторыми особенностями (возможно, неоднозначную). Имея функцию $V(x, p)$, можно построить семейство аналитических функционалов вида

$$(V, \psi) = \int_\Gamma V(x, p)\,\psi(p)\,dp, \qquad (3)$$

где Γ — любой фиксированный контур, минующий особенности функции $V(x, p)$ и эквивалентный вещественной оси, т. е. обладающий тем свойством, что

$$\int_\Gamma \psi(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\,d\sigma$$

для любой основной функции $\psi(s)$. В частности, годится любая прямая, параллельная вещественной s-оси, не проходящая через особые точки функции $V(x, p)$.

Каждый из этих функционалов определяет решение уравнения (2), а обратное преобразование Фурье такого функционала — решение уравнения (1). Только это решение, вообще говоря, не обращается в нуль при $t < 0$.

Выделить аналитический функционал (3), обратное преобразование Фурье которого обращается в нуль при $t < 0$, в общем случае представляется затруднительным.

Предположим, что функция $V(x, p)$ обладает следующими специальными свойствами:

а) *выше прямой* $\operatorname{Im} p = p_2^0$ *функция $V(x, p)$ не имеет особых точек;*

б) *в указанной области функция $V(x, p)$ обладает интегрируемой мажорантой $W(p_1)$:*

$$|V(x, p)| \leqslant W(p_1), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} W(p_1)\,dp_1 < \infty.$$

Тогда аналитический функционал

$$(V, \psi) = \int_{-\infty+ip_2}^{\infty+ip_2} V(x, p)\,\psi(p)\,dp \qquad (p_2 > p_2^0)$$

есть преобразование Фурье обобщенной (даже обычной) функции $u(x, t)$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей уравнению (системе) (1).

Условия этой теоремы есть обычные условия существования обращения преобразования Лапласа. Преобразование Фурье функционала V записывается по формуле (2) п. 5 § 2:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ip_2}^{\infty+ip_2} V(x, p)\,e^{-ipt}\,dp.$$

Равенство нулю функции $u(x, t)$ для $t < 0$ вытекает при этом из оценки

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} e^{p_2 t} \int_{-\infty}^{\infty} W(p_1)\,dp_1,$$

если устремить p_2 к $+\infty$.

Пусть, далее, дана функция $V_1(x, p)$, которая может быть представлена в форме

$$V_1(x, p) = Q(p)\, V(x, p), \tag{4}$$

где $V(x, p)$ обладает указанными выше свойствами, а $Q(p)$ — некоторый многочлен.

Уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$u_1(x, t) = Q\left(i \frac{d}{dt}\right) u(x, t),$$

где $u_1(x, t)$ и $u(x, t)$ — обратные преобразования Фурье функций $V_1(x, p)$ и $V(x, p)$; мы видим, что и в этом случае $V_1(x, p)$ есть преобразование Фурье функционала, сосредоточенного на полуоси $t \geqslant 0$.

ГЛАВА III

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НА ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Простейшим примером обобщенной функции, сосредоточенной на поверхности, является обобщенная функция

$$(f, \varphi) = \int_S f(x)\, \varphi(x)\, d\sigma, \tag{1}$$

где S — данная поверхность, $d\sigma$ — ее элемент, $f(x)$ — фиксированная функция, а $\varphi(x)$ — любая основная функция *). Несколько более сложный пример получается, если заменить подынтегральную функцию выражением, содержащим производные функции $\varphi(x)$.

В этом параграфе мы определим и изучим другие важные функционалы, сосредоточенные на поверхности размерности $< n$, лежащей в n-мерном пространстве. Для случая $n = 1$, как мы знаем, функционалами, сосредоточенными в точке, являются дельта-функция и ее производные. Более того, как будет доказано во втором выпуске, всякий функционал, сосредоточенный в одной точке, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных. В случае $n > 1$, когда поверхность S $(n-1)$-мерна и задается уравнением

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2}$$

*) В этой главе основные функции предполагаются финитными и бесконечно дифференцируемыми, т. е. рассматривается только пространство K.

Пусть, далее, дана функция $V_1(x, p)$, которая может быть представлена в форме

$$V_1(x, p) = Q(p) V(x, p), \tag{4}$$

где $V(x, p)$ обладает указанными выше свойствами, а $Q(p)$ — некоторый многочлен.

Уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$u_1(x, t) = Q\left(i \frac{d}{dt}\right) u(x, t),$$

где $u_1(x, t)$ и $u(x, t)$ — обратные преобразования Фурье функций $V_1(x, p)$ и $V(x, p)$; мы видим, что и в этом случае $V_1(x, p)$ есть преобразование Фурье функционала, сосредоточенного на полуоси $t \geqslant 0$.

ГЛАВА III

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НА ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Простейшим примером обобщенной функции, сосредоточенной на поверхности, является обобщенная функция

$$(f, \varphi) = \int\limits_S f(x) \varphi(x) \, d\sigma, \tag{1}$$

где S — данная поверхность, $d\sigma$ — ее элемент, $f(x)$ — фиксированная функция, а $\varphi(x)$ — любая основная функция *). Несколько более сложный пример получается, если заменить подынтегральную функцию выражением, содержащим производные функции $\varphi(x)$.

В этом параграфе мы определим и изучим другие важные функционалы, сосредоточенные на поверхности размерности $< n$, лежащей в n-мерном пространстве. Для случая $n = 1$, как мы знаем, функционалами, сосредоточенными в точке, являются дельта-функция и ее производные. Более того, как будет доказано во втором выпуске, всякий функционал, сосредоточенный в одной точке, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных. В случае $n > 1$, когда поверхность S $(n-1)$-мерна и задается уравнением

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2}$$

*) В этой главе основные функции предполагаются финитными и бесконечно дифференцируемыми, т. е. рассматривается только пространство K.

аналогичную роль играют обобщенные функции, которые мы обозначим через $\delta(P)$, $\delta'(P)$ и т. д.; о них и будет идти речь.

Если $P\equiv x_1$, т. е. если S есть гиперплоскость $x_1=0$, естественно считать, что *)

$$(\delta(x_1),\ \varphi(x))\equiv\int\delta(x_1)\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int\left[\int\delta(x_1)\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1\right]dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\int\varphi(0,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_2\ldots dx_n,$$

т. е. естественно определить обобщенную функцию $\delta(x_1)$ равенством **)

$$\int\delta(x_1)\varphi(x)\,dx=\int\varphi(0,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_2\ldots dx_n. \qquad (3)$$

По такой же причине обобщенную функцию $\delta^{(k)}(x_1)$ естественно определить формулой

$$\int\delta^{(k)}(x_1)\varphi(x)\,dx=(-1)^k\int\varphi^{(k)}_{x_1}(0,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_2\ldots dx_n. \qquad (4)$$

Пусть теперь $P(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — произвольная достаточно гладкая функция, такая, что при $P=0$

$$\operatorname{grad}P\neq0 \qquad (5)$$

(т. е. на поверхности $P=0$ нет особых точек). Тогда можно определить обобщенную функцию $\delta(P)$ следующим образом.

В достаточно малой окрестности U произвольной точки поверхности $P=0$ мы можем ввести новые координаты так, чтобы поверхность $P=0$ стала одной из координатных

*) Мы пользуемся символикой, установленной в конце п. 3 § 1 гл. I.

**) Тем самым мы принимаем, что $\delta(x_1)$ есть прямое произведение $\delta(x_1)\times1(x_2,\ldots,x_n)$, где $\delta(x_1)$ — дельта-функция на прямой x_1, а $1(x_2,\ldots,\ x_n)$ — функция от переменных $x_2,\ldots,x_n$, тождественно равная единице (см. гл. I, § 5, п. 1).

поверхностей. Для этого мы положим $P=u_1$ и остальные координаты $u_2,\ \ldots,\ u_n$ выберем произвольно, но так, чтобы якобиан $D\left(\begin{matrix}x\\u\end{matrix}\right)$ переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$ по переменным $u_1,\ \ldots,\ u_n$ был отличен от нуля (это всегда можно сделать благодаря условию $\operatorname{grad}P\neq0$ при $P=0$). Не ограничивая общности, можно считать, что основная функция $\varphi(x)$ отлична от нуля лишь в пределах окрестности U *). Произведем в «интеграле» $\int\delta(P)\varphi\,dx$, который мы хотим определить, замену переменных:

$$\int\delta(P)\varphi(x)\,dx=\int\delta(P)\varphi_1(u)D\left(\begin{matrix}x\\u\end{matrix}\right)du=\int\delta(u_1)\psi(u)\,du,$$

где

$$\varphi_1(u_1,\ \ldots,\ u_n)=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ \text{и}\ \psi=\varphi_1(u)D\left(\begin{matrix}x\\u\end{matrix}\right). \qquad (6)$$

Отсюда видно, что обобщенную функцию $\delta(P)$ следует определить формулой

$$(\delta(P),\ \varphi)=\int\delta(P)\varphi\,dx=\int\psi(0,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)\,du_2\ldots du_n. \qquad (7)$$

Последний интеграл берется по поверхности $P=0$; это и дает основание говорить, что функционал $\delta(P)$ сосредоточен на поверхности $P=0$.

Аналогично естественно положить

$$(\delta^{(k)}(P),\ \varphi)=\int\delta^{(k)}(P)\varphi\,dx=$$
$$=(-1)^k\int\psi^{(k)}_{u_1}(0,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)\,du_2\ldots du_n, \qquad (8)$$

где функция $\psi(u)$ определена формулой (6) и интеграл справа в (8) снова берется по поверхности $P=0$.

Чтобы эти формулы имели смысл, заведомо достаточно предположить, что функция $P(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $k+1$.

На первый взгляд кажется, что определения (6) и (7) существенно зависят от выбора системы координат. На

*) См. добавление 1 к гл. I, п. 2.

самом деле это не так: мы покажем, что обобщенные функции $\delta(P)$, $\delta'(P)$, ... однозначно определяются функцией P. Наиболее удобно дать их определения в инвариантной форме, в которой специальные координаты $u_1, \ldots, u_n$ вообще не участвуют, и при этом вести рассуждения, пользуясь так называемой теорией дифференциальных форм. Те читатели, которые хотят обойтись без дифференциальных форм, могут пользоваться готовыми формулами; мы перечислим их несколько ниже. Однако аппарат дифференциальных форм чрезвычайно удобен, и мы его в этом параграфе будем систематически применять. Необходимый минимум сведений о дифференциальных формах излагается в п. 1.

Под знаком интеграла справа в (7), если вернуться к старым координатам и обозначениям функций, стоит линейная комбинация функции $\varphi(x)$ и ее производных с зависящими от x коэффициентами. В п. 7 мы покажем, что всякий функционал f вида

$$(f, \varphi)=\sum_{i_1+\ldots+i_n\leqslant k}\ \int_{P=0} a_{i_1\ldots i_k}(x)\,\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}\varphi(x)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}\,dx \tag{9}$$

выражается через $\delta(P)$, $\delta'(P)$ и т. д. следующим образом:

$$(f, \varphi)=\sum_{j=0}^{k}\int b_j(x)\,\delta^{(j)}(P)\,\varphi\,dx. \tag{10}$$

В записи (10) только $k+1$ произвольных функций, тогда как в записи (9) их гораздо больше. Запись (9) обладает тем преимуществом, что она однозначна: если $f=0$, то $b_0(x)=\ldots=b_k(x)=0$, тогда как о коэффициентах $a_{i_1\ldots i_n}(x)$ этого сказать нельзя.

Приведем теперь перечень формул, которые мы позднее докажем. В этих формулах функцию P надо считать имеющей бо́льшую гладкость, чем мы выше предположили; чтобы не отвлекаться, мы сразу предположим P бесконечно дифференцируемой.

Обозначим через $\theta(P)$ характеристическую функцию области $P\geqslant 0$:

$$\theta(P)=\begin{cases}0 & \text{при } P<0,\\ 1 & \text{при } P\geqslant 0,\end{cases}\qquad (\theta(P), \varphi)=\int_{P\geqslant 0}\varphi(x)\,dx. \tag{11}$$

Тогда справедливо равенство

$$\theta'(P)=\delta(P), \tag{12}$$

которое надо понимать в следующем смысле:

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j}=\frac{\partial P}{\partial x_j}\,\delta(P). \tag{12'}$$

Далее, справедлива формула «дифференцирования $\delta^{(k)}(P)$ как сложной функции»:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\delta^{(k)}(P)=\frac{\partial P}{\partial x_j}\,\delta^{(k+1)}(P)\quad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Справедливы также следующие тождества, связывающие обобщенную функцию $\delta(P)$ с ее производными:

$$P\delta(P)=0, \tag{14}$$

$$P\delta'(P)+\delta(P)=0, \tag{15}$$

$$P\delta''(P)+2\delta'(P)=0, \tag{16}$$

. . . .

$$P\delta^{(k)}(P)+k\,\delta^{(k-1)}(P)=0, \tag{17}$$

. . . .

Если поверхности $P=0$ и $Q=0$ (функция Q обладает теми же свойствами, что и P) не пересекаются, то

$$\delta(PQ)=P^{-1}\delta(Q)+Q^{-1}\delta(P). \tag{18}$$

В частности, если функция $a(x)$ не обращается в нуль, то

$$\delta(aP)=a^{-1}\delta(P). \tag{19}$$

Отсюда можно вывести, что

$$\delta^{(k)}(aP)=a^{-(k+1)}\,\delta^{(k)}(P). \tag{20}$$

Сказанное выше относится к функционалам, сосредоточенным на $(n-1)$-мерной поверхности в n-мерном пространстве. Пусть теперь поверхность S имеет меньшее число измерений. Предположим, что она задается уравнениями

$$P_1(x_1, \ldots, x_n)=0, \ \ldots, \ P_k(x_1, \ldots, x_n)=0, \tag{21}$$

где $P_1, \ldots, P_k$ — достаточно гладкие функции, причем поверхности $P_i(x)=0$ $(i=1, \ldots, k)$ образуют «правильную сетку», т. е. в окрестности каждой точки поверхности S можно принять $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ за первые k координат $u_1, \ldots, u_k$, а остальные координаты $u_{k+1}, \ldots, u_n$ выбрать так, чтобы якобиан $D\left(\frac{x}{u}\right)$ был отличен от нуля. В этом случае мы аналогично предыдущему можем определить обобщенную функцию $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ и ее производные $\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$. А именно, если мы хотим, чтобы выполнялось тождество

$$\int \delta(P_1, \ldots, P_k)\varphi\, dx = \int \delta(u_1, \ldots, u_k)\varphi_1(u) D\left(\frac{x}{u}\right) du =$$
$$= \int \delta(u_1, \ldots, u_k)\psi(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n,$$

где

$$\varphi_1(u)=\varphi(x) \quad \text{и} \quad \psi(u)=\varphi_1(u) D\left(\frac{x}{u}\right), \tag{22}$$

то мы должны положить

$$\int \delta(P_1, \ldots, P_k)\varphi\, dx =$$
$$= \int \psi(0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)\, du_{k+1} \ldots du_n; \tag{23}$$

по таким же мотивам следует положить

$$\int \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}\delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}\varphi(x)\, dx = (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} \times$$
$$\times \int \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}\psi(0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)}{\partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_k^{\alpha_k}}\, du_{k+1} \ldots du_n. \tag{24}$$

В п. 9 мы покажем, что и эти определения не зависят от специального выбора системы координат. Для этих обобщенных функций справедливы следующие тождества:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial x_j} \tag{25}$$

(«теорема о дифференцировании сложной функции»);

$$P_i\delta(P_1, \ldots, P_k)=0, \tag{26}$$
$$P_iP_j\delta(P_1, \ldots, P_k)=0, \tag{27}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_1P_2\ldots P_k\delta(P_1, \ldots, P_k)=0, \tag{28}$$

а также тождества, получаемые формальным дифференцированием последних.

1. Предварительные сведения о дифференциальных формах *). *Дифференциальной формой* k-го *порядка* в n-мерной области с координатами $x_1, \ldots, x_n$ называется выражение вида

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k},$$

где суммирование проводится по всем сочетаниям n индексов по k. Функции $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми функциями координат. При этом две формы k-го порядка считаются *равными*, если они переходят друг в друга путем преобразования произведений дифференциалов по формуле

$$dx_i\, dx_j = -dx_j\, dx_i \tag{1}$$

и приведения подобных членов.

Это условие, в частности, показывает, что каждый член формы, содержащий два одноименных дифференциала, равен нулю. Кроме того, пользуясь этим правилом, можно, если угодно, записать любую форму «в каноническом виде» — так, чтобы в каждом члене индексы шли в возрастающем порядке.

Будем называть форму *финитной*, если все ее коэффициенты являются финитными функциями.

*) Теория дифференциальных форм не понадобится нам в максимальной общности; поэтому всюду, где можно, мы в целях наглядности вносим упрощения. Читателю, желающему подробнее ознакомиться с затронутыми в этом пункте понятиями, можно обратиться, например, к книге: П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947, или к книге: Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956.

Внешним произведением форм $\sum a_{i_1 \ldots i_k}(x)\,dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$ и $\sum b_{j_1 \ldots j_m}(x)\,dx_{j_1} \ldots dx_{j_m}$ называется форма порядка $k+m$, полученная в результате формально алгебраического перемножения данных форм; результат этот можно, разумеется, дальше упростить, используя правило (1) и приводя подобные члены *).

Из этого определения, в частности, вытекает, что антикоммутативный закон справедлив и для произведения любых форм первого порядка $\alpha = \sum a_j(x)\,dx_j$ и $\beta = \sum b_k(x)\,dx_k$; действительно,

$$\alpha\beta = \sum_{j,k} a_j(x) b_k(x)\,dx_j\,dx_k = -\sum_{j,k} a_j(x) b_k(x)\,dx_k\,dx_j = -\beta\alpha.$$

Выведем формулу преобразования дифференциальной формы при бесконечно дифференцируемом преобразовании координат $x_i = x_i(x'_1, \ldots, x'_n)$. Мы имеем:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\,dx'_j$$

и

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}\,dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} =$$
$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{j} a_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{j_1}} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial x'_{j_k}}\,dx'_{j_1} \ldots dx'_{j_k}.$$

Слагаемые полученной суммы, содержащие два одинаковых дифференциала, обращаются в нуль. Слагаемые, содержащие одинаковые по составу группы из различных дифференциалов, можно объединить, используя правило $dx'_j\,dx'_k = -dx'_k\,dx'_j$; после этого коэффициентом при члене $dx'_{j_1} \ldots dx'_{j_k}$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, как легко проверить, станет якобиан

$$D\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \ldots & x_{i_k} \\ x'_{j_1} & x'_{j_2} & \ldots & x'_{j_k} \end{pmatrix}.$$

*) Естественно, что коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_k}$ и $b_{j_1 \ldots j_m}$ предполагаются перестановочными между собой и с дифференциалами.

Таким образом, мы получаем:

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}\,dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} =$$
$$= \sum_{j_1 < \ldots < j_k} a'_{j_1 \ldots j_k}\,dx'_{j_1} \ldots dx'_{j_k}, \tag{2}$$

где

$$a'_{j_1 \ldots j_k} = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} D\begin{pmatrix} x_{i_1} & \ldots & x_{i_k} \\ x'_{j_1} & \ldots & x'_{j_k} \end{pmatrix} a_{i_1 \ldots i_k}. \tag{3}$$

В частности, для формы n-го порядка, которая всегда приводится к одному члену, мы имеем:

$$a\,dx_1 \ldots dx_n = aD\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} dx'_1 \ldots dx'_n. \tag{4}$$

Заметим, что *по этой формуле преобразуются подынтегральные выражения при замене переменных в кратном интеграле*. Можно, следовательно, при такой замене пользоваться техникой дифференциальных форм. Например, для двойного интеграла, если $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то

$$dx = \varphi'_u\,du + \varphi'_v\,dv;\quad dy = \psi'_u\,du + \psi'_v\,dv,$$
$$dx\,dy = (\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u)\,du\,dv.$$

Внешний дифференциал дифференциальной формы

$$\alpha = \sum a_{i_1 \ldots i_k}\,dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$$

определяется как дифференциальная форма порядка $k+1$

$$d\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \left(\sum_i \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_i}\,dx_i \right) dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}, \tag{5}$$

где, разумеется, снова можно произвести упрощения, пользуясь правилом $dx_i\,dx_j = -dx_j\,dx_i$.

Например, внешний дифференциал формы нулевого порядка, под которой мы понимаем просто скалярную функцию $a(x)$, есть обычный дифференциал, т. е. форма 1-го порядка $\sum \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i$ (коэффициенты ее образуют градиент скаляра $a(x)$). Внешний дифференциал формы 1-го порядка $\sum a_i(x)\,dx_i$ есть форма 2-го порядка:

$$\sum_{i<j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)dx_i\,dx_j$$

(если коэффициентам формы $\sum a_i\,dx_i$ сопоставить вектор $a=\{a_i\}$, то коэффициентам внешнего дифференциала будет соответствовать ротор вектора a). Дифференциал формы $(n-1)$-го порядка

$$\sum a_j(x)\,dx_1\,\ldots\,dx_{j-1}\,dx_{j+1}\,\ldots\,dx_n$$

есть форма n-го порядка:

$$\left\{\sum(-1)^{j+1}\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\right\}dx_1\,\ldots\,dx_n.$$

Пользуясь правилом (1), нетрудно проверить, что для любой формы α

$$d\,d\alpha=0. \tag{6}$$

Рассмотрим вопрос об интегрировании дифференциальных форм по областям и многообразиям.

Примем, что форма n-го порядка $\alpha=a(x)\,dx_1\,\ldots\,dx_n$ интегрируется по n-мерной области G пространства R_n по обычным правилам многомерного интегрирования.

Теперь мы хотим определить интеграл от формы k-го порядка по k-мерной области. Предварительно скажем несколько слов об ориентации областей и поверхностей.

Если в некоторой окрестности V (любого числа измерений m) задана локальная система координат $u_1,\ldots,u_m$, то говорят, что этим определяется *ориентация* окрестности V. *Та же* ориентация определяется любой другой локальной системой координат $v_1,\ldots,v_m$, переход от которых к $u_1,\ldots,u_m$ выражается функциями с п о л о ж и т е л ь н ы м якобианом. Возможна еще *противоположная* ориентация V. Она определяется любой локальной системой координат $w_1,\ldots,w_m$, переход от которых к $u_1,\ldots,u_m$ выражается функциями с о т р и ц а т е л ь н ы м якобианом.

Область или поверхность Γ (m измерений) называется *ориентируемой*, если в окрестностях всех ее точек можно

определить ориентации согласованным образом, т. е. так, чтобы координаты, действующие в пересекающихся окрестностях, определяли в пересечении одну и ту же ориентацию. Неориентируемые поверхности (например, лист Мёбиуса) мы не будем рассматривать.

Пусть некоторая m-мерная окрестность U содержится в $(m+1)$-мерной окрестности V и разделяет последнюю на две части: одну из этих частей будем считать *внутренней*, а другую *внешней*. Допустим, что система координат $w_1,\ldots,w_m$ в U может быть дополнена до системы координат $w_0, w_1,\ldots,w_m$ в V. Тогда мы условимся говорить, что соответствующая *ориентация V отвечает положительному направлению нормали*, если w_0 возрастает во внешнюю сторону от U; в противном случае мы будем говорить, что *ориентация V отвечает отрицательному направлению нормали.*

Определим теперь интеграл от формы α k-го порядка по k-мерной ($k\leqslant n$) ориентируемой области Γ. Предположим эту область замкнутой, ограниченной и достаточно гладкой. Разобьем Γ на куски $\Gamma^{(1)},\ldots,\Gamma^{(m)}$, в каждом из которых можно ввести локальные координаты, и введем эти координаты согласованным образом. Тем самым на Γ определится одна из двух возможных ориентаций. Приведем форму α в каждом куске $\Gamma^{(i)}$ к выбранным в нем локальным координатам $u_1,\ldots,u_k$. Если форма α была задана в n-мерной области, содержащей область Γ, то локальные координаты $u_1,\ldots,u_n$ нужно выбирать так, чтобы $n-k$ из них, например $u_{k+1},\ldots,u_n$, обращались в нуль на Γ; тогда $du_{k+1}=0,\ldots,du_n=0$ на Γ, так что форма α приводится к виду

$$\alpha=a(u_1,\ldots,u_k)\,du_1\,\ldots\,du_k.$$

Проинтегрируем в этих координатах форму α обычным образом по каждому куску $\Gamma^{(i)}$ и сложим результаты. Нетрудно понять, что определенное так значение интеграла $\int\limits_\Gamma \alpha$ не зависит от разбиения области Γ на куски и от выбора локальных координат в каждом куске, отвечающих фиксированной ориентации: достаточно вспомнить, что при переходе к новым координатам $u'_1, \ldots, u'_k$ форма α приобретает вид

$$\alpha = a\left(u_1(u'_1, \ldots, u'_k), \ldots, u_k(u'_1, \ldots, u'_k)\right) \times \\ \times D\begin{pmatrix} u_1 \ldots u_k \\ u'_1 \ldots u'_k \end{pmatrix} du'_1 \ldots du'_k.$$

Однако, если мы во всех кусках $\Gamma^{(i)}$ перейдем к локальным координатам, отвечающим противоположной ориентации, то величина интеграла $\int\limits_\Gamma \alpha$ изменит знак, так как в этом случае якобианы $D\begin{pmatrix} u_1 \ldots u_k \\ u'_1 \ldots u'_k \end{pmatrix}$ отрицательны.

Таким образом, $\int\limits_\Gamma \alpha$ определен однозначно с точностью до знака, а знак, в свою очередь, однозначно определен ориентацией области Γ.

Ф о р м у л а Г а у с с а — О с т р о г р а д с к о г о. Пусть форма α порядка $n-1$ задана в некоторой ограниченной n-мерной области G с кусочно-гладкой границей Γ. Предположим ориентацию области G отвечающей положительному направлению нормали к границе Γ. Через $d\alpha$, как и выше, обозначим внешний дифференциал формы α. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_G d\alpha = \int\limits_\Gamma \alpha, \tag{7}$$

называемая *формулой Гаусса — Остроградского*. Если ориентация G отвечает отрицательному направлению нормали, то перед одним из интегралов нужно поставить минус.

Для примера рассмотрим форму α 2-го порядка в трехмерном пространстве. В координатах x_1, x_2, x_3 она записывается в виде

$$\alpha = a_1\, dx_2\, dx_3 + a_2\, dx_3\, dx_1 + a_3\, dx_1\, dx_2,$$

а ее дифференциал — в виде

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

и формула Гаусса — Остроградского приобретает вид

$$\int\limits_\Gamma [a_1\, dx_2\, dx_3 + a_2\, dx_3\, dx_1 + a_3\, dx_1\, dx_2] = \\ = \int\limits_G \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3, \tag{8}$$

в котором она обычно и приводится в курсах анализа.

Обобщением формулы Гаусса — Остроградского является ф о р м у л а С т о к с а *). Она записывается в той же форме

$$\int\limits_G d\alpha = \int\limits_\Gamma \alpha,$$

только здесь уже G есть k-мерная ограниченная область $(k < n)$, а α — форма $(k-1)$-го порядка; ориентация области G по-прежнему предполагается отвечающей положительному направлению нормали к границе Γ.

Примером может служить классическая формула Стокса. В трехмерном пространстве в координатах x_1, x_2, x_3 форма α 1-го порядка записывается в виде

$$\alpha = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3,$$

а ее дифференциал — в виде

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2\, dx_3 + \\ + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3\, dx_1;$$

следовательно, формула Стокса приобретает вид

$$\int\limits_G \left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2\, dx_3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3\, dx_1\right] = \int\limits_\Gamma [a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3], \tag{9}$$

где G — двумерная ограниченная область, а Γ — ограничивающая ее кривая.

*) См. Ж. де Р а м, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, где эта формула приведена в терминах, близких к здесь используемым.

2. Форма ω. Рассмотрим теперь поверхность S, определяемую уравнением $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где функция $P(x)$ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{grad} P = \left\{\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial x_n}\right\}$ не обращается в нуль на поверхности S (так что отсутствуют особые точки).

В этом пункте мы изучим важную для дальнейшего специальную дифференциальную форму ω порядка $n-1$, инвариантно связанную с поверхностью $P=0$, точнее, однозначно определенную функцией P на поверхности $P=0$.

Эта форма определяется уравнением

$$dP \cdot \omega = dv, \tag{1}$$

где $dv = dx = dx_1 \ldots dx_n$, а dP — дифференциал функции P.

Прежде всего проверим, что при сделанных выше предположениях такая форма ω действительно *существует в некоторой n-мерной области, содержащей поверхность S.*

В самом деле, при этих предположениях в окрестности любой точки поверхности можно ввести локальную систему координат $u_1, \ldots, u_n$ так, что одной из этих координат, например u_j, будет величина $P(x)$, причем формулы перехода от координат $x_1, \ldots, x_n$ к координатам $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будут задаваться бесконечно дифференцируемыми функциями с положительным якобианом $D\left(\frac{x}{u}\right)$. В этих координатах мы имеем $dv = D\left(\frac{x}{u}\right) du_1 \ldots du_{j-1}\, dP\, du_{j+1} \ldots du_n$ и, следовательно, можно положить

$$\omega = (-1)^{j-1} D\left(\frac{x}{u}\right) du_1 \ldots du_{j-1}\, du_{j+1} \ldots du_n. \tag{2}$$

Таким образом, существование формы ω доказано.

Если, в частности, в окрестности данной точки $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, то в качестве координат $u_1, \ldots, u_n$ можно взять

$$u_1 = x_1, \ \ldots, \ u_j = P, \ \ldots, \ u_n = x_n;$$

тогда

$$D\left(\frac{x}{u}\right) = \frac{1}{D\left(\frac{u}{x}\right)} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}},$$

и форма ω, определенная по формуле (2), принимает вид

$$\omega = (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим вопрос о единственности формы ω. Вообще говоря, форма ω не определяется уравнением (1) однозначно; очевидно, что наравне с некоторой формой ω, удовлетворяющей уравнению (1), можно рассматривать и любую форму вида $\omega + \gamma$, где γ — любая форма, «ортогональная» к форме dP, т. е. удовлетворяющая условию $dP \cdot \gamma = 0$. Покажем, что *всякая форма γ, ортогональная к форме dP, имеет вид*

$$\gamma = \alpha\, dP,$$

где α — некоторая форма $(n-2)$-го порядка. Действительно, в координатах $u_1 = P, u_2, \ldots, u_n$ дифференциальную форму γ, как и любую форму $(n-1)$-го порядка, можно записать в виде

$$\gamma = g_1\, du_2 \ldots du_n + g_2\, dP\, du_3 \ldots du_n + \ldots + g_n\, dP\, du_2 \ldots du_{n-1},$$

где коэффициенты $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — функции от координат. Равенство $dP \cdot \gamma = 0$ приводит к соотношению $g_1 = 0$. Вынося dP за скобки из остальных слагаемых, приходим к справедливости утверждения.

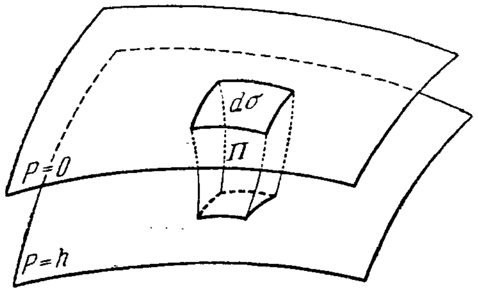
Отметим (это замечание несколько ниже нам понадобится), что, как видно из доказательства, *если форма γ финитна, то α также финитна.*

Из доказанного следует, в частности, что на самой поверхности S форма γ тождественно равна нулю (так как $dP = 0$), и следовательно, *на самой поверхности $P=0$ форма ω определена функцией P однозначно.*

Выясним геометрический смысл формы ω. Рассмотрим поверхности S и S_h, определенные соответственно уравнениями $P=0$ и $P=h$ при малом h (черт. 6). Выберем элементарную площадку $d\sigma$ на поверхности S и перенесем ее с помощью координатных линий $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$ на поверхность S_h. При этом получится фигура Π, имеющая некоторый объем dv. Форма ω, согласно определению, есть отношение dv к $dP = h$. Таким образом, *форма* ω

есть скорость изменения элементарного объема dv по отношению к изменению величины P.

На этой модели легко объясняется инвариантность формы ω на поверхности S. Действительно, при замене системы координат $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$ на новую изменяется наклон фигуры П по отношению к поверхности S; но основание ее не меняется, не меняется и ее высота, определяемая расстоянием до поверхности S_h, не



Черт. 6.

меняется, следовательно, и ее объем, откуда следует, что не меняется и $\omega = \frac{dv}{dP}$. Таким образом, форма ω не зависит от выбора остальных координат $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$.

Однако форма ω зависит, разумеется, от выбора функции P, определяющей уравнением $P=0$ поверхность S. Посмотрим, как должна измениться форма ω, если вместо уравнения $P=0$ рассмотреть уравнение $P_1 \equiv \alpha P = 0$ с отличной от нуля функцией $\alpha(x)$. Мы имеем здесь вдоль поверхности S равенство $dP_1 = \alpha\, dP$, откуда следует, что соответствующая форма

$$\omega_1 = \frac{dv}{dP_1} = \frac{1}{\alpha}\,\omega.$$

Заметим еще, что в том случае, когда функция $P(x)$ есть евклидово расстояние точки x от поверхности $P=0$ (или отличается от этого расстояния на малую высшего порядка), форма ω на S совпадает с евклидовым элементом $d\sigma$ поверхности S.

3. Обобщенная функция $\delta(P)$. Теперь переходим к нашему основному определению. Поставим в соответствие каждой основной функции $\varphi(x)$ число

$$\int\limits_{P=0} \varphi(x)\,\omega.$$

Мы получим, очевидно, линейный непрерывный функционал на основном пространстве. Обозначим этот функционал через $\delta(P)$, т. е. положим

$$(\delta(P), \varphi) = \int \delta(P)\,\varphi\,dx = \int\limits_{P=0} \varphi(x)\,\omega. \tag{1}$$

Из сказанного выше следует, что *функционал $\delta(P)$ не зависит от специального выбора формы ω, а зависит лишь от функции $P(x)$.*

Чтобы убедиться в совпадении этого определения с определением $\delta(P)$, данным в начале этого параграфа, достаточно заметить, что в координатах $u_1 = P, u_2, \ldots, u_n$ по формуле (2) п. 2

$$\omega = D\binom{x}{u}\,du_2 \ldots du_n.$$

Примеры. 1. Прежде всего рассмотрим обобщенную функцию $\delta(x_1)$, которая в начале этого параграфа была исходным пунктом для общего определения $\delta(P)$. Уравнение $x_1 = 0$ определяет координатную гиперплоскость; форма ω в этом случае выражается в виде

$$\omega = dx_2 \ldots dx_n,$$

и поэтому

$$\int \delta(x_1)\,\varphi(x)\,dx = (\delta(x_1), \varphi) = \int \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n. \tag{2}$$

2. Рассмотрим функцию $\delta(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$, где $\sum \alpha_i^2 = 1$. Уравнение

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

определяет гиперплоскость, проходящую через начало координат ортогонально к единичному вектору α.

Если ввести координаты

$$u_1 = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,\quad u_2, \ldots, u_n$$

и притом так, чтобы матрица перехода была ортогональной (поворот осей), то форму ω можно задать в виде произведения $du_2 \ldots du_n$. Поэтому

$$(\delta(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n),\ \varphi)=\int\limits_{\sum\alpha_ix_i=0}\varphi\,du_2\ldots du_n=\int\limits_{\sum\alpha_ix_i=0}\varphi\,d\sigma, \quad (3)$$

где $d\sigma$ — евклидов элемент гиперплоскости $\sum\alpha_ix_i=0$.

3. Подсчитаем обобщенную функцию $\delta(xy-c)$ в двумерном пространстве. Уравнение $xy-c=0$ определяет гиперболу *). В координатах $u_1=x$, $u_2=xy-c$ мы получаем по формуле (3) п. 2 $\omega=-\frac{dx}{x}$, и следовательно,

$$(\delta(xy-c),\ \varphi(x,\ y))=$$
$$=\int\delta(xy-c)\,\varphi(x,\ y)\,dx\,dy=-\int\varphi\left(x,\ \frac{c}{x}\right)\frac{dx}{x}. \quad (4)$$

4. Построим обобщенную функцию $\delta(r-c)$, где $r^2=\sum x_i^2$, $c>0$. Уравнение $r-c=0$ определяет сферу O_c радиуса c. Так как $P=r-c$ есть евклидово расстояние от поверхности сферы, то при $r=c$ форма ω совпадает с евклидовым элементом поверхности сферы dO_c, так что **)

$$(\delta(r-c),\ \varphi)=\int\delta(r-c)\,\varphi\,dx=\int\limits_{O_c}\varphi\,dO_c, \quad (5)$$

и следовательно, $\delta(r-c)$ можно охарактеризовать как функционал, соответствующий массе, равномерно распределенной по сфере $r=c$ с плотностью единица.

Та же сфера радиуса c задается уравнением $r^2-c^2=0$. Найдем выражение $\delta(r^2-c^2)$. Положим $u_1=r^2-c^2$, $u_2=\theta_1, \ldots, u_n=\theta_{n-1}$, где $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ — те же углы, что и в обычных сферических координатах. Мы получим:

$$\omega=\frac{1}{2r}\,dO_c=\frac{1}{2c}\,dO_c$$

и

$$(\delta(r^2-c^2),\ \varphi)=\int\delta(r^2-c^2)\,\varphi\,dx=\frac{1}{2c}\int\limits_{O_c}\varphi\,dO_c. \quad (6)$$

*) Если $c\neq 0$. По поводу случая $c=0$ см. § 4, п. 2.
**) См. ниже пример 4 в п. 5.

Обобщенная функция $\delta(P)$ естественно возникает при дифференцировании характеристической функции $\theta(P)$ области $P\geqslant 0$, т. е. функции, равной 1 при $P(x)\geqslant 0$ и 0 при $P(x)<0$:

$$(\theta(P),\ \varphi)=\int\limits_{P\geqslant 0}\varphi(x)\,dx.$$

Утверждается, что имеет место формула

$$\theta'(P)=\delta(P), \quad (7)$$

которую надо понимать в том смысле, что для каждого $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j}=\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P). \quad (7')$$

Для доказательства формулы (7) проверим сначала, что при фиксированном j функционалы в правой и левой частях равенства (7′) совпадают в окрестности любой точки поверхности $P=0$, где $\frac{\partial P}{\partial x_j}\neq 0$ (вне этой поверхности они оба равны нулю). Для этого применим правую и левую части к основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля лишь в малой окрестности такой точки.

Левая часть преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j},\ \varphi\right)=-\left(\theta(P),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=-\int\limits_{P\geqslant 0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx,$$

а правая — к виду

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P),\ \varphi\right)=\left(\delta(P),\ \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\right)=\int\limits_{P=0}\frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega.$$

Предположим сначала, что область $P\geqslant 0$ ограничена. Тогда мы применим к этой области и к форме $(n-1)$-го порядка, стоящей под знаком интеграла справа, формулу Гаусса — Остроградского. В число координат мы включим саму величину P; тогда, учитывая, что в данном случае эта величина увеличивается в направлении внутрь этой области, мы получаем:

$$\int\limits_{P=0}\frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega=-\int\limits_{P\geqslant 0}d\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega\right).$$

Считая основную функцию $\varphi(x)$ отличной от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки поверхности $P=0$, форму под знаком интеграла справа можно вычислить в координатах $u_1=x_1, \ldots, u_{j-1}=x_{j-1}, u_j=P, \ldots, u_n=x_n$. В этих координатах

$$\omega=(-1)^{j-1}\frac{dx_1\ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\ldots dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}$$

и, следовательно,

$$d\left(\varphi\frac{\partial P}{\partial x_j}\omega\right)=(-1)^{j-1}d(\varphi\,dx_1\ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\ldots dx_n)=$$
$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_1\ldots dx_n.$$

Вне указанной области равенство

$$d\left(\varphi\frac{\partial P}{\partial x_j}\omega\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx$$

также имеет место, так как там $\varphi(x)\equiv 0$. Отсюда

$$\int\limits_{P=0}\frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega=-\int\limits_{P\geqslant 0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx.$$

Левая часть этого равенства есть $\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P),\ \varphi\right)$, а правая $\left(\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j},\ \varphi\right)$. Таким образом, в рассматриваемом случае равенство (7′) доказано.

Если область $P\geqslant 0$ не ограничена, то мы заменим ее пересечением G_R с достаточно большим шаром $|x|\leqslant R$, вне которого функция $\varphi(x)$ заведомо обращается в нуль. Если Γ_R — граница G_R, то формула Гаусса — Остроградского дает

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega=-\int\limits_{G_R}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx;$$

но так как вне шара $|x|\leqslant R$ функция $\varphi(x)$ равна нулю, то справедливо и равенство

$$\int\limits_{P=0}\frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega=-\int\limits_{P\geqslant 0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx,$$

которое нам и требуется.

Пусть теперь x — любая точка поверхности $P=0$. Мы можем построить здесь новую систему координат $\xi_j=\sum\alpha_{jk}x_k\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ так, чтобы $\frac{\partial P}{\partial\xi_j}\neq 0$ при всех j. Тогда по доказанному в окрестности данной точки будут справедливы все соотношения

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial\xi_j}=\frac{\partial P}{\partial\xi_j}\delta(P). \tag{8}$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_j\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\xi_j}=\sum_j\alpha_{jk}\frac{\partial}{\partial\xi_j}.$$

Умножая равенство (8) на α_{jk} и складывая по j, находим, что в окрестности данной точки

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_k}=\sum\alpha_{jk}\frac{\partial\theta(P)}{\partial\xi_j}=\sum\alpha_{jk}\frac{\partial P}{\partial\xi_j}\delta(P)=\frac{\partial P}{\partial x_k}\delta(P).$$

Таким образом, функционалы $\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial P}{\partial x_k}\delta(P)$ совпадают в окрестности любой точки поверхности $P=0$. Но тогда это равные функционалы, что и завершает доказательство.

Иногда удобно рассматривать *обобщенные вектор-функции*, т. е. векторы $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$, где составляющие $f_1,\ \ldots,\ f_n$ — обобщенные функции. Две вектор-функции $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$ и $g=(g_1,\ \ldots,\ g_n)$ считаются равными, если $f_1=g_1,\ \ldots,\ f_n=g_n$. Если положить для любой обобщенной функции g

$$\operatorname{grad} g=\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial g}{\partial x_n}\right), \tag{9}$$

то формулу (7′) можно записать в виде

$$\operatorname{grad}\theta(P)=\delta(P)\operatorname{grad}P. \tag{7″}$$

В следующем пункте эта формула будет использована для простого вывода формулы Грина.

4. Пример: вывод формулы Грина. В предыдущем пункте мы упомянули о возможности рассматривать обобщенные вектор-функции, т. е. векторы $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$, составляющие f_i которых — обобщенные функции.

Обобщенные вектор-функции можно считать функционалами над основными вектор-функциями: если $f=(f_1, \ldots, f_n)$, $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, то мы полагаем

$$(f, \psi)=\sum_{j=1}^{n}(f_j, \psi_j). \tag{1}$$

Например, если g — обобщенная функция, ψ — основная функция, то мы можем записать функционал Δg (Δ — оператор Лапласа) по формуле

$$(\Delta g, \psi)=-(\operatorname{grad} g, \operatorname{grad}\psi), \tag{2}$$

где $\operatorname{grad} g$ — обобщенная вектор-функция $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$, а $\operatorname{grad}\psi$ — основная вектор-функция $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)$.

В предыдущем пункте была доказана формула

$$\operatorname{grad}\theta(P)=\delta(P)\operatorname{grad}P. \tag{3}$$

Пользуясь ею, мы сейчас дадим простой вывод формулы Грина.

Заметим, что если g — обобщенная, а $h(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то, как обычно,

$$\operatorname{grad}(hg)=g\operatorname{grad}h+h\operatorname{grad}g.$$

Пусть $u(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция; рассмотрим результат применения к основной функции $\varphi(x)$ функционала $\Delta[u\theta(P)]$. Используя векторную форму записи, мы преобразуем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned}(\Delta[u\theta(P)], \varphi)&=-(\operatorname{grad}[u\theta(P)], \operatorname{grad}\varphi)=\\&=-(u\operatorname{grad}\theta(P), \operatorname{grad}\varphi)-(\theta(P)\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}\varphi)=\\&=-(u\delta(P)\operatorname{grad}P, \operatorname{grad}\varphi)-(\theta(P)\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}\varphi).\end{aligned}$$

Вспоминая определение функционалов $\delta(P)$ и $\theta(P)$, мы можем написать:

$$(\Delta[u\theta(P)], \varphi)=$$
$$=-\int\limits_{P\geqslant 0}(\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}\varphi)\,dx-\int\limits_{P=0}u\cdot(\operatorname{grad}P, \operatorname{grad}\varphi)\,\omega. \tag{4}$$

Это и есть формула Грина в обобщенной записи. В том случае, когда $P(x)$ есть с точностью до малых высшего порядка расстояние от точки x до поверхности $P=0$ и, следовательно, $\operatorname{grad}P$ есть единичный нормальный вектор, $(\operatorname{grad}P, \operatorname{grad}\varphi)$ будет нормальной производной функции φ, а ω сведется к евклидовому элементу $d\sigma$ поверхности $P=0$. В этом случае формула (4) переходит в обычную:

$$\int\limits_{P\geqslant 0}\Delta u\,\varphi\,dv=-\int\limits_{P\geqslant 0}(\operatorname{grad}u, \operatorname{grad}\varphi)\,dx-\int\limits_{P=0}u\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma. \tag{5}$$

Мы доказали ее для бесконечно дифференцируемых функций u и φ; но теперь предельным переходом ее можно распространить на функции u и φ, имеющие производные только того порядка, который требуется самой формулой.

5. Формы $\omega_k(\varphi)$ и обобщенные функции $\delta^{(k)}(P)$. Важную роль играют и производные функционала $\delta(P)$ по аргументу P. Чтобы дать их инвариантные определения, мы введем, кроме формы ω, еще серию дифференциальных форм $(n-1)$-го порядка, $\omega_0(\varphi)$, $\omega_1(\varphi), \ldots$, зависящих от функции P и от основной функции $\varphi(x)$; эти формы определяются уравнениями

$$\omega_0(\varphi)=\varphi\cdot\omega, \tag{1}$$
$$d\omega_0(\varphi)=dP\cdot\omega_1(\varphi), \tag{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d\omega_{k-1}(\varphi)=dP\cdot\omega_k(\varphi), \tag{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где d — внешний дифференциал.

Существование этих форм в некоторой области, содержащей поверхность $P=0$, легко проверяется в координатах $u_1=P$, $u_2, \ldots, u_n$. Действительно, вспоминая, что

$$\omega=D\left(\frac{x}{u}\right)du_2\ldots du_n$$

и полагая $\varphi(x)=\varphi_1(u)$, мы можем написать уравнение

$$d\omega_0=d(\varphi_1\omega)=\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1 D\left(\frac{x}{u}\right)\right)du_1\ldots du_n=dP\cdot\omega_1(\varphi),$$

откуда видно, что можно положить

$$\omega_1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1 D\left(\frac{x}{u}\right)\right) du_2 \ldots du_n.$$

Далее, таким же образом имеем уравнение

$$d(\omega_1(\varphi)) = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_1 D\left(\frac{x}{u}\right)\right) dP\, du_2 \ldots du_n = dP\cdot\omega_2(\varphi),$$

и можно положить

$$\omega_2(\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_1 D\left(\frac{x}{u}\right)\right) du_2 \ldots du_n$$

и т. д.; вообще,

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}\left(\varphi_1 D\left(\frac{x}{u}\right)\right) du_2 \ldots du_n, \qquad (4)$$

где $\varphi_1(u) = \varphi(x)$.

В отличие от формы ω эти новые формы уже не определены однозначно функцией $P(x)$ (и основной функцией $\varphi(x)$) даже на поверхности $P=0$. Но для нас важно лишь то, что *интеграл от формы* $\omega_k(\varphi)$ *по поверхности* $P=0$ *определен однозначно*. Чтобы убедиться в этом, мы сейчас проверим, что если форма $\tilde{\omega}_k(\varphi)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\omega_k(\varphi)$, то

$$\omega_k - \tilde{\omega}_k = d\alpha + \beta\, dP, \qquad (5)$$

где α и β — некоторые финитные формы соответственно $(n-1)$-го и $(n-2)$-го порядков. Сначала поясним, почему отсюда следует однозначность интеграла. На поверхности $P=0$ второе слагаемое обращается в нуль, так что

$$\omega_k - \tilde{\omega}_k = d\alpha.$$

По теореме Стокса

$$\int_{P=0} d\alpha = \int_{\Gamma} \alpha,$$

где Γ — граница поверхности $P=0$. Но поверхность P либо замкнута — и тогда границы вообще нет, — либо уходит в бесконечность; во втором случае $\int_{\Gamma}\alpha = 0$ по той причине, что форма α финитна.

Соотношение (5) мы докажем по индукции. Напомним, что, как было показано в п. 2, если некоторая форма γ ортогональна к dP, то она имеет вид

$$\gamma = \gamma_1\, dP,$$

где γ_1 — форма $(n-2)$-го порядка, причем если форма γ финитна, то форма γ_1 также финитна. Отсюда для $k=0$ сразу следует, что

$$\omega_0 - \tilde{\omega}_0 = \beta\, dP,$$

где β финитна, поскольку финитны формы ω_0 и $\tilde{\omega}_0$, содержащие множителем основную функцию φ. Предположим теперь, что соотношение (5) выполнено с финитными формами α и β и сделаем переход от k к $k+1$. Для этого продифференцируем равенство (5); мы получим:

$$d\omega_k - d\tilde{\omega}_k = d\beta\, dP,$$

так как дифференциал дифференциала формы равен нулю. По определению форм ω_{k+1} и $\tilde{\omega}_{k+1}$,

$$dP\cdot\left(\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_{k+1} - (-1)^{n-1} d\beta\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_{k+1} - (-1)^{n-1} d\beta = \gamma\, dP,$$

и остается установить, что форма γ финитна. Для этого нужно, согласно сказанному выше, проверить финитность форм ω_{k+1} и $\tilde{\omega}_{k+1}$. Но она видна из их определения (из равенств (1) — (3)).

Таким образом, интеграл от формы $\omega_k(\varphi)$ по поверхности $P=0$, действительно, однозначно определяется функциями $P(x)$ и $\varphi(x)$. Положим, по определению,

$$\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right) = \int \delta^{(k)}(P)\,\varphi\, dx =$$
$$= (-1)^k \int_{P=0} \omega_k(\varphi) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (6)$$

Что это определение обобщенных функций $\delta^{(k)}(P)$ совпадает с их определением, данным в начале этого параграфа, видно из формулы (4).

Примеры. 1. В случае $P(x) \equiv x_1 = 0$ мы имеем по формуле (4)

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^k} dx_2 \ldots dx_n$$

и

$$\int \delta^{(k)}(x_1)\varphi\, dx = (-1)^k \int \frac{\partial^k \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^k} dx_2 \ldots dx_n. \tag{7}$$

2. Подсчитаем $\delta^{(k)}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$, где $\sum \alpha_i^2 = 1$. Совершая такой же поворот координатных осей, как в примере 2 п. 3, находим:

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi}{du_1^k} du_2 \ldots du_n$$

и

$$\int \delta^{(k)}\left(\sum \alpha_i x_i\right)\varphi(x)\, dx = (-1)^k \int\limits_{\sum \alpha_i x_i = 0} \frac{\partial^k \varphi}{\partial u_1^k} d\sigma, \tag{8}$$

где дифференцирование справа производится по направлению, ортогональному к гиперплоскости

$$\sum \alpha_i x_i = 0$$

(в сторону увеличения суммы $\sum \alpha_i x_i$), а $d\sigma$ — элемент этой гиперплоскости.

3. Найдем $\delta^{(k)}(xy - c)$. Перейдем, как в примере 3 п. 3, к координатам $u_1 = x$, $u_2 = xy - c$. Так как

$$D\begin{pmatrix} x & y \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1},$$

то

$$\omega_k(\varphi) = -\frac{\partial^k}{\partial u_2^k}\left(\frac{\varphi\left(u_1, \frac{u_2 + c}{u_1}\right)}{u_1}\right) du_1$$

и

$$\int \delta^{(k)}(xy - c)\varphi(x, y)\, dx\, dy = (-1)^{k+1} \int \frac{\partial^k \varphi\left(x, \frac{c}{x}\right)}{\partial y^k} \frac{dx}{x^{k+1}}. \tag{9}$$

4. Построим $\delta^{(k)}(r - c)$, $r^2 = \sum x_i^2$. Введем сферические координаты $u_1 = r$, $u_2 = \theta_1, \ldots, u_n = \theta_{n-1}$. В этих координатах легко подсчитывается, что

$$\omega = r^{n-1} d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент единичной сферы $r = 1$; отсюда

$$\omega_0 = \varphi r^{n-1} d\Omega, \quad \omega_1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi r^{n-1})\, d\Omega$$

и т. д., вообще,

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial r^k}(\varphi r^{n-1})\, d\Omega,$$

так что

$$\int \delta^{(k)}(r - c)\varphi\, dx = \frac{(-1)^k}{c^{n-1}} \int\limits_{O_c} \frac{\partial^k}{\partial r^k}(\varphi r^{n-1})\, dO_c, \tag{10}$$

где O_c — сфера $r - c = 0$ и dO_c — ее евклидов элемент.

5. Наконец, чтобы подсчитать $\delta^{(k)}(r^2 - c^2)$, перейдем к координатам $u_1 = r^2 - c^2$, $u_2 = \theta_1, \ldots, u_n = \theta_{n-1}$; мы получим:

$$\omega = \frac{1}{2} r^{n-2} d\Omega$$

и

$$\omega_k(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2}\, d\Omega,$$

откуда

$$\int \delta^{(k)}(r^2 - c^2)\varphi\, dx = \frac{(-1)^k}{2c^{n-1}} \int\limits_{O_c} \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k (\varphi r^{n-2})\, dO_c \tag{11}$$

и, следовательно,

$$(\delta^{(k)}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - c^2), \varphi) = \frac{(-1)^k}{2c^{n-1}} \int \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2}\Big|_{r=c} dO_c. \tag{12}$$

6. Тождества для $\delta^{(k)}(P)$. Покажем, что обобщенную функцию $\delta^{(k)}(P)$ можно дифференцировать как сложную функцию:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P)=\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Для доказательства достаточно проверить, так же как и в п. 3, что при фиксированном j функционалы в правой и левой частях совпадают в окрестности любой точки поверхности $P=0$, где $\frac{\partial P}{\partial x_j}\neq 0$.

Для этого применим правую и левую части к основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в малой окрестности такой точки, приняв за координаты в этой окрестности $u_1=x_1,\ \ldots,\ u_j=P,\ \ldots,\ u_n=x_n$. Тогда $D\left(\frac{u}{x}\right)=\frac{\partial P}{\partial x_j}$, $D\left(\frac{x}{u}\right)=\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}$, и форма ω_k принимает вид

$$\omega_k(\varphi)=\frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\varphi}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}\right)dx_1\ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\ldots dx_n.$$

Функционал в правой части равенства (1) действует по формуле

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P),\ \varphi\right)=\left(\delta^{(k+1)}(P),\ \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\right)=$$

$$=(-1)^{k+1}\int\limits_{P=0}\omega_{k+1}\left(\varphi\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)=$$

$$=(-1)^{k+1}\int\limits_{P=0}\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}}dx_1\ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\ldots dx_n.$$

Функционал в левой части равенства (1) действует по формуле

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P),\ \varphi\right)=-\left(\delta^{(k)}(P),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=(-1)^{k+1}\int\limits_{P=0}\omega_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=$$

$$=(-1)^{k+1}\int\limits_{P=0}\frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}\right)dx_1\ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\ldots dx_n.$$

Поэтому нам достаточно показать, что имеет место равенство

$$\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}}=\frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}\right). \tag{2}$$

Для $k=0$ оно, очевидно, справедливо, так как $\varphi=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_j(P),\ \ldots,\ x_n)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial P}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}:\frac{\partial P}{\partial x_j}.$$

Отсюда сразу следует равенство (2) для любого k, так как

$$\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}}=\frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right).$$

Итак, равенство функционалов в правой и левой частях формулы (1) доказано в окрестности любой точки поверхности $P=0$, где $\frac{\partial P}{\partial x_j}\neq 0$; как мы видели выше, этого достаточно для справедливости самой формулы (1).

Покажем теперь, что имеют место следующие тождества, связывающие значения функции $\delta(P)$ в ее производных:

$$P\delta(P)=0, \tag{3}$$

$$P\delta'(P)+\delta(P)=0, \tag{4}$$

$$P\delta''(P)+2\delta'(P)=0, \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P\delta^{(k)}(P)+k\delta^{(k-1)}(P)=0, \tag{6}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Первое из этих тождеств очевидно, так как интеграл произведения $P\varphi$ по поверхности $P=0$ равен нулю. Дифференцируя это тождество по x_j и используя формулу (1), находим:

$$\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P)+P\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta'(P)=0;$$

так как при некотором j заведомо $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, то можно сократить на $\frac{\partial P}{\partial x_j}$, и мы получим второе тождество *).

Продолжая аналогично, можно доказать справедливость остальных тождеств.

Пример. *Обобщенная функция $\delta^{(k)}(r^2-t^2)$ как решение волнового уравнения в нечетномерном пространстве.* Вычислим результат применения волнового оператора $\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ к обобщенной функции $\delta^{(k)}(r^2-t^2)$. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = 2x_j\delta^{(k+1)}(r^2-t^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = 2\,\delta^{(k+1)}(r^2-t^2) + 4x_j^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2),$$

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = 2n\,\delta^{(k+1)}(r^2-t^2) + \\ + 4(r^2-t^2)\,\delta^{(k+2)}(r^2-t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2),$$

что, в силу формулы (6), приводится к виду

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = \\ = [2n-4(k+2)]\,\delta^{(k+1)}(r^2-t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2).$$

С другой стороны, аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = -2\,\delta^{(k+1)}(r^2-t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2-t^2),$$

*) Вообще, справедливо следующее утверждение: *если имеют место равенства $a_j(x)f=0,\ j=1,2,\ldots,m$, причем функции $a_j(x)$ не имеют общих (для всех j) корней на замкнутом множестве F, где сосредоточен функционал f, то $f=0$.* Действительно, у каждой точки x_0 множества F можно указать окрестность U, где некоторая из функций $|a_j(x)|$ больше положительной постоянной, например функция $a_1(x)$. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в пределах окрестности U, можно написать $\varphi(x) = a_1(x)\psi(x)$, где $\psi(x)$ — новая основная функция. Мы имеем $(f,\varphi) = (f, a_1\psi) = (a_1 f, \psi) = 0$, т. е. функционал f равен нулю в окрестности точки x_0. Таким образом, f равен нулю в окрестности любой точки. Отсюда $f=0$.

откуда

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = \\ = (2n-4k-6)\,\delta^{(k+1)}(r^2-t^2).$$

Последнее выражение при $k=\frac{n-3}{2}$ обращается в нуль. Итак, *если n нечетно и $k=\frac{n-3}{2}$, то обобщенная функция $\delta^{(k)}(r^2-t^2)$ есть решение волнового уравнения*

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = 0.$$

В частности, при $n=3$ решением волнового уравнения является обобщенная функция $\delta(r^2-t^2)$.

Выясним, каким начальным условиям отвечает найденное решение. По формуле (11) п. 5,

$$(\delta^{(k)}(r^2-t^2), \varphi(x)) = \frac{(-1)^k}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2}\Big|_{r=t} d\Omega. \quad (7)$$

При

$$n = 2k+3$$

подынтегральная функция принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \varphi r^{2k+1}.$$

Каждая операция $\frac{\partial}{r\,\partial r}$ снижает показатель у r^n на две единицы. После k таких операций, примененных к произведению φr^{2k+1}, получится сумма слагаемых, каждое из которых содержит r самое большее в первой степени. Полагая $r=t$ и устремляя t к нулю, получаем:

$$\lim_{t\to 0}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = 0. \quad (8)$$

Далее, мы имеем:

$$\frac{\partial\delta^{(k)}(r^2-t^2)}{\partial t} = -2t\,\delta^{(k+1)}(r^2-t^2) = \\ = 2t\frac{(-1)^k}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^{k+1}(\varphi r^{2k+1})\Big|_{r=t} d\Omega.$$

В выражении подынтегральной функции имеется только один член, содержащий r в отрицательной степени; как легко вычислить, он равен

$$\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \frac{\varphi(x)}{r}.$$

Поэтому, полагая $r = t$ и устремляя t к нулю, мы получаем в пределе

$$\left.\frac{\partial \delta^{(k)}(r^2 - t^2)}{\partial t}\right|_{t=0} = (-1)^k \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \Omega_n \varphi(0), \tag{9}$$

где Ω_n есть поверхность единичной сферы. Как известно,

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{2k+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} = \frac{2^{k+2}}{(2k+1)!!} \pi^{k+1};$$

окончательно мы получаем:

$$\left.\frac{\partial \delta^{(k)}(r^2 - t^2)}{\partial t}\right|_{t=0} = (-1)^k 2\pi^{k+1} \varphi(0), \tag{10}$$

т. е. решение

$$u(x, t) = \delta^{(k)}(r^2 - t^2)$$

удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = (-1)^k 2\pi^{k+1} \delta(x). \tag{11}$$

Таким образом, с точностью до числового множителя обобщенная функция $u(x, t)$ дает фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения (ср. гл. I, § 4, п. 4).

7. Тождества для $\delta^{(k)}(a(x)P)$. Рассмотрим функции $P(x)$ и $Q(x)$, для которых соответствующие поверхности $P = 0$ и $Q = 0$, так же как и раньше, не имеют особых точек и, кроме того, не пересекаются, так что поверхность $PQ = 0$ также не имеет особых точек. Тогда имеет место формула

$$\delta(PQ) = P^{-1}\delta(Q) + Q^{-1}\delta(P). \tag{1}$$

Для доказательства обозначим через ω_P форму, отвечающую уравнению $P = 0$, через ω_Q — форму, отвечающую уравнению $Q = 0$, и через ω — форму, отвечающую уравнению $PQ = 0$. Эти формы удовлетворяют уравнениям

$$\omega_P \, dP = dv \text{ на поверхности } P = 0, \tag{2}$$

$$\omega_Q \, dQ = dv \text{ на поверхности } Q = 0, \tag{3}$$

$$\omega(P\,dQ + Q\,dP) = dv \text{ на обеих поверхностях.} \tag{4}$$

Сравнивая (2) с (4) и замечая, что на поверхности $P = 0$ уравнение (4) превращается в уравнение

$$\omega Q \, dP = dv,$$

мы видим, что $\omega = Q^{-1}\omega_P$; аналогично, на поверхности $Q = 0$ мы имеем $\omega = P^{-1}\omega_Q$. Поэтому

$$(\delta(PQ), \varphi) = \int\limits_{P=0} \varphi\omega + \int\limits_{Q=0} \varphi\omega = \int\limits_{P=0} \varphi Q^{-1}\omega_P + \int\limits_{Q=0} \varphi P^{-1}\omega_Q =$$
$$= (Q^{-1}\delta(P), \varphi) + (P^{-1}\delta(Q), \varphi),$$

что и утверждается.

В частности, если функция $a(x)$ вообще не обращается в нуль, то

$$\delta(aP) = a^{-1}\delta(P). \tag{5}$$

Новые интересные формулы получаются при дифференцировании равенства (5). В частности, дифференцируя его по x_j, получаем:

$$\delta'(aP)\frac{\partial(aP)}{\partial x_j} = \delta'(aP) P \frac{\partial a}{\partial x_j} + \delta'(aP) a \frac{\partial P}{\partial x_j} =$$
$$= a^{-1}\delta'(P)\frac{\partial P}{\partial x_j} - a^{-2}\delta(P)\frac{\partial a}{\partial x_j}.$$

Подставляя, согласно формуле (4) п. 6, вместо $\delta'(aP)$ величину $-a^{-1}\delta(aP) = -a^{-2}\delta(P)$ и сокращая, находим:

$$\delta'(aP) = a^{-2}\delta'(P).$$

Аналогично для любого k и любой функции $a(x)$

$$\delta^{(k)}(aP) = a^{-(k+1)}\delta^{(k)}(P). \tag{6}$$

Пример.

$$\delta^{(k)}(r^2-c^2)=\delta^{(k)}[(r+c)(r-c)]=(r+c)^{-k-1}\delta^{(k)}(r-c). \tag{7}$$

Эта формула означает, что для любой основной функции φ

$$\int \delta^{(k)}(r^2-c^2)\varphi(x)\,dx=\int (r+c)^{-k-1}\delta^{(k)}(r-c)\varphi(x)\,dx.$$

Конечно, сравнивая формулы (10) и (11) п. 5, это тождество было трудно усмотреть. При $k=0$ оно принимает вид

$$\int \delta(r^2-c^2)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2c}\int \delta(r-c)\varphi(x)\,dx;$$

это было видно уже из формул (5) и (6) п. 3.

8. Слои. Функционал вида $\mu(x)\delta^{(k-1)}(P)$, или

$$\int \mu(x)\delta^{(k-1)}(P)\varphi(x)\,dx=\int\limits_{P=0}\omega_{k-1}(\mu\varphi), \tag{1}$$

называется *k-кратным слоем* на поверхности $P=0$. В частности, *простой слой* ($k=1$) отвечает формуле

$$(\mu\delta(P),\ \varphi)=\int\limits_{P=0}\mu\varphi\omega=\int\limits_{P=0}\omega_0(\mu\varphi); \tag{2}$$

двойной слой ($k=2$) отвечает формуле

$$(\mu\delta'(P),\ \varphi)=\int\limits_{P=0}\omega_1(\mu\varphi). \tag{3}$$

Функция $\mu(x)$, фигурирующая во всех этих формулах, называется *плотностью* соответствующего слоя.

Приведенное определение было бы некорректным, если бы оно зависело от формы записи уравнения поверхности $P=0$. Но в действительности тот факт, что данный функционал f есть слой k-го порядка, не зависит от вида уравнения поверхности $P=0$ и при переходе от записи $P=0$ к записи $a(x)P=0$, где $a(x)$ — функция, не обращающаяся в нуль, меняется только выражение функции $\mu(x)$. Действительно, по формуле (17)

$$\mu(x)\delta^{(k-1)}(aP)=\mu(x)a^{-k}(x)\delta^{(k-1)}(P)=\mu_1(x)\delta^{(k-1)}(P),$$

что и утверждалось.

Покажем, что *каждый функционал f вида*

$$(f,\ \varphi)=\int\limits_{P=0}\sum_j \alpha_j(x)D^j\varphi(x)\,d\sigma$$

$$\left(j=(j_1,\ \ldots,\ j_n),\quad D^j=\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}\right)$$

может быть представлен как сумма некоторых слоев различных порядков. Как вытекает из сказанного, при этом можно использовать какую-либо специальную форму записи уравнения поверхности $P=0$; предположим, что в этом уравнении функция $P(x)$ означает расстояние точки x от поверхности $P=0$ и, следовательно, форма совпадает с евклидовым элементом $d\sigma$. Тогда мы имеем:

$$(f,\ \varphi)=\int\limits_{P=0}\sum_j a_j(x)D^j\varphi(x)\,\omega=\int\limits_{P=0}\omega_0\left(\sum_j a_j(x)D^j\varphi\right)=$$

$$=\left(\delta(P),\ \sum a_j(x)D^j\varphi\right)=\sum_j(-1)^j(D^ja_j(x)\delta(P),\ \varphi)=$$

$$=\sum_j(-1)^j\left(\sum_k a_{jk}(x)\delta^{(k)}(P),\ \varphi\right)=\left(\sum_k b_k(x)\delta^{(k)}(P),\ \varphi\right),$$

где

$$b_k(x)=\sum_j(-1)^j a_{jk}(x).$$

Таким образом,

$$f=\sum_k b_k(x)\delta^{(k)}(P),$$

что и утверждалось.

9. Обобщенные функции $\delta(P_1,\ \ldots,\ P_k)$ и $\dfrac{\partial^m\delta(P_1,\ \ldots,\ P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}}$.

В предыдущих пунктах этого параграфа были рассмотрены обобщенные функции, связанные с $(n-1)$-мерной поверхностью $P=0$. В этом пункте мы будем рассматривать обобщенные функции, связанные с поверхностью S меньшего числа измерений и определяемой уже не одним, а k уравнениями:

$$\left.\begin{array}{c} P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \; P_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \; \ldots \\ \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

При этом мы будем предполагать, что:

1) функции P_i бесконечно дифференцируемы;

2) семейство поверхностей $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ образует «правильную сетку», т. е. в окрестности каждой точки поверхности S можно принять за локальную систему координат переменные $u_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ и некоторые дополнительные переменные $u_{k+1}, \ldots, u_n$, так что в этой окрестности якобиан $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} > 0$.

Рассмотрим элемент объема в R_n

$$dv = dx_1 \ldots dx_n$$

как дифференциальную форму n-го порядка в этом пространстве и представим эту форму в виде произведения дифференциальных форм первого порядка $dP_1 \ldots dP_k$ на некоторую форму ω порядка $n-k$:

$$dv = dP_1 \ldots dP_k\, \omega. \qquad (2)$$

Очевидно, что если такая форма ω существует, то она определена неоднозначно. Действительно, если к некоторой форме ω, определенной равенством (2), добавить форму $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, dP_i$, где α_i — любые дифференциальные формы порядка $n-k-1$, то полученная форма $\omega + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, dP_i$ также будет удовлетворять равенству (2), так как произведение $dP_i\, dP_i$ равно нулю.

Чтобы доказать существование формы ω, мы просто выпишем ее в переменных $x_1, \ldots, x_n$. В этих переменных элемент объема $dv = dx_1 \ldots dx_n$. Формы dP_i имеют вид

$$dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial P_i}{\partial x_n} dx_n$$

и, как легко проверить (ср. формулы (2) и (3) п. 1),

$$dP_1 \ldots dP_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_{i_1} \ldots x_{i_k} \end{pmatrix} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}. \qquad (3)$$

В силу предположений, сделанных о функциях $P_i(x_1, \ldots, x_n)$, в матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial P_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial P_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

имеется хотя бы один минор k-го порядка, отличный от тождественного нуля. Допустим, что в рассматриваемой области отличен от нуля минор из производных по первым k переменным $x_1, \ldots, x_k$:

$$D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда можно положить

$$\omega = \frac{dx_{k+1} \ldots dx_n}{D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix}}, \qquad (4)$$

так как при умножении на эту форму все слагаемые справа в (3), кроме

$$D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_k,$$

дадут нуль из-за наличия хотя бы двух одинаковых дифференциалов, а

$$D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_k \frac{dx_{k+1} \ldots dx_n}{D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_1 \ldots x_k \end{pmatrix}} = dx_1 \ldots dx_n = dv.$$

Аналогично, если для каких-то $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$

$$D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_{i_1} \ldots x_{i_k} \end{pmatrix} \neq 0,$$

то можно положить

$$\omega = (-1)^{i_1+\ldots+i_k-\frac{k(k-1)}{2}} \frac{dx_{j_1} \ldots dx_{j_{n-k}}}{D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_{i_1} \ldots x_{i_k} \end{pmatrix}}, \qquad (4')$$

где $j_1 < \ldots < j_{n-k}$ и $j_\mu \neq j_\nu$ при любых $\mu \neq \nu$. Итак, существование формы ω доказано.

Более симметричный (но не всегда наиболее удобный для вычислений) вид формы ω получится, если в некоторой малой области выбрать в качестве переменных $u_1 = P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_k = P_k(x_1, \ldots, x_n)$ и какие угодно дополнительные переменные $u_{k+1}, \ldots, u_n$, достаточно гладкие и такие, что $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} > 0$. В этих переменных элемент объема имеет вид

$$dv = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_1 \ldots du_n.$$

Формы 1-го порядка dP_1 при этом совпадают просто с дифференциалами переменных du_i $(i = 1, \ldots, k)$ и интересующую нас форму ω можно положить равной

$$\omega = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_{k+1} \ldots du_n. \qquad (5)$$

Докажем простую лемму из теории дифференциальных форм, которая нужна для определения обобщенной функции $\delta(P_1, \ldots, P_k)$.

Лемма. *Если γ — форма порядка $n-k$, такая, что ее произведение на k независимых дифференциалов $dP_1 \ldots dP_k$ равно нулю, то существуют формы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, такие, что*

$$\gamma = \alpha_1 dP_1 + \ldots + \alpha_k dP_k.$$

При этом под дифференциалами понимаются внешние дифференциалы форм нулевого порядка (т. е. функций) $P_1, \ldots, P_k$, а независимость дифференциалов означает, что

$$dP_1 \ldots dP_k \neq 0.$$

Форма k-го порядка в левой части этого неравенства в переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\sum_{j_1, \ldots, j_k} \frac{\partial P_1}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial P_2}{\partial x_{j_2}} \cdots \frac{\partial P_k}{\partial x_{j_k}} dx_{j_1} \ldots dx_{j_k} = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} D\begin{pmatrix} P_1 \ldots P_k \\ x_{j_1} \ldots x_{j_k} \end{pmatrix} dx_{j_1} \ldots dx_{j_k}.$$

Поэтому неравенство $dP_1 \ldots dP_k \neq 0$ означает, что матрица из производных $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ имеет ранг k. Отсюда следует, что функции $P_1, \ldots, P_k$ могут быть выбраны за первые k координат в пространстве R_n локально.

Для доказательства леммы перейдем к указанным выше локальным переменным $u_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $u_{k+1}, \ldots, u_n$. Дифференциальная форма γ в этих переменных может состоять, во-первых, из слагаемых, содержащих дифференциалы $du_1, \ldots, du_k$ и, во-вторых, из слагаемого $q\, du_{k+1} \ldots du_n$, не содержащего таких дифференциалов. Мы имеем:

$$du_1 \ldots du_k \gamma = q\, du_1 \ldots du_n = 0$$

по условию леммы. Так как все дифференциалы du_i независимы и их произведение не может быть равно нулю, то отсюда следует, что $q \equiv 0$. Следовательно, форма γ состоит только из слагаемых, содержащих хотя бы один дифференциал du_i $(i = 1, \ldots, k)$. А значит, γ можно (вообще говоря, различными способами) представить в виде

$$\gamma = \alpha_1 du_1 + \ldots + \alpha_k du_k,$$

т. е.

$$\gamma = \alpha_1 dP_1 + \ldots + \alpha_k dP_k,$$

что и требовалось доказать.

Определим теперь обобщенную функцию $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ равенством

$$(\delta(P_1, \ldots, P_k), \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = \int_S \varphi\omega, \qquad (6)$$

где ω — форма, о которой шла речь выше, а S — поверхность (1).

Из формулы (5) видно, что это определение совпадает с определением, данным в начале этого параграфа.

Легко показать, что это определение не зависит от выбора формы ω. В самом деле, пусть $dv = dP_1 \ldots dP_k \,\omega = dP_1 \ldots dP_k \,\tilde{\omega}$. Покажем, что $\int \varphi(\omega - \tilde{\omega}) = 0$ для любой основной функции $\varphi(x)$. Согласно доказанной лемме $\omega - \tilde{\omega} = \alpha_1 \, dP_1 + \ldots + \alpha_k \, dP_k$, т. е. формы ω и $\tilde{\omega}$ во всем пространстве могут отличаться только на форму вида $\alpha_1 \, dP_1 + \ldots + \alpha_k \, dP_k$, где α_i — формы порядка $n-k-1$. Очевидно, что вдоль поверхности $P_1 = 0, \ldots, P_k = 0$ эта форма равна нулю, т. е. *обобщенная функция* $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ *определена функциями* $P_1, \ldots, P_k$ *однозначно*.

Нужно иметь в виду, что форма ω и функционал $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ изменяются вместе с изменением уравнений, описывающих поверхность S. Выясним, как изменяется форма ω при переходе от уравнений $P_1 = 0, \ldots, P_k = 0$ поверхности S к уравнениям $Q_1 = 0, \ldots, Q_k = 0$, где

$$Q_j(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij}(x) \, P_i(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

и матрица из бесконечно дифференцируемых функций $\alpha_{ij}(x)$ обратима. (Очевидно, что вторая система уравнений описывает ту же поверхность, что и первая система.) Для этого выпишем уравнения, определяющие исходную форму ω и преобразованную $\tilde{\omega}$:

$$dP_1 \, dP_2 \ldots dP_k \, \omega = dv;$$

$$dQ_1 \ldots dQ_k \, \tilde{\omega} = \left(\sum \alpha_{i1} \, dP_i\right) \ldots \left(\sum \alpha_{ik} \, dP_i\right) \tilde{\omega} = dv.$$

Раскрывая скобки и преобразуя коэффициенты по правилу $dP_i \, dP_j = -dP_j \, dP_i$, мы видим, что второе уравнение приводится к следующему:

$$\det \|\alpha_{ij}\| \, dP_1 \ldots dP_k \, \omega = dv.$$

Отсюда

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\det \|\alpha_{ij}\|} \, \omega.$$

Это и есть искомая формула преобразования формы ω. Соответствующая обобщенная функция $\delta(Q_1, \ldots, Q_k)$ связана

с обобщенной функцией $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ равенством

$$(\delta(Q_1, \ldots, Q_k), \varphi) = \int \frac{\varphi\omega}{\det \|\alpha_{ij}\|} = \left(\delta(P_1, \ldots, P_k), \frac{\varphi}{\det \|\alpha_{ij}\|}\right).$$

Определим теперь производные обобщенной функции $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ по аргументам P_i, т. е. обобщенные функции $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$. Эти обобщенные функции будут определены как интегралы по поверхности $S(P_1 = 0, \ldots, P_k = 0)$ от некоторых дифференциальных форм $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, зависящих от функций $P_1, \ldots, P_k$ и от основной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с ее производными до порядка m включительно.

Обозначим форму $\varphi\omega$ через $\omega_{00 \ldots 0}(\varphi)$ (здесь ω — форма, определенная выше равенством $dv = dP_1 \, dP_2 \ldots dP_k \, \omega$). Чтобы определить, например, форму $\omega_{10 \ldots 0}(\varphi)$ (интеграл от которой по S даст нам значение обобщенной функции $\dfrac{\partial \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_k}$), мы возьмем форму $(n-1)$-го порядка

$$dP_2 \ldots dP_k \, \omega_{00 \ldots 0}(\varphi),$$

продифференцируем ее и представим полученную форму n-го порядка в виде

$$d(dP_2 \ldots dP_k \, \omega_{00 \ldots 0}(\varphi)) = dP_1 \ldots dP_k \, \omega_{10 \ldots 0}(\varphi).$$

Возможность такой операции легко доказывается в локальной системе координат. В самом деле, в координатах $u_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $u_{k+1}, \ldots, u_n$, если обозначить функцию $\varphi(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n))$ через $\tilde{\varphi}_1(u_1, \ldots, u_n) = \tilde{\varphi}_1(u)$, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{00 \ldots 0}(\varphi) &= \tilde{\varphi} D\left(\frac{x}{u}\right) du_{k+1} \ldots du_n, \\ dP_2 \ldots dP_k \, \omega_{00 \ldots 0}(\varphi) &= \tilde{\varphi} D\left(\frac{x}{u}\right) du_2 \ldots du_k, \\ d(dP_2 \ldots dP_k \, \omega_{00 \ldots 0}(\varphi)) &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\tilde{\varphi} D\left(\frac{x}{u}\right)\right] du_1 \ldots du_n, \\ \omega_{10 \ldots 0}(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\tilde{\varphi}(u) D\left(\frac{x}{u}\right)\right] du_{k+1} \ldots du_n. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Аналогичным образом можно увеличить на единицу любой из k индексов формы $\omega_{00 \ldots 0}(\varphi)$. Вообще, если предположить, что у нас имеется форма $\omega_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(\varphi)$, то чтобы увеличить на единицу j-й индекс, мы умножим нашу форму слева на все dP_i, за исключением dP_j, продифференцируем ее и представим в виде

$$d(dP_1 \ldots dP_{j-1} dP_{j+1} \ldots dP_k \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)) =$$
$$= (-1)^{j-1} dP_1 \ldots dP_k \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k}. \qquad (8)$$

Таким образом определяются формы $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)$ для любых целых неотрицательных значений индексов.

Очевидно, что если уже исходная форма $\omega_{00\ldots 0}(\varphi)$ была определена неоднозначно, то формы $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)$ и подавно могут быть определены разными способами.

Покажем, что формы $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(\varphi)$, определенные индуктивно, начиная с $\omega_{00\ldots 0}(\varphi)$, равенствами вида (8), при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ могут отличаться только на форму вида

$$d\tau + \beta_1 dP_1 + \ldots + \beta_k dP_k,$$

где $d\tau$ — дифференциал от некоторой формы τ порядка $n-k-1$, а $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — произвольные формы порядка $n-k-1$. При этом как форма τ, так и формы $\beta_1, \ldots, \beta_k$ финитны, т. е. каждая из этих форм равна тождественному нулю вне некоторого ограниченного множества.

Доказательство этого утверждения будем вести по индукции. Как следует из доказанной выше леммы, во всем пространстве

$$\omega_{00\ldots 0} - \tilde{\omega}_{00\ldots 0} = \beta_1 dP_1 + \ldots + \beta_k dP_k$$

для любых двух форм, определяющих $\delta(P_1, \ldots, P_k)$. Так как, во-первых, обе формы $\omega_{00\ldots 0}(\varphi)$ и $\tilde{\omega}_{00\ldots 0}(\varphi)$ содержат множителем финитную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и, во-вторых, дифференциалы $dP_1, \ldots, dP_k$ линейно независимы, то, очевидно, все формы $\beta_1, \ldots, \beta_k$, входящие в правую часть равенства, финитны. Предположим теперь, что разность любых двух форм с индексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ можно во всем пространстве представить в виде

$$\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = d\tau + \beta_1 dP_1 + \ldots + \beta_k dP_k, \qquad (9)$$

где $\tau, \beta_1, \ldots, \beta_k$ — финитные формы, и покажем, что при увеличении одного из индексов (для определенности — первого) на единицу это свойство сохраняется. Для доказательства умножим обе части равенства (9) на $dP_2 \ldots dP_k$ и продифференцируем его. Так как $d(dP_i) = d(d\tau) = 0$, то мы получим:

$$d[dP_2 \ldots dP_k(\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})] =$$
$$= dP_1 dP_2 \ldots dP_k \cdot (\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}) =$$
$$= (-1)^k dP_1 \ldots dP_k d\beta_1.$$

Отсюда

$$dP_1 dP_2 \ldots dP_k \cdot (\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - (-1)^k d\beta_1) = 0$$

и по лемме

$$\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} =$$
$$= (-1)^k d\beta_1 + \gamma_1 dP_1 + \ldots + \gamma_k dP_k,$$

причем, в силу финитности форм $\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ и $\tilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$, и формы β_1, формы $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ также финитны. Это и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь равенство (9), справедливое, по доказанному, для любых значений индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ на поверхности S. На этой поверхности $dP_1 = \ldots = dP_k = 0$, а форма $d\tau$ равна некоторой форме $d\tau^*$ (внешнему дифференциалу финитной формы τ^*, полученной из формы τ проектированием на многообразие S). Таким образом, на поверхности S

$$\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} - \tilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = d\tau^*,$$

где $d\tau^*$ — дифференциал финитной формы τ^*.

Определим теперь обобщенную функцию $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ следующим равенством:

$$\left(\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}, \varphi\right) = (-1)^m \int_S \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\varphi). \qquad (10)$$

Из формул типа (7) видно, что это определение совпадает с соответствующим определением, данным в начале этого параграфа. Это определение не зависит от выбора формы $\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$. Действительно, если $\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ и $\tilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ — две формы, полученные из $\omega_{00\ldots 0}$ последовательными умножениями, дифференцированиями и делениями, то, по доказанному,

$$\int_S \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\varphi) - \int_S \tilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\varphi) = \int_S d\tau^*.$$

По теореме Стокса

$$\int_S d\tau^* = \int_\Gamma \tau^*,$$

где Γ — граница поверхности S. Но, в силу предположений, сделанных о функциях $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$, поверхность S или замкнута, или уходит в бесконечность. В обоих случаях интеграл $\int_\Gamma \tau^* = 0$, так как форма τ^* финитна, и следовательно,

$$\int_S \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \int_S \tilde{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}.$$

Тем самым *обобщенная функция* $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ *определена функциями* $P_1, \ldots, P_k$ *на поверхности* $P_1 = 0, \ldots, P_n = 0$ *однозначно.*

Для обобщенных функций $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ и $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ имеют место следующие теоремы:

1. Обобщенные функции $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ и $\dfrac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ можно дифференцировать как сложные функции:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial x_j}.$$

Здесь производные обобщенных функций по координатам x_j определяются, как обычно, а именно:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(P_1, \ldots, P_k), \varphi\right) = -\left(\delta(P_1, \ldots, P_k), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

2. Для обобщенных функций $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ и их производных имеют место следующие тождества:

$$P_i \delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$
$$P_i P_j \delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_1 P_2 \ldots P_k \delta(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$

а также все тождества, получаемые из этих формальным дифференцированием по $P_1, \ldots, P_k$. Например, последовательно дифференцируя первое тождество по P_i, получаем:

$$\delta(P_1, \ldots, P_k) + P_i \delta'_{P_i}(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m\, \delta^{(m-1)}_{P_i \ldots P_i}(P_1, \ldots, P_k) + P_i \delta^{(m)}_{P_i \ldots P_i}(P_1, \ldots, P_k) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Дифференцировать можно по любому набору переменных: например, дифференцируя второе тождество по P_i и P_j, получаем:

$$\delta(P_1, \ldots, P_k) + P_i \delta'_{P_i}(P_1, \ldots, P_k) + P_j \delta'_{P_j}(P_1, \ldots, P_k) + {}$$
$$+ P_i P_j \delta''_{P_i P_j}(P_1, \ldots, P_k) = 0.$$

Доказательства этих фактов проводятся аналогично тому, как это выше делалось для $\delta(P)$, и мы их опускаем.

В заключение заметим, что аналогично предыдущему, можно определить *m-кратный слой* как функционал вида

$$\int \sum_{|\alpha| = m} \mu_\alpha(x) \delta^{(\alpha)}(P_1, \ldots, P_k) \varphi(x)\, dx,$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k,$$
$$\delta^{(\alpha)}(P_1, \ldots, P_k) = \frac{\partial^{|\alpha|} \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}.$$

В частности, *простой слой* отвечает формуле

$$(\mu \delta(P_1, \ldots, P_k), \varphi) =$$
$$= \int \mu(x) \delta(P_1, \ldots, P_k) \varphi(x)\, dx = \int_S \omega_{00\ldots 0}(\mu\varphi).$$

Снова можно доказать, что каждый функционал f вида

$$(f, \varphi)=\int\limits_S \sum a_j(x) D^j\varphi(x)\,d\sigma \quad \left(D^j=\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1}\ldots \partial x_n^{j_n}}\right),$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности S, представим в виде суммы некоторых слоев различных порядков.

§ 2. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

В этом параграфе будут рассмотрены различные обобщенные функции, связанные с невырожденной недефинитной квадратичной формой. В пп. 1 и 2 строится конкретная регуляризация некоторых интегралов без использования предельных переходов из комплексной области. В остальных пунктах этого параграфа широко применяется метод, основанный на выходе в комплексную область.

Более простым является комплексный метод и при первом знакомстве мы рекомендуем начать чтение прямо с п. 3, просмотрев предварительно пп. 1—2, которые содержат ряд полезных сведений о дельта-функциях от квадратичной формы.

1. Определение функций $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$. В § 1 были определены обобщенные функции $\delta^k(P)$ для случая такой бесконечно дифференцируемой функции $P(x_1, \ldots, x_n)$, что поверхность $P(x_1, \ldots, x_n)=0$ не имеет особых точек. Если теперь

$$P(x_1, \ldots, x_n)=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2 \qquad (1)$$

$(p+q=n)$, то поверхность $P(x_1, \ldots, x_n)=0$ представляет собой конус с особой точкой (вершиной) в начале координат.

В этом случае функцию $\delta^{(k)}(P)$ можно определить следующим образом. Так как единственная особенность конуса $P=0$ находится в начале координат, то для функций φ, равных нулю в окрестности начала координат, $\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right)$ фактически было определено в § 1:

$$\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right)=\int \delta^{(k)}(P)\,\varphi\,dx=(-1)^k\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi). \qquad (2)$$

Если же φ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, то интеграл (2) может расходиться. Тогда мы определим $\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right)$ как регуляризованное значение интеграла (2).

Этот план здесь и будет проводиться; однако мы проведем его элементарно, не опираясь на содержащееся в § 1 определение $\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi)$.

Итак, пусть сначала функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат. После удаления этой окрестности поверхность $P=0$ уже не имеет особых точек. Следовательно, в любой достаточно малой окрестности произвольной точки поверхности $P=0$ можно ввести новые координаты $u_1=P, u_2, \ldots, u_n$ с якобианом $D\left(\begin{matrix}x\\u\end{matrix}\right)>0$. Тогда, согласно определению функции $\delta^{(k)}(P)$, данному в § 1, имеем:

$$\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right)=(-1)^k\int \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}\left[\varphi D\left(\begin{matrix}x\\u\end{matrix}\right)\right]\Big|_{u_1=0} du_2\ldots du_n, \qquad (3)$$

где интеграл берется по поверхности $P=0$. Это определение не зависит от выбора системы координат $u_1, \ldots, u_n$.

В самом деле, как было показано в § 1, написанное выражение $\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right)$ совпадает с $(-1)^k\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi)$, а потому не зависит от выбора системы координат.

Напишем явное выражение для $\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right)$, выбрав координаты $u_1, \ldots, u_n$ специальным образом.

Будем предполагать, что $p>1$ и $q>1$; случай, когда p или q равно 1, мы рассмотрим особо в конце этого пункта.

Введем биполярные координаты, положив

$$x_1=r\omega_1, \ldots, x_p=r\omega_p, \; x_{p+1}=s\omega_{p+1}, \ldots, x_{p+q}=s\omega_{p+q}, \qquad (4)$$

где

$$r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}, \quad s=\sqrt{x_{p+1}^2+\ldots+x_{p+q}^2}. \qquad (5)$$

Элемент объема в этих координатах задается формулой

$$dx=r^{p-1}s^{q-1}\,dr\,ds\,d\Omega^{(p)}\,d\Omega^{(q)}, \qquad (6)$$

Снова можно доказать, что каждый функционал f вида

$$(f, \varphi)=\int\limits_S \sum a_j(x) D^j\varphi(x)\, d\sigma \quad \left(D^j=\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1}\ldots \partial x_n^{j_n}}\right),$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности S, представим в виде суммы некоторых слоев различных порядков.

§ 2. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

В этом параграфе будут рассмотрены различные обобщенные функции, связанные с невырожденной недефинитной квадратичной формой. В пп. 1 и 2 строится конкретная регуляризация некоторых интегралов без использования предельных переходов из комплексной области. В остальных пунктах этого параграфа широко применяется метод, основанный на выходе в комплексную область.

Более простым является комплексный метод и при первом знакомстве мы рекомендуем начать чтение прямо с п. 3, просмотрев предварительно пп. 1—2, которые содержат ряд полезных сведений о дельта-функциях от квадратичной формы.

1. Определение функций $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$. В § 1 были определены обобщенные функции $\delta^k(P)$ для случая такой бесконечно дифференцируемой функции $P(x_1, \ldots, x_n)$, что поверхность $P(x_1, \ldots, x_n)=0$ не имеет особых точек. Если теперь

$$P(x_1, \ldots, x_n)=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2 \tag{1}$$

$(p+q=n)$, то поверхность $P(x_1, \ldots, x_n)=0$ представляет собой конус с особой точкой (вершиной) в начале координат.

В этом случае функцию $\delta^{(k)}(P)$ можно определить следующим образом. Так как единственная особенность конуса $P=0$ находится в начале координат, то для функций φ, равных нулю в окрестности начала координат, $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$ фактически было определено в § 1:

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi)=\int \delta^{(k)}(P)\varphi\, dx=(-1)^k\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi). \tag{2}$$

Если же φ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, то интеграл (2) может расходиться. Тогда мы определим $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$ как регуляризованное значение интеграла (2).

Этот план здесь и будет проводиться; однако мы проведем его элементарно, не опираясь на содержащееся в § 1 определение $\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi)$.

Итак, пусть сначала функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат. После удаления этой окрестности поверхность $P=0$ уже не имеет особых точек. Следовательно, в любой достаточно малой окрестности произвольной точки поверхности $P=0$ можно ввести новые координаты $u_1=P, u_2, \ldots, u_n$ с якобианом $D\left(\begin{matrix}x\\u\end{matrix}\right)>0$. Тогда, согласно определению функции $\delta^{(k)}(P)$, данному в § 1, имеем:

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi)=(-1)^k\int\frac{\partial^k}{\partial u_1^k}\left[\varphi D\left(\begin{matrix}x\\u\end{matrix}\right)\right]\Bigg|_{u_1=0} du_2\ldots du_n, \tag{3}$$

где интеграл берется по поверхности $P=0$. Это определение не зависит от выбора системы координат $u_1, \ldots, u_n$.

В самом деле, как было показано в § 1, написанное выражение $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$ совпадает с $(-1)^k\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi)$, а потому не зависит от выбора системы координат.

Напишем явное выражение для $(\delta^{(k)}(P), \varphi)$, выбрав координаты $u_1, \ldots, u_n$ специальным образом.

Будем предполагать, что $p>1$ и $q>1$; случай, когда p или q равно 1, мы рассмотрим особо в конце этого пункта.

Введем биполярные координаты, положив

$$x_1=r\omega_1, \ldots, x_p=r\omega_p,\ x_{p+1}=s\omega_{p+1}, \ldots, x_{p+q}=s\omega_{p+q}, \tag{4}$$

где

$$r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}, \quad s=\sqrt{x_{p+1}^2+\ldots+x_{p+q}^2}. \tag{5}$$

Элемент объема в этих координатах задается формулой

$$dx=r^{p-1}s^{q-1}\, dr\, ds\, d\Omega^{(p)}\, d\Omega^{(q)}, \tag{6}$$

где $d\Omega^{(p)}\left(d\Omega^{(q)}\right)$ обозначает элемент поверхности сферы единичного радиуса в p-мерном (соответственно q-мерном) пространстве. При этом мы имеем:

$$P = r^2 - s^2.$$

Примем теперь за новую систему координат в пространстве переменные P, r и биполярные координаты ω_i. Выражение (6) для элемента объема принимает в этих координатах вид

$$dx = \frac{1}{2}(r^2 - P)^{\frac{q-2}{2}} r^{p-1}\, dP\, dr\, d\Omega^{(p)}\, d\Omega^{(q)}.$$

Согласно определению (3) имеем:

$$\left(\delta^{(k)}(P),\ \varphi\right) = \\ = (-1)^k \int \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left[\frac{1}{2}\varphi(r^2 - P)^{\frac{q-2}{2}}\right]\Bigg|_{P=0} r^{p-1}\, dr\, d\Omega^{(p)}\, d\Omega^{(q)}. \quad (7)$$

Переходя от P к переменному $s = \sqrt{r^2 - P}$ и замечая, что $\frac{\partial}{\partial P} = -\frac{\partial}{2s\,\partial s}$, получаем:

$$\left(\delta^{(k)}(P),\ \varphi\right) = \int \left(\frac{\partial}{2s\,\partial s}\right)^k \left[s^{q-2}\frac{\varphi}{2}\right]\Bigg|_{s=r} r^{p-1}\, dr\, d\Omega^{(p)}\, d\Omega^{(q)}. \quad (8)$$

Если теперь положить

$$\psi(r,\ s) = \int \varphi\, d\Omega^{(p)}\, d\Omega^{(q)}, \quad (9)$$

то формула (8) принимает вид

$$\left(\delta^{(k)}(P),\ \varphi\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2s\,\partial s}\right)^k \left[s^{q-2}\frac{\psi(r,\ s)}{2}\right]\Bigg|_{s=r} r^{p-1}\, dr. \quad (10)$$

При выборе новой системы координат в пространстве вместо координаты r можно было бы взять координату s. Тогда мы пришли бы к эквивалентному выражению

$$\left(\delta^{(k)}(P),\ \varphi\right) = (-1)^k \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \left[r^{p-2}\frac{\psi(r,\ s)}{2}\right]\Bigg|_{r=s} s^{q-1}\, ds. \quad (10')$$

При сделанном с самого начала предположении, что функция равна нулю в некоторой окрестности начала координат, интегралы (10) и (10′) сходятся при любом k. Однако, если $(p-1)+(q-2) \geqslant 2k$, т. е. $k < \frac{p+q-2}{2}$, то эти интегралы сходятся и для *любой* финитной функции $\varphi(x)$. Поэтому при $k < \frac{p+q-2}{2}$ любую из формул (10) и (10′) можно принять за определение функции $\delta^{(k)}(P)$. Если же $k \geqslant \frac{p+q-2}{2}$, то мы определим $\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right)$ и $\left(\delta_2^{(k)}(P),\ \varphi\right)$ как регуляризованные значения интегралов (10) и (10′) в смысле, который несколько ниже будет уточнен.

Таким образом, *при $p > 1$, $q > 1$ обобщенные функции $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ мы определяем по формулам*

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2s\,\partial s}\right)^k \left[s^{q-2}\frac{\psi(r,\ s)}{2}\right]\Bigg|_{s=r} r^{p-1}\, dr, \quad (11)$$

$$\left(\delta_2^{(k)}(P),\ \varphi\right) = (-1)^k \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k \left[r^{p-2}\frac{\psi(r,\ s)}{2}\right]\Bigg|_{r=s} s^{q-1}\, ds, \quad (11')$$

где $\psi(r,\ s)$ обозначает интеграл от функции φ по поверхности $x_1^2 + \ldots + x_p^2 = r^2$, $x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2 = s^2$, деленный на $r^{p-1}s^{q-1}$. Написанные здесь интегралы сходятся и совпадают при

$$k < \frac{p+q-2}{2}.$$

Если же

$$k \geqslant \frac{p+q-2}{2},$$

то эти интегралы следует понимать в смысле регуляризованных значений.

Укажем, что мы будем понимать под регуляризованными значениями интегралов (11) и (11′). Заметим сначала, что функция $\psi(r,\ s)$, определенная формулой (9), является финитной бесконечно дифференцируемой функцией от r^2 и s^2. Делая теперь формально в интеграле (11) замену переменных $r^2 = u$, $s^2 = v$ и полагая

$$\psi(r,\ s) = \psi_1(u,\ v),$$

будем иметь:

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right)=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,\ v)\right)\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du.$$

В силу сделанного замечания $\psi_1(u,\ v)$ является финитной бесконечно дифференцируемой функцией от u и v. Но тогда

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,\ v)\right)\Big|_{v=u}=u^{\frac{q-2}{2}-k}\Psi(u),$$

где снова $\Psi(u)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция. Таким образом,

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right)=\frac{1}{4}\int_0^\infty u^{\frac{p+q}{2}-2-k}\Psi(u)\,du. \qquad (12)$$

Регуляризация таких интегралов рассматривалась в § 3 гл. I. Правая часть формулы (12) есть значение $\frac{1}{4}\left(u_+^\lambda,\ \Psi(u)\right)$ при $\lambda=\frac{p+q}{2}-2-k$, где u_+^λ — функция, равная u^λ при $u>0$ и 0 при $u\leqslant 0$. Регуляризацией этой функции служит обобщенная функция u_+^λ, которая при $\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots$ получается аналитическим продолжением u_+^λ из области $\operatorname{Re}\lambda>-1$. При $\lambda=-1, -2,\ \ldots$ эта аналитическая обобщенная функция имеет простые полюсы; обобщенную функцию u_+^{-n} $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ мы определили как свободный член разложения Лорана функции u_+^λ в окрестности точки $\lambda=-n$.

Таким образом, *если размерность $n=p+q$ пространства — нечетное число, то регуляризация интеграла* (12) *определяется как аналитическое продолжение функции*

$$f(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^\infty u^\lambda\ \Psi(u)\,du$$

в точку $\lambda=\frac{p+q}{2}-2-k$ (по формулам, указанным в § 3 гл. I), *а если размерность n пространства четна, то — как свободный член разложения функции $f(\lambda)$ в ряд Лорана в окрестности точки* $\lambda=\frac{p+q}{2}-2-k$.

Аналогичным образом определяется регуляризация интеграла (11′). Обобщенные функции $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ могут, вообще говоря, и не совпадать. В п. 3 будет показано, что в случае нечетномерного пространства эти функции всегда совпадают, а в случае четномерного пространства размерности n при $k\geqslant\frac{n}{2}-1$ разность $\delta_1^{(k)}(P)-\delta_2^{(k)}(P)$ есть обобщенная функция, сосредоточенная в вершине конуса $P=0$. Кроме того, в п. 3 будет дано иное, более естественное определение однородных функций, сосредоточенных на поверхности конуса $P=0$.

Отметим, что из определения функций $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ вытекает непосредственно следующее соотношение:

$$\delta_2^{(k)}(P)=(-1)^k\,\delta_1^{(k)}(-P).$$

До сих пор мы предполагали, что $p>1$ и $q>1$. Случай, когда p или q равно 1, является особым, поскольку в этом случае теряет смысл переход к биполярным координатам. Приведем определение функций $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ для этого случая.

Пусть сначала $p=q=1$, т. е. $P=x^2-y^2$. Выбирая тогда в качестве локальных координат переменные P и x, мы получим по аналогии с формулой (10) следующее определение функции $\delta_1^{(k)}\left(x^2-y^2\right)$:

$$\left(\delta_1^{(k)}\left(x^2-y^2\right),\ \varphi\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{2y\,\partial y}\right)^k\left[\frac{\varphi(x,\ y)}{2y}\right]dx,$$

где интегрирование ведется по паре прямых $x^2-y^2=0$. Следовательно,

$$\left(\delta_1^{(k)}\left(x^2-y^2\right),\ \varphi\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{2y\,\partial y}\right)^k\left[\frac{\varphi(x,\ y)}{2y}\right]\Big|_{y=x}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{2y\,\partial y}\right)^k\left[\frac{\varphi(x,\ y)}{2y}\right]\Big|_{y=-x}dx.$$

Интегралы понимаются здесь в смысле регуляризованных значений (здесь снова нетрудно воспользоваться результатами § 3 гл. I).

В частности, имеем:

$$(\delta_1(x^2-y^2),\ \varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varphi(x,y)}{2y}\Big|_{y=x}+\frac{\varphi(x,y)}{2y}\Big|_{y=-x}\right]dx,$$

т. е.

$$\delta_1(x^2-y^2)=\frac{1}{2y}\,\delta(x-y)+\frac{1}{2y}\,\delta(x+y). \qquad (13)$$

Аналогично, если $p=1$, но $q=n-1>1$, то функции $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ определяются по формулам

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{2s\,\partial s}\right)^k\left[s^{n-3}\,\frac{\psi(x_1,s)}{2}\right]\Big|_{s=|x_1|}dx_1, \qquad (14)$$

$$\left(\delta_2^{(k)}(P),\ \varphi\right)=(-1)^k\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{2x_1\,\partial x_1}\right)^k\left(\frac{\psi(x_1,s)}{2x_1}\right)\Big|_{x_1=s}s^{n-2}\,ds+$$

$$+(-1)^k\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{2x_1\,\partial x_1}\right)^k\left(\frac{\psi(x_1,s)}{2x_1}\right)\Big|_{x_1=-s}s^{n-2}\,ds, \qquad (14')$$

где $\psi(x_1, s)$ есть интеграл функции φ по поверхности $x_1=\mathrm{const}$, $x_2^2+\ldots+x_n^2=s^2$, деленный на s^{q-1}.

Если же $q=1$, но $p=n-1>1$, то функции $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ определяются по формулам

$$\left(\delta_2^{(k)}(P),\ \varphi\right)=(-1)^k\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{2r\,\partial r}\right)^k\left[r^{n-3}\,\frac{\psi(r,x_n)}{2}\right]\Big|_{r=|x_n|}dx_n, \qquad (15)$$

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right)=\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{2x_n\,\partial x_n}\right)^k\left(\frac{\psi(r,x_n)}{2x_n}\right)\Big|_{x_n=r}r^{n-2}\,dr+$$

$$+\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{2x_n\,\partial x_n}\right)^k\left(\frac{\psi(r,x_n)}{2x_n}\right)\Big|_{x_n=-r}r^{n-2}\,dr, \qquad (15')$$

где $\psi(r, x_n)$ есть интеграл функции φ по поверхности $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2=r^2$, $x_n=\mathrm{const}$, деленный на r^{p-1}. Все

написанные интегралы следует понимать в смысле регуляризованных значений *).

2. Обобщенная функция P_+^λ. Пусть снова

$$P(x)=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2 \qquad (1)$$

$(p+q=n)$. Определим обобщенную функцию P_+^λ, где λ — комплексное число, по формуле

$$(P_+^\lambda,\ \varphi)=\int_{P>0}P^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx, \qquad (2)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $dx=dx_1\ldots dx_n$. При $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ интеграл (2) сходится и представляет собой аналитическую функцию от λ. Продолжая аналитически эту функцию на область $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$, мы определим функционал $(P_+^\lambda,\ \varphi)$ для других λ.

Будем искать полюсы функционала $(P_+^\lambda,\ \varphi)$. Для этого перейдем в интеграле (2) к биполярным координатам

$$x_1=r\omega_1,\ \ldots,\ x_p=r\omega_p,\ x_{p+1}=s\omega_{p+1},\ \ldots,\ x_{p+q}=s\omega_{p+q}, \qquad (3)$$

где

$$r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2},\quad s=\sqrt{x_{p+1}^2+\ldots+x_{p+q}^2}\ ^{**)}. \qquad (4)$$

Тогда интеграл (2) перепишется в виде

$$(P_+^\lambda,\ \varphi)=\int_{P>0}(r^2-s^2)^\lambda\,\varphi\, r^{p-1}s^{q-1}\,dr\,ds\,d\Omega^{(p)}\,d\Omega^{(q)}, \qquad (5)$$

---

*) Отметим, что в случае, когда $p=1$ или $q=1$, можно иногда не усреднять функции φ по сферическим поверхностям. Формулы (14′) и (15′) можно также представить в следующем виде: если $p=1$, то

$$\left(\delta_2^{(k)}(P),\ \varphi\right)=(-1)^k\int\left(\frac{\partial}{2x_1\,\partial x_1}\right)^k\left(\frac{\varphi}{2x_1}\right)dx_2\ldots dx_n,$$

где интегрирование ведется по поверхности конуса $P=0$; если же $q=1$, то

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right)=\int\left(\frac{\partial}{2x_n\,\partial x_n}\right)^k\left(\frac{\varphi}{2x_n}\right)dx_1\ldots dx_{n-1},$$

где снова интегрирование ведется по поверхности конуса $P=0$.

**) Для простоты мы предполагаем всюду дальше, что $p>1$ и $q>1$. Однако все получаемые результаты остаются справедливыми и в специальном случае, когда $p=1$ или $q=1$.

где $d\Omega^{(p)}$ $(d\Omega^{(q)})$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса в p-мерном (соответственно, q-мерном) пространстве. Полагая теперь, как и в п. 1,

$$\psi(r, s) = \int \varphi\, d\Omega^{(p)}\, d\Omega^{(q)}, \tag{6}$$

получим:

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty \int_0^r (r^2 - s^2)^\lambda\, \psi(r, s)\, r^{p-1} s^{q-1}\, ds\, dr. \tag{7}$$

Поскольку основная функция $\varphi(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема, функция $\psi(r, s)$, определенная по формуле (6), финитна и бесконечно дифференцируема по r^2 и s^2. Сделав в интеграле (7) замену переменных $u = r^2$, $v = s^2$ и положив

$$\psi(r, s) = \psi_1(u, v), \tag{8}$$

получим:

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^u (u - v)^\lambda\, \psi_1(u, v)\, u^{\frac{p-2}{2}} v^{\frac{q-2}{2}}\, dv\, du. \tag{9}$$

Наконец, заменой переменной $v = ut$ мы приведем интеграл (9) к виду

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{4} \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{p+q}{2} - 1}\, du \int_0^1 (1-t)^\lambda\, t^{\frac{q-2}{2}}\, \psi_1(u, tu)\, dt. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что функционал (P_+^λ, φ) имеет две серии полюсов. Первая серия состоит из полюсов функции

$$\Phi(\lambda, u) = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-t)^\lambda\, t^{\frac{q-2}{2}}\, \psi_1(u, tu)\, dt. \tag{11}$$

Подобно функции (x_+^λ, φ), рассмотренной в § 3 гл. I, эта функция регулярна при всех значениях λ, за исключением точек

$$\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots,$$

в которых она имеет простые полюсы. При этом

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, \Phi(\lambda, u) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, tu) \right] \Big|_{t=1}. \tag{12}$$

Следовательно, $\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, \Phi(\lambda, u)$ представляет собой функционал, сосредоточенный на поверхности конуса $P = 0$.

С другой стороны, если $\Phi(\lambda, u)$ — регулярная функция, то интеграл

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{p+q}{2} - 1}\, \Phi(\lambda, u)\, du \tag{13}$$

может иметь еще полюсы в точках

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots,$$

где $n = p + q$ — размерность пространства. При этом

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} (P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial u^k} \Phi\left(-\frac{n}{2} - k, u\right) \Big|_{u=0}. \tag{14}$$

Таким образом, $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} (P_+^\lambda, \varphi)$ есть функционал, сосредоточенный в вершине конуса.

Итак, *имеется две серии особых точек функционала* (P_+^λ, φ):

$$\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots \tag{15}$$

и

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots; \tag{15'}$$

выч. (P_+^λ, φ) *в особой точке* λ *есть функционал, сосредоточенный на поверхности конуса* $P = 0$, *если* λ *принадлежит первой серии, и в вершине конуса* $P = 0$, *если* λ *принадлежит второй серии особых точек.* В случае, когда λ принадлежит одновременно обеим сериям, картина естественно может усложниться.

Разберем теперь подробно все случаи в отдельности.

Случай 1. *Особая точка* $\lambda = -k$ *принадлежит первой серии особых точек, но не принадлежит второй* *серии*. Это имеет место всегда, когда размерность пространства $n=p+q$ — нечетное число, а также в случае четномерного пространства, если $\lambda > -\frac{n}{2}$.

Представим функцию (11) в окрестности точки $\lambda=-k$ в виде

$$\Phi(\lambda, u)=\frac{\Phi_0(u)}{\lambda+k}+\Phi_1(\lambda, u), \qquad (16)$$

где $\Phi_0(u)=\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, \Phi(\lambda, k)$, а функция $\Phi_1(\lambda, u)$ регулярна в окрестности точки $\lambda=-k$. Подставляя это выражение в формулу (13), мы получаем:

$$(P_+^\lambda, \varphi)=\frac{1}{\lambda+k}\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\,\Phi_0(u)\,du+$$
$$+\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\,\Phi_1(\lambda, u)\,du. \qquad (17)$$

При сделанном предположении относительно λ интегралы в формуле (17) являются регулярными функциями в окрестности точки $\lambda=-k$. Следовательно, функция (P_+^λ, φ) имеет в этой точке полюс первого порядка, причем

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\,(P_+^\lambda, \varphi)=\int_0^\infty u^{-k+\frac{p+q}{2}-1}\,\Phi_0(u)\,du,$$

где интеграл при $k \geqslant \frac{p+q}{2}$ следует понимать в смысле регуляризованного значения. Подставляя сюда выражение (12) для $\Phi_0(u)=\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\,\Phi(\lambda, u)$, мы получаем:

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\,(P_+^\lambda, \varphi)=$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, tu)\right]\Big|_{t=1} u^{-k+\frac{p+q}{2}-1}\,du. \qquad (18)$$

Итак, $\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, P_+^\lambda$ есть обобщенная функция, сосредоточенная на конусе $P=0$.

Установим связь этой функции с определенной в п. 1 функцией $\delta_1^{(k)}(P)$.

Заметим, что если положить $tu=v$, то

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, tu)\right]\Big|_{t=1}=$$
$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, v)\right]\Big|_{v=u} u^{-\frac{q}{2}+k}.$$

Следовательно, формула (18) может быть переписана в виде

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\,(P_+^\lambda, \varphi)=\frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, v)\right]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du,$$

где при $k \geqslant \frac{n}{2}$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения. С другой стороны, согласно определению, данному в п. 1,

$$(\delta_1^{(k-1)}(P), \varphi)=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, v)\right]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du,$$

где снова при $k \geqslant \frac{n}{2}$ интеграл понимается в смысле регуляризованного значения. Но в случае, когда размерность $n=p+q$ пространства — нечетное число, регуляризация написанного интеграла определяется методом аналитического продолжения. Следовательно,

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\,(P_+^\lambda, \varphi)=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}(\delta_1^{(k-1)}(P), \varphi).$$

Итак, *в точке* $\lambda=-k$ $(k=-1, -2, \ldots)$ *в случае, когда пространство имеет нечетную размерность* n, *а также в случае, когда размерность пространства* n — *четное число и* $k<\frac{n}{2}$, *обобщенная функция* P_+^λ *имеет простой полюс с вычетом*

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, P_+^\lambda=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_1^{(k-1)}(P). \qquad (19)$$

Полученный результат не является неожиданным. В самом деле, еще в гл. I мы установили, что

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\ x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta^{(k-1)}(x).$$

Из формулы (19) вытекает, что *в случае нечетномерного пространства, а также в случае четномерного пространства при* $k<\frac{n}{2}$ *функция* $\delta_1^{(k-1)}(P)$ *полностью определяется заданием квадратичной формы* P.

В п. 1 было отмечено, что функция $\delta_1^{(k)}(P)$ может быть определена формулой

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right)=(-1)^k\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi),$$

причем написанный интеграл сходится при $k<\frac{n-2}{2}$, а при $k\geqslant\frac{n-2}{2}$ его следует понимать в смысле регуляризованного значения. Следовательно,

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{P=0}\omega_k(\varphi).$$

В частности, имеем:

$$\underset{\lambda=-1}{\text{выч.}}\left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=\int\frac{\varphi(x)\,d\sigma}{|\operatorname{grad} P|},$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности конуса $P=0$.

Случай 2. *Особая точка* λ *принадлежит второй серии особых точек, но не принадлежит первой серии.* Это имеет место, когда $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, причем размерность пространства n — нечетное число.

В этом случае функция $\Phi(\lambda,\ u)$ регулярна в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}-k$, а потому функция $\left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=$ $=\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\,\Phi(\lambda,\ u)\,du$ имеет в этой точке простой полюс с вычетом

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\,\Phi\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)du,$$

откуда

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ \left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=\frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k\Phi\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)}{\partial u^k}\right|_{u=0}. \tag{20}$$

Таким образом, $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)$ есть функционал, сосредоточенный в начале координат.

Выразим значение этого функционала непосредственно через производные функции $\varphi(x)$ в начале координат.

При $\lambda=-\frac{n}{2}$ формула (20) дает

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\ \left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=\Phi\left(-\frac{n}{2},\ 0\right).$$

Используя выражение (11) для функции $\Phi(\lambda,\ u)$, получаем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\ \left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{n}{2}}t^{\frac{q-2}{2}}\,dt\,\psi_1(0,\ 0).$$

Но

$$\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{n}{2}}t^{\frac{q-2}{2}}\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}+1\right)}.$$

Если p — четное число, то $\Gamma\left(-\frac{p}{2}+1\right)=\infty$, а потому

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\ \left(P_+^\lambda,\ \varphi\right)=0. \tag{21}$$

Пусть теперь p нечетно, а q четно. Согласно определениям (8) и (6) имеем:

$$\psi_1(0,\ 0)=\psi(0,\ 0)=\int\varphi(0)\,d\Omega^{(p)}\,d\Omega^{(q)},$$

откуда

$$\psi_1(0,\ 0)=\Omega_p\Omega_q\ \varphi(0),$$

где Ω_p и Ω_q обозначают площади поверхностей единичных сфер в пространствах соответствующих размерностей.

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\,(P_+^\lambda,\ \varphi)=\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{4\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}\,\Omega_p\Omega_q\,\varphi(0),$$

т. е.

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\,P_+^\lambda=\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{4\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}\,\Omega_p\Omega_q\,\delta(x). \tag{22}$$

Как известно, площадь поверхности Ω_s сферы единичного радиуса в s-мерном пространстве выражается формулой

$$\Omega_s=\frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Подставляя в (22) выражения для Ω_p и Ω_q, мы получим после элементарных преобразований

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\,P_+^\lambda=\frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\delta(x). \tag{23}$$

Чтобы найти вычеты функции P_+^λ при $\lambda=-\frac{n}{2}-k$, где $k=1,\ 2,\ \ldots,$ рассмотрим однородный дифференциальный оператор

$$L=P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

т. е.

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}. \tag{24}$$

Как показывает непосредственный подсчет,

$$LP^{\lambda+1}=2(\lambda+1)(2\lambda+n)P^\lambda, \tag{25}$$

где $n=p+q$.

С другой стороны, для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ справедлива формула

$$\int_{P>0}[\varphi\,(LP^{\lambda+1})-P^{\lambda+1}(L\varphi)]\,dx=0\ \text{*)}. \tag{26}$$

Подставляя в формулу (26) выражение (25) для $LP^{\lambda+1}$, получаем:

$$\int_{P>0}P^\lambda\varphi\,dx=\frac{1}{2^2(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}\int_{P>0}P^{\lambda+1}(L\varphi)\,dx,$$

т. е.

$$(P_+^\lambda,\ \varphi)=\frac{1}{2^2(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}(P_+^{\lambda+1},\ L\varphi). \tag{27}$$

Применив формулу (27) k раз, будем иметь:

$$(P_+^\lambda,\ \varphi)=\\=\frac{1}{2^{2k}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}(P_+^{\lambda+k},\ L^k\varphi). \tag{28}$$

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\,(P_+^\lambda,\ \varphi)=\\=\left.\frac{1}{2^{2k}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}\right|_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}\times\\\times\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\,(P^{\lambda+k},\ L^k\varphi). \tag{29}$$

Но

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\,(P^{\lambda+k},\ L^k\varphi)=\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\,(P^\lambda,\ L^k\varphi).$$

---

*) В самом деле, если $\operatorname{Re}\lambda>0$, то по формуле Грина этот интеграл сводится к интегралу по поверхности $P=0$. Но так как на этой поверхности функция $P^{\lambda+1}$ и ее частные производные обращаются в нуль, то интеграл равен нулю. В силу единственности аналитического продолжения формула (26) остается справедливой и при $\operatorname{Re}\lambda<0$.

Поэтому, если p — четное число, то этот вычет согласно (21) равен нулю. Если же p — нечетное число, то, согласно (23), имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \left(P^{\lambda+k},\ L^k\varphi\right)=\frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\delta(x),\ L^k\varphi\right).$$

Подставляя это выражение в формулу (29) и учитывая, что

$$\left(\delta(x),\ L^k\varphi\right)=\left(L^k\delta(x),\ \varphi\right),$$

мы получим после элементарного преобразования коэффициента

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \left(P_+^{\lambda},\ \varphi\right)=\frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(L^k\delta(x),\ \varphi\right).$$

Итак, *если размерность пространства — нечетное число, то в случае, когда p — нечетное, а q — четное число, обобщенная функция P_+^{λ} имеет в точках $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ ($k=0,\ 1,\ \ldots$) простые полюсы с вычетами*

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^{\lambda}=\frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^k\delta(x). \qquad (30)$$

Если же, наоборот, p — четное, а q — нечетное число, то функция P_+^{λ} в этих точках регулярна.

Случай 3. *Точка λ принадлежит одновременно двум сериям особых точек.* Это имеет место в случае четномерного пространства для всех

$$\lambda=-\frac{n}{2}-k \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Как и в случае 1, мы представим сперва выражение для $\left(P_+^{\lambda},\ \varphi\right)$ в виде

$$\left(P_+^{\lambda},\ \varphi\right)=\frac{1}{\lambda+\frac{n}{2}+k}\int_0^{\infty}u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_0(u)\,du+$$
$$+\int_0^{\infty}u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\Phi_1(\lambda,\ u)\,du, \qquad (31)$$

где $\Phi_0(u)=\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ \Phi(\lambda,\ u)$, а $\Phi_1(\lambda,\ u)$ есть функция, регулярная в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}-k$. В силу сделанного предположения каждый из стоящих в формуле (31) интегралов может иметь в точке $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ простой полюс.

Поэтому *функция $\left(P_+^{\lambda},\ \varphi\right)$ может иметь в точке $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ полюс кратности* 2.

В окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ функция P_+^{λ} может быть разложена, таким образом, в ряд Лорана:

$$P_+^{\lambda}=\frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)^2}+\frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda+\frac{n}{2}+k}+\ldots$$

Будем искать коэффициенты $c_{-2}^{(k)}$ и $c_{-1}^{(k)}$ этого разложения.

Прежде всего, в силу (31),

$$\left(c_{-2}^{(k)},\ \varphi\right)=\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\int_0^{\infty}u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_0(u)\,du=\frac{1}{k!}\Phi_0^{(n)}(0). \qquad (32)$$

Таким образом, обобщенная функция $c_{-2}^{(k)}$ сосредоточена в вершине конуса $P=0$.

Выразим непосредственно функцию $c_{-2}^{(k)}$ через производные функции $\delta(x)$. Прежде всего при $k=0$ формула (32) дает

$$c_{-2}^{(0)}=\Phi_0(0).$$

При этом, согласно определению,

$$\Phi_0(u)=\frac{1}{4}\ \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\int_0^1(1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,\ tu)\,dt.$$

Отсюда получаем:

$$\Phi_0(0)=\frac{1}{4}\psi_1(0,\ 0)\ \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\int_0^1(1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}dt=$$

$$=\psi_1(0,\ 0)\ \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{4\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}.$$

В силу известного соотношения для гамма-функции

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

имеем:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}=\frac{\sin\pi\left(-\frac{q}{2}-\lambda\right)}{\sin\pi(-\lambda)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}.$$

Так как, с другой стороны,

$$\lim_{\lambda=-\frac{n}{2}}\frac{\lambda+\frac{n}{2}}{\sin(-\pi\lambda)}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{\pi},$$

то

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}=$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}+1}\left[\sin\pi\left(-\frac{q}{2}-\lambda\right)\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)}{\pi\Gamma(-\lambda)}\right]_{\lambda=-\frac{n}{2}}.$$

Таким образом,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}=(-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi p}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad (33)$$

Учитывая теперь, что

$$\psi_1(0,\ 0)=\Omega_p\Omega_q\,\varphi(0),$$

где Ω_p и Ω_q — площади поверхностей сфер единичного радиуса, мы получаем:

$$\left(c^0_{-2},\ \varphi\right)=(-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi p}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{4\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Omega_p\Omega_q\varphi(0). \qquad (34)$$

Если p — четное число, то $c^{(0)}_{-2}=0$, так как $\sin\frac{\pi p}{2}=0$; следовательно, *когда p и q — четные числа, функция P_+^λ имеет при $\lambda=-\frac{n}{2}$ лишь простой полюс*. Если же p и q — нечетные числа, то формула (34) дает нам, поскольку

$$\sin\frac{\pi p}{2}=(-1)^{\frac{p-1}{2}},\quad \Omega_p=\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\quad\text{и}\quad\Omega_q=\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)},$$

$$\left(c^{(0)}_{-2},\ \varphi\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\varphi(0),$$

т. е. *при нечетных p и q*

$$c^{(0)}_{-2}=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x). \qquad (35)$$

Применяя теперь формулу (28) и повторяя дословно соответствующие выкладки, проведенные для случая 2, мы установим, что *при четных p и q $c^{(k)}_{-2}=0$, т. е. функция P_+^λ имеет в точке $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ лишь простой полюс. Если же p и q — нечетные числа, то*

$$c^{(k)}_{-2}=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)^k\delta(x). \qquad (36)$$

Определим теперь функции $c_{-1}^{(k)}$. Из формулы (31) имеем:

$$(c_{-1}^{(k)}, \varphi) = \int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du + \\ + \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)du. \quad (37)$$

При этом первый из интегралов в формуле (37) следует понимать как свободный член лорановского разложения функции

$$f(\lambda) = \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_0(u)\,du$$

в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2} - k$. Значение этого интеграла есть функционал, сосредоточенный на поверхности $P = 0$, который мы сейчас определим. Поскольку

$$\Phi_0(u) = \underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\ \Phi(\lambda, u),$$

мы заключаем на основании формулы (12):

$$\Phi_0(u) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial t^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, tu)\right]\Big|_{t=1} = \\ = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, v)\right]\Big|_{v=u} u^{\frac{n}{2}+k-\frac{q}{2}}.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du = \\ = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\int_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u, v)\right]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du.$$

С другой стороны, согласно определению, данному в п. 1,

$$\left(\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P), \varphi\right) = \\ = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u_1, v)\right]\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du.$$

При этом регуляризация интеграла была там определена в точности так же, как и регуляризация интеграла $\int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du$. Следовательно,

$$\int_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)\,du = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\left(\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P), \varphi\right). \quad (38)$$

Из формулы (38) вытекает, в частности, *что в случае четномерного пространства при $k \geqslant \frac{n}{2}$ функция $\delta_1^{(k-1)}(P)$ полностью определяется заданием квадратичной формы P.*

Рассмотрим теперь второй член в формуле (37). Имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)du = \\ = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)}{\partial u^k}\Big|_{u=0}. \quad (39)$$

Определяемый этим членом функционал сосредоточен, следовательно, в вершине конуса $P = 0$.

Итак,

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \alpha^{(k)}, \quad (40)$$

где $\alpha^{(k)}$ — обобщенная функция, сосредоточенная в вершине конуса $P = 0$ и выражающаяся с помощью функционала (39):

$$(\alpha^{(k)}, \varphi) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)}{\partial u^k}\Big|_{u=0}. \quad (41)$$

Найдем явное выражение функции $\alpha^{(k)}$ через производные функции $\delta(x)$. Рассмотрим сперва случай $k=0$. Согласно формуле (41)

$$(\alpha^{(0)}, \varphi)=\Phi_1\left(-\frac{n}{2}, 0\right).$$

Но $\Phi_1\left(-\frac{n}{2}, 0\right)$ есть свободный член лорановского разложения функции $\Phi(\lambda, 0)$ в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}$. Имеем:

$$\Phi(\lambda, 0)=\frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}\,dt\,\psi_1(0, 0)=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{4\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}\,\Omega_p\Omega_q\varphi(0).$$

Используя соотношение $\Gamma(1-x)\,\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$, а также выражения для Ω_p, Ω_q, мы можем переписать эту формулу в виде

$$\Phi(\lambda, 0)=\frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}{\sin\pi\lambda}\,\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(-\lambda)}\,\varphi(0).$$

Если p и q — четные числа, то стоящая здесь функция регулярна при $\lambda=-\frac{n}{2}$. Следовательно, $\Phi_1\left(-\frac{n}{2}, 0\right)=\Phi\left(-\frac{n}{2}, 0\right)$, откуда

$$(\alpha^{(0)}, \varphi)=(-1)^{\frac{q}{2}}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\varphi(0).$$

Если же p и q — нечетные числа, то функция $\Phi(\lambda, 0)$ имеет полюс в точке $\lambda=-\frac{n}{2}$. В этом случае

$$(\alpha^{(0)}, \varphi)=\Phi_1\left(-\frac{n}{2}, 0\right)=\varkappa\varphi(0),$$

где $\varkappa$ есть свободный член лорановского разложения функции $\frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}{\sin\pi\lambda}\,\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(-\lambda)}\,\pi^{\frac{n}{2}}$ в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}$. Элементарные вычисления, которые мы опустим, приводят к следующему выражению для коэффициента $\varkappa$:

$$\varkappa=(-1)^{\frac{q+1}{2}}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)-\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\,\pi^{\frac{n}{2}-1},$$

т. е.

$$\varkappa=\frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\psi\left(\frac{p}{2}\right)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)\right), \tag{42}$$

где пси-функция $\psi(x)$ определяется по формуле

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\ ^{*)}.$$

Подставляя полученные выражения для функции $\alpha^{(0)}$ в формулу (40), для $k=0$ получим:

$$c_{-1}^{(0)}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[(-1)^{\frac{n}{2}-1}\,\delta_1^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(P)+\theta\pi^{\frac{n}{2}}\,\delta(x)\right], \tag{43}$$

причем $\theta=(-1)^{\frac{q}{2}}$, если p и q — четные числа, и $\theta=(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{1}{\pi}\left(\psi\left(\frac{p}{2}\right)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)\right)$, если p и q — нечетные числа.

---

*) Значения пси-функции $\psi(x)$ при целых и полуцелых значениях аргумента выражаются следующими формулами:

$$\psi(k)=-C+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1},$$
$$\psi\left(k+\frac{1}{2}\right)=-C-2\ln 2+2\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right),$$

где C — постоянная Эйлера (см. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, раздел 6.35).

Наконец, чтобы найти $c_{-1}^{(k)}$ для произвольного k, можно снова воспользоваться «понижающей» формулой (28). Мы получим:

$$c_{-1}^{(k)}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left[(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P)+\right.$$

$$\left.+\theta_{p,q}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!}P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\delta(x)\right]. \quad (44)$$

При этом числовой коэффициент $\theta_{p,q}$ равен $(-1)^{\frac{q}{2}}$, когда p и q — четные числа.

Выражение для функции $\alpha^{(k)}$ можно получить также из следующих соображений. Так как $c_{-1}^{(k)}=\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ P_+^\lambda$ есть однородная функция степени $-n-2k$, то это же справедливо и для функции $\alpha^{(k)}$. Но функция $\alpha^{(k)}$ сосредоточена в начале координат, а потому она имеет вид *)

$$\alpha^{(k)}=Q_{2k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\delta(x),$$

где Q_{2k} — однородный многочлен степени $2k$.

С другой стороны, функция $\alpha^{(k)}$, так же как и функция P_+^λ при любом значении λ, инвариантна относительно линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму:

$$P(x_1,\ \ldots,\ x_{p+q})=x_1^2+\ \ldots\ +x_p^2-x_{p+1}^2-\ \ldots\ -x_{p+q}^2.$$

Следовательно, и оператор $Q_{2k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}\right)$ должен быть инвариантен относительно таких преобразований. Единственным оператором, удовлетворяющим этим требованиям, является оператор

$$Q_{2k}=c_{k,p,q}P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}\right).$$

Таким образом,

$$\alpha^{(k)}=c_{k,p,q}P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}\right)\delta(x).$$

*) Во втором выпуске (гл. II, § 4) будет доказано, что обобщенная функция, сосредоточенная в одной точке, представляет собой линейную комбинацию δ-функции и ее производных.

Коэффициент $c_{k,p,q}$ может быть найден из выражения (41), если в это выражение подставить какую-нибудь фиксированную функцию.

Возьмем функцию φ, имеющую вблизи начала координат следующий вид:

$$\varphi(x)=\left(x_1^2+\ \ldots\ +x_p^2-x_{p+1}^2-\ \ldots\ -x_{p+q}^2\right)^k.$$

Тогда, как показывают выражения (6) и (8), функция $\psi_1(u,\ tu)$ имеет в окрестности точки $u=0$ вид

$$\psi_1(u,\ tu)=\Omega_p\Omega_q u^k(1-t)^k.$$

Следовательно, согласно формуле (11),

$$\Phi(\lambda,\ u)=\left(\frac{1}{4}\int_0^1(1-t)^{\lambda+k}t^{\frac{q-2}{2}}\,dt\,\Omega_p\Omega_q\right)u^k,$$

т. е.

$$\Phi(\lambda,\ u)=\frac{\Gamma(\lambda+k+1)\,\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{4\Gamma\left(\lambda+k+\frac{q}{2}+1\right)}\Omega_p\Omega_q u^k.$$

Функция $\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)$, через которую выражается $(\alpha^{(k)},\ \varphi)$, есть свободный член лорановского разложения функции $\Phi(\lambda,\ u)$ в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}-k$.

Рассмотрим для определенности случай, когда p и q — нечетные числа. Так как коэффициенты лорановского разложения функции $\frac{\Gamma(\lambda+k+1)\,\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+k+\frac{q}{2}+1\right)}$ в окрестности $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ совпадают с коэффициентами лорановского разложения функции $\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}$ в окрестности $\lambda=-\frac{n}{2}$, то

$$\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,\ u\right)=\varkappa u^k,$$

где коэффициент $\varkappa$ определяется формулой (42). Формула (41) даст нам:

$$(\alpha^{(k)}, \varphi) = \varkappa = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right). \quad (45)$$

С другой стороны,

$$(\alpha^{(k)}, \varphi) = c_{k, p, q} P^k \varphi(x)\big|_{x=0}.$$

Согласно формуле (25), применяемой k раз,

$$P^k \varphi(x) = 2^{2k} k! \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) \dots \left(\frac{n}{2}+k-1\right). \quad (46)$$

Сравнивая выражения (45) и (46), получим:

$$c_{k, p, q} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k! \, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right),$$

где p и q — нечетные числа.

Таким образом, коэффициент $\theta_{p,q}$ в формуле (44) для случая, когда p и q — нечетные числа, имеет вид

$$\theta_{p, q} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}}{\pi} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right).$$

Итак, *если размерность пространства n — четное число, причем p и q — также четные числа, то функция P_+^λ имеет в точке $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ $(k = 0, 1, \dots)$ простой полюс с вычетом*

$$\underset{\lambda = -\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k! \, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x),$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}.$$

Если же p и q — нечетные числа, то в точке $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ функция P_+^λ имеет полюс кратности 2. Коэффициенты $c_{-2}^{(k)}$ и $c_{-1}^{(k)}$ разложения функции P_+^λ в ряд Лорана

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda + \frac{n}{2} + k} + \dots$$

в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ выражаются формулами

$$c_{-2}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k! \, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x)$$

и

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \\ + \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2^{2k} k! \, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x),$$

где $\psi(x)$ — пси-функция: $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Наряду с функцией P_+^λ можно определить также функцию P_-^λ согласно формуле

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_{-P>0} (-P)^\lambda \varphi \, dx. \quad (47)$$

Все сказанное выше по поводу функции P_+^λ остается справедливым и для функции P_-^λ; следует лишь поменять ролями числа p и q. При этом в написанных выше формулах $\delta_1^{(k)}(P)$ заменится на $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P)$.

3. Обобщенные функции $\mathcal{P}^\lambda$, отвечающие квадратичным формам с комплексными коэффициентами. До сих пор мы рассматривали исключительно квадратичные формы с вещественными коэффициентами. В этом пункте мы рассмотрим пространство всех квадратичных форм

$$\mathcal{P}=\sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_rx_s \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами.

Нашей задачей является определение обобщенной функции $\mathcal{P}^\lambda$, где λ — комплексное число. Однако в общем случае $\mathcal{P}^\lambda$ не будет однозначной аналитической функцией от λ. Поэтому в пространстве всех квадратичных форм

$$\mathcal{P}=P_1+iP_2$$

мы выделим «верхнюю полуплоскость» квадратичных форм *с положительно определенной мнимой частью* и определим для них функцию $\mathcal{P}^\lambda$. А именно, если квадратичная форма $\mathcal{P}$ принадлежит этой «полуплоскости», то положим

$$\mathcal{P}^\lambda=e^{\lambda(\ln|\mathcal{P}|+i\arg\mathcal{P})},$$

где $0<\arg\mathcal{P}<\pi$. Такая функция $\mathcal{P}^\lambda$ является однозначной аналитической функцией от λ.

Сопоставим теперь функции $\mathcal{P}^\lambda$ обобщенную функцию $\mathcal{P}^\lambda$:

$$(\mathcal{P}^\lambda,\varphi)=\int\mathcal{P}^\lambda\varphi\,dx, \tag{2}$$

где интегрирование ведется по всему пространству. Интеграл (2) сходится при $\operatorname{Re}\lambda>0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией от λ. Продолжая аналитически эту функцию, мы определим функционал $(\mathcal{P}^\lambda,\varphi)$ для других значений λ.

Для квадратичных форм $\mathcal{P}$ с положительно определенной мнимой частью мы найдем теперь особые точки функций $\mathcal{P}^\lambda$ и вычислим вычеты этих функций в особых точках. Вычисления можно существенно упростить за счет приема, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Обобщенная функция $\mathcal{P}^\lambda$ аналитически зависит не только от λ, но и от коэффициентов квадратичной формы $\mathcal{P}$. Тем

самым $\mathcal{P}^\lambda$ является аналитической функцией в верхней «полуплоскости» всех квадратичных форм вида $\mathcal{P}=P_1+iP_2$, где P_2 есть положительно определенная форма. Следовательно, $\mathcal{P}^\lambda$ однозначно определяется своими значениями на «мнимой полуоси», т. е. на множестве квадратичных форм вида $\mathcal{P}=iP_2$, где P_2 — положительно определенная форма. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай обобщенных функций вида $(iP_2)^\lambda$. Но для этого случая задача была уже решена в § 3 гл. I, ибо положительно определенную форму P_2 можно всегда невырожденным линейным преобразованием привести к сумме квадратов.

Итак, пусть сначала форма $\mathcal{P}=\sum\limits_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_rx_s$ принадлежит «мнимой полуоси». Это значит, что $g_{rs}=ia_{rs}$ $(r, s=1, \ldots, n)$, где a_{rs} — вещественные числа, и форма $\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_rx_s$ положительно определена. Тогда

$$(\mathcal{P}^\lambda,\varphi)=e^{\frac{\pi\lambda i}{2}}\int\left(\sum a_{rs}x_rx_s\right)^\lambda\varphi\,dx.$$

Линейным преобразованием $x_r=\sum\limits_{s=1}^{n}\alpha_{rs}x'_s$ мы можем привести форму $\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_rx_s$ к виду $r^2=x_1'^2+\ldots+x_n'^2$. Якобиан этого преобразования есть $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$, где $|a|$ — дискриминант квадратичной формы $\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_rx_s$:

$$|a|=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$(\mathcal{P}^\lambda,\varphi)=\frac{e^{\frac{\pi\lambda i}{2}}}{\sqrt{|a|}}\int r^{2\lambda}\varphi\,dx',$$

или

$$(\mathcal{P}^\lambda,\varphi)=\frac{e^{\frac{\pi\lambda i}{2}}}{\sqrt{(-i)^n|g|}}\int r^{2\lambda}\varphi\,dx', \tag{3}$$

где $|g|$ — дискриминант квадратичной формы $\mathscr{P}$, а $\sqrt{(-i)^n|g|}$ понимается в смысле арифметического значения [$(-i)^n|g|$ есть вещественное положительное число].

Функционал $(r^{2\lambda}, \varphi)$ был уже рассмотрен в п. 9 § 3 гл. I. Согласно приведенным там формулам единственными особенностями этого функционала, а следовательно и функционала $(\mathscr{P}^\lambda, \varphi)$, являются простые полюсы в точках $\lambda = -\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$; при этом

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\, r^{2\lambda} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\delta(x).$$

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\, \mathscr{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(-i)^n|g|}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\delta(x). \tag{4}$$

Найдем вычеты функции $\mathscr{P}^\lambda$ в других особых точках. Для этого сопоставим форме $\mathscr{P}$ дифференциальный оператор

$$L_{\mathscr{P}} = \sum g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r\,\partial x_s}, \tag{5}$$

где коэффициенты g^{rs} определяются из соотношений

$$\sum_{s=1}^{n} g^{rs}g_{st} = \delta_t^r$$

($\delta_t^r = 1$ при $r=t$ и $\delta_t^r = 0$ при $r \neq t$). Таким образом, матрица $\|g^{rs}\|$ коэффициентов оператора $L_{\mathscr{P}}$ является обратной к матрице $\|g_{st}\|$ квадратичной формы. Имеем тогда

$$L_{\mathscr{P}}\mathscr{P}^{\lambda+1} = 4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\mathscr{P}^\lambda.$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться непосредственной проверкой. Применяя это соотношение k раз, получаем:

$$L_{\mathscr{P}}^k\mathscr{P}^{\lambda+k} = 4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)\mathscr{P}^\lambda,$$

откуда

$$\mathscr{P}^\lambda = \frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}L_{\mathscr{P}}^k\mathscr{P}^{\lambda+k}.$$

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\, \mathscr{P}^\lambda = \left.\frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}\right|_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}\times \\ \times \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\, L_{\mathscr{P}}^k\mathscr{P}^\lambda, \tag{6}$$

откуда, применяя формулу (4), получаем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\, \mathscr{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{(-i)^n|g|}}\,L_{\mathscr{P}}^k\,\delta(x). \tag{7}$$

Формула (7) получена в предположении, что квадратичная форма $\mathscr{P}$ принадлежит «мнимой полуоси». Полученное выражение необходимо теперь аналитически продолжить в «верхнюю полуплоскость» всех квадратичных форм $\mathscr{P} = P_1 + iP_2$ с положительно определенной мнимой частью. Но аналитическое продолжение оператора $L_{\mathscr{P}}$ известно, поскольку его коэффициенты аналитически выражаются через коэффициенты квадратичной формы $\mathscr{P}$. Остается невыясненным лишь, как продолжить на всю «верхнюю полуплоскость» функцию $\sqrt{(-i)^n|g|}$. Следовательно, задача будет полностью решена, если мы сумеем определить $\sqrt{(-i)^n|g|}$ как однозначную аналитическую функцию в «верхней полуплоскости» квадратичных форм.

Для этого снова представим форму $\mathscr{P}$ в виде

$$\mathscr{P} = P_1 + iP_2,$$

где P_1 и P_2 — квадратичные формы с вещественными коэффициентами, причем форма P_2 положительно определена.

Существует невырожденное линейное преобразование

$$x_r = \sum_{s=1}^{n} b_{rs} y_s$$

с вещественными коэффициентами, приводящее формы P_1 и P_2 к виду:

$$P_1 = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$
$$P_2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2.$$

Вещественные коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ формы P_1 не зависят от специального выбора такого преобразования и являются, таким образом, инвариантами самой квадратичной формы $\mathscr{P}$. Имеем:

$$|g| = |b|^2 (\lambda_1 + i) \ldots (\lambda_n + i),$$

где $|b|$ — определитель матрицы $\|b_{ij}\|$, а потому

$$(-i)^n |g| = |b|^2 (1 - \lambda_1 i) \ldots (1 - \lambda_n i).$$

Положим тогда

$$\sqrt{(-i)^n |g|} = \sqrt{|b|^2} (1 - \lambda_1 i)^{\frac{1}{2}} \ldots (1 - \lambda_n i)^{\frac{1}{2}}, \qquad (8)$$

где значения квадратных корней определяются формулой

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg z}, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Функция, определяемая формулой (8), будет искомой однозначной аналитической функцией в «верхней полуплоскости» комплексных квадратичных форм с положительно определенной мнимой частью.

Итак, *если*

$$\mathscr{P} = \sum_{r,\, s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s$$

—произвольная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью, то обобщенная функция $\mathscr{P}^\lambda$ является регулярной аналитической функцией от λ всюду, за исключением точек $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$, в которых эта функция имеет простые полюсы. При этом

$$\underset{\lambda = -\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \mathscr{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right) \sqrt{(-i)^n |g|}} \left(\sum_{r,\, s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \right)^k \delta(x), \qquad (9)$$

где $|g|$ — дискриминант квадратичной формы $\mathscr{P}$ и функция $\sqrt{(-i)^n |g|}$ определяется формулой (8).

Аналогичным образом можно рассмотреть «нижнюю полуплоскость» квадратичных форм с отрицательно определенной мнимой частью.

Если форма

$$\mathscr{P} = P_1 - iP_2 = \sum_{r,\, s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s$$

принадлежит «нижней полуплоскости», то обобщенная функция $\mathscr{P}^\lambda$ также является регулярной аналитической функцией от λ всюду, за исключением точек $\lambda = -\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$, в которых эта функция имеет простые полюсы. При этом

$$\underset{\lambda = -\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \mathscr{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right) \sqrt{i^n |g|}} \left(\sum_{r,\, s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \right)^k \delta(x), \qquad (9')$$

где снова $|g|$ есть дискриминант формы $\mathscr{P}$ и $\sqrt{i^n |g|}$ выражается формулой, аналогичной формуле (8):

$$\sqrt{i^n |g|} = \sqrt{|b|^2} (1 + \lambda_1 i)^{\frac{1}{2}} \ldots (1 + \lambda_n i)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Обобщенные функции $(P + i0)^\lambda$ и $(P - i0)^\lambda$. Используя результаты п. 3, мы можем теперь изучить любую вещественную квадратичную форму в степени λ.

Пусть

$$P=\sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_r x_s$$

невырожденная квадратичная форма с *вещественными* коэффициентами. Тогда, по аналогии с функциями $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$, рассмотренными в § 3 гл. I, мы определим обобщенные функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$.

Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$\mathscr{P}=P+iP',$$

где P' — положительно определенная форма (с вещественными коэффициентами). Нетрудно показать, что когда коэффициенты квадратичной формы P' стремятся к нулю, обобщенная функция $(P+iP')^\lambda$ стремится к вполне определенному пределу. Этот предел мы и обозначим через $(P+i0)^\lambda$.

Действительно, это утверждение очевидно при $\operatorname{Re}\lambda>0$, ибо в этом случае предельный переход можно производить под знаком интеграла $\int \mathscr{P}^\lambda \varphi\, dx$. С другой стороны, в силу соотношения (6) п. 3

$$\mathscr{P}^\lambda=\frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)} L^k_{\mathscr{P}}\mathscr{P}^{\lambda+k}$$

оно остается справедливым и во всех точках регулярности функции $\mathscr{P}^\lambda$ *)

Аналогично, обобщенную функцию $(P-i0)^\lambda$ мы определим как предел обобщенной функции $(P-iP')^\lambda$, где P' — положительно определенная форма, когда коэффициенты формы P' стремятся к нулю.

Из определения обобщенных функций $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ вытекает, что они являются аналитическими функциями от λ всюду, за исключением точек $\lambda=-\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1$, ..., $-\frac{n}{2}-k$, ...

*) Мы не останавливаемся на специальном случае, когда λ — целое отрицательное число, не принадлежащее серии особых точек функции $\mathscr{P}^\lambda$. Отметим, не проводя доказательства, что в этих точках функция $(P+i0)^\lambda$ не имеет особенностей.

Нетрудно убедиться также, применяя соотношение (6) п. 3, что в указанных точках эти функции имеют простые полюсы, причем

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P+i0)^\lambda=\lim_{P'\to 0}\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P+iP'),$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P-i0)^\lambda=\lim_{P'\to 0}\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P-iP').$$

Чтобы отыскать эти вычеты, достаточно поэтому найти предельные значения функций $\sqrt{(-i)^n|g|}$ и $\sqrt{i^n|g|}$, где $|g|$ — дискриминант соответствующей комплексной квадратичной формы $P\pm iP'$, когда P' обращается в нуль.

Не нарушая общности, можно предполагать, что форма P' имеет вид

$$P'=\varepsilon\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right),\quad \varepsilon>0.$$

Тогда выражение для $\sqrt{(-i)^n|g|}$ можно представить в виде

$$\sqrt{(-i)^n|g|}=(\varepsilon-i\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\ldots(\varepsilon-i\lambda_n)^{\frac{1}{2}},$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — собственные значения матрицы формы P. Предположим, что форма P имеет в каноническом представлении p положительных и q отрицательных квадратов. Тогда при $\varepsilon\to 0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{(-i)^n|g|}=\sqrt{|\lambda_1\ldots\lambda_n|}\,(-i)^{\frac{p}{2}}i^{\frac{q}{2}},$$

т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{(-i)^n|g|}=e^{-\frac{\pi}{4}(p-q)i}\sqrt{|\Delta|},$$

где Δ — дискриминант вещественной квадратичной формы P. Применяя теперь формулу (9) п. 3 для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\mathscr{P}^\lambda$, получаем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P+i0)^\lambda=$$

$$=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}}\left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r\,\partial x_s}\right)^k\delta(x). \qquad (1)$$

Аналогично, имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ (P-i0)^\lambda = \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}}\left(\sum_{r,\,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r\,\partial x_s}\right)^k \delta(x). \tag{1'}$$

Таким образом, *вычетами функций* $(P+i0)^\lambda$ *и* $(P-i0)^\lambda$ *в точках* $\lambda=-\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}-1,\ \ldots,\ -\frac{n}{2}-k,\ \ldots$ *являются обобщенные функции, сосредоточенные в вершине конуса* $P=0$.

Функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ выражаются следующим образом через обобщенные функции P_+^λ и P_-^λ, определенные в п. 2:

$$(P+i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pi\lambda i}P_-^\lambda, \tag{2}$$

$$(P-i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{-\pi\lambda i}P_-^\lambda. \tag{2'}$$

В самом деле, при $\operatorname{Re}\lambda>0$ функционалам (P_+^λ,φ) и (P_-^λ,φ) соответствуют функции

$$P_+^\lambda = \begin{cases} P^\lambda, & \text{когда } P\geqslant 0,\\ 0, & \text{когда } P\leqslant 0;\end{cases}$$

$$P_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{когда } P\geqslant 0,\\ (-P)^\lambda, & \text{когда } P\leqslant 0.\end{cases}$$

В этом случае соотношения (2) и (2′) вытекают непосредственно из определения функций $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$. Но тогда, в силу единственности аналитического продолжения, формулы (2) и (2′) остаются справедливыми и при других значениях λ.

Отметим попутно, что в силу соотношений (2) и (2′), при $\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ функции $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$ и P^λ совпадают.

Установим теперь на основании формул (2) и (2′) связь между вычетами функций P_+^λ и P_-^λ при $\lambda=-\frac{n}{2}-k$

$(k=0,\ 1,\ \ldots)$. Лорановские разложения этих функций в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ имеют вид:

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda+\frac{n}{2}+k} + \ldots,$$

$$P_-^\lambda = \frac{c'^{(k)}_{-2}}{\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)^2} + \frac{c'^{(k)}_{-1}}{\lambda+\frac{n}{2}+k} + \ldots$$

Согласно (2) и (2′)

$$P_+^\lambda = \frac{e^{-\pi\lambda i}(P+i0)^\lambda - e^{\pi\lambda i}(P-i0)^\lambda}{-2i\sin\pi\lambda},$$

$$P_-^\lambda = \frac{(P+i0)^\lambda-(P-i0)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}. \tag{3}$$

Отсюда, используя выражения (1) и (1′) для вычетов функций $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$, получаем: *если размерность пространства* n *— нечетное число, а также если* n *— четное число и* p, q *— четные числа, то* $c_{-2}^{(k)}=c'^{(k)}_{-2}=0$; *если же* p *и* q *— нечетные числа, то*

$$c_{-2}^{(k)} = (-1)^{\frac{n}{2}+k+1}c'^{(k)}_{-2} = \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}}L_P^k\delta(x),$$

где $L_P=\sum\limits_{r,\,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r\,\partial x_s}$. Эти же результаты были уже получены другим методом в п. 2.

Далее, из соотношения (2) имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ (P+i0)^\lambda = \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ P_+^\lambda + \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ e^{\pi\lambda i}P_-^\lambda,$$

откуда

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ (P+i0)^\lambda = c_{-1}^{(k)} + e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i}c'^{(k)}_{-1} + \pi i e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i}c'^{(k)}_{-2}.$$

Подставляя сюда выражения для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P+i0)^\lambda$ и $c'^{(k)}_{-2}$, получаем: *если размерность пространства n — нечетное число, а также если n — четное число и p, q — четные числа, то*

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda + e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_-^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}} L_P^k\delta(x); \qquad (4)$$

если же p и q — нечетные числа, то

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda + e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_-^\lambda = 0. \qquad (5)$$

Отметим, кроме того, что *если n — нечетное число, а также если n — четное число и $k<\frac{n}{2}$, то, согласно формуле* (2),

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda + (-1)^k \underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_-^\lambda = \underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} (P+i0)^\lambda = 0. \qquad (6)$$

Будем предполагать с этого момента, что квадратичная форма P имеет канонический вид:

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

В п. 2 были найдены явные выражения для вычетов функций P_+^λ и P_-^λ через обобщенные функции $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k\delta_2^{(k)}(P)$ и $\delta(x)$. Подстановка этих выражений в равенства (4), (5) и (6) дает:

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = c_{p,q,k} L^{k-\frac{n}{2}+1}\delta(x),$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$$

и $c_{p,q,k} = 0$, если размерность пространства n — нечетное число, а также если n — четное число и $k<\frac{n}{2}-1$; в остальных случаях коэффициент $c_{p,q,k}$ может быть легко подсчитан на основании формул п. 2.

Итак, *если размерность пространства n — нечетное число, а также если n — четное число и $k<\frac{n}{2}-1$, то* $\delta_1^{(k)}(P) = \delta_2^{(k)}(P)$. *Если же n — четное число, то при $k \geqslant \frac{n}{2}-1$ разность $\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P)$ есть обобщенная функция, сосредоточенная в вершине конуса $P=0$.*

Согласно общей теории, которая будет рассмотрена в § 4, более естественные определения однородных обобщенных функций, сосредоточенных на поверхности $P=0$, состоят в следующем (см. ниже, стр. 410):

$$\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_+^\lambda$$

и аналогично

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_-^\lambda.$$

В случае нечетномерного пространства, а также в случае четномерного пространства размерности n при $k<\frac{n}{2}-1$, имеем:

$$\delta^{(k)}(P_+) = \delta_1^{(k)}(P), \quad \delta^{(k)}(P_-) = \delta_1^{(k)}(-P);$$

в случае же четномерного пространства при $k \geqslant \frac{n}{2}-1$ разности

$$\delta^{(k)}(P_+) - \delta_1^{(k)}(P) \quad \text{и} \quad \delta^{(k)}(P_-) - \delta_1^{(k)}(-P)$$

являются обобщенными функциями, сосредоточенными в вершине конуса $P=0$.

В силу соотношений (4) — (6), *если p и q являются одновременно четными числами и $k \geqslant \frac{n}{2}-1$, то*

$$(-1)^k\delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k+1-\frac{n}{2}}\left(k+1-\frac{n}{2}\right)!} L^{k+1-\frac{n}{2}}\delta(x);$$

во всех же остальных случаях

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k\delta^{(k)}(P_+).$$

5. Фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений. Используем результаты, полученные в пп. 3 и 4, для отыскания фундаментальных решений уравнений

$$L^k u = f(x), \tag{1}$$

где L — однородный линейный дифференциальный оператор вида

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$$

и $k = 1, 2, \ldots$

Напомним, что фундаментальным решением уравнения (1) называется такая обобщенная функция K, что

$$L^k K = \delta(x). \tag{2}$$

К уравнению (1) при $k=1$ приводится, в частности, любое линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, содержащее только старшие производные. Это уравнение обычно называют *ультрагиперболическим*. При p или q, равных нулю, оно превращается в уравнение Лапласа, а при p или q, равных 1, — в волновое уравнение.

Решение уравнения (2) естественно искать в виде однородной функции, поскольку оператор L и стоящая в правой части функция $\delta(x)$ однородны (либо присоединенной к однородной; см. определение в § 1). Так как после $2k$-кратного дифференцирования функции K получается функция $\delta(x)$, имеющая степень однородности $-n$, где $n = p+q$ — размерность пространства, то степень однородности функции K должна быть равна $-n+2k$.

С другой стороны, уравнение (2) инвариантно относительно линейных преобразований, сохраняющих форму

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

Решение этого уравнения будем строить в виде

$$K = f(P).$$

В п. 4 были рассмотрены однородные обобщенные функции от P: $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$. При $\lambda = -\frac{n}{2}+k$ эти функции имеют нужную степень однородности $-n+2k$.

Мы покажем сейчас, что *за исключением случая, когда размерность n пространства — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, каждая из функций $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ и $(P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ является, с точностью до постоянного множителя, фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$.*

Воспользуемся соотношением, установленным в пп. 3 и 4:

$$L^k (P+i0)^{\lambda+k} = \\ = 4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)(P+i0)^\lambda. \tag{3}$$

Отсюда при $\lambda = -\frac{n}{2}$ получаем:

$$L^k (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = \\ = 4^k\left(1-\frac{n}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n}{2}\right)(k-1)!\,\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\,(P+i0)^\lambda. \tag{4}$$

Отсюда видно, что *если размерность n пространства — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, то правая часть равенства* (4) *обращается в нуль, и мы получаем:*

$$L^k (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = 0,$$

т. е. *функция $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ является решением однородного уравнения, соответствующего уравнению* (1).

Во всех же остальных случаях, подставляя в (4) выражение для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\,(P+i0)^\lambda$, получаем:

$$L^k (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = \\ = 4^k\left(1-\frac{n}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n}{2}\right)(k-1)!\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\delta(x).$$

Следовательно, функция

$$K_1 = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$$

является фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$.

Таким образом, *за исключением случая, когда размерность n пространства — четное число и* $k \geqslant \frac{n}{2}$, *функция*

$$K_1 = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} \tag{5}$$

и, аналогично, функция

$$K_2 = (-1)^k \frac{e^{-\frac{\pi}{2} qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} (P-i0)^{-\frac{n}{2}+k} \tag{5'}$$

являются фундаментальными решениями уравнения $L^k u = f(x)$. *Если же n — четное число и* $k \geqslant \frac{n}{2}$, *то функция* $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = (P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ *является решением соответствующего однородного уравнения* $L^k u = 0$.

Заметим, что фундаментальные решения K_1 и K_2 комплексно сопряжены.

Формулы (5) и (5′) представляют собой наиболее удобное задание фундаментальных решений уравнения $L^k u = f(x)$. Можно было бы искать вещественные фундаментальные решения этого уравнения, комбинируя вещественные и мнимые части функций K_1 и K_2. Однако в зависимости от того, четна или нечетна размерность пространства n, а также четны или нечетны числа p и q, формулы для вещественных фундаментальных решений уравнения $L^k u = f(x)$ оказываются при этом существенно различными.

Формулы для фундаментальных решений K_1 и K_2 уравнения $L^k u = f(x)$ можно преобразовать, выразив эти функции непосредственно через обобщенные функции P_+^λ и P_-^λ.

Воспользуемся для этого формулами п. 4, выражающими функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ через функции P_+^λ и P_-^λ. Если размерность пространства n нечетна, то функции P_+^λ и P_-^λ регулярны при $\lambda = -\frac{n}{2}+k$, и мы получаем:

$$K_1 = \overline{K}_2 =$$

$$= (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} \left(P_+^{-\frac{n}{2}+k} + e^{\pi\left(-\frac{n}{2}+k\right)i} P_-^{-\frac{n}{2}+k}\right). \tag{6}$$

Если же n — четное число и $k < \frac{n}{2}$, то функции P_+^λ и P_-^λ имеют в точке $\lambda = -\frac{n}{2}+k$ простые полюсы с вычетами

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}+k}{\text{выч.}}\ P_+^\lambda = (-1)^{\frac{n}{2}-k-1} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}+k}{\text{выч.}}\ P_-^\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-k-1}}{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)!} \delta^{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}(P_+).$$

Обозначая через $P_+^{-\frac{n}{2}+k}$ и $P_-^{-\frac{n}{2}+k}$ свободные члены лорановских разложений функций P_+^λ и P_-^λ в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2}+k$, получаем:

$$K_1 = \overline{K}_2 = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k (k-1)!\, \pi^{\frac{n}{2}}} \left[P_+^{-\frac{n}{2}+k} + (-1)^{-\frac{n}{2}+k} P_-^{-\frac{n}{2}+k} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}+k}\pi i}{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)!} \delta^{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}(P_+)\right]. \tag{7}$$

Из формул (6) и (7) вытекает, в частности, что функции K_1 и K_2 линейно независимы. Обобщенная функция $K_1 - K_2$ является при этом решением однородного уравнения $L^k u = 0$.

Рассмотрим, наконец, особый случай, когда размерность пространства n — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$. Разлагая функцию $(P+i0)^{\lambda+k}$ в ряд Тэйлора в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2}$, имеем

$$(P+i0)^{\lambda+k} = \\ = (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} + \left(\lambda+\frac{n}{2}\right)(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P+i0) + \ldots$$

Подставляя это разложение в равенство (3) и сравнивая затем коэффициенты при $\lambda+\frac{n}{2}$ в левой и в правой частях этого равенства, получаем:

$$L^k\left[(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P+i0)\right] = \\ = 4^k(-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(k-\frac{n}{2}\right)!(k-1)!\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P+i0)^{\lambda}.$$

Подставляя сюда выражение для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P+i0)^{\lambda}$, мы установим, что *в случае пространства четной размерности n фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$ при $k \geqslant \frac{n}{2}$ является присоединенная функция*

$$K_1 = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}}{4^k\left(k-\frac{n}{2}\right)!(k-1)!}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P+i0).$$

Аналогично, *другим фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$ является в этом случае функция*

$$K_2 = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}}{4^k\left(k-\frac{n}{2}\right)!(k-1)!}(P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P-i0).$$

Отметим, что формулы для фундаментальных решений уравнения $L^k u = f(x)$ сохраняют смысл и в том случае,

когда L — произвольный линейный однородный дифференциальный оператор 2-го порядка

$$L = \sum_{r,\,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r\,\partial x_s}.$$

В этом случае под P следует понимать квадратичную форму вида

$$P = \sum_{r,\,s=1}^{n} g_{rs}x_r x_s,$$

где $\sum\limits_{s=1}^{n} g_{rs}g^{st} = \delta_r^t\ (r,\ t = 1, \ldots, n)$. В выражении для коэффициента при $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ и $(P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ при этом добавится в качестве множителя $\sqrt{|\Delta|}$, где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

Например, фундаментальными решениями уравнения

$$\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u = f(x_1, x_2, x_3)$$

являются функции

$$K_1 = \frac{1}{4\pi i}(2x_1x_3 + x_2^2 + i0)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$K_2 = \overline{K_1}.$$

6. Преобразования Фурье функций $(P+i0)^{\lambda}$ и $(P-i0)^{\lambda}$. Для отыскания преобразований Фурье функций $(P+i0)^{\lambda}$ и $(P-i0)^{\lambda}$ применим идею аналитического продолжения по коэффициентам квадратичной формы, развитую нами в п. 3.

Пусть

$$\mathscr{P} = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 \qquad (1)$$

— квадратичная форма с комплексными коэффициентами, причем $\operatorname{Im}\mathscr{P}$ есть положительно определенная форма, т. е. $\operatorname{Im}\alpha_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. Обобщенная функция $\mathscr{P}^{\lambda}$, а потому и ее преобразование Фурье $\widetilde{\mathscr{P}^{\lambda}}$, являются аналитическими функциями от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в области $\operatorname{Im}\alpha_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Для отыскания $\widetilde{\mathscr{P}}^{\lambda}$ достаточно поэтому рассмотреть случай, когда все коэффициенты α_s — мнимые числа: $\alpha_s = ib_s$, причем $b_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. Но в этом случае

$$\widetilde{\mathscr{P}}^{\lambda} = e^{\frac{\pi}{2}\lambda i} \int (b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2)^{\lambda} e^{i(x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n)}\, dx.$$

После соответствующей замены переменных получаем:

$$\widetilde{\mathscr{P}}^{\lambda} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}}{\sqrt{b_1} \ldots \sqrt{b_n}} \int r^{2\lambda} e^{i\left(x_1 \frac{s_1}{\sqrt{b_1}} + \ldots + x_n \frac{s_n}{\sqrt{b_n}}\right)}\, dx,$$

где $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Преобразование Фурье обобщенной функции r^{λ} было вычислено в п. 3 § 3 гл. II. Используя полученную там формулу, имеем:

$$\widetilde{\mathscr{P}}^{\lambda} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda i} 2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)}{\sqrt{b_1} \ldots \sqrt{b_n}\, \Gamma(-\lambda)} \left(\frac{s_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{s_n^2}{b_n}\right)^{-\lambda - \frac{n}{2}},$$

или

$$\widetilde{\mathscr{P}}^{\lambda} = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}} 2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)}{\sqrt{-i\alpha_1} \ldots \sqrt{-i\alpha_n}\, \Gamma(-\lambda)} \left(\frac{s_1^2}{\alpha_1} + \ldots + \frac{s_n^2}{\alpha_n}\right)^{-\lambda - \frac{n}{2}}. \qquad (2)$$

В силу единственности аналитического продолжения, формула (2) остается справедливой для произвольной квадратичной формы вида (1) с положительно определенной мнимой частью; при этом значения квадратных корней выражаются формулой $\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} i \arg z}$. Заметим, что квадратичная форма $\frac{s_1^2}{\alpha_1} + \ldots + \frac{s_n^2}{\alpha_n}$ имеет *отрицательно определенную* мнимую часть.

Пусть теперь

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,$$
$$Q = s_1^2 + \ldots + s_p^2 - s_{p+1}^2 - \ldots - s_{p+q}^2.$$

Выполняя в формуле (2) предельный переход, мы получим при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 1$, $\alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_{p+q} = -1$

$$F[(P + i0)^{\lambda}] = \frac{e^{-\frac{\pi}{2} q i} 2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)} (Q - i0)^{-\lambda - \frac{n}{2}} \qquad (3)$$

и аналогично

$$F[(P - i0)^{\lambda}] = \frac{e^{\frac{\pi}{2} q i} 2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)} (Q + i0)^{-\lambda - \frac{n}{2}}. \qquad (3')$$

Применяя формулы (14) п. 3, получаем также после элементарных преобразований коэффициентов:

$$\widetilde{P}_{+}^{\lambda} = 2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \times$$
$$\times \frac{1}{2i}\left[e^{-\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)i} (Q - i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)i} (Q + i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right], \qquad (4)$$

$$\widetilde{P}_{-}^{\lambda} = -2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \times$$
$$\times \frac{1}{2i}\left[e^{-\frac{\pi q i}{2}} (Q - i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{\frac{\pi q i}{2}} (Q + i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]. \qquad (4')$$

Отметим, что формулы преобразований Фурье, полученные здесь, остаются справедливыми и для случая, когда P — произвольная вещественная невырожденная квадратичная форма

$$P = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}.$$

В этом случае под Q следует понимать сопряженную квадратичную форму

$$Q = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} s_{\alpha} s_{\beta},$$

где $\sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ $(\alpha, \gamma = 1, \ldots, n)$. Кроме того, во все формулы следует добавить справа в качестве дополнительного сомножителя $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

7. Обобщенные функции, связанные с функциями Бесселя. Рассмотрим класс обобщенных функций вида $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda)$, где $f(z, \lambda)$ — целая функция от z и λ, а $\mathcal{P}$ — комплексная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью. Эти обобщенные функции при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ определяются равенством

$$(\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda), \varphi(x)) = \int \mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda)\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Очевидно, что $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ является аналитической функцией от λ. С помощью аналитического продолжения мы определяем обобщенную функцию $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P}, \lambda)$ и для других значений λ. Аналогично определяются функции $\mathcal{P}^\lambda \ln^m \mathcal{P} f(\mathcal{P}, \lambda)$.

Нетрудно показать (исходя, например, из разложения функции $f(z, \lambda)$ в степенной ряд по z), что для любой вещественной квадратичной формы P существует предел

$$(P+i0)^\lambda f(P+i0, \lambda) = \lim_{P_1 \to 0}(P+iP_1)^\lambda f(P+iP_1, \lambda), \quad (2)$$

где P_1 — положительно определенная квадратичная форма.

Совершенно аналогично определяется для любой вещественной квадратичной формы P обобщенная функция

$$(P-i0)^\lambda f(P-i0, \lambda).$$

Очевидно, что если форма P положительно определена, то

$$(P+i0)^\lambda f(P+i0, \lambda) = (P-i0)^\lambda f(P-i0, \lambda) = P^\lambda f(P, \lambda).$$

Кроме того, так как для всех целых положительных значений n справедливо равенство

$$(P+i0)^n = (P-i0)^n = P^n,$$

то

$$f(P+i0, \lambda) = f(P-i0, \lambda) = f(P, \lambda).$$

Выразим теперь обобщенные функции $(P+i0)^\lambda f(P, \lambda)$ и $(P-i0)^\lambda f(P, \lambda)$ через аргументы P_+ и P_-. Для этого мы заметим, что, как показано в п. 4,

$$(P+i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}P_-^\lambda,$$
$$(P-i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}P_-^\lambda.$$

Так как

$$P_+^\lambda f(P, \lambda) = P_+^\lambda f(P_+, \lambda) \quad \text{и} \quad P_-^\lambda f(P, \lambda) = P_-^\lambda f(P_-, \lambda),$$

то отсюда следует, что

$$(P+i0)^\lambda f(P, \lambda) = P_+^\lambda f(P_+, \lambda) + e^{i\lambda\pi}P_-^\lambda f(P_-, \lambda) \qquad (3)$$

и

$$(P-i0)^\lambda f(P, \lambda) = P_+^\lambda f(P_+, \lambda) + e^{-i\lambda\pi}P_-^\lambda f(P_-, \lambda). \quad (4)$$

Определенный нами класс обобщенных функций достаточно широк. К нему принадлежат, в частности, такие обобщенные функции, как $\mathcal{P}^{\frac{\lambda}{2}} J_\lambda(\mathcal{P}^{1/2})$ и $\mathcal{P}^{-\frac{\lambda}{2}} J_\lambda(\mathcal{P}^{1/2})$, где $J_\lambda(z)$ — бесселева функция. В этом легко убедиться, рассматривая разложение

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(\lambda+m+1)} \qquad (5)$$

бесселевой функции в степенной ряд.

Наряду с функцией $J_\lambda(z)$ мы будем рассматривать функции $N_\lambda(z)$, $H_\lambda^{(1)}(z)$, $H_\lambda^{(2)}(z)$, $I_\lambda(z)$, $K_\lambda(z)$, которые при нецелых значениях λ определяются формулами:

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{\sin\lambda\pi}[\cos\lambda\pi J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)],$$
$$H_\lambda^{(1)}(z) = J_\lambda(z) + i N_\lambda(z),$$
$$H_\lambda^{(2)}(z) = J_\lambda(z) - i N_\lambda(z),$$
$$I_\lambda(z) = e^{-\frac{\pi\lambda i}{2}} J_\lambda(iz),$$
$$K_\lambda(z) = \frac{\pi}{2\sin\lambda\pi}[I_{-\lambda}(z) - I_\lambda(z)].$$

Значения этих функций при целых значениях λ определяются с помощью предельного перехода по λ.

Разложения функций $N_\lambda(z^{1/2})$, $H_\lambda^{(1)}(z^{1/2})$, $H_\lambda^{(2)}(z^{1/2})$, $I_\lambda(z^{1/2})$, $K_\lambda(z^{1/2})$ в степенной ряд при нецелых значениях λ легко получаются из разложения (5) функции $J_\lambda(z)$. При этом оказывается, что *эти функции принадлежат к рассматриваемому нами классу функций*, что позволяет ввести такие обобщенные функции, как $K_\lambda\left[(P+i0)^{\frac{1}{2}}\right]$, $(P+i0)^{-\frac{\lambda}{2}}K_\lambda\left[(P+i0)^{\frac{1}{2}}\right]$ и т. д.

8. Преобразования Фурье обобщенных функций $(c^2+P+i0)^\lambda$ и $(c^2+P-i0)^\lambda$. Мы видели уже в п. 6 § 2 гл. II, что преобразования Фурье обобщенных функций $(x^2-1)^\lambda$, $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$ выражаются через бесселевы функции. В этом и следующем пунктах мы покажем, что то же самое имеет место и для преобразований Фурье обобщенных функций $(c^2+P)_+^\lambda$ и $(c^2+P)_-^\lambda$, являющихся n-мерными аналогами обобщенных функций $(x^2-1)^\lambda$, $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$.

Начнем с рассмотрения обобщенной функции $(c^2+P)^\lambda$ для положительно определенных квадратичных форм P. Преобразование Фурье обобщенной функции $(c^2+P)^\lambda$ при $\operatorname{Re}\lambda<-\frac{n}{2}$ задается интегралом

$$F[(c^2+P)^\lambda]=\int(c^2+P)^\lambda e^{i(x,s)}\,dx, \tag{1}$$

где $(x,s)=x_1s_1+\ldots+x_ns_n$.

Рассмотрим сначала случай, когда форма P имеет канонический вид $\sum_{k=1}^n x_k^2$. Очевидно, что в этом случае обобщенная функция $F[(c^2+P)^\lambda]$ зависит только от $|s|$ — длины вектора s. Поэтому, не теряя общности, мы можем считать, что вектор s имеет вид $s=(|s|,0,0,\ldots,0)$, и, следовательно, интеграл (1) имеет вид

$$\int(c^2+|x|^2)^\lambda e^{ix_1|s|}\,dx, \tag{2}$$

где $\operatorname{Re}\lambda<-\frac{n}{2}$.

Для вычисления интеграла (2) перейдем к полярным координатам. Проинтегрировав по углам $\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}$ и приняв во внимание, что $\Omega_{n-1}=\dfrac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$, мы получим, что интеграл (2) равен

$$\frac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\pi(c^2+r^2)^\lambda e^{ir|s|\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1 r^{n-1}\,d\varphi_1\,dr.$$

Но известно, что

$$\int_0^\pi e^{ir|s|\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\left(\frac{r|s|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}J_{\frac{n}{2}-1}(r|s|),$$

а

$$\int_0^\infty r^{\frac{n}{2}}(c^2+r^2)^\lambda J_{\frac{n}{2}-1}(r|s|)\,dr=\left(\frac{2}{|s|}\right)^{\lambda+1}\frac{c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)}K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|).$$

Поэтому интеграл (2) равен при $\operatorname{Re}\lambda<-\frac{n}{2}$ следующему выражению:

$$\int(c^2+|x|^2)^\lambda e^{ix_1|s|}\,dx=$$

$$=\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{c}{|s|}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|). \tag{3}$$

При остальных значениях λ справедливость формулы (3) устанавливается с помощью аналитического продолжения по λ.

Чтобы получить формулу для преобразования Фурье любой положительно определенной квадратичной формы, запишем равенство (3) в виде

$$\sqrt{\Delta}\int(c^2+|x|^2)^\lambda e^{i(x,s)}\,dx=$$

$$=\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{c}{|s|}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|) \tag{4}$$

$\Big($дискриминант Δ квадратичной формы $|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ равен единице$\Big)$. При преобразовании координат, переводящем форму $|x|^2$ в форму $P = \sum_{k,r=1}^{n} g_{kr} x_k x_r$, выражение $\sqrt{\Delta}\, dx$ остается инвариантным, а квадрат длины вектора s из сопряженного пространства принимает вид $\sum_{k,r=1}^{n} g^{kr} s_k s_r$ $\Big(Q = \sum_{k,r=1}^{n} g^{kr} s_k s_r$ — квадратичная форма, двойственная форме $P = \sum_{k,r=1}^{n} g_{kr} s_k s_r\Big)$. Поэтому при таком преобразовании координат равенство (4) переходит в равенство

$$\sqrt{\Delta} \int (c^2 + P)^\lambda e^{i(x,s)}\, dx = \frac{2^{\lambda+1} (\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left(cQ^{\frac{1}{2}}\right)}{Q^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}.$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Пусть P — положительно определенная квадратичная форма, а Q — двойственная ей форма. Тогда преобразование Фурье обобщенной функции $(c^2+P)^\lambda$ равно

$$F[(c^2+P)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1} (\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left(cQ^{\frac{1}{2}}\right)}{Q^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}, \tag{5}$$

где Δ — дискриминант формы P.

Пусть теперь P — произвольная вещественная квадратичная форма. В этом случае мы будем рассматривать обобщенные функции $(c^2+P+i0)^\lambda$ и $(c^2+P-i0)^\lambda$, определяемые соответственно равенствами

$$(c^2+P+i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} (c^2+P+i\varepsilon P_1)^\lambda \tag{6}$$

и

$$(c^2+P-i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} (c^2+P-i\varepsilon P_1)^\lambda, \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$, а P_1 — положительно определенная квадратичная форма. Существование пределов (6) и (7) при $c = 0$ было доказано в п. 4, а существование их при $c \neq 0$ следует из отсутствия особых точек на поверхности $c^2 + P = 0$.

Если квадратичная форма $\mathscr{P}$ изменяется в «верхней полуплоскости», то двойственная ей форма Q изменяется в «нижней полуплоскости». Поэтому в силу единственности аналитического продолжения из формулы (5) следует, что

$$F[(c^2+P+i0)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1} (\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}. \tag{8}$$

Через $\sqrt{\Delta}$ в формуле (8) обозначено аналитическое продолжение ветви этой функции, принимающей положительные значения для положительно определенных квадратичных форм *). Отметим, что $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}\, e^{\frac{q\pi i}{2}}$, если каноническое представление формы P имеет q отрицательных членов.

Аналогично доказывается, что

$$F[(c^2+P-i0)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1} (\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}. \tag{9}$$

В этом случае имеет место равенство $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}\, e^{-\frac{q\pi i}{2}}$, где q — число отрицательных членов в каноническом представлении формы P.

Выразим теперь обобщенные функции $F[(c^2+P+i0)^\lambda]$ и $F[(c^2+P-i0)^\lambda]$ через обобщенные функции Q_+ и Q_-. Используя разложение $K_\lambda(z)$ в степенной ряд и формулу (4)

---

*) Аналогичное аналитическое продолжение было подробно рассмотренно в п. 3, и мы не проводим соответствующих рассмотрений в этом месте.

из п. 7, мы получаем после несложных преобразований:

$$F[(c^2+P+i0)^\lambda]=$$

$$=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}\cdot\left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\frac{\pi i}{2}\,\frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right] \tag{10}$$

и

$$F[(c^2+P-i0)^\lambda]=$$

$$=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}\cdot\left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\frac{\pi i}{2}\,\frac{H^{(2)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) значительно упрощаются, если форма P знакоопределена: если P — положительно определенная форма, то в квадратных скобках остаются лишь первые слагаемые, а если P — отрицательно определенная форма, то лишь вторые слагаемые.

9. Преобразования Фурье обобщенных функций $(c^2+P)_+^\lambda$ и $(c^2+P)_-^\lambda$. Рассмотрим теперь обобщенные функции $(c^2+P)_+^\lambda$ и $(c^2+P)_-^\lambda$. Они являются линейными комбинациями обобщенных функций $(c^2+P+i0)^\lambda$ и $(c^2+P-i0)^\lambda$. Поэтому их преобразования Фурье являются линейными комбинациями преобразований Фурье обобщенных функций $(c^2+P+i0)^\lambda$ и $(c^2+P-i0)^\lambda$, а именно:

$$F[(c^2+P)_+^\lambda]=$$

$$=\frac{i}{2\sin\lambda\pi}\left\{e^{-i\lambda\pi}F[(c^2+P+i0)^\lambda]-e^{i\lambda\pi}F[(c^2+P-i0)^\lambda]\right\} \tag{1}$$

и

$$F[(c^2+P)_-^\lambda]=$$

$$=-\frac{i}{2\sin\lambda\pi}\left\{F[(c^2+P+i0)^\lambda]-F[(c^2+P-i0)^\lambda]\right\}. \tag{2}$$

Подставим в эти формулы вместо $F[(c^2+P+i0)^\lambda]$ и $F[(c^2+P-i0)^\lambda]$ выражения (8) и (9) из п. 8. Мы получим:

$$\frac{F\left[(c^2+P)_+^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}=-\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}i\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}}\times$$

$$\times\left\{e^{-i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-e^{i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\} \tag{3}$$

и

$$\frac{F\left[(c^2+P)_-^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}i\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}}\times$$

$$\times\left\{e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\}. \tag{4}$$

Можно выразить обобщенные функции $\frac{F\left[(c^2+P)_+^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\frac{F\left[(c^2+P)_-^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}$ через обобщенные функции Q_+^λ и Q_-^λ. Для этого надо подставить в формулы (1) и (2) вместо $F[(c^2+P+i0)^\lambda]$ и $F[(c^2+P-i0)^\lambda]$ выражения (10) и (11) из п. 8. При этом мы получаем

$$\frac{F\left[(c^2+P)_+^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}}\times$$

$$\times\left\{-\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\,\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\,\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\sin\frac{p\pi}{2}\,\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]\right\}. \tag{5}$$

Через p в этой формуле обозначено число положительных членов в каноническом представлении формы P, $p+q=n$.

Формула для $\dfrac{F\left[(c^2+P)_-^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}$ получается из формулы для $\dfrac{F\left[(c^2+P)_+^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}$ заменой $\sin\left(\lambda+\dfrac{q}{2}\right)\pi$ на $-\sin\dfrac{q}{2}\pi$ и $\sin\dfrac{p\pi}{2}$ на $-\sin\left(\lambda+\dfrac{p}{2}\right)\pi$. Она имеет вид

$$\frac{F\left[(c^2+P)_-^\lambda\right]}{\Gamma(\lambda+1)}=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\sin\frac{q\pi}{2}\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\right.$$
$$-\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\left[\sin\frac{q\pi}{2}\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\right.$$
$$\left.\left.+\sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]\right\}. \qquad (6)$$

Если в формулах (3) и (4) положить $c=0$, то эти формулы перейдут в выведенные в п. 6 формулы (5) и (6) для $\widetilde{P_+^\lambda}$ и $\widetilde{P_-^\lambda}$. Частными случаями этих формул являются установленные в п. 6 § 2 гл. II формулы для преобразований Фурье обобщенных функций $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$, $(x^2-1)^\lambda$.

10. Преобразования Фурье обобщенных функций $\dfrac{(c^2+P)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\dfrac{(c^2+P)_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ при целых значениях λ. Преобразования Фурье обобщенной функции $\delta(c^2+P)$ и ее производных. Выведенные в п. 9 формулы преобразований Фурье обобщенных функций $\dfrac{(c^2+P)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\dfrac{(c^2+P)_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ требуют дополнительного исследования при целых значениях λ. Это связано с тем, что обобщенные функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} \quad \text{и} \quad \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

имеют полюсы при целых значениях λ.

Обобщенная функция $\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ определяется следующим разложением:

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}}{2\sin\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)\pi}\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{-2\lambda-n+2m}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}+m}}{m!\,\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}+m+1\right)}-\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2m}(Q+i0)^m}{m!\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+m+1\right)}\right]. \qquad (1)$$

Но согласно п. 4 обобщенная функция $(Q+i0)^\lambda$ имеет при $\lambda=-\dfrac{n}{2}-k$ полюс с вычетом *)

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\ (Q+i0)^\lambda=\frac{e^{-\frac{\pi q i}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\sum_{r,\,s=1}^{n}g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r\,\partial x_s}\right)^k\delta(x).$$

---

*) Дискриминант формы Q равен $\dfrac{1}{\Delta}$, где Δ — дискриминант формы P.

Поэтому обобщенная функция $\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ имеет при $\lambda=s$, $s>0$ полюс с вычетом

$$\underset{\lambda=s}{\text{выч.}}\ \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$$

$$=\frac{(-1)^s\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c}{2}\right)^{s-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi q i}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2}\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}}{4^m m!\,(s-m)!}L^m\delta(x), \qquad (2)$$

где положено

$$L=\sum_{r,\,t=1}^{n}g^{rt}\frac{\partial^2}{\partial x_r\,\partial x_t}$$

(при вычислении вычета мы воспользовались известным соотношением $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$).

Найдем теперь правильную часть обобщенной функции $\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ при $\lambda=s$. Это легко сделать, если n — нечетное число. В этом случае правильная часть обобщенной функции $\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ при $\lambda=s$ является суммой

двух слагаемых. Первое из них выражается рядом (1) при $\lambda=s$, в котором под $(Q+i0)^{-s-\frac{n}{2}+m}$ при $m\leqslant s$ понимается значение правильной части обобщенной функции $(Q+i0)^\lambda$ при $\lambda=-s-\dfrac{n}{2}+m$. Второе слагаемое имеет вид $\sum\limits_{m=0}^{s}\alpha_m\beta_m$, где

$$\alpha_m=\underset{\lambda=-s-\frac{n}{2}+m}{\text{выч.}}(Q+i0)^\lambda,$$

$$\beta_m=\frac{(-1)^m}{2\,(m!)}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m-\frac{n}{2}}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{-\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}-m\right)}\right]_{\lambda=s}.$$

Эту правильную часть мы обозначим через $\dfrac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$.

Несколько сложнее обстоит дело при четных значениях n *). В этом случае определим обобщенную функцию

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$$

---

*) Разложение (1), определяющее обобщенную функцию $\dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$, теряет при этом смысл.

как сумму двух слагаемых, из которых одно опять равно $\sum_{m=0}^{s}\alpha_m\beta_m$, а второе есть сумма ряда

$$(-1)^{\frac{n}{2}+s}\left(\ln\frac{c(Q+i0)}{2}+\gamma\right)\frac{I_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s}}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+s}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}+s}\frac{(-1)^m(m-1)!}{\left(\frac{n}{2}+s-m\right)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}(Q+i0)^{-m}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s}}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h_{m+\frac{n}{2}+s}+h_m}{m!\left(\frac{n}{2}+s-m\right)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m}(Q+i0)^m, \qquad (3)$$

где γ — постоянная Эйлера, а $h_m=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r}$.

Как и выше, здесь под $(Q+i0)^{-m}$, $m\geqslant\frac{n}{2}$, понимается правильная часть обобщенной функции $(Q+i0)^{\lambda}$ при $\lambda=-m$.

Обобщенная функция $\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$ равна значению правильной части обобщенной функции $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ при $\lambda=s$.

Рассмотрим теперь обобщенную функцию

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} \qquad (4)$$

при целых отрицательных значениях λ, $\lambda=-s$. В этом случае она равна $\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}$, где при нечетном значении n обобщенная функция $\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}$ определяется рядом (1), а при четном значении n — рядом (3).

Аналогичные утверждения справедливы и для функции $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$ с той лишь разницей, что вычет этой функции при $\lambda=s$ равен

$$\underset{\lambda=s}{\text{выч.}}\ \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}=$$

$$=\frac{(-1)^s\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c}{2}\right)^{s-\frac{n}{2}}e^{\frac{\pi qi}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2}\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}}{4^m m!(s-m)!}. \qquad (5)$$

Мы можем теперь перейти к рассмотрению обобщенных функций $\frac{F\left[(c^2+P)_+^{\lambda}\right]}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\frac{F\left[(c^2+P)_-^{\lambda}\right]}{\Gamma(\lambda+1)}$ при целых значениях λ. Если $\lambda=-s$, где s — целое положительное число, то левая часть равенства (3) из п. 9 обращается в $\delta^{(s-1)}(c^2+P)$. Поэтому из формулы (3) п. 9 следует, что

$$F\left[\delta^{(s-1)}(c^2+P)\right]=(-1)^{s+1}\frac{i}{\sqrt{|\Delta|}}2^{\frac{n}{2}-s}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}-s}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{\pi iq}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\,c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}-e^{\frac{\pi iq}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}\right]. \qquad (6)$$

В частности, имеет место формула

$$F[\delta(c^2+P)] = -\frac{i}{\sqrt{|\Delta|}}(2\pi c)^{\frac{n}{2}-1}\times$$

$$\times\left[-e^{-\frac{\pi q i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}+e^{\frac{\pi q i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}\right]. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь целые положительные значения s. Имеет место формула

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{c_1}{\lambda-s}+\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+\ldots,$$

где через c_1 обозначен вычет обобщенной функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

в точке $\lambda=s$, а невыписанные члены стремятся к нулю при $\lambda\to s$. Аналогично,

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{c_2}{\lambda-s}+\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+\ldots,$$

где c_2 — вычет обобщенной функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

в точке $\lambda=s$.

Подставляя эти разложения в формулы (3) и (4) из п. 9 и переходя к пределу при $\lambda\to s$, мы получаем:

$$\frac{F\left[(c^2+P)_-^s\right]}{\Gamma(s+1)} = \frac{i\cdot 2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}}{\sqrt{|\Delta|}}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right] \quad (8)$$

и

$$\frac{F\left[(c^2+P)_+^s\right]}{\Gamma(s+1)} = (-1)^{s+1}i2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right]+$$

$$+(2\pi)^n\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!\,(s-m)!}L^m\delta(x). \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует, что

$$\frac{F\left[(c^2+P)^s\right]}{\Gamma(s+1)} = (2\pi)^n\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!\,(s-m)!}L^m\delta(x). \quad (10)$$

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Введение. Мы встречались уже с различными типами обобщенных однородных функций в главе I (§ 3—4), а также в § 2 этой главы. В этом параграфе мы рассмотрим произвольные обобщенные однородные функции любой степени в n-мерном пространстве.

Напомним, что обобщенная функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ называется однородной функцией степени λ, если при любом $\alpha>0$

$$f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^\lambda f(x_1, \ldots, x_n) \quad (1)$$

В частности, имеет место формула

$$F[\delta(c^2+P)] = -\frac{i}{\sqrt{|\Delta|}}(2\pi c)^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times\left[-e^{-\frac{\pi q i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}+e^{\frac{\pi q i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}\right]. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь целые положительные значения s. Имеет место формула

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{c_1}{\lambda-s}+\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+\ldots,$$

где через c_1 обозначен вычет обобщенной функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

в точке $\lambda=s$, а невыписанные члены стремятся к нулю при $\lambda\to s$. Аналогично,

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{c_2}{\lambda-s}+\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+\ldots,$$

где c_2 — вычет обобщенной функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

в точке $\lambda=s$.

Подставляя эти разложения в формулы (3) и (4) из п. 9 и переходя к пределу при $\lambda\to s$, мы получаем:

$$\frac{F\left[(c^2+P)_-^s\right]}{\Gamma(s+1)} = \frac{i\cdot 2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}}{\sqrt{|\Delta|}}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right] \quad (8)$$

и

$$\frac{F\left[(c^2+P)_+^s\right]}{\Gamma(s+1)} = (-1)^{s+1}i2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right]+$$

$$+(2\pi)^n\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!\,(s-m)!}L^m\delta(x). \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует, что

$$\frac{F[(c^2+P)^s]}{\Gamma(s+1)} = (2\pi)^n\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!\,(s-m)!}L^m\delta(x). \quad (10)$$

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Введение. Мы встречались уже с различными типами обобщенных однородных функций в главе I (§ 3—4), а также в § 2 этой главы. В этом параграфе мы рассмотрим произвольные обобщенные однородные функции любой степени в n-мерном пространстве.

Напомним, что обобщенная функция $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ называется однородной функцией степени λ, если при любом $\alpha>0$

$$f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)=\alpha^\lambda f(x_1,\ldots,x_n) \quad (1)$$

или, что то же,

$$\left(f,\ \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha_1},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\alpha_n}\right)\right)=\alpha^{\lambda+n}\,(f,\ \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)). \qquad (2)$$

В частности, обычной непрерывной при $x\neq 0$ однородной функции $f(x)$ степени λ с $\operatorname{Re}\lambda>-n$ соответствует обобщенная функция

$$(f,\ \varphi)=\int f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

которая также является однородной функцией степени λ. Если же $f(x)$ обычная однородная функция степени λ с $\operatorname{Re}\lambda\leqslant -n$, то ее особенность в начале координат не интегрируема, и вопрос о том, можно ли этой функции сопоставить ее регуляризацию, которая была бы также однородной функцией степени λ, требует специального рассмотрения. Подчеркивая это, мы будем называть такую (обычную) функцию $f(x)$ *формально однородной*.

Нам понадобится в дальнейшем следующее свойство, характеризующее обобщенные однородные функции степени λ.

Для того чтобы обобщенная функция f была однородной степени λ, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lambda f. \qquad (3)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в применении к любой основной функции $\varphi(x)$ это уравнение записывается в виде

$$-\left(f,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(x_i\varphi)}{\partial x_i}\right)=\lambda\,(f,\ \varphi),$$

т. е.

$$-\left(f,\ \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=(\lambda+n)\,(f,\ \varphi). \qquad (4)$$

Пусть обобщенная функция f — однородная степени λ:

$$\left(f,\ \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+n}\,(f,\ \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)).$$

Продифференцируем это равенство по α. При этом слева, как нетрудно проверить, операция дифференцирования переносится на основную функцию, и мы получаем:

$$-\left(f,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\left(\frac{x_1}{\alpha},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\alpha}\right)\right)= \\ =(\lambda+n)\,\alpha^{\lambda+n-1}\,(f,\ \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)).$$

Остается положить $\alpha=1$, чтобы прийти к равенству (4).

Обратно, пусть обобщенная функция f удовлетворяет уравнению (4). Рассмотрим дробь

$$\frac{\left(f,\varphi\left(\frac{x_1}{\alpha},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\alpha}\right)\right)}{\alpha^{\lambda+n}}$$

при $\alpha>0$. Дифференцируя ее по α, из условия (4) получаем, что производная равна нулю. Значит,

$$\frac{\left(f,\varphi\left(\frac{x_1}{\alpha},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\alpha}\right)\right)}{\alpha^{\lambda+n}}=\text{const}=\frac{(f,\varphi\,(x_1,\ \ldots,\ x_n))}{1},$$

т. е. f — однородная функция степени λ.

2. Положительные однородные функции нескольких независимых переменных. Рассмотрим непрерывную однородную функцию первой степени от $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, положительную во всем пространстве, за исключением начала координат; например, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ или вообще $P^{\frac{1}{2m}}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $P(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — положительно определенная форма степени $2m$. Обозначим эту функцию через $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и для $\operatorname{Re}\lambda>-n$ рассмотрим обобщенную функцию

$$(f^{\lambda}(x),\ \varphi(x))=\int f^{\lambda}(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, как обычно, — основная (т. е. финитная бесконечно дифференцируемая) функция. Легко проверить, что для тех λ, для которых интеграл сходится, формула (1) определяет однородную обобщенную функцию степени λ, аналитически зависящую от λ. Покажем, что *обобщенная функция f^{λ} допускает аналитическое* *продолжение во всю плоскость комплексного переменного λ, за исключением точек $\lambda = -n, \ldots, -n-k, \ldots$, в которых f^λ может иметь простые полюсы.*

Полученная обобщенная функция является регуляризованным значением интеграла $\int f^\lambda \varphi\, dx$ (см. гл. I, § 1, п. 7), и так как регуляризованное значение интеграла при $\lambda > -n$ совпадает с обычным интегралом, то мы сохраним для регуляризованного значения интеграла обозначение $\int f^\lambda \varphi\, dx$.

Для доказательства сформулированного утверждения выберем в n-мерном пространстве произвольную область G с гладкой границей Γ, содержащую начало координат, и представим интеграл (1), где $\mathrm{Re}\lambda > -n$, в виде

$$(f^\lambda, \varphi) = \int_G f^\lambda(x)\,[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_{R-G} f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\int_G f^\lambda(x)\,dx \qquad (2)$$

($R - G$ — дополнение к области G). Преобразуем $\int f^\lambda(x)\,dx$. Так как $f^\lambda(x)$ — однородная функция степени λ, то

$$\sum x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k} = \lambda\, f^\lambda(x)$$

и, следовательно,

$$\int_G f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\int_G x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k}\,dx. \qquad (3)$$

Проинтегрировав по частям по соответствующей переменной каждое слагаемое правой части, получим, что правая часть формулы (3) может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\lambda}\int_\Gamma f^\lambda(x)\,[x_1\,dx_2 \ldots dx_n - x_2\,dx_1\,dx_3 \ldots dx_n + \ldots \ldots \pm x_n\,dx_1 \ldots dx_{n-1}] - \frac{n}{\lambda}\int_G f^\lambda(x)\,dx$$

(Γ — граница области G) и, значит,

$$\int_G f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda(x)\,[x_1\,dx_2 \ldots dx_n - \ldots \pm x_n\,dx_1 \ldots dx_{n-1}]. \qquad (4)$$

Подставляя найденное значение $\int_G f^\lambda(x)\,dx$ в формулу (2), мы получаем:

$$(f^\lambda, \varphi) = \int_G f^\lambda(x)\,[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_{R-G} f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda(x)\,[x_1\,dx_2 \ldots dx_n - \ldots \pm x_n\,dx_1 \ldots dx_{n-1}]. \qquad (5)$$

Так как $f^\lambda(x)$ — однородная функция степени λ, а $\varphi(x) - \varphi(0)$ имеет при $x = 0$ нуль 1-го порядка, то первый интеграл правой части сходится для $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$. Второй и третий интегралы сходятся для всех λ, так как при интегрировании исключена окрестность начала и $\varphi(x)$ финитна. Таким образом, правая часть формулы (5) имеет смысл при $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$ и представляет собой аналитическую функцию λ, первый полюс которой зависит от размерности пространства, а именно находится в точке $\lambda = -n$.

Формула (2) дает, следовательно, явный вид аналитического продолжения обобщенной функции $\int f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx$ на область $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -n$. Прежде чем перейти к дальнейшему аналитическому продолжению функции, изучим более подробно важный для дальнейшего вычет при $\lambda = -n$. Вычет $\int f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx$ в точке $\lambda = -n$, как это видно из формулы (5), равен

$$\varphi(0)\int_\Gamma \frac{x_1\,dx_2 \ldots dx_n - \ldots \pm x_n\,dx_1 \ldots dx_{n-1}}{f^n(x)}. \qquad (6)$$

Будем в дальнейшем дифференциальную форму

$$x_1\,dx_2 \ldots dx_n - x_2\,dx_1\,dx_3 \ldots dx_n + \ldots \pm x_n\,dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

коротко обозначать ω. Легко проверить, что если σ — элемент поверхности, то $\frac{1}{n}\int_\sigma \omega$ есть объем конуса с вершиной в начале координат, опирающегося на площадку σ.

Предположим, что поверхность Γ задается уравнением $P(x) = 1$, где $P(x)$ — вспомогательная однородная функция размерности 1, и покажем, что тогда форма ω связана с поверхностью $P(x)-1=0$ в смысле п. 2 § 1. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что в точках поверхности Γ

$$dP\cdot\omega=dx_1\ldots dx_n.$$

Подставим сюда $dP=\frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial P}{\partial x_n}dx_n$ и выражение формы ω. Используя правила $dx_i dx_j=-dx_j dx_i\ (i\neq j)$ и $dx_i dx_i=0$, получаем слева

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial P}{\partial x_n}x_n\right)dx_1\ldots dx_n.$$

По формуле Эйлера величина, стоящая в скобках, есть просто P и остается воспользоваться тем, что $P=1$ на поверхности Γ.

Вычет функции $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$ при $\lambda=-n$ запишется коротко в виде

$$\varphi(0)\int\limits_\Gamma\frac{\omega}{f^n(x)}. \tag{7}$$

Выражение (7), будучи вычетом аналитической функции, не зависит от выбора поверхности Γ *). Следовательно, $\int\limits_\Gamma\frac{\omega}{f^n(x)}$ определяется значениями функции $f^{-n}(x)$ в любой окрестности начала координат.

Мы назовем величину $\int\limits_\Gamma\frac{\omega}{f^n(x)}$ *вычетом (обычной однородной степени* $-n$*) функции* $f^{-n}(x)$ *в начале координат.* (Подчеркнем, что он не совпадает с вычетом аналитической обобщенной функции f^λ в точке $\lambda=-n$: последний равен $\int\limits_\Gamma\frac{\omega}{f^n(x)}\delta(x)$.) Отметим, что если вычет функции $f^{-n}(x)$ в начале координат равен нулю, то аналитическая обобщенная функция $f^\lambda(x)$ не имеет полюса при $\lambda=-n$; в силу предложения 4 из п. 1 формула (5) определяет тогда при $\lambda=-n$ однородную обобщенную функцию степени $-n$. Это обстоятельство мы будем иметь в виду в следующем пункте этого параграфа.

Вычет однородной функции степени $-n$ имеет простой геометрический смысл. Действительно, выберем в качестве

*) Мы предоставляем читателю доказать это непосредственно

замкнутой поверхности Γ поверхность уровня $f(x)=1$. Тогда вычет перепишется в виде $\int\limits_\Gamma\omega$. Поскольку $\int\limits_\sigma\omega$ есть n-кратный объем конуса, опирающегося на площадку σ, мы получаем, что вычет функции $f^{-n}(x)$, т. е. $\int\limits_\Gamma\frac{\omega}{f^n(x)}$ равен nV, где V — объем области $f(x)\leqslant 1$.

Перейдем теперь к дальнейшему аналитическому продолжению интеграла. Тем же самым способом, что и ранее, вычитая из $\varphi(x)$ и добавляя дальнейшие члены ее ряда Тейлора, можно получить формулу, аналогичную (5) и дающую аналитическое продолжение нашей обобщенной функции в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda>-n-k-1$. Для этого нужно только преобразовать интегралы вида

$$\int\limits_G f^\lambda(x)\,x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,dx,$$

подобно тому как это сделано для

$$\int\limits_G f^\lambda(x)\,dx,$$

в интегралы по поверхности Γ, ограничивающей G, пользуясь однородностью функции $f^\lambda(x)\,x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$. Окончательная формула будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\int\limits_G f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx=\int\limits_G f^\lambda(x)\Bigg[\varphi(x)-\varphi(0)-\ldots\\ \ldots-\frac{1}{k!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k}x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^k\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Bigg]dx+\\ +\int\limits_{R-G}f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx+\\ +\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!\,(\lambda+n+m)}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m}\frac{\partial^m\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\times\\ \times\int\limits_\Gamma f^\lambda(x)\,x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega.\end{gathered}\tag{8}$$

Из этой формулы следует, что $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$ представляет собой аналитическую функцию для $\operatorname{Re}\lambda > -n-k-1$, $\lambda \neq -n, -n-1, \ldots, -n-k$ (при $\lambda = -n-k-1$ перестает сходиться первый интеграл). В точках $\lambda = -n-m$ ($m = 0, 1, \ldots, k$) $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$ имеет простые полюсы, вычеты которых очевидны из последнего слагаемого формулы (8). А именно, вычет обобщенной функции $f^\lambda(x)$ при $\lambda = -n-m$ равен

$$\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m}\frac{\partial^m\delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\int_\Gamma\frac{x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)}\,\omega. \tag{9}$$

Таким образом, для обобщенной функции $f^\lambda(x)$ справедливы, например, соотношения:

$$\lim_{\lambda\to-n}(\lambda+n)f^\lambda(x) = \delta(x)\int_\Gamma\frac{\omega}{f^n(x)},$$

$$\lim_{\lambda\to-n-1}(\lambda+n+1)f^\lambda(x) =$$
$$= -\frac{\partial\delta(x)}{\partial x_1}\int_\Gamma\frac{x_1\omega}{f^{n+1}(x)} - \ldots - \frac{\partial\delta(x)}{\partial x_n}\int_\Gamma\frac{x_n\omega}{f^{n+1}(x)}$$

и т. д.

Интеграл $\int_\Gamma\frac{x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)}\,\omega$ не зависит от выбора поверхности Γ. Если принять за Γ поверхность $f(x)=1$, то мы получим для этого интеграла выражение $\int_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega$, равное с точностью до множителя одному из моментов m-го порядка области, ограниченной поверхностью $f=1$.

Это доказывается следующим образом. Рассмотрим момент области $f \leqslant 1$, равный интегралу

$$I = \int_{f\leqslant 1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,dx.$$

Введем в области $f \leqslant 1$ новые координаты $u_1 = f, u_2, \ldots, u_n$ с якобианом $D\left(\frac{x}{u}\right) \neq 0$. В этих координатах

$$dx = D\left(\frac{x}{u}\right)du_1\,du_2\ldots du_n.$$

Обозначим

$$\omega = D\left(\frac{x}{u}\right)du_2\ldots du_n;$$

на поверхности $f=1$ эта форма совпадает с рассматриваемой в тексте. Запишем интеграл I в виде

$$I = \int_0^1\int_{f=c} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega\,dc.$$

Очевидно, что внутренний интеграл есть однородная функция аргумента c степени $\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n+1$. Значит,

$$\int_{f=c} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\omega = c^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n+1}\int_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega$$

и

$$I = \int_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega\int_0^1 c^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n+1}\,dc,$$

так что

$$\int_{f\leqslant 1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,dx = \frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n+2}\int_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega.$$

Таким образом, вычет *обобщенной аналитической функции $f^\lambda(x)$ в точке $\lambda = -n-m$ представляет собой линейный дифференциальный оператор m-го порядка от $\delta(x)$ с постоянными коэффициентами. Коэффициенты с точностью до множителя, не зависящего от f, равны всевозможным моментам m-го порядка области, ограниченной поверхностью $f=1$.*

Интегралы

$$\int_\Gamma\frac{x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)}\,\omega \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n = m)$$

мы аналогично предыдущему назовем *вычетами* (*обычной однородной степени $-n-m$*) *функции* $f^{-n-m}(x)$. Вычет обобщенной аналитической функции $f^\lambda(x)$ в точке $\lambda =$

$=-n-m$ равен их линейной комбинации с коэффициентами $\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\partial^m\delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$. Если все вычеты обычной однородной функции $f^{-n-m}(x)$ равны нулю, то по формуле (8) при $\lambda=-n-m$ ей отвечает обобщенная однородная функция степени $-n-m$. Это обстоятельство мы будем иметь в виду в п. 5 этого параграфа.

Для вычисления обобщенной функции f^λ при $\operatorname{Re}\lambda<-n$ можно дать вместо формулы (8) более удобную и симметричную формулу. Для этого заметим, что при $\operatorname{Re}\lambda<-n-k$ интегралы вида

$$\int\limits_{R-G} f^\lambda(x)\,x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\,dx \qquad (\alpha_1+\dots+\alpha_n=m<k) \tag{10}$$

сходятся. Граница области $R-G$ есть та же поверхность Γ (граница G) с противоположной ориентацией, и поэтому, преобразуя интеграл (10) в поверхностный, мы получим:

$$\int\limits_{R-G} f^\lambda(x)\,x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\,dx=-\frac{1}{\lambda+m+n}\int\limits_\Gamma f^\lambda(x)\,x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\,\omega.$$

Заменяя, таким образом, в формуле (8) поверхностные интегралы по Γ интегралами по области $R-G$ и объединяя затем все интегралы в один, мы получим для регуляризованного значения интеграла представление

$$\int f^\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx=\int f^\lambda(x)\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-\dots$$
$$\dots-\frac{1}{k!}\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^k\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big]\,dx, \tag{11}$$

справедливое в полосе $-n-k-1<\operatorname{Re}\lambda<-n-k$.

Заметим, что если $\Phi(x)$ — произвольная обычная однородная функция степени λ (не обязательно знакоположительная), имеющая особенность только в начале координат, и $-n-k-1<\operatorname{Re}\lambda<-n-k$, то формула (11) применима для регуляризации интеграла

$$\int\Phi(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Получаемый при этом функционал представляет собой однородную обобщенную функцию степени λ. Таким образом, всякой формально однородной (обычной) функции $\Phi(x)$ степени λ при $\lambda\neq-n-k$ отвечает по формуле (11) обобщенная однородная функция той же степени, являющаяся регуляризацией функции $\Phi(x)$. Так как однородную функцию любой степени, имеющую особенность только в начале координат, можно определить, задав произвольно ее значения на любой замкнутой поверхности Γ, пересекающейся только в одной точке с каждым выходящим из начала координат лучом, мы можем сказать, что *всякой непрерывной функции на замкнутой поверхности Γ отвечает обобщенная однородная функция степени λ при $\lambda\neq-n-k$.*

3. Обобщенные однородные функции степени $-n$. Рассмотрим (обычную) формально однородную функцию $\Phi(x)\equiv\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не обязательно знакоположительную, степени $-n$, с особенностью (т. е. с точкой локальной неинтегрируемости) только в начале координат. Чтобы определить соответствующую обобщенную функцию и тем самым регуляризовать расходящийся интеграл

$$\int\Phi(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

выберем произвольную область G, содержащую начало координат, и положим

$$\int\Phi(x)\,\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int\limits_G\Phi(x)\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx+\int\limits_{R-G}\Phi(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Определенное таким образом регуляризованное значение интеграла

$$\int\Phi(x)\,\varphi(x)\,dx$$

зависит, естественно, от выбора области G. Обозначим полученную обобщенную функцию символом $\Phi|_G$ и выясним, что происходит с этой функцией при замене области G другой областью G_1. Непосредственно очевидно, что заменяя

G на $G_1 \subset G$, мы получим значение функционала, отличающееся на

$$\varphi(0) \int_{G-G_1} \Phi(x)\,dx$$

от исходного. Таким образом,

$$\Phi|_G - \Phi|_{G_1} = \delta(x) \int_{G-G_1} \Phi(x)\,dx. \tag{2}$$

Так как из формулы (2) следует, что разность обобщенных функций $\Phi|_G$ и $\Phi|_{G_1}$ есть однородная обобщенная функция порядка $-n$, то *однородность* или *неоднородность* обобщенной функции, определенной формулой (1), не зависит от выбора области G.

Теперь нас интересует вопрос, когда обобщенная функция, определенная формулой (1), будет однородной, степени $-n$, т. е когда выполняется условие

$$\left(\Phi,\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = (\Phi,\ \varphi).$$

Прежде чем проводить вычисление, сравним формулу (1) этого пункта с формулой (5) п. 2. Если в первую из этих формул подставить $\Phi = f^{-n}$, где $f(x)$ — положительная однородная функция первой степени, то получится формула (5) п. 2, в которой интеграл $\int_\Gamma f^{-n}(x)\,\omega$, т. е. вычет функции $f^{-n}(x)$, заменен нулем. С другой стороны, обращение в нуль этого вычета необходимо и достаточно для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $f^\lambda(x)$ не имела полюса при $\lambda = -n$, т. е., как мы отмечали в п. 2, для того, чтобы формула (5) п. 2 определяла при $\lambda = -n$ обобщенную однородную функцию степени $-n$.

Сейчас мы покажем, что в общем случае для того, чтобы обобщенная функция (1) была однородной степени $-n$, необходимо и достаточно аналогичное условие.

Сделав в интеграле

$$\int_G \Phi(x)\left[\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(0)\right]dx + \int_{R-G} \Phi(x)\,\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$$

замену переменных $\frac{x_k}{\alpha} = x'_k$ и обозначив через αG область, получаемую из области G подобным преобразованием с коэффициентом α, будем иметь:

$$\int_G \Phi(x)\left[\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(0)\right]dx + \int_{R-G} \Phi(x)\,\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx =$$
$$= \int_G \Phi(x)\,[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_{R-G} \Phi(x)\,\varphi(x)\,dx + \varphi(0) \int_{G-\alpha G} \Phi(x)\,dx.$$

Очевидно, что для однородности обобщенной функции $\int \Phi(x)\,\varphi(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{G-\alpha G} \Phi(x)\,dx = 0$$

для любого α.

Преобразуем это условие. Для этого введем в области $G - \alpha G$ систему координат $\rho, u_1, \ldots, u_{n-1}$, где $\rho = 1$ и $\rho = \alpha$ — уравнения поверхностей Γ и $\alpha\Gamma$ соответственно, а $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ координаты на поверхностях $\rho = \text{const}$.

Обозначим $x_k = \rho x'_k$. Тогда

$$dx_1 \ldots dx_n = D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \rho & u_1 & \ldots & u_{n-1} \end{pmatrix} d\rho\,du_1 \ldots du_{n-1} =$$
$$= \rho^{n-1}\,d\rho\,(x'_1\,dx'_2 \ldots dx'_n - x'_2\,dx'_1\,dx'_3 \ldots dx'_n + \ldots$$
$$\ldots \pm x'_n\,dx'_1 \ldots dx'_{n-1} = \rho^{n-1}\,d\rho\,\omega,$$

где дифференциальная форма ω рассматривается на поверхности $\rho = 1$. С другой стороны, $\Phi(x) = \rho^{-n}\,\Phi(x')$. Поэтому

$$\int_{G-\alpha G} \Phi(x)\,dx = \int_1^\alpha \frac{d\rho}{\rho} \int_\Gamma \Phi(x)\,\omega = \ln\alpha \int_\Gamma \Phi(x)\,\omega. \tag{3}$$

Таким образом, *необходимое и достаточное условие того, чтобы регуляризованное значение* (1) *интеграла от формально однородной функции* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, *т. е. обобщенная функция* $\Phi|_G$, *представляло собой однородную обобщенную функцию степени* $-n$, *состоит в следующем*

$$\int_\Gamma \Phi\,\omega = 0. \tag{4}$$

Если это условие не выполнено, то функция $\Phi|_G$ является не однородной, а присоединенной обобщенной функцией.

Интеграл в формуле (4) мы будем называть *вычетом функции* $\Phi(x)$ *относительно начала координат* (это — обобщение определения, данного в п. 3). Таким образом, для того чтобы обобщенная функция (1) была однородной, степени $-n$, необходимо и достаточно, чтобы вычет функции $\Phi(x)$ относительно начала координат равнялся нулю.

Дифференцирование однородных функций степени $-n+1$. Мы неоднократно встречались уже в гл. I с такой ситуацией, когда обычная локально интегрируемая функция f имеет всюду, за исключением отдельных точек, обычную производную, но эта производная уже не является локально интегрируемой функцией (так что правильнее называть ее *формальной производной*). При этом нам недоставало автоматизма при подсчете производных в обобщенном смысле от функции f, и каждый раз приходилось проводить специальные рассмотрения. Например, в п. 3 § 2 гл. I при подсчете оператора Лапласа от $\frac{1}{r}$ в трехмерном пространстве по существу пришлось повторить обычное классическое рассуждение с вырезанием окрестности нуля и применением формулы Грина. Такой автоматизм в известной степени вносится следующей формулой, которую мы сейчас докажем. *Пусть Φ — обычная локально интегрируемая функция степени $-n+1$.* Тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G+$$
$$+(-1)^{i-1}\delta(x_1, \ldots, x_n)\int_\Gamma \Phi\, dx_1 \ldots dx_{i-1}dx_{i+1} \ldots dx_n. \tag{5}$$

Здесь слева $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ — производная функции Φ в смысле обобщенных функций, а справа $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G$ обозначает обобщенную функцию, построенную по формальной, т. е. обычной, производной функции Φ; Γ — граница области G.

Действительно, мы имеем:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i},\ \varphi\right)=-\left(\Phi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=$$
$$=-\int \Phi(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\,dx_1 \ldots dx_n=$$
$$=-\int_G \Phi(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi(x_1, \ldots, x_n)-$$
$$-\varphi(0, \ldots, 0)]\,dx_1 \ldots dx_n-$$
$$-\int_{R-G}\Phi(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\varphi(0, \ldots, 0)}{\partial x_i}\,dx_1 \ldots, dx_n.$$

Здесь $R-G$ — дополнение к области G.

Произведя теперь интегрирование по частям, мы получаем функционал $\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G,\ \varphi\right)$, а контурные интегралы по поверхности Γ сократятся, кроме интеграла

$$(-1)^{i-1}\varphi(0)\int_\Gamma \Phi\, dx_1 \ldots dx_{i-1}dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Тем самым формула (5) доказана. Так как ее левая часть от области G не зависит, то не зависит и правая. В последнем можно убедиться непосредственно, что предоставляется читателю.

Примеры.

1. Докажем формулу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(x^2+y^2)=2\pi\,\delta(x, y). \tag{6}$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Это верно как в смысле обычных, так и в смысле обобщенных функций, поскольку функция $\frac{2x}{x^2+y^2}$ еще локально интегрируема. Теперь по формуле (5) получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(x^2+y^2)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2+y^2}=\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}\right)\Big|_G+2\delta(x, y)\int_\Gamma\frac{x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln(x^2+y^2)=\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\Big|_G-2\delta(x,\ y)\int\limits_\Gamma\frac{y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Складывая обе формулы, мы получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(x^2+y^2)=\delta(x,\ y)\int\limits_\Gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Выбрав в качестве кривой Γ окружность с центром в начале координат, легко находим, что $\int\limits_\Gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=2\pi$.

Это и доказывает формулу (6). Из нее следует, что в двумерном пространстве

$$\Delta\ln\frac{1}{r}=2\pi\delta(x,\ y)$$

$$\left(r^2=x^2+y^2,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

2. Подсчитаем $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ в трехмерном пространстве ($r^2=x^2+y^2+z^2$). Один раз можно продифференцировать в обычном смысле:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}=-\frac{z}{r^3}.$$

Формальные производные правых частей равны соответственно

$$\frac{3x^2-r^2}{r^5},\quad \frac{3y^2-r^2}{r^5},\quad \frac{3z^2-r^2}{r^5},$$

их сумма равна нулю. Применяя трижды формулу (5) и складывая результаты, находим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}=\delta(x,y,z)\int\limits_\Gamma\frac{x\,dy\,dz-y\,dx\,dz+z\,dx\,dy}{r^3}.$$

Выбирая в качестве Γ сферу и переходя к полярным координатам, получаем, что интеграл справа равен -4π. Таким образом, в трехмерном пространстве

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\,\delta(x,\ y,\ z). \qquad (7)$$

Аналогичным способом нетрудно подсчитать $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$ в n-мерном пространстве ($n\geqslant 3$) и получить формулу, приведенную в п. 3 § 2 гл. I.

Поясним теперь несколько в ином плане, почему обращение вычета обычной однородной функции $\Phi(x)$ степени $-n$ в нуль есть условие однородности соответствующей обобщенной функции, а также роль понятия вычета.

Так как $\Phi(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — формально однородная функция степени $-n$, то, согласно уравнению Эйлера,

$$\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=-n\Phi,$$

или в дивергентной форме

$$\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_k}(x_k\Phi)=0.$$

Это равенство является формальным, т. е. удовлетворяется во всех точках, кроме начала координат, где Φ имеет особенность. С другой стороны, как мы знаем из п. 1, уравнение Эйлера, понимаемое в смысле обобщенных функций, характеризует однородные обобщенные функции соответствующей степени.

Покажем, что если понимать $x_k\Phi$ как обобщенные функции, то имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^n\frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k}=c\,\delta(x), \qquad (8)$$

где c — вычет функции Φ. Действительно, по формуле (5) мы имеем:

$$\frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k}=\left(\frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k}\right)\Big|_G+$$

$$+\delta(x_1,\ \ldots,\ x_n)\int\limits_\Gamma\Phi(-1)^{k-1}x_k\,dx_1\ \ldots\ dx_{k-1}\,dx_{k+1}\ldots dx_n.$$

Суммируя по k, мы получаем:

$$\sum_k \frac{\partial (x_k\Phi)}{\partial x_k} = \left(\sum_k \frac{\partial (x_k\Phi)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_G + \delta(x_1, \ldots, x_n)\int_\Gamma \Phi\,\omega,$$

и так как $\sum_k \frac{\partial (x_k\Phi)}{\partial x_k} = 0$, мы и приходим к формуле (8).

Следовательно, если $c = \int_\Gamma \Phi\omega \neq 0$, то однородность функции $\Phi(x)$ в начале координат нарушается. Если $\Phi(x)$ — потенциал некоторого поля, то это нарушение однородности — свидетельство наличия в особой точке источников, зарядов и т. п.

Мы показали, что условие, при котором формально однородная функция $\Phi(x)$ степени $-n$ определяет однородную обобщенную функцию (регуляризованное значение интеграла $\int \Phi\varphi\,dx$), состоит в том, чтобы вычет $\Phi(x)$ в начале координат равнялся нулю.

У знакоположительной функции $\Phi(x)$, очевидно, вычет не обращается в нуль; поэтому знакоположительная однородная функция степени $-n$ не может определять однородной обобщенной функции. Так, на прямой обобщенная функция $\frac{1}{|x|}$ (см. гл. I, § 3) неоднородна. На плоскости обобщенная функция $\frac{1}{x^2+y^2}$ $\left(\text{точнее, } \frac{1}{x^2+y^2}\Big|_G\right)$, действующая по формуле

$$\int \frac{\varphi(x, y)}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_G \frac{\varphi(x, y)-\varphi(0, 0)}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_{R-G} \frac{\varphi(x, y)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

неоднородна; в то же время обобщенная функция $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, определенная аналогичной формулой:

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\varphi(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}[\varphi(x, y)-\varphi(0, 0)]\,dx\,dy +$$

$$+ \int_{R-G} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

однородна, так как вычет обычной функции $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ равен нулю (по соображениям симметрии).

4. Обобщенные однородные функции степени $-n-m$. Пусть теперь $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — обычная однородная функция степени $-n-m$, где m — натуральное число. Зададим снова произвольную область G, содержащую начало координат, и определим регуляризованное значение интеграла $\int \Phi(x)\varphi(x)\,dx$ по формуле

$$\int \Phi(x)\varphi(x)\,dx = \int_G \Phi(x)\Bigg[\varphi(x)-\varphi(0)- \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{k!}\sum_{\Sigma\alpha_j = m} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^m\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Bigg]dx + \int_{R-G}\Phi(x)\Bigg[\varphi(x)-\varphi(0)-\ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{(k-1)!}\sum_{\Sigma\alpha_j = m-1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{m-1}\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Bigg]dx. \qquad (1)$$

Для однородности обобщенной функции, определенной равенством (1), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{G-\alpha G}\Phi(x)\,x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,dx = 0 \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n = m)$$

для любого α или, что то же самое (см. пп. 3 и 4), условий

$$\int_\Gamma \Phi(x)\,x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega = 0 \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n = m). \qquad (2)$$

Интегралы слева в (2) мы назовем аналогично предыдущему *вычетами* обычной однородной функции $\Phi(x)$ степени $n-m$.

Таким образом, *для того чтобы обычной однородной функции $\Phi(x)$ целого порядка $-n-m$ отвечала по формуле* (1) *однородная обобщенная функция степени $-n-m$, необходимо и достаточно, чтобы все вычеты этой функции были равны нулю.*

Чтобы пояснить этот результат, сравним формулу (1) с формулой (8) п. 3. Если в первую из этих формул подставить $\Phi(x)=f^{-n-m}(x)$, где $f(x)$ — положительная однородная функция степени 1, то получится формула (8) п. 3, в которой интегралы $\int\limits_\Gamma f^{-n-m}(x)\, x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega$, т. е. вычеты функции $f^{-n-m}(x)$, заменены нулями. С другой стороны, равенство нулю этих вычетов необходимо и достаточно для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $f^\lambda(x)$ не имела полюса при $\lambda=-n-m$, т. е. чтобы формула (8) определяла при $\lambda=-n-m$ однородную обобщенную функцию степени $-n-m$. Если хотя бы один из вычетов $f^{-n-m}(x)$ отличен от нуля, то регуляризация (1) интеграла

$$\int f^{-n-k}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

дает уже присоединенную однородную функцию степени $-n-m$.

Заметим, что для целых значений $\lambda\leqslant -n$, кроме обобщенных однородных функций, определяемых обычными функциями, нам известны еще однородные обобщенные функции, не связанные ни с какими обычными функциями, а именно $\delta(x)$ и ее производные. Производные k-го порядка от $\delta(x)$ представляют собой однородные обобщенные функции степени $-n-k$. Число различных производных k-го порядка в точности равно числу условий (2). В этом смысле общий запас однородных функций степени $-n-m$ оказывается, как и для произвольной нецелой степени λ, совпадающим с запасом непрерывных функций на замкнутой поверхности Γ, охватывающей начало координат.

5. Обобщенная функция вида $r^\lambda f$, где f — обобщенная функция, заданная на единичной сфере. Всякую обычную однородную функцию размерности λ можно представить в виде

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n)=\Phi(r\omega_1, r\omega_2,\ldots,r\omega_n)=r^\lambda f(\omega_1,\ldots,\omega_n), \tag{1}$$

где $f(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ — некоторая функция, заданная на единичной сфере Ω: $\sum\omega_i^2=1$. Пусть для простоты $\operatorname{Re}\lambda>-n$. Соответствующий регулярный функционал можно представить в виде

$$(\Phi(x_1,\ldots,x_n),\ \varphi(x_1,\ldots,x_n))=\int\Phi\varphi\,dx_1\ldots dx_n=$$
$$=\int\limits_0^\infty r^{\lambda+n-1}\int\limits_\Omega f(\omega_1,\ldots,\omega_n)\,\varphi(r\omega_1,\ldots,r\omega_n)\,d\omega=$$
$$=\int\limits_0^\infty r^{\lambda+n-1}u(r)\,dr,$$

где $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ — любая основная функция (из K), а

$$u(r)=\int\ldots\int\limits_\Omega f(\omega_1,\ldots,\omega_n)\,\varphi(r\omega_1,\ldots,r\omega_n)\,d\Omega.$$

Здесь, как обычно, $d\Omega$ — элемент поверхности на единичной сфере Ω.

Пусть теперь $f(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ — произвольная обобщенная функция, заданная на сфере Ω. Тогда мы можем определить обобщенную функцию

$$\Phi_\lambda(x_1,\ldots,x_n)=r^\lambda f(\omega_1,\ldots,\omega_n) \tag{2}$$

по формуле

$$(\Phi_\lambda,\ \varphi)=\int\limits_0^\infty r^{\lambda+n-1}u(r)\,dr, \tag{3}$$

где

$$u(r)=(f,\ \varphi(r\omega_1,\ldots,r\omega_n)). \tag{4}$$

Функция $u(r)$ финитна и бесконечно дифференцируема, ибо $\varphi(r\omega_1,\ldots,r\omega_n)$ финитна и бесконечно дифференцируема по r. Бесконечная дифференцируемость видна, например, из того, что

$$\frac{\partial\varphi(r\omega_1,\ldots,r\omega_n)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r\omega_1,\ldots,r\omega_n)=\sum_{i=1}^n\omega_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

и т. д.

Из формулы (2) видно, что *функционал Φ_λ является при $\lambda\neq -n, -n-1,\ldots$ аналитической функцией λ; в точках $\lambda=-n, -n-1,\ldots$ он имеет простые полюсы.*

Определим вычет этой аналитической функции при $\lambda = -n$. Мы имеем:

$$(\Phi_\lambda, \varphi) = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1}(f, \varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n))\,dr = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1}u(r)\,dr =$$

$$= \int_0^1 r^{\lambda+n-1}(u(r) - u(0))\,dr + \int_1^\infty r^{\lambda+n-1}u(r)\,dr + \frac{u(0)}{\lambda+n}.$$

В полученном выражении первый и второй интегралы регулярны при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$. Поэтому при $\lambda = -n$ вычет (Φ_λ, φ) равен

$$u(0) = c\varphi(0),$$

где $c = (f, 1)$ — значение функционала f на основной функции, равной единице на единичной сфере Ω. Таким образом, *вычет обобщенной функции Φ_λ при $\lambda = -n$ равен $c\,\delta(x_1, \ldots, x_n)$.*

Легко показать, что если обобщенная функция f также аналитически зависит от λ, $f = f_\lambda$, и если эта аналитическая функция регулярна при $\lambda = -n$, то обобщенная функция $\Phi_\lambda = r^\lambda f_\lambda$ при $\lambda = -n$ имеет вычет, равный $c_{-n}\,\delta(x_1, \ldots, x_n)$, где $c_{-n} = (f_\lambda, 1)$ при $\lambda = -n$. Определим теперь вычет обобщенной функции $\Phi_\lambda = r^\lambda f(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ при $\lambda = -n-k$. Вычет числовой аналитической функции (Φ_λ, φ) при $\lambda = -n-k$ равен $\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}u(r)\Big|_{r=0}$. Но

$$u(r) = (f, \varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)).$$

Поэтому

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}u(r)\Big|_{r=0}\left(f, \frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}\varphi(r\omega_1, \ldots, r\omega_n)\right) =$$

$$= \sum_{\Sigma\alpha_j = k-1}\left(f, \omega_1^{\alpha_1}\ldots\omega_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\right)\Bigg|_{x_1=\ldots=x_n=0} =$$

$$= \sum_{\Sigma\alpha_j = k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi(0, \ldots, 0)\left(f, \omega_1^{\alpha_1}, \ldots, \omega_n^{\alpha_n}\right).$$

Так как функционал $f(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ определен на поверхности $r = 1$, где $\omega_i = x_i$, мы получаем, что вычет функционала Φ_λ при $\lambda = -n-k$ равен

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{\Sigma\alpha_j = k-1} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\delta(x_1, \ldots, x_n),$$

где $c_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \left(f, x_1^{\alpha_1}\ \ldots\ x_n^{\alpha_n}\right)$.

§ 4. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В СТЕПЕНИ λ

1. Определение приводимых особых точек. Пусть $G(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция. В этом параграфе мы рассмотрим обобщенную функцию $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. изучим функционал

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_{G>0} G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n \qquad (1)$$

как аналитическую функцию от λ. Особые точки этой аналитической функции тесно связаны с характером поверхности $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Мы не будем заниматься случаем, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ произвольна, а ограничимся наиболее существенным во всех приложениях случаем, когда эта поверхность состоит лишь из точек, которые мы назовем *приводимыми.*

Функция $G(x_1, \ldots, x_n)$ называется *эквивалентной однородной функции в окрестности некоторой точки M*, если в этой окрестности существует локальная система координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в которой функция $G(x_1, \ldots, x_n)$ превращается в однородную функцию. Ясно, что мы можем определить функцию, эквивалентную однородной, не только в аффинном пространстве, но и на любом аналитическом многообразии, например на сфере.

Определение приводимой точки поверхности мы дадим индуктивно по числу измерений пространства или поверхности. Предположим, что для поверхности в пространстве или на поверхности меньше чем n измерений приводимые точки определены. Точку M поверхности $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ мы будем называть *приводимой*, если:

1) в некоторой окрестности точки M функция $G(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентна однородной функции;

2) пересечение поверхности $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ с достаточно малой сферой с центром в M дает поверхность, каждая точка которой приводима на этой сфере.

Для функции $G(x)$ на прямой второе требование, естественно, отпадает. В этом случае точка x_0, для которой $G(x_0)=0$, называется приводимой, если в окрестности x_0 существует такая обратимая бесконечно дифференцируемая функция $\xi = X(x)$, $X(x_0)=0$, что

$$G[X^{-1}(\xi)] \equiv \xi^m.$$

В окрестности приводимой точки M можно ввести локальные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в которых функция G превратится в однородную функцию от $\xi_1, \ldots, \xi_n$ степени m.

Если при этом локальные координаты можно выбрать так, чтобы функция G зависела от k переменных, и нельзя выбрать так, чтобы она зависела от меньшего числа переменных, то точка M называется *точкой k-го порядка и степени m*.

Таким образом, каждой точке поверхности мы можем отнести два числа: порядок k и степень m этой точки. В частности, если на поверхности $G=0$ $\operatorname{grad} G \neq 0$, то каждая точка этой поверхности будет точкой 1-го порядка и первой степени. Действительно, в окрестности любой такой точки можно выбрать в качестве одной из координат саму функцию $G(x_1, \ldots, x_n)=\xi_1$ и какие угодно другие координаты $\xi_2, \ldots, \xi_n$. Ясно, что в этой системе координат функция $G(x_1, \ldots, x_n)$ превращается в ξ_1, т. е. в однородную функцию первой степени от одной переменной. Значит, обыкновенная точка поверхности есть точка 1-го порядка и первой степени. Если поверхность $G=0$, например, в трехмерном пространстве состоит из трех координатных плоскостей $[G=x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma]$, то начало координат является точкой 3-го порядка, координатные оси состоят из точек 2-го порядка, а все остальные точки на координатных плоскостях суть точки 1-го порядка. Мы предоставляем читателю найти степени каждой из этих особых точек.

Ввиду того, что изучение интеграла (1) в общем случае может вызвать у читателя затруднения, мы предварительно в п. 2 рассмотрим случаи, когда поверхность $G=0$ состоит только из точек 1-го порядка, в п. 3 рассмотрим случай, когда на поверхности $G=0$ имеются особые точки не выше 2-го порядка, и только в п. 4 рассмотрим общий случай.

В этом пункте нам понадобится теорема, которую мы приведем без доказательства.

Пусть $G(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен. Если поверхность $G=0$ состоит лишь из приводимых точек, то она разлагается на конечное число связных компонент, каждая из которых состоит из точек одного и того же порядка и одной и той же степени. А именно, на поверхности $G=0$ имеется конечное число точек n-го порядка, конечное число линий $(n-1)$-го порядка и т. д., наконец, конечное число $(n-1)$-мерных компонент 1-го порядка.

Так как в окрестности точки 1-го порядка можно ввести локальные координаты, в которых наша функция G зависит от одного переменного, в окрестности точки 2-го порядка в соответствующих локальных координатах функция G зависит от двух переменных и т. д., то рассмотрение функций с приводимыми точками 1-го порядка сводится к изучению обобщенных функций от одной независимой переменной, рассмотрение функции с приводимыми точками 2-го порядка — к изучению обобщенных функций двух независимых переменных и т. д.

В заключение этого пункта заметим, что, как показано в п. 2 добавления 1 к гл. I, если имеется покрытие пространства счетной системой открытых областей D_i, такое, что каждый шар пересекается только с конечным числом этих областей, то любая основная функция $\varphi(x)$ представима в виде конечной суммы $\varphi(x)=\sum \varphi_i(x)$ основных функций φ_i, где φ_i равна нулю вне D_i. Поэтому там, где это нам понадобится, мы можем считать, что функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ отлична от нуля только в сколь угодно малой окрестности интересующей нас точки.

Изучение интеграла (1), зависящего от одного комплексного параметра, проводится путем рассмотрения вспомогательной функции двух комплексных переменных. Этот прием для простейшего случая изложен в п. 3.

2. Исследование обобщенной функции G^λ в случае, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ целиком состоит из точек 1-го порядка. Пусть $G(x_1, \ldots, x_n)$ — бесконечно дифференцируемая функция, для которой поверхность $G=0$ ограничена и состоит из приводимых точек 1-го порядка.

Рассмотрим функционал, зависящий от λ:

$$(G^\lambda, \varphi) = \int\limits_{G>0} \cdots \int G^\lambda (x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (2)$$

При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ этот интеграл сходится и представляет собой аналитическую функцию λ. Покажем, что *обобщенная функция G^λ представляет собой мероморфную функцию λ. Каждой связной компоненте многообразия $G=0$, состоящей из точек степени l, отвечает последовательность простых полюсов*

$$\lambda = -\frac{1}{l},\ -\frac{2}{l},\ \ldots,\ -\frac{n}{l},\ \ldots \qquad (3)$$

В частности, если на поверхности $G=0$ вообще нет особых точек, то G^λ имеет полюсы только в точках

$$\lambda = -1,\ -2,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$$

Для доказательства этого утверждения выберем произвольную точку M поверхности $G=0$. В силу сделанного выше замечания без ограничения общности можно предполагать, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ вне фиксированной малой окрестности D точки M. Обозначим через D_1 пересечение области D с областью $G \geqslant 0$. Тогда

$$(G^\lambda, \varphi) = \int\limits_{G>0} \cdots \int G^\lambda (x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{D_1} \cdots \int G^\lambda (x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Так как M — точка 1-го порядка (и степени l), то мы можем ввести в области D_1 систему координат, в которой

$G(x_1, \ldots, x_n) = \xi_1^l$, а остальные $n-1$ координат $\xi_2, \ldots, \xi_n$ выбраны произвольными беконечно дифференцируемыми функциями от $x_1, \ldots, x_n$ с единственным ограничением, чтобы в D_1 выполнялось условие

$$D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} > 0.$$

В новых координатах

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

и

$$\int\limits_{D_1} \cdots \int G^\lambda (x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{D_1} \cdots \int \xi_1^{\lambda l} \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Положим

$$\psi(\xi_1) = \int \cdots \int \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_2 \ldots d\xi_n, \qquad (4)$$

где интеграл вычисляется по пересечению области D_1 с поверхностью $G(x_1, \ldots, x_n) = \xi_1^l = \mathrm{const}$. Функция $\psi(\xi_1)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция от ξ_1, определенная в области D_1. С помощью этой функции (G^λ, φ) перепишется в виде

$$(G^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty \xi_1^{\lambda l}\, \psi(\xi_1)\, d\xi_1. \qquad (5)$$

Вспоминая результаты п. 2 § 3 гл. I о полюсах и вычетах функционала $\int\limits_0^\infty x^\lambda \psi(x)\, dx$, мы получаем, что каждой точке M 1-го порядка и степени l многообразия $G=0$ отвечает последовательность полюсов обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$

$$\lambda = -\frac{1}{l},\ -\frac{2}{l},\ \ldots,\ -\frac{n}{l},\ \ldots$$

При этом вычет интеграла (5) при $\lambda l = -n$, т. е. при $\lambda = -\frac{n}{l}$, просто выражается через функцию ψ из формулы (4): он равен $\frac{\psi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$.

Найдем теперь вычеты G^λ.

Вычет (G^λ, φ) при $\lambda = -\frac{1}{l}$ равен $\psi(0)$, т. е.

$$\int \ldots \int \varphi_1(0, \xi_2, \ldots, \xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}\Bigg|_{\xi_1=0} d\xi_2 \ldots d\xi_n,$$

где $\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим через ω дифференциальную форму, стоящую множителем при φ_1 в интеграле (4):

$$\omega = D\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_2 \ldots d\xi_n. \tag{6}$$

Тогда вычет можно записать в виде

$$\int_G \varphi(x_1 \ldots, x_n)\, \omega. \tag{7}$$

Но

$$dx_1 \ldots dx_n = dv = d\xi_1\, \omega,$$

и если положить

$$G^{\frac{1}{l}}(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n),$$

то мы будем иметь:

$$dv = dP\, \omega.$$

Вспоминая определение обобщенной функции $\delta(P)$, данное в п. 3 § 1 гл. III, мы видим, что вычет (7) есть не что иное, как $(\delta(P), \varphi)$. Таким образом, *вычет* G^λ *при* $\lambda = -\frac{1}{l}$ *равен* $\delta\left(G^{\frac{1}{l}}\right)$.

Найдем дальнейшие вычеты. При этом мы воспользуемся тем, что функцию

$$\psi(\xi_1) = \int \ldots \int \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

можно дифференцировать под знаком интеграла. Вычет (G^λ, φ) при $\lambda = \frac{-k-1}{l}$ равен

$$\frac{1}{k!}\int \ldots \int \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k}\left[\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix}\right]\Bigg|_{\xi_1=0} d\xi_2 \ldots d\xi_n = $$
$$= \frac{1}{k!}\int_{P=0} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k}\left[\varphi \cdot D\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}\right] d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Вспоминая определения и формулы п. 5 § 1 гл. III, мы видим, что вычет (G^λ, φ) при $\lambda = \frac{-k-1}{l}$ равен

$$\frac{1}{k!}\int_{P=0} \omega_k(\varphi) = \left(\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(P), \varphi\right). \tag{8}$$

Таким образом, *вычет обобщенной функции* G^λ *при* $\lambda = -\frac{k+1}{l}$ *равен*

$$\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}\left(G^{\frac{1}{l}}\right). \tag{9}$$

В силу замечания, сделанного в п. 1, мы можем теперь считать основную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ отличной от нуля в любой конечной области. При этом, подсчитывая вычет при $\lambda = \frac{k+1}{l}$, в формуле (8) нужно интегрировать по тем компонентам поверхности $G = 0$, которые состоят из точек степени l. Разумеется, если λ принадлежит более чем одной последовательности вида (3), то вычет в точке λ получается сложением значений, относящихся к соответствующим l.

Отметим, что в случае, когда поверхность $G=0$ состоит из точек 1-го порядка и степени l, аналитическая функция G^λ имеет полюсы при тех же λ, что и обобщенная функция одного переменного $(x^l)_+^\lambda$ (см. § 3 гл. I). Вычет $(x^l)_+^\lambda$ при $\lambda=-\frac{k+1}{l}$ равен $\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(x)$, а вычет G^λ при $\lambda=-\frac{k+1}{l}$ равен $\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}\left(G^{\frac{1}{l}}\right)$. Таким образом, случай, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ состоит из точек 1-го порядка, полностью аналогичен случаю одной независимой переменной.

3. Исследование обобщенной функции G^λ в случае, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ состоит из точек не выше 2-го порядка. Предположим теперь, что поверхность $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ состоит из приводимых точек не выше 2-го порядка. Каждая достаточно малая окрестность точки 1-го порядка этой поверхности порождает у обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, действующей по формуле

$$(G^\lambda, \varphi)=\int_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

последовательность полюсов, рассмотренную в п. 2. Нам осталось, следовательно, выяснить, как влияют на поведение этого функционала, как функции от λ, приводимые точки 2-го порядка (это, естественно, особые точки поверхности $G(x_1, \ldots, x_n)=0$).

Мы докажем, что *окрестность каждой точки M 2-го порядка и степени m порождает у обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ последовательность полюсов*

$$\lambda=-\frac{2}{m},\ -\frac{3}{m},\ \ldots,\ -\frac{k}{m},\ \ldots \tag{1}$$

При этом сколь угодно малая окрестность точки 2-го порядка, вообще говоря, содержит точки 1-го порядка и, может быть, различных степеней. Если какое-либо значение $\lambda=\lambda_0$ принадлежит одновременно последовательности (1) *и одной или нескольким последовательностям, относящимся к точкам 1-го порядка, попадающим в любую окрестность точки M, т. е. точкам 1-го порядка, инцидентным точке M, то при $\lambda=\lambda_0$ обобщенная функция $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ имеет полюс 2-го порядка.*

Для доказательства возьмем в интеграле

$$\int_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

функцию φ отличной от нуля только в малой окрестности точки M и выберем локальную систему координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в этой окрестности. Так как M — точка 2-го порядка, то эту локальную систему координат можно выбрать так, что функция G в новых координатах обращается в однородную функцию P от переменных ξ_1 и ξ_2, и мы приходим, таким образом, к задаче об изучении функционалов

$$\int_{P>0}\cdots\int P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\,\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,D\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n, \tag{2}$$

где $\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\equiv\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Положим

$$\psi(\xi_1, \xi_2)=\int\cdots\int\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,D\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n\end{pmatrix}d\xi_3\ldots d\xi_n. \tag{3}$$

Тогда интеграл (2) превращается в интеграл

$$\int_{P>0}\int P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\,\psi(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2, \tag{4}$$

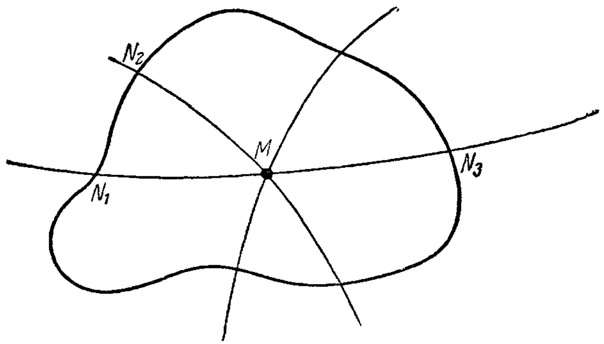
где $P(\xi_1, \xi_2)$ — однородная функция двух переменных степени m, а $\psi(\xi_1, \xi_2)$ — основная функция, отличная от нуля только в малой окрестности начала координат.

Итак, аналогично тому, как изучение G^λ в окрестности точки 1-го порядка сводится к изучению однородных функций от одной независимой переменной, изучение G^λ в окрестности точки 2-го порядка сводится к изучению произвольных однородных функций от двух переменных.

Приводимая точка 2-го порядка кривой $P(\xi_1, \xi_2)=0$ есть изолированная особая точка кривой или точка пересечения ветвей с различными касательными (черт. 7). Для исследования интеграла (4) при тех значениях λ, при которых обеспечена сходимость, перейдем к полярной системе координат (r, u) *) и, пользуясь однородностью, запишем интеграл $(G^\lambda, \varphi) = \int\limits_{P>0}\int P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\psi(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$ в виде

$$(G^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty r^{\lambda m+1}\,dr \int P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\psi(\xi_1, \xi_2)\,du, \tag{5}$$

где $\xi_1 = r\tilde{\xi}_1$, $\xi_2 = r\tilde{\xi}_2$, $\tilde{\xi}_k = \tilde{\xi}_k(u)$ — координаты точки на кривой $r = \text{const}$.



Черт. 7.

Рассмотрим теперь вспомогательный функционал, зависящий от двух не связанных между собой комплексных параметров λ и μ:

$$I_{\lambda,\mu}[\psi] = \int r^\mu\,dr \int P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\psi(\xi_1, \xi_2)\,du. \tag{6}$$

Очевидно, что при $\mu = \lambda m + 1$ интеграл (6) обращается в (5), и нам достаточно исследовать $I_{\lambda,\mu}[\psi]$. Имеет место следующая лемма:

Пусть заданы мероморфная функция двух комплексных переменных $F(\lambda, \mu)$ и две последовательности чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \tag{7}$$

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots, \tag{8}$$

Пусть $F(\lambda, \mu)$ имеет как функция от λ при любом фиксированном $\mu \neq \mu_n$ простые полюсы в точках последовательности (7), причем в лорановском разложении в окрестности каждого такого полюса

$$F(\lambda, \mu) = \frac{c_{-1}(\mu)}{\lambda - \lambda_n} + c_0(\mu) + c_1(\mu)(\lambda - \lambda_n) + \ldots$$

коэффициенты $c_{-1}(\mu)$, $c_0(\mu)$, ... являются мероморфными функциями от μ, имеющими простые полюсы в точках последовательности (8).

Тогда аналитическая функция от одной переменной $F(\lambda, \lambda)$ имеет полюсы в точках обеих последовательностей (7) и (8). Если при этом значение λ_0 принадлежит одновременно обеим последовательностям, то при $\lambda = \lambda_0$ $F(\lambda, \lambda)$ имеет полюс 2-го порядка с коэффициентом при $\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^2}$ в лорановском разложении, равным вычету при $\mu = \lambda_0$ коэффициента $c_{-1}(\mu)$.

Доказательство леммы непосредственно вытекает из разложения функции $F(\lambda, \mu)$ в ряд Лорана по двум переменным в окрестности точки (λ_n, μ_m).

Найдем теперь полюсы функции двух комплексных переменных, задаваемой интегралом (6). Обозначим интеграл по du в этой формуле через $f_\lambda(r)$, т. е. положим

$$f_\lambda(r) = \int\limits_\Gamma P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\psi(\xi_1, \xi_2)\,du \tag{9}$$

(через Γ обозначена та часть кривой $r = 1$, на которой $P(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) > 0$). Особые точки по λ функции $f(r)$ могут возникнуть лишь от тех точек N_1, N_2, ... на кривой, в которых $P(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ обращается в нуль. Но эти точки кривой $P(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = 0$ приводимы на линии интегрирования Γ *). Пусть N_i — одна из таких точек.

Ее приводимость на кривой Γ означает просто, что в окрестности N_i на Γ можно ввести локальную координату ξ, в которой P однородно и, значит, имеет вид ξ^{l_i}.

*) Вместо полярной системы координат можно взять любую криволинейную систему, в которой координатные линии $r = \text{const}$ охватывают начало координат.

*) Можно доказать, что если поверхность $F(x) = 0$ приводима в n-мерном пространстве, причем функция F зависит, скажем, только от первых двух координат x_1, x_2, то линия $F(x) = 0$ на плоскости также приводима.

Предполагая, что функция ψ отлична от нуля только в окрестности точки N_i, мы сводим изучение особенностей $f_\lambda(r)$ к изучению особенностей интегралов $\int \xi^{\lambda l}\psi_1(r, \xi)\,d\xi$, где $\psi_1(r, \xi) = \psi(\xi_1, \xi_2)$.

Но особенности такого интеграла нам хорошо известны из § 3 гл. I. А именно, такой интеграл имеет простые полюсы в точках

$$\lambda = -\frac{1}{l_i},\quad -\frac{2}{l_i}, \ldots,\quad -\frac{k}{l_i}, \ldots$$

Таким образом, мы получаем, что интеграл (9), т. е. функция $f_\lambda(r)$, имеет простые полюсы в точках последовательностей

$$\lambda = -\frac{1}{l_i},\quad -\frac{2}{l_i}, \ldots,\quad -\frac{k}{l_i}, \ldots, \tag{10}$$

где l_i — степени точек нулевого порядка, инцидентных исследуемой точке M, т. е. на плоскости — степени точек ветвей кривой, проходящих через точку M (см. черт. 7).

Функция двух комплексных переменных (6) запишется через рассмотренную функцию $f_\lambda(r)$ следующим образом:

$$I_{\lambda,\mu}[\psi] = \int_0^\infty r^\mu f_\lambda(r)\,dr. \tag{11}$$

Применяя к интегралу (11) снова результаты § 3 гл. I, мы получаем, что $I_{\lambda,\mu}[\psi]$ при фиксированном λ, не принадлежащем ни одной из последовательностей (10), аналитически продолжается во всю плоскость комплексного переменного μ, за исключением точек

$$\mu = -1, -2, \ldots, -k-1, \ldots,$$

в которых эта функция имеет простые полюсы. Полагая $\mu = \lambda m + 1$ и применяя лемму, мы получаем отсюда, что интеграл

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+1}\,dr \int P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\,\psi(\xi_1, \xi_2)\,du = I_{\lambda,\, m\lambda+1}[\psi]$$

имеет полюсы в точках последовательностей (10)

$$\lambda = -\frac{1}{l_i},\quad -\frac{2}{l_i}, \ldots,\quad -\frac{k+1}{l_i}, \ldots$$

и в точках последовательности

$$\lambda = -\frac{2}{m},\quad -\frac{3}{m}, \ldots,\quad -\frac{k+2}{m}, \ldots \tag{12}$$

Если $\lambda = \lambda_0$ принадлежит одновременно последовательности (12) и одной из последовательностей (10), то в точке $\lambda = \lambda_0$ рассматриваемый интеграл имеет, вообще говоря, полюс 2-го порядка.

Так как в локальной системе координат

$$\int\limits_{G>0}\!\!\ldots\!\int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \iint\limits_{P>0} P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\,\psi(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 =$$
$$= \int_0^\infty r^{\lambda m+1}\,dr \int P^\lambda\left(\frac{\xi_1}{r}, \frac{\xi_2}{r}\right)\psi(\xi_1, \xi_2)\,du,$$

то сформулированная в начале этого пункта теорема доказана.

Определим вычеты обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ в ее простых полюсах.

Пусть сначала $\lambda_0 = -\frac{k+1}{l_i}$ есть полюс функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, возникающий благодаря обращению функции $G(x_1, \ldots, x_n)$ в нуль в точках 1-го порядка. Выше, в п. 2, мы показали, что вычет (G^λ, φ) в таком полюсе равен интегралу $\frac{1}{k!}\int \omega_k(\varphi)$, где $\omega_k(\varphi)$ — дифференциальные формы, определенные в окрестности любой точки 1-го порядка поверхности $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Если участок поверхности, по которому интегрируется $\omega_k(\varphi)$, граничит с точками 2-го порядка поверхности $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$, то $\int \omega_k(\varphi)$ может оказаться расходящимся. Вычет равен в этом случае регуляризованному значению соответствующего интеграла *).

*) Так как рассматриваемый полюс λ_0 простой, то существует

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)\int\limits_{G>0}\!\!\ldots\!\int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Регуляризованное значение $\frac{1}{k!}\int \omega_k(\varphi)$ можно определить, например, как этот предел.

Рассмотрим теперь простой полюс $\lambda_0 = -\frac{k+2}{m}$, возникающий у обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ из-за обращения функции $G(x_1, \ldots, x_n)$ в нуль в точках 2-го порядка. Интеграл

$$\int_{G>0} \cdots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

мы представили в окрестности точки 2-го порядка как

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+1} f_\lambda(r)\, dr, \quad \text{где} \quad f_\lambda(r) = \int_\Gamma P^\lambda(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\, \psi(r\tilde{\xi}_1, r\tilde{\xi}_2)\, du,$$

$P(\xi_1, \xi_2)$ — значение функции $G(x_1, \ldots, x_n)$ в локальных координатах,

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \int \cdots \int \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, D\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_3 \ldots d\xi_n,$$

а $\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Для тех значений λ, для которых интеграл расходится, функция $f_\lambda(r)$ равна регуляризованному значению интеграла (аналитическому продолжению по λ функции $f_\lambda(r)$ от положительных значений λ).

Вычет интеграла $\int_0^\infty r^{\lambda m+1} f_\lambda(r)\, dr$ при $\lambda = \lambda_0 = -\frac{k+r}{m}$ равен $\frac{(-1^k)\, f_{\lambda_0}^{(k)}(0)}{k!}$.

Продифференцируем функцию $f_{\lambda_0}(r)$ по r под знаком интеграла (это допустимо при положительных λ, следовательно, допустимо и в регуляризованном значении интеграла) и положим $r = 0$. Мы получим тогда для вычета обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ при $\lambda_0 = -\frac{k+2}{m}$ выражение

$$\frac{1}{k!} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^k \psi(0, 0)}{\partial\xi_1^\alpha\, \partial\xi_2^\beta} \int_\Gamma \tilde{\xi}_1^\alpha \tilde{\xi}_2^\beta\, P^{-\frac{k+2}{m}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\, du =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^k \psi(0, 0)}{\partial\xi_1^\alpha\, \partial\xi_2^\beta} \int_\Gamma \frac{\xi_1^\alpha \xi_2^\beta (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)}{P^{\frac{k+2}{m}}(\xi_1, \xi_2)}. \qquad (13)$$

В § 1 мы получили формулу для вычетов аналитической обобщенной функции f^λ, где f — положительная однородная функция первой степени (см. формулу (8) п. 3 § 1). Сравнивая полученное выражение с этой формулой, мы видим, что вычет обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ записывается в локальных координатах аналогично вычету положительной однородной функции, с той разницей, что интеграл по кривой Γ понимается как регуляризованное значение интеграла (для функции, положительной в окрестности точки 2-го порядка, этот интеграл всегда сходится).

4. Обобщенная функция $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ в общем случае. Перейдем к обобщенным функциям $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, для которых поверхность $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ состоит из приводимых особых точек произвольного порядка от 1-го до n-го включительно.

Предположим для простоты, что $G(x_1, \ldots, x_n)$ есть многочлен. Мы докажем следующую теорему.

Обобщенная функция $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, *определенная равенством*

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_{G>0} \cdots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

для $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *и как аналитическое продолжение этого интеграла для остальных* λ, *есть мероморфная функция от* λ, *полюсы которой лежат на конечном числе арифметических прогрессий. Каждой связной компоненте поверхности* $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$, *состоящей из точек порядка* r *и степени* m *(см.* п. 1), *отвечает множество полюсов функционала* $G^\lambda[\varphi]$, *расположенных в точках*

$$\lambda = -\frac{r}{m}, \quad -\frac{r+1}{m}, \quad \ldots, \quad -\frac{r+k}{m}, \quad \ldots \qquad (1)$$

При этом, если имеются две, три и т. д. последовательные инцидентные друг другу связные компоненты поверхности $G = 0$, *состоящие из точек различных порядков, и значение* $\lambda = \lambda_0$ *принадлежит двум, трем и т. д. последовательностям* (1), *отвечающим этим компонентам, то в точке* $\lambda = \lambda_0$ *обобщенная функция* $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет полюс 2-го, 3-го и т. д. порядков.*

Предположим, что полюсы по λ интеграла

$$\int_{G>0}\ldots\int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{2}$$

возникающие благодаря точкам порядка $\leqslant n-1$, нам известны. Тогда достаточно исследовать интеграл (2) по сколь угодно малой окрестности точки M n-го порядка.

Введем в этой окрестности локальную систему координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в которой $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)=G(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная функция степени m, и предположим, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0$ вне этой окрестности. Интеграл (2) обратится тогда в интеграл

$$I_\lambda[\psi]=\int_D\ldots\int P^\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n, \tag{3}$$

где

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\equiv\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,D\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\\ \xi_1 & \ldots & \xi_n\end{pmatrix},$$

а D — пересечение окрестности, в которой $\varphi_1\neq 0$, с областью $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)>0$.

При тех λ, для которых интеграл (3) сходится, перейдем к сферическим координатам. В силу однородности $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ получим

$$I_\lambda[\varphi]=\int_0^\infty r^{\lambda m+n-1}\,dr\int_\Gamma P^\lambda(\tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_n)\,\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\Omega, \tag{4}$$

где область Γ есть пересечение единичной сферы с областью $P(\tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_n)>0$, $(\tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_n)$ — точка на Γ, $\xi_k=r\tilde\xi_k$, $d\Omega$ — элемент площади поверхности сферы.

Интеграл по Γ есть интеграл по $(n-1)$-мерной сфере, на которой поверхность $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$, по предположению, имеет только приводимые точки и притом не выше $(n-1)$-го порядка.

Согласно предположению нам известны также полюсы этого интеграла и их кратности.

Вводя снова, как в п. 3, функционал, зависящий от двух комплексных параметров:

$$I_{\lambda,\mu}[\psi_1]=\int r^\mu\,dr\int_\Gamma P^\lambda(\tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_n)\,\psi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\Omega, \tag{5}$$

и обозначая внутренний интеграл по Γ через $f_\lambda(r)$:

$$f_\lambda(r)=\int_\Gamma P^\lambda(\tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_n)\,\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\Omega, \tag{6}$$

мы придем к ситуации, рассмотренной в п. 3. А именно, при фиксированном $\mu\neq -n$ функционал $I_{\lambda,\mu}[\psi_1]$ имеет полюсы по λ на конечном числе последовательностей и при фиксированном λ, не принадлежащем ни одной из этих последовательностей, $I_{\lambda,\mu}[\varphi_1]$ имеет полюсы при $\mu=-1, -2, \ldots, -n, \ldots$ Единственное отличие от рассмотренного в п. 3 случая, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ состоит из точек не выше 2-го порядка, заключается в том, что благодаря индукции полюсы по λ могут быть не только простыми, но и кратными.

Легко проверить, что лемма, сформулированная в п. 3, распространяется и на этот случай.

Полагая $\mu=\lambda m+n-1$, мы получаем, что интеграл

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+n-1}\,dr\int_\Gamma P^\lambda\left(\frac{\xi_1}{r}, \frac{\xi_2}{r}, \ldots, \frac{\xi_n}{r}\right)\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\Omega=$$
$$=\int_D\ldots\int P^\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n=$$
$$=\int_{G>0}\ldots\int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

кроме полюсов по λ, тех же, что у функции $f_\lambda(r)$ (возникающих из-за точек поверхности $G(x_1, \ldots, x_n)=0$, имеющих порядок меньше чем n), имеет полюсы в точках последовательности

$$\lambda=-\frac{n}{m},\ -\frac{n+1}{m},\ \ldots,\ -\frac{n+k}{m},\ \ldots \tag{7}$$

При этом если в точке $\lambda=\lambda_0$ функция $f_\lambda(r)$ имеет полюс кратности p и λ_0 принадлежит последовательности (7), то обобщенная функция $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в точке $\lambda=\lambda_0$ полюс кратности $p+1$. Тем самым наша теорема доказана.

Мы определили, при каких значениях λ имеются полюсы у обобщенной функции

$$\int\limits_{G>0}\cdots\int G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Для простейшего случая однородной неотрицательной функции G мы в § 1 видели, что с самых разных точек зрения естественно ввести понятие вычетов формально однородной функции, которые характеризовали бы особенности этой функции в начале координат, подобно тому как вычет аналитической функции характеризует ее изолированную особую точку. Для произвольной рассмотренной здесь функции $G(x_1, \ldots, x_n)$ с приводимыми особенностями мы можем аналогичным образом определить вычеты, связанные с функцией G.

А именно, если D есть максимальная связная компонента многообразия $G=0$ порядка r и степени m, то под *вычетом* функции $G^{-\frac{r+k}{m}}(x_1, \ldots, x_n)$ относительно этой компоненты можно понимать обобщенную функцию (функционал), являющуюся вычетом по λ аналитической функции $G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)$ при $\lambda=-\frac{r+k}{m}$.

В частности, если $G(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная функция степени m, то такой вычет $G^{-\frac{n+k}{m}}(x_1, \ldots, x_n)$ в начале координат равен линейной комбинации производных k-го порядка от δ-функции с коэффициентами, равными интегралам по замкнутой поверхности, окружающей начало координат.

Если $G(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция, имеющая в начале координат приводимую особую точку $(n-1)$-го порядка и степени m, то вычет функции $G^{-\frac{n+k}{m}}(x_1, \ldots, x_n)$ относительно этой точки также равен линейной комбинации производных от δ-функции не выше k-го порядка с коэффициентами, определяемыми по функции G. Аналогично можно определить вычет не только относительно точки, но и относительно любой связной компоненты многообразия $G=0$ степени m и порядка r.

5. Интегралы от бесконечно дифференцируемой функции φ по поверхностям уровня $G(x_1, \ldots, x_n)=c$. Сделаем из полученных результатов вывод о поведении интегралов от функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ по поверхностям уровня многочлена $G(x_1, \ldots, x_n)$. Мы ограничимся случаем, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ состоит только из приводимых точек, а поверхность $G=c$ при $c>0$ не имеет особых точек, и рассмотрим интегралы

$$I(c)=\int\limits_{G=c}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,\omega, \tag{1}$$

где ω — форма на поверхности $G(x_1, \ldots, x_n)=c$, определенная равенством $dv=dG\,\omega$. Имеет место очевидное тождество (по λ):

$$\int\limits_0^{\infty} I(c)\,c^{\lambda}\,dc=\int\limits_{G>0}\cdots\int G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \tag{2}$$

Выше мы установили, что интеграл, стоящий в правой (и следовательно, в левой) части равенства, есть мероморфная функция λ и определили ее полюсы в зависимости от характера особенностей поверхности $G(x_1, \ldots, x_n)=0$.

Так как поведение функции $I(c)$ при $c>\varepsilon>0$ не влияет на особенности интеграла $\int\limits_0^{\infty} I(c)\,c^{\lambda}\,dc$, то, зная эти особенности, мы можем, наоборот, написать асимптотическое разложение функции $I(c)$ при малых значениях c.

А именно, можно показать, что если расположить полюсы функции $F(\lambda)$, задаваемой интегралом $\int\limits_0^{\infty} I(c)\,c^{\lambda}\,dc$ и его аналитическим продолжением, в порядке их убывания в последовательность

$$-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \ldots,\ -\lambda_k,\ \ldots \quad (0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k<\ldots)$$

и обозначить кратность k-го полюса через m_k, то функция $I(c)$ при малых c имеет следующее асимптотическое разложение:

$$I(c) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{k,m} c^{\lambda_k - 1} \ln^{m-1} c. \qquad (3)$$

Нетрудно убедиться в том, что каждое слагаемое справа дает в интеграле $\int_0^\infty I(c)\, c^\lambda\, dc$ m-кратный полюс (см. гл. I, § 3). Коэффициент $a_{k,m}$ при этом равен коэффициенту при $\frac{1}{(\lambda+\lambda_k)^m}$ в разложении Лорана для $F(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda = -\lambda_k$, умноженному на $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$. Вспоминая определение функции $\delta(G)$, мы можем переписать интеграл $I(c)$ в виде:

$$I(c) = \int_{G=0} \varphi\, \omega = (\delta(G-c), \varphi).$$

Отсюда следует, что, имея асимптотическое разложение $I(c)$ в ряд по степеням c, мы имеем тем самым разложение $(\delta(G-c), \varphi)$ по степеням c. Из формулы (3) получается, таким образом, асимптотическое разложение $\delta(G-c)$ при малых c.

Примеры. 1. Пусть $G(x, y) = xy$. Тогда первый полюс обобщенной функции $(xy)^\lambda$, определенной интегралом $\int\int_{xy>0} (xy)^\lambda \varphi(x, y)\, dx\, dy$, будет при $\lambda = -1$. Разложение интеграла $\int\int_{xy>0} (xy)^\lambda \varphi(x, y)\, dx\, dy$ по степеням $\lambda+1$ имеет вид

$$\int\int_{xy>0} (xy)^\lambda \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{2\varphi(0, 0)}{(\lambda+1)^2} + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, 0)}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0, y)}{y}\, dy \right] \frac{1}{\lambda+1} + \ldots$$

Интеграл $I(c) = \int_{xy=c} \varphi(x, y)\, \omega$ *) допускает, следовательно, асимптотическое разложение:

$$I(c) = -2\varphi(0, 0) \ln c + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, 0)}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0, y)}{y}\, dy + \ldots,$$

где многоточием заменены члены, стремящиеся к нулю при $c \to 0$.

В соответствии со сказанным выше можно получить отсюда разложение по степеням c обобщенной функции $\delta(xy-c)$. Оно будет иметь следующий вид:

$$\delta(xy-c) = -2\delta(x, y) \ln c + \left(\frac{\delta(y)}{x} + \frac{\delta(x)}{y} \right) + o(c). \qquad (4)$$

2. $G = x^2+y^2+z^2-t^2$. В этом случае интеграл $\int\int_{G>0} (x^2+y^2+z^2-t^2)^\lambda \varphi(x, y, z, t)\, dv$ имеет при $\lambda = -1$ простой полюс с вычетом $\delta(x^2+y^2+z^2-t^2)$ и при $\lambda = -2$ полюс 2-го порядка, в окрестности которого этот интеграл допускает следующее разложение:

$$\int\int_{G>0} G^\lambda \varphi\, dv = -\frac{1}{8} \frac{\varphi(0, 0, 0, 0)}{(\lambda+2)^2} + \frac{1}{(\lambda+2)} \left\{ \varphi(0, 0, 0, 0) \ln 2 + \frac{8\pi}{3} \left[\int_0^1 \frac{\varphi(0, 0) - \varphi(r, r)}{r}\, dr - \int_1^\infty \frac{\varphi(r, r)}{q}\, dr + \int_0^\infty \left. \frac{\partial \varphi(r, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=r} dr \right] \right\} + \ldots$$

*) При этом, как указывалось выше, можно получить $\omega = \frac{dy}{y}$ или $\omega = -\frac{dx}{x}$, т. е. рассмотреть интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, y)\, dy}{y}$ или $-\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\varphi(x, y)\, dx}{x}$.

Поэтому $\delta(G-c)$ мы можем теперь представить в виде:

$$\delta(G-c)=\delta(G)+c\ln c\frac{\delta(x,\ y,\ z,\ t)}{8}+c\delta'(G)+\ldots,\qquad(5)$$

где $G\equiv x^2+y^2+z^2-t^2$.

Многоточие здесь заменяет члены порядка $o(c)$, а под $\delta'(G)$ понимается расходящийся интеграл $\int\limits_{G=0}\omega_1$, регуляризованный так, как указано в фигурных скобках.

Вообще, если G — функция, для которой поверхность $G=0$ имеет только приводимые особенности, то разложение обобщенной функции $\delta(G-c)$ при малых c может служить для определения обобщенных функций $\delta(G)$, $\delta'(G)$ и т. д. в тех случаях, когда интегралы от соответствующих дифференциальных форм расходятся.

А именно, если

$$\delta(G-c)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{m_k}T_{k,m}\,c^{\lambda_k-1}\ln^{m-1}c,$$

где $T_{k,m}$ — обобщенные функции, такие, что

$$(T_{k,m},\ \varphi)=a_{k,m}$$

($a_{k,m}$ — коэффициенты разложения интеграла $I(c)=\int\limits_{G=c}\varphi\,\omega$ по степеням c и $\ln c$ (см. формулу (3))), то через $\delta(G)$ мы обозначим свободный член этого разложения, через $\delta'(G)$ — взятый с обратным знаком коэффициент при первой степени c и т. д. В частности, формула (4) перепишется в виде

$$\delta(xy-c)=-2\ln c\,\delta(x,\ y)+\delta(x,\ y)+\ldots,\qquad(4')$$

так что *)

$$\delta(xy)=\frac{\delta(x)}{y}+\frac{\delta(y)}{x}.\qquad(6)$$

*) Эта формула не могла быть получена в § 1, так как там при выводе формулы

$$\delta(PQ)=\frac{\delta(P)}{Q}+\frac{\delta(Q)}{P}\qquad(*)$$

поверхности $P=0$ и $Q=0$ предполагались непересекающимися. Однако когда они пересекаются «правильно», т. е. так, что можно взять систему координат $u_1,\ldots,u_n$, где $u_1=P$ и $u_2=Q$, то формула (*) легко выводится при помощи этих самых координат из формулы (6).

В случае, когда поверхность $G=0$ не имеет особых точек, такое определение, естественно, совпадает с данным выше. Действительно, в этом случае интеграл $\int\limits_{G>0}G^\lambda\varphi\,dv$ имеет только простые полюсы $\lambda=-1,\ -2,\ \ldots,\ -k,\ \ldots$ и вычет его при $\lambda=-k$ равен $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(G)$, поэтому

$$\delta(G-c)=$$
$$=\delta(G)-c\delta'(G)+\frac{c^2}{2}\delta''(G)+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(G)+\ldots$$

Из формулы (4) можно сделать интересный вывод. Продифференцируем равенство (4) по c:

$$-\delta'(xy-c)=-\frac{2}{c}\delta(x,\ y)+\ldots$$

Умножив на $-c$ и устремив его к нулю, получим:

$$c\delta'(xy-c)\to2\delta(x,\ y).$$

Аналогично, дважды продифференцировав по c равенство (5) и умножив его после этого на c, мы при стремлении c к нулю получим

$$c\delta''(x^2+y^2+z^2-t^2-c)\to\frac{\delta(x,\ y,\ z,\ t)}{8}.$$

Если применить эти формулы к основной функции φ, то мы сможем вычислить значение функции φ в начале координат, зная ее интегралы по гиперболам $xy=c$ или гиперболоидам $x^2+y^2+z^2-t^2=c$.

СВОДКА ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ФОРМУЛ ВЫПУСКА 1

Глава I, § 1

1. *Основная функция* — бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, равная нулю вне ограниченной области n-мерного пространства R_n.

2. *Основное пространство* K — совокупность всех основных функций. Линейные операции в K определяются обычным образом. Последовательность $\varphi_\nu(x) \in K$ называется сходящейся к нулю, если функции $\varphi_\nu(x)$ стремятся к нулю равномерно вместе со всеми производными и обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области.

3. *Обобщенная функция* — линейный непрерывный функционал на пространстве K.

4. *Регулярная* обобщенная функция — функционал на K вида

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — локально интегрируемая функция.

5. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными*.

6. $\theta(x)$ — функция, равная 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$ ($n = 1$).

7. *Дельта-функция* $\delta(x - x_0)$ — сингулярный функционал, действующий по формуле

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

8. Функционал $f(x)$ называется *равным нулю в области* G, если $(f, \varphi) = 0$ для всякой основной функции, равной нулю в такой области G_1, что G и G_1 покрывают все R_n.

9. *Носитель* функционала f — замкнутое множество, на дополнении которого функционал f равен нулю.

10. Последовательность f_ν обобщенных функций называется *сходящейся к обобщенной функции* f, если для любой $\varphi \in K$

$$\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu, \varphi) = (f, \varphi).$$

11. Для комплексных основных и обобщенных функций действия производятся по правилам

$$\alpha(f, \varphi) = (f, \alpha\varphi) = (\bar{\alpha} f, \varphi).$$

Функционал f типа функции $f(x)$ определяется по формуле

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx.$$

12. Обобщенная функция $\bar{f}$, комплексно сопряженная к данной f, определяется формулой

$$(\bar{f}, \varphi) = \overline{(f, \bar{\varphi})}.$$

13. Пространство S состоит из бесконечно-дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \quad (n = 1;\ k,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

или, для нескольких переменных,

$$\left| x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial^{q_1 + \ldots + q_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}} \right| \leqslant C_{k_1 \ldots q_n}$$

$$(k_1, \ldots, q_n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

с соответствующей сходимостью.

Глава I, § 2

1. Производная обобщенной функции f по аргументу x_j определяется равенством

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

2. $\theta'(x) = \delta(x)$.

3. $\dfrac{d}{dx} \ln(x + i0) = \dfrac{1}{x} - i\pi\,\delta(x)$,

где

$$\left(\frac{1}{x},\ \varphi(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

4. $\Delta\frac{1}{r^{n-2}}=-(n-2)\,\Omega_n\,\delta(x)$, где Ω_n — поверхность единичной сферы в n-мерном пространстве $(n>2)$.

$$\Delta\ln\frac{1}{r}=-2\pi\,\delta(x)\qquad(n=2).$$

5. Если последовательность обобщенных функций f_ν имеет предел f, то последовательность $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}$ имеет предел $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx=-\frac{1}{2}+\pi\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n).$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin nx=-\pi\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\delta'(x-2\pi n).$

8. $1+e^{ix}+e^{2ix}+\ldots+e^{-ix}+e^{-2ix}+\ldots=$
$=2\pi\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n).$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

10. $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\to\delta(x)$ при $\varepsilon\to 0.$

11. $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\to\delta(x)$ при $t\to 0.$

12. $\frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x}\to\delta(x)$ при $\nu\to\infty.$

Глава I, § 3

1. Обобщенная функция x_+^λ задается следующими формулами: при $\operatorname{Re}\lambda>-1$

$$(x_+^\lambda,\ \varphi)=\int\limits_0^\infty x^\lambda\,\varphi(x)\,dx;\tag{1}$$

при $\operatorname{Re}\lambda>-n-1$, $\lambda\neq-1,-2,\ldots,-n$,

$$(x_+^\lambda,\ \varphi)=$$
$$=\int\limits_0^1 x^\lambda\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\,\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx+$$
$$+\int\limits_1^\infty x^\lambda\,\varphi(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)};\tag{2}$$

при $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$

$$(x_+^\lambda,\ \varphi)=$$
$$=\int\limits_0^\infty x^\lambda\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\,\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx.\tag{3}$$

Эта обобщенная функция при $x>0$ совпадает с обычной функцией x^λ, при $x<0$ равна нулю. Она аналитична при всех λ, за исключением точек $\lambda=-1,-2,\ldots-n,\ldots$, в которых она имеет полюсы 1-го порядка.

Формула дифференцирования по x:

$$\frac{d}{dx}x_+^\lambda=\lambda x_+^{\lambda-1}\quad(\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots).\tag{4}$$

2. Обобщенная функция x_-^λ задается формулами: при $\operatorname{Re}\lambda>-1$

$$(x_-^\lambda,\ \varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0}|x|^\lambda\,\varphi(x)\,dx=\int\limits_0^\infty x^\lambda\,\varphi(-x)\,dx;\tag{5}$$

при $\operatorname{Re}\lambda>-n-1$, $\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots,\ -n$,

$$(x_-^\lambda,\ \varphi)=\int\limits_0^1 x^\lambda\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\,\varphi'(0)-\ldots$$
$$\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx+$$
$$+\int\limits_1^\infty x^\lambda\,\varphi(-x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)};\tag{6}$$

при $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]\,dx. \tag{7}$$

Эта обобщенная функция при $x<0$ совпадает с $|x|^\lambda$, при $x>0$ — с нулем. Она аналитична при всех λ, за исключением точек $\lambda=-1, -2, \ldots, -n, \ldots$, в которых она имеет полюсы 1-го порядка.

Формула дифференцирования по x:

$$\frac{d}{dx}x_-^\lambda = -\lambda x_-^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq -1, -2, \ldots). \tag{8}$$

3. Обобщенная функция $|x|^\lambda$ задается формулами: при $\operatorname{Re}\lambda > -1$

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}|x|^\lambda\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty x^\lambda[\varphi(x)+\varphi(-x)]\,dx; \tag{9}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > -2m-1$, $\lambda \neq -1, -3, \ldots, -2m+1$,

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\}\,dx +$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda[\varphi(x)+\varphi(-x)]\,dx + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!\,(\lambda+2k+1)}; \tag{10}$$

при $-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1$

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\}\,dx. \tag{11}$$

Она совпадает при $x \neq 0$ с обычной функцией $|x|^\lambda$. Эта обобщенная функция имеет особенности (полюсы 1-го порядка) при $\lambda = -1, -3, \ldots, -2m-1, \ldots$

При $\lambda = -2m$ мы пишем $|x|^{-2m} = x^{-2m}$, так что

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m}\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) +$$
$$+ \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\}\,dx. \tag{12}$$

В частности,

$$(x^{-2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx. \tag{13}$$

4. Обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ задается следующими формулами: при $\operatorname{Re}\lambda > -2$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}|x|^\lambda \operatorname{sgn} x\,\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda[\varphi(x)-\varphi(-x)]\,dx; \tag{14}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > -2m-2$, $\lambda \neq -2, -4, \ldots, -2m$,

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda\Big\{\varphi(x)-\varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) +$$
$$+ \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}\,dx +$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda[\varphi(x)-\varphi(-x)]\,dx + 2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k+1)!\,(\lambda+2k+2)}; \tag{15}$$

при $-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\Big\{\varphi(x)-\varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) +$$
$$+ \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}\,dx. \tag{16}$$

27 Зак. 460. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, вып. 1

Она совпадает при $x \neq 0$ с обычной функцией $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Эта обобщенная функция имеет особенности (полюсы 1-го порядка) при $\lambda = -2, -4, \ldots, -2m, \ldots$ При $\lambda = -2m-1$ мы пишем $|x|^{-2m-1} \operatorname{sgn} x = x^{-2m-1}$, так что

$$(x^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1} \Big\{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}\, dx. \tag{17}$$

В частности,

$$(x^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx, \tag{18}$$

$$(x^{-3}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2x\varphi'(0)}{x^3}\, dx. \tag{19}$$

5. q-кратный неопределенный интеграл от $|x|^\lambda$ можно записать в виде

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{q} |x|^\lambda\, dx^q =$$

$$= \frac{|x|^{\lambda+q} (\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{x^{q-2k}}{(2k-1)!\,(q-2k)!}\,\frac{1}{\lambda+2k}. \tag{20}$$

6. Обобщенные функции

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)} \tag{21}$$

являются целыми функциями по λ.

В частности, при $\lambda \to -n$

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \to \delta^{(n-1)}(x), \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \to (-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x); \tag{22}$$

при $\lambda \to -2m-1$

$$\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \to \frac{(-1)^m \delta^{(2m)}(x)\, m!}{(2m)!} \tag{23}$$

и при $\lambda \to -2m$

$$\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)} \to \frac{(-1)^m \delta^{(2m-1)}(x)\,(m-1)!}{(2m-1)!}. \tag{24}$$

7. Функции $\ln(x+i0)$ и $\ln(x-i0)$ определяются следующим образом:

$$\ln(x+i0) = \lim_{y\to+0} \ln(x+iy) = \ln|x| + i\pi\,\theta(-x), \tag{25}$$

$$\ln(x-i0) = \lim_{y\to+0} \ln(x-iy) = \ln|x| - i\pi\,\theta(-x), \tag{26}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

8. Функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ определяются формулами:

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x+iy)^\lambda = \begin{cases} e^{i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0; \end{cases} \tag{27}$$

$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x-iy)^\lambda = \begin{cases} e^{-i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0. \end{cases} \tag{28}$$

Эти функции существуют при любом комплексном λ и определяют регулярные функционалы при $\operatorname{Re}\lambda > -1$. Соответствующие обобщенные функции строятся следующим образом. При $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda, \tag{29}$$

$$(x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda, \tag{30}$$

где обобщенные функции x_+^λ и x_-^λ определены формулами (1) — (3) и (5) — (7). При $\lambda = -n$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$(x+i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), \tag{31}$$

$$(x-i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), \tag{32}$$

где обобщенная функция x^{-n} определена формулой (12) или (17). Таким образом, обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ определены при всех λ. Это целые аналитические функции от λ.

Соотношения

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x+iy)^\lambda,$$
$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x-iy)^\lambda$$

выполняются как в обычном смысле, так и в смысле обобщенных функций.

Формулы дифференцирования

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x+i0)^\lambda &= \lambda(x+i0)^{\lambda-1} \quad (\lambda\neq 0),\\ \frac{d}{dx}(x-i0)^\lambda &= \lambda(x-i0)^{\lambda-1} \quad (\lambda\neq 0), \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln(x+i0) &= \frac{1}{x+i0},\\ \frac{d}{dx}\ln(x-i0) &= \frac{1}{x-i0}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

9. Обобщенная функция r^λ при $\operatorname{Re}\lambda > -n$ задается формулами

$$(r^\lambda, \varphi) = \int\limits_{R_n} r^\lambda \varphi(x)\,dx = \Omega_n \int\limits_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_\varphi(r)\,dr, \tag{35}$$

где Ω_n — поверхность единичной сферы n-мерного пространства, $S_\varphi(r)$ — среднее из значений функции φ по сфере радиуса r.

Эта обобщенная функция аналитически продолжается во всю плоскость λ с исключенными точками $\lambda=-n$, $-n-2$, $-n-4, \ldots$, в которых она обладает полюсами 1-го порядка.

10. Обобщенная функция $\dfrac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ — целая аналитическая по λ. При $\lambda=-n$ она обращается в $\delta(x)$, при $\lambda=-n-2k$ — в

$$\frac{(-1)^k \Delta^k \delta(x)}{2^k k!\, n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{36}$$

11. Формула разложения r^λ на плоские волны:

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_\Omega \frac{|\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n|^\lambda\,d\omega}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} = 2\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \tag{37}$$

Частные случаи: при n нечетном

$$\delta(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n)\,d\omega; \tag{38}$$

при n четном

$$\delta(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int\limits_\Omega (\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n)^{-n}\,d\omega, \tag{39}$$

а также при любом n

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Omega (\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n - i0)^{-n}\,d\omega. \tag{40}$$

Глава I, § 4

1. Обобщенная функция $x_+^\lambda \ln^m x_+$ $(\lambda\neq -1, -2, \ldots)$ определяется по следующим формулам: при $\operatorname{Re}\lambda > -1$

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \ln^m x\, \varphi(x)\,dx; \tag{1}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda\neq -1, -2, \ldots, -n$,

$$\begin{aligned}(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) &= \\ &= \int\limits_0^1 x^\lambda \ln^m x \Big[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots \\ &\qquad \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx + \\ &+ \int\limits_1^\infty x^\lambda \ln^m x\,\varphi(x)\,dx + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^m m!\,\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)^{m+1}};\end{aligned} \tag{2}$$

при $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi)=$$
$$=\int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx. \tag{3}$$

2. Формула дифференцирования по λ:

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}x_+^\lambda=x_+^\lambda \ln^m x_+ \qquad (\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots). \tag{4}$$

Разложение функции x_+^λ в ряд Тейлора в окрестности регулярного значения λ_0:

$$x_+^\lambda=x_+^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)\,x_+^{\lambda_0}\ln x_+ +\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_+^{\lambda_0}\ln^2 x_+ +\ldots \tag{5}$$

3. Обобщенная функция x_+^{-n} определяется формулой

$$(x_+^{-n}, \varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\right]dx; \tag{6}$$

эта обобщенная функция совпадает с функцией x^{-n} при $x>0$ и равна нулю при $x<0$. Она н е я в л я е т с я значением определенной выше функции x_+^λ при $\lambda=-n$.

4. Обобщенные функции $x_+^{-n}\ln^m x_+$ задаются формулами

$$(x_+^{-n}\ln^m x_+, \varphi)=$$
$$=\int_0^\infty x^{-n}\ln^m x\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\right]dx. \tag{7}$$

5. В окрестности полюса $\lambda=-n$ разложение x_+^λ в ряд Лорана имеет вид

$$x_+^\lambda=\frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\,\frac{1}{\lambda+n}+x_+^{-n}+(\lambda+n)\,x_+^{-n}\ln x_+ +$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda+n)^2 x_+^{-n}\ln^2 x_+ +\ldots \tag{8}$$

6. Обобщенная функция $x_-^\lambda \ln^m x_-$ $(\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots)$ определяется по следующим формулам: при $\operatorname{Re}\lambda>-1$

$$(x_-^\lambda \ln^m x_-, \varphi)=\int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \ln^m|x|\,\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\,\varphi(-x)\,dx; \tag{9}$$

при $\operatorname{Re}\lambda>-n-1,\ \lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots,\ -n,$

$$(x_-^\lambda \ln x_-^m, \varphi)=\int_0^1 x^\lambda \ln^m x\left[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx+$$
$$+\int_1^\infty x^\lambda \ln^m x\,\varphi(-x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m+k-1}m!\,\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)^{m+1}}; \tag{10}$$

при $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$

$$(x_-^\lambda \ln x_-^m, \varphi)=\int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\left[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx. \tag{11}$$

7. Формула дифференцирования по λ:

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}x_-^\lambda=x_-^\lambda \ln^m x_- \qquad (\lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots). \tag{12}$$

Разложение функции x_-^λ в ряд Тейлора в окрестности регулярного значения λ_0:

$$x_-^\lambda=x_-^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)\,x_-^{\lambda_0}\ln x_- +\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_-^{\lambda_0}\ln^2 x_- +\ldots \tag{13}$$

8. Обобщенная функция x_-^{-n} определяется формулой

$$(x_-^{-n}, \varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\left[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\right]dx; \tag{14}$$

эта обобщенная функция совпадает с обычной функцией $|x|^{-n}$ при $x<0$ и с нулем при $x>0$. Но она не является значением определенной выше аналитической функции x_-^λ при $\lambda=-n$.

9. Обобщенные функции $x_-^{-n}\ln^m x_-$ задаются формулами

$$(x_-^{-n}\ln^m x_-,\varphi)=\int_0^\infty x^{-n}\ln^m x\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots$$
$$\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]dx. \quad (15)$$

10. В окрестности полюса $\lambda=-n$ разложение x_-^λ в ряд Лорана имеет вид

$$x_-^\lambda=\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda+n}+x_-^{-n}+(\lambda+n)\,x_-^{-n}\ln x_-+$$
$$+\frac{1}{2!}(\lambda+n)^2x_-^{-n}\ln^2x_-+\ldots \quad (16)$$

11. Функционал $|x|^\lambda\ln^k|x|$ определяется по формулам, аналогичным (9)—(11) стр. 416, с заменой всюду x^λ на $x^\lambda\ln^k x$.

В окрестности регулярной точки λ_0 разложение функции $|x|^\lambda$ в ряд Тейлора имеет вид

$$|x|^\lambda=|x|^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\ln|x|+\frac{1}{2!}(\lambda-\lambda_0)^2|x|^{\lambda_0}\ln^2|x|+\ldots \quad (17)$$

В окрестности полюса $\lambda_0=-2m-1$ разложение функции $|x|^\lambda$ в ряд Лорана имеет вид

$$|x|^\lambda=\frac{2\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\frac{1}{\lambda+2m+1}+|x|^{-2m-1}+$$
$$+(\lambda+2m+1)|x|^{-2m-1}\ln|x|+\ldots, \quad (18)$$

где при $-2m-2<\operatorname{Re}\lambda<-2m$

$$|x|^{-2m-1}=x_+^{-2m-1}+x_-^{-2m-1}; \quad (19)$$

$$|x|^{-2m-1}\ln^k|x|=x_+^{-2m-1}\ln^k x_++x_-^{-2m-1}\ln^k x_-; \quad (19a)$$

в частности,

$$(|x|^{-2m-1},\varphi)=\int_0^\infty x^{-2m-1}\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\Big[\varphi(0)+$$
$$+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\Big\}dx. \quad (20)$$

Обобщенная функция $|x|^{-2m-1}$ совпадает с обычной функцией $|x|^{-2m-1}$ при $x\neq 0$.

12. Обобщенная функция $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x\ln^k|x|$ определяется по формулам, аналогичным (14)—(16) стр. 417, с заменой всюду x^λ на $x^\lambda\ln^k x$.

В окрестности регулярной точки λ_0 разложение функции $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$ в ряд Тейлора имеет вид

$$|x|^\lambda\operatorname{sgn}x=|x|^{\lambda_0}\operatorname{sgn}x+(\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\ln|x|\operatorname{sgn}x+$$
$$+\frac{1}{2!}(\lambda-\lambda_0)^2|x|^{\lambda_0}\ln|x|\operatorname{sgn}x+\ldots \quad (21)$$

В окрестности полюса $\lambda_0=-2m$ разложение функции $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$ в ряд Лорана имеет вид

$$|x|^\lambda\operatorname{sgn}x=-2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda+2m}+|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x+$$
$$+(\lambda+2m)|x|^{-2m}\ln|x|\operatorname{sgn}x+\ldots, \quad (22)$$

где при $-2m-1<\operatorname{Re}\lambda<-2m+1$

$$|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x=x_+^{-2m}-x_-^{-2m}; \quad (23)$$

$$|x|^{-2m}\ln^k|x|\operatorname{sgn}x=x_+^{-2m}\ln^k x_+-x_-^{-2m}\ln^k x_-; \quad (23a)$$

в частности,

$$(|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x,\varphi)=\int_0^\infty x^{-2m}\Big\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\Big[x\varphi'(0)+$$
$$+\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\,\theta(1-x)\Big]\Big\}dx. \quad (24)$$

Подчеркнем, что $|x|^{-2m-1}$ не есть значение $|x|^\lambda$ при $\lambda=-2m-1$ и что $|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x$ не есть значение $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$ при $\lambda=-2m$.

Обобщенная функция $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$ совпадает при $x \neq 0$ с обычной функцией $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$.

13. Производные по λ обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ обозначаются соответственно через

$$(x+i0)^\lambda \ln (x+i0) \quad \text{и} \quad (x+i0)^\lambda \ln (x-i0);$$

это целые функции от λ, которые выражаются формулами:

$$(x+i0)^\lambda \ln (x+i0) = \\ = \begin{cases} x_+^\lambda \ln x_+ + i\pi e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_- & \text{при } \lambda \neq -n, \\ (-1)^n i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1} \dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n} \ln |x| & \text{при } \lambda = -n; \end{cases} \tag{25}$$

$$(x-i0)^\lambda \ln (x-i0) = \\ = \begin{cases} x_+^\lambda \ln x_+ - i\pi e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda \ln x_- & \text{при } \lambda \neq -n, \\ (-1)^{n-1} i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1} \dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n} \ln |x| & \text{при } \lambda = -n. \end{cases} \tag{26}$$

14. В окрестности полюса $\lambda = -n-2k$ функция r^λ разлагается в ряд Лорана

$$r^\lambda = \Omega_n \frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!} \frac{1}{\lambda+n+2k} + \Omega_n r^{-n-2k} + \\ + \Omega_n (\lambda+n+2k) r^{-n-2k} \ln r + \ldots \tag{27}$$

Здесь функционалы $\delta^{(2k)}(r)$, r^{-n-2k}, $r^{-n-2k}\ln^m r$ применяются к функциям $S_\varphi(r)$ по формулам:

$$\left(\delta^{(2k)}(r), S_\varphi(r)\right) = S_\varphi^{(2k)}(0), \tag{28}$$

$$\left(r^{-n-2k}, S_\varphi(r)\right) = \int_0^\infty r^{-2k-n} \Big[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{r^{2k-2}}{(2k-2)!} S_\varphi^{(2k-2)}(0) - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0)\, \theta(1-r) \Big] dr, \tag{29}$$

$$\left(r^{-n-2k}\ln^m r, S_\varphi(r)\right) = \int_0^\infty r^{-2k-n} \ln^m r \Big[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0)\, \theta(1-r) \Big] dr. \tag{30}$$

Величина $S_\varphi^{(2k)}(0)$ выражается непосредственно через функцию $\varphi(x)$ и ее производные по формуле

$$S_\varphi^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\, \Omega_n \Delta^n \varphi(0)}{2^k k! n (n+2) \ldots (n+2k-2)}. \tag{31}$$

Глава I, § 5

1. *Прямым произведением* $f(x) \times g(y)$ функционалов $f(x)$ и $g(y)$ называется функционал в пространстве основных функций $\varphi(x, y)$, действующий по формуле

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))).$$

2. *Сверткой* $f(x) * g(x)$ функционалов f и g называется функционал в пространстве основных функций $\varphi(x)$, действующий по формуле

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))).$$

Свертка определена при выполнении одного из следующих условий:

а) один из функционалов f, g имеет ограниченный носитель;

б) носители обоих функционалов ограничены с одной и той же стороны.

При выполнении этих условий свертка коммутативна и ассоциативна.

3. $\delta * f = f$ для любого f.

4. $\dfrac{\partial \delta}{\partial x_j} * f = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \dfrac{\partial g}{\partial x_j}$.

6. Из $f_\nu \to f$ следует $f_\nu * g \to f * g$ при каждом из следующих предположений:

а) *все функционалы f_ν сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве*;

б) *функционал g сосредоточен на ограниченном множестве*;

в) *носители функционалов f_ν и g ограничены с одной и той же стороны и притом не зависящей от ν константой.*

7. *Фундаментальным решением уравнения*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = g \tag{1}$$

называется обобщенная функция $E(x)$, удовлетворяющая условию

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E = \delta(x).$$

Решение уравнения (1) может быть выражено по формуле

$$u = E * g$$

при условии существования этой свертки. См. также гл. I, § 6, пп. 1—3, гл. II, п. 8, гл. III, § 2, п. 5.

8. *Фундаментальным решением задачи Коши* для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \tag{2}$$

называется обобщенная функция $E(x, t)$, зависящая непрерывно от параметра t, являющаяся при $t > 0$ решением уравнения (2) и обращающаяся в $\delta(x)$ при $t \to 0$.

Решение уравнения (2) с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ может быть представлено в форме

$$u(x, t) = E(x, t) * u_0(x),$$

при условии существования этой свертки.

9. *Фундаментальным решением задачи Коши* для уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \tag{3}$$

m-го порядка по t называется обобщенная функция $E(x, t)$, зависящая непрерывно от параметра t, являющаяся при $t > 0$ решением уравнения (3) и обладающая свойствами

$$\lim_{t \to 0} E(x, t) = 0, \quad \lim_{t \to 0} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = 0, \ \ldots$$

$$\ldots, \lim \frac{\partial^{m-2} E(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \lim \frac{\partial^{m-1} E(x, t)}{\partial t} = \delta(x).$$

Решение уравнения (3) с начальными условиями

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{m-2} u(x, 0)}{\partial t^{m-2}} = 0,$$

$$\frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x)$$

может быть представлено в форме

$$u(x, t) = E(x, t) * u_{m-1}(x)$$

при условии существования этой свертки. См. также гл. I, § 6, пп. 4—5, гл. II, п. 8, гл. III, § 1 п. 6.

10. *Интеграл порядка* λ от обобщенной функции $g(x)$, равной нулю при $x < 0$ ($n = 1$), определяется формулой

$$g_\lambda(x) = g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

При $\operatorname{Re}\lambda < 0$ эта формула определяет *производную* от $g(x)$ порядка $-\lambda$.

11. Гипергеометрическая функция

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\, dt$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}}\left[\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right]$$

или

$$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}\left[\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}(1-x)_+^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)}\right].$$

12. Бесселева функция $J_\lambda(\sqrt{u})$ связана с элементарными функциями следующей формулой дробного дифференцирования:

$$2^\lambda \sqrt{\pi}\, u^{\lambda/2} J_\lambda(\sqrt{u}) = \frac{d^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{du^{-\lambda-\frac{1}{2}}} \frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

Глава I, § 6

1. Фундаментальное решение эллиптического уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)=\delta(x)$ может быть записано в форме

$$E(x)=\int_{\Omega} v_{\omega}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n,\ -n)\,d\Omega,$$

где

$$v_{\omega}(\xi,\lambda)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}G(\xi-\eta,\omega)\,|\eta|^{\lambda}\,d\eta, \qquad (1)$$

причем $G(\xi,\omega)$ есть решение уравнения

$$P\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ \ldots,\ \omega_n\frac{d}{d\xi}\right)G(\xi,\omega)=\delta(\xi).$$

При n нечетном выражение (1) приводится к виду ($\xi=\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n$)

$$E(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_n(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,1\cdot3\ldots(n-2)}\int_{\Omega}\frac{\partial^{n-1}G(\xi,\omega)}{\partial\xi^{n-1}}\,d\Omega.$$

2. Если $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — однородный многочлен от $\frac{\partial}{\partial x_j}$ степени m, то $E(x)$ имеет вид

$$E(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{4(2\pi)^{m-1}(2m-n)!}\int_{\Omega}|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{2m-n}\frac{d\Omega}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}$$

$(2m>n,\ n$ нечетно);

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n(2m-n)!}\int_{\Omega}\frac{(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)^{2m-n}\ln|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\,d\Omega$$

$(2m\geqslant n,\ n$ четно);

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Omega}\delta^{(n-2m-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\frac{d\Omega}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}$$

$(2m<n,\ n$ нечетно);

$$=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{(2\pi)^n}\int_{\Omega}\frac{|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{2m-n}}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\,d\Omega$$

$(2m<n,\ n$ четно).

3. Указанные формулы остаются справедливыми и для однородных операторов $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, у которых $\operatorname{grad}P(\omega)$ не обращается в нуль при $P(\omega)=0$, $\omega\neq0$; но интегралы в этих формулах понимаются как регуляризованные (в смысле главного значения по Коши).

4. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=0$ имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\Omega}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}G_{\omega}(t,\xi-\eta)\left.\frac{|\eta|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}d\eta\right\}d\omega,$$

где $G_{\omega}(t,\xi)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \omega_1\frac{d}{d\xi},\ \ldots,\ \omega_n\frac{d}{d\xi}\right)u(t,\xi)=0.$$

В частности, при n нечетном

$$u(x,t)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!}\int_{\Omega}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}G_{\omega}(t,\xi)\,d\Omega.$$

5. Если $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — однородный гиперболический многочлен порядка m, то $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t)=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!}\times$$

$$\times\int_{P(1,\xi)=0}\left(\sum x_k\xi_k+t\right)^{m-n-1}\operatorname{sgn}^{m-1}\left(\sum x_k\xi_k+t\right)d\omega$$

$(m\geqslant n-1,\ n$ нечетно);

$$=\frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n(m-n-1)!}\int_{P(1,\xi)=0}\left(\sum x_k\xi_k+t\right)^{m-n-1}\ln\left|\frac{\sum x_k\xi_k+t}{\sum x_k\xi_k}\right|d\omega$$

$(m\geqslant n-1,\ n$ четно);

$$u(x, t) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{P(1,\,\xi)=0} \delta^{(n-m)}\left(\sum x_k\xi_k + t\right) d\omega$$

$$(m < n-1,\ n \text{ нечетно});$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-m)!}{(2\pi)^n} \int\limits_{P(1,\,\xi)=0} \frac{d\omega}{\left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{n-m+1}}$$

$$(m < n-1,\ n \text{ четно}).$$

Глава II

1. *Преобразование Фурье основной функции* $\varphi(x)$

$$\psi(s) = \int \varphi(x)\, e^{i(x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n)}\, dx_1 \ldots dx_n$$

есть целая аналитическая функция комплексных переменных $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \ldots, s_n = \sigma_n + i\tau_n$; она удовлетворяет неравенствам

$$\left| s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n} \psi(s_1, \ldots, s_n) \right| \leqslant C_p e^{a_1|\tau_1| + \ldots + a_n|\tau_n|},$$

где $\{|x_j| \leqslant a_j\}$ — область, вне которой основная функция $\varphi(x)$ обращается в нуль.

2. Совокупность всех функций $\psi(s)$ указанного вида называется *пространством* Z. Последовательность $\psi_\nu(s) \in Z$ называется *сходящейся к нулю в* Z, если их прообразы Фурье $\varphi_\nu(x) \in K$ сходятся к нулю в K.

3. Преобразованием Фурье обобщенной функции f, т. е. функционала, действующего на пространстве K, называется функционал $g = F(f)$, определенный на пространстве Z и действующий по формуле

$$(g, \psi) = (2\pi)^n (f, \varphi),$$

где $\psi(s) \in Z$ есть преобразование Фурье основной функции $\varphi(x) \in K$.

4. Дифференцирование и умножение на независимое переменное при преобразовании Фурье:

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\right] = P(-is)\, F[f],$$

$$F[P(x)\, f] = P\left(-i\frac{\partial}{\partial s}\right) F[f].$$

5. Преобразование Фурье прямого произведения:

$$F[f \times g] = F[f] \times F[g].$$

6. Преобразование Фурье функционала, сосредоточенного в ограниченной области, есть функционал типа функции

$$F[f] = \overline{(f(x),\ e^{i(x,\,s)})} = \overline{(f(x),\ e^{-i(x,\,s)})}.$$

7. $F[S] = S$.

8. Если $u(x, t)$ есть фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$, то

$$E(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, t) = \delta(x, t).$$

9. Преобразования Фурье конкретных обобщенных функций даны ниже в сводной таблице (стр. 446—456).

Глава III, § 1

1. *Форма Лерея* ω на поверхности $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ определяется равенством

$$dP \cdot \omega = dx_1 \ldots dx_n;$$

в точках, где $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, ее можно представить в виде

$$\omega = (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}.$$

2. Функционал $\delta(P)$ определяется по формуле

$$(\delta(P), \varphi) = \int\limits_{P=0} \varphi(x)\,\omega.$$

3. $\theta(P)$ есть характеристическая функция области $P(x) \geqslant 0$. Имеет место формула дифференцирования

$$\theta'(P) = \delta(P),$$

28 Зак. 460. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, вып. 1

иными словами,

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j}=\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P).$$

4. Формы $\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots$ задаются условиями:

$$\omega_0(\varphi)=\varphi\cdot\omega,$$
$$d\omega_0(\varphi)=dP\cdot\omega_1(\varphi),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$d\omega_{k-1}(\varphi)=dP\cdot\omega_k(\varphi).$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Интеграл от формы $\omega_k(\varphi)$ по поверхности $P=0$ определен однозначно.

5. Имеют место равенства

$$P\,\delta(P)=0,$$
$$P\,\delta'(P)+\delta(P)=0,$$
$$P\,\delta''(P)+2\,\delta(P)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P\,\delta^{(k)}(P)+k\,\delta^{(k-1)}(P)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

6. Фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения $\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u=0$ при $n=2k+3$ имеет вид

$$E(x,\,t)=\frac{(-1)^k}{2\pi^{k+1}}\delta^{(k)}(r^2-t^2)\qquad(r^2=x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

7. Если поверхности $P=0$ и $Q=0$ не имеют общих точек, то

$$\delta(PQ)=P^{-1}\delta(Q)+Q^{-1}\delta(P).$$

8. Если $a(x)$ не обращается в нуль, то

$$\delta(aP)=a^{-1}\delta(P),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^{(k)}(aP)=a^{-(k+1)}\delta^{(k)}(P),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

9. На поверхности $P_1=P_2=\ldots=P_k=0$ форма Лерея ω определяется из условия

$$dP_1\ldots dP_k\cdot\omega=dx_1\ldots dx_n.$$

В частности, если якобиан $D\begin{pmatrix}P_1 & \ldots & P_k\\ x_1 & \ldots & x_k\end{pmatrix}\neq 0$, можно положить

$$\omega=\frac{dx_{k+1}\ldots dx_n}{D\begin{pmatrix}P_1 & \ldots & P_k\\ x_1 & \ldots & x_k\end{pmatrix}}.$$

10. Обобщенная функция $\delta(P_1,\ldots,P_k)$ определяется формулой

$$(\delta(P_1,\ldots,P_k),\ \varphi(x_1,\ldots,x_n))=\int\limits_{P_1=\ldots=P_k=0}\varphi\cdot\omega.$$

11. Форма $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{j+1},\ldots\alpha_k}(\varphi)$ определяется через форму $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_j\ldots\alpha_k}(\varphi)$ уравнением

$$d\left(dP_1\ldots dP_{j-1}dP_{j+1}\ldots dP_k\,\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_j\ldots\alpha_k}\right)=$$
$$=(-1)^{j-1}dP_1\ldots dP_k\ \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{j+1}\ldots\alpha_k}.$$

12. Обобщенная функция $\dfrac{\partial^m\delta(P_1\ldots P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}}$ определяется равенством

$$\left(\frac{\partial^m\delta(P_1\ldots P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}},\ \varphi\right)=(-1)^m\int\limits_{P_1=\ldots=P_k=0}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\varphi)$$
$$(m=\alpha_1+\ldots+\alpha_k).$$

13. Имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1,\ldots,P_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial x_j},$$
$$P_i\,\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,$$
$$P_iP_j\,\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P_1P_2\ldots P_k\,\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,$$

и равенства, получаемые из указанных формальным дифференцированием по $P_1,\ldots,P_k$.

Глава III, § 2

1. *Обозначения*

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,$$
$$Q = s_1^2 + \ldots + s_p^2 - s_{p+1}^2 - \ldots - s_{p+q}^2,$$
$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2},$$

$n = p + q$ — размерность пространства; $p,\ q > 0$.

2. *Определение обобщенных функций* $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_2^{(k)}(P)$, $\delta^{(k)}(P_+)$, $\delta^{(k)}(P_-)$, P_+^λ, P_-^λ, $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$.

2.1. При $p > 1,\ q > 1$

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\ \varphi\right) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,\ v)\right)\Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}\,du,$$

$$\left(\delta_2^{(k)}(P),\ \varphi\right) = \frac{(-1)^k}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(u^{\frac{p-2}{2}}\psi_1(u,\ v)\right)\Big|_{u=v} v^{\frac{q-2}{2}}\,dv,$$

где через $\psi_1(u,\ v)$ обозначен интеграл от функции φ по поверхности $x_1^2 + \ldots + x_p^2 = u$, $x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2 = v$, деленный на $u^{\frac{p-1}{2}} v^{\frac{q-1}{2}}$.

Написанные интегралы сходятся при $k < \frac{n}{2} - 1$; при $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$ они понимаются в смысле регуляризованных значений в соответствии с § 3 гл. I.

Аналогичным образом определяются $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ в исключительных случаях, когда $p = 1$ или $q = 1$.

2.2. $(P_+^\lambda,\ \varphi) = \int\limits_{P>0} P^\lambda \varphi\,dx_1 \ldots dx_n;$

$$(P_-^\lambda,\ \varphi) = \int\limits_{P<0} (-P)^\lambda \varphi\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Эти интегралы сходятся при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ и представляют собой аналитические функции от λ; при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ они понимаются в смысле аналитических продолжений по λ.

2.3. $\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_+^\lambda,$

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_-^\lambda.$$

2.4. $(P + i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pi i\lambda} P_-^\lambda,$

$$(P - i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{-\pi i\lambda} P_-^\lambda.$$

3. *Особые точки функций* P_+^λ, P_-^λ, $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$.

3.1. p — *четное*, q — *нечетное число*. Функция P_+^λ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1,\ -2,\ \ldots,\ -k,\ \ldots;$

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_1^{(k-1)}(P).$$

3.2. p — *нечетное*, q — *четное число*. Функция P_+^λ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1,\ -2,\ \ldots,\ -k,\ \ldots$, а также в точках $\lambda = -\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2} - 1,\ \ldots,\ -\frac{n}{2} - k,\ \ldots;$

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_1^{(k-1)}(P),$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

3.3. p *и* q — *четные числа*. Функция P_+^λ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1,\ -2;\ \ldots,\ -k,\ \ldots;$

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_1^{(k-1)}(P), \quad \text{если} \quad k < \frac{n}{2};$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

3.4. p и q — *нечетные числа*. Функция P_+^λ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -\left(\frac{n}{2} - 1\right)$; в точках $\lambda = -\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2} - 1,\ \ldots,\ -\frac{n}{2} - k,\ \ldots$ эта функция имеет полюсы кратности 2.

При $k < \frac{n}{2}$

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta_1^{(k-1)}(P).$$

В окрестности $\lambda = -\frac{n}{2} - k$

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)} + \ldots,$$

где

$$c_{-2}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,L^k\delta(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\,\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\left[\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right]}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,L^k\delta(x_1, \ldots, x_n).$$

3.5. При переходе от P_+^λ к P_-^λ следует в 3.1—3.4 поменять ролями индексы p и q, а также заменить L на $-L$ и $\delta_1^{(k-1)}(P)$ на $\delta_1^{(k-1)}(-P)$.

3.6. Функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ имеют особенностями лишь простые полюсы в точках $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots$ $\ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\,(P+i0)^\lambda = \overline{\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\,(P-i0)^\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,L^k\delta(x_1, \ldots, x_n).$$

4. *Связь между функциями* $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_2^{(k)}(P)$, $\delta^{(k)}(P_+)$ *и* $\delta^{(k)}(P_-)$.

4.1. $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k\,\delta_2^{(k)}(P)$.

4.2. *Если* n *— нечетное, а также если* n *четное и* $k < \frac{n}{2} - 1$, *то*

$$\delta_1^{(k)}(P) = \delta_2^{(k)}(P) = \delta^{(k)}(P_+),$$

если n *— четное и* $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$, *то*

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = c_{p,q,k}L^{k-\frac{n}{2}+1}\delta(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta^{(k)}(P_+) = c'_{p,q,k}L^{k-\frac{n}{2}+1}\delta(x_1, \ldots, x_n),$$

где $c_{p,q,k}$ и $c'_{p,q,k}$ — числовые коэффициенты.

4.3. *Если* p *и* q *— четные числа и* $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$, *то*

$$(-1)^k\,\delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k+1-\frac{n}{2}}\left(k+1-\frac{n}{2}\right)!}\,L^{k+1-\frac{n}{2}}\delta(x_1, \ldots, x_n),$$

во всех остальных случаях

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k\,\delta^{(k)}(P_+).$$

5. *Фундаментальное решение* K *дифференциального уравнения* $L^k u = f(x)$.

5.1. *Если* n *— нечетное число, то*

$$K_1 = (-1)^k\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}\,(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} =$$

$$= (-1)^k\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}}\left(P_+^{-\frac{n}{2}+k} + e^{\pi\left(-\frac{n}{2}+k\right)i}\,P_-^{-\frac{n}{2}+k}\right),$$

$K_2 = \bar{K}_1$.

5.2. *Если n — четное число и $k < \frac{n}{2}$, то*

$$K_1 = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{4^k (k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}} (P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} =$$

$$= (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{4^k (k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}} \left[P_+^{-\frac{n}{2}+k} + (-1)^{-\frac{n}{2}+k} P_-^{-\frac{n}{2}+k} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}+k}\,\pi i}{\left(\frac{n}{2} - k - 1\right)!} \delta^{\left(\frac{n}{2} - k - 1\right)}(P_+) \right],$$

где $P_+^{-\frac{n}{2}+k}$ и $P_-^{-\frac{n}{2}+k}$ обозначают свободные члены лорановских разложений функций P_+^λ и P_-^λ в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2} + k$;

$$K_2 = \bar{K}_1.$$

5.3. *Если n — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, то*

$$K_1 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2} qi}}{4^k \left(k - \frac{n}{2}\right)! \,(k-1)!} (P + i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln (P + i0),$$

$K_2 = \bar{K}_1$.

6. Формулы пп. 3, 5 остаются справедливыми для произвольной невырожденной квадратичной формы

$$P = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta.$$

В этом случае

$$L = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta},$$

$$Q = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta,$$

где коэффициенты $g^{\alpha\beta}$ определяются из условий $\sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ ($\delta_\alpha^\gamma = 1$ при $\gamma = \alpha$, $\delta_\alpha^\gamma = 0$ при $\gamma \neq \alpha$).

В формулы п. 3 нужно при этом добавить справа в качестве множителя $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, а в формулы п. 5 добавить $\sqrt{|\Delta|}$, где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

7. Преобразования Фурье функций, перечисленных в пп. 1—6, приведены в сводной таблице преобразований Фурье (ниже).

Глава III, § 3

1. Обобщенная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *однородной функцией степени* λ, если для любой основной функции $\varphi(x)$ и $\alpha > 0$

$$\left(f, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n} (f, \varphi).$$

2. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ положительная непрерывная однородная функция 1-й степени, то обобщенная функция

$$(f^\lambda, \varphi) = \int f^\lambda \varphi \, dx,$$

определенная этим интегралом при $\operatorname{Re}\lambda > -n$, может быть аналитически продолжена во всю плоскость λ, за исключением точек $\lambda = -n, -n-1, \ldots, -n-k, \ldots$, где она имеет простые полюсы. Аналитическое продолжение f^λ в область $\operatorname{Re}\lambda > -n-k-1$ задается формулой

$$(f^\lambda, \varphi) = \int_G f^\lambda(x) \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right] dx +$$

$$+ \int_{R-G} f^\lambda(x) \varphi(x) \, dx +$$

$$+ \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!\,(\lambda+n+m)} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \int_\Gamma f^\lambda(x)\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \cdot \omega,$$

где G — область, содержащая начало координат, Γ — ее граница, а ω — дифференциальная форма

$$x_1 dx_2 \ldots dx_n - x_2 dx_1 dx_3 \ldots dx_n + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} x_n dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

В полосе $-n-k-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n-k$ эта же формула может быть записана в виде

$$(f^\lambda, \varphi) = \int f^\lambda(x) \Bigg[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\Bigg] dx.$$

Вычет функции f^λ в точке $\lambda = -n-k$ равен

$$\frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} \frac{\partial^k \delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \int_\Gamma \frac{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+k}(x)} \omega.$$

В частности, в точке $\lambda = -n$ он равен

$$\delta(x) \cdot \int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}.$$

3. По произвольной формально однородной функции $\Phi(x)$ степени $-n$ и области G, содержащей начало координат, строится обобщенная функция

$$\Phi|_G = \int_G \Phi(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \int_{R-G} \Phi(x) \varphi(x)\, dx,$$

локально совпадающая с $\Phi(x)$ всюду, кроме нуля. Эта обобщенная функция $\Phi|_G$ однородна степени $-n$ тогда и только тогда, когда

$$\int_\Gamma \Phi \cdot \omega = 0,$$

где Γ — граница области G и ω — дифференциальная форма, указанная выше.

4. По произвольной формально однородной функции $\Phi(x)$ степени $-n-m$ и области G, содержащей начало координат, строится обобщенная функция

$$\Phi|_G = \int_G \Phi(x) \Bigg[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\Sigma \alpha_j = m} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\Bigg] dx +$$
$$+ \int_{R-G} \Phi(x) \Bigg[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\Sigma \alpha_j = m-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{m-1} \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\Bigg] dx,$$

локально совпадающая с $\Phi(x)$ всюду, кроме нуля. Эта обобщенная функция однородна степени $-n-m$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int_\Gamma \Phi(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \cdot \omega = 0 \qquad \left(\sum \alpha_j = m\right).$$

5. Однородная функция Φ степени $-n+1$ может быть продифференцирована (как обобщенная функция) по формуле

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\Big|_G + (-1)^{j-1} \delta(x_1, \ldots, x_n) \times$$
$$\times \int_\Gamma \Phi(x)\, dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n,$$

причем результат не зависит от выбора области G.

Глава III, § 4

1. Функция $G(x) = G(x_1, \ldots, x_n)$ называется *эквивалентной однородной функции в окрестности точки* M, если в этой окрестности существует локальная система координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в которой функция $G(x)$ становится однородной функцией.

2. *Индуктивное определение приводимой точки.* Точка x_0 на вещественной оси называется *приводимой* (относительно функции $G(x)$, $G(x_0)=0$), если $G(x)$ в окрестности точки x_0 эквивалентна однородной функции.

Точка M на поверхности $G(x_1, \ldots, x_n)=0$ называется *приводимой*, если в некоторой окрестности точки M функция G эквивалентна однородной функции и пересечение поверхности $G=0$ со всякой достаточно малой сферой с центром в точке M дает поверхность, каждая точка которой приводима на этой сфере.

3. Если локальные координаты в окрестности точки M можно выбрать так, чтобы однородная функция G степени m зависела от k переменных и нельзя выбрать так, чтобы она зависела от $k-1$ переменных, то точка M называется *точкой k-го порядка и степени m.*

4. Предположим, что поверхность $G=0$ состоит лишь из приводимых точек. Функционал, определяемый сходящимся при $\operatorname{Re}\lambda>0$ интегралом

$$(G^\lambda, \varphi)=\int\limits_{G>0} G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

представляет собою аналитическую функцию от λ. Эта аналитическая функция может быть продолжена во всю плоскость λ как мероморфная функция, полюсы которой лежат на конечном числе арифметических прогрессий. Именно, каждой связной компоненте поверхности $G=0$, состоящей из точек порядка r и степени m, отвечает серия полюсов в точках $-\frac{r}{m}, -\frac{r+1}{m}, \ldots, -\frac{r+k}{m}, \ldots$ Если имеется несколько вложенных друг в друга связных компонент, состоящих из точек различных порядков, и значение $\lambda=\lambda_0$ принадлежит нескольким сериям, отвечающим этим компонентам, то кратность полюса в точке λ_0 соответственно увеличивается.

В частности, если на поверхности $G=0$ нет особых точек (т. е. все ее точки — приводимые порядка 1 и степени 1), то полюсы функции (G^λ, φ) исчерпываются серией $-1, -2, \ldots, -n$.

5. Предположим, что поверхность $G=0$ состоит только из приводимых точек, а поверхность $G=c$ при $c>0$ не

имеет особых точек. Пусть, далее, форма ω определена равенством $dG\cdot\omega=dv$. Для интеграла

$$I(c)=\int\limits_{G=c}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\cdot\omega=(\delta(G-c), \varphi)$$

имеет место асимптотическое разложение

$$I(c)\cong\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{m_k} a_{km}c^{\lambda_k-1}\ln^{m-1}c,$$

где $0>-\lambda_1>-\lambda_2>\ldots$ — полюсы функции (G^λ, φ), m_k — кратность полюса в точке λ_k и a_{km} есть коэффициент при $\frac{1}{(\lambda+\lambda_k)^m}$ в разложении Лорана для (G^λ, φ) в окрестности полюса $-\lambda_k$, умноженный на $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$.

6. В частности,

$$\int\limits_{xy=c}\varphi\cdot\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x, y)}{y}\,dy=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x, y)\,dx}{x}=$$

$$=-2\varphi(0, 0)\ln c+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x, 0)}{x}\,dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(0, y)}{y}\,dy+\ldots,$$

где многоточие заменяет члены, стремящиеся к нулю при $c\to 0$. Эквивалентная формула

$$\delta(xy-c)=-2\delta(x, y)\ln c+\frac{\delta(y)}{x}+\frac{\delta(x)}{y}+o(c).$$

7. Для $G\equiv x^2+y^2+z^2-t^2$

$$\delta(G-c)=\delta(G)+c\ln c\,\frac{\delta(x, y, z, t)}{8}+c\,\delta'(G)+o(c).$$

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

I. Функции одного переменного

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
1	Обычная интегрируемая функция $f(x)$	$F[f]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix\sigma}\, dx$
2	$\delta(x)$	1
3	1	$2\pi\,\delta(\sigma)$
4	Многочлен $P(x)$	$2\pi P\left(-i\frac{d}{d\sigma}\right)\delta(\sigma)$
5	$\delta^{(2m)}(x)$	$(-1)^m\sigma^{2m}$
6	$\delta^{(2m+1)}(x)$	$(-1)^{m+1}i\sigma^{2m+1}$
7	e^{bx}	$2\pi\,\delta(s-ib)$
8	$\sin bx$	$-i\pi\,[\delta(s+b)-\delta(s-b)]$
9	$\cos bx$	$\pi\,[\delta(s+b)+\delta(s-b)]$
10	$\operatorname{sh} bx$	$\pi\,[\delta(s-ib)-\delta(s+ib)]$
11	$\operatorname{ch} bx$	$\pi\,[\delta(s-ib)+\delta(s+ib)]$
12	$e^{\frac{x^2}{2}}$	Аналитический функционал $i\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{s^2}{2}}$ (интегрирование по мнимой оси)
13	$\lvert x\rvert^\lambda$ $(\lambda\neq-1, -3, \ldots)$	$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\,\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
14	$f_\lambda(x)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{\lvert x\rvert^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}\,f_{-\lambda-1}(\sigma)=\sqrt{2\pi}\,\dfrac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$
15	$\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sgn} x$ $(\lambda\neq-2, -4, \ldots)$	$2i\cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\,\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$
16	$g_\lambda(x)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{\lvert x\rvert^\lambda\operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}\,ig_{-\lambda-1}(\sigma)=$ $=\sqrt{2\pi}\,i\,\dfrac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}$
17	x^m	$2(-i)^m\,\pi\,\delta^{(m)}(\sigma)$
18	x^{-m}	$i^m\dfrac{\pi}{(m-1)!}\,\sigma^{m-1}\operatorname{sgn}\sigma$
19	x^{-1}	$i\pi\operatorname{sgn}\sigma$
20	x^{-2}	$-\pi\lvert\sigma\rvert$
21	x_+^λ $(\lambda\neq-1, -2, \ldots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}=$ $=i\Gamma(\lambda+1)\times$ $\times\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}\right]$ *)
22	x_+^n	$i^{n+1}n!\,\sigma^{-n-1}+(-i)^n\,\pi\,\delta^{(n)}(x)$
23	$\theta(x)$	$i\sigma^{-1}+\pi\,\delta(\sigma)$
24	x_-^λ $(\lambda\neq-1, -2, \ldots)$	$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}=$ $=i\Gamma(\lambda+1)\times$ $\times\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}\right]$ *)

*) Второе — при $\lambda\neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
25	$(x+i0)^\lambda$	$\dfrac{2\pi e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_-^{-\lambda-1}$
26	$(x-i0)^\lambda$	$\dfrac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_+^{-\lambda-1}$

В дальнейших формулах 27—38 введены следующие обозначения:

$$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)=\frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+a_0^{(n)}+a_1^{(n)}(\lambda+n)+\dots,$$

$$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)=\frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+b_0^{(n)}+b_1^{(n)}(\lambda+n)+\dots,$$

$$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)=\frac{c_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+c_0^{(n)}+c_1^{(n)}(\lambda+n)+\dots,$$

$$2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)=\frac{d_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}+d_0^{(n)}+d_1^{(n)}(\lambda+n).$$

Коэффициенты $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}, \dots$ имеют следующие значения:

$$a_{-1}^{(n)}=\frac{i^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$a_0^{(n)}=\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}+\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\right];$$

$$a_1^{(n)}=\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2}+\sum_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j,\,k\leqslant n-1}}\frac{1}{jk}-\frac{\pi^2}{8}+\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)\Gamma'(1)+\Gamma''(1)+i\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}+\Gamma'(1)\right]\right\};$$

Продолжение

$$b_i^{(n)}=\bar{a}_i^{(n)};\quad c_i^{(n)}=2\,\mathrm{Re}\,a_i^{(n)};\quad d_i^{(n)}=2\,\mathrm{Im}\,a_i^{(n)}.$$

В частности,

$$b_{-1}^{(n)}=\frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!};\quad c_{-1}^{(n)}=\frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(n-1)\frac{\pi}{2};$$

$$d_{-1}^{(n)}=\frac{2(-1)^n}{(n-1)!}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}.$$

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
27	$\lvert x\rvert^{-2m-1}$	$c_0^{(2m+1)}\sigma^{2m}-c_{-1}^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert$
28	$x^{-2m}\operatorname{sgn}x$	$id_0^{(2m)}\sigma^{2m-1}-id_{-1}^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert$
29	$x_+^\lambda\ln x_+$ $(\lambda\neq-1,\,-2,\dots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\right\}$
30	$x_-^\lambda\ln x_-$ $(\lambda\neq-1,\,-2,\dots)$	$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right]\times(\sigma-i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\right\}$
31	$\ln x_+$	$i\left\{\left(\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\right)[(\sigma+i0)^{-1}-(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)]\right\}$
32	$\ln x_-$	$-i\left\{\left(\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\right)[(\sigma-i0)^{-1}-(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0)]\right\}$
33	$\lvert x\rvert^\lambda\ln\lvert x\rvert$ $(\lambda\neq-1,\,-2,\dots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\right\}-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right]\times(\sigma-i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\right\}$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
34	$\lvert x\rvert^{\lambda}\ln\lvert x\rvert \operatorname{sgn} x$ $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$	$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-\right.$ $\left.-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\right\}+$ $+ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right]\times\right.$ $\times(\sigma-i0)^{-\lambda-1}-$ $\left.-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\right\}$
35	$x^{-2m}\ln\lvert x\rvert$	$c_1^{(2m)}\lvert\sigma\rvert^{2m-1}-c_0^{(2m)}\lvert\sigma\rvert^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert$
36	$x^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$	$id_1^{(2m+1)}\sigma^{2m}\operatorname{sgn}\sigma-id_0^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert\operatorname{sgn}\sigma$
37	$\lvert x\rvert^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$	$c_1^{(2m+1)}\sigma^{2m}-c_0^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert+$ $+\frac{1}{2}c_{-1}^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln^2\lvert\sigma\rvert$
38	$\lvert x\rvert^{-2m}\ln\lvert x\rvert\operatorname{sgn} x$	$id_1^{(2m)}\sigma^{2m-1}-id_0^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert+$ $+\frac{i}{2}d_{-1}^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln^2\lvert\sigma\rvert$
39	$(1-x^2)_+^{\lambda}$ $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}J_{\lambda+\frac{1}{2}}(\sigma)$
40	$(1+x^2)_+^{\lambda}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{\lvert\sigma\rvert}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)$
41	$(x^2-1)_+^{\lambda}$ $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$	$-\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left\lvert\frac{\sigma}{2}\right\rvert^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)=$ $=\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left\lvert\frac{\sigma}{2}\right\rvert^{-\lambda-\frac{1}{2}}\times$ $\times\frac{\cos\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)-J_{\lambda+\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)}{\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
42	$(x^2-1)_+^{n}$	$(-1)^n 2\pi\left(1+\frac{d^2}{d\sigma^2}\right)\delta(\sigma)+$ $+(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(\sigma)$

2. Функции нескольких переменных

1	$\delta(x_1,\ldots,x_n)$	1
2	1	$(2\pi)^n\delta(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$
3	Многочлен $P(x_1,\ldots,x_n)$	$(2\pi)^n P\left(-i\frac{\partial}{\partial\sigma_1},\ldots,-i\frac{\partial}{\partial\sigma_n}\right)\delta(\sigma)$
4	$r^{\lambda}\left(r=\sqrt{\sum x_j^2}\right)$	$2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\rho^{-\lambda-n}\quad\left(\rho=\sqrt{\sum\sigma_j^2}\right)$
5	$f_{\lambda}(r)=\frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}r^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$	$f_{-\lambda-n}(\rho)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{2^{\frac{\lambda+n}{2}}r^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$

В формулах 6—9 используется функция

$$C_{\lambda}=2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}=\frac{c_{-1}^{(n+2m)}}{\lambda+n+2m}+c_0^{(n+2m)}+c_1^{(n+2m)}(\lambda+n+m)+\ldots;$$

в правой части выписано ее лорановское разложение в окрестности точки $\lambda=-n-2m$. Кроме того,

$$\Omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

есть поверхность единичной сферы в n-мерном пространстве.

6	$r^{\lambda}\ln r$ $(\lambda\neq-n,-n-2,\ldots)$	$\frac{dC_{\lambda}}{\partial\lambda}\rho^{-\lambda-n}+C_{\lambda}\rho^{-\lambda-n}\ln\rho$
7	$r^{\lambda}\ln^2 r$ $(\lambda\neq-n,-n-2,\ldots)$	$\frac{\partial^2 C_{\lambda}}{\partial\lambda^2}\rho^{-\lambda-n}+2\frac{dC_{\lambda}}{\partial\lambda}\rho^{-\lambda-n}\ln\rho+C_{\lambda}\rho^{-\lambda-n}\ln^2\rho$
8	$\Omega_n r^{-2n-m}$	$c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+c_0^{(n+2m)}\rho^{2m}$
9	$\Omega_n r^{-2n-m}\ln r$	$\frac{1}{2}c_{-1}^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln^2\rho+c_0^{(n+2m)}\rho^{2m}\ln\rho+$ $+c_1^{(n+2m)}\rho^{2m}$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
10	$\delta(r-a) \quad (n \geqslant 1)$	$\Omega_{n-1} a^{\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho)$
11	То же при $n=3$	$4\pi a \dfrac{\sin a\rho}{\rho}$
12	$\left(\dfrac{d}{a\,da}\right)^m \dfrac{\delta(r-a)}{a}$	$\Omega_n \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\sin a\rho}{\rho}$

Обозначения в дальнейших формулах 13—25 см. выше. в разделе «Сводка основных определений и формул», стр. 436, пп. 1—2.

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
13	$(P+i0)^\lambda$	$\dfrac{1}{\Gamma(-\lambda)} e^{-\frac{\pi}{2}qi} 2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda+\dfrac{n}{2}\right)(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$
14	$(P-i0)^\lambda$	$\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}qi} 2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)} (Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$
15	P_+^λ	$2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda+\dfrac{n}{2}\right) \times$ $\times \dfrac{1}{2i}\left[e^{-i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} -\right.$ $\left. - e^{i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$
16	P_-^λ	$-2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda+\dfrac{n}{2}\right) \times$ $\times \dfrac{1}{2i}\left[e^{-\frac{\pi}{2}qi}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} -\right.$ $\left. - e^{\frac{\pi}{2}qi}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
17	$(c^2+P+i0)^\lambda$	$\dfrac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} =$ $= \dfrac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{q\pi i}{2}} c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}} \times$ $\times \left[\dfrac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \dfrac{\pi i}{2} \dfrac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right].$
18	$(c^2+P-i0)^\lambda$	$\dfrac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \dfrac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} =$ $= \dfrac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}} e^{\frac{q\pi i}{2}} c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}} \times$ $\times \left[\dfrac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - \dfrac{\pi i}{2} \dfrac{H^{(2)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right].$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
19	$\frac{(c^2+P)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$	$-\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}\, i\pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left\{e^{-i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\right.$ $\left.-e^{i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\}=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left\{-\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\,\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\right.$ $+\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\left[\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\,\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\right.$ $\left.\left.+\sin\frac{p\pi}{2}\,\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]\right\}.$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
20	$\frac{(c^2+P)_-^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$	$\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}\, i\pi^{\frac{n}{2}-1}\, c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\left\{e^{-\frac{q\pi i}{2}}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\right.$ $\left.-e^{\frac{q\pi i}{2}}\,\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c\,(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right\}=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$ $\times\left\{\sin\frac{q\pi}{2}\,\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\times\right.$ $\left.\times\left[\sin\frac{q\pi}{2}\,\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+\sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi\,\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]\right\}.$
21	$\delta^{(s-1)}\times$ $\times(c^2+P)$	$(-1)^{s+1}\frac{i}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\,2^{\frac{n}{2}-s}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,c^{\frac{n}{2}-s}\times$ $\times\left[e^{-\frac{\pi iq}{2}}\,\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c\,(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}-\right.$ $\left.-e^{\frac{\pi iq}{2}}\,\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c\,(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}\right].$

Продолжение

№№ п/п	Обобщенная функция f	Преобразование Фурье $F[f]$
22	$\delta(c^2+P)$	$-\frac{i}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}(2\pi c)^{\frac{n}{2}-1}\left[-e^{-\frac{\pi q i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}+e^{\frac{\pi q i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}}\right].$
23	$\frac{(c^2+P)_+^s}{\Gamma(s+1)}$	$(-1)^{s+1}i2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}\times\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right]+(2\pi)^n\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\delta(x),$
24	$\frac{(c^2+P)_-^s}{\Gamma(s+1)}$	$\frac{i\cdot 2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}\right],$
25	$\frac{(c^2+P)^s}{\Gamma(s+1)}$	$(2\pi)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\delta(x).$

ДОБАВЛЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛНОТЫ ПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Мы указывали в гл. I (§ 1, п. 8), что пространство обобщенных функций является полным относительно введенной там сходимости; иначе говоря, *если последовательность функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ такова, что для каждой основной функции φ существует предел числовой последовательности (f_ν, φ), то этот предел $f(\varphi)=\lim\limits_{\nu\to\infty}(f_\nu, \varphi)$ снова задает линейный непрерывный функционал на пространстве K*. В настоящем Добавлении это предложение будет доказано.

Тот факт, что функционал $f(\varphi)$ линеен, весьма прост:

$$f(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\lim_{\nu\to\infty}f_\nu(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\lim\{f_\nu(\alpha_1\varphi_1)+f_\nu(\alpha_2\varphi_2)\}=$$
$$=\alpha_1 f(\varphi_1)+\alpha_2 f(\varphi_2).$$

Существенно доказать непрерывность функционала $f(\varphi)$. Пусть последовательность основных функций φ_ν стремится к нулю в пространстве K; мы должны показать, что $f(\varphi_\nu)\to 0$.

Допустим противное. Тогда, перейдя, если нужно, к некоторой подпоследовательности, можно считать, что $\lvert f(\varphi_\nu)\rvert \geqslant c > 0$.

Сходимость последовательности φ_ν к нулю в пространстве K означает, что все функции $\varphi_\nu(x)$ равны нулю вне ограниченной области и стремятся к нулю равномерно в R_n, так же как и их производные любых порядков. Еще раз перейдя к подпоследовательности, можем полагать, что $\lvert D_\nu^k\varphi(x)\rvert \leqslant \frac{1}{4^\nu}$ $(k=0, 1, \ldots, \nu)$.

30 Зак. 460. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, вып. 1

Положим $\psi_\nu = 2^\nu \varphi_\nu$; тогда функции ψ_ν также будут стремиться к нулю в пространстве K, а в то же время $f(\psi_\nu) \to \infty$.

Теперь будем строить некоторую подпоследовательность f'_ν и некоторую подпоследовательность ψ'_ν следующим образом.

Выберем сначала ψ'_1 так, чтобы иметь $|f(\psi'_1)| > 1$. Поскольку $(f_\nu, \psi) \to f(\psi)$, выберем дальше f'_1 так, чтобы иметь $(f'_1, \psi'_1) > 1$.

Пусть f'_j, ψ'_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ построены. Возьмем в качестве ψ'_ν элемент последовательности ψ_ν с настолько большим номером, что

$$|(f'_k, \psi'_\nu)| < \frac{1}{2^{\nu-k}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1); \tag{а}$$

$$|f(\psi'_\nu)| > \sum_{j=1}^{\nu-1} |f(\psi'_j)| + n. \tag{б}$$

Первое возможно, потому что функции ψ_ν стремятся к нулю в пространстве K, и, следовательно, для любой обобщенной функции f_0 мы имеем $(f_0, \psi_\nu) \to 0$. Второе возможно потому, что $f(\psi_\nu) \to \infty$. Так как $(f_\nu, \psi) \to f(\psi)$, то выберем f'_ν из последовательности f_ν с таким расчетом, чтобы иметь

$$|(f'_\nu, \psi'_\nu)| > \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f'_\nu, \psi'_j)| + n. \tag{б$'$}$$

Таким образом, построение ψ'_ν и f'_ν можно продолжить неограниченно. Положим далее

$$\psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi'_\nu.$$

По построению, ряд в правой части сходится в пространстве K и, следовательно, его сумма ψ есть элемент K. Далее

$$(f'_\nu, \psi) = \sum_{j=1}^{\nu-1} (f'_\nu, \psi'_j) + (f'_\nu, \psi'_\nu) + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} (f'_\nu, \psi'_j).$$

Но в силу (б$'$) и того, что

$$\sum_{j=\nu+1}^{\infty} (f'_\nu, \psi'_j) < \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = 1,$$

получаем

$$|(f'_\nu, \psi)| > \nu - 1,$$

т. е. при $\nu \to \infty$ также $(f'_\nu, \psi) \to \infty$. Но это противоречит соотношению $\lim_{\nu \to \infty} (f'_\nu, \psi) = f(\psi)$.

Отсюда следует, что $f(\varphi_\nu) \to 0$, и непрерывность предельного функционала f доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

В этой книге затрагивались вопросы классического анализа, имеющие в большинстве своем достаточно длинную историю. Поэтому ссылки, которые мы приводим ниже, во многих случаях приблизительны или условны. Например, понятие регуляризации расходящихся интегралов мы связываем с именами Ж. Адамара и М. Рисса, хотя оно встречалось уже у Коши (при определении Г-функции вне области сходимости интеграла), и, несомненно, еще Эйлер пользовался в своих вычислениях близкими соображениями.

К § 1 гл. I. Понятие обобщенной функции, как функционала над некоторым пространством функций, было сформулировано С. Л. Соболевым [20]. В той форме, которую мы приводим, оно было предложено М. Шварцем [14].

К § 2 гл. I. Содержание этого параграфа заимствовано в основном из книги Л. Шварца [14].

К § 3—4 гл. I. Идея регуляризации расходящихся интегралов для применения к задачам дифференциальных уравнений восходит к Ж. Адамару [8]. М. Риссу [13] принадлежит общий метод регуляризации путем аналитического продолжения (см. также Л. Шварц [14]). Приведенный в этом параграфе материал является расширением и переработкой соответствующего материала из статьи И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро [16]. Новым по сравнению с этой статьей является введение и систематическое использование функционалов $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$, а также постановка проблемы о канонической регуляризации и ее решение для функций одного переменного.

В классе функций двух (и более) переменных с особенностями не выше степенных проблема канонической регуляризации уже не разрешима; как обнаружили В. Грушин и Р. Исмагилов, даже функциям $\frac{\alpha(x, y)}{r^k}$ (здесь $\alpha(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция) невозможно сопоставить функционалы так, чтобы выполнялись условия канонической регуляризации. В более узких классах функций нескольких переменных каноническая регуляризация возможна; В. Паламодов нашел несколько таких классов. Например, каноническая регуляризация возможна в классе функций $\frac{\alpha(x, y)}{P(x, y)}$, если расстояние между корнями каждого из многочленов $P(x, y)$, лежащими в верхней полуплоскости, и его корнями, лежа-

щими в нижней полуплоскости, остается в каждой ограниченной области на оси x больше положительной постоянной.

Задача о разложении дельта-функции на плоские волны (п. 11) в классической формулировке (вычисление значения функции в точке по известным интегралам этой функции по гиперплоскостям) была поставлена Радоном в 1917 г. и решена Ф. Джоном [10] и другими авторами; отметим по этому поводу заметку А. Хачатурова [22].

К § 5 гл. I. Содержание этого параграфа заимствовано в основном из книги Л. Шварца [14]. В разработке последних примеров п. 5 принимал участие Н. Я. Виленкин.

К § 6 гл. I. Содержание пп. 1 и 3 взято из статьи И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро [16]. Результаты п. 1 близким методом получены Ф. Джоном [10], результаты п. 3 независимо и приблизительно одновременно найдены Р. Курантом и А. Лаксом [4]. Впервые формула общего решения гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами была дана Герглотцем [9] и И. Г. Петровским [19] для тех случаев, когда она могла быть выражена в классических терминах теории функций, т. е. для уравнений достаточно высокого порядка ($m \geqslant n+1$). Гиперболические уравнения с постоянными коэффициентами были исследованы в важных работах Л. Гординга [7], с помощью метода Рисса, и Лерея [11], с помощью общего преобразования Лапласа. Пункт 2 написан В. А. Боровиковым по собственным результатам [24].

К Добавлению I. Содержание этого Добавления заимствовано из книги Л. Шварца [14].

К гл. II. Определение преобразования Фурье функций степенного роста, как обобщенных функций, принадлежит Л. Шварцу [14]. Другое определение аппарата преобразований Фурье таких функций имелось у С. Бохнера [1] и Т. Карлемана [3]. Приведенное в § 2 и § 3 определение преобразования Фурье функции произвольного порядка роста принадлежит И. М. Гельфанду и Г. Е. Шилову [17]. В статье [17] дано более общее определение, о котором будет идти речь в гл. III второго выпуска. Пространство Z было введено И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым [17] (под обозначением Z^1) *), а также одновременно и независимо Б. Мальгранжем [12] и Л. Эренпрейсом [5]. Текст § 2, п. 6 принадлежит Н. Я. Виленкину и З. Я. Шапиро.

К § 1 гл. III. Определение дифференциальных форм ω_j $(j>0)$, функционала $\delta(P)$ и его производных принадлежит И. М. Гельфанду и З. Я. Шапиро [16]. Форма ω_0 введена впервые Ж. Лереем [11]. Пункт 9 заимствован из статьи З. Я. Шапиро [23].

К § 2 гл. III. Изучение полюсов и вычетов квадратичной формы в степени λ для случая, когда в квадратичной форме имеется не больше одного минуса, было проведено М. Риссом [13] и явилось у него основой для исследования решений волнового уравнения. Исследование квадратичной формы в общем случае для целей

*) Более подробное изложение методов, основанных на использовании пространства Z, и связей с аналитическими функционалами Фантаппи и работами Лерея составит содержание пятого выпуска.

теории представлений провели И. М. Гельфанд и М. И. Граев [15]. Фундаментальные решения ультрагиперболических уравнений $Lu=\delta$ построены впервые И. Фурэ-Брюа [6]; в приведенной здесь форме они указаны З. Я. Шапиро; для $L^k u = \delta$ публикуются здесь впервые. Пункты 1, 2 следуют работам М. Рисса [13] и И. М. Гельфанда и М. И. Граева [15]. Идея, положенная в основу пп. 3—10 — продолжение в комплексную область — принадлежит И. М. Гельфанду. Она изложена в п. 3. Результаты пп. 4—6 принадлежат И. М. Гельфанду и М. И. Граеву, а пп. 7—10 Н. Я. Виленкину, И. М. Гельфанду и З. Я. Шапиро. Соответствующие пункты написаны авторами полученных результатов.

К § 3 гл. III. Результаты этого параграфа взяты в основном из статьи И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро [16]. Пункт 6 написан В. А. Боровиковым.

К § 4 гл. III. Материал этого параграфа в основном взят из статьи И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро [16]. М. В. Федорюк построил P^λ для любого многочлена от двух переменных с одним нулем в начале координат.

К Добавлению. Приведенное в Добавлении доказательство полноты пространства K' предложено М. С. Бродским.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig, 1932.

[2] Bureau F., Divergent integrals and partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 143—202.

[3] Carleman T., L'intégral de Fourier et questions qui s'y rattachent. Uppsala, 1944.

[4] Courant R. and Lax A., Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), n° 4.

[5] Ehrenpreis L., Solution of some problems of division, Amer. J. Math. 76 (1954), № 4, 883—903.

[6] Fourès-Bruhat Y., Solution élémentaire d'équations ultrahyperboliques, J. Math. Pures Appl. 35 (1956), n° 3, 277—288.

[7] Gårding L., Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math. 85 (1950), 1—62.

[8] Hadamard J., Le problème de Cauchy et les équations eux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris, 1932.

[9] Herglotz G., Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., vol. 78, 1926, pp. 93—126, 287—318; vol. 80, 1928, pp. 60—144; Abh. Math. Sem. Univ. Gamburg, vol. 6, 1928, pp. 189—197.

[10] John F., Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten. Math. Annalen, vol. 100 (1934), 488—520; The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analityc coefficients, Comm. pure and appl. math., vol. 3 (1950), 273—304; см. также его книгу Plane waves and spherical means, applied to partial differential equations. New York, 1955.

[11] Leray J., Les solutions élémentaires d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 234 (1952), 1112—1115. См. также его книгу Hyperbolic differential equations, New York, 1955.

[12] Malgrange B., Équations aux dérivées partielles à coefficients constants, 1. Comptes Rendus Acad. Sci., 237 (1953), № 25, 1620—1622.

[13] Riesz M., L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math. 81 (1949), 1—223.

[14] Schwartz L., Théorie des distributions I, II, Paris, 1950—51.

[15] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Аналог формулы Планшереля для классических групп, Труды Моск. матем. о-ва 4 (1955), 375—404.

[16] Гельфанд И. М. и Шапиро З. Я., Однородные функции и их приложения, Успехи матем. наук 10 (1955), № 3, 3—70.

[17] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, Успехи матем. наук 8 (1953), № 4, 3—51.

[18] Микусинский Я., Операторное исчисление, ИЛ, М., 1956.

[19] Петровский И. Г., On the diffusion of wavés and the lacunas for hyperbolic equations. Матем. сб., № 17 (59), (1945), 289—370.

[20] Соболев С. Л., Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Матем. сб., № 1 (43), (1936), 39—72.

[21] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1950.

[22] Хачатуров А. А., Определение значения меры для области n-мерного пространства по ее значениям для всех полупространств. Успехи матем. наук, 9 (1954) № 3 (61), 205—212.

[23] Шапиро З. Я., Об одном классе обобщенных функций, Успехи матем. наук, 13 (1958), № 3 (81), 205—212.

[24] Боровиков В. А., Фундаментальные решения линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, ДАН СССР, 119, № 3; Диссертация, МГУ, 1958.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ ВЫПУСКОВ 2, 3, 4