Электронный учебно-методический комплекс

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

- Учебная программа дисциплины
- **Курс лекций**
- Лабораторный практикум
- Методические указания по самостоятельной работе
- **Банк тестовых заданий в системе UniTest**

Красноярск
ИПК СФУ
2008

УДК 621.391.083.92
ББК 32.811.3
Г54

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» подготовлен в рамках инновационной образовательной программы «Структурная перестройка научно-образовательного центра "Радиоэлектроника"», реализованной в ФГОУ ВПО СФУ в 2007 г.

Рецензенты:
Красноярский краевой фонд науки;
Экспертная комиссия СФУ по подготовке учебно-методических комплексов дисциплин

Глинченко, А. С.

Г54 Цифровая обработка сигналов. Версия 1.0 [Электронный ресурс] : курс лекций / А. С. Глинченко. – Электрон. дан. (3 Мб). – Красноярск : ИПК СФУ, 2008. – (Цифровая обработка сигналов : УМКД № 50-2007 / рук. творч. коллектива А. С. Глинченко). – 1 электрон. опт. диск (*DVD*). – Систем. требования : *Intel Pentium* (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц ; 512 Мб оперативной памяти ; 3 Мб свободного дискового пространства ; привод *DVD* ; операционная система *Microsoft Windows* 2000 *SP* 4 / *XP SP* 2 / *Vista* (32 бит) ; *Adobe Reader* 7.0 (или аналогичный продукт для чтения файлов формата *pdf*).

ISBN 978-5-7638-1271-8 (комплекса)
ISBN 978-5-7638-1448-4 (курса лекций)
Номер гос. регистрации в ФГУП НТЦ «Информрегистр» 0320802615 от 06.12.2008 г. (комплекса)

Настоящее издание является частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Цифровая обработка сигналов», включающего учебную программу, лабораторный практикум, методические указания по самостоятельной работе, контрольно-измерительные материалы «Цифровая обработка сигналов. Банк тестовых заданий», наглядное пособие «Цифровая обработка сигналов. Презентационные материалы».

Изложены изучаемые в рамках лекционного курса базовые и специальные методы цифровой фильтрации сигналов, спектрально-корреляционного анализа, многоскоростной обработки, переноса и преобразования спектров. Приведены примеры систем, использующих данные методы. Рассмотрены методы и средства аппаратно-программной реализации цифровой обработки сигналов.

Предназначен для студентов направления подготовки бакалавров 210300.62 «Радиотехника» укрупненной группы 210000 «Электроника, радиотехника и связь» и преподавателей, ведущих занятия по дисциплине «Цифровая обработка сигналов».

© Сибирский федеральный университет, 2008

Рекомендовано к изданию
Инновационно-методическим управлением СФУ

Редактор И. Н. Байкина

Разработка и оформление электронного образовательного ресурса: Центр технологий электронного обучения информационно-аналитического департамента СФУ; лаборатория по разработке мультимедийных электронных образовательных ресурсов при КрЦНИТ

Содержимое ресурса охраняется законом об авторском праве. Несанкционированное копирование и использование данного продукта запрещается. Встречающиеся названия программного обеспечения, изделий, устройств или систем могут являться зарегистрированными товарными знаками тех или иных фирм.

Подп. к использованию 25.09.2008
Объем 3 Мб
Красноярск: СФУ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ 5
ВВЕДЕНИЕ 6
Т Е М А 1 ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА 7
Л е к ц и я 1 Введение в цифровую обработку сигналов. Сигналы и их преобразования при цифровой обработке 7
1.1. Общая структура системы цифровой обработки аналоговых сигналов ... 8
1.2. Математические модели дискретных сигналов 12
1.3. Спектр дискретного сигнала 14
1.4. Квантование сигналов по уровню 19
1.5. Цифровое кодирование сигнала 24
1.6. Условия выбора разрядности АЦП 26
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 28
Л е к ц и я 2 Математические описания и характеристики дискретных систем 29
2.1. Методы математического описания линейных дискретных систем во временной области и алгоритмы цифровой фильтрации на их основе 29
2.2. Методы математического описания сигналов дискретных систем на комплексной плоскости (в частотной области) 32
2.3. Тестовые последовательности дискретных систем 35
2.4. Передаточная функция и частотная характеристика дискретной системы 37
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 42
Т Е М А 2 РЕКУРСИВНЫЕ И НЕРЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ. МЕТОДЫ СТРУКТУРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ И СИНТЕЗА 43
Л е к ц и я 3. Характеристики и структуры цифровых фильтров 43
3.1. Передаточные функции рекурсивных фильтров 43
3.2. Частотные характеристики рекурсивных фильтров 46
3.3. Формы реализации рекурсивных фильтров 48
3.4. Прямая форма реализации, передаточная функция и частотная характеристика нерекурсивного фильтра 52
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 54
Л е к ц и я 4 Синтез рекурсивных фильтров по заданной частотной характеристике 55
4.1. Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу. Метод билинейного преобразования 57
4.2. Методика синтеза РФ по аналоговому прототипу 63
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 65

Л е к ц и я 5 Синтез нерекурсивных фильтров по заданной частотной характеристике 66
5.1. Синтез нерекурсивных фильтров методом весовых функций 66
5.2. Синтез нерекурсивных фильтров методом частотной выборки 75
5.3. Численные методы синтеза цифровых фильтров 77
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 79
Л е к ц и я 6 Оценка и обеспечение точности цифровых фильтров 80
6.1. Влияние конечной разрядности чисел 80
6.2. Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах 83
6.3. Оценка шумов квантования и требуемой разрядности АЦП и регистров 87
6.4. Методика решения задач конечной разрядности чисел в цифровых фильтрах 93
Ко н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 96
Т Е М А 3 МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВНА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ 97
Л е к ц и я 7 Алгоритм цифровой фильтрации сигналов на основе дискретного преобразования Фурье 97
7.1. Дискретное преобразование Фурье и его свойства 97
7.2. Алгоритм цифровой фильтрации конечных последовательностей на основе ДПФ 102
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 107
Л е к ц и я 8 Анализаторы спектра сигналов на основе дискретного преобразования Фурье 108
8.1. Базовая структура анализатора спектра и измеряемые им спектральные характеристики сигналов 109
8.2. Частотные характеристики анализатора спектра 111
8.3. Определение откликов анализатора спектра на гармонические сигналы 112
8.4. Роль весовых функций при спектральном анализе и их основные параметры 114
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 118
Л е к ц и я 9 Спектрально-корреляционный анализ дискретных случайных сигналов 119
9.1. Определения параметров и характеристик дискретных случайных сигналов 119
9.2. Статистические оценки характеристик дискретныхслучайных сигналов. Вычисление СПМ и ВСПМ методом коррелограмм 122
9.3. Статистические периодограммные оценки СПМ и ВСПМ дискретных случайных сигналов 125
9.4. Вычисление СПМ и ВСПМ методом периодограмм Уэлча 126
9.5. Вычисление оценок корреляции с помощью ДПФ 129
К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы 133

Лекция 10 Алгоритмы быстрого преобразования Фурье 134
10.1. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени 134
10.2. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по частоте 138
Контрольные вопросы 140
ТЕМА 4 СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ 141
Лекция 11 Методы многоскоростной обработки сигналов 141
11.1. Восходящие дискретные системы. Интерполяция сигналов 142
11.2. Нисходяще дискретные системы. Децимация сигналов 150
Контрольные вопросы 158
Лекция 12 Методы переноса и преобразования спектров дискретных сигналов 159
12.1. Перенос спектров сигналов методом цифрового гетеродинирования. Комплексные дискретные сигналы 159
12.2. Квадратурная обработка узкополосных сигналов 163
12.3. Однополосная модуляция дискретных сигналов 165
Контрольные вопросы 170
Лекция 13 Цифровая обработка сигналов в многоканальных системах связи с частотным уплотнением каналов 171
13.1. Формирование групповых сигналов 173
13.2. Частотное разделение групповых сигналов 178
Контрольные вопросы 184
Лекция 14 Системы многоканального полосового анализа – синтеза сигналов 185
14.1. Спектральный анализ сигналов методом полосовой фильтрации 186
14.2. Многоканальный полосовой анализ сигналов на основе кратковременного преобразования Фурье 188
14.3. Системы полосового анализа–синтеза сигналов 192
Контрольные вопросы 198
ТЕМА 5 МЕТОДЫ И СРЕДСТВА АППАРАТНО-ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ 199
Лекция 15 Реализация цифровой обработки сигналов на основе микропроцессорных средств 199
15.1. Общие вопросы реализации систем цифровой обработки сигналов 199
15.2. Программирование цифровых фильтров на основе микропроцессорных средств 207
Контрольные вопросы 211
Лекция 16 Цифровые сигнальные процессоры 212
16.1. Общая характеристика цифровых сигнальных процессоров 212
16.2. Функциональные устройства и интерфейс сигнальных процессоров ADSP-218x 218
Контрольные вопросы 227
Лекция 17 Программирование цифровых сигнальных процессоров 228

17.1. Система команд и структура программсигнального процессора 228
17.2. Программирование цифровых фильтров на языке ассемблера процессоров ADSP-218x 232
Контрольные вопросы 240
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 241
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 242

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АКФ	– автокорреляционная функция
АФНЧ	– аналоговый фильтр нижних частот
АФП	– аналоговый фильтр-прототип
АФПНЧ	– аналоговый фильтр-прототип нижних частот
АЦП	– аналого-цифровой преобразователь
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика
БИХ	– бесконечная импульсная характеристика
БПФ	– быстрое преобразование Фурье
ВДС	– восходящая дискретная система
ВКФ	– взаимная корреляционная характеристика
ВСПМ	– взаимная спектральная плотность мощности
ДВС	– дискретная временная свертка
ДПФ	– дискретное преобразование Фурье
ДЧХ	– дискретизированная частотная характеристика
КИХ	– конечная импульсная характеристика
КЧД	– компрессор частоты дискретизации
МКС	– многоканальная система
ММ	– масштабный множитель
МСС	– многоскоростная система
НДС	– нисходящая дискретная система
НФ, НЦФ	– нерекурсивный (нерекурсивный цифровой) фильтр
ОДПФ	– обратное дискретное преобразование Фурье
ПЛИС	– программируемая логическая интегральная схема
ППФ, ПФ	– полосно-пропускающий (полосовой) фильтр
ПСА	– полосовой спектральный анализ
ПЦОС	– процессор цифровой обработки сигналов
РГС	– разделение группового сигнала
РФ, РЦФ	– рекурсивный (рекурсивный цифровой) фильтр
СФ	– сглаживающий фильтр
СПМ	– спектральная плотность мощности
УВХ	– устройство выборки-хранения
ФГС	– формирование группового сигнала
ФВЧ и ФНЧ	– фильтры верхних и нижних частот
ФЧХ	– фазочастотная характеристика
ЦАП	– цифроаналоговый преобразователь
ЦОС	– цифровая обработка сигналов
ЦСП	– цифровой сигнальный процессор
ЦФ	– цифровой фильтр
ЧХ	– частотная характеристика
ЭЧД	– экспандер частоты дискретизации

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) имеет большое фундаментальное и прикладное значение в современной радиотехнике и смежных с нею областях. Ее методы используются для разработки и исследования радиоэлектронных устройств и систем различного назначения, а ее средства – для их аппаратно-программной реализации.

Обучение методам и средствам ЦОС осуществляется в рамках дисциплины «Цифровая обработка сигналов». Она охватывает широкий круг теоретических вопросов, изучаемых на лекционных занятиях и в процессе самостоятельной работы студентов. На лекционные занятия ввиду их ограниченного времени выносятся базовые, ключевые вопросы дисциплины, знание которых достаточно для освоения дополнительных вопросов, отводимых на самостоятельное изучение. При таком разделении учебного материала лекционный курс должен представлять методически цельное и самостоятельное изложение теоретических основ изучаемого предмета. В соответствии с этой задачей и учебной программой дисциплины и построен предлагаемый курс лекций по цифровой обработке сигналов.

Курс лекций включает изучение базовых вопросов дискретизации сигналов по времени, их цифрового представления, цифровой фильтрации, спектрально-корреляционного анализа, многоскоростной обработки, переноса и преобразования спектров, применения методов ЦОС в многоканальных системах связи и многоканального полосового анализа–синтеза сигналов. Предметом изучения являются также методы и средства аппаратно-программной реализации цифровой обработки сигналов, в том числе современные цифровые сигнальные процессоры.

Освоение курса лекций невозможно без знания основных положений базовых учебных дисциплин: «Радиотехнические цепи и сигналы», «Цифровые устройства и микропроцессоры».

Материал курса разбит на 5 тем и 17 лекций. Содержание их излагается на лекционных занятиях с применением мультимедийных средств электронной презентации, существенно расширяющих объем получаемой на лекции информации. Возможность самостоятельного закрепления материала с помощью курса лекций позволяет обучаемым во время лекции в большей мере сосредоточить внимание на понимании изучаемых вопросов.

Учебное пособие (курс лекций) рекомендуется бакалаврам, обучающимся по направлению «Радиотехника», а также студентам других направлений и специальностей, в образовательных программах которых предусмотрено изучение дисциплины «Цифровая обработка сигналов» или родственных ей дисциплин.

Т Е М А 1
ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА

Л е к ц и я 1
Введение в цифровую обработку сигналов. Сигналы и их преобразования при цифровой обработке

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) – это одно из наиболее динамично развиваемых и перспективных направлений современной радиотехники. Важнейшими свойствами ЦОС являются высокая точность, технологичность, нечувствительность к дестабилизирующим факторам, функциональная гибкость. Поэтому удельный вес ЦОС в радиоэлектронных устройствах и системах по мере повышения ее быстродействия и снижения стоимости все более возрастает (тенденция приближения ЦОС к антенне).

По *определению* ЦОС – это обработка цифровых сигналов цифровыми методами и цифровыми средствами.

Под *цифровым сигналом* понимается любая пронумерованная последовательность чисел (цифровых кодов), например, 3, 7, 11, 9, …, в том числе значений оцифрованного аналогового сигнала, являющаяся функцией некоторого эквидистантного дискретного аргумента (например, порядкового номера, расстояния или по умолчанию – времени).

Методами ЦОС являются математические соотношения или алгоритмы, в соответствии с которыми выполняются вычислительные операции над цифровыми сигналами. К ним относятся алгоритмы цифровой фильтрации, спектрально-корреляционного анализа, модуляции и демодуляции сигналов, адаптивной обработки и др. Алгоритмы ЦОС, в отличие от других вычислений на ЭВМ, предусматривают, как правило, их выполнение *в реальном масштабе времени*.

Средствами реализации ЦОС являются жесткая логика, программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС), микропроцессоры общего назначения, микроконтроллеры, персональные компьютеры (компьютерная обработка сигналов), одноплатные компьютеры и цифровые сигнальные процессоры (ЦСП). Последние аппаратно и программно оптимизированы на задачи ЦОС и образуют ее специализированную элементную базу. Совокупность аппаратных средств, осуществляющих цифровую обработку сигналов, называют *процессором* ЦОС.

Важнейшее значение для ЦОС имеют также *средства автоматизации* проектирования аппаратного и программного обеспечения процессоров на основе ЦСП, ПК, ПЛИС и других цифровых средств (системы разработки).

Таким образом, ЦОС обобщенно можно определить формулой

ЦОС = Алгоритм + Программа (микропрограмма, схема) +
+ Процессор.

Ее слагаемые образуют, соответственно, алгоритмическое, программное (микропрограммное или схемотехническое) и аппаратное обеспечение ЦОС.

Исторически ЦОС как новое научное и техническое направление начала формироваться в начале 60-х гг. XX в. Она опиралась на достижения цифровой вычислительной техники и известные задолго до этого в математике Z-преобразование, преобразования Лапласа, Фурье, линейные разностные уравнения и др. Фундаментальными для ЦОС стали проведенные в 30–40-е гг. прошлого века работы по теории дискретизации и восстановления сигналов Котельникова–Шеннона–Найквиста. Большую роль в развитии ЦОС сыграли исследования Кайзера по цифровой фильтрации и предложенные в 1965 г. Кули и Тьюки алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ).

К историческим вехам ЦОС можно отнести также создание в 60-х гг. XX в. цифрового полосного вокодера, изобретенного еще в 1939 г. Дадли, многоканального цифрового приемника (Стивенсон, 1971), цифрового сигнального процессора (1982). В эти же годы были получены и значительные теоретические результаты по адаптивной обработке сигналов, спектрально-корреляционному анализу, вейвлет-анализу и их приложениям.

Содержание теоретического курса ЦОС включает ее такие направления, как цифровая фильтрация, спектрально-корреляционный анализ, специальные методы и приложения, методы и средства аппаратно-программной реализации.

1.1. Общая структура системы цифровой обработки аналоговых сигналов

Обработка аналоговых сигналов является наиболее общей задачей ЦОС. Она включает преобразование аналоговых сигналов в цифровую форму, их алгоритмическую обработку и при необходимости обратное преобразование цифрового сигнала в аналоговый. Общая структурная схема системы цифровой обработки аналоговых сигналов приведена на рис. 1.1.

Входной аналоговый сигнал $x_{вх}(t)$ в этой схеме поступает на аналого-цифровой преобразователь (АЦП) через аналоговый фильтр нижних частот ФНЧ1 с частотой среза f_c. Фильтр обеспечивает ограничение полосы частот входного сигнала (включая и сопутствующие сигналу шумы и помехи) максимальной частотой $f_m \approx f_c$, соответствующей используемой в АЦП частоте дискретизации сигнала по времени $f_д > 2f_m$. Он ослабляет искажения наложения при дискретизации сигналов с неограниченным по частоте спектром и

называется *противомаскировочным фильтром*, или *аналоговым преселектором*.

Аналого-цифровое преобразование включает дискретизацию сигнала по времени, квантование по уровню и цифровое кодирование (рис. 1.2).

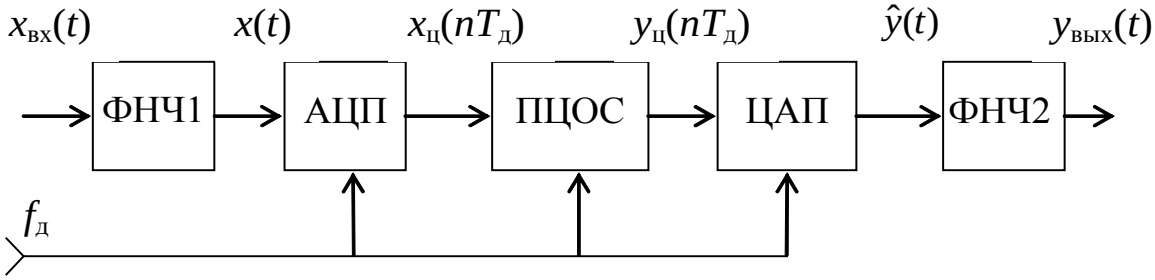


Рис. 1.1. Общая структура системы ЦОС

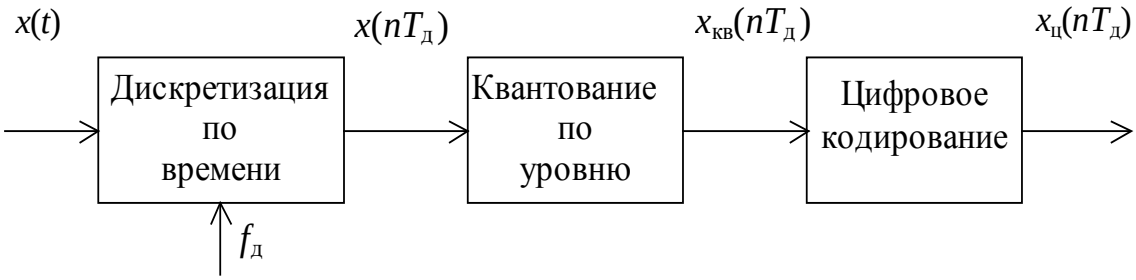


Рис. 1.2. Последовательность операций аналого-цифрового преобразования сигнала

В результате образуются *дискретный сигнал* $x(nT_д)$, соответствующий выборкам аналогового сигнала $x(t)$ в дискретные равноотстоящие моменты времени $nT_д$ ($T_д = 1/f_д$ – период дискретизации сигнала), *дискретный квантованный сигнал* $x_{кв}(nT_д)$, отличающийся *конечным* множеством принимаемых им значений, и *цифровой сигнал* $x_ц(nT_д)$ в виде последовательности цифровых двоичных кодов с числом разрядов, соответствующим разрядности АЦП.

Процессором ЦОС в соответствии с заданным *алгоритмом цифровой обработки* (оператором Ф) входной цифровой сигнал $x_ц(nT_д)$ преобразуется в выходной цифровой сигнал системы $y_ц(nT_д) = Ф[x_ц(nT_д)]$.

Аналоговый выходной сигнал системы $y_{вых}(t)$ получается (или восстанавливается) из цифрового сигнала $y_ц(nT_д)$ с помощью цифроаналогового преобразователя ЦАП, преобразующего его в *квантованный по уровню аналоговый сигнал* $\hat{y}(t)$ ступенчатой формы, и аналогового ФНЧ2, которым ограничивается частотный спектр и подавляются высокочастотные компоненты выходного сигнала. Этот фильтр с частотой среза $f_c < f_д/2$ называют также *сглаживающим*.

Совокупность элементов ФНЧ1, АЦП, ЦАП и ФНЧ2 системы цифровой обработки аналоговых сигналов, выполняющих преобразования сигналов

вида А/А, А/Ц и Ц/А, образует *подсистему аналогового ввода-вывода*, или аналого-цифрового интерфейса, системы ЦОС.

С преобразованиями сигналов при цифровой обработке связаны *искажения и погрешности*, анализ и оценка которых основываются на их *математических моделях и описаниях*.

1.2. Математические модели дискретных сигналов

Под *дискретными* понимают сигналы или функции, существующие при дискретных, как правило, равноотстоящих значениях своего аргумента. Мгновенные значения дискретного сигнала называют его *отсчетами*, или *выборками*.

Математически дискретный сигнал определяют:

♦ функцией дискретного времени $nT_д$, соответствующей выборкам аналогового сигнала в дискретные равноотстоящие моменты времени:

$$x(nT_д) = x(t)|t = nT_д,\ n = 0, 1, 2, ...;$$

♦ функцией номера выборки n, в общем случае не связанной с временем:

$$x(n) = x(nT_д)|T_д = 1;$$

♦ функцией непрерывного времени t:

$$x_{дδд}(t) = x(t)\, f_д(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_д) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_д)\delta(t - nT_д), \qquad (1.1)$$

получаемой умножением аналогового сигнала $x(t)$ на *дискретизирующую функцию* $f_δ(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_д)$ в виде периодической последовательности δ-импульсов с периодом повторения $T_д$, где $\delta(t - nT_д) = \begin{cases} \infty, & t = nT_д \\ 0, & t \neq nT_д \end{cases}$ – δ-импульс бесконечной амплитуды, нулевой длительности и единичной площади $\int_{t=nT_д - T_д/2}^{nT_д + T_д/2} \delta(t - nT_д)dt = 1$, задержанный на $nT_д$ отсчетов и имеющий размерность частоты или $с^{-1}$. Графически дискретные сигналы представляются функцией дискретного времени $nT_д$ или номера выборки n (рис. 1.3).

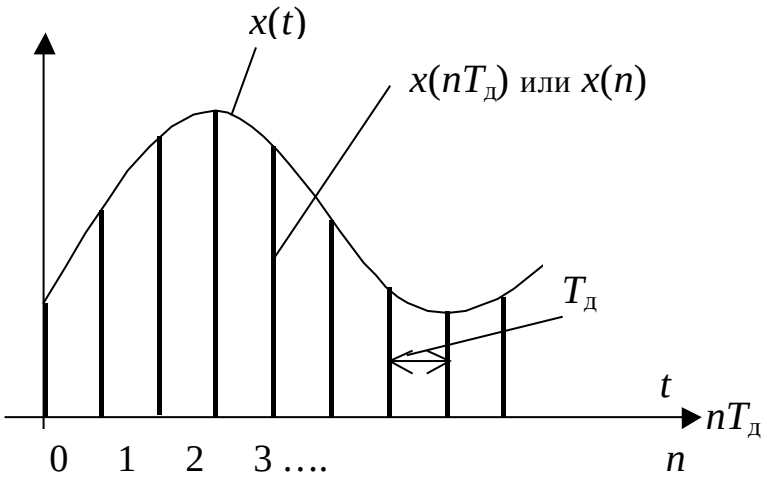


Рис. 1.3. Графики непрерывного $x(t)$ и дискретного $x(nT_д)$ ($x(n)$) сигналов

Сигналы, определяемые функцией номера выборки n, называют также числовыми, или *дискретными, последовательностями*. Приводимую на графиках функцию непрерывного времени отождествляют либо с аналоговым сигналом $x(t)$, соответствующим дискретному сигналу $x(nT_д)$, либо с некоторой условной огибающей дискретной последовательности $x(n)$, более наглядно отображающей ее функциональную зависимость.

Сигналы $x_д(t)$ и $x(nT_д)$ связаны линейным соотношением

$$x(nT_д) = \int_{(n-0,5)T_д}^{(n+0,5)T_д} x_д(t)dt$$

и имеют одинаковые свойства (но разные размерности). Поэтому все вышеприведенные определения дискретного сигнала являются *математически адекватными*: $x(nT_д) \cong x(n) \cong x_д(t)$. Первые из них ($x(nT_д)$ и $x(n)$) непосредственно используются при описании и анализе дискретных и цифровых систем. Определение дискретного сигнала функцией непрерывного времени (1.1) эквивалентно *балансной модуляции* или взвешиванию площади периодически следующих δ-импульсов $f_δ(t)$ дискретизируемым сигналом $x(t)$ или его выборками $x(nT_д)$ (рис. 1.4).

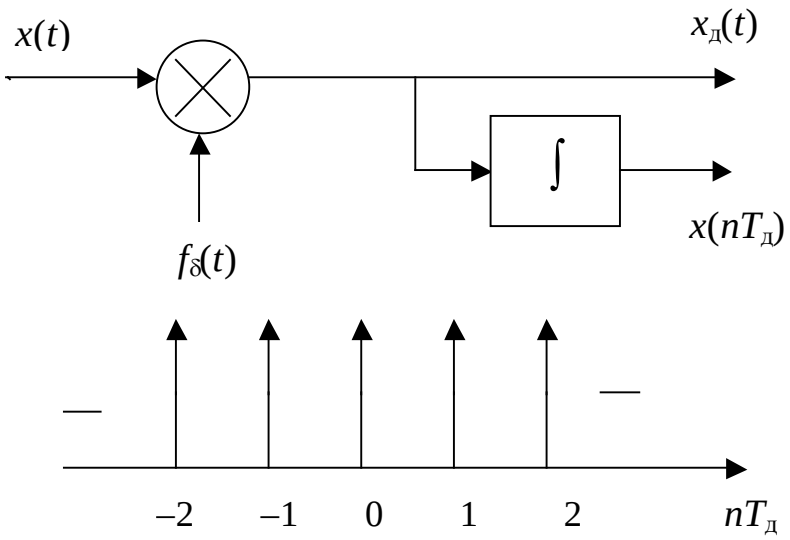


Рис. 1.4. Эквивалентная схема дискретизации сигнала по времени

Это определение позволяет с помощью известных методов описания аналоговых сигналов и систем получить математические описания и сопоставить свойства соответствующих им дискретных сигналов и систем [1].

В математике дискретные сигналы относятся к классу так называемых *решетчатых функций*, или *временных рядов*.

1.3. Спектр дискретного сигнала

Спектральную плотность, или спектральную функцию, дискретного сигнала, называемую для упрощения *спектром*, можно найти, дискретизировав по времени преобразование Фурье соответствующего ему аналогового сигнала $X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$. Заменив t на $nT_д$, интеграл на сумму и dt на $T_д$, получим

$$X'_д(j\omega) = T_д \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_д)\, e^{-j\omega nT_д}. \qquad (1.2)$$

Это выражение имеет размерность спектральной плотности [сигнал/частота].

Кроме того, спектр может быть найден и прямым преобразованием Фурье дискретного сигнала, представленного функцией непрерывного времени (1.1):

$$X_д(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_д(t)e^{-j\omega t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_д)e^{-j\omega t}dt.$$

Используя фильтрующее свойство δ-функции $\int s(t)\delta(t-t_0)dt = s(t_0)$, получим

$$X_{д}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{д})e^{-j\omega nT_{д}}. \qquad (1.3)$$

Выражение (1.3) имеет размерность [сигнал], так как является Фурье-преобразованием сигнала $x_{д}(t)$, размерностью [сигнал/время] или [сигнал·частота].

Таким образом, выражения (1.2) и (1.3) отличаются только масштабным (и размерным) множителем $T_{д}$. Обычно для спектра дискретного сигнала (его непрерывного преобразования Фурье) используется принимаемое далее определение (1.3). С помощью выражения (1.2) спектральная плотность дискретного сигнала при необходимости приводится к соответствующей ей размерности [В/Гц], как и у аналогового сигнала. Определением спектра (1.2) пользуются также в многоскоростных системах ЦОС с изменяемой в процессе обработки частотой дискретизации. Обозначают спектр дискретного сигнала как с индексом «д» ($X_{д}(j\omega)$) – при совместном описании дискретных и аналоговых сигналов, так и без индекса ($X(j\omega)$), если рассматриваются только дискретные сигналы.

В силу периодичности комплексной экспоненты

$$e^{-j\omega nT_{д}} = e^{-j(\omega + k\omega_{д})nT_{д}}$$

спектр дискретного сигнала, в отличие от аналогового, *периодичен* по частоте с периодом $\omega_{д}$: $X_{д}(j\omega) = X_{д}[j(\omega + k\omega_{д})]$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (рис. 1.5). *Периодизация спектра* обусловлена *дискретизацией сигнала по времени.* Справедливо и обратное утверждение о периодичности сигналов с дискретным по частоте (или линейчатым) спектром. Оба эти свойства отвечают фундаментальному положению *о взаимосвязи дискретизации и периодизации сигналов во временной и частотной областях* [1].

Определяют спектр дискретного сигнала в *основной полосе частот* ($0 \pm \omega_{д}/2$), ограниченной по модулю *частотой Найквиста*: $\omega_{д}/2$.

Дискретный сигнал можно вычислить по его спектру (1.3) в основной полосе частот с помощью обратного преобразования Фурье:

$$x(nT_{д}) = \frac{T_{д}}{2\pi}\int_{-\omega_{д}/2}^{\omega_{д}/2} X_{д}(j\omega)e^{j\omega nT_{д}}d\omega. \qquad (1.4)$$

Выражение (1.4) получается дискретизацией по времени непрерывного обратного преобразования Фурье аналогового сигнала

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_{a}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

путем замены t на $nT_д$ и использования вместо спектральной плотности аналогового сигнала $X_a(j\omega)$ соответствующей ей по размерности спектральной плотности дискретного сигнала $T_д X_д(j\omega)$ в полосе частот $\pm\omega_д/2$ (см. далее п. 1.4).

Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов

Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов находится на основе определения дискретного сигнала (1.1), в котором дискретизирующая функция $f_\delta(t)$ представляется или заменяется аппроксимирующим ее рядом Фурье $f_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_д t}$:

$$x_д(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_д t} . \qquad (1.5)$$

Коэффициенты ряда

$$C_k = \frac{1}{T_д} \int_{nT_д - T_д/2}^{nT_д + T_д/2} \delta(t - nT_д) e^{-jk\omega_д t} dt = \frac{1}{T_д} e^{-jk\omega_д nT_д} = \frac{1}{T_д},$$

как и следовало ожидать, соответствуют равномерному дискретному (или линейчатому) спектру этой периодической функции.

Преобразование Фурье сигнала (1.5) при $C_k = 1/T_д$ приводит к следующему выражению спектра дискретного сигнала через спектр соответствующего ему аналогового сигнала:

$$X_д(j\omega) = \frac{1}{T_д} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_д t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_д} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{aд}[j(\omega - k\omega)]. \qquad (1.6)$$

Для спектра дискретного сигнала, определяемого (1.2), эта связь имеет вид

$$X'_д(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega - k\omega_д)]. \qquad (1.7)$$

Из (1.6) следует, что *спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного множителя* (а в (1.7) – непосредственно) *равен сумме спектров аналогового сигнала* $X_a(j\omega)$, *смещенных по частоте на* $k\omega_д$. Перенос спектра $X_a(j\omega)$ на частоты $k\omega_д$ вызван умножением аналогового сигнала на множество комплексных гармонических сигналов $e^{jk\omega_д t}$, являющихся гармониками дискретизирующей функции $f_\delta(t)$ (см. (1.5) и рис. 1.4). Он физически объясняет *явление размножения, или периодизации спектров при дискретизации*, которое математически обосновано выше.

Дискретизация аналоговых сигналов с финитным спектром при частоте дискретизации, отвечающей теореме отсчетов

При дискретизации аналогового сигнала с финитным спектром, ограниченным максимальной частотой ω_m, отвечающей условию $\omega_m \le \omega_д/2$ (рис. 1.5), спектр дискретного сигнала $X_д(j\omega)$ в основной полосе частот $\pm\omega_д/2$ (при $|\omega| \le \omega_д/2$) точно совпадает (до постоянного множителя $T_д$) со спектром аналогового сигнала: $T_д X_д(j\omega) = X_а(j\omega)$. Условие $\omega_m \le \omega_д/2$ (или $\omega_д \ge 2\omega_m$) отвечает *теореме отсчетов* Котельникова.

В этом случае возможно точное *восстановление* аналогового сигнала $x(t)$ по его дискретным выборкам $x(nT_д)$ с помощью идеального фильтра-интерполятора нижних частот (ФНЧ) с прямоугольной частотной характеристикой $П_{\omega m}(j\omega)$, равной 1 при $|\omega| \le \omega_m$ и равной нулю при $|\omega| > \omega_m$ (на рис. 1.5 $\omega_m = \omega_д/2$). Сигнал на выходе ФНЧ соответствует обратному преобразованию Фурье деперiодизированного спектра дискретного сигнала $П_{\omega m}(j\omega) T_д X_д(j\omega)$, имеющего размерность спектральной плотности:

$$x(t) = \frac{T_д}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} П_{\omega m}(j\omega) X_д(j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Подставив сюда (1.3) и заменив для общности ω_m на $\omega_д/2$, получим

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n T_д) \frac{\sin[\omega_m (t - nT_д)}{\omega_m (t - nT_д)} . \qquad (1.8)$$

Выражение (1.8) является разложением аналогового сигнала $x(t)$ в ряд по базисным интерполирующим функциям sin *x*/*x* (или sin c(x)) с весовыми коэффициентами $x(nT_д)$ (*ряд Котельникова*). В соответствии с ним и осуществляется математически восстановление аналогового сигнала по его дискретным выборкам.

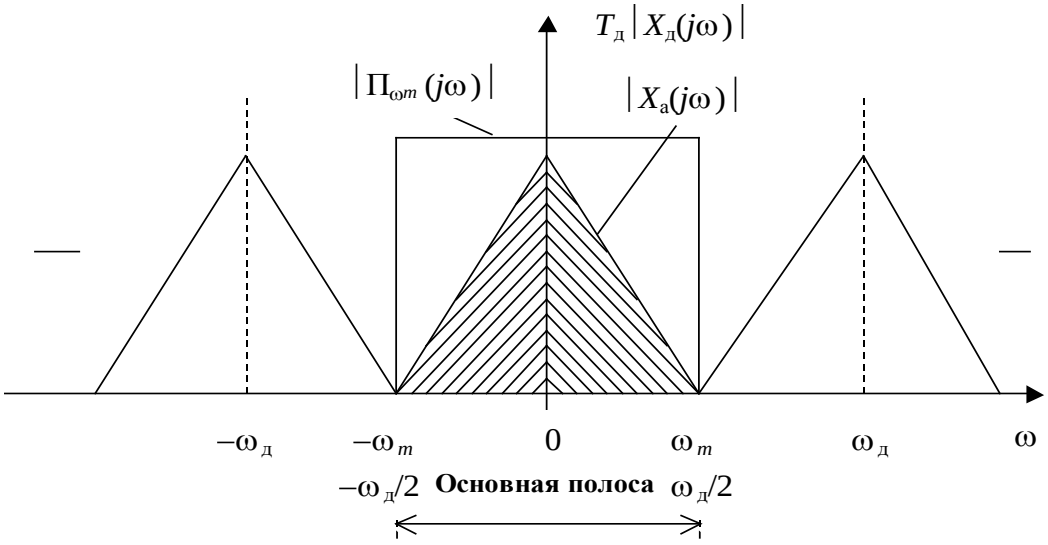


Рис. 1.5. Спектральные преобразования при дискретизации аналоговогосигнала с финитным спектром при $\omega_д \geq 2\omega_m$

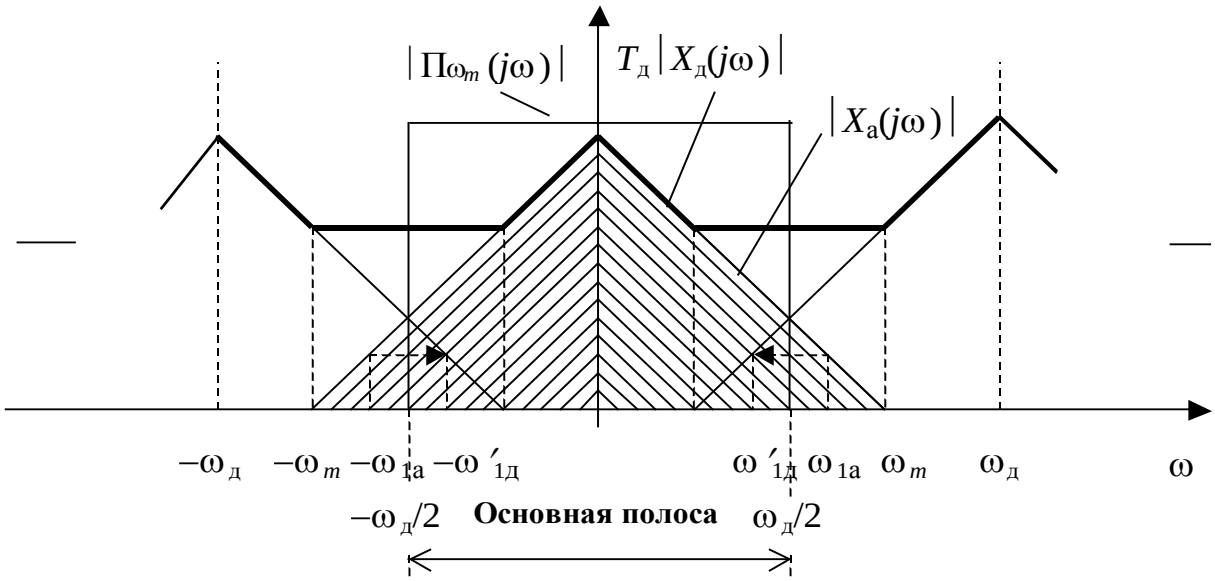


Рис. 1.6. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала с финитным спектром при $\omega_д < 2\omega_m$

Дискретизация аналоговых сигналов с финитным спектром при частоте дискретизации, не отвечающей теореме отсчетов. Явление наложения спектров

Если сигнал с финитным спектром дискретизируется с частотой $\omega_д < 2\omega_m$ (рис.1.6), спектр дискретного сигнала в основной полосе частот $|\omega| \leq \omega_д/2$ отличается от спектра аналогового сигнала:

$$T_д X_д(j\omega) \neq X_a(j\omega).$$

Периодизация спектра $X_a(j\omega)$ при дискретизации приводит в данном случае к перекрытию и суммированию его с соседними смещенными по частоте спектрами $X_a[j(\omega - k\omega_д)]$ ($k = \pm 1$ на рис. 1.6). Это явление называют *наложением спектров при дискретизации*. Связанные с ним погрешности дискретизации также называют погрешностями, или *искажениями наложения*. При наложении невозможно точное восстановление аналогового сигнала по его дискретным выборкам в соответствии с (1.8).

Графически при дискретизации сигналов с частотой, не отвечающей теореме отсчетов Котельникова, происходит сворачивание полос спектра аналогового сигнала, выходящих за основную полосу частот дискретного сигнала $\pm\omega_д/2$, внутрь этой полосы путем однократного (рис. 1.6) или многократного их зеркального отражения от ее границ, т.е. вертикальных линий, соответствующих граничным частотам $\pm\omega_д/2$.

Дискретизация аналоговых сигналов с неограниченным по частоте спектром

Если сигнал $x(t)$ конечной длительности $T_с$ с неограниченным по частоте, но затухающим спектром (рис. 1.7), то наложение спектров здесь имеет место при любом значении частоты дискретизации, но уровни смещенных по частоте спектров, перекрывающиеся в основной полосе частот, уменьшаются с ростом частоты дискретизации.

Восстановленный с помощью идеального ФНЧ или интерполяционного ряда Котельникова сигнал $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_д) \frac{\sin[\omega_д(t - nT_д)/2]}{\omega_д(t - nT_д)/2)}$ имеет ограниченный по частоте спектр, бесконечную длительность и отличается по форме от сигнала $x(t)$. Частота дискретизации сигнала конечной длительности $f_д = 2f_m$ и минимально необходимое число его отсчетов или выборок $N = [f_д T_с]_{цч} = 2f_m T_с$, называемое базой сигнала $x(t)$ [1], связываются в данном случае с некоторой частотой его спектра f_m, *условно принимаемой за максимальную*. Она является граничной частотой финитного спектра $\hat{X}(j\omega)$ восстановленного сигнала $\hat{x}(t)$, совпадающего в полосе частот $\pm f_д/2$ с периодическим по частоте спектром $X(j\omega)$ дискретного сигнала $x(nT_д)$.

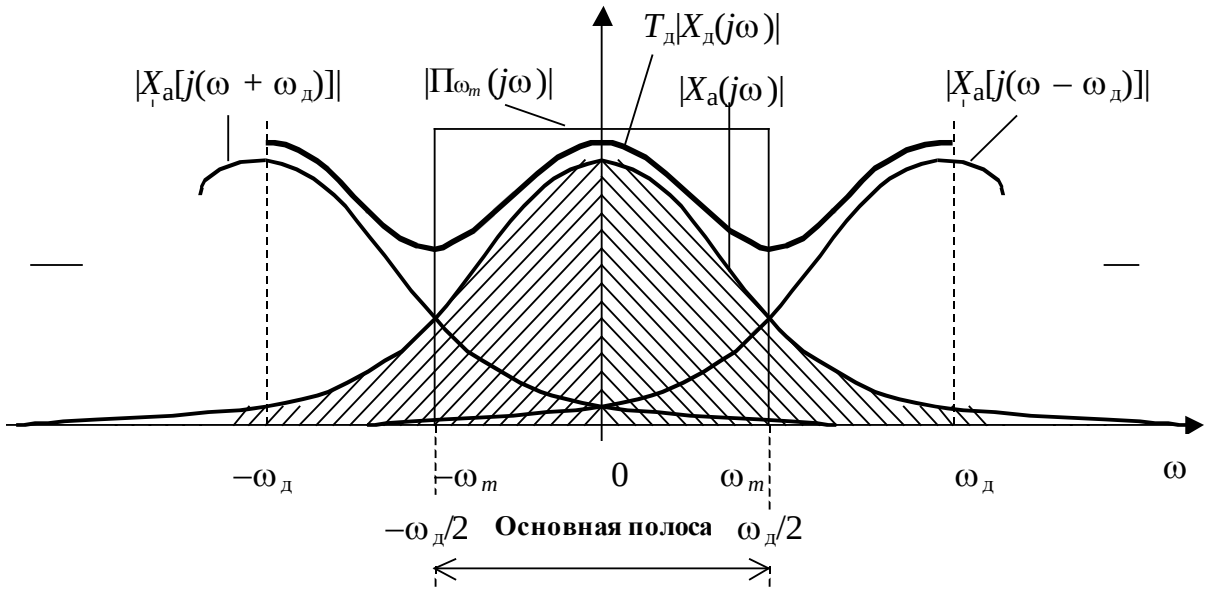


Рис. 1.7. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала конечной длительности

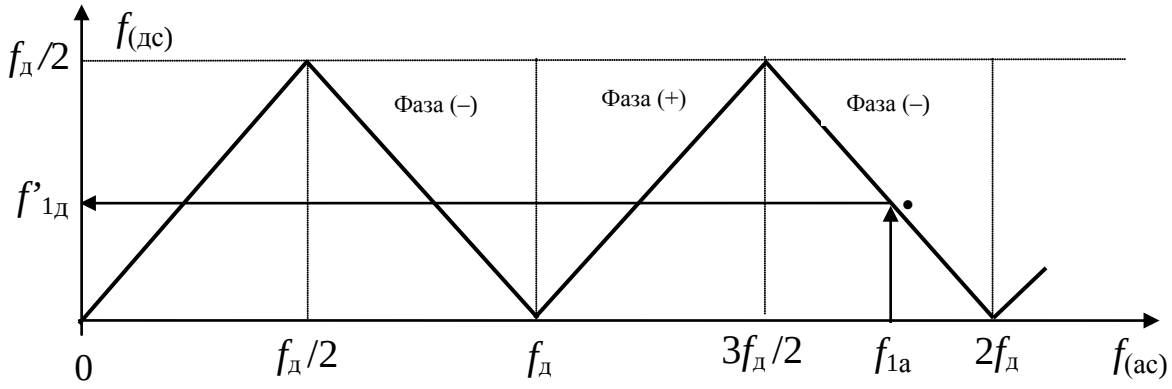


Рис. 1.8. График преобразования частот
при дискретизации сигнала

Явление подмены частот при дискретизации

С наложением спектров при дискретизации реальных сигналов связано также *явление подмены или маскирования частот*. Оно обусловлено тем, что высокочастотные составляющие сигнала, а также внешние шумы или помехи с частотами $f_{вч} > f_д/2$ при дискретизации *трансформируются* (преобразуются, свертываются) в основную полосу частот дискретного сигнала, создавая *помехи наложения* на частотах $f'_{вч} = |f_{вч} - kf_д| \le f_д/2$. В общем случае такие частотные составляющие либо отсутствуют во входном сигнале, либо накладываются на существующие, искажая исходный спектр. Например, частота аналогового сигнала f_{1a} на рис. 1.6 преобразуется в частоту дискретного сигнала $f'_{1д} = f_д - f_{1a}$ с изменением знака фазы. Говорят, что она подменяет частоту $f'_{1д}$ или маскируется под частоту $f'_{1д}$, которой во входном сигнале могло и не быть. График преобразования частот аналогового сигнала $f_{(ac)}$ и дискретного сигнала $f_{(дс)}$ показан на рис. 1.8.

Ослабить уровень помех наложения можно, только ограничив полосу частот дискретизируемого сигнала, приведя ее в соответствие с частотой дискретизации сигнала. В этом и заключается роль аналогового ФНЧ на входе системы ЦОС, как и его название – противомаскировочный.

Пример. В аналоговом сигнале, дискретизируемом с частотой $f_д$ = 250 Гц, присутствует помеха, содержащая 3-ю и более высокие гармоники частоты 50 Гц, т.е. 150, 200, 250, 300, 350 Гц. В дискретном сигнале им соответствуют составляющие с частотой 100, 50, 0, 50 и 100 Гц с фазами (–), (–), (+), (+), (+). Как видим, высокочастотные помехи трансформировались в основную полосу частот дискретного сигнала.

Частота дискретизации определяет *скорость обработки сигнала и требуемое быстродействие* АЦП *и процессора* ЦОС. Поэтому в каждом конкретном случае стремятся к ее минимально возможному значению, учитывающему особенности дискретизируемого сигнала и цели его обработки.

Сложность выбора частоты дискретизации в соответствии с общим условием $f_д \geq 2f_m$ связана с неопределенностью или условностью верхней границы спектра реальных аналоговых сигналов f_m.

Особенности выбора частоты дискретизации для различного вида сигналов и задач их обработки подробнее рассмотрены в литературе [2, 3].

1.4. Квантование сигналов по уровню

При квантовании по уровню бесконечное множество возможных значений дискретного сигнала $x(n)$ в заданном максимальном диапазоне его изменения $D_{x\max}= (x_{\max} - x_{\min})$ замещается конечным числом *уровней квантования* m дискретного квантованного сигнала $x_{кв}(n)$. С одним из них в соответствии с определенным правилом или алгоритмом и отождествляется точное мгновенное значение дискретного сигнала $x(n)$ (рис. 1.9).

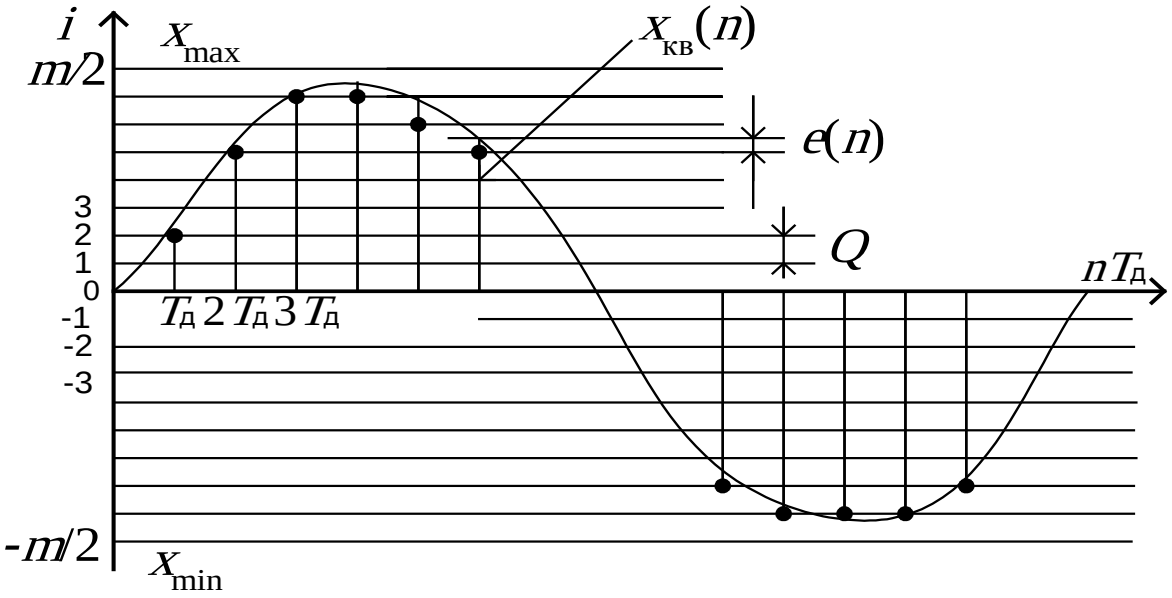


Рис. 1.9. Иллюстрация квантования сигнала по уровню

Интервал между уровнями квантования называется *шагом квантования* по уровню $Q = D_{x\,\max}/m$.

Способы квантования

Квантование возможно *с усечением и с округлением*. Квантованный дискретный сигнал $x_{кв}(n)$ определяется при усечении как

$$x_{кв}(n) = [x(n)/Q]_{цч}Q = iQ\,, \qquad (1.9)$$

при округлении как

$$x_{кв}(n) = [(x(n)/Q) + 0{,}5]_{цч}Q = iQ, \qquad (1.10)$$

где $i = [\cdot]_{цч}$ – это целая часть заключенного в скобки отношения, соответствующая номеру уровня квантования, с которым отождествляется точное значение квантуемого дискретного сигнала: с ближайшим меньшим – при

усечении и ближайшим – при округлении. Для однополярного сигнала $0 \le i \le (m-1)$, для двухполярного $(-m/2) \le i \le (m/2)-1$.

Погрешность квантования

Разность между квантованным и точным значениями дискретного сигнала $e(n) = x_{кв}(n) - x(n)$ определяет погрешность, возникающую при квантовании сигнала по уровню (рис. 1.10, 1.11).

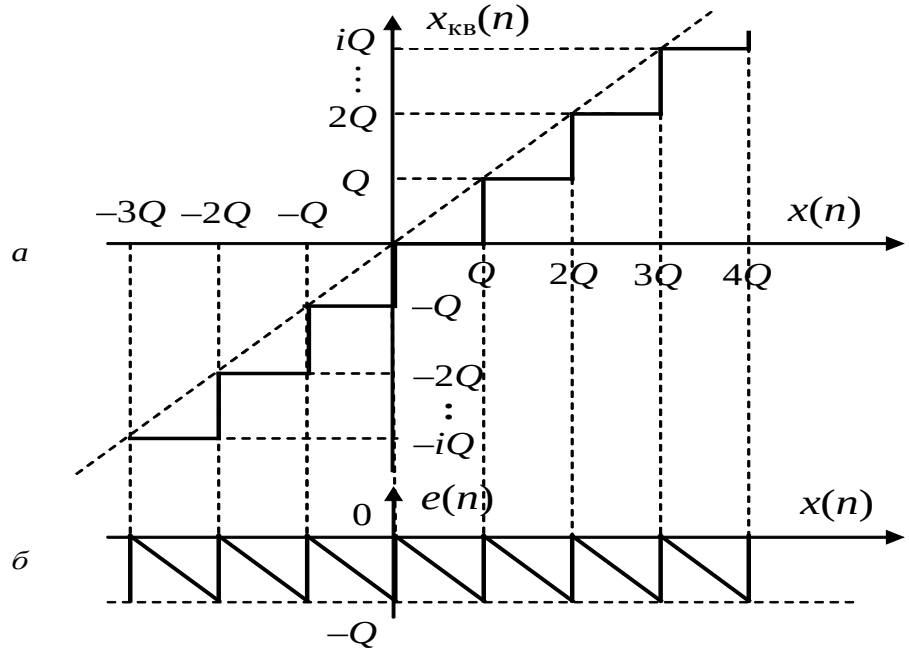


Рис. 1.10. Амплитудная характеристика (*а*) и погрешность квантования с усечением (*б*)

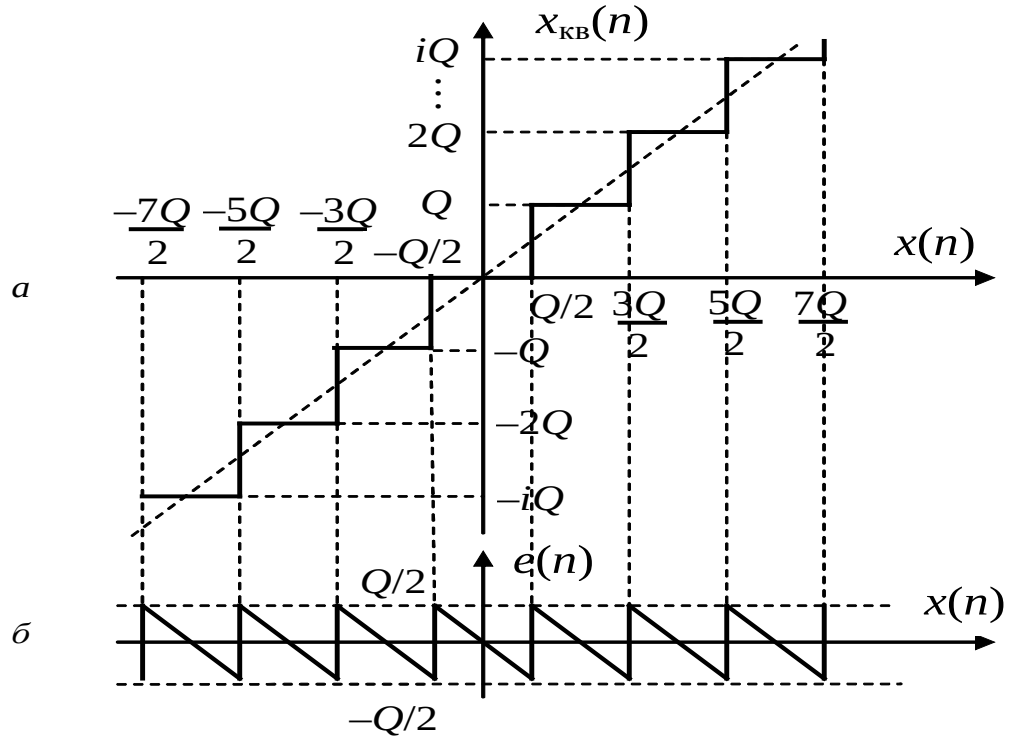
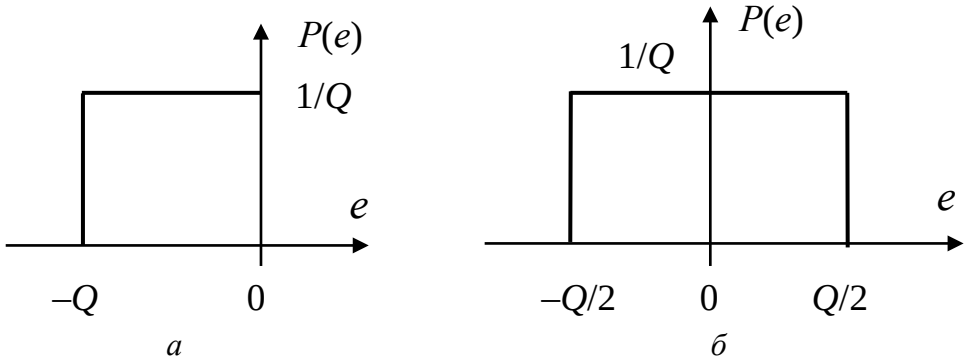


Рис. 1.11. Амплитудная характеристика (*а*) и погрешность квантования с округлением (*б*)

В соответствии с *амплитудной характеристикой квантователя* она принимает значения $-Q < e(n) \le 0$ – при усечении (рис. 1.10, *а*, *б*) и $-Q/2 < e(n) \le Q/2$ – при округлении (рис. 1.11, *а*, *б*). Предельные значения погрешности квантования $E_m = |e(n)|_{\max} = \eta Q$, где $\eta = 1$ при усечении и 1/2 при округлении.

Вследствие *априорной неизвестности* значений сигнала и погрешности квантования ее рассматривают как случайный дискретный процесс или *шум квантования*, накладывающийся на квантуемый дискретный сигнал: $x_{кв}(n) = x(n) + e(n)$ и с равной вероятностью принимающий любые значения в вышеуказанных пределах. На графиках законов распределения шума квантования (рис. 1.12, *а*, *б*) обоим способам квантования соответствует одинаковая плотность вероятностей $p(e) = 1/Q$, отвечающая условию нормировки.



а *б*

Рис. 1.12. Плотности вероятностей шума квантования при усечении (*а*) и округлении (*б*)

Шум квантования характеризуется следующими параметрами:

♦ *математическим ожиданием* $M[e] = \int_{-Q}^{0} ep(e)de = -Q/2$ – при усечении, $M[e] = \int_{-Q/2}^{Q/2} ep(e)de = 0$ – при округлении;

♦ *дисперсией* $D[e] = \int_{-Q/2}^{Q/2} e^2 p(e)de = Q^2/12$ – для обоих способов квантования;

♦ *среднеквадратическим значением* $\sigma_e = Q/\sqrt{12}$.

Спектрально-корреляционные свойства шума квантования существенно зависят от вида и параметров преобразуемого сигнала. В общем случае значения отсчетов шума квантования коррелированы со значениями входного сигнала и между собой. Наиболее высокая степень корреляции наблюдается при детерминированных сигналах и наименьшая – при случайных. К последним относятся реальные речевые, музыкальные сигналы, выходные сиг-

налы измерительных датчиков, а также любые сигналы на входе системы ЦОС с наложенными на них шумами или случайными помехами.

Наложение внешнего шума или помехи с приведенным ко входу АЦП уровнем, превышающим значение единицы младшего разряда Q, существенно декоррелирует или рандомизирует шум квантования [4]. Это позволяет рассматривать шум квантования, возникающий при преобразовании случайного сигнала, как дискретный случайный процесс типа *белый шум с равномерной спектральной плотностью*: $P_{кв}(f) = \sigma^2_{кв} / f_д$.

Повышение частоты дискретизации $f_д$ уменьшает спектральную плотность шума квантования *в основной полосе частот*, позволяя при определенных условиях уменьшить необходимое значение разрядности АЦП, т.е. обменять разрядность сигнала на скорость его обработки [4].

Модель шума квантования с вышеприведенными характеристиками широко используется в теории ЦОС.

При цифровой обработке сигналов в коммуникационных системах применяется также неравномерное квантование, учитывающее статистические свойства сигнала и минимизирующее среднеквадратическое значение шума квантования [5, 6].

1.5. Цифровое кодирование сигнала

Номер уровня квантования i при известном значении шага квантования Q однозначно определяет значение дискретного квантованного сигнала и, следовательно, является его *цифровым* (*числовым*) *эквивалентом*. Представленный в двоичном коде ($i_{(2)}$), он соответствует цифровому сигналу на выходе АЦП $x_ц(n)$. Число двоичных разрядов АЦП $q_{ацп}$ связано с числом уровней квантования m соотношением $q_{ацп} = \log_2 m$. *Например*, для 10-разрядного АЦП $m = 2^{q_{ацп}} = 1024$, для АЦП разрядностью 12 бит – $m = 4096$ и т.д.

Получаемый двоичный код двухполярного АЦП представляет собой целое число со знаком в прямом или дополнительном коде. Такое представление соответствует *целочисленному кодированию* цифрового сигнала. Оно осуществляется в соответствии с алгоритмом

$$x_{ц(цк)}(n) = x_{кв}(n)/Q = [x(n)/Q]_{цч} = i_{(2)}. \qquad (1.12)$$

Разряды целочисленного кода $x_{ц(цк)}(n)$ (рис. 1.13, *а*) имеют веса, убывающие от 2^{q_x} (старший знаковый разряд) до 2^0 (младший разряд); $q_x = q_{ацп} - 1$ – число разрядов или бит цифрового сигнала без учета знакового разряда.

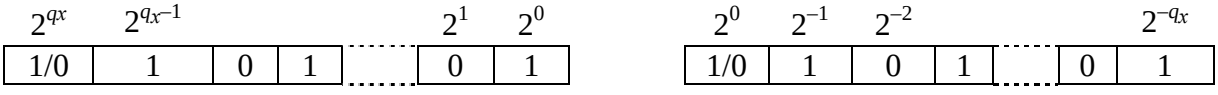
Наряду с целочисленным в цифровой обработке сигналов широко используется представление двоичных чисел правильными дробями – так называемое *дробное кодирование* цифрового сигнала. Оно обеспечивает простое ограничение их разрядности в процессе обработки путем отбрасывания (усечения или округления) лишних младших разрядов.

Дробное кодирование цифрового сигнала

Дробное представление цифрового сигнала АЦП получается в соответствии с алгоритмом

$$x_{\text{ц(дк)}}(n) = [x(n)/Q]_{\text{цч}} / 2^{q_x} = i_{(2)} / 2^{q_x} = x_{\text{ц(цк)}}(n)2^{-q_x}. \qquad (1.13)$$

Значения сигнала при этом не превышают по модулю 1 и заключены в пределах: $-1 \le x_{\text{ц(дк)}}(n) \le 1 - 2^{q_x}$; веса его разрядов убывают от 2^0 (знаковый разряд) до 2^{q_x} (младший значащий разряд) (рис. 1.13, *б*).



а *б*

Рис. 1.13. Целочисленное (*а*) и дробное (*б*) представление цифрового сигнала

Таким образом, дробное и целочисленное представления цифрового сигнала отличаются только интерпретацией весов разрядов двоичного кода и связаны соотношениями

$$x_{\text{ц(дк)}}(n) = x_{\text{ц(цк)}}(n)2^{-q_x}; \quad x_{\text{ц(цк)}}(n) = x_{\text{ц(дк)}}(n)2^{q_x}.$$

Код АЦП при дробном представлении с фиксированной точкой преобразуется к стандартному формату кодов процессора ЦОС (слово, двойное слово, расширенное слово) путем дополнения его справа недостающим числом нулевых бит.

Значение квантованного сигнала в вольтах можно найти по его цифровому коду как $x_{\text{кв}}(n) = x_{\text{ц(цк)}}(n)Q = x_{\text{ц(дк)}}(n)2^{q_x}Q$ (вольт).

Погрешность квантования цифрового сигнала

Цифровой сигнал также характеризуется погрешностью квантования $e_{\text{ц}}(n)$, или *цифровым шумом*, однозначно связанными с погрешностью квантования дискретного сигнала $e(n)$. При целочисленном кодировании $e_{\text{ц}}(n) = e(n)/Q$, при дробном $e_{\text{ц}}(n) = [e(n)/Q]\,2^{q_x}$. Дисперсия шума квантования цифрового сигнала, представленного правильной дробью, определяется как $D[e_{\text{ц}}] = 2^{-2q_x}/12$, среднеквадратическое значение $\sigma_{\text{ец}} = 2^{-q_x}/\sqrt{12}$, предельное значение $E_{\text{ö}m} = 2^{-q_x}$ при усечении и $E_{\text{ö}m} = 2^{-q_x}/2$ при округлении. Спектральная плотность мощности цифрового шума (при оговоренных выше условиях) $P_{\text{ец}} = 2^{-2q_x}/(12\,f_{\text{д}})$ обратно пропорциональна значению частоты дискретизации.

1.6. Условия выбора разрядности АЦП

Рассматриваемые условия и способы выбора разрядности АЦП основываются на допустимых соотношениях погрешности квантования и значения уровней дискретного или цифрового сигналов, т.е. сигналов, отнесенных ко входу квантователя (дискретный) или к выходу АЦП (цифровой). Для дискретных сигналов при этом учитываются характеризующие АЦП максимальный диапазон преобразуемых в код напряжений (0–$U_{\text{пр max}}$) или ($\pm U_{\text{пр max}}/2$) и шаг квантования по уровню $Q = U_{\text{ï ð max}} / 2^{q_{\text{àöï}}}$. Шаг квантования Q называют также *разрешением АЦП*, так как им определяются его чувствительность к малым изменениям преобразуемого сигнала и тот минимальный уровень входного сигнала $U_{\text{пр min}} = Q$, который может быть преобразован в цифровой код.

В соответствии с первым способом, выбор разрядности осуществляется по допустимой относительной погрешности квантования сигнала, приведенной ко входу АЦП: максимальной $\delta_{xm} = E_m/x_{\min}$ или среднеквадратической $\delta_{x\sigma} = \sigma_e/x_{\min}$, где $x_{\min}$ – минимальное значение сигнала на входе АЦП, для которого оценивается относительная погрешность.

Учитывая, что $E_m = \eta Q$ ($\eta = 1$ или $1/2$), $\sigma_e = Q/\sqrt{12}$, можно найти необходимые значения шага квантования Q:

$$Q \le \delta_{xm} x_{\min}/\eta \quad \text{или} \quad Q \le \sqrt{12}\,\delta_{x\sigma} x_{\min}.$$

По ним и определяется требуемая разрядность АЦП:

$$q_{\text{ацп}} \ge [\log_2(U_{\text{пр max}}/Q)]_{\text{цч}} + 1. \qquad (1.14)$$

Для получения минимальной относительной погрешности квантования динамический диапазон сигналов на входе системы ЦОС ($x_{\max} - x_{\min}$) должен быть приведен к динамическому диапазону АЦП путем усиления сигнала в $K_{\text{у}}$ раз: $K_{\text{у}} \le U_{\text{пр max}}/x_{\max}$.

Выбор разрядности АЦП по допустимой относительной погрешности квантования дискретного сигнала используется в измерительных системах ЦОС.

В соответствии со вторым способом, разрядность АЦП находят из допустимого отношения R_p (дБ) мощности сигнала P_x к мощности шума квантования P_e на выходе АЦП [4, 7, 8]:

$$R_p = 10\lg\left(\frac{P_x}{P_e}\right) = 10\lg\left(\frac{\sigma^2_{\tilde{o}\ddot{o}}}{\sigma^2_{\mathring{a}\ddot{o}}}\right) = 20\lg\sigma_{\tilde{o}\ddot{o}} - 10\lg\left(\frac{2^{-2q_x}}{12}\right) =$$
$$= 20\lg\sigma_{x\text{ц}} + 20q_x\lg 2 + 10\lg 12.$$

Учитывая, что $\lg 2 \approx 0{,}3$ и $\lg 12 \approx 1{,}079$, получаем

$$R_p, \text{ дБ} \approx 6q_x + 20\lg\sigma_{x\text{ц}} + 10{,}79. \qquad (1.15)$$

Как видим, *добавление одного разряда АЦП увеличивает отношение сигнал/шум квантования на* 6 дБ. Если действующий на входе сигнал (речевой, музыкальный и др.) рассматривать как случайный с предельным значением $|x_ц|_{max} = 1$, то его среднеквадратическое значение $\sigma_{xц}$ с высокой вероятностью может быть принято равным ≈ 1/(3-4). При $\sigma_{xц} = 1/3{,}5$ имеем

$$20 \lg\sigma_{xц} \approx -10{,}79 \text{ и } R_p, \text{ дБ} = 10 \lg(P_x/P_e) \approx 6q_x.$$

Так, значениям q_x = 9, 11 и 15 бит соответствуют отношения мощностей сигнала и шума квантования R_p = 54, 66 и 90 дБ.

Третьим возможным условием выбора разрядности АЦП является соизмеримость дисперсии σ^2_e шума квантования $e(n)$ с дисперсией действующего совместно с входным сигналом внешнего дискретизированного шума $e_ш(n)$: $\sigma^2_e \approx \sigma^2_ш$. Уменьшение шума квантования ниже этого порога путем увеличения числа двоичных разрядов АЦП не приводит к существенному уменьшению результирующего шума: $\sigma^2_{шΣ} = \sigma^2_e + \sigma^2_ш$ (шумы полагаются независимыми), как и общего отношения сигнал/шум на выходе АЦП. Исходя из равенства $\sigma^2_{кв} = \frac{Q^2}{12} = \sigma^2_ø$, которому соответствует шаг квантования $Q = \sqrt{12}\sigma_ø = \frac{U_{ïðmax}}{2^{q_{àöï}}}$, получаем соотношение для верхней целесообразной границы разрядности АЦП:

$$q_{ацп} \approx \left\{\log_2\left[U_{пр\,max} / \left(\sqrt{12}\sigma_ш\right)\right]\right\}_{цч} + 1. \qquad (1.16)$$

Например, при $\sigma_ш \approx 0{,}04U_{пр\,max}$ $q_{ацп}$ = 4 бита. При малых отношениях сигнал/шум на входе АЦП, близких к единице, применимо весьма грубое квантование, вплоть до бинарного или знакового ($q_{ацп}$ = 1 бит). Оно широко используется в радиотехнических измерительных системах. Чем меньше разрядность АЦП, тем проще его реализация (при бинарном квантовании – это ограничитель или компаратор), тем выше быстродействие и общая достигаемая скорость цифровой обработки сигнала.

Однако наиболее общие оценки необходимой разрядности АЦП находятся по допустимому уровню шума квантования АЦП в выходном сигнале системы ЦОС методами, которые будут рассматриваться далее.

В заключение отметим, что ввиду сложности математического описания цифровых сигналов и систем конечной разрядности в теории ЦОС используют идеализированные *модели* цифрового сигнала и цифровой системы неограниченной точности (разрядности), которые *математически адекватны*, соответственно, дискретному сигналу и дискретной системе [8–11]. Условия адекватности (символ $\underline{\Delta}$) записываются следующим образом:

$$x(n) \,\underline{\Delta}\, x_ц(n) \text{ при } q_x \to \infty; \quad \Phi[x(n)] \,\underline{\Delta}\, \Phi_ц[x_ц(n)] \text{ при } q_r \to \infty, \qquad (1.17)$$

где q_x и q_r – разрядности цифрового сигнала и регистров процессора ЦОС; Ф[·] и $Ф_ц$[·] – операторы обработки дискретной и цифровой систем, которые математически адекватны при большой разрядности процессора ЦОС.

Влияние же конечной разрядности цифровых сигналов и систем учитывают путем оценки погрешности обработки реальной системы ЦОС методами, изложенными ниже (см. лекцию 6).

Контрольные вопросы

1. Какие преобразования имеют место при цифровой обработке сигналов?
2. Что такое дискретный сигнал и дискретная последовательность?
3. Какова природа размножения спектров при дискретизации сигналов по времени?
4. В чем заключаются взаимосвязь и отличие спектров дискретного и аналогового сигналов?
5. Как по известному спектру аналогового сигнала определить спектр соответствующего ему дискретного сигнала?
6. В чем заключается явление наложения спектров при дискретизации сигналов?
7. Можно ли по известному спектру дискретного сигнала найти спектр соответствующего ему аналогового сигнала?
8. Из каких условий выбирается частота дискретизации аналоговых сигналов?
9. Какова математическая модель квантования сигнала по уровню?
10. Как определяется погрешность квантования дискретного квантованного сигнала?
11. Как осуществляется цифровое кодирование сигнала?
12. Как определяется погрешность квантования цифрового сигнала?
13. Из каких условий выбирается необходимая разрядность АЦП?
14. Как определяется автокорреляционная функция и спектральная плотность шума квантования АЦП?
15. При каком условии цифровой и дискретный сигналы математически адекватны?

Лекция 2
Математические описания и характеристики дискретных систем

Дискретная система (математически адекватная цифровой системе *с неограниченной разрядностью и точностью обработки*), как и аналоговая, полностью определяется *математическим оператором*, устанавливающим связь между ее выходным $y(n)$ и входным $x(n)$ сигналами или последовательностями:

$$y(n) = \Phi[x(n)].$$

Оператор системы $\Phi[\cdot]$, *реализуемый аппаратными или программными средствами*, называют *алгоритмом обработки системы*. По виду оператора дискретные системы классифицируются на линейные и нелинейные, инвариантные и неинвариантные ко времени.

В курсе лекций рассматриваются алгоритмы цифровой фильтрации, соответствующие *линейным дискретным системам с постоянными параметрами* (или коэффициентами). Они удовлетворяют принципам *суперпозиции* и *инвариантности* к временному сдвигу [1, 2, 9].

2.1. Методы математического описания линейных дискретных систем во временной области и алгоритмы цифровой фильтрации на их основе

Дискретные линейные системы во временной области математически описываются разностными уравнениями и дискретной временной сверткой, которые являются аналогами дифференциальных уравнений и интеграла свертки аналоговых систем [1].

Разностные уравнения линейных дискретных систем. Рекурсивные и нерекурсивные цифровые фильтры

Разностное уравнение дискретной системы имеет вид

$$\sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^{N} b_l x(n-l). \qquad (2.1)$$

В нем, как и в дифференциальном уравнении, M обозначает порядок уравнения ($M \geq N$), a_k, b_l – его весовые коэффициенты; $x(n-l)$, $y(n-k)$ – входной и выходной сигналы системы, задержанные на l и k отсчетов или периодов дискретизации (т.е. $x[(n-l)T_д]$, $y[(n-k)T_д]$).

Разностное уравнение может быть получено, в частности, дискретизацией по времени дифференциального уравнения аналоговой системы [9].

При $a_0 = 1$ разностное уравнение (2.1) приводится к виду

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N} b_l x(n-l) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k). \qquad (2.2)$$

Устройство (*или программа*), *реализующее разностное уравнение* (2.2) (т.е. выполняющее обработку сигнала в соответствии с разностным уравнением), называется *дискретным*, *или цифровым*, *фильтром* (ЦФ). Сигнал на выходе цифрового фильтра равен сумме текущего отсчета входного сигнала $x(n)$ и предыдущих (N и M) отсчетов входного и выходного сигналов $x(n-l)$, $y(n-k)$, взвешенных (или взятых) с весовыми коэффициентами b_l, $-a_k$ (рис. 2.1). Достигаемое в результате целенаправленное изменение формы, а следовательно, и спектра сигнала отвечает общей задаче частотной фильтрации сигналов

При значениях коэффициентов $a_k \neq 0$ ЦФ называется *рекурсивным* (РФ). Рекурсия означает наличие в фильтре *обратной связи*, т.е. зависимости выходного сигнала $y(n)$ от его предыдущих отсчетов $y(n-k)$ (рис. 2.1).

Разностному уравнению (2.2) с коэффициентами $a_k = 0$ соответствует *нерекурсивный фильтр* (НФ):

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N} b_l x(n-l). \qquad (2.3)$$

Это фильтр *без обратной связи*, его выходной сигнал определяется взвешенной с весами b_l суммой текущего и N предыдущих отсчетов входного сигнала (рис. 2.1, верхний график).

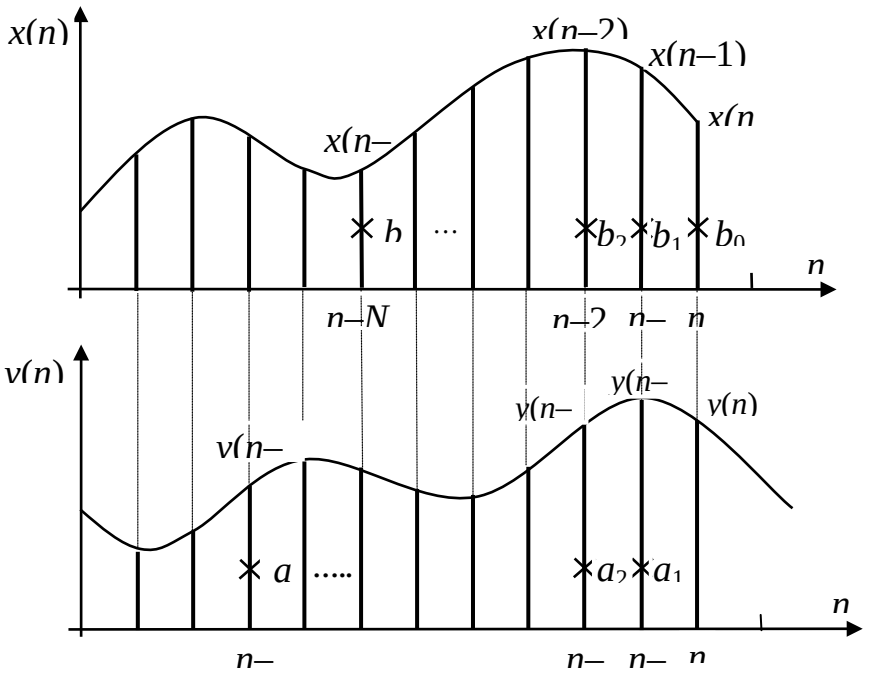


Рис. 2.1. Графическая иллюстрация обработки сигнала в соответствии с разностным уравнением

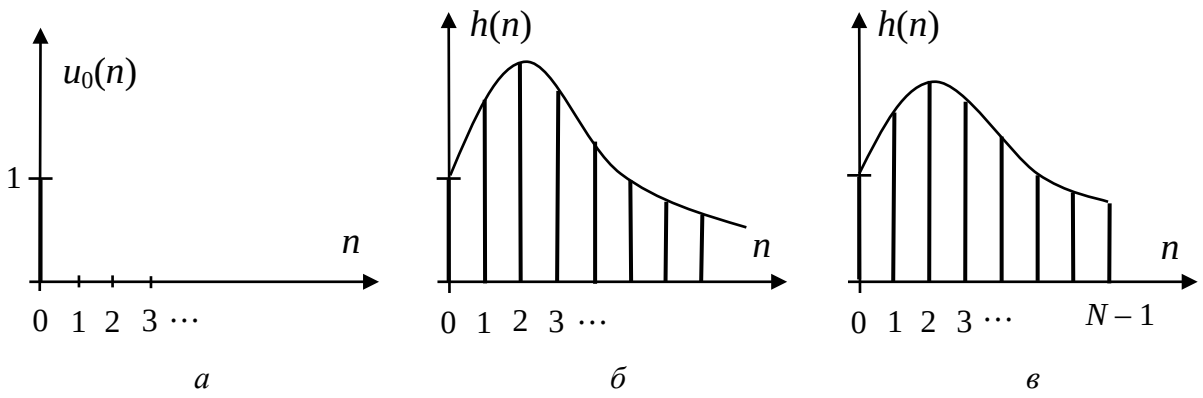


Рис. 2.2. Единичный импульс (*а*) и импульсные характеристики цифровых фильтров БИХ -типа (*б*) и КИХ-типа (*в*)

Дискретная временная свертка. Цифровые фильтры БИХ- и КИХ-типа

Дискретная временная свертка (ДВС) определяется выражением

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m). \qquad (2.4)$$

Входящая в (2.4) дискретная функция $h(m)$ (или $h(n)$) называется *импульсной характеристикой* дискретной системы. Она определяется как отклик дискретной системы на сигнал типа *единичный импульс* $u_0(n) = 1$, $n = 0$ и $u_0(n) = 0$ при $n > 0$: $h(n) = \Phi[u_0(n)]$ (импульсной характеристикой $h(t)$ аналоговой системы является ее реакция на сигнал типа дельта-импульс).

Нижний предел суммирования в (2.4) ($m = 0$) соответствует условию *физической реализуемости системы*: $h(n) = 0$ *при* $n < 0$ (отклик не может опережать воздействие).

Возможны два вида импульсных характеристик ЦФ: бесконечной и конечной длительности (рис. 2.2).

Бесконечную импульсную характеристику имеют *рекурсивные фильтры*, поэтому их называют также БИХ-фильтрами [10]. По импульсной характеристике можно судить об *устойчивости* РФ. Устойчивому РФ отвечает затухающая со временем импульсная характеристика, что математически выражается как

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Нерекурсивные цифровые фильтры относятся к классу КИХ-фильтров, т.е. *фильтров с конечной импульсной характеристикой*. Выражение ДВС (2.4) для НФ имеет конечные пределы суммирования, определяемые длиной импульсной характеристики N:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)\,. \qquad (2.5)$$

Это значит, что ДВС можно непосредственно использовать в качестве алгоритма обработки при реализации НФ. Для РФ это невозможно ввиду бесконечной длины их импульсной характеристики и требуемого по этой причине бесконечно большого объема вычислений.

Из сопоставления выражений (2.3), (2.5) следует, что значения импульсной характеристики в (2.5) тождественны коэффициентам b_l в (2.3): $h(n) = b_l|_{n=l}$, т.е. являются *коэффициентами разностного уравнения* НФ.

2.2. Методы математического описания сигналов дискретных систем на комплексной плоскости (в частотной области)

Математическое описание дискретных (как и аналоговых) систем на комплексной плоскости (в частотной области) основывается на соответствующих математических описаниях их сигналов.

Аналоговые сигналы на комплексной плоскости (в частотной области) описываются преобразованием Лапласа

$$X_{\text{a}}(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt, \qquad (2.6)$$

которое является функцией комплексного оператора (комплексной частоты) $p = \sigma + j\omega$, и преобразованием Фурье, которое соответствует преобразованию Лапласа, вычисленному вдоль мнимой оси $j\omega$ (оси частот):

$$X_{\text{a}}(j\omega) = X_{\text{a}}(p)\Big|_{p=j\omega} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Для дискретных сигналов также существует преобразование Лапласа, получаемое из (2.6) путем его дискретизации по времени:

$$X_{\text{д}}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{д}}(nT_{\text{д}})\, e^{-pnT_{\text{д}}}\,. \qquad (2.7)$$

Z-преобразование дискретных сигналов

В отличие от аналоговых сигналов и систем преобразование Лапласа не приводит к рациональным функциям (алгебраическим уравнениям) при математическом описании дискретных сигналов и систем на комплексной *P*-плоскости. Этому важнейшему условию отвечает *Z-преобразование* дискретных сигналов, определяемое выражением

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}. \qquad (2.8)$$

Комплексная переменная z в (2.8) связана с переменной p (оператором Лапласа) соотношением

$$z = e^{pT_д} = a + jb = e^{\sigma T_д} e^{j\omega T_д}. \qquad (2.9)$$

Эта связь иллюстрируется отображениями точек из комплексной P-плоскости на комплексную Z-плоскость (рис. 2.3).

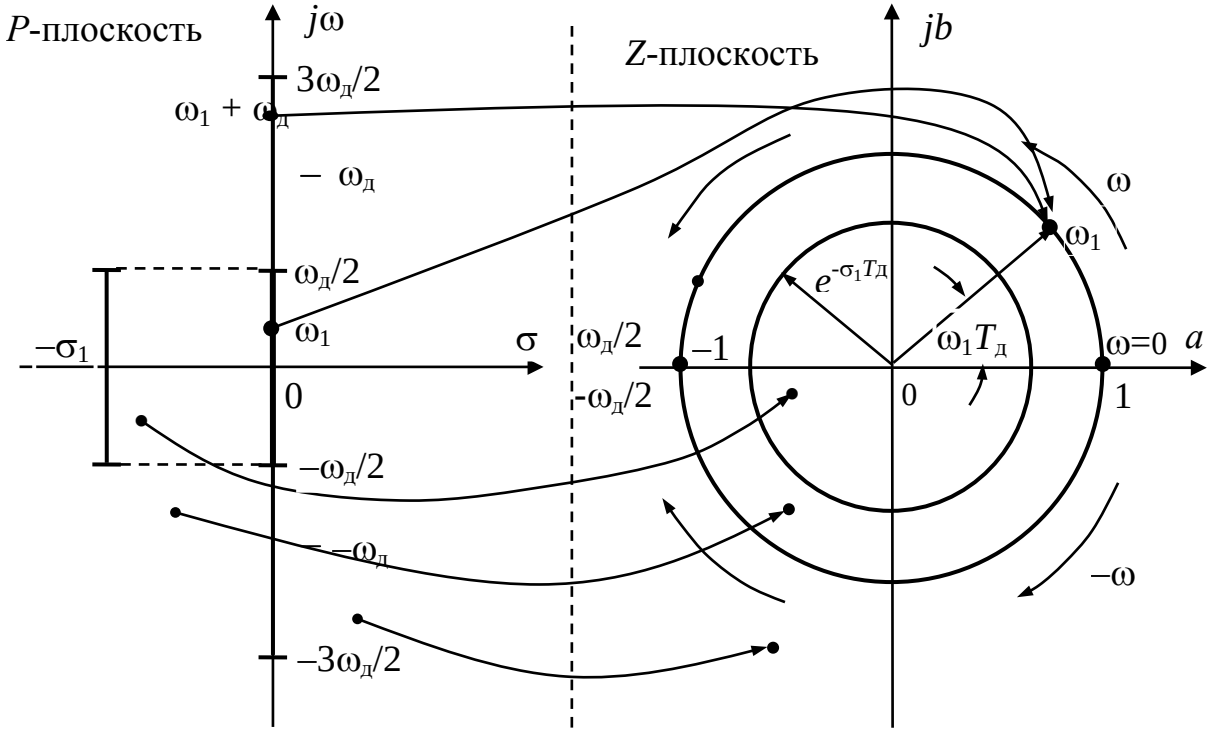


Рис. 2.3. Отображения точек с комплексной P-плоскости на Z-плоскость

Особенность этих отображений заключается в их цикличности по переменной ω, обусловленной периодичностью комплексной экспоненты $e^{j\omega T_д}$ с периодом $\omega_д$:

$$z = e^{\sigma T_д} e^{j\omega T_д} = e^{\sigma T_д} e^{j[\omega + k\omega_д]T_д},\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \text{ и т.д.}$$

Так, точки мнимой оси $j\,\omega$ P-плоскости ($\omega = 0$) циклически переносятся на окружность единичного радиуса Z-плоскости $e^{j\omega T_д}$, являющуюся *осью частот* на Z-плоскости; каждой полосе частот шириной $\omega_д$ при этом соответствует один обход этой окружности. Однозначное отображение точек имеет место в основной полосе частот $\pm\,\omega_д/2$. Левая P-полуплоскость ($\omega < 0$) свертывается внутрь круга единичного радиуса Z-плоскости, а правая P-полуплоскость ($\omega > 0$) отображается за его пределы.

Z-преобразование, вычисленное на единичной окружности, приводит к *преобразованию Фурье* дискретного сигнала (1.2), определяющему его спектр:

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega T_Д}} = X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n T_Д}. \qquad (2.10)$$

Следует отметить, что *Z*-преобразование, как и преобразование Лапласа, может быть односторонним – для последовательностей $x(n) = 0$ при $n < 0$ и двусторонним, если $x(n) \neq 0$ при $n < 0$; в этом случае пределы суммирования по n берутся от $-\infty$ до $+\infty$ [9, 10].

Свойства *Z*-преобразования дискретных сигналов

Рассмотрим наиболее важные свойства *Z*-преобразования.

♦ *Линейность* – Z-преобразование суммы равно сумме *Z*-преобразований:

$$Z\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z). \qquad (2.11)$$

♦ *Задержка* – Z-преобразование задержанного на m отсчетов дискретного сигнала $x(n - m)$ равно произведению *Z*-образа $X(z)$ незадержанного сигнала $x(n)$ на множитель задержки z^{-m}:

$$Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-(n-m)}z^{-m} = z^{-m}X(z). \qquad (2.12)$$

Этим свойством объясняется использование символа z^{-m} для обозначения элемента задержки на структурных схемах систем ЦОС. В частности, элемент задержки на один отсчет, т. е. период дискретизации, обозначается как z^{-1}: $Z\{x(n-1)\} = z^{-1}X(z)$.

♦ *Свертка* – *Z*-преобразование свертки двух последовательностей равно произведению *Z*-преобразований этих последовательностей:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m);$$
$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)z^{-(n-m)}z^{-m} = X_1(z)X_2(z). \qquad (2.13)$$

♦ *Произведение* – *Z*-преобразование произведения двух последовательностей равно комплексной свертке *Z*-образов этих последовательностей:

$$y(n) = x_1(n)x_2(n); \quad Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2(z/v)\frac{dv}{v}, \qquad (2.14)$$

где v – переменная интегрирования; C – контур интегрирования, охватывающий все особые точки подынтегральной функции.

На основе свойства (2.14) доказывается важное для практики равенство Парсеваля, имеющее тот же смысл, что и для аналоговых сигналов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT_д)|^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)X(z^{-1})z^{-1}dz = \frac{T_д}{\pi}\int_0^{\omega_д/2} |X(j\omega)|^2\, d\omega.$$

Оно означает тождественность временной и частотной оценок энергии сигнала (для приведения к размерности энергии [В^2·с] левые и правые части этого равенства умножаются на $T_д$).

Справедливо также предельное соотношение: $x(0) = \lim X(z)$, $z \to \infty$ [8].

Аналогичными Z-преобразованию свойствами обладает и преобразование Фурье дискретных сигналов.

Существует также и обратное Z-преобразование, используемое при анализе дискретных сигналов и систем [2, 3, 9, 10]:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz. \qquad (2.15)$$

2.3. Тестовые последовательности дискретных систем

Приводимые дискретные последовательности включают тестовые (испытательные) сигналы систем ЦОС, используемые при их анализе и исследовании.

♦ Единичный импульс $u_0(n) = \begin{cases}1, & n = 0\\ 0, & n \neq 0\end{cases}$ – имеет Z-образ $U_0(z) = 1$ и равномерную спектральную плотность $U_0(j\omega) = 1$. Для дискретных систем он имеет такое же значение, как и дельта-импульс для аналоговых. *Откликом* на него является *импульсная характеристика* дискретной системы.

♦ Единичный импульс, задержанный на m отсчетов,

$$u_0(n-m) = \begin{cases}1, & n = m\\ 0, & n \neq m\end{cases}.$$

С учетом свойства задержки его Z- и F (Фурье)-образы имеют вид

$$Z\{u_0(n-m)\} = z^{-m};\ F\{u_0(n-m)\} = e^{-j\omega m T_д}.$$

Любая дискретная последовательность может быть представлена ее дискретной сверткой с единичным импульсом $u_0(n)$: $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n-m)$.

♦ Единичный скачок $u_1(n) = \begin{cases}1, & n \geq 0\\ 0, & n < 0\end{cases}$ (функция включения). Его Z-образ $U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1/(1-z^{-1}) = z/(1-z)$ является суммой бесконечного

числа членов геометрической прогрессии z^{-n}. Z-образу единичного скачка соответствует его спектральная плотность

$$U_1(j\omega) = U_1(z)\Big|_{z=e^{j\omega T_д}} = 1/(1-e^{-j\omega T_д}),$$

особенности которой рассматриваются в [2, 3].

Откликом дискретной системы на сигнал $u_1(n)$ является *ее переходная характеристика*.

♦ Прямоугольный импульс конечной длительности

$$u_N(n) = 1,\ 0 \le n \le N-1, \quad u_N(n) = 0 \text{ других } n.$$

Его Z-образ

$$U_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = (1-z^{-N})/(1-z^{-1})$$

равен сумме конечного числа членов геометрической прогрессии:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} a^i = (1-a^N)/(1-a).$$

К этому же результату можно прийти, представив сигнал $u_N(n)$ в виде $u_N(n) = u_1(n) - u_1(n-N)$, что в Z-области означает:

$$U_N(z) = U_1(z) - z^{-N}U_1(z) = (1-z^{-N})/(1-z^{-1}).$$

Спектральная плотность импульса определяется выражением

$$U_N(j\,\omega) = (1-e^{-j\omega NT_д})/(1-e^{-j\omega T_д}) =$$

$$= \frac{e^{-j\omega NT_д/2}(e^{j\omega NT_д/2} - e^{-j\omega NT_д/2})}{e^{-j\omega T_д/2}(e^{j\omega T_д/2} - e^{-j\omega T_д/2})} = = e^{-j\omega(N-1)T_Д/2} \cdot \frac{\sin(\omega NT_д/2)}{\sin(\omega T_д/2)}.$$

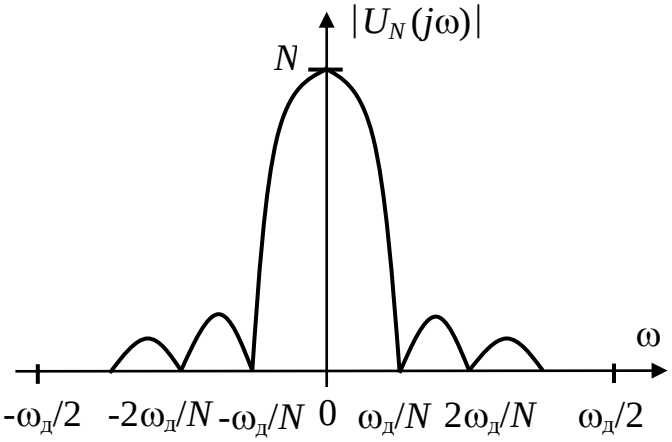


Рис. 2.4. График модуля спектра дискретного импульса конечной длительности

График модуля спектра $|U_N(j\omega)| = |\sin(\omega NT_д/2)/\sin(\omega T_д/2)|$ показан на рис. 2.4.

Он соответствует дискретной функции sin *c* и имеет следующие значения в характерных точках:

$$|U_N(j\omega)| = N, \ \omega = 0;$$
$$|U_N(j\omega)| = 0, \ \omega = 2\pi i / NT_{\text{д}} = i\omega_{\text{д}} / N, \ i = 1, \ 2, ..., \ N-1.$$

Сигнал применяется для анализа переходных процессов в апериодических дискретных системах.

2.4. Передаточная функция и частотная характеристика дискретной системы

Передаточная функция аналоговой системы определяется отношением преобразований Лапласа ее выходного и входного сигналов: $H(p) = Y(p)/X(p)$. Операторное представление описывающих такие системы дифференциального уравнения и интеграла свертки дает общие выражения для передаточных функций аналоговых систем, соответственно, в виде дробно-рациональной функции комплексной переменной p:

$$H(p) = \sum_{l=0}^{N} b_l p^l / \sum_{k=0}^{M} a_k p^k = B(p)/A(p) \qquad (2.16)$$

и в виде преобразования Лапласа импульсной характеристики системы $h(t)$:

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt. \qquad (2.17)$$

Корням полиномов числителя $B(p) = 0$ и знаменателя $A(p) = 0$ передаточной функции (2.16) соответствуют нули p_{0i} и полюсы p_{pi} системы, через которые передаточная функция представляется в так называемой нуль–полюсной форме:

$$H(p) = C\prod_{i=1}^{M}(p - p_{0i})/(p - p_{pi}), \qquad (2.18)$$

где C – нормирующая константа.

По передаточной функции аналоговой системы непосредственно находится ее частотная характеристика:

$$H_a(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega) = H(p)|_{p = j\omega},$$

которая в соответствии с (2.17) выражается и как Фурье-преобразование ее импульсной характеристики:

$$H_a(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Передаточной функцией дискретной системы называется *отношение Z-образов выходного и входного сигналов системы:*

$$H(z) = Y(z)/X(z). \qquad (2.19)$$

Конкретные ее выражения, получаемые *Z*-преобразованием разностных уравнений (2.1), (2.2), имеют при таком определении вид дробно-рациональной или целой рациональной функций. В результате решение разностного уравнения дискретной системы заменяется более простым решением алгебраических уравнений, описывающих ее передаточную функцию (аналогично операторному методу решения дифференциальных уравнений для аналоговых систем). По известной передаточной функции системы $H(z)$ и *Z*-преобразованию входного сигнала $X(z)$ путем обратного *Z*-преобразования их произведения можно аналитически найти отклик системы на заданное входное воздействие:

$$y(n) = Z^{-1}\{H(z)Z[x(n)]\}.$$

Из *Z*-преобразования левых и правых частей ДВС (2.4)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)z^{-n} = H(z)X(z)$$

следует, что передаточная функция дискретной системы является *Z*-преобразованием ее импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}. \qquad (2.20)$$

Импульсная характеристика системы соответствует, в свою очередь, обратному *Z*-преобразованию ее передаточной функции:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C H(z)z^{n-1}dz. \qquad (2.21)$$

Частотная характеристика дискретной системы, определяемая отношением Фурье-образов выходного и входного сигналов, с учетом связи между *Z*- и Фурье-преобразованиями (2.10) находится по передаточной функции системы $H(z)$ простой заменой z на $e^{j\omega T_д}$:

$$H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega T_д}}. \qquad (2.22)$$

С учетом этой же связи из (2.20) следует, что частотная характеристика дискретной системы, как и аналоговой, является Фурье-преобразованием ее импульсной характеристики:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega nT_д}, \qquad (2.23)$$

а импульсная характеристика – обратным преобразованием Фурье частотной характеристики:

$$h(n) = \frac{T_д}{2\pi} \int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} H(j\omega) e^{j\omega n T_д} d\omega. \qquad (2.24)$$

Рассмотрим особенности частотных характеристик дискретных систем.

Легко заметить, что как Фурье-образы дискретных сигналов, так и частотные характеристики дискретной системы (2.22), (2.23) представляют собой функции относительной или нормированной частоты $\omega = \omega T_д = 2\pi f/f_д$, называемой также *цифровой частотой*. Значениям круговой частоты ω в пределах $(0–\omega_д)$ и $(-\omega_д/2 – \omega_д/2)$ соответствуют значения цифровой частоты λ в пределах $(0–2\pi)$ и $(-\pi–\pi)$. Частотная характеристика дискретной системы как функция цифровой частоты λ определяется выражениями:

$$H(j\lambda) = Y(j\lambda)/X(j\lambda) = H(z)\big|_{z=e^{j\lambda}}; \qquad (2.25)$$

$$H(j\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\lambda n}. \qquad (2.26)$$

Заданная таким образом частотная характеристика не зависит от значения частоты дискретизации $\omega_д$, а соответствующая ей импульсная характеристика имеет период дискретизации $T_д = 1$.

Полезно и еще одно возможное представление частотной характеристики в виде отношения мгновенных значений выходного и входного комплексных гармонических сигналов системы в установившемся режиме:

$$H(j\omega) = y(n)/x(n) \text{ при } x(n) = e^{j\omega n T_д}.$$

Модуль и аргумент частотной характеристики дискретной системы, представленной в показательной форме: $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, обладают свойством четной и нечетной симметрии: $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$ и $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ и называются, соответственно, *амплитудно-частотной* (АЧХ) *и фазочастотной* (ФЧХ) *характеристиками системы*. Это же относится и к реальной и мнимой частям комплексной частотной характеристики, первая из которых является четной функцией частоты, а вторая – нечетной.

Из определения частотной характеристики дискретной системы как преобразования Фурье импульсной характеристики (2.23), (2.26) следует также свойство ее *периодичности* с периодом по частоте $\omega_д$ или 2π (рис. 2.5). Оно присуще Фурье-преобразованиям любых дискретных последовательностей. Математически это объясняется периодичностью комплексной экспоненты $e^{j\omega n T_д} = e^{j(\omega + k\omega_д) n T_д} = e^{j(\lambda + 2\pi k) n}$:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j(\omega + k\omega_д) n T_д} = H[j(\omega + k\omega_д)]$$

или

$$H(j\omega) = H[j(\lambda + 2\pi k)],$$

где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

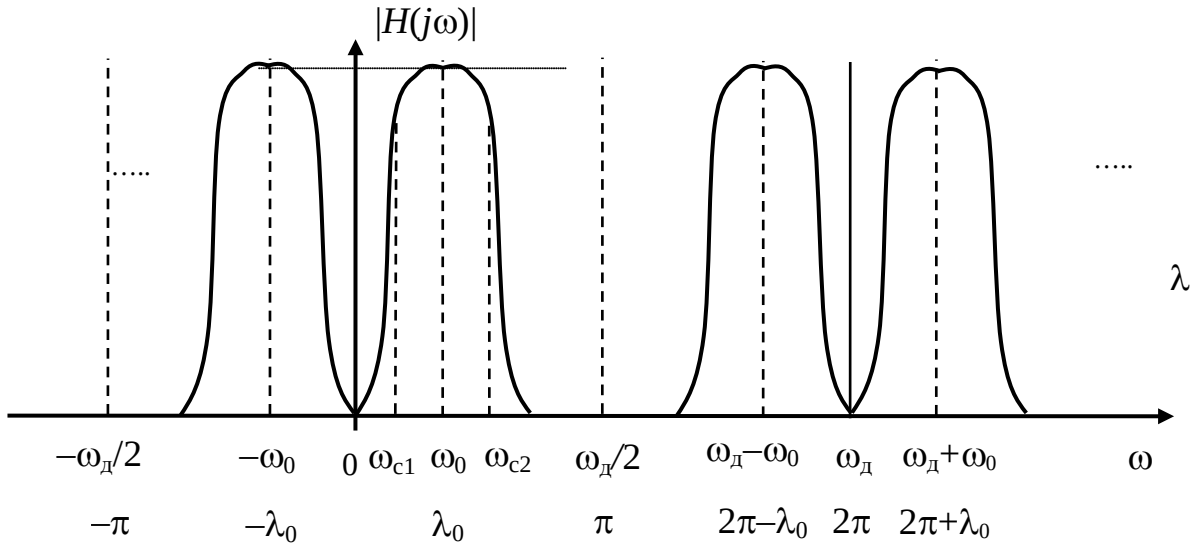


Рис. 2.5. Примерный вид АЧХ цифрового полосового фильтра

При математическом анализе и синтезе цифровых фильтров учитывается *один период их частотной характеристики в основной полосе частот от* 0 *до* $\pm\omega_д/2$. Требования к ЦФ и технические описания их характеристик приводятся, как и для аналоговых фильтров, только для реальных положительных частот, в данном случае в диапазоне $(0–\omega_д/2)$.

Зависимость частотной характеристики ЦФ *от частоты дискретизации сигнала*, отождествляемой с частотой дискретизации импульсной характеристики фильтра, является еще одной важной для понимания особенностью частотных свойств таких фильтров. Изменение частоты дискретизации с $\omega_д$ на $\omega'_д$ изменяет масштаб частотной характеристики $H(j\omega)$ по обеим осям в $\alpha = \omega'_д/\omega_д$ раз, пропорционально сжимая или растягивая частотную характеристику ЦФ (это отвечает одному из свойств преобразования Фурье [1]).

Частотной характеристике $H(j\omega') = \alpha H(j\alpha\omega)$ соответствуют новые значения граничных и центральных частот ЦФ ω'_i, связанные с их исходными значениями ω_i (например, ω_0, ω_{c1}, ω_{c2} на рис. 2.5) соотношением $\omega'_i = \alpha\omega_i$. Следовательно, с изменением частоты дискретизации сигнала частотная характеристика ЦФ автоматически перестраивается к новому значению частоты дискретизации.

Как показано выше, от абсолютного значения частоты дискретизации $\omega_д$ не зависит частотная характеристика ЦФ, заданная функцией цифровой

частоты λ:$H(j\lambda) = H(j\omega T_д)$. Это означает, что ЦФ с центральной частотой λ_0 частотной характеристики $H(j\lambda)$ будет откликаться на дискретные сигналы с частотами $\omega_{0i} = \lambda_0 f_{дi}$, соответствующими различным значениям частот дискретизации $f_{дi}$ этих сигналов.

Таким образом, *периодичность, зависимость от частоты дискретизации и конечный верхний предел граничной частоты, равный* $\omega_д/2$, принципиально отличают частотные характеристики дискретных систем и цифровых фильтров от аналоговых.

Контрольные вопросы

1. В соответствии с каким алгоритмом и как осуществляется обработка сигнала рекурсивным и нерекурсивным фильтрами?
2. Что понимается под импульсной характеристикой дискретной системы?
3. Какие фильтры называются фильтрами БИХ и КИХ-типа?
4. Что является коэффициентами нерекурсивных фильтров?
5. Какое преобразование применяют для описания дискретных сигналов и систем на комплексной плоскости и почему?
6. Какова связь между Z-преобразованием и преобразованием Фурье?
7. Как определяются передаточная функция и частотная характеристика дискретной системы?
8. Какова связь между передаточной функцией, частотной и импульсной характеристиками дискретной системы?
9. Каковы особенности частотных характеристик дискретных систем?
10. Как изменяется частотная характеристика дискретной системы при изменении частоты дискретизации?

Т Е М А 2
РЕКУРСИВНЫЕ И НЕРЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ. МЕТОДЫ СТРУКТУРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ И СИНТЕЗА

Л е к ц и я 3.
Характеристики и структуры цифровых фильтров

В предыдущей лекции даны общие определения передаточной функции линейных дискретных систем. В соответствии с ними могут быть получены выражения для передаточных функций дискретных систем конкретного вида – рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров. По передаточным функциям, представляемым в различной форме, находятся соответствующие им структурные схемы цифровых фильтров и их математические алгоритмы обработки. На основе передаточной функции определяются и частотные характеристики рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров.

3.1. Передаточные функции рекурсивных фильтров

Передаточные функции цифровых фильтров находятся с помощью *Z*-преобразования разностных уравнений или дискретной временной свертки, которыми дискретные системы описываются во временной области.

Передаточные функции рекурсивных фильтров, получаемые на основе разностных уравнений

Рекурсивный фильтр (РФ) реализует алгоритм обработки, определяемый разностным уравнением (2.4). Выполним *Z*-преобразование левых и правых частей (2.2), учитывая свойства линейности и задержки *Z*-преобразования (2.11), (2.12):

$$Y(z)=\sum_{l=0}^{N} b_l z^{-l} X(z)-\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k} Y(z).$$

Переходя к отношению $Y(z)/X(z)$, получим общее выражение для передаточной функции рекурсивного фильтра:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{l=0}^{N} b_l z^{-l}}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}}=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \qquad (3.1)$$

Оно представляет отношение двух полиномов порядка N и M ($M \geq N$) по степеням комплексной переменной z^{-1}. Его можно рассматривать и как произведение двух передаточных функций: $H_н(z) = B(z^{-1})$ – нерекурсивной части и $H_р(z) = 1/A(z^{-1})$ – рекурсивной части фильтра, т.е. $H(z) = H_н(z)H_р(z)$.

Выражение передаточной функции (3.1) относительно переменной z^{-1}, которая, как показано выше, отражает задержку на один период дискретизации, удобно тем, что по нему можно формально составить разностное уравнение системы, определяющее ее алгоритм обработки.

Например, передаточной функции $H(z) = b_0/(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})$ отвечает разностное уравнение $y(n) = b_0x(n) - a_1y(n - 1) - a_2y(n - 2)$. Очевидно, что столь же формальным способом, основанном на сопоставлении разностного уравнения (2.2) и передаточной функции (3.1), можно непосредственно записать выражение для передаточной функции системы по ее известному разностному уравнению, не прибегая, как выше, к его Z-преобразованию. Знание этой взаимосвязи полезно и для рассматриваемого далее структурного представления дискретных систем, которое может быть выполнено как по разностному уравнению, так и по передаточной функции.

При анализе цифровых фильтров передаточную функцию (3.1) выражают также в виде отношения полиномов $B(z)$ и $A(z)$ по положительным степеням переменной z. Для этого достаточно числитель и знаменатель (3.1) умножить на z^M:

$$H(z) = z^{M-N}\frac{\sum_{l=0}^{N} b_l z^{N-l}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{M-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \qquad (3.2)$$

Передаточные функции рекурсивного фильтра в форме (3.1), (3.2) обычно представляют обобщенно отношением двух полиномов $B(z)$, $A(z)$ или $B(z^{-1})$, $A(z^{-1})$ одинакового порядка $N = M$:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \left(\sum_{l=0}^{M} b_l z^{M-l}\right) / \left(\sum_{k=0}^{M} a_k z^{M-k}\right) = B(z)/A(z); \qquad (3.3)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \qquad (3.4)$$

Передаточные функции (3.1), (3.2) с $N < M$ приводятся к (3.3), (3.4) приравниванием нулю коэффициентов b_l при $N < l \leq M$.

В приведенных выше вариантах *полиномиальной формы* представления передаточной функции коэффициенты полиномов b_0 и a_0 (при $l = k = 0$) играют масштабирующую роль и без потери общности могут быть положены равными единице.

По передаточной функции (3.3), представленной по положительным степеням переменной z, находятся ее *нули* и *полюсы*, играющие главную роль при синтезе и анализе рекурсивных фильтров.

Нули и полюсы передаточной функции. Нуль–полюсная форма передаточной функции

Нули передаточной функции являются корнями числителя (3.3), т.е. значениями переменной z, обращающими в нуль полином $B(z)$:

$$B(z) = 0 \text{ при } z = z_{0i} = | z_{0i} | e^{j\omega_{0i} T_д} = | z_{0i} | e^{j\lambda_{0i}},$$

где $|z_{0i}|$ – модуль, ω_{0i} – круговая частота и λ_{0i} – цифровая частота нуля.

Полюсы соответствуют корням знаменателя передаточной функции

$$A(z) = 0 \text{ при } z = z_{pi} = | z_{pi} | e^{j\omega_{pi} T_д} = | z_{pi} | e^{j\lambda_i};$$

$|z_{pi}|$, ω_{pi}, λ_{pi} являются модулем и круговой и цифровой частотами полюса. Индекс i означает номер нуля и полюса: $i = 1, 2, \ldots, M$, а M – число их, равное порядку фильтра. Цифровые фильтры с вещественными коэффициентами b_l, a_k имеют вещественные (в частном случае нулевые) и/или комплексно-сопряженные нули и полюсы. Нули и полюсы могут быть простыми и кратными. Если порядок числителя передаточной функции N меньше порядка знаменателя M, то такой фильтр имеет $(M - N)$ нулей, равных нулю, т.е. размещенных в начале координат комплексной Z-плоскости.

Зная нули и полюсы передаточной функции, ее можно представить в так называемой *нуль-полюсной форме*, используя разложение полиномов числителя и знаменателя на элементарные сомножители:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{M} \frac{(z - z_{0i})}{(z - z_{pi})} = \prod_{i=1}^{M} \frac{(1 - z_{0i} z^{-1})}{(1 - z_{pi} z^{-1})}. \qquad (3.5)$$

В выражении (3.5) может присутствовать нормирующий множитель $C = b_0/a_0$, если коэффициенты b_0, a_0 передаточной функции не равны единице.

Разложением на элементарные (простые) дроби передаточная функция (3.3) может быть представлена в виде суммы простых дробно-рациональных функций [2, 8, 9]. Такое представление облегчает поиск аналитических выражений для импульсных характеристик РФ [2], а также используется для их реализации.

3.2. Частотные характеристики рекурсивных фильтров

Частотную характеристику РФ можно получить на основе любого из выражений его передаточной функции $H(z)$ – дробно-полиномиального (3.1), (3.3), (3.4), нуль–полюсного (3.5) или разложения на элементарные дроби, используя замену $z = e^{j\omega T_д}$.

Передаточной функции (3.1) соответствует частотная характеристика РФ вида

$$H(j\omega) = \sum_{l=0}^{N} b_l e^{-j\omega l T_д} / \left(1 + \sum_{k=1}^{M} a_k e^{-j\omega k T_д}\right). \qquad (3.6)$$

Преобразование (2.6) к показательной форме

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$$

приводит к аналитическим выражениям для модуля |H($j\omega$)| и аргумента $\varphi(\omega)$ частотной характеристики, т.е. к АЧХ и ФЧХ [9, 10].

Передаточной функции РФ в нуль–полюсной форме (3.5) отвечает выражение для ЧХ, указывающее способ ее графоаналитического вычисления:

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^{M} \frac{(e^{j\omega T_д} - |z_{0i}|\, e^{j\omega_{0i} T_д})}{(e^{j\omega T_д} - |z_{pi}|\, e^{j\omega_{pi} T_д})} = \prod_{i=1}^{M} \frac{R_{0i}(j\omega)}{R_{pi}(j\omega)}. \qquad (3.7)$$

Числитель и знаменатель (3.7) представляют векторные расстояния R_{0i}, R_{pi} от точки на единичной окружности с угловой координатой $\omega T_д$ соответственно до нулей z_{0i} и полюсов z_{pi} РФ. Переход к модулю и аргументу (3.7) дает выражения для АЧХ и ФЧХ РФ в виде

$$|H(j\omega)| = \prod_{i=1}^{M} |R_{0i}| \Big/ \prod_{i=1}^{M} |R_{pi}|; \qquad (3.8)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{M} \psi_{0i} - \sum_{i=1}^{M} \psi_{pi}, \qquad (3.9)$$

где $|R_{0i}|$, $|R_{pi}|$ – длины векторов $R_{0i}(j\omega)$, $R_{pi}(j\omega)$; ψ_{0i}, ψ_{pi} – углы, образуемые ими с осью абсцисс.

Расположив нули и полюсы на комплексной Z-плоскости (рис. 3.1) и измерив модули и углы векторов, соединяющих их с точкой на единичной окружности, соответствующей заданной частоте $\omega T_д$ или λ (например, с точкой A на рис. 3.1), с помощью (3.8), (3.9) можно вычислить АЧХ и ФЧХ фильтра для любых значений частоты сигнала в диапазоне $(0 – \omega_д/2)$.

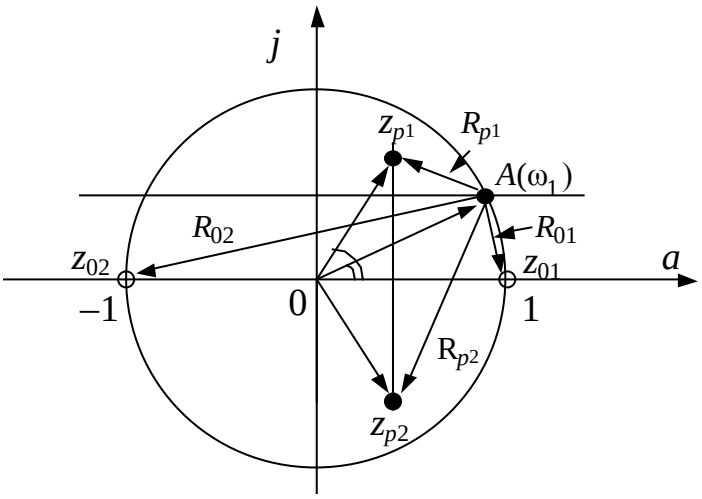


Рис. 3.1. Картина нулей и полюсов ЦФ

Такой графический способ очень удобен для качественной оценки вида частотной характеристики и частотных свойств РФ по значениям его нулей и полюсов. В соответствии с (3.8) и рис. 3.1, частотам $\omega = \omega_{pi}$ минимального расстояния до полюсов $R_{pi\ \min}$ отвечают максимальные значения АЧХ или коэффициента передачи РФ, частотам $\omega = \omega_{0i}$ минимального расстояния до нулей $R_{0i\ \min}$ – минимальные значения коэффициента передачи фильтра.

Таким образом, *положение полюсов* определяет *полосу пропускания частотной характеристики фильтра, а положение нулей – ее полосу задерживания.*

Располагая должным образом нули и полюсы на комплексной *Z*-плоскости и оптимизируя их значения, можно синтезировать РФ с заданной частотной характеристикой, в том числе и произвольного вида. *С помощью нулей,* размещаемых на единичной окружности, при этом формируются *частоты бесконечного затухания* АЧХ.

По картине нулей и полюсов на комплексной плоскости судят также об *устойчивости* РФ. Полюсы устойчивого РФ, не превышающие по модулю единицу ($|z_{pi}| < 1$), находятся внутри круга единичного радиуса. Для устойчивого аналогового фильтра полюсы находятся в левой *P*-полуплоскости, которая (см. рис. 2.3) при *Z*-преобразовании отображается внутрь круга единичного радиуса.

Минимально-фазовой называют дискретную систему, у которой все нули и полюсы передаточной функции размещаются на Z-плоскости внутри единичной окружности [12]. Нулям, превышающим по модулю единицу, отвечают цифровые фильтры *неминимально-фазового типа*, используемые в качестве амплитудных и фазовых корректоров [2, 3].

Для расчета АЧХ и ФЧХ используются аналитические выражения, получаемые на основе передаточной функции РФ, соответствующей его конкретной форме реализации.

3.3. Формы реализации рекурсивных фильтров

Рекурсивные фильтры осуществляют обработку сигнала в соответствии с разностным уравнением. Основными формами их реализации являются прямая, каноническая, каскадная и параллельная. Разностные уравнения включают вычислительные операции умножения, суммирования и задержки. На структурных схемах и при аппаратной реализации ЦФ им соответствуют элементы цифровой задержки или памяти (z^{-1}), умножители (множительные устройства) (X) и сумматоры (Σ).

РФ порядка выше второго (по числу полюсов или порядку M общего разностного уравнения (2.2)) реализуются, как правило, путем последовательного или параллельного соединения базовых звеньев второго порядка, что соответствует *каскадной* (последовательной) и *параллельной* формам их реализации. Базовые биквадратные звенья РФ выполняются в соответствии с *прямой* или *канонической* формами реализации РФ. Число последовательных или параллельных звеньев L при четном порядке фильтра M находится как $L = M/2$, а при нечетном – как $L = (M + 1)/2$, при этом одно звено фильтра является звеном первого порядка (звеном с одним вещественным полюсом).

Известны также лестничные и решетчатые структуры РФ, используемые в адаптивных системах ЦОС [6, 13].

Каскадная форма реализации рекурсивных фильтров

Передаточная функция каскадно реализуемого РФ (рис. 3.2) определяется произведением передаточных функций его звеньев: $H(z) = \prod_{J=1}^{L} H_J(z)$,

$$H_J(z) = \frac{1 + b_{1J} z^{-1} + b_{2J} z^{-2}}{1 + a_{1J} z^{-1} + a_{2J} z^{-2}} = \frac{z^2 + b_{1J} z + b_{2J}}{z^2 + a_{1J} z + a_{2J}} = \frac{(z - z_{01J})(z - z_{02J})}{(z - z_{p1J})(z - z_{p2J})}, \quad (3.10)$$

где $H_J(z)$ – передаточная функция J-го биквадратного звена при значении коэффициента $b_{0J} = 1$; при $b_{0J} \neq 1$ добавляется общий нормирующий или масштабирующий множитель C_0.

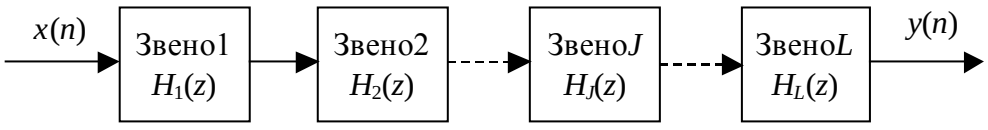


Рис. 3.2. Каскадная структура ЦФ

Для звена первого порядка коэффициенты b_{2J} и a_{2J} в выражении (3.10) равны нулю. Входным сигналом J-го звена $x_J(n)$ в такой структуре является выходной сигнал $y_{J-1}(n)$ предыдущего $(J-1)$-го звена: $x_J(n) = y_{J-1}(n)$.

Коэффициенты звеньев и их полюсы и нули связаны соотношениями

$$z_{01,2J} = (-b_{1J} \pm \sqrt{b_{1J}^2 - 4b_{2J}})/2; \quad z_{p1,2J} = (-a_{1J} \pm \sqrt{a_{1J}^2 - 4a_{2J}})/2;$$
$$b_{1J} = -(z_{01J} + z_{02J}); \qquad a_{1J} = -(z_{p1J} + z_{p2J}); \qquad (3.11)$$
$$b_{2J} = z_{01J}\, z_{02J}; \qquad a_{2J} = z_{p1J} z_{p2J}.$$

Пары нулей и полюсов, определяющие значения коэффициентов J-го звена, могут быть вещественными разными, вещественными равными, а при $(b_{1J}^2 - 4b_{2J}) < 0$ и $(a_{1J}^2 - 4a_{2J}) < 0$ – комплексно-сопряженными:

$$z_{0(p)1J} = z^*_{0(p)2J} = z_{0(p)J}.$$

В этом случае соотношения (3.11) принимают вид

$$b_{1J} = -2\mathrm{Re}\{z_{0J}\} = -2r_{0J}\cos\lambda_{0J}; \qquad b_{2J} = |z_{0J}|^2 = r^2{}_{0J};$$

$$a_{1J} = -2\mathrm{Re}\{z_{pJ}\} = -2r_{pJ}\cos\lambda_{pJ}; \quad a_{2J} = |z_{pJ}|^2 = r_{pJ}^2, \qquad (3.12)$$

где $\lambda_{0(p)J} = \omega_{0(p)J} T_д$ – нормированная частота нуля или полюса.

Для звена первого порядка $a_1 = -z_{p1}$, $b_1 = -z_{01}$.

Пример. Значениям нулей и полюсов $z_{01} = 1$, $z_{02} = -1$, $z_{p1,2} = 0{,}4 \pm j0{,}6$, графически отображенным на рис. 2.7, соответствуют значения коэффициентов звена 2-го порядка: $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $a_1 = -0{,}8$, $a_2 = 0{,}52$.

Частотная характеристика $H(j\omega)$ каскадно реализуемого фильтра также определяется произведением частотных характеристик его звеньев $H_J(j\omega)$:

$$H(j\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega T_д}} = \prod_{J=1}^{L} H_J(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}.$$

Ее модуль $|H(j\omega)|$ (АЧХ фильтра) и аргумент $\varphi(\omega)$ (ФЧХ фильтра) соответственно равны

$$|H(j\omega)| = \prod_{J=1}^{L} |H_J(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \sum_{J=1}^{L} \varphi_J(\omega).$$

Выражение для частотной характеристики звеньев $H_J(j\lambda)$, представленной функцией нормированной цифровой частоты $\lambda = \omega T_д$, имеет вид

$$H_J(j\lambda) = \frac{1 + b_{1J}e^{-j\lambda} + b_{2J}e^{-j2\lambda}}{1 + a_{1J}e^{-j\lambda} + a_{2J}e^{-j2\lambda}}.$$

Прямая форма реализации биквадратного звена

Прямая форма реализации биквадратного звена описывается разностным уравнением вида

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \quad (3.13)$$

Ему соответствует структурная схема звена рис. 3.3.

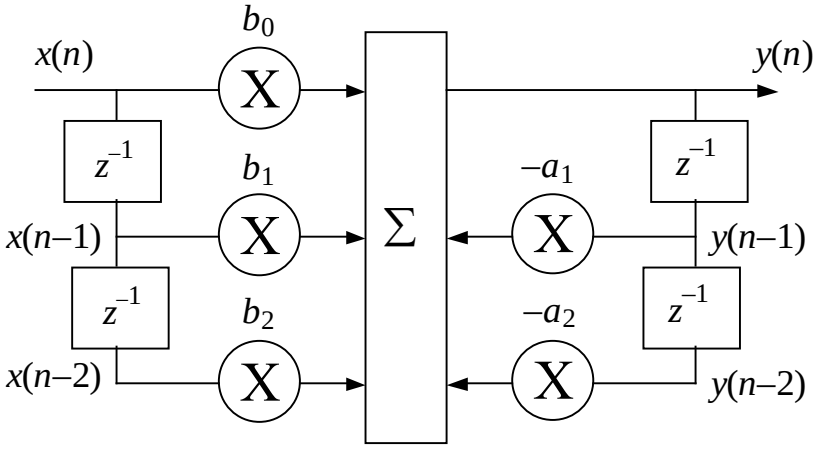


Рис. 3.3. Структура биквадратного звена для прямой формы реализации

Звено содержит элементы памяти (задержки) z^{-1} на один период дискретизации $T_д$, умножители X и сумматор Σ.

В ячейках памяти z^{-1}, называемой сигнальной памятью фильтра, сохраняются предыдущие отсчеты входного и выходного сигналов $x(n-1)$, $x(n-2)$, $y(n-1)$, $y(n-2)$. В уравнении (3.13) полагается, что $x(-1) = x(-2) = y(-1) = y(-2) = 0$, что соответствует нулевым начальным условиям работы звена. Начальные условия обеспечиваются обнулением ячеек памяти z^{-1} до начала обработки. После обработки очередного отсчета сигнала звено должно быть подготовлено к обработке следующего. Подготовка включает операции сдвига сигнальной памяти, соответствующие операторам пересылки $x(n-1) \to x(n-2)$, $x(n) \to x(n-1)$, $y(n-1) \to y(n-2)$, $y(n) \to y(n-1)$, или программного присваивания: $x(n-2) = x(n-1)$, $x(n-1) = x(n)$, $y(n-2) = y(n-1)$, $y(n-1) = y(n)$. После выполнения их на вход звена может быть подан следующий отсчета сигнала.

Для аппаратной реализации звена необходимы 4 элемента памяти, сумматор на 5 входов и 5 (4 при $b_0 = 1$) умножителей. При программной реализации нужно выполнить 5 (4) операций умножения и 4 операции сложения на 1 отсчет сигнала.

Каноническая форма реализации биквадратного звена

Каноническая форма реализации звена 2-го порядка получается путем представления его передаточной функции в следующем виде:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{A(z)} B(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \frac{Y(z)}{W(z)} = H_р(z) H_н(z),$$

где $W(z)$ – вспомогательная переменная; $H_р(z) = 1/(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$ – передаточная функция рекурсивной части звена; $H_н(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$ – передаточная функция нерекурсивной части звена.

Структура такого звена (рис. 3.4) имеет в 2 раза меньшее число элементов памяти z^{-1}.

Такое звено описывается двумя разностными уравнениями:

$$w(n) = x(n) - a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2),$$
$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2), \qquad (3.14)$$

первое из которых соответствует разностному уравнению рекурсивной, а второе – нерекурсивной части звена в канонической форме. Эти уравнения подобны приведенной выше паре разностных уравнений звена в прямой форме, если поменять местами его нерекурсивную и рекурсивную части и обозначения символов.

Начальные нулевые условия для канонического звена имеют вид $w(-2) = w(-1) = 0$. Они обеспечиваются обнулением сигнальной памяти до начала обработки. После обработки очередного отсчета сигнала осуществляются сдвиг сигнальной памяти: $w(n-1) \to w(n-2)$; $w(n) \to w(n-1)$ или операция присваивания: $w(n-2) = w(n-1)$; $w(n-1) = w(n)$. После этого на вход звена может подаваться следующий обрабатываемый отсчет сигнала.

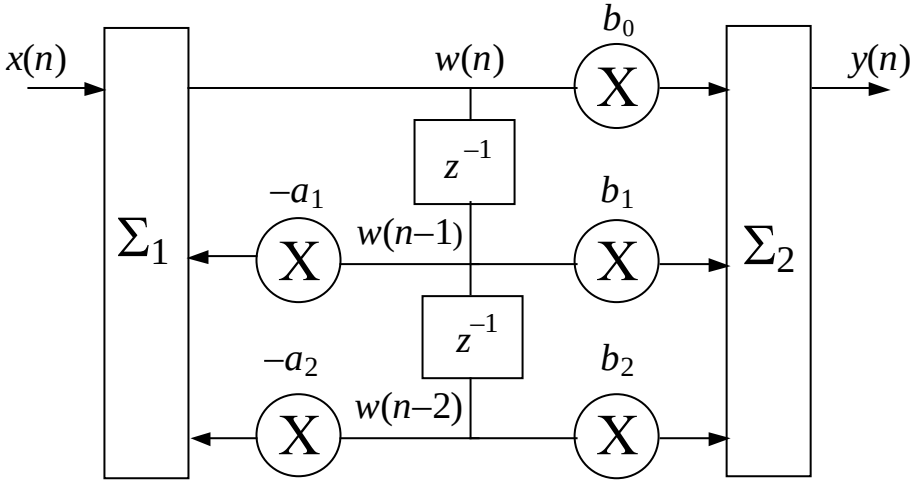


Рис. 3.4. Структурная схема биквадратного звена для канонической формы его реализации

Очевидно, что прямая и каноническая формы реализации звеньев могут быть легко обобщены и на РФ, порядок которых выше 2. Однако *каскадная и параллельная формы реализации* имеют определенные *преимущества* с позиций *модульности структуры и меньшей чувствительности к влиянию конечной разрядности чисел*. При этом наиболее часто используемой является *каскадная форма* реализации РФ, что связано с особенностями форматирования коэффициентов фильтров и большей их однородностью, т.е. степенью близости.

3.4. Прямая форма реализации, передаточная функция и частотная характеристика нерекурсивного фильтра

Нерекурсивному фильтру, основанному на прямом вычислении ДВС:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m),$$

соответствует структурная схема рис. 3.5. Его коэффициентами являются значения импульсной характеристики $h(0)$, $h(1)$, …, $h(N-1)$ конечной длины N. Ею определяется порядок фильтра $N-1$, называемый также длиной фильтра. Фильтр содержит $N-1$ ячейку сигнальной памяти z^{-1} для предыдущих отсчетов входного сигнала $x(n-1)$, $x(n-2)$,…, $x(n-N+1)$, N умножителей и сумматор на N входов.

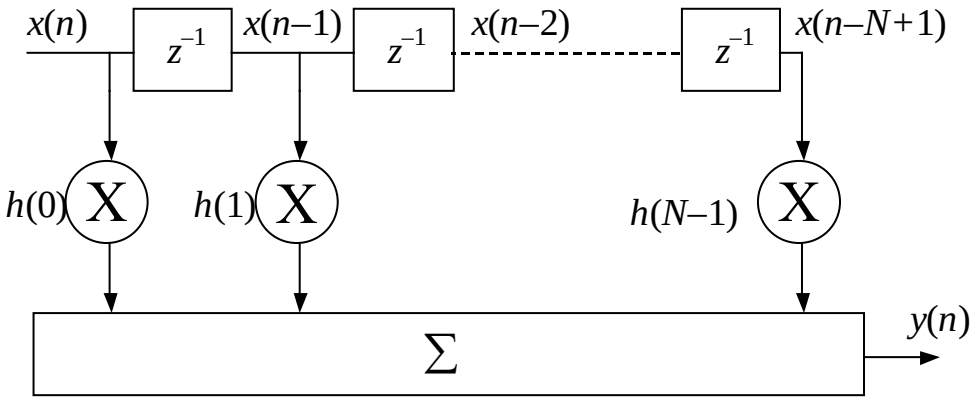


Рис. 3.5. Структурная схема нерекурсивного фильтра на основе ДВС

Обработке должно предшествовать обнуление сигнальной памяти:

$$x(-1) = x(-2) = \ldots = x(-N+1) = 0.$$

После обработки очередного отсчета осуществляется сдвиг всех ячеек сигнальной памяти, при этом последний отсчет, ненужный для последующей обработки, выталкивается из памяти. Это обеспечивается наиболее просто при использовании памяти на основе сдвиговых регистров. При программной реализации более удобен сдвиг замещением соседней ячейки памяти после каждой операции умножения–сложения. Требуемый объем вычислений при программной реализации составляет $(N-1)$ операций сложения и N операций умножения на каждый отсчет выходного сигнала.

Передаточная функция $H(z)$ и *частотная характеристика* $H(j\omega)$ НФ определяются Z-преобразованием и преобразованием Фурье его импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}; \quad H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n T_д}. \qquad (3.15)$$

При большой крутизне срезов АЧХ нерекурсивные фильтры имеют достаточно длинные импульсные характеристики, требующие большого объема памяти и вычислений. В то же время им свойственны абсолютная устойчивость и возможность получения строго *линейной* ФЧХ или постоянного группового времени запаздывания (ГВЗ).

Условием линейности ФЧХ является *симметрия импульсной характеристики* фильтра: $h(n) = h(N-1-n)$ – четная симметрия и $h(n) = -h(N-1-n)$ – нечетная симметрия. При нечетной симметрии и нечетном N $h[(N-1)/2] = 0$.

Отвечающие условию симметрии НФ имеют ФЧХ $\varphi(\omega) = \omega T_д(N-1)/2$ и групповое время запаздывания $t_з = d\varphi(\omega)/d\omega = -[(N-1)/2]T_д$, не зависящее от частоты. Такие фильтры не вносят фазовых искажений.

Анализируя выражение (3.15) для частотной характеристики НФ с линейной ФЧХ, можно видеть, что такие фильтры имеют определенные ограничения на значения АЧХ на частотах $\omega = 0$ и $\omega = \omega_д/2$: для фильтров с нечетной симметрией импульсной характеристики $|H(j\omega)| = 0$ при $\omega = 0$; для фильтров с четным порядком $|H(j\omega)| = 0$ при $\omega = \omega_д/2$. Эти особенности и ограничения необходимо учитывать при синтезе НФ различного типа – верхних частот, заграждающих, цифровых дифференциаторов и преобразователей Гильберта [13].

Контрольные вопросы

1. Как находится передаточная функция РФ по его разностному уравнению?
2. Что такое нули и полюсы цифрового фильтра и какую информацию они несут?
3. Какой вид имеет нуль–полюсная форма передаточной функции РФ и каково ее практическое значение?
4. В чем заключается способ графического нахождения частотной характеристики РФ?
5. Каковы условия физической реализуемости и устойчивости РФ?
6. Каковы основные формы реализации РФ и их математические описания?
7. Каковы структуры и математические описания прямой и канонической форм реализации рекурсивных звеньев второго порядка?
8. Как осуществляется обработка сигнала рекурсивным звеном второго порядка?
9. Какова структура НФ на основе ДВС?
10. Каково условие линейности фазочастотной характеристики НФ?
11. Как аналитически найти отклик РФ на заданное входное воздействие?
12. Как аналитически найти отклик НФ на заданное входное воздействие?
13. Каков требуемый объем вычислений и памяти для РФ и НФ?
14. Каковы сравнительные преимущества РФ и НФ?

Лекция 4
Синтез рекурсивных фильтров по заданной частотной характеристике

Синтез ЦФ в общем случае включает синтез передаточной функции и структуры фильтра по заданной его частотной или импульсной характеристике и оценку требуемой разрядности чисел для коэффициентов фильтра и отсчетов входного, выходного и внутренних сигналов.

Синтез передаточной функции ЦФ $H(z)$ по *заданной частотной характеристике* $H_d(j\omega)$ заключается *в ее аппроксимации и определении коэффициентов передаточной функции*. Под заданной (аппроксимируемой) частотной характеристикой ЦФ $H_d(j\omega)$ подразумевается, как правило, его амплитудно-частотная характеристика $|H_d(j\omega)|$. Возможен также синтез ЦФ и по заданной фазочастотной характеристике.

Используемые методы синтеза разделяются на аналитические, итерационные и численные.

Аналитические методы обеспечивают решение задачи аппроксимации в замкнутой аналитической форме. К ним относятся методы синтеза рекурсивных фильтров (РФ) по данным аналогового фильтра-прототипа и в первую очередь метод билинейного преобразования.

Итерационные методы, сочетая аналитический и численный подходы, не дают однозначного соответствия параметров расчетных и заданных характеристик и требуют, как правило, ряда уточняющих процедур. Итерационными являются методы весовых функций и частотной выборки, используемые для синтеза нерекурсивных фильтров (НФ).

Численные методы основываются на непосредственной аппроксимации заданной частотной характеристики с минимальной погрешностью в соответствии с определенными критериями оптимальности.

По виду аппроксимируемой частотной характеристики $H_d(j\omega)$ различают цифровые фильтры со ступенчато-образной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) – фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающие (ППФ), полосно-заграждающие (ПЗФ), многополосные (МПФ) (рис. 4.1) и ЦФ с произвольной частотной характеристикой. Могут быть также синтезированы ЦФ с частотными характеристиками цифрового дифференциатора и преобразователя Гильберта.

Так как частотные характеристики ЦФ периодичны по частоте с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д$ и их модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) обладают свойствами, соответственно, четной и нечетной симметрии относительно частот $\omega = 0$ или $\omega_д/2$, то их достаточно задать в полосе частот $(0–\omega_д/2)$ или полосе $(0–\pi)$ нормированных частот $\lambda = \omega T_д$ (рис. 4.1).

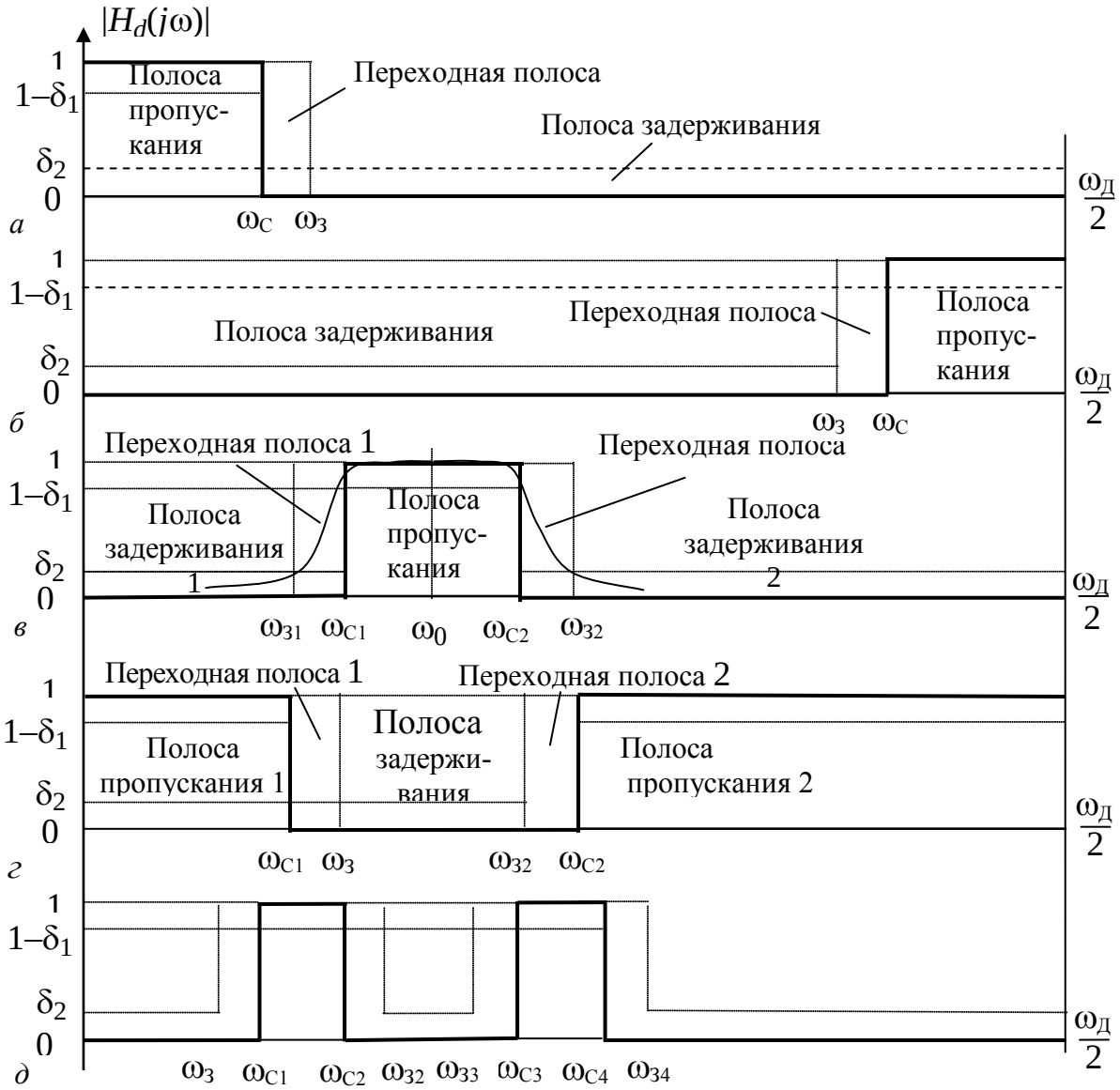


Рис. 4.1. Примеры задания АЧХ ЦФ

Исходными данными для синтеза ЦФ по заданной амплитудно-частотной характеристике (рис. 4.1) являются:

♦ тип фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ППФ, ПЗФ и др.);

♦ частоты среза, задерживания ω_c, $\omega_з$, определяющие границы и значения полос пропускания, задерживания и переходных полос фильтра;

♦ допустимая неравномерность АЧХ фильтра в полосе пропускания (или ослабление на границах полосы пропускания в случае монотонных АЧХ) $a_п$, дБ;

♦ минимальное затухание АЧХ в полосе задерживания $a_з$, дБ.

Параметрам $a_п$, $a_з$, определяющим допустимые погрешности аппроксимации заданной идеализированной АЧХ $|H_d(j\omega)|$, соответствуют на рис. 4.1 уровни допустимого отклонения расчетной АЧХ $|H(j\omega)|$ от 1 в полосе пропускания $(1-\delta_1)$ и от нуля в полосе задерживания δ_2:

$$a_п = 20\lg[1/(1-\delta_1)],\ дБ; \quad a_з = 20\lg(1/\delta_2),\ дБ.$$

Выделенные на рис. 4.1 пунктиром области образуют поле допусков на погрешности аппроксимации, в которые должна уложиться расчетная аппроксимирующая АЧХ $|H(j\omega)|$ (рис. 4.1, *в*).

4.1. Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу. Метод билинейного преобразования

Синтез РФ по аналоговому прототипу основывается на установлении взаимосвязи между их математическими описаниями и характеристиками во временной или частотной области, что позволяет использовать для синтеза РФ хорошо разработанные методы синтеза аналоговых фильтров [8, 10]. Известны следующие методы синтеза РФ по аналоговому прототипу: *отображения дифференциалов*, заключающийся в дискретизации дифференциального уравнения аналоговой цепи, т.е. переходе от производных к конечным разностям $dx/dt \to x(n) - x(n-1)$, $d^2x/dt^2 \to x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$ и т.д., *инвариантности импульсных характеристик*, основывающийся на дискретизации импульсной характеристики аналоговой цепи, и *согласованного Z-преобразования* вида $p + p_{p(0)i} \to 1 - z^{-1}e^{-pp(0)\,iT_Д}$, где $p_{p(0)i}$ – полюсы и нули преобразуемой передаточной функции аналоговой цепи [8, 10]. Однако ни одним из них не достигается необходимое соответствие частотных свойств РФ и аналогового прототипа. Такое соответствие при синтезе РФ со ступенчатообразными АЧХ обеспечивает *метод билинейного преобразования* (метод инвариантности частотных характеристик) [8, 10].

В методе билинейного преобразования синтезируемому ЦФ ставится в соответствие некоторый аналоговый фильтр-прототип (АФП) с передаточной функцией $H(p)$ и частотной характеристикой $H(j\Omega)$, которые однозначно связаны с передаточной функцией $H(z)$ и частотной характеристикой $H(j\omega)$ ЦФ:

АФП ЦФ АФП ЦФ

$$H(p) \underset{z=f^{-1}(p)}{\overset{p=f(z)}{\rightleftarrows}} H(z), \qquad H(j\Omega) \underset{\omega=f^{-1}(\Omega)}{\overset{\Omega=f(\omega)}{\rightleftarrows}} H(j\omega).$$

Связь эта определяется прямой $p = f(z)$ и обратной $z = f^{-1}(p)$ *преобразующими функциями* и соответствующими им при $p = j\Omega$ и $z = e^{j\omega T_Д}$ преобразованиями частот $\Omega = f(\omega)$, $\omega = f^{-1}(\Omega)$ аналогового и цифрового фильтров. С помощью этих преобразований определяются требования к АФП, по которым хорошо разработанными методами синтезируется его передаточная функция $H(p)$, преобразуемая затем в искомую передаточную функцию ЦФ $H(z)$.

Преобразующие функции должны отвечать следующим условиям:

♦ левая P-полуплоскость $p = \sigma + j\Omega$, $\sigma < 0$, в которой размещаются полюсы устойчивого АФП, должна однократно отображаться внутрь круга единичного радиуса $|z| < 1$, в котором на Z-плоскости размещаются полюсы устойчивого ЦФ, т.е. устойчивому АФП должен соответствовать устойчивый ЦФ;

♦ вся мнимая ось частот $j\Omega$ АФП, $\Omega = (0 \pm \infty)$, должна однократно, т.е. в один обход, отображаться на окружность единичного радиуса Z-плоскости $e^{j\omega T_д}$, $\omega = (0 \pm \omega_д/2)$, обеспечивая близость частотных характеристик обоих фильтров.

Таким условиям отвечают *простое* билинейное преобразование, когда ЦФ и АФП одинакового типа, и *обобщенные* билинейные преобразования, когда ЦФ и АФП разного типа.

Простое билинейное преобразование

Данное преобразование применимо в случае, когда аналоговый и цифровой фильтры *одинакового типа* (ФНЧ – ФНЧ, ППФ – ППФ и т.д.). Ему соответствуют преобразующие функции и частотные преобразования вида

$$p = f(z) = \alpha\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \qquad z = f^{-1}(p) = \frac{\alpha+p}{\alpha-p}; \tag{4.1}$$

$$\Omega = \alpha \cdot \mathrm{tg}\frac{\omega T_д}{2} = f(\omega), \ \omega = (2/T_д)\,\mathrm{arctg}(\Omega/\alpha), \tag{4.2}$$

где α – нормирующая константа. Один из способов ее определения заключается в том, что минимальной частоте среза ЦФ ставится в соответствие единичное значение частоты среза нормализованного АФП:

$$\Omega_c = \alpha \cdot \mathrm{tg}\frac{\omega_{сд} T}{2}\,\text{рад/с} = 1 \qquad .$$

Отсюда

$$\alpha = \mathrm{ctg}\frac{\omega_{сд} T}{2}.$$

В результате перехода к нормированным частотам ЦФ $\lambda = \omega T_д$ частотные преобразования (4.2) принимают вид

$$\Omega = f(\lambda) = \mathrm{ctg}\frac{\lambda_c}{2}\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2}; \qquad \lambda = f^{-1}(\Omega) = 2\mathrm{arctg}(\Omega \cdot \mathrm{tg}\,\lambda_c/2). \tag{4.3}$$

При $\Omega = 0$ λ также равно нулю, при $\Omega \to \infty$ $\lambda \to \pi$ ($\omega \to \omega_д/2$) (рис. 4.2).

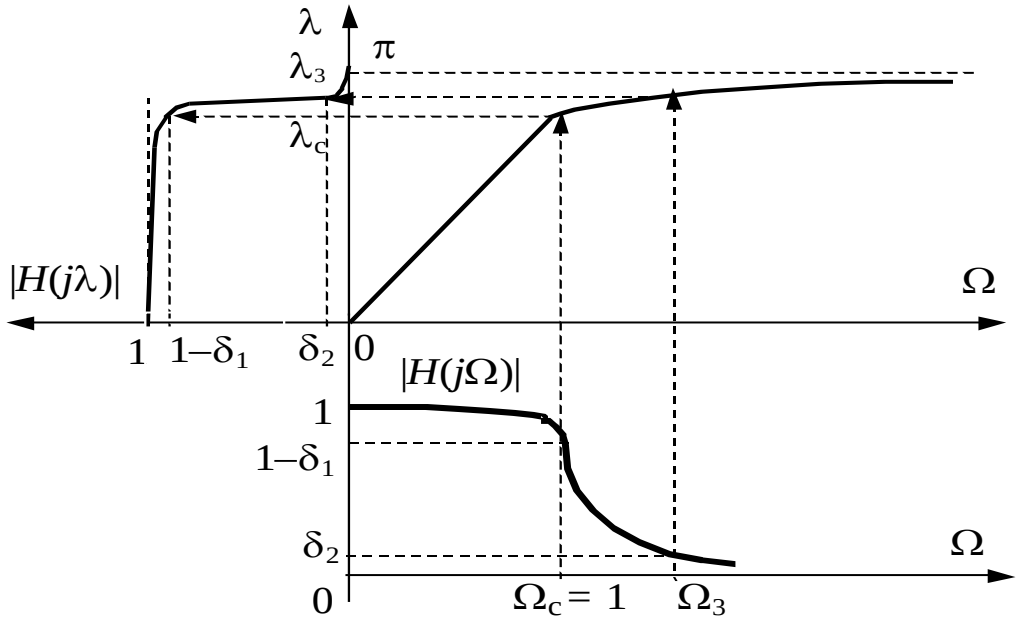


Рис. 4.2. Преобразование частотной характеристики аналогового ФНЧ в частотную характеристику цифрового ФНЧ

Анализируя (4.1), (4.3), можно убедиться в соответствии билинейного преобразования вышеприведенным условиям отображения *P*- и *Z*-плоскостей.

Несмотря на нелинейность частотного преобразования, сжимающего бесконечный диапазон физических частот АФП в основную полосу физических частот ЦФ (0–$f_д$/2) (λ = 0–π), при синтезе РФ со ступенчато-образными АЧХ обеспечивается необходимая эквивалентность АФП и ЦФ по параметрам δ_1, δ_2, определяющим предельные погрешности аппроксимации, если граничные частоты среза и задерживания их связаны частотной преобразующей функцией:

$$\Omega_с = f(\lambda_с) = 1;\ \Omega_з = f(\lambda_з) = \operatorname{ctg}\frac{\lambda_с}{2}\operatorname{tg}\frac{\lambda_з}{2};\ \lambda_з = \omega_з T_д .$$

Однако вследствие нелинейности частотного преобразования возможны существенные различия ФЧХ цифрового и аналогового фильтров.

Обобщенные билинейные преобразования

Синтез аналоговых фильтров с различными типами АЧХ (ФВЧ, ППФ, ПЗФ, МПФ) выполняется по *нормализованному аналоговому* ФНЧ-*прототипу* (АФПНЧ). Представляется удобным использование нормализованного аналогового ФНЧ и в качестве прототипа для синтезируемого ЦФ. При этом каждому типу ЦФ ставится в соответствие обобщенное билинейное преобразование $p = f_{об}(z)$ и отвечающее ему частотное преобразование Ω =

$f_{об}(\lambda)$, которые непосредственно устанавливают связь между передаточной функцией и частотной характеристикой АФПНЧ и ЦФ заданного типа и исключают необходимость каких-либо промежуточных частотных преобразований.

Для основных типов фильтров обобщенные преобразующие функции приведены в табл. 4.1.

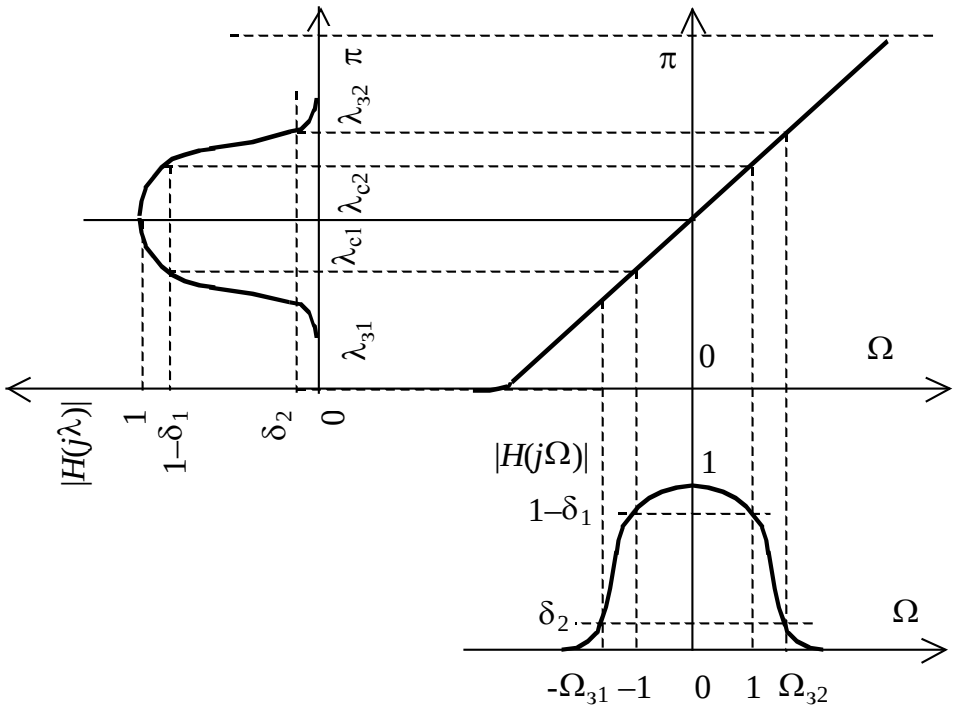
Таблица 4.1

Тип ЦФ	Преобразование $p \to z$	Преобразование $\Omega \to \lambda$
ФНЧ	$p = \alpha(z-1)/(z+1)$ $\alpha = \mathrm{ctg}(\lambda_c/2)$	$\Omega_з = \alpha\cdot\mathrm{tg}(\lambda_з/2)$ $\Omega_c = 1$
ФВЧ	$p = \alpha(z+1)/(z-1)$ $\alpha = \mathrm{tg}(\lambda_c/2)$	$\Omega_з = \alpha\cdot\mathrm{ctg}(\lambda_з/2)$ $\Omega_c = 1$
ППФ	$p = \alpha(z^2-2\beta z+1)/(z^2-1)$ $\alpha = \mathrm{ctg}[(\lambda_{c2}-\lambda_{c1})/2]$ $\beta = \cos[(\lambda_{c2}+\lambda_{c1})/2]/\cos[(\lambda_{c2}-\lambda_{c1})/2]$	$\Omega_{з1,2} = \lvert\alpha(\beta-\cos\lambda_{з1,2})/\sin\lambda_{з1,2}\rvert$ $\Omega_{c1,2} = \pm 1$
ПЗФ	$p = \alpha(z^2-1)/(z^2-2\beta z+1)$ $\alpha = \mathrm{tg}[(\lambda_{c2}-\lambda_{c1})/2]$ $\beta = \cos[(\lambda_{c2}+\lambda_{c1})/2]/\cos[(\lambda_{c2}-\lambda_{c1})/2]$	$\Omega_{з1,2} = \lvert\alpha\sin\lambda_{з1,2}/(\beta-\cos\lambda_{з1,2})\rvert$ $\Omega_{c1,2} = \pm 1$

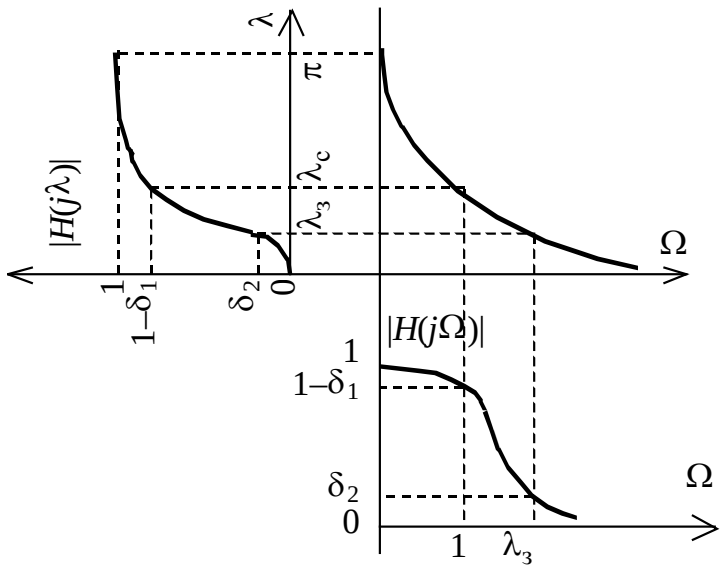
Частотные преобразования табл. 4.1 для ЦФ типа ФВЧ и ППФ иллюстрируются графиками (рис. 4.3, *а*, *б*).

Задачи синтеза аналогового ФНЧ-прототипа

Синтез АФПНЧ включает выбор аппроксимирующей функции, определение порядка фильтра m, значений нулей p_{0i} и полюсов p_{pi} и передаточной функции по заданным граничным частотам $\Omega_c = 1$, $\Omega_з$ и допускам на погрешности аппроксимации заданной АЧХ δ_1, δ_2 ($a_п$, $a_з$). Синтез выполняется по справочникам или с помощью специальных компьютерных программ.



а



б

Рис. 4.3. Графики обобщенных частотных преобразований
для ЦФ ППФ (*а*) и ФВЧ (*б*)

Нули и полюсы синтезированного АФПНЧ полностью определяют его передаточную функцию $H(p)$:

$$H(p) = C\prod_{i=1}^{m_1}(p - p_{0i}) / \prod_{i=1}^{m}(p - p_{pi}),$$

где C – нормирующий множитель; m_1 – число конечных нулей ($m_1 < m$).

Следует отметить, что полюсы АФПНЧ являются вещественными или комплексно-сопряженными числами (со знаком минус перед реальной частью), а конечные нули – чисто мнимыми.

Для синтеза цифровых фильтров по аналоговому прототипу чаще всего используются аппроксимирующие функции Тейлора (фильтры Баттерворта), Чебышева (прямая и инверсная), эллиптические (Золотарева–Кауэра) и Бесселя [2, 3, 8–10, 13].

Переход от АФПНЧ к ЦФ заданного типа

С помощью обобщенной преобразующей функции $p = f_{об}(z)$ передаточную функцию АФПНЧ можно непосредственно трансформировать в передаточную функцию ЦФ заданного типа:

$$H(z) = H(p) \,|\, p = f_{об}(z).$$

Приводя далее выражение для $H(z)$ к виду, соответствующему выбранной структуре ЦФ – каскадной или параллельной, можно найти *численные значения коэффициентов звеньев* b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}, a_{1J}, a_{2J}, *необходимые для его реализации.*

Однако такой путь зачастую сопряжен с громоздкими математическими преобразованиями, особенно в случае ППФ и ПЗФ, порядок которых вдвое выше, чем у аналогового ФНЧ-прототипа, или при дробных аппроксимирующих функциях, порождающих конечные нули.

Более коротким и формализованным является путь, основанный на аналитической взаимосвязи между коэффициентами ЦФ конкретной структуры и его нулями и полюсами, которые, в свою очередь, могут быть найдены через нули и полюсы аналогового ФНЧ-прототипа с помощью обратных преобразующих функций $z = f^{-1}_{об}(p)$. Полученные таким образом выражения для нулей и полюсов ЦФ различного типа приведены в табл. 4.2.

Передаточные функции звеньев второго порядка каскадной и параллельной структуры получают *объединением в пары* комплексно-сопряженных полюсов фильтров (для ППФ и ПЗФ одна пара может состоять и из вещественных полюсов) и группированием их в случае каскадной формы с ближайшими по расположению на комплексной Z-плоскости парами нулей, которые также могут быть комплексно-сопряженными или вещественными.

Таблица 4.2

Тип фильтра	Преобразование	Примечания
ФНЧ	$z_{p(0)i} = (\alpha + p_{p(0)i})/(\alpha - p_{p(0)i})$, i =1, 2, ..., m	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0\,i} = -1$
ФВЧ	$z_{p(0)i} = -(\alpha + p_{p(0)i})/(\alpha - p_{p(0)i})$, i = 1, 2, ..., m	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0\,i} = 1$
ППФ	$z_{p(0)(2i-1,2i)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha - p_{p(0)i}} \pm \left(\frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha - p_{p(0)i})^2} - \frac{\alpha + p_{p(0)i}}{\alpha - p_{p(0)i}} \right)^{1/2}$, i = 1, 2, ..., m	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0\,(2i-1,2i)} = \pm 1$
ПЗФ	$z_{p(0)(2i-1,2i)} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha - p_{p(0)i}} \pm \left(\frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha - p_{p(0)i})^2} - \frac{\alpha + p_{p(0)i}}{\alpha - p_{p(0)i}} \right)^{1/2}$, i = 1, 2, ..., m	При $p_{0i} = \infty$ $z_{0\,(2i-1,\,2i)} =$ $= \beta \pm (\beta^2 - 1)^{1/2}$

Число звеньев (L) ЦФ определяется его порядком M: при четном порядке $L = M/2$, при нечетном $L = (M + 1)/2$, при этом одно звено имеет первый порядок. Ему соответствуют вещественные значения нуля и полюса.

Порядок цифровых ФНЧ и ФВЧ совпадает с порядком аналогового ФНЧ-прототипа ($M = m$), а ППФ и ПЗФ – в два раза больше ($M = 2m$).

Коэффициенты b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}, a_{1J}, a_{2J} звеньев находятся через нули и полюсы цифрового фильтра с помощью соотношений (3.11), (3.12) (см. лекцию 3). Они определяют передаточную функцию ЦФ для выбранной его структуры, что отвечает конечной цели данного этапа синтеза ЦФ.

Результаты синтеза проверяются и уточняются путем расчета ЧХ синтезированного фильтра: $H(j\omega) = H(z)\big|_{z = e^{j\omega T_д}}$.

4.2. Методика синтеза РФ по аналоговому прототипу

Рассмотренному методу синтеза РФ по аналоговому прототипу соответствует методика синтеза, разработанная на его основе.

Синтез РФ включает несколько этапов.

♦ На основе исходных данных на синтез ЦФ (граничных частот $f_с$, $f_з$, ($\lambda_с$, $\lambda_з$) и допусков на погрешности аппроксимации АЧХ $a_п$,$a_з$) определяются *исходные данные на синтез* АФПНЧ, задающие требования к его АЧХ: допуски на погрешности аппроксимации $a_п$, $a_з$ – те же, что и для ЦФ, и граничные частоты $\Omega_с = 1$ и $\Omega_з = f_{об}(\lambda_з)$, получаемые с помощью частотных преобразующих функций $\Omega = f_{об}(\lambda)$ (см. табл. 4.1).

♦ По значениям $a_п$, $a_з$ и $\Omega_з$ синтезируется АФПНЧ: выбирается тип аппроксимирующей функции, определяются порядок фильтра m и значения его полюсов и нулей: p_{pi}, p_{0i}, i = 1, 2, ..., m. *От вида аппроксимации* зависит *порядок фильтра* и, как следствие, сложность его реализации и быстродействие.

Наименьший порядок имеют эллиптические фильтры, наибольший – фильтры Баттерворта и Бесселя. В то же время фильтры с полиномиальной аппроксимацией (Баттерворта, Бесселя, Чебышева инверсная) имеют коэффициенты b_1, b_2 передаточной функции звеньев каскадной реализации, равные 0, ±1, ±2, умножение на которые выполняется тривиально. В результате при большем порядке требуемый объем вычислений при их реализации может оказаться меньше, чем для ЦФ с дробной аппроксимацией (Золотарева–Кауэра, Чебышева прямая), где коэффициенты b_1, b_2 не являются тривиальными. Кроме того, при выборе вида аппроксимации учитываются *дополнительные требования к* АЧХ, например, ее желаемая *монотонность* в полосе пропускания и или полосе задерживания, а также к ФЧХ – необходимая степень ее *линейности* в полосе пропускания.

♦ По соотношениям (табл. 4.2) рассчитываются значения полюсов и нулей ЦФ заданного типа:

$$z_{pk} = f_{\text{об}}^{-1}(p_{pi}); \quad z_{0k} = f_{\text{об}}^{-1}(p_{0i}),$$

где $k = 1, 2, ..., M$; M – порядок ЦФ: $M = m$ для ФНЧ, ФВЧ и $M = 2m$ для ППФ и ПЗФ.

♦ На комплексной Z-плоскости строится картина нулей и полюсов ЦФ и выполняется объединение полюсов в комплексно-сопряженные или вещественные пары $(z_{p1,2})_J$, которые ставятся в соответствие J-му звену ЦФ; в случае каскадной формы реализации они группируются с ближайшими к ним по расположению на комплексной Z-плоскости парами конечных комплексно-сопряженных или вещественных нулей $(z_{p1,2})_J$, где $J = 1, 2, ..., L$ – номер звена, а $L = [M/2]_{\text{ц.ч}}$ – число звеньев ЦФ. При нечетном порядке фильтра добавляется одно звено 1 порядка.

♦ Выбирается структура фильтра – каскадная или параллельная и рассчитываются коэффициенты ее звеньев a_{1J}, a_{2J}, b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}, B_{0J}, B_{1J}, C по соотношениям, приведенным выше (см. лекцию 3).

♦ Рассчитываются АЧХ и ФЧХ фильтра и сопоставляются с заданными.

♦ Находится минимально необходимая разрядность коэффициентов фильтра, при которой АЧХ еще удовлетворяет заданным требованиям (по параметрам неравномерности и затухания $a_{\text{п}}$, $a_{\text{з}}$).

Синтезировав РФ с частотной характеристикой, удовлетворяющей заданным требованиям, необходимо далее решить задачи, связанные с конечной разрядностью чисел и моделированием фильтра на ЭВМ, в том числе его структурной оптимизации.

Контрольные вопросы

1. Каковы задачи, методы и цели синтеза ЦФ по заданной частотной характеристике?
2. В чем заключается метод синтеза РФ по аналоговому прототипу?
3. Какова взаимосвязь между частотами аналогового и цифрового фильтров при билинейном преобразовании?
4. В чем преимущества применения обобщенных преобразований при синтезе РФ заданного типа (ФВЧ, ППФ, ПЗФ)?
5. Как определяются требования к аналоговому фильтру-прототипу при синтезе РФ?
6. Из каких условий выбирается вид аппроксимирующей функции?
7. Как находятся нули, полюсы и коэффициенты РФ?

Лекция 5
Синтез нерекурсивных фильтров по заданной частотной характеристике

Синтез передаточной функции $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$ нерекурсивных фильтров (фильтров КИХ-типа) сводится к нахождению их *импульсной характеристики* $h(n)_N$ *конечной длины* N. Синтез НФ выполняется методами весовых функций, частотной выборки или численной аппроксимации.

5.1. Синтез нерекурсивных фильтров методом весовых функций

В методе весовых функций импульсная характеристика фильтра может быть непосредственно найдена по заданной частотной характеристике фильтра $H_d(j\omega)$ (см. рис. 4.1) с помощью ее обратного преобразования Фурье:

$$h_d(n)=\frac{T_д}{2\pi}\int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2}H_d(j\omega)e^{j\omega nT_д}d\omega. \qquad (5.1)$$

Однако она не может быть использована в качестве импульсной характеристики НФ, так как имеет бесконечную длину и не отвечает условию физической реализуемости: при $n<0$ $h_d(n)\neq 0$ отклик фильтра опережает входное воздействие.

Например, для цифрового ФНЧ с частотной характеристикой

$$H_d(j\omega)=\begin{cases}1, & -\omega_c\le\omega\le\omega_c\\ 0, & \text{для других}\quad\omega\end{cases}$$

импульсная характеристика

$$h_d(n)=\frac{T_д}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}H_d(j\omega)e^{j\omega nT_д}d\omega=\frac{\omega_c T_д}{\pi}\frac{\sin\omega_c nT_д}{\omega_c nT_д}=\frac{\lambda_c}{\pi}\frac{\sin\lambda_c n}{\lambda_c n}$$

имеет вид, показанный на рис. 5.1.

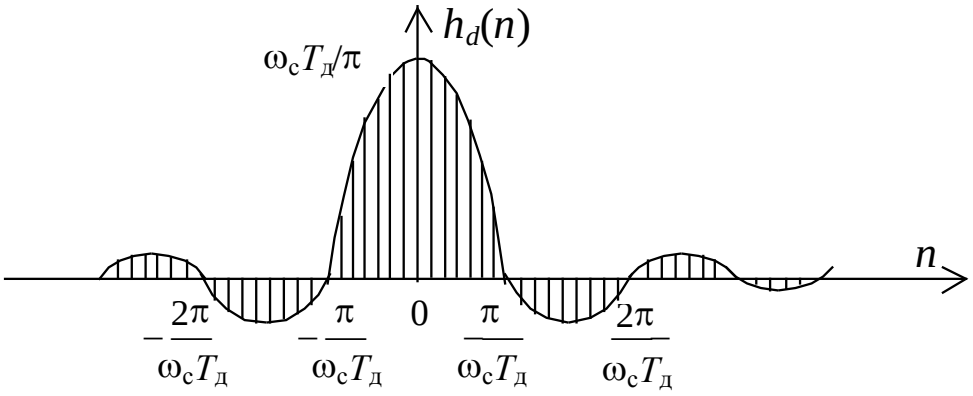


Рис. 5.1. Импульсная характеристика идеального ФНЧ

Физически реализуемый КИХ-фильтр с частотной характеристикой, близкой к заданной, можно получить на основе импульсной характеристики (5.1) путем сдвига ее вправо на $(N-1)/2$ отсчетов и усечения за пределами $n < 0$ и $n \geq N$.

При этом частотная характеристика фильтра аппроксимируется усеченным рядом Фурье с коэффициентами $h_d[n-(N-1)/2]$:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d[n-(N-1)/2]e^{-j\omega nT_д}.$$

Известно, что простое усечение ряда Фурье сопровождается колебаниями Гиббса, возникающими при аппроксимации разрывных функций.

Для улучшения качества аппроксимации в методе весовых функций импульсную характеристику НФ конструируют ограничением длины смещенной импульсной характеристики $h_d[n-(N-1)/2]$ с помощью специальных весовых функций или окон $w(n)$ конечной длины N:

$$h(n) = h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right)w(n). \qquad (5.2)$$

Простое усечение эквивалентно умножению на прямоугольную весовую функцию $w_R(n) = 1$, $n = 0, \ldots, N-1$.

Полученной таким образом импульсной характеристике соответствует частотная характеристика фильтра $H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega nT_д}$, аппроксимирующая заданную. Она является сверткой в частотной области заданной частотной характеристики $H_d(j\omega)$ с частотной характеристикой (Фурье-образом) весовой функции $W(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\omega nT_д}$:

$$H(j\omega) = W(j\omega) * H_d(j\omega) = \frac{T_д}{2\pi}\int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} H_d(j\theta)W\left[j(\omega-\theta)\right]d\theta, \qquad (5.3)$$

где ∗ – символ свертки; θ – переменная интегрирования.

Графическая иллюстрация метода. Требования к весовым функциям

Данные преобразования во временной и частотной области иллюстрируются графиками (рис. 5.2), достаточно наглядно отражающими влияние весового усечения на качество аппроксимации заданной частотной характеристики усеченным рядом Фурье.

Представленная на рис. 5.2 типичная *частотная характеристика весовой функции* $|W(j\omega)|$ (см. ниже) имеет *главный лепесток* шириной $\Delta\omega_{гл}$ и *боковые лепестки*, уровень которых характеризуется максимальным по модулю относительным значением $\delta_{бл\ max}$ и относительной площадью частотной характеристики под ними.

Свертка (5.2) в частотной области осуществляется графически путем смещения по частоте в пределах $\pm\omega_д/2$ зеркально отраженной частотной характеристики весовой функции $W[j(\omega - \theta)]$ и вычисления площади ее перекрытия (интеграла) с заданной частотной характеристикой $H_d(j\omega)$.

При $|\omega| > (\omega_c + \Delta\omega_{гл}/2)$ (в полосе задерживания фильтра) перекрытие имеет место на уровне боковых лепестков частотной характеристики весовой функции, в соответствии с которым пульсирует и частотная характеристика $H(j\omega)$. При $(\omega_c - \Delta\omega_{гл}/2) < |\omega| < (\omega_c + \Delta\omega_{гл}/2)$ происходит перекрытие на уровне главного лепестка, в результате чего площадь перекрытия резко возрастает и формируется переходная полоса частотной характеристики фильтра $H(j\omega)$. В полосе $(-\omega_c + \Delta\omega_{гл}/2) < \omega < (\omega_c - \Delta\omega_{гл}/2)$ главный лепесток полностью перекрывается с заданной частотной характеристикой, площадь перекрытия максимальна и пульсирует за счет боковых лепестков частотной характеристики весовой функции. Это соответствует полосе пропускания фильтра.

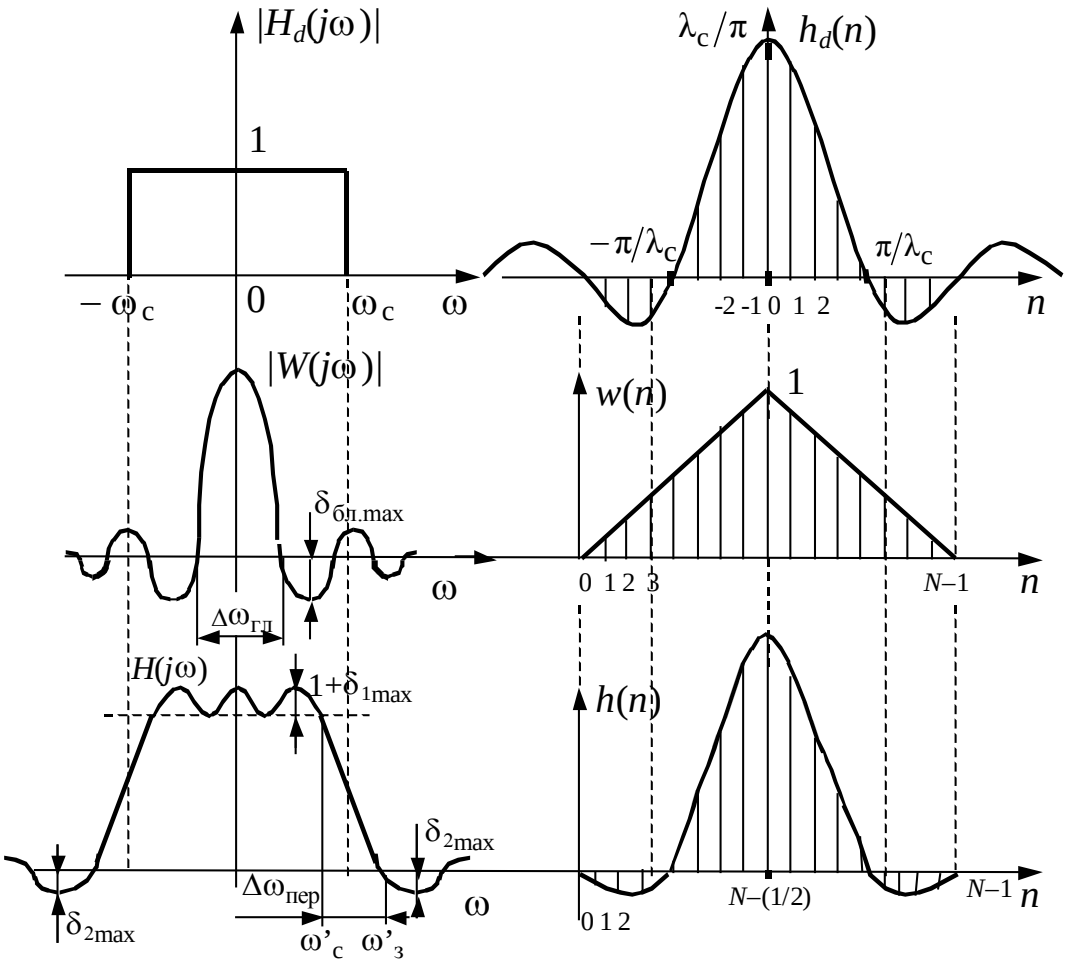


Рис. 5.2. Графическая иллюстрация синтеза НФ методом весовых функций

Из графического анализа следует, что *переходная полоса частотной характеристики фильтра* $H(j\omega)$ определяется *шириной главного лепестка частотной характеристики весовой функции*:

$$\Delta\omega_{\text{пер}} = \left|\omega'_{\text{з}} - \omega'_{\text{с}}\right| \approx \Delta\omega_{\text{гл}},$$

а погрешности аппроксимации (пульсации) в полосе пропускания δ_1 *и задерживания* δ_2 зависят *от уровня ее боковых лепестков.* Смещаются также граничные частоты фильтра ($\omega'_{\text{с}}$, $\omega'_{\text{з}}$), а на заданной частоте среза $\omega_{\text{с}}$ уровень АЧХ, аппроксимирующей заданную, близок к 0,5 (–6 дБ). Отсюда вытекают общие *требования к весовой функции*, которая должна иметь:

♦ минимальную ширину главного лепестка $\Delta\omega_{\text{гл}}$ частотной характеристики;

♦ минимальный уровень боковых лепестков $\delta_{\text{бл max}}$ частотной характеристики и минимальную площадь под ними;

♦ минимальную длину N во временной области.

Требования эти достаточно противоречивы. Так, более гладкие во временной области весовые функции имеют меньший уровень боковых лепестков частотной характеристики, но большую при той же длине N ширину

главного лепестка, обратно пропорциональную длине весовой функции. Этим объясняется многообразие используемых на практике типов весовых функций. Рассмотрим параметры и математические описания некоторых из них.

Параметры весовых функций

Используемые при синтезе НФ параметры весовых функций: прямоугольной, треугольной, Ханна, Хэмминга и Блэкмана (табл. 5.1) представлены не зависящим от длины весовой функции N параметром D (*D-фактором*), определяющим ширину главного лепестка ее частотной характеристики $\Delta\omega_{гл} = D\omega_д/N$, и максимальным относительным уровнем боковых лепестков частотной характеристики весовой функции $\delta_{бл\ max}$, а также оценочным значением погрешности аппроксимации заданной частотной характеристики в полосе задерживания δ_{2max}, дБ, рассчитанным для цифрового ФНЧ с частотой среза $\lambda_c = \pi/4$ [8]. Такая же погрешность δ_{2max} имеет место и при синтезе цифрового ФВЧ. Для ЦФ с двумя и более частотами среза (ППФ, ПЗФ, МПФ) в зависимости от конкретных данных погрешность аппроксимации может быть больше ее оценочного значения, но не более чем на 6 дБ.

Таблица 5.1

Тип весовой функции	D	$\delta_{бл\ max}$, дБ	δ_{2max}, дБ
Прямоугольная	2	–13,7	–21
Треугольная	4	–27	–26
Ханна	4	–31	–44
Хэмминга	4	–41	–53
Блэкмана	6	–57	–74

Руководствуясь данными табл. 5.1, можно по требуемому затуханию частотной характеристики в полосе задерживания $a_з$ сделать выбор типа весовой функции ($|\delta_{2max}| > a_з$), а по значению D-фактора и заданной переходной полосе $\Delta\omega_{пер} \approx \Delta\omega_{гл}$ найти ее необходимую длину $N \geq Df_д / \Delta f_{пер}$.

Следует заметить, что значения $\delta_{бл\ max}$ (табл. 5.1) соответствуют большим значениям длины весовой функции N ($N >> 1$), при которых они практически не зависят от N; при малых N наблюдается некоторое возрастание уровня боковых лепестков. Отношение максимальной амплитуды бокового лепестка частотной характеристики весовой функции к амплитуде ее главного лепестка называют также *коэффициентом пульсации* и выражают в процентах. Например, для прямоугольной весовой функции он равен 21,23 %, а для весовой функции Хэмминга – менее 0,8 %. Важным параметром весовой функции при синтезе конкретных ЦФ может быть также скорость убывания боковых лепестков ее частотной характеристики.

Описания весовых функций

Простейшая весовая функция – *прямоугольная*. Частотная характеристика ее (рис. 5.3, *а*) определяется выражением

$$W_R(j\omega) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}T_д}\frac{\sin(\omega NT_д/2)}{\sin(\omega T_д/2)}.$$

Она имеет минимальную при заданной длине N ширину главного лепестка $\Delta\omega_{гл} = 2\omega_д/N$ ($\Delta\lambda_{гл} = 4\pi/N$) ($D = 2$) и максимальный относительный уровень боковых лепестков –13,7 дБ. Боковые лепестки имеют ширину $\Delta\omega_{бл} = \omega_д/N$ ($\Delta\lambda_{бл} = 2\pi/N$). При $\omega = 0$ $|W_R(j\omega)| = N$.

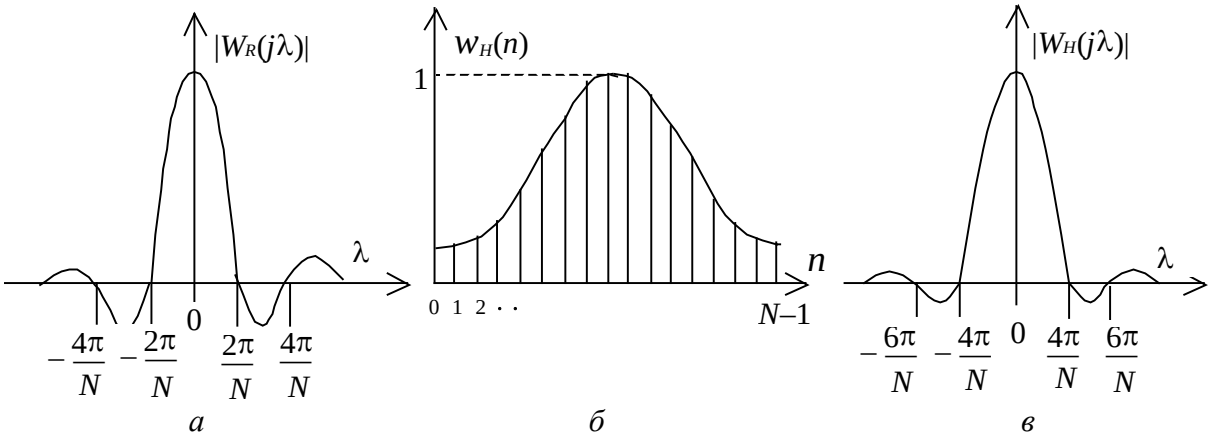


Рис. 5.3. Частотная характеристика прямоугольной весовой функции (*а*), весовая функция Хэмминга (*б*) и ее частотная характеристика (*в*)

Треугольную весовую функцию длиной N определяют сверткой двух прямоугольных весовых функций длиной $N/2$:

$$w_T(n) = w_R(n)*w_R(n) = \begin{cases} 2n/(N-1), & 0 \le n \le (N-1)/2 \\ 2-2n/(N-1), & (N-1)/2 < n \le (N-1) \end{cases}.$$

Частотная характеристика треугольной весовой функции равна квадрату частотной характеристики прямоугольной весовой функции половинной длины:

$$\left|W_{Tд}(j\omega)\right| = \sin^2(\omega T_д N/4)/\sin^2(\omega T/2).$$

У нее вдвое большая ширина главного лепестка ($D = 4$) при достаточно большом уровне боковых лепестков. Боковые лепестки имеют ширину $\Delta\omega_{бл} = 2\omega_д/N$ ($\Delta\lambda_{бл} = 4\pi/N$).

Обобщенная весовая функция Хэмминга (рис. 5.3, *б*) описывается выражением

$$w_H(n) = \alpha - (1-\alpha)\cos\left[2\pi\, n/(N-1)\right], \quad n = 0, 1, ..., N-1.$$

При α = 0,5 она соответствует весовой функции Ханна, при α = 0,54 – весовой функции Хэмминга.

Частотную характеристику весовой функции Хэмминга представляют суммой трех взвешенных частотных характеристик прямоугольной весовой функции $W_R(j\omega)$ с центральными частотами $\omega_0 = 0$ и $\omega_{1,2} = \pm\omega_д/(N-1)$:

$$W_H(j\omega) = \alpha W_R(j\omega) + \frac{1-\alpha}{2} W_R\left[j\left(\omega - \frac{\omega_д}{N-1}\right)\right] + \frac{1-\alpha}{2} W_R\left[j\left(\omega + \frac{\omega_д}{N-1}\right)\right].$$

При больших N ($N >> 1$) обычно полагают $\omega_{1,2} = \pm\omega_д/N$ [8]. Ширина ее главного лепестка (рис. 5.3, *в*) $\Delta\omega_{гл} = 4\omega_д/N$ ($\Delta\lambda_{гл} = 8\pi/N$) ($D$ = 4), ширина боковых лепестков $\Delta\omega_{бл} = \omega_д/N$ ($\Delta\lambda_{бл} = 2\pi/N$). Площадь под боковыми лепестками составляет 0,04 % от площади квадрата частотной характеристики. По уровню боковых лепестков весовая функция Хэмминга оказывается приемлемой для многих приложений НФ.

Весовая функция *Блэкмана* имеет вид

$$w_B(n) = 0,42 - 0,5\cos\left[2\pi\, n/(N-1)\right] + 0,08\cos\left[4\pi\, n/(N-1)\right].$$

Частотная характеристика весовой функции Блэкмана, по сравнению с весовой функцией Хэмминга, содержит два дополнительных слагаемых $0,04W_R[j(\omega \pm 2\omega_д/N)]$. У нее более широкий (в 1,5 раза) главный лепесток (D = 6), но и очень малый уровень боковых лепестков. Ширина боковых лепестков $\Delta\omega_{бл} = \omega_д/N$ ($\Delta\lambda_{бл} = 2\pi/N$).

При синтезе НФ используются также эффективные весовые функции Ланцоша, Каппелини, Дольфа – Чебышева, Блэкмана – Харриса и др., отвечающие определенным критериям оптимальности [4, 8, 10, 14]. Однако особое значение и применение среди них имеет класс весовых функций или окон Кайзера.

Весовые функции Кайзера

Весовые функции – прямоугольная, треугольная, Хэмминга, Блэкмана – характеризуются постоянными значениями уровня боковых лепестков частотной характеристики $\delta_{бл\,max}$ и D-фактора, связанного с шириной ее главного лепестка $\Delta f_{гл}$. В отличие от них, у весовых функций Кайзера эти параметры могут варьироваться в широких пределах с помощью коэффициента β, входящего в математическое выражение этой функции:

$$w_c(n) = I_0\left(\beta\sqrt{1-\left[1-2n/(N-1)\right]^2}\right)/I_0(\beta),\ n = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (5.4)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Благодаря этому обеспечивается наилучшее для данного метода син-

теза качество аппроксимации заданной частотной характеристики или наименьший порядок НФ при заданном качестве аппроксимации.

Кайзером путем численного интегрирования свертки составлена таблица и получены эмпирические формулы, которые позволяют непосредственно по заданному затуханию $a_з = |\delta_{2max}|$ (дБ) частотной характеристики $H(j\omega)$, аппроксимирующей идеальный ФНЧ, выбрать или рассчитать значения D-фактора и коэффициента β [2, 10]:

$$D \approx (a_з - 7{,}95)/14{,}36 \text{ при } a_з > 21 \text{ дБ};$$

$$\beta = 0{,}1102(a_з - 8{,}7) \quad 50\, a_з \text{ дБ};$$

$$\beta = 0{,}5842(a_з - 21)^{0{,}4} + 0{,}07886(a_з - 21)\ \text{дБ} \quad < a_з < \quad .$$

По вычисленному или взятому из таблицы [2] значению D и заданному значению переходной полосы фильтра определяется необходимый порядок фильтра $N \approx Df_д/\Delta f_{пер}$, который округляется до ближайшего целого нечетного числа.

Как и для других весовых функций, в случае аппроксимации идеальных фильтров типа ППФ, ПЗФ, МПФ затухание частотной характеристики в полосе задерживания может быть меньше его табличного значения, но не более чем на 6 дБ.

Методика синтеза НФ методом весовых функций

Синтез НФ методом весовых функций включает несколько этапов.

♦ По заданному значению затухания $a_з$ в полосе задерживания частотной характеристики фильтра с помощью табл. 5.1 выбирается тип весовой функции $w(n)$, отвечающей условию $|\delta_{2max}|$, дБ $\geq a_з$, дБ при минимальном значении D-фактора, которому пропорциональна ширина главного лепестка ее частотной характеристики. При использовании весовой функции Кайзера по вышеприведенным формулам или таблице, приводимой в [2], находятся соответствующие заданному затуханию $a_з$ параметры весовой функции β и D. При этом нужно учитывать, что расчетное значение затухания δ_2 зависит от вида АЧХ синтезируемого фильтра, его граничных частот и в некоторой степени от длины весовой функции N и может оказаться как больше, так и меньше оценочного значения $|\delta_{2max}|$. Чем сложнее АЧХ фильтра (ППФ, ПЗФ, МПФ), тем меньше расчетное затухание $|\delta_2|$, дБ для одной и той же весовой функции и больше ее неравномерность в полосе пропускания $|\delta_1|$.

♦ Для выбранной весовой функции и заданной переходной полосы частотной характеристики фильтра $\Delta f_{пер} = |f_з - f_c|_{min}$ в соответствии с приближенным соотношением $\Delta f_{пер} \approx \Delta f_{гл} = Df_д/N$ находится необходимая длина весовой функции и определяемая ею длина импульсной характеристики фильтра: $N \geq Df_д / \Delta f_{пер}$, где D – параметр (D-фактор), зависящий от типа весовой функции (см. табл. 5.1).

Значение N приравнивается ближайшему целому числу, обычно нечетному.

♦ С помощью обратного преобразования Фурье

$$h_d(n) = T_д \int_{-f_д/2}^{f_д/2} H_d(jf) e^{-j2\pi f nT_д} df$$

или приведенных в [2] аналитических выражений вычисляется смещенная вправо импульсная характеристика $h_d(n - (N - 1)/2)$, $n = 0, \ldots, N - 1$, соответствующая заданной частотной характеристике $H_d(jf)$.

При этом в качестве частот среза заданной частотной характеристики используют их расчетные значения $f_{ср}$, смещенные в полосу задерживания примерно на половину переходной полосы фильтра $\Delta f_{пер}$. Это связано со свойственным данному методу размыванием границ перехода от полосы пропускания фильтра к полосе задерживания (рис. 5.2). Например, для ППФ

$$f_{с1р} \approx f_{с1} - \Delta f_{пер}/2; \qquad f_{с2р} \approx f_{с2} + \Delta f_{пер}/2.$$

Может быть увеличено и расчетное значение переходной полосы.

♦ Находится импульсная характеристика фильтра путем весового усечения смещенной вправо на $(N - 1)/2$ отсчетов импульсной характеристики $h_d(n)$:

$$h(n) = h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right) w(n), \qquad n = 0, 1, ..., N-1.$$

♦ Рассчитывается АЧХ фильтра $|H(jf)| = |\sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi f nT_д}|$ и проверяется ее соответствие исходным данным по допустимой неравномерности в полосе пропускания $a_п$ и затуханию в полосе задерживания $a_з$.

♦ Так как данный метод не обеспечивает точного соответствия исходных и расчетных данных (является итерационным), при необходимости корректируются значения расчетных частот среза $f_{с1р}$, $f_{с2р}$, расчетной переходной полосы $\Delta f_{ïåð.р}$ и, соответственно, длины фильтра N, и расчеты повторяются.

♦ Находится минимально необходимая разрядность значений импульсной характеристики $h(n)$ (коэффициентов нерекурсивного фильтра, реализуемого на основе ДВС), при которой расчетная АЧХ еще удовлетворяет заданным требованиям.

♦ Выбирается способ реализации НФ (на основе ДВС, ДПФ или частотной выборки, см. далее) и решаются соответствующие ему задачи реализации.

Метод весовых функций обеспечивает *строгую линейность* ФЧХ и постоянство группового времени запаздывания фильтра ввиду симметрии получаемой этим методом импульсной характеристики $h(n) = h(N - 1 - n)$.

5.2. Синтез нерекурсивных фильтров методом частотной выборки

В методе частотной выборки *импульсная характеристика* фильтра $h(n)_N$ находится с помощью обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) частотной характеристики $H_d(j\omega_k)$, полученной путем дискретизации по частоте заданной частотной характеристики $H_d(j\omega)$.

Дискретизация осуществляется в полосе частот $0–\omega_д$ путем перехода от непрерывных значений частоты ω к дискретным $\omega_k = \Delta\omega k$ с шагом $\Delta\omega = \omega_д/N$, где $k = 0, 1, \ldots, N - 1$ – номер частотной выборки; N – число точек дискретизации.

Шаг дискретизации по частоте $\Delta\omega$ выбирается из условия $\Delta\omega \le \Delta\omega_{пер}/(L + 1)$, где $\Delta\omega_{пер}$ – переходная полоса фильтра; L – число выборок частотной характеристики фильтра, размещаемых в переходной полосе, $L = 0, 1, 2, \ldots$

В результате получается *дискретизированная частотная характеристика* фильтра (ДЧХ) $H_d(j\omega_k) = H_d(j\omega)\big|_{\omega=\omega_k}$ (рис. 5.4).

Дискретизация (рис. 5.4) выполнена с шагом по частоте $\Delta\omega = \Delta\omega_{пер}/2$ ($L = 1$).

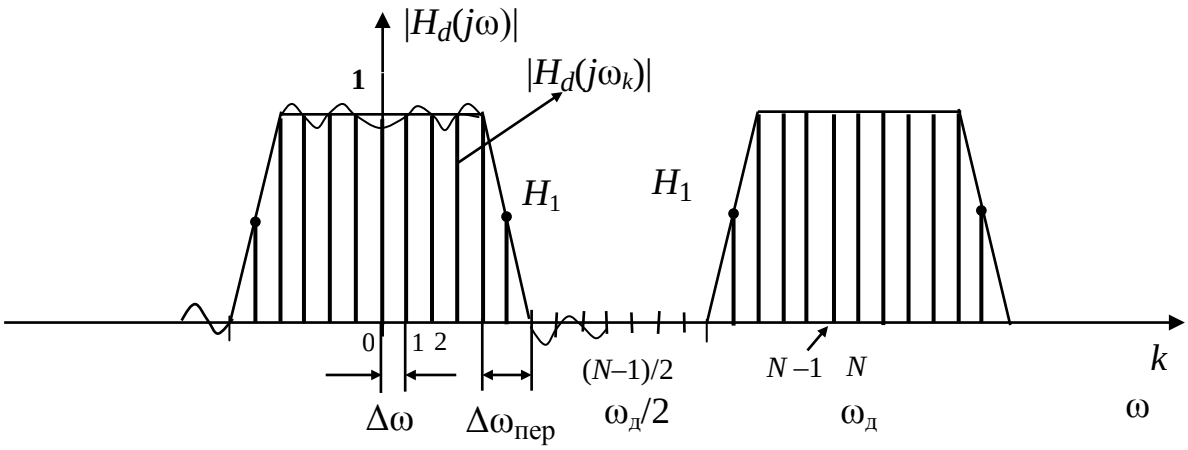


Рис. 5.4. Дискретизированная ЧХ цифрового фильтра нижних частот

ДЧХ имеет значения, равные в полосе пропускания 1 ($H_d(j\omega_k) = 1$), в полосе задерживания – нулю ($H_d(j\omega_k) = 0$) и в переходной полосе – некоторым промежуточным варьируемым (оптимизируемым) значениям $H_d(j\omega_k) = H_1 = \text{var}$, от которых зависит качество аппроксимации заданной частотной характеристики.

ДЧХ $H_d(j\omega_k)$ может быть поставлена в соответствие импульсная характеристика $h_p(n)$, определяемая с помощью обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ):

$$h_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k)\, e^{j\omega_k n T_д} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k (n+iN) T_д},$$

где $i = 0, \pm1, \pm2, \pm \ldots$.

Она является периодической функцией с периодом $N_p = N$, т.к. *дискретизация в частотной области* приводит *к периодизации во временной*.

В качестве импульсной характеристики НФ выбирается один период импульсной характеристики $h_p(n)$, сдвинутый вправо на $(N - 1)/2$ отсчетов (для обеспечения физической реализуемости) и усеченный прямоугольной весовой функцией (для получения КИХ-фильтра) (рис. 5.5):

$$h(n) = h_p\left(n - \frac{N-1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots N-1.$$

По импульсной характеристике $h(n)$ находится *частотная характеристика* фильтра $H(j\omega)$, аппроксимирующая заданную:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n T_д} = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}T_д} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(\omega_k) \frac{\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}NT_д}{\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}T_д}.$$

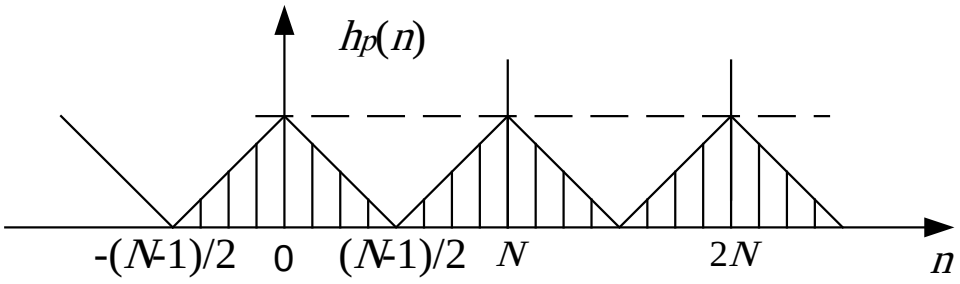


Рис. 5.5. Импульсная характеристика, соответствующая ДЧХ

Множителем $e^{-j\omega\frac{N-1}{2}T_д}$ определяется ФЧХ фильтра

$$\varphi(\omega) = -\omega\frac{N-1}{2}T_д,$$

строго линейная вследствие симметрии импульсной характеристики.

АЧХ фильтра на частотах $\omega = \omega_k$ точно совпадает с частотными выборками ДЧХ: $H(\omega_k) = H_d(\omega_k)$, а на частотах $\omega \neq \omega_k$ $H(\omega) \neq H_d(\omega)$ – отличается от заданной на величину погрешности аппроксимации (огибающая на рис. 5.4).

Качество аппроксимации в данном методе зависит *от числа выборок частотной характеристики* в переходной полосе L *и их значений* $H_{i\ опт}$ (i = 1, 2, ..., L), делающих аппроксимируемую функцию более гладкой. Различным значениям L соответствуют следующие примерные значения максимального уровня боковых лепестков:

$L = 0$: $\delta_{2\ макс} \approx -20$ дБ; $L = 1$: $\delta_{2\ макс} \approx -40$ дБ;
$L = 2$: $\delta_{2\ макс} \approx -50$–$60$ дБ; $L = 3$: $\delta_{2\ макс} \approx -80$–$100$ дБ.

Реально методом частотной выборки можно синтезировать НФ с минимальным затуханием в полосе задерживания до (90–120) дБ [10].

Таким образом, оптимизация фильтра заключается в выборе L – числа выборок в переходной полосе и поиске их оптимальных значений $H_{i\ опт}$, минимизирующих погрешности аппроксимации. Очевидно, что с увеличением числа варьируемых выборок существенно усложняется процедура оптимизации.

На основе вышеприведенного краткого описания предлагается самостоятельно разработать методику (порядок) синтеза НФ методом частотной выборки.

5.3. Численные методы синтеза цифровых фильтров

Численные, или оптимальные, методы синтеза ЦФ реализуются на ЭВМ с помощью процедур непосредственной аппроксимации заданных частотных характеристик фильтра в соответствии с определенными критериями минимизации ошибок аппроксимации. При этом частотные характеристики фильтра могут иметь произвольную форму. Основными при аппроксимации БИХ и КИХ-фильтров являются критерии минимума среднего квадрата ошибки (СКО) и наилучшего чебышевского равноволнового приближения (минимаксный критерий).

Целевая функция алгоритма минимизации СКО определяется выражением

$$E = \sum_{i=1}^{M} \left[\left| H(j\omega_i) \right| - \left| H_d(j\omega_i) \right| \right]^2,$$

где $H_d(j\omega_i)$, $H(j\omega_i)$ – заданная и аппроксимирующая частотные характеристики фильтра, вычисляемые на дискретном множестве частот ω_i. Эта функция нелинейна относительно коэффициентов фильтра.

Минимаксный критерий заключается в минимизации на множестве частот ω максимальных значений взвешенного функционала ошибки:

$$E(\omega) = W(\omega) \left| H(j\omega) - H_d(j\omega) \right|,$$

где $W(\omega)$ – положительная весовая функция.

Поиск оптимальных значений коэффициентов фильтра при численной аппроксимации осуществляется методами наименьших квадратов, линейного

программирования, нелинейной оптимизации (алгоритм Флетчера-Пауэлла для БИХ-фильтров) и многократной замены Ремеза (для фильтров с чебышевской аппроксимацией КИХ и БИХ-типа). Для них имеются эффективные компьютерные программы, например, программа Макклемана синтеза оптимальных по критерию Чебышева КИХ-фильтров и универсальные программы синтеза ЦФ *FDAS*, *DFDP*, *Filter Solutions*, *QED*1000. Стандартные и численные (оптимальные) методы синтеза ЦФ включают в себя программы *LabVIEW*, *System View*, *MatLAB* (модули *Signal Procesing*, *Communications* и *Filter Design*) [5, 14].

Для численного синтеза КИХ и БИХ-фильтров используются также методы прямого и обратного адаптивного моделирования [13].

При синтезе ЦФ численными методами учитываются обязательные условия линейности ФЧХ КИХ-фильтров и обеспечения устойчивости БИХ-фильтров.

Синтезированные численными методами оптимальные ЦФ имеют наименьшую (среднеквадратическую или максимальную) погрешность аппроксимации при заданном порядке фильтра или наименьший порядок при заданной (допустимой) погрешности аппроксимации. Поэтому их применяют при жестких ограничениях на быстродействие, а следовательно, и стоимость используемых для реализации ЦФ аппаратно-программных средств.

Контрольные вопросы

1. Как находится импульсная характеристика синтезируемого НФ в методе весовых функций?
2. Каковы параметры и типичный вид частотных характеристик весовых функций?
3. Какова связь параметров частотной характеристики НФ и весовой функции?
4. Какие требования предъявляются к весовым функциям при синтезе НФ?
5. Из каких условий выбирается вид весовой функции?
6. Как находится необходимая длина весовой функции?
7. Как в методе весовых функций обеспечивается необходимое затухание АЧХ в полосе задерживания?
8. Как в методе весовых функций достигается соответствие заданных и расчетных граничных частот фильтра?
9. В чем особенность и преимущество использования весовых функций Кайзера для синтеза НФ?
10. Почему метод весовых функций относят к итерационным методам синтеза НФ?
11. Какую ФЧХ имеют НФ, синтезированные методом весовых функций?
12. Как находится импульсная характеристика синтезируемого НФ методом частотной выборки?
13. Из каких условий выбирается шаг дискретизации по частоте в методе частотной выборки?
14. Как достигается требуемое качество аппроксимации в методе частотной выборки?
15. В чем заключается эффективность использования численных методов синтеза ЦФ?

Лекция 6
Оценка и обеспечение точности цифровых фильтров

Реальные процессоры ЦОС работают с двоичными числами конечной разрядности, а следовательно, и точности. *Конечную разрядность имеют*: цифровые сигналы, коэффициенты, их произведения и суммы произведений, определяемые, соответственно, разрядностями АЦП, регистров, умножителей и сумматоров процессора или длиной слова процессора.

Уменьшение разрядности повышает быстродействие и упрощает обработку, однако при этом возрастает ее погрешность, ухудшаются характеристики системы, а в рекурсивных фильтрах возможна и потеря устойчивости.

В связи с этим при проектировании систем ЦОС возникают задачи оценки влияния и обоснованного выбора разрядности чисел. Далее рассматриваются способы их решения, используемые при синтезе и реализации цифровых фильтров.

6.1. Влияние конечной разрядности чисел

Влияние конечной разрядности чисел на характеристики систем ЦОС связано с конкретными арифметическими операциями, которые выполняются в процессе обработки сигнала, и зависит от *способа представления чисел*. В вычислительных устройствах числа представляются *с фиксированной точкой* (целые и вещественные) и *с плавающей точкой* (вещественные). Для реализации быстродействующих систем ЦОС используются *процессоры с фиксированной точкой*. Они выполняют базовые операции умножения и сложения (накопления сумм произведений) чисел, представленных с фиксированной точкой. Результаты этих операций могут превышать по разрядности исходные данные, что в общем случае приводит *к переполнению разрядной сетки*. Характер переполнения зависит от вида или формы представления обрабатываемых чисел. При цифровой обработке используется целочисленное, дробное и смешанное представление чисел с фиксированной точкой. Однако наиболее удобным является представление чисел в виде *правильных дробей для сигналов и смешанных дробей, содержащих целую часть, – для коэффициентов* (рис. 6.1). Переполнения при *сложении* (накоплении сумм произведений) в этом случае происходят слева относительно разрядной сетки и приводят к грубым недопустимым погрешностям.

Например, при сложении двух чисел в дополнительном коде –0,625 и –0,4375 вместо правильного результата –1,0625 получается грубое значение 0,0625: 1.0110 + 1.1001 = 10.1111. Для представления сумм часто используют 2 знаковых разряда, различие значений которых говорит о наличии переполнения. Следует отметить, что в процессе накопления допустимы промежуточные переполнения при правильном конечном результате. Например, если к полученной сумме прибавить положительное число 0,125 (0.0010), то результат накопления трех слагаемых будет правильный (–0,875 или 1.0001).

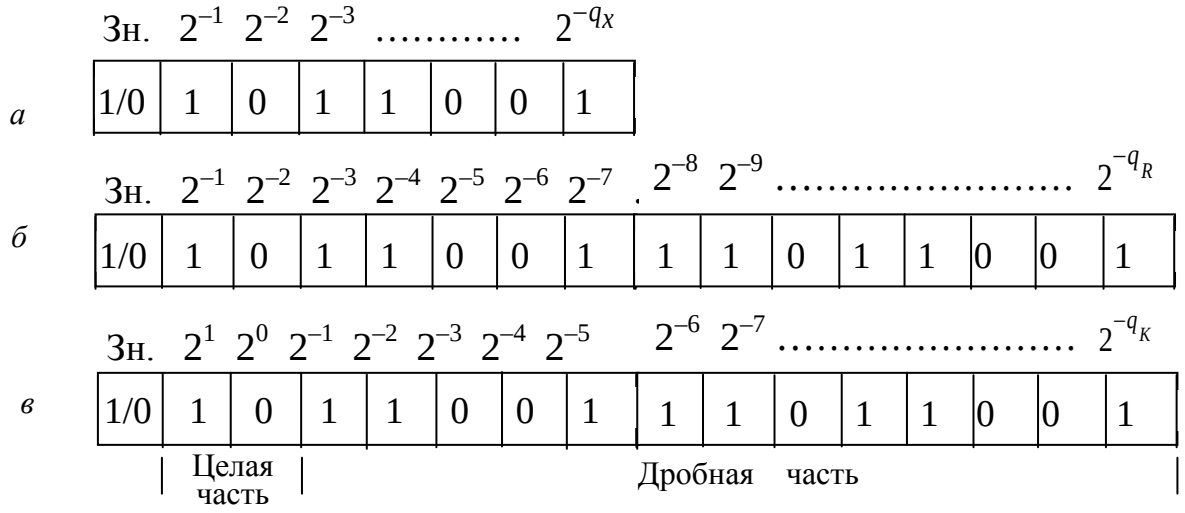


Рис. 6.1. Формы представления чисел для входного сигнала (*а*), внутренних сигналов (*б*) и коэффициентов (*в*)

Переполнения при суммировании предотвращают путем *масштабирования сигналов* в соответствующих точках фильтра. Для защиты от грубых ошибок применяют также накапливающие сумматоры с насыщением, у которых при переполнении устанавливаются максимальное положительное (≈ 1) или максимальное отрицательное (–1) значения суммы.

В результате *умножения* отсчетов сигнала на коэффициенты фильтра возрастание разрядности происходит справа относительно разрядной сетки, т.е. в дробной части произведения. *Например***,** в результате перемножения двух дробных двоичных чисел 0.1111 (0,9375) и 0.0111 (0,4375), имеющих 4 значащих разряда, получается произведение 00.01101001 (точное значение 0,4101562), содержащее 4 дополнительных младших разряда. В общем случае число разрядов произведения равно сумме разрядов сомножителей: значащих, знака и целой части. Чаще всего при цифровой обработке разрядность произведений необходимо привести к разрядности сомножителей. Например, в рекурсивном фильтре полученные путем накопления сумм произведений отсчеты сигнала $y(n)=\sum_{l=0}^{N} b_l x(n-l)-\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k)$ снова умножаются в рекурсивной части на коэффициенты фильтра a_k (произведения $a_k y(n-k)$), что вызывает еще большее возрастание их разрядности. Ограничение разрядности произведений для таких фильтров является принципиально необходимым.

Возрастание разрядности справа (со стороны младших разрядов) при умножении дробных и смешанных чисел позволяет легко ограничивать разрядность произведения или накопленной суммы произведений путем отбрасывания (с усечением или округлением) необходимого числа младших разрядов. *Например***,** если произведение из предыдущего примера ограничить 4

значащими разрядами, то получится приближенное (не грубое) значение произведения, равное 0,375 (0.0110) при усечении и 0,4375 (0.0111) при округлении.

Ограничение разрядности чисел называется их *квантованием*. Очевидно, что квантование произведений или сумм произведений эквивалентно умножению с конечной точностью и приводит к погрешности обработки. Эту погрешность аналогично погрешности квантования АЦП называют *шумом квантования*, или *собственным шумом цифрового фильтра*. Ее случайный характер обусловлен априорной непредсказуемостью значений цифровых сигналов, циркулирующих в фильтре.

Оценка погрешности квантования чисел

Вызываемую ограничением разрядности чисел погрешность квантования определяют разностью их квантованного и точного значений: $e(n) = v_{кв}(n) - v(n)$. Полагается, что значения погрешности или отсчеты шума квантования $e(n)$ равновероятны в пределах $-2^{-q_{др}} \le e(n) \le 0$ при усечении и $-(2^{-q_{др}}/2) \le e(n) \le (2^{-q_{др}}/2)$ при округлении и характеризуются максимальным значением $|e|_{max} = E_m = \eta 2^{-q_{др}}$, дисперсией $\sigma_e^2 = 2^{-2q_{др}}/12$ и среднеквадратичным значением (скз) $\sigma_e = 2^{-q_{др}}/\sqrt{12}$, где $\eta = 1$ при усечении и 1/2 при округлении; $q_{др}$ – число сохраняемых разрядов дробной части числа; $2^{-q_{др}}$ – вес единицы младшего разряда числа (емр).

Для цифрового сигнала АЦП $q_{др} = q_x$ – определяется числом разрядов АЦП без учета знакового разряда.

Для внутренних сигналов фильтра, получаемых в результате умножения и накопления сумм произведений и приведения их к формату правильной дроби, $q_{др}$ равно числу разрядов q_R сигнальных регистров фильтра (также без учета знакового разряда) или, иначе, длине слова фильтра.

К основным *задачам* анализа и синтеза ЦФ, связанным с *конечной разрядностью* чисел, относят:

♦ оценку погрешности обработки сигнала, или шума квантования, на выходе фильтра и необходимой разрядности АЦП и регистров фильтра;

♦ определение масштабных множителей, исключающих переполнение сумматоров в заданном диапазоне изменения входного сигнала;

♦ проверку условий устойчивости рекурсивных фильтров при малых уровнях сигналов;

♦ определение допустимой разрядности коэффициентов фильтра $q_к$.

Решение поставленных задач предполагает также и сравнительную оценку степени чувствительности различных структур ЦФ к конечной разрядности чисел.

Влияние квантования коэффициентов фильтра

Коэффициенты ЦФ определяют на первом этапе синтеза – при решении задачи аппроксимации [8, 10]. Их точные значения ограничивают с помощью округления некоторым конечным числом двоичных разрядов $q_к$. Это приводит к *изменению значений нулей и полюсов фильтра и отклонению его* АЧХ *и* ФЧХ *от заданных*.

Минимально необходимую разрядность коэффициентов находят многократным расчетом АЧХ и ФЧХ для квантованных значений коэффициентов, исходя из допустимой степени отклонения указанных характеристик.

При квантовании коэффициентов возможно смещение полюсов рекурсивных фильтров за пределы единичной окружности, что ведет к потере устойчивости. Во избежание этого необходимо контролировать значения полюсов фильтра в процессе квантования коэффициентов.

6.2. Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах

Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах используют для исключения возможного переполнения сумматоров при накоплении сумм произведений и осуществляют введением *масштабных умножителей* на входе всего фильтра (рис. 6.2, *а*) или входах его звеньев в случае каскадной реализации (рис. 6.2, *б*).

Масштабные множители (мм) m_i выбирают так, чтобы амплитуды сигналов на выходах сумматоров или звеньев $v_i(n)$ (рис. 6.3) при максимальном значении сигнала на входе фильтра $x(n)$, равном единице ($|x(n)|_{max} = 1$), не превышали по модулю некоторого максимального значения, принимаемого также обычно за единицу ($|v_i(n)|_{max} = 1$).

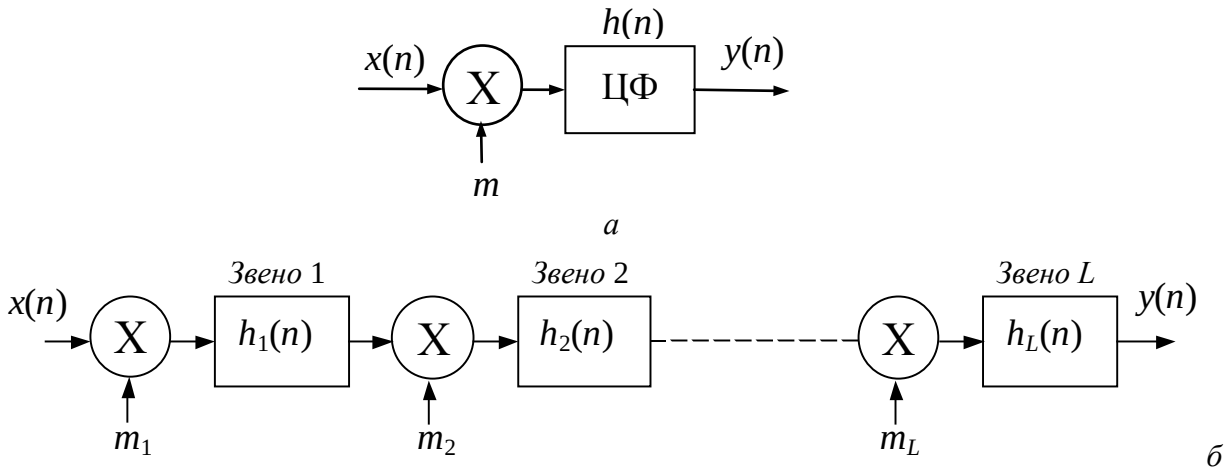


Рис. 6.2. Схемы включения масштабных умножителей

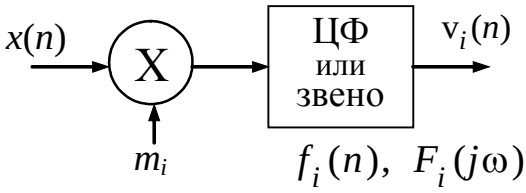


Рис. 6.3. Схема для расчета масштабных множителей

Числа же на входах сумматоров могут быть по модулю больше единицы и превышать значения суммы [9]. Однако, как показано выше, при суммировании в дополнительном коде это не приводит к переполнению, если сумма чисел по модулю меньше единицы. В то же время при реализации фильтра необходимо предусмотреть дополнительные разряды для целой части чисел на входах или выходах умножителей. Их количество находят в соответствии с максимальными значениями коэффициентов фильтра [9].

Масштабирование в общем случае уменьшает уровни сигналов фильтра и ухудшает отношение сигнала к уровню его собственных шумов квантования, который не зависит от уровня сигнала. Поэтому при выборе мм и способов их введения необходимо учитывать также условие сохранения максимально возможного соотношения сигнал–шум. При включении мм на входе фильтра (рис. 6.2, *а*) отношение сигнала к уровню собственного шума квантования уменьшается с уменьшением масштабного множителя m и является наихудшим. При включении мм на входах звеньев (рис. 6.2, *б*) на масштабные множители умножается не только сигнал, но и собственные шумы квантования предыдущих звеньев, что обеспечивает лучшее отношение сигнала к шуму квантования на выходе фильтра и расширение динамического диапазона обрабатываемых сигналов.

Методы расчета масштабных множителей

Расчет мм выполняют на основе линейной модели цф без учета эффектов квантования сигналов. Возможны три метода расчета мм: временной, спектральный и статистический.

В соответствии с *временным методом* расчета мм сигнал в любой точке фильтра $v_i(n)$ (в том числе и на выходах сумматоров) определяется сверткой входного сигнала и импульсной характеристики фильтра $f_i(n)$ от входа до данной точки, т.е.

$$v_i(n) = m_i' \sum_{l=0}^{\infty} f_i(l)\, x(n-l)\,.$$

Записывая предельное соотношение для $v_i(n)$:

$$\left|v_i(n)\right|_{\max} \le m_i' \sum_{l=0}^{\infty} \left| f_i(l)\right| \left|x(n-l)\right|_{\max} \le 1$$

и подставляя в него максимальное значение входного сигнала $|x(n-l)|_{\max} = 1$ (что соответствует сигналу на входе типа скачок), получаем расчетное значение ММ временным методом:

$$m_i' \le 1 \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} \left| f_i(n) \right| . \qquad (6.1)$$

Данный метод расчета дает *предельную* (нижнюю) оценку для мм, исключающую переполнения *при любых сигналах*. Однако отношение сигнала к шуму квантования при этом является минимальным, что ограничивает его применение.

Спектральный метод расчета масштабных множителей основан на соотношении

$$\mathrm{V}_i(j\omega) = m_i'' F_i(j\omega) X(j\omega),$$

определяющем спектральную плотность сигнала на выходе i-го сумматора через спектральную плотность входного сигнала $X(j\omega)$ и частотную характеристику от входа фильтра до выхода i-го сумматора $F_i(j\omega)$. Ему соответствует предельное соотношение

$$\left|\mathrm{V}_i(j\omega)\right|_{\max} \le m_i'' \left|F_i(j\omega)\right|_{\max} \left|X(j\omega)\right|_{\max} \le 1.$$

Выражая $|x(j\omega)|$ и $\left|\mathrm{V}_i(j\omega)\right|_{\max}$ через амплитуды гармонических сигналов x_m и v_{im} на частотах ω_i максимумов ачх $|f_i(j\omega_i)|$ и, полагая $x_{m\,\max} = = \mathrm{v}_{im\,\max} = 1$, из данного соотношения находим оценку мм спектральным методом:

$$m_i'' \le 1 \Big/ \left|F_i(j\omega)\right|_{\max} . \qquad (6.2)$$

Она обратно пропорциональна максимальному значению АЧХ от входа фильтра до выхода i-го сумматора в полосе частот $(0–\omega_д/2)$.

Этот метод дает удовлетворительную оценку масштабных множителей *для квазигармонических сигналов*.

Статистический метод расчета масштабных множителей основан на выражении для дисперсии шума на выходе i-го сумматора при воздействии на входе фильтра сигнала $x(n)$ типа *белый шум* с максимальным среднеквадратичным значением $\sigma_{x\,\max} \le 1/\gamma$, где $\gamma = (3\text{-}4)$:

$$\sigma_{\mathrm{v}_i}^2 = \sigma_x^2 \frac{(m_i''')^2}{\pi} \int_0^{\pi} \left|F_i(j\omega)\right|^2 d(\omega T_д) = (m_i''')^2 \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_i^2(n).$$

Ему отвечает предельное соотношение

$$\sigma_{\mathrm{v}_i\,\max} \le m_i''' \sigma_{x\max} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_i^{\,2}(n) \right]^{1/2} \le 1/\gamma ,$$

Из которого получается статистическая оценка мм:

$$m_i''' \le 1 \Big/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_i^2(n) \right)^{1/2} . \qquad (6.3)$$

Этот метод дает удовлетворительную оценку мм *для широкополосных и случайных сигналов* с равномерным энергетическим спектром.

Другие, более общие условия масштабирования сигналов изложены в литературе [8, 10].

Таким образом, *для расчета масштабных множителей любым из методов* необходимо вычислить *импульсные и частотные характеристики* $f_i(n)$ *и* $F_i(j\omega)$ *от входа фильтра до выхода i-го сумматора и* воспользоваться *соотношениями* (6.1), (6.2), (6.3) *с учетом класса входных сигналов.*

При масштабировании фильтра включением одного ММ на его входе в соответствии с рис. 6.2, *а* для расчета ММ m', m'', m''' используются импульсная $h(n)$ и частотная $H(j\omega)$ характеристики всего фильтра.

Ввиду трудоемкости вычислений расчет мм выполняют с помощью эвм на основе конкретизируемых ниже расчетных соотношений для различных цифровых фильтров.

Расчет масштабных множителей звена рекурсивного фильтра 2-го порядка прямой формы реализации

Прямой форме реализации звена 2-го порядка рцф соответствует приводимая ниже структурная схема (рис. 6.4).

Кроме масштабного умножителя, на ней показаны также эквивалентные источники шума квантования умножителей $e_{ri}(n)$, не учитываемые при оценке мм m. Звено содержит один сумматор $\sum$ ($i = 1$). Импульсная и частотная характеристики от входа фильтра до выхода сумматора $f(n)$, $f(j\omega)$ совпадают в данном случае с соответствующими характеристиками всего фильтра: $f(n) = h(n)$; $f(j\omega) = h(j\omega)$.

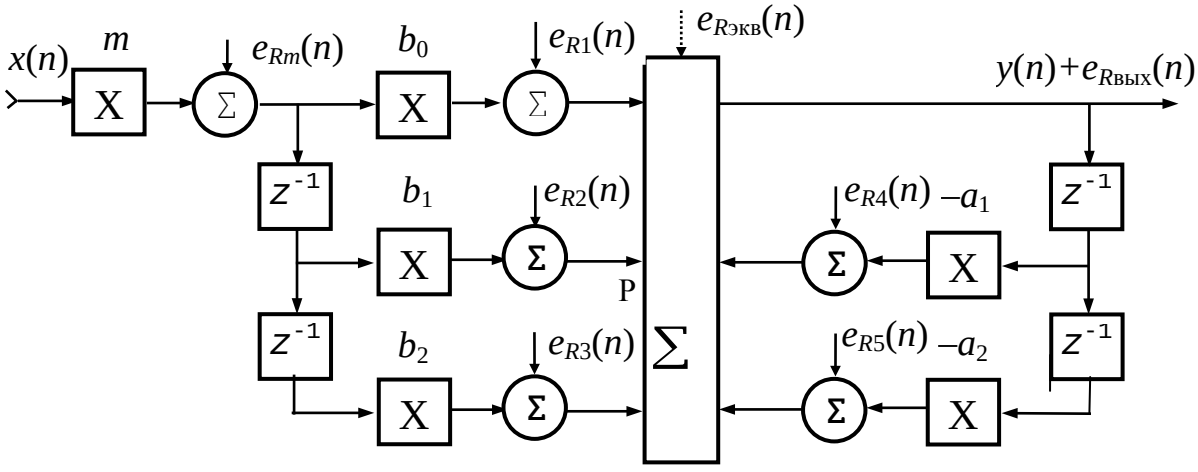


Рис. 6.4. Звено рф с элементами масштабирования и эквивалентными источниками шума квантования (прямая форма реализации)

Звено рф может быть *промасштабировано* также *умножением на* мм *коэффициентов* b_0, b_1, b_2 *его нерекурсивной части.*

Аналогичным образом может быть выполнен расчет масштабных множителей *для звена рекурсивного фильтра* 2*-го порядка канонической формы реализации* [2, 3].

Расчет масштабных множителей Для каскадной структуры рекурсивного фильтра

В каскадной структуре (см. рис. 6.2, *б*) мм включаются между звеньями фильтра. Полагаем, что звенья имеют *прямую форму реализации* и число сумматоров равно числу звеньев: $i = 1, 2, \ldots, l$.

Частотную и импульсную характеристики от входа до выхода сумматора i-го звена определяют здесь с учетом всех предыдущих звеньев и их масштабных множителей.

Для сумматора (звена) 1

$$f_1(n) = h_1(n),\ F_1(j\omega) = H_1(j\omega);$$

по ним находится ММ m_1 на входе звена 1.

Для сумматора (звена) 2

$$f_2(n) = m_1 h_1(n) * h_2(n),\ F_2(j\omega) = m_1 H_1(j\omega) H_2(j\omega);$$

по ним находится ММ m_2 на входе 2-го звена ($*$ – символ свертки).

Для сумматора (звена) L

$$f_L(n) = m_1 \cdot m_2 \ldots m_{L-1} h_1(n) * h_2(n) \ldots h_L(n),$$
$$F_L(j\omega) = m_1 \cdot m_2 \ldots m_L H_1(j\omega) H_2(j\omega) \ldots H_L(j\omega);$$

по ним находится ММ m_L на входе L-го звена.

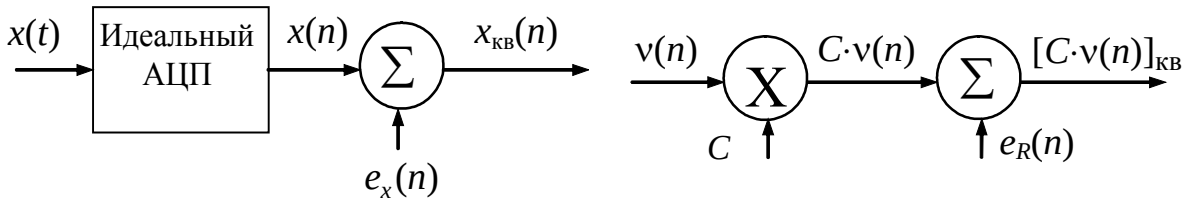
При *канонической форме реализации* звеньев выражения $f_{i2}(j\omega)$, $f_{i2}(n)$ для второго сумматора совпадают с вышеприведенными для прямой формы реализации, а для первого сумматора имеют вид

$$F_{i1}(j\omega) = \prod_{l=1}^{i} m_{l-1} H_{l-1}(j\omega) H_{ip}(j\omega);\quad f_{i1}(n) = \frac{T_д}{2\pi} \int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} F_{i1}(j\omega) e^{j\omega n T_д} d\omega.$$

Обычно мм принимают равными ближайшему значению $\hat{m} = 2^{-q_m}$, где $q_m = \text{int}\log_2 m$, символ int означает целую часть числа плюс единица. При этом умножение выполняют простым сдвигом числа влево или вправо на q_m разрядов.

6.3. Оценка шумов квантования и требуемой разрядности АЦП и регистров

Погрешность обработки сигналов в цф характеризуется шумом квантования на выходе фильтра, обусловленном шумами квантования входного сигнала и результатов умножения отсчетов сигнала на коэффициенты фильтра. Оценка шума находится по *шумовой эквивалентной схеме фильтра*, содержащей эквивалентные источники шума квантования, включаемые в точках структурной схемы фильтра, где происходит квантование чисел. В соответствии с шумовыми эквивалентными схемами источника входного цифрового сигнала (ацп) (рис. 6.5, *а*) и умножителя (рис. 6.5, *б*) шумы эквивалентных источников $e_x(n) = x_{кв}(n) - x(n)$ и $e_r(n) = cv(n) - [cv(n)]_{кв}$ суммируются с неквантованными, т.е. С точными значениями входного сигнала $x(n)$ и произведения $cv(n)$.



а *б*

Рис. 6.5. Шумовые эквивалентные схемы АЦП (*а*) и умножителя (*б*)

Шумы эквивалентных источников, представляемых на схемах фиктивными сумматорами, характеризуются предельным и среднеквадратичным значениями и дисперсией, зависящими от числа сохраняемых при квантовании разрядов дробной части q входного сигнала и произведения:

$$|e(n)|_{\max} = \eta 2^{-q}; \quad \sigma_e = 2^{-q}/(12)^{1/2}; \; \sigma_e^2 = 2^{-2q}/12.$$

Значения q определяются, соответственно, разрядностями ацп q_x и умножителей (регистров) фильтра q_r без учета их знаковых разрядов (а для умножителей и без учета разрядов целой части произведения, если таковые имеются); $\eta = 1$ при квантовании с усечением и 1/2 – при округлении.

Возможны два метода оценки точности цф: детерминированный и вероятностный.

Детерминированный метод оценки шумов квантования

Детерминированный метод дает *предельную оценку шума квантования на выходе фильтра*, гарантирующую правильный выбор разрядности чисел для произвольных сигналов. В соответствии с ним шум на выходе фильтра от i-го источника шума $e_i(n)$ можно найти для линейной системы путем свертки мгновенного значения шума $e_i(n)$ с импульсной характеристикой $g_i(n)$, определяемой от точки приложения шума до выхода фильтра:

$$e_{\text{вых}\,i}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} g_i(m) e_i(n-m).$$

Перейдя к предельному соотношению

$$|e_{\text{вых}i}(n)| \le \sum_{m=0}^{\infty} |g_i(m)|\,|e_i(n-m)|,$$

При максимальном значении шума i-го источника $|e_i(n-m)| = |e_i(n)|_{\max} = \eta 2^{-qi}$ получим максимальное значение вызываемого им шума квантования на выходе фильтра:

$$|e_{\text{вых}i}(n)|_{\max} = E_{mi} \le \eta 2^{q_i} \sum_{n=0}^{\infty} |g_i(n)|. \qquad (6.4)$$

Суммарное предельное значение шума квантования на выходе линейной системы находится суммированием шумов (4.4) от всех источников:

$$E_{m\,\text{вых}} = \sum_i |e_{\text{вых}\,i}(n)|_{\max}.$$

Вероятностный метод оценки шумов квантования

Метод, основанный на вероятностных характеристиках шума квантования, позволяет оценить *дисперсию* или *среднеквадратичное значение шума квантования на выходе фильтра*. При этом полагается, что отсчеты шума квантования независимы (шум является белым) и их источники не коррелированы между собой и входным сигналом. С учетом этих условий дисперсия шума на выходе фильтра от i-го источника шума для линейной дискретной системы определяется выражением [10]

$$\sigma^2_{\text{вых}\,i} = \sigma_i^2 \sum_{n=0}^{\infty} g_i^2(n) = \sigma_i^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |G_i(j\lambda)|^2\, d\lambda = \sigma_i^2 L_i,$$

ГДЕ $\sigma_i^2 = 2^{-2q_i}/12$ – дисперсия шума i-го источника; $g_i(j\lambda)$ – частотная характеристика от точки приложения i-го источника шума до выхода фильтра.

Дисперсия, или мощность, шума на выходе фильтра от действия всех источников равна сумме дисперсий шумов отдельных источников:

$$\sigma^2_{\text{вых}} = \sum_i \sigma^2_{\text{вых}\,i} = P_{\text{ш вых}} \qquad (6.5)$$

Корень из (6.5) определяет среднеквадратическое значение выходного шума.

Выполнимость условий, накладываемых на вероятностный метод, и, следовательно, достоверность получаемых с его помощью оценок зависят от уровня и характера обрабатываемых сигналов. В частности, условиям о некоррелированности отсчетов шума между собой и входным сигналом плохо удовлетворяют такие сигналы, как единичный прямоугольный импульс или синусоидальное колебание. Наиболее они обоснованы для сложных быстроизменяющихся сигналов, таких как речевой, музыкальный и др., а также при большом уровне внешних шумов, когда от выборки к выборке мгновенное значение сигнала изменяется на несколько уровней квантования. Поэтому надежность оценок, получаемых вероятностным методом, в общем случае

ниже, чем детерминированным. Их можно рассматривать в качестве *нижней границы* оценок шумов квантования и требуемых разрядностей ацп и регистров фильтра.

Одновременное использование обоих методов позволяет определить *границы возможных значений параметров* цф, которые уточняются затем путем моделирования на эвм или макетирования.

Оценка шумов квантования детерминированным и вероятностным методами для конкретных структур цф сводится к построению их шумовой эквивалентной схемы и определению импульсных и частотных характеристик от каждого i-го источника шума квантования до выхода фильтра.

Расчет шума квантования ацп на выходе цифрового фильтра

В соответствии с расчетной шумовой эквивалентной схемой (рис. 6.6) поступающий на вход фильтра квантованный сигнал ацп представляется суммой его неквантованных (точных) значений и шума квантования ацп: $x_{кв}(n) = x(n) + e_x(n)$. Сигнал на выходе фильтра без учета квантования чисел в самом фильтре также в соответствии с принципом суперпозиции может быть определен в виде суммы его точного значения и шума квантования, обусловленного ацп: $y_{кв}(n) = y(n) + e_{вых}(n)$.

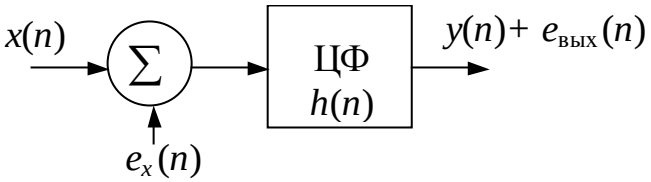


Рис. 6.6. Схема для расчета шумов квантования АЦП на выходе ЦФ

Необходимые для оценки выходного шума импульсная и частотная характеристики от точки приложения шума до выхода фильтра в данном случае совпадают с результирующими импульсной и частотной характеристиками фильтра: $g_i(n) = h(n)$; $g_i(j\lambda) = h(j\lambda)$. В соответствии с (6.4), (6.5) это дает следующие оценки предельного значения и дисперсии шума на выходе цф:

$$E_{m\,вых} = \eta 2^{-q_x} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|; \qquad \sigma^2_{e\,вых} = \frac{2^{-2q_x}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = P_{e\,вых}\,. \qquad (6.6)$$

Задаваясь допустимыми значениями максимума шума квантования или его среднеквадратичного значения, можно из (6.6) получить *верхнюю и нижнюю оценки требуемой разрядности* ацп:

$$q'_{АЦП} = \operatorname{int}\log_2 \frac{\eta \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|}{E_{m\,вых.доп}}; \quad q''_{АЦП} = \operatorname{int}\log_2 \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)}}{\sqrt{12}\sigma_{e\,вых.доп}}, \qquad (6.7)$$

Где символ int означает целую часть числа плюс единица.

Значение $q_{\text{АЦП}}$ выбирается из условия $q''_{\text{АЦП}} \le q_{\text{АЦП}} \le q'_{\text{АЦП}}$ в зависимости от вида сигнала.

Расчет собственных шумов квантования звена РФ 2-го порядка для прямой формы реализации

Собственные шумы цф обусловлены ограничением разрядности произведений (или сумм произведений) отсчетов сигнала на коэффициенты фильтра (взвешенных отсчетов сигнала). Необходимые для их оценки шумовые эквивалентные схемы цф получаются заменой реальных умножителей их шумовыми эквивалентами в соответствии с рис. 6.5, *б*.

При прямой форме реализации звена рф все источники шума квантования умножителей в соответствии с шумовой эквивалентной схемой (рис. 6.4) включены ко входам сумматора и могут быть заменены одним эквивалентным источником шума $e_{R\acute{y}\hat{e}\hat{a}}(n) = \sum_{i=1}^{p} e_{Ri}(n)$, где p – число умножителей с нетривиальными коэффициентами умножения b_i, a_i, отличными от 0 или ±1. В общем случае p = 5. На схеме отражен также шум квантования масштабного умножителя $e_m(n) = e_{rm}(n)$, включенного на входе фильтра. Этот шум имеет место только при условии $q_{\text{ацп}} + q_m > q_r$. Необходимые для оценки шума на выходе фильтра импульсная и частотная характеристики относительно точек приложения источников шума совпадают для масштабного умножителя с общими импульсной и частотной характеристиками фильтра $g_1(n) = h(n)$, $g_1(j\lambda) = h(j\lambda)$, а для эквивалентного источника шума умножителей $e_{r\text{экв}}(n)$ – с характеристиками его рекурсивной части $g_2(n) = h_{\text{р}}(n)$, $g_2(j\lambda) = h_{\text{р}}(j\lambda)$. Предельная оценка и дисперсия шума квантования на выходе звена при этом, в соответствии с (6.4), (6.5), будут равны:

$$E_{m\,\text{вых}} = \eta 2^{-q_R}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| + p\sum_{n=0}^{\infty}|h_{\text{р}}(n)|\right);$$

$$\sigma^2_{e\,\text{вых}} = \frac{2^{-2q_R}}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|^2 + p\sum_{n=0}^{\infty}|h_{\text{р}}(n)|^2\right). \qquad (6.8)$$

В случае ограничения разрядности сумм произведений единственный источник шума квантования произведений включается на выходе сумматора. Импульсная характеристика от точки приложения его до выхода звена также совпадает с импульсной характеристикой рекурсивной части $h_{\text{р}}(n)$, как совпадают и расчетные соотношения для обусловленного им шума квантования на выходе звена (6.8) при значении p = 1.

Из (6.8), задаваясь допустимыми значениями шума на выходе фильтра, можно найти необходимую разрядность произведений (сумм произведений) q_r, *определяющую разрядность сигнальных регистров фильтра.*

Если масштабный умножитель на входе фильтра не создает шумов квантования, то первые слагаемые в скобках (6.8) равны нулю.

Аналогичным образом может быть выполнен расчет собственных шумов квантования для звена рекурсивного фильтра 2-го порядка *канонической формы реализации* [2, 3].

Расчет собственных шумов квантования для каскадной формы реализации рекурсивного фильтра

Расчет шума квантования для каскадной структуры РФ выполняется с помощью обобщенной шумовой эквивалентной схемы (рис. 6.7). На этой схеме, как и в случае параллельной реализации, звенья фильтра полагаются идеальными (нешумящими), а их выходные шумы представляются L эквивалентными источниками шума $e_{\text{вых }i}(n)$. Шум каждого из них проходит на выход через все последующие звенья фильтра.

Частотные характеристики от i-го источника до выхода фильтра определяются здесь произведением частотных характеристик следующих за ним звеньев, а импульсные характеристики – сверткой соответствующих импульсных характеристик:

$$G_i(j\omega) = H_{i+1}(j\omega)H_{i+2}(j\omega).\ .\ H_L(j\omega),$$
$$g_i(n) = h_{i+1}(n) * h_{i+2}(n) * .\ .\ * h_L(n), \qquad (6.9)$$

где $i = 1, 2,\ldots, L-1$. Для шума последнего звена, который непосредственно проходит на выход фильтра, $G_L(j\omega) = 1$, $g_L(n) = u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$.

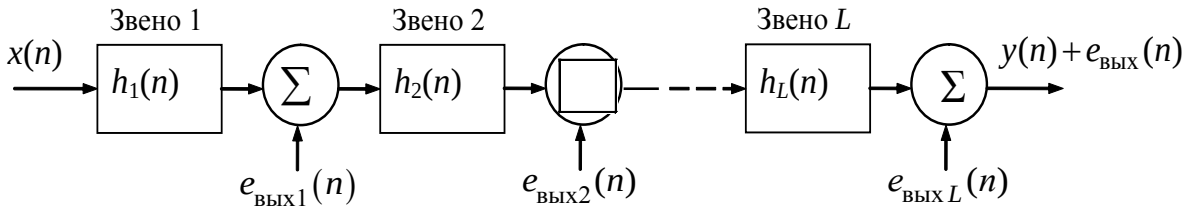


Рис. 6.7. Обобщенная шумовая эквивалентная схема РФ для каскадной формы реализации

При этом собственные шумы звеньев так же, как и их частотные и импульсные характеристики, определяются с учетом масштабных множителей, включаемых на входах звеньев.

Зная частотные и импульсные характеристики (6.9), можно найти предельное значение и дисперсию шума на выходе каскадно реализуемого РФ:

$$E_{m\text{вых}} = \sum_{i=1}^{L-1}\left[E_{m\text{вых}\,i}\sum_{n=0}^{\infty}|g_i(n)|\right] + E_{m\text{вых}\,L}, \qquad (6.10)$$

$$\sigma^2_{e\,\text{вых}} = \sum_{i=1}^{L-1}\left[\sigma^2_{e\,\text{вых}\,i}\sum_{n=0}^{\infty} g_i^{\,2}(n)\right] + \sigma^2_{e\,\text{вых}\,L}.$$

Решая обратную задачу, по допустимым значениям $E_{m\,\text{вых.доп}}$, $P_{\text{ш.вых.доп}}$ находят разрядности q'_R, q''_R и $q_{\text{умн}}$.

В каскадной структуре шум квантования на выходе фильтра, как и значения ММ, зависят от порядка включения звеньев и способа попарного объединения их нулей и полюсов [4]. Поиск оптимального варианта решения этой задачи имеет важное практическое значение.

Следует отметить, что каскадная и параллельная структуры обладают наилучшими шумовыми свойствами по сравнению с прямой и канонической формами реализации РФ высокого порядка.

С помощью шумовых эквивалентных схем осуществляется также анализ собственных шумов *нерекурсивных цифровых фильтров* на основе ДВС [2, 3]. В отличие от РФ, шумы квантования в НФ можно исключить путем выбора разрядности регистров умножителя большей или равной разрядности произведений.

6.4. Методика решения задач конечной разрядности чисел в цифровых фильтрах

Задачи, связанные с конечной разрядностью чисел (крч), решаются на втором после задач аппроксимации этапе синтеза цф. На этом этапе *известны* коэффициенты фильтра, форма его реализации, передаточные функции, частотные характеристики и математические модели (или алгоритмы обработки) всего фильтра и его отдельных звеньев. В процессе решения задач крч находятся разрядности коэффициентов фильтра, масштабные множители, разрядности ацп и регистров арифметического устройства фильтра, оптимизируется структура фильтра, проверяется возможность существования предельных циклов низкого уровня в рф.

Минимально необходимая *разрядность коэффициентов фильтра* определяется обычно при решении задач аппроксимации путем выбора более жестких (по сравнению с заданными) допусков на отклонения ачх.

Исходными данными при решении других задач КРЧ являются:

♦ тип входного сигнала;

♦ динамический диапазон входного сигнала, задаваемый минимальными и максимальными значениями его амплитуды или мощности: $x_{\text{с min вх}}$, $x_{\text{с max вх}}$ или $D_{\text{с}\,m} = 20\lg(x_{\text{с max вх}}/x_{\text{с min вх}})$ или $D_{\text{с}\,p} = 10\lg(P_{\text{с max вх}}/P_{\text{с min вх}})$; допустимое отношение минимального значения амплитуды или мощности выходного сигнала к уровню или мощности шума квантования на выходе фильтра:

$$R_{\text{доп}\,m} = 20\lg(x_{\text{с min вых}}/E_{m\,\text{вых доп}}),\ R_{\text{доп}\,p} = 10\lg(P_{\text{с min вых}}/P_{e\,\text{вых доп}});\ (6.11)$$

♦ коэффициент передачи фильтра в полосе пропускания K_0.

Максимальная амплитуда сигнала на входе фильтра $x_{\text{с max вх}}$, влияющая на структуру разрядной сетки арифметического устройства фильтра (соотношение числа разрядов целой и дробной частей) и на значения его масштабных множителей, для удобства вычислений обычно нормируется к единице. По максимальному значению *с учетом типа входного сигнала* выбирается способ масштабирования и осуществляется расчет масштабных множителей фильтра, предотвращающих переполнения разрядной сетки в процессе обработки сигнала.

Минимальная амплитуда сигнала $x_{\text{с min вх}}$ может быть известна из исходных данных или найдена из заданного диапазона амплитуд сигнала на входе фильтра $D_{\text{с}}$: $x_{\text{с min вх}} = x_{\text{с max вх}}\, 10^{-D\text{с}/\,20}$. В случае синусоидального сигнала ей соответствует минимальное значение мощности входного сигнала $P_{\text{с min вх}} = x^2_{\text{с min âõ}}/2$.

Минимальные значения амплитуды и мощности сигнала на выходе фильтра находятся через заданный коэффициент его передачи в полосе пропускания: $x_{\text{с min вх}} = K_0\, x_{\text{с min вх}}$; $P_{\text{с min вых}} = K_0^2 x^2_{\text{с min вх}}/2$.

По этим значениям и заданным отношениям сигнала к шуму квантования (6.11) определяются допустимое предельное значение и допустимая мощность шума квантования на выходе фильтра:

$$E_{m\,\text{вых.доп}} = x_{\text{с min вых}}\, 10^{-R_{m\,\text{доп}}/20} = x_{\text{с min вх}}\, K_0 10^{-R_{m\,\text{доп}}/20},$$

$$P_{e\,\text{вых.доп}} = \frac{x^2_{\text{с min вх}}\, K_0^2}{2} 10^{-R_{p\,\text{доп}}/10}.$$

Допустимые значения шума квантования распределяются между ацп и умножителями фильтра:

$$E_{m\,\text{вых.доп}} = E_{m\,\text{вых.доп.АЦП}} + E_{m\,\text{вых.доп.умн}};$$

$$P_{e\,\text{вых.доп}} = P_{e\,\text{вых.доп.АЦП}} + P_{e\,\text{вых.доп.умн}}.$$

При этом большая часть их отводится на шумы квантования ацп, поскольку возможности увеличения разрядности ацп более ограничены, чем умножителей (длины слова арифметического устройства). Принимая $E_{m\,\text{вых.доп.АЦП}} = \xi E_{m\,\text{вых.доп}}$ и $P_{e\,\text{вых.доп.АЦП}} = \xi^2 P_{e\,\text{вых.доп}}$, находим допустимые шумы квантования умножителей:

$$E_{m\,\text{вых.доп.умн}} = (1-\xi)E_{m\,\text{вых.доп}},\ P_{e\,\text{вых.доп.умн}} = (1-\xi^2)P_{e\,\text{вых.доп}},$$

Где ξ = (0,8–0,9).

Расчет разрядности ацп $q_{\text{АЦП}}$ и числа разрядов дробной части произведений q_r выполняют детерминированным и вероятностным способами в соответствии с вышеприведенными выражениями для конкретной структуры фильтра. Используемый при этом метод расчета (детерминированный или

вероятностный) определяется способом задания выходного шума квантования – его мощностью или максимальным значением.

Выполняют также расчет двух оценок разрядности и выбор той из них, которая наиболее соответствует характеру обрабатываемых сигналов.

Общая разрядность арифметического устройства фильтра $q_{ay} = q_{ay(ц)} + q_r$ включает разряды дробной части произведений и целой, число которых определяется значением наибольшего по модулю коэффициента фильтра, превышающего единицу: $q_{a.y(ц)} = \text{int}\log_2\{\max[|b_j|, |a_j|]\}$.

Для каскадно реализуемого РФ изменением порядка включения звеньев и сочетания их нулей и полюсов (т.е. рекурсивной и нерекурсивной частей звеньев), *оптимизируется структура фильтра* по максимуму отношения сигнала к шуму квантования на выходе фильтра и/или по минимуму разрядности арифметического устройства фильтра [4, 7]. Наилучшим считается попарное объединение полюсов с ближайшими к ним нулями на комплексной *Z*-плоскости. Расстановка звеньев может выполняться в порядке возрастания максимальных значений их АЧХ $\max|H_J(j\omega)|_{|\omega|\le\omega_{\text{д}}/2}$, которые предварительно выравниваются и минимизируются путем соответствующего сочетания нулей и полюсов звеньев. Рекомендуется также включение звеньев в порядке убывания или возрастания сумм модулей и сумм квадратов их импульсных характеристик, или в порядке убывания или возрастания *добротности звеньев,* определяемой как $Q_{(2)J} = \lambda_p r/(1-r^2)$ – для звеньев 2-го порядка с комплексно-сопряженными полюсами и $Q_{(1)J} = |a_{1J}|$ – для звеньев первого порядка, где λ_p, r – угол (частота) и радиус полюса [7].

Однако чаще всего структурная оптимизация фильтра при не слишком высоком его порядке достигается перебором всех возможных вариантов сочетания нулей и полюсов и расстановки звеньев, число которых составляет $L(L!)$, где L – число звеньев.

Далее необходимо выполнить *моделирование* цф на эвм с учетом конечной разрядности чисел и конкретного вида обрабатываемых сигналов.

Контрольные вопросы

1. Каковы источники погрешностей ЦОС, связанные с конечной разрядностью чисел?
2. Чем вызывается необходимость ограничения разрядности чисел в процессе обработки сигнала в РФ?
3. Каковы условия масштабирования сигналов в ЦФ?
4. Как зависит выбор метода расчета ММ от вида сигнала?
5. Как рассчитываются ММ для каскадной формы РФ?
6. Как строятся и используются шумовые эквивалентные схемы ЦФ?
7. В чем различие детерминированной и вероятностной оценок точности ЦФ?
8. Как рассчитываются шумы квантования АЦП на выходе ЦФ?
9. Как рассчитываются собственные шумы ЦФ?
10. Как влияют ММ на отношение сигнала к шуму квантования на выходе ЦФ?

Т Е М А 3
МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВНА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Л е к ц и я 7
Алгоритм цифровой фильтрации сигналов на основе дискретного преобразования Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является базовым алгоритмом цифровой обработки сигналов в частотной области. Благодаря наличию эффективных алгоритмов его вычисления – алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) – ДПФ широко используется для целей цифровой фильтрации и спектрально-корреляционного анализа сигналов.

7.1. Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ), иллюстрируемое рис. 7.1, соответствует *выборкам непрерывного преобразования Фурье* $X(j\omega)$ *дискретной последовательности* $x(n)_{N_1}$ *конечной длины* N_1, *вычисленным на дискретных равностоящих частотах* $\omega_k = k\Delta\omega$:

$$\text{ДПФ}_N\left[x(n)\right] = X(j\omega)\,|_{\,\omega=\omega_k} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x(n)e^{-j\omega_k n T_д}\,, \qquad (7.1)$$

где $\Delta\omega = \omega_д/N$ – шаг дискретизации по частоте; N – число вычисляемых частотных выборок ДПФ в полосе частот $0-\omega_д$, в общем случае не равное N_1; $k = 0, 1, \ldots, N-1$ – номер частотной выборки.

В соответствии с числом вычисляемых частотных выборок N ДПФ называют N-точечным и представляют как в виде функции (7.1) дискретной частоты ω_k, так и номера частотной выборки k:

$$\text{ДПФ}_N[x(n)] = X(j\omega_k) = X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\,,\ k = 0, 1, ..., N-1. \qquad (7.2)$$

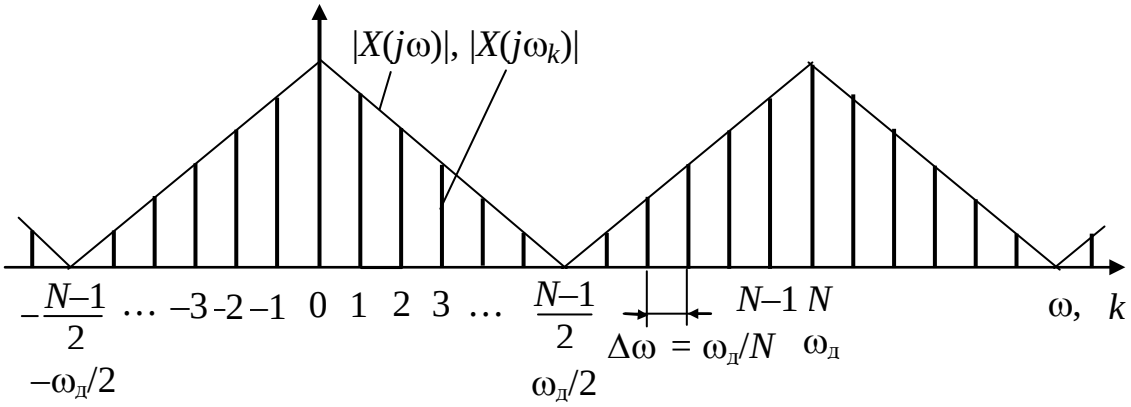


Рис. 7.1. Дискретизация сигнала в частотной области

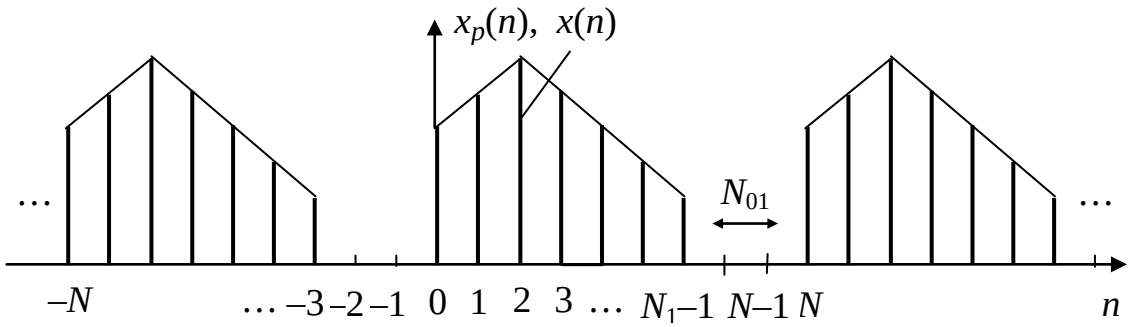


Рис. 7.2. Сигнал, соответствующий ОДПФ при $N \geq N_1$

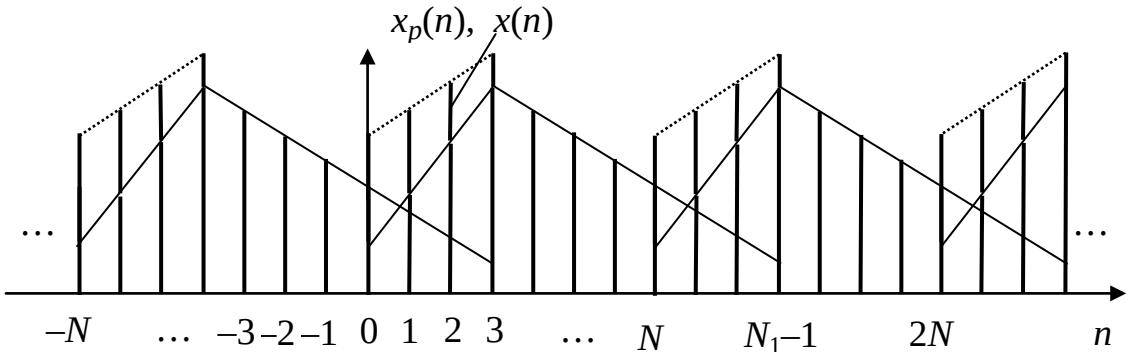


Рис. 7.3. Сигнал, соответствующий ОДПФ при $N < N_1$

Обоснование шага дискретизации по частоте при вычислении ДПФ

Выбор шага дискретизации по частоте при вычислении ДПФ определяется возможностью восстановления сигнала $x(n)$ и его непрерывного спектра $X(j\omega)$ по частотным выборкам ДПФ.

Восстановление сигнала по дискретизированному по частоте спектру осуществляется с помощью обратного ДПФ (ОДПФ). Как и прямое ДПФ (7.1), ОДПФ может быть получено путем дискретизации по частоте непрерывного обратного преобразования Фурье:

$$x(n) = \frac{T_д}{2\pi} \int_0^{\omega_д} X(j\omega) e^{j\omega n T_д} d\omega .$$

Используя замены $d\omega \to \omega_д/N$; $\int \to \Sigma$; $\omega \to \omega_к$, находим

$$\text{ОДПФ}_N \left[X(j\omega_k) \right] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_д} . \qquad (7.3)$$

Сигнал $x_p(n)$ периодичен с периодом N: $x_p(n) = x_p(n - iN)$, $i = 0, \pm 1, \ldots$ Он является периодическим повторением сигнала $x(n)$: $x_p(n) = \sum_i x(n - iN)$, так как

дискретизация сигнала в частотной области приводит к его периодизации во временной.

При $N \geq N_1$ $x_p(n) = x(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N - 1$ – сигнал $x_p(n)$ на интервале 0–$(N - 1)$ точно совпадает с исходным сигналом $x(n)$, дополненным $(N - N_1)$ нулевыми отсчетами, периодически продолжаясь за пределами этого интервала (рис. 7.2).

ОДПФ, вычисляемое на интервале 0–$(N - 1)$, обеспечивает в этом случае точное восстановление сигнала $x(n)$ по его ДПФ.

При $N < N_1$ ($\Delta\omega = \omega_д / N > \omega_д / N_1$) имеет место перекрытие периодизированных с периодом N последовательностей $x(n)$ (явление наложения во временной области), так что $x_p(n) \neq x(n)$ при n = 0–$(N_1 - 1)$ (рис. 7.3). Это исключает возможность точного восстановления сигнала по его дискретизированному спектру.

Соотношение $N \geq N_1$ определяет *условие выбора шага дискретизации по частоте* $\Delta\omega \leq \omega_д/N_1$, которое отвечает также теореме Котельникова в частотной области: спектр сигнала конечной длительности может быть точно восстановлен по его частотным выборкам, взятым с вышеуказанным шагом по частоте $\Delta\omega$.

Вычисление ДПФ по числу точек N, превышающему длину последовательности N_1 (дополняемую в этом случае $(N - N_1)$ нулевыми отсчетами), эквивалентно интерполяции по частоте спектра, дискретизированного с максимально возможным шагом $\Delta\omega = \omega_д/N_1$. Дополнение $x(n)$ нулевыми отсчетами используется для повышения *частотного разрешения* ДПФ.

Таким образом, N-точечное ДПФ соответствует спектру периодизированной с периодом N исходной последовательности $x(n)_{N1}$ конечной длины $N_1 \le N$. ДПФ совпадает также с дискретным рядом Фурье периодической последовательности $x_p(n)$ с периодом N, имеющей линейчатый спектр.

ОДПФ (7.3), вычисляемое по N частотным выборкам (N-точечное ОДПФ), как и ДПФ (7.2) представляют также функцией номера частотной выборки k:

$$\text{ОДПФ}_N\left[X(jk)\right] = x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk)e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\ n = 0, 1, ..., N-1. \qquad (7.4)$$

Множитель $1/N$ может присутствовать в выражении либо ОДПФ, либо ДПФ.

Вычисление ОДПФ и ДПФ в соответствии с (7.2), (7.4) требует (при $N = N_1$) N^2 операций умножения и $N(N-1)$ операций сложения комплексных чисел. Оба преобразования используют единый вычислительный алгоритм, основанный на их достаточно простой взаимосвязи:

$$\text{ОДПФ}_N[X(jk)] = \frac{1}{N}\{\text{ДПФ}_N[X^*(jk)]\}^*,$$

где * – операция комплексного сопряжения.

Свойства дискретного преобразования Фурье. Вычисление линейной свертки с помощью ДПФ

ДПФ обладает всеми свойствами непрерывного (по частоте ω) преобразования Фурье дискретных последовательностей, в том числе его периодичностью и симметрией. Оно также является частным случаем более общего Z-преобразования дискретных сигналов, с которым оно связано соотношением

$$X(j\omega_k) = X(z)\Big|_{z=e^{-j\omega_k T_д}} = X(z)\Big|_{z=e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}.$$

Наиболее важной для цифровой фильтрации является связь ДПФ и свертки дискретных последовательностей.

Линейная свертка определяется для конечных последовательностей $x_1(n)_{N_1}$ длиной N_1 и $x_2(n)_{N_2}$ длиной N_2:

$$y(n)_N = x_1(n)_{N_1} * x_2(n)_{N_2} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_2-1} x_2(m)x_1(n-m).$$

Сигнал линейной свертки $y(n)$ (рис. 7.4) имеет длину $N = N_1 + N_2 - 1$. Чтобы применить в данном случае теорему о свертке, ДПФ последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ необходимо вычислить по одинаковому числу точек N, соответствующему длине последовательности $y(n)$, с одинаковым шагом дискретизации по частоте $\Delta\omega = \omega_д / N$, т.е.

$$ДПФ_N[y(n)] = ДПФ_N[x_1(n)]\ ДПФ_N[x_2(n)]$$

или

$$Y(j\omega_k) = X_1(j\omega_k)X_2(j\omega_k), \quad k = 0, 1, ..., N-1.$$

При этом последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ дополняются N_{01}, N_{02} нулевыми отсчетами:

$$N_{01} = N - N_1,\ N_{02} = N - N_2,$$

что обеспечивает в частотной области интерполяцию их дискретизированного спектра.

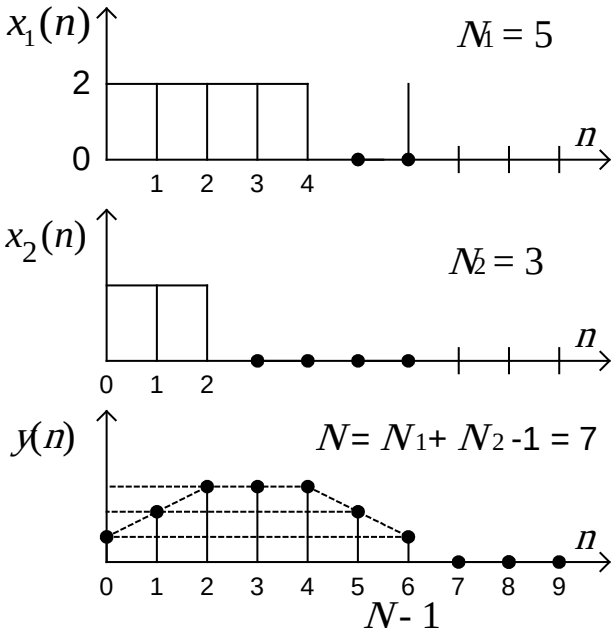


Рис. 7.4. Иллюстрация ДВС

Сигнал $y(n)$ в соответствии с данным свойством также может быть определен с помощью ОДПФ от произведения N-точечных ДПФ свертываемых последовательностей $x_1(n)$, $x_2(n)$:

$$y(n) = ОДПФ_N\{ДПФ_N[x_1(n)]\ ДПФ_N[x_2(n)]\} \qquad (7.5)$$

или

$$y(n) = ОДПФ_N[X_1(j\omega_k)X_2(j\omega_k)], \quad n = 0, 1, ..., N-1.$$

Выражение (7.5) представляет *алгоритм вычисления линейной свертки конечных последовательностей в частотной области*. При использовании рассматриваемых далее алгоритмов быстрого преобразования Фурье его называют также *алгоритмом быстрой свертки*. Очевидно, что ДПФ линей-

ной свертки последовательностей конечной длины $x_1(n)_{N_1}$, $x_2(n)_{N_2}$ эквивалентно ДПФ круговой свертки последовательностей, полученных путем периодизации их с периодом $N = N_1 + N_2 - 1$ [2, 6]. Вычисление линейной свертки с помощью ДПФ по числу точек $N < N_1 + N_2 - 1$ приводит к наложению во временной области, которое может быть также наглядно интерпретировано посредством круговой свертки последовательностей $x_1(n)_{N1}$, $x_2(n)_{N2}$, периодизированных с периодом $N < N_1 + N_2 - 1$.

7.2. Алгоритм цифровой фильтрации конечных последовательностей на основе ДПФ

Свойство ДПФ свертки конечных последовательностей используют для реализации КИХ-фильтров с обработкой сигнала в частотной области. Сигнал на выходе такого фильтра определяется дискретной временной сверткой (ДВС) входной последовательности $x(n)$ (в данном случае конечной длины N_1) с конечной импульсной характеристикой $h(n)$ длиной N_2:

$$y(n)_N = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x(n-m),\ n = 0, 1, \ldots, N-1;\quad N = N_1 + N_2 - 1.$$

Прямое вычисление ДВС во временной области реализуют нерекурсивные цифровые фильтры, рассмотренные в лекции 3 (НФ на основе ДВС).

При обработке в частотной области ДВС может быть вычислена в соответствии с алгоритмом (7.5):

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N\ \{\text{ДПФ}_N[h(n)]\ \text{ДПФ}_N[x(n)]\},\ n = 0, 1, \ldots, N-1 \quad (7.6)$$

или

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N\ [H(j\omega_k)\ X(j\omega_k)].$$

В данном случае его называют *алгоритмом цифровой фильтрации последовательностей конечной длины на основе ДПФ*. Он представлен структурной схемой (рис. 7.5) и частотными диаграммами рис. 7.6.

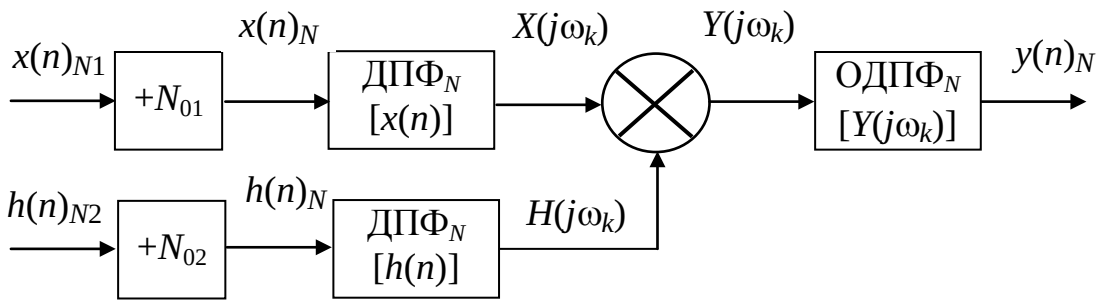


Рис. 7.5. Структурная схема НЦФ на основе ДПФ

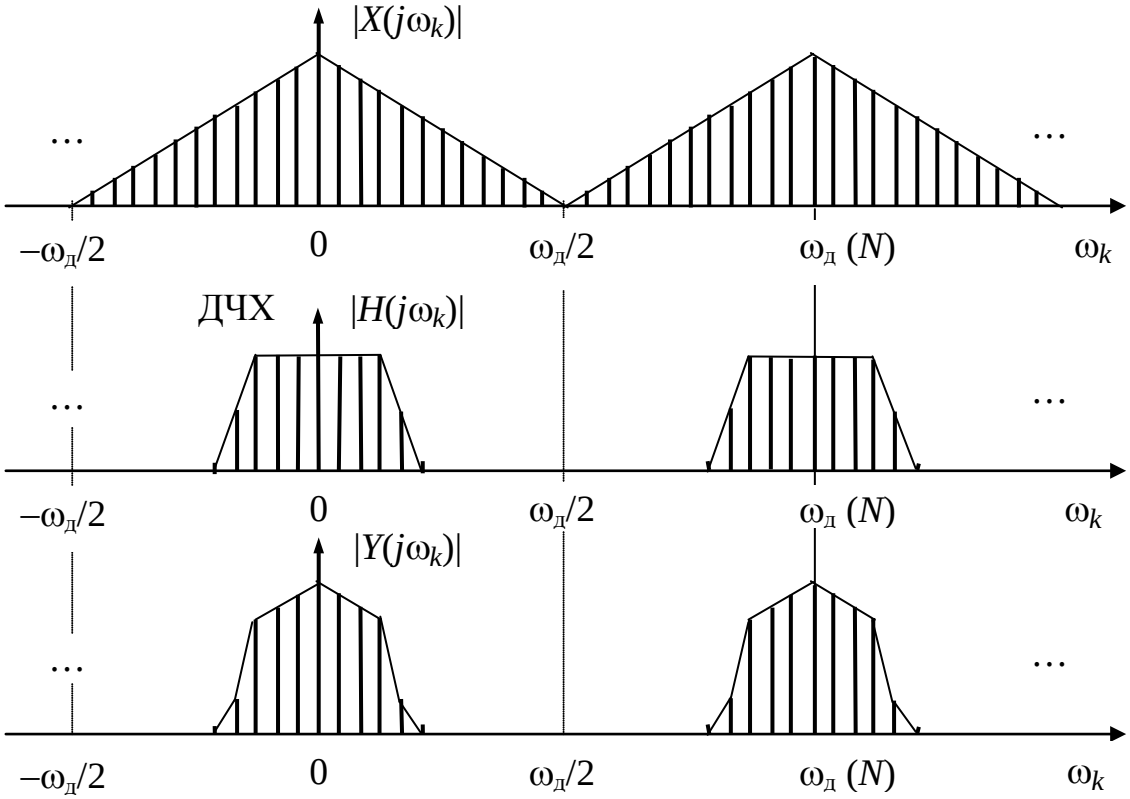


Рис. 7.6. Частотные диаграммы сигналов в структуре НФ на основе ДПФ

В этом алгоритме ДПФ импульсной характеристики $h(n)$

$$H(j\omega_k) = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m) e^{-j\omega_k m T_д} = Y(j\omega_k) / X(j\omega_k)$$

соответствует дискретизированной с шагом $\Delta\omega = \omega_д/N$ частотной характеристике фильтра $H(j\omega_k)$ (ДЧХ), а $X(j\omega_k)$, $Y(j\omega_k)$ – дискретизированным с тем же шагом спектрам его входной и выходной последовательностей.

Алгоритм включает следующие операции:

♦ запоминание N_1 отсчетов входной последовательности $x(n)$;

♦ вычисление N-точечных ДПФ последовательностей $x(n)$ и $h(n)$;

♦ перемножение N частотных выборок ДПФ входной последовательности и ДЧХ фильтра и образование N-точечной последовательности $Y(j\omega_k) = H(j\omega_k) X(j\omega_k)$;

♦ вычисление N-точечного ОДПФ последовательности $Y(j\omega_k)$, в результате чего получаются N отсчетов выходной последовательности $y(n)$.

Таким образом, в данном алгоритме отсчеты выходного сигнала находятся по частотным выборкам входного сигнала, взвешенным заданной частотной характеристикой фильтра. Фильтрация осуществляется путем после-

довательного перехода из временной области в частотную, обработки сигнала в частотной области и обратного перехода во временную.

Коэффициентами фильтров на основе ДПФ могут быть как отсчеты его импульсной характеристики, так и непосредственно дискретизированной частотной характеристики $H(j\omega_k)$.

Особенностью алгоритма является наличие временного запаздывания в выдаче отсчетов выходного сигнала, которые получаются только после приема всей входной последовательности и ее обработки. В связи с этим следует заметить, что временное запаздывание свойственно всем физически реализуемым системам обработки сигналов и различие здесь носит в основном количественный характер.

Эффективность цифровой фильтрации на основе ДПФ

Для реализации нерекурсивного фильтра на основе ДПФ необходима память для записи комплексных последовательностей $x(n)$, $X(j\omega_k)$, $Y(j\omega_k)$, $y(n)$ и коэффициентов $H(j\omega_k)$ длиною N. Число выполняемых операций умножения составляет $K_{\text{умн}} = 4(2N^2 + N)$, сложения – $K_{\text{слож}} = 4(N-1)N$ (вещественных чисел), что в пересчете на один отсчет выходного сигнала соответствует $K_{\text{умн}(1)} = 4(2N+1)$ и $K_{\text{слож}(1)} = 4(N-1)$.

По объему вычислений фильтр на основе ДПФ уступает НФ на основе ДВС, где на один отсчет сигнала выполняется N_2 операции умножения.

Однако эффективность его существенно возрастает при использовании для вычисления ДПФ и ОДПФ алгоритмов *быстрого преобразования Фурье* (БПФ). Так, алгоритмы БПФ по основанию 2 требуют $2N\log_2 N$ операций умножения и столько же операций сложения вещественных чисел. Общее и приведенное к одному отсчету число операций для НФ на основе БПФ при этом составит

$$K_{\text{умн}} = 4N[(\log_2 N)+1], \quad K_{\text{слож}} = 4N\log_2 N$$

и

$$K_{\text{умн}(1)} = 4[(\log_2 N)+1], \quad K_{\text{слож}(1)} = 4\log_2 N.$$

Например, при $N = 1024$ $K_{\text{умн}(1)} = 44$, $K_{\text{слож}(1)} = 40$. Для НФ на основе ДВС число операций зависит от длины импульсной характеристики N_2 и при $N_2 = N/2$ составит $K_{\text{умн}(1)} = K_{\text{слож}(1)} = 512$.

Таким образом, реализация НФ на основе БПФ требует намного меньшего объема операций. При более точной оценке и использовании других известных алгоритмов БПФ эффективность данной реализации оказывается еще выше. По объему вычислений цифровые фильтры на основе БПФ конкурентоспособны с РФ (но не по объему памяти).

Фильтрация последовательностей большой длины с помощью ДПФ (секционированные свертки)

Алгоритм цифровой фильтрации в частотной области можно применить и к обработке последовательностей, длина которых намного превышает длину импульсной характеристики фильтра, т.е. практически не ограниченных по длине.

В этом случае входную последовательность $x(n)$ представляют суммой $x(n)=\sum_l x_l(n)$ конечного или бесконечного числа примыкающих друг к другу секций $x_l(n)_{N_1}$ конечной длины N_1, определяемых как

$$x_l(n)_{N_1}=\begin{cases} x(n+lN_1), & lN_1 \le n \le (l+1)N_1-1 \\ 0 \text{ для других } & n \end{cases}$$

где l = 0, 1, 2 … – номер такой секции.

Свертка входной последовательности $x(n)$ с импульсной характеристикой фильтра $h(n)$ при этом также может быть представлена в соответствии с принципом суперпозиции суммой частичных сверток $y_l(n)_N$ конечной длины

$N = N_1 + N_2 - 1$:

$$ó(n)=\sum_l ó_l(n),$$

где $y_l(n)_N=\sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x_l(n-m)$.

Соседние частичные свертки перекрываются и суммируются на интервале, равном длине импульсной характеристики $N_2 - 1$. Длина секции выбирается, как правило, соизмеримой с длиной импульсной характеристики и отвечающей условию $N_1 \ge N_2$, при котором перекрываются только две соседние l и (l +1)-я частичные свертки (рис. 7.7).

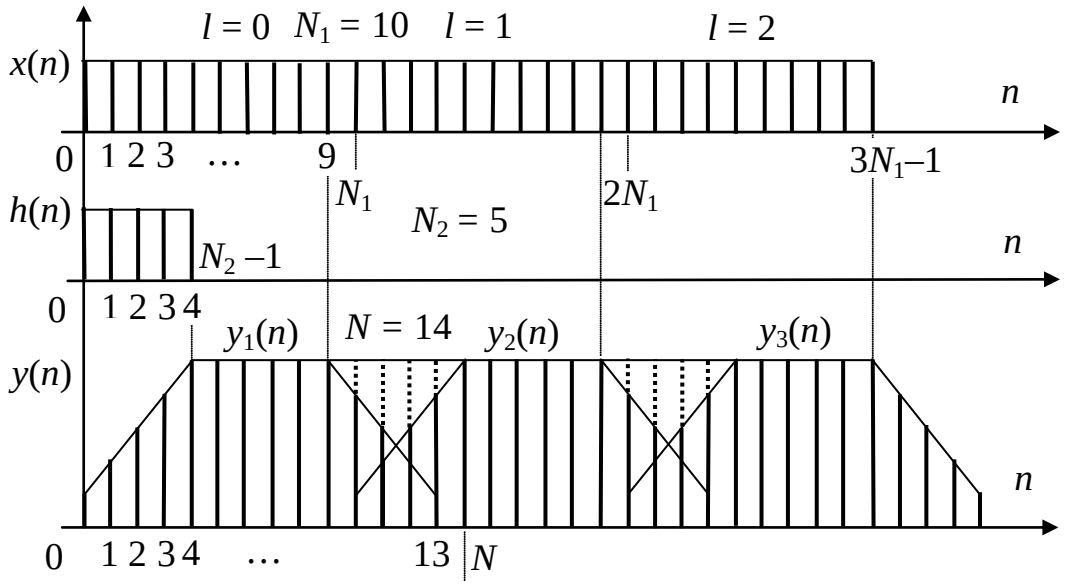


Рис. 7.7. Временные диаграммы сигналов при цифровой фильтрации последовательностей большой длины

Каждая из частичных сверток вычисляется на основе алгоритма ДПФ с применением БПФ:

$$y_l(n) = \text{ОДПФ}_N\left[\left(H_N\right)_{j\omega_k}\left(X_l\right)_{j\omega_k}\right].$$

Обработка предыдущей секции сигнала при этом совмещается с записью новой, так что запаздывание выходного сигнала во времени не превышает длины одной секции.

Пример. Реализации на основе БПФ НФ с длиной импульсной характеристики $N_2 = 321$ по числу точек $N = 1024$, 2048, 4096 и 8192 соответствуют значения длины секции $N_1 = 703$, 1727, 3775, 7871 и число операций умножения на отсчет сигнала $K_{\text{умн}(1)} = 4N(\log_2 N + 1)/N_1) = 64$, 57, 56,4, 58,3 соответственно. Значение $N = 2048$ является оптимальным для данного фильтра по объему вычислений и памяти.

С ДПФ и ОДПФ связана также реализация НФ на основе *частотной выборки*, выносимая на самостоятельное изучение [2, 3]. При выборе способа реализации НФ (на основе ДВС, ДПФ или частотной выборки) необходимо исходить из его вычислительной эффективности, зависящей от структуры системы (односкоростная, многоскоростная) и полосы пропускания фильтра (для НФ на основе частотной выборки).

Контрольные вопросы

1. Что такое ДПФ и по какому числу частотных выборок оно вычисляется?

2. Как проявляется во временной области дискретизация сигнала по частоте?

3. Как определяется ОДПФ и отличается ли оно от исходной последовательности?

4. Как используется ДПФ для вычисления свертки и цифровой фильтрации?

5. Из каких условий выбирается длина секции при фильтрации последовательностей большой длины с помощью ДПФ?

7. Какова вычислительная эффективность фильтрации на основе ДПФ (БПФ)?

Лекция 8
Анализаторы спектра сигналов на основе дискретного преобразования Фурье

Спектральный анализ заключается в определении частотного состава сигнала и оценивании его спектральных характеристик, являющихся функциями частоты [12].

С помощью спектрального анализа решаются *задачи* обнаружения, разрешения и оценки параметров сигналов, сжатия данных, идентификации объектов, распознавания образов – речи, изображений и т.д. Спектральный анализ случайных сигналов направлен на выявление скрытых периодичностей и статистических (корреляционных) связей. Анализ амплитудных и фазовых спектров периодических (регулярных) сигналов и сигналов конечной длительности называют также *гармоническим анализом* [1].

Различают следующие *методы* спектрального анализа: фильтровые (полосовой анализ), бесфильтровые (на основе дискретных преобразований Фурье, Уолша, Хаара, Хартли, вейвлет-анализ), параметрические (на основе параметрических моделей случайных сигналов [12]), методы текущего, скользящего и скачущего анализа, последовательного и параллельного, одноканального и многоканального, выполняемого в реальном времени и в нереальном (т.е. по записям сигналов).

К параметрам цифровых анализаторов спектра относятся: число каналов анализа K; время анализа (наблюдения) $T_a = (N-1)T_д$ или *ширина окна* анализа N, соответствующая числу анализируемых отсчетов сигнала, взятых с периодом дискретизации $T_д$; максимальная полоса анализа $\Delta f_a = \pm f_д/2$, не превышающая по модулю половины частоты дискретизации $f_д = 1/T_д$ сигнала; шаг анализа по частоте Δf, определяющий частоты, на которых выполняется спектральный анализ; разрешение по частоте $\Delta f_р \sim 1/T_a$, обратно пропорциональное времени анализа и соответствующее разности частот двух соседних раздельно или однозначно разрешаемых частотных составляющих сигнала.

Особенности классического спектрального анализа на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) связаны с оценкой спектра сигнала по его реализациям конечной длины, т. е. на конечном интервале наблюдения. При этом полагается, что за пределами этого интервала сигнал является периодическим продолжением считанной реализации с периодом, равным или большим ее длительности. Широкое применение анализаторов спектра на основе ДПФ обусловлено наличием высокоэффективных вычислительных алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

8.1. Базовая структура анализатора спектра и измеряемые им спектральные характеристики сигналов

В основе анализаторов спектра, использующих ДПФ, лежит базовая структура (рис. 8.1). Она реализует *базовые операции* анализатора спектра – *взвешивание и вычисление* ДПФ. Ее выходом является N-точечный вектор ДПФ $\tilde{X}(j\omega_k)$ последовательности $\tilde{x}(n)$ конечной длины N, получаемой путем временного усечения и взвешивания входной – в общем случае не ограниченной по длине – последовательности $x(n)$ весовой функцией $w(n)$ конечной длины N:

$$\tilde{X}(j\omega_k) = \text{ДПФ}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\omega_k n T_д} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)kn} = \quad {}_N\,\tilde{x}\;n \qquad (8.1)$$

Здесь $k = 0, 1, \ldots, N-1$ – номер частотной выборки ДПФ $\tilde{X}(j\omega_k) = \tilde{X}(jk)$; $\tilde{x}(n) = x(n)w(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ – преобразуемая входная последовательность ДПФ; $\omega_k = k\omega_д/N$ или $f_k = kf_д/N$ – *частоты анализа*; они называются также *бинами* ДПФ: 1 бин равен шагу дискретизации или анализа сигнала в частотной области $\Delta f = f_д/N$. Анализатор имеет N разнесенных по частоте на $f_д/N$ (на 1 бин) *каналов* анализа с центральными частотами f_k, при этом значения k соответствуют номеру канала анализа или номеру бина ДПФ. Весовая функция представляет *окно*, через которое наблюдается входной сигнал, длиной ее определяется время анализа (наблюдения) сигнала $T_а = (N-1)T_д$. Простейшей весовой функцией является прямоугольная.

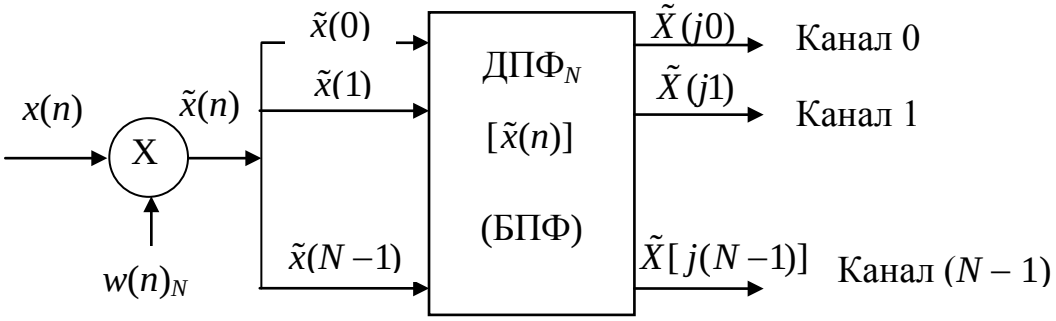


Рис. 8.1. Структурная схема анализатора спектра на основе ДПФ, представленная его базовыми элементами

Умножению во временной области, или *взвешиванию*, соответствует *свертка* в частотной. Поэтому вычисленное ДПФ фактически является сверткой истинного спектра $X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n T_д}$ дискретного сигнала $x(n)$ (его дискретно-временного преобразования Фурье) с частотной характеристикой (спектром) весовой функции $W(j\omega)$:

$$\tilde{X}(j\omega_k) = X(j\omega) * W(j\omega)\,|_{\omega=\omega_k},$$

где * – символ свертки, т.е. содержит методическую *погрешность* анализа. Она является следствием ограничения сигнала по длительности, искажающего результаты анализа. Применение специальных весовых функций или окон позволяет сгладить или ослабить вызываемое временным усечением влияние разрывов сигнала на краях.

Число вычисляемых при спектральном анализе точек (частотных выборок) ДПФ может превышать длину анализируемой реализации сигнала (длину весовой функции или ширину окна анализа), что эквивалентно дополнению реализации нулевыми отсчетами.

Дальнейшая обработка выходных данных ДПФ осуществляется с учетом *измеряемых* или оцениваемых с помощью ДПФ *спектральных характеристик*, зависящих от вида анализируемых сигналов.

Для *периодических сигналов* с периодом $T = NT_д$ оценивают *амплитуды* $A(f_i)$ и *фазы* $\varphi(f_i)$ гармоник с частотой $f_i = if_д/N$ или их средние за период *мощности* $P_i = [A(f_i)]^2/2$, где i – номер гармоники. При длине прямоугольной весовой функции, равной N (периоду сигнала), указанные параметры в случае вещественного сигнала находятся по ДПФ $X(jf_k)$], вычисленному на частотах $f_k = f_i$ как

$$A(f_i) = (2/N)|X(jf_i)|,\ \varphi(f_i) = \text{arctg}[X_{Im}(jf_i)/X_{Re}(jf_i,\ P_i = 2|(1/N)X(jf_i)|^2$$

(для $i = k = 0$ $A(0) = (1/N)X(0)$, $P_0 = [(1/N)X(0)]^2$).

Для *сигналов конечной длительности* $T_с = (N_1 - 1)T_д$ по ДПФ $X(jf_k)$], вычисленному по числу точек $N \geq N_1$, оценивают:

♦ спектральную плотность сигнала (СПС) $S(j\omega) = T_д X(j\omega_k)$ размерностью [В/Гц], определяемую значениями ее модуля $|S(j\omega)| = A(\omega)$ и аргумента $\arg S(j\omega) = \varphi(\omega)$, т.е. амплитудного и фазового спектров или реальной $S_{Re}(j\omega)$ и мнимой $S_{Im}(j\omega)$ частей на частотах анализа $\omega = \omega_k$ (бинах ДПФ);

♦ энергетический спектр или спектральную плотность энергии (СПЭ) сигнала $E(\omega) = |S(j\omega)|^2$ размерностью [$В^2$с/Гц], вычисленную на дискретных частотах ω_k и показывающую распределение его энергии по частоте;

♦ спектральную плотность мощности (СПМ) $P(\omega) = |S(j\omega)|^2/T_с$ размерностью [$В^2$/Гц] для значений $\omega = \omega_k$, а также при необходимости полную энергию сигнала $E = \dfrac{1}{NT_д}\sum_{k=0}^{N-1} E(k)$ и его среднюю мощность $P = \dfrac{1}{NT_д}\sum_{k=0}^{N-1} P(k)$.

Для *случайных сигналов* оценивают спектральную плотность мощности $P(\omega)$ размерностью [$В^2$/Гц], а для стохастически связанных случайных сигналов $x(n)$, $y(n)$ – взаимную спектральную плотность мощности $P_{x,y}(j\omega)$.

8.2. Частотные характеристики анализатора спектра

Связь между ДПФ и цифровой фильтрацией [1, 2, 9] позволяет определить *частотную характеристику канала анализатора спектра на основе* ДПФ, обозначаемую $H(j\omega, \omega_k)$, в виде отношения отклика канала на комплексный гармонический сигнал $\tilde{o}(n) = e^{j\omega nT_д}$ к значению этого сигнала при $n = N - 1$:

$$H(j\omega, \omega_k) = ÄÏ\ \hat{O}_N\left\{e^{j\omega nT_д} w(n)\right\} / e^{j\omega(N-1)T_д} =$$

$$= e^{-j\omega(N-1)T_д} W^*[j(\omega - \omega_k)].$$

В случае симметричной весовой функции $w(n) = w(N - 1 - n)$

$$H(j\omega, \omega_k) = W[j(\omega - \omega_k)] = e^{-j(\omega-\omega_k)(N-1)T_д/2} W(\omega - \omega_k). \qquad (8.2)$$

Частотная характеристика канала совпадает с частотной характеристикой весовой функции $W(j\omega)$, смещенной вправо к центральной частоте канала $\omega_k > 0$ или влево к частоте $\omega_k < 0$. Максимум частотной характеристики канала имеет место на частоте $\omega = \omega_k$, при этом на частоты $\omega > 0$, совпадающие с бинами ДПФ, откликаются каналы анализатора спектра с номерами $k > 0$ в полосе частот $(0–\omega_д/2)$, а на частоты $\omega < 0$ (иначе на сигнал $x(n) = e^{-j\omega nT_д}$), совпадающие с бинами ДПФ, откликаются каналы с номерами $k < 0$ в полосе частот $(-\omega_д/2–0)$.

Таким образом, *анализатор спектра на основе* ДПФ обеспечивает разрешение комплексных гармонических сигналов *не только по частоте, но и по знаку частоты* [1]. При вычислении ДПФ в диапазоне частот $(0–f_д)$, т.е. для $k = 0, \ldots, N - 1$, отрицательным значениям $k_- = -1, -2, \ldots, -N/2$ соответствуют значения $k = k_- + N$.

В качестве *примера* найдем частотную характеристику анализатора спектра с *прямоугольной весовой функцией* $w_R(n)$ длиной N. Ее преобразование Фурье имеет вид

$$W_R(j\omega) = e^{-j\omega(N-1)T_д/2}\left[\sin(\omega NT_д/2)\right] / \left[\sin(\omega T_д/2)\right].$$

Каналы $k = 0, 1, \ldots, (N - 1)/2$, откликающиеся на сигнал $x(n) = e^{j\omega nT_д}$, в соответствии с (8.2) описываются частотной характеристикой (рис. 8.2):

$$H_R(j\omega, \omega_k) = e^{-j(\omega-\omega_k)(N-1)T_д/2} \cdot \frac{\sin[(\omega - \omega_k)NT_д/2]}{\sin[(\omega - \omega_k)T_д/2]}. \qquad (8.3)$$

На сигнал $x(n) = e^{-j\omega n T_д}$ откликаются каналы $k_{\_} = -1, -2, \ldots, -(N-1)/2$ в соответствии с их частотной характеристикой (рис. 8.2):

$$H_R(j\omega, \omega_k) = e^{j(\omega+\omega_k)(N-1)T_д/2} \cdot \frac{\sin[(\omega+\omega_k)NT_д/2]}{\sin[(\omega+\omega_k)T_д/2]}. \qquad (8.4)$$

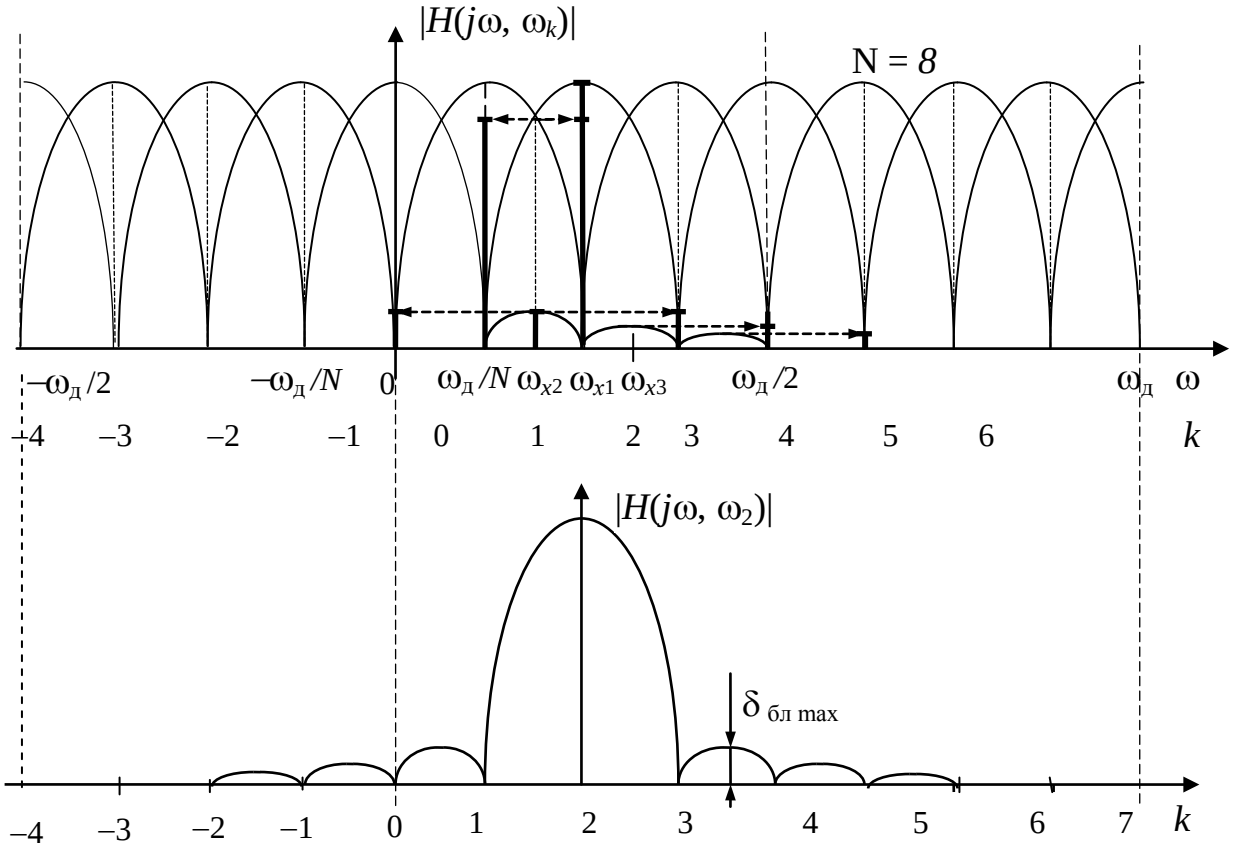


Рис. 8.2. Частотная характеристика N-канального анализатора спектра с прямоугольной весовой функцией и частотная характеристика одного канала

Как видно на рис. 8.2, частотные характеристики каналов анализатора спектра перекрываются на уровне главных лепестков двух соседних каналов и боковых лепестков всех каналов. По частотным характеристикам каналов наглядно определяются отклики анализатора спектра на комплексный и вещественный гармонические сигналы.

8.3. Определение откликов анализатора спектра на гармонические сигналы

Однозначное разрешение *комплексного гармонического сигнала* анализатором спектра с прямоугольной весовой функцией имеет место только на частотах $\omega_x = \omega_k$, совпадающих с частотами анализа ДПФ, когда *на интервале анализа укладывается целое число периодов сигнала*: $T_а = (N-1)T_д = kT$ (частота ω_{x1} на рис. 8.2).

В этом случае сигнал присутствует только на выходе одного канала или, как говорят, проецируется на 1 бин ДПФ. При этом возможно однозначное обнаружение и оценка параметров сигнала по вычисленному значению ДПФ $X(j\omega_k)$.

На сигналы с частотой $\omega_x \neq \omega_k$ (частота ω_{x2} на рис. 8.2) откликаются два соседних канала на уровне главных лепестков их частотных характеристик, а на уровне боковых лепестков откликаются *все каналы* ДПФ, или говорят, что сигнал в этом случае проецируется на все бины ДПФ, т.е. присутствует на выходах всех каналов. Это явление называют *размыванием* спектра, *дроблением* или *просачиванием* спектра между каналами [12]. При этом затруднительны однозначное обнаружение сигнала и оценка его параметров (амплитуды, частоты и фазы).

Если одновременно с гармоническим сигналом с частотой ω_{x2} действует гармонический сигнал одинаковой амплитуды с частотой ω_{x3} (рис. 8.2) (смещенный по частоте на 1 бин), то суммарный отклик анализатора на эти сигналы в канале, соответствующем частоте ω_{x1}, превышает по амплитуде раздельные отклики на них в соседних каналах, что говорит о невозможности частотного разрешения сигналов. Разрешение возможно при таком разносе частот сигналов, когда индивидуальные отклики их превышают по амплитуде суммарный.

Важной для практики является задача обнаружения и оценки параметров вещественных гармонических сигналов $x(n) = \cos(\omega n T_д)$. Такой сигнал можно представить в виде суммы двух комплексных гармонических сигналов с частотой $\omega > 0$ и $\omega < 0$:

$$x(n) = (1/2)[e^{j\omega n T_д} + e^{-j\omega n T_д}] = (1/2)[x_1(n) + x_2(n)].$$

Согласно принципу суперпозиции, отклик анализатора спектра на сигнал $x(n)$ также можно найти как сумму откликов на комплексно-сопряженные составляющие $x_1(n)$, $x_2(n)$ в соответствии с частотной характе тикой анализатора спектра. В случае $\omega_x = \omega_k$ на него откликается один k-й канал анализа в полосе анализа $(0–\omega_д/2)$ и один $(–k)$-й канал в полосе анализа $(–\omega_д/2–0)$. Это отвечает однозначному разрешению вещественного сигнала в полосе физических частот $(0–\omega_д/2)$. При $\omega_x \neq \omega_k$ откликаются все каналы, при этом отклики от комплексной составляющей $x_2(n) = e^{-j\omega_õ nT_ä}$ накладываются в полосе $(0–\omega_д/2)$ на отклики от комплексной составляющей $x_1(n) = e^{j\omega_x nT_д}$ (с учетом их фазового сдвига).

8.4. Роль весовых функций при спектральном анализе и их основные параметры

Высокий уровень боковых лепестков и обусловленное им сильное взаимное влияние каналов анализатора спектра являются основными недостатками прямоугольной весовой функции. Особенно они существенны при разрешении нескольких одновременно действующих сигналов или при наличии сосредоточенных помех, значительно искажающих результаты анализа. Эти недостатки преодолеваются при использовании весовых функций, имеющих меньший уровень боковых лепестков. Однако при этом возрастает ширина главного лепестка $\Delta f_{гл} = Df_д/N$, где $D > 2$, что приводит к увеличению числа каналов с перекрывающимися главными лепестками частотных характеристик и ухудшению разрешающей способности анализатора спектра.

Например, у анализатора спектра с весовой функцией Хэмминга, имеющей параметры $\Delta f_{гл} = 4f_д/N$, $\delta_{бл\ max} = -41$ дБ, перекрываются главные лепестки частотных характеристик трех соседних каналов (рис. 8.3).

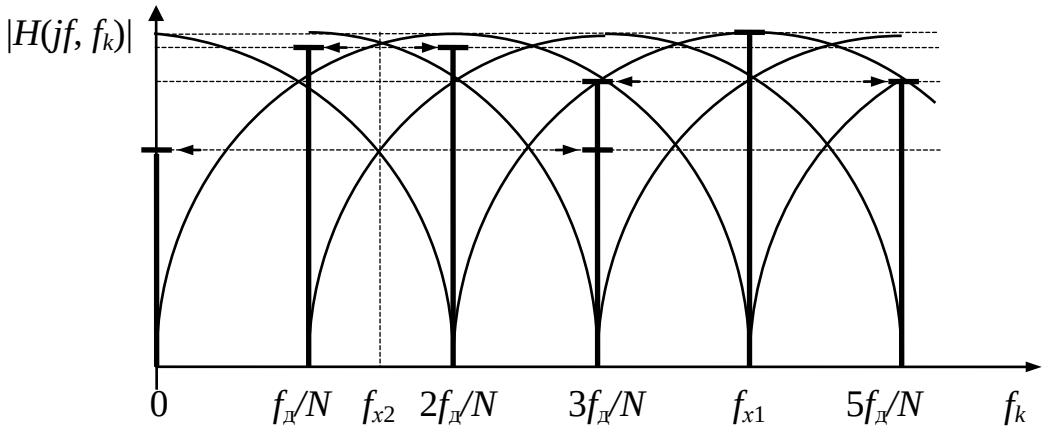


Рис. 8.3. Частотные характеристики каналов анализатора спектра с весовой функцией Хэмминга

Улучшение разрешения анализатора спектра с весовыми функциями, имеющими широкий главный лепесток, обеспечивается путем увеличения числа точек ДПФ N, т.е. *увеличением времени анализа* сигнала $T_а = (N - 1)T_д$. Так, увеличив вдвое время анализа анализатора спектра с весовой функцией Хэмминга (до $(2N - 1)T_д$) и используя каждую вторую частотную выборку ДПФ (т.е. результаты каждого второго канала анализа), можно получить то же частотное разрешение, что и в случае прямоугольной весовой функции длиной N, но при существенно меньшем взаимном влиянии каналов. От параметров весовой функции зависят также фильтрующие свойства анализатора спектра при обработке зашумленных гармонических и полигармонических сигналов. Важной является роль весовых функций и для оценки спектральных характеристик случайных сигналов. В то же время умножение

на весовую функцию, отличную от прямоугольной, приводит к увеличению общего объема вычислений при спектральном анализе.

Для обоснованного выбора весовой функции при решении конкретных задач необходимо знать их *основные параметры*, важные для спектрального анализа. Используемые при анализе спектра параметры и значения их для ряда весовых функций [9, 12] представлены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Тип ВФ	$\Delta\bar{F}_{ø}$, бин	$\Delta\bar{F}_{äë(3/6)}$, бин	$K_{ког}$	$\delta_{бл}$, дБ	$A_п$, дБ
Прямоугольная	1	0,89 / 1,21	1	–13,6	–3,92
Треугольная	1,33	1,28 / 1,78	0,5	–27	–1,82
Хэмминга	1,36	1,30 / 1,81	0,54	–41	–1,78
Блэкмана	1,73	1,68 / 2,36	0,42	–57	–1,1
Кайзера, β = 3	1,8	1.71/2,39	0,4	–69	–1,02

Эквивалентная шумовая полоса весовой функции $\Delta\bar{F}_{ш}$, выражаемая в бинах, находится при действии на входе анализатора спектра белого шума с дисперсией $\sigma^2_{ш0}$, имеющего полосу $\pm f_д/2$, из условия равенства мощности шума $P_{ш.вф}$ на выходе эквивалентного цифрового фильтра нижних частот с частотной характеристикой весовой функции $W(j\omega)$ и мощности шума $P_{ш.и}$ на выходе идеального фильтра, имеющего полосу пропускания $\Delta F_{ø} = \Delta\bar{F}_{ø}\,(f_{ä}/N)$ и максимум квадрата АЧХ $|W(j0)|^2$ (рис. 8.4):

$$P_{ø.âô} = \frac{Q_0}{2\pi}\int_{-\omega_{ä}/2}^{\omega_{ä}/2} |W(j\omega)|^2\, d\omega = \frac{Q_0}{T_{ä}}\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n),$$

где $Q_0 = \sigma^2_{ш0}/f_д$ – спектральная плотность мощности белого шума на входе фильтра (или канала).

Максимальное усиление весовой функции на частоте ω = 0 определяется как $W(j0) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)$ – по уровню) и $|W(j0)|^2 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n)\right)^2$ – по мощности.

Мощность шума на выходе идеального фильтра

$$P_{ø.è} = Q_0\,|W(j0)|^2\,\Delta F_{ø} = Q_0\,|W(j0)|^2\,\Delta\bar{F}_{ø}\,(f_{ä}/N).$$

Приравнивая мощности $P_{ø.âô} = P_{ø.è}$, находим выражение для эквивалентной шумовой полосы весовой функции и, соответственно, эквивалентной шумовой полосы канала анализатора спектра:

$$\Delta\bar{F}_{ш} = N\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \Big/ \left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n)\right)^2, \text{ бин.} \qquad (8.5)$$

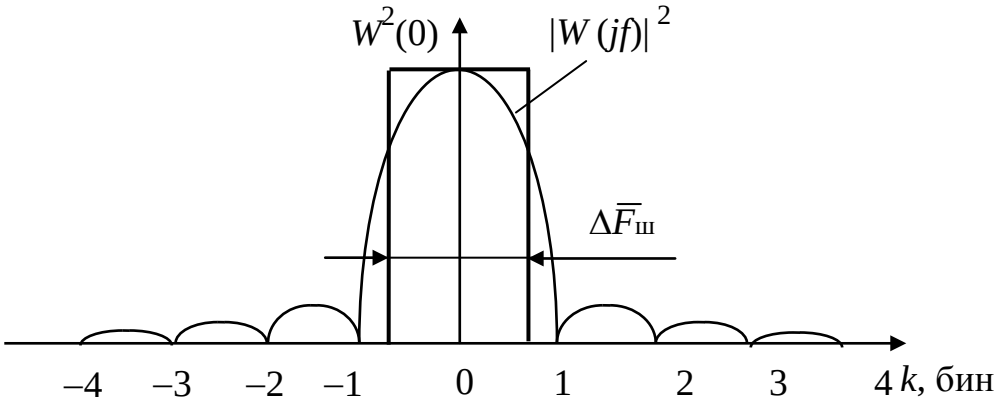


рис. 8.4. определение эквивалентной шумовой полосы весовой функции

При этом мощность шума на выходе k-го канала анализатора спектра меньше мощности действующего на входе анализатора белого (широкополосного) шума в число раз, равное $N / \Delta\bar{F}_{ø}$, так же, как и соответствующее им отношение сигнал/шум по мощности.

Шириной главного лепестка частотной характеристики весовой функции $|W(j\omega)|$ $\Delta\bar{F}_{гл(6)}$, задаваемой по уровню 6 дБ и выражаемой в бинах, определяется разрешающая способность анализатора спектра по частоте:

$$\Delta f_р = \Delta\bar{F}_{гл(6)} f_д / N. \qquad (8.6)$$

Значение $\Delta f_р$ в $\Delta\bar{F}_{гл(6)}$ раз превышает шаг анализа по частоте анализатора спектра $\Delta f = f_д / N$. При разносе по частоте на $\Delta f_р$ получающийся пик суммарного спектра двух частотных составляющих одинаковой амплитуды (посредине между ними или в общем для них канале) не превышает индивидуальных пиков, разрешаемых раздельно.

По значению $\Delta f_р$ находится необходимая ширина окна анализа N, определяющая время анализа $T_а = (N - 1)T_д$:

$$N = \Delta\bar{F}_{гл(6)} f_д / \Delta f_р . \qquad (8.7)$$

Соотношение $\delta = (\Delta\bar{F}_{гл(3)} - \Delta\bar{F}_ш)/\Delta\bar{F}_{гл(3)}$ параметров $\Delta\bar{F}_{гл(3)}$ (полосы по уровню половинной мощности) и $\Delta\bar{F}_ш$ определяет эффективность весовой функции в случае, когда входная последовательность представляет собой сумму гармонических составляющих с частотами, некратными $f_д/N$, т.е. не совпадающими с бинами ДПФ, и белого шума [9].

Когерентное усиление весовой функции

$$K_{ког} = W(0)/N = (1/N)\sum_{n=0}^{N-1} w(n)$$

определяет нормированное к N усиление канала ДПФ с данной весовой функцией на центральной частоте канала f_k.

Максимальный уровень боковых лепестков $\delta_{\text{бл max}}$, дБ, рассмотрен при синтезе НФ методом весовых функций. Важное значение имеет *скорость спада уровня боковых лепестков* при их удалении от главного лепестка, составляющая –12 дБ/октаву для треугольной и –6 дБ/октаву для остальных весовых функций.

Паразитная амплитудная модуляция спектра определяется отношением значения частотной характеристики весовой функции на частоте $f = f_{\text{д}}/(2N)$ к максимальному значению частотной характеристики на частоте $f = 0$: $A_{\text{п, дБ}} = 20\lg\left[|W(j\omega)|_{(\omega=\omega_{\text{д}}/2N)} / W(j0) \right]$. Значение $A_{\text{п}}$ характеризует искажения или потери оценок ДПФ в случае самых неблагоприятных для анализа частот сигнала $f = f_k \pm f_{\text{д}}/(2N)$.

Рассмотренные параметры весовых функций должны учитываться при спектральном разрешении, обнаружении и измерении параметров сигналов на фоне помех с помощью ДПФ (БПФ). Обычно анализаторы спектра на основе ДПФ предусматривают достаточно большие возможности выбора типа весовой функции с учетом многообразия видов обрабатываемых сигналов и задач спектрального анализа.

Контрольные вопросы

1. Каковы задачи и применения цифрового спектрально-корреляционного анализа?

3. Каковы параметры и особенности анализаторов спектра на основе ДПФ?

4. Что понимается под разрешающей способностью анализатора спектра и как она обеспечивается?

5. Какова базовая структура анализатора спектра на основе ДПФ и его математическое обеспечение?

7. Что такое частоты анализа или бины ДПФ?

8. Что понимается под частотной характеристикой анализатора спектра?

11. Что понимается под явлением размывания или просачивания спектра?

10. Как откликаются каналы анализатора спектра на комплексный и вещественный гармонические сигналы произвольной частоты?

12. Какова роль весовых функций при анализе спектров периодических сигналов?

Лекция 9
Спектрально-корреляционный анализ дискретных случайных сигналов

Дискретные случайные сигналы, как и аналоговые, характеризуются законом распределения вероятностей, средним значением, средним квадратом и дисперсией, функциями корреляции и взаимной корреляции, а в частотной области – спектральной плотностью мощности и взаимной спектральной плотностью мощности [1].

9.1. Определения параметров и характеристик дискретных случайных сигналов

Для *стационарных в широком смысле* дискретных случайных сигналов $x(n)$, $y(n)$ их средние значения $\bar{x}, \bar{y}$ являются постоянными, не зависящими от дискретного времени $nT_д$ (номера выборки n и периода дискретизации $T_д$), а функции автокорреляции r_{xx}, r_{yy} и взаимной корреляции r_{xy}, r_{yx} (характеристики статистической линейной связи сигнала и его сдвинутой копии или двух различных сигналов) зависят только от разности моментов времени $mT_д = (n_2 - n_1)T_д$, т.е. от значения дискретной задержки m. Они определяются как математические ожидания $E\{\cdot\}$ (*средние по ансамблю*) соответствующих случайных функций [1, 8, 12, 13].

Среднее значение $\bar{x} = E\{x(n)\}$ – математическое ожидание случайного сигнала $x(n)$ (в общем случае комплексного).

Автокорреляционная функция (АКФ) $r_{xx}(m) = E\{x(n+m)x^*(n)\}$ – математическое ожидание произведения задержанной копии $x(n + m)$ случайного сигнала $x(n)$ и комплексно-сопряженного сигнала $x^*(n)$.

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) $r_{xy}(m) = E\{x(n+m)y^*(n)\}$ – математическое ожидание произведения задержанной копии $x(n + m)$ случайного сигнала $x(n)$ и комплексно-сопряженного сигнала $y^*(n)$.

Для эргодических случайных сигналов [1, 8, 12, 13] среднее значение, АКФ и ВКФ могут быть найдены усреднением по времени одной случайной функции ($x(n)$, $x(n + m)x^*(n)$ или $x(n + m)y^*(n)$) как пределы сумм значений ее $L = 2N + 1$ выборок, поделенных на L, при L стремящемся к бесконечности (т. е. как пределы средних по времени):

$$\bar{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n);$$

$$r_{xx}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n+m)x^*(n);$$

$$r_{xy}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n+m)y^*(n).$$

По максимуму ВКФ находят относительное *время задержки* обрабатываемых сигналов [10].

АКФ и ВКФ *центрированных случайных сигналов* $[x(n) - \bar{x}]$, $[y(n) - \bar{y}]$ и сигналов с нулевым средним значением называют *ковариационной* $c_{xx}(m)$ и *взаимной ковариационной* $c_{xy}(m)$ функциями:

$$c_{xx}(m) = E\{[x(n+m) - \bar{x}][x^*(n) - \bar{x}^*]\};$$
$$c_{xy}(m) = E\{[x(n+m) - \bar{x}][y^*(n) - \bar{y}^*]\}.$$

При этом

$$c_{xx}(m) = r_{xx}(m) - |\bar{x}|^2;$$
$$c_{xy}(m) = r_{xy}(m) - \bar{x}\,\bar{y}^*.$$

АКФ $r_{xx}(m)$ при $m = 0$ соответствует *среднему квадрату* случайного сигнала:

$$\bar{x}^2 = r_{xx}(0) = E\{x(n)x^*(n)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x^*(n),$$

а ковариационная функция $c_{xx}(m)$ – *дисперсии сигнала*:

$$c_{xx}(0) = D_x = \sigma_x^2.$$

Средний квадрат и дисперсия являются максимальными значениями, соответственно, автокорреляционной и автоковариационной функций. Они связаны соотношением $D_x = \bar{x}^2 - |\bar{x}|^2$ и определяют *среднюю мощность* случайного сигнала ($\bar{x}^2$) и его переменной (флуктуационной) составляющей (D_x).

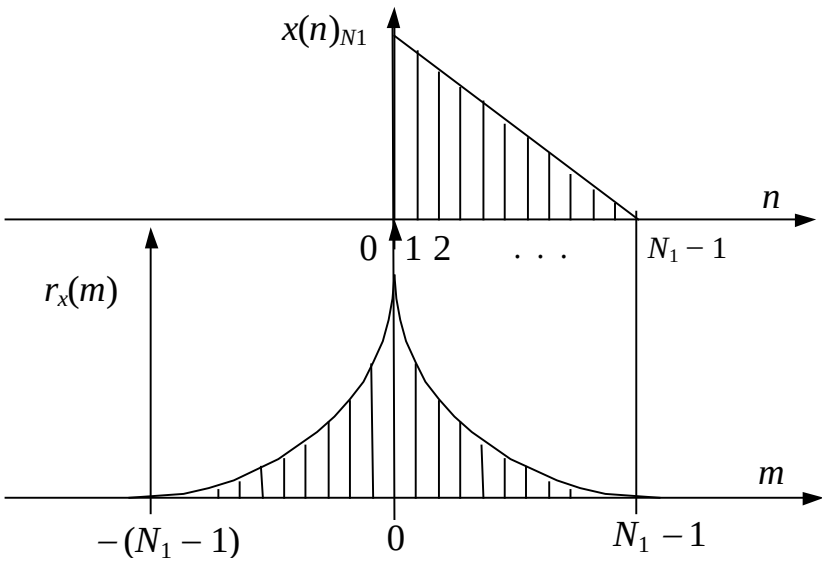


Рис. 9.1. Пример представления автокорреляционной функции дискретного сигнала

АКФ и ВКФ обладают *свойствами симметрии* вида $r_{xx}(-m) = r_{xx}^*(m)$; $r_{xy}(-m) = r_{xy}^*(m)$. На рис. 9.1 показан примерный вид АКФ треугольной дискретной последовательности конечной длины N_1.

Определения спектральных характеристик дискретных случайных сигналов

Спектральную плотность мощности (СПМ) случайного сигнала в соответствии с теоремой Винера–Хинчина [1, 10, 12] определяют преобразованием Фурье АКФ (последовательности $r_{xx}(m)$) для значений частоты f, заключенных в основной полосе частот $(0 \pm f_д/2)$:

$$P_{xx}(f) = T_д \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m) e^{-j2\pi f m T_д}. \qquad (9.1)$$

СПМ показывает, как мощность случайного процесса распределена по частоте. Так как $r_{xx}(-m) = r_{xx}^*(m)$, то СПМ является *строго действительной положительной функцией.* Если АКФ – действительна, то $r_{xx}(-m) = r_{xx}(m)$ и выражение для СПМ приводится к виду

$$P_{xx}(f) = T_д r_{xx}(0) + 2T_д \sum_{m=1}^{\infty} r_{xx}(m) \cos(2\pi f m T_д).$$

При этом $P_{xx}(f)$ обладает свойством четной симметрии: $P_{xx}(f) = P_{xx}(-f)$.

АКФ случайного сигнала может быть найдена по его известной СПМ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$r_{xx}(m) = \int_{-f_д/2}^{f_д/2} P_{xx}(f) e^{j2\pi f m T_д} df. \qquad (9.2)$$

При $m = 0$ $r_{xx}(0) = \int_{-f_д/2}^{f_д/2} P_{xx}(f) df$ соответствует средней мощности сигнала или его дисперсии.

Аналогичным образом вводится определение *взаимной спектральной плотности мощности* (ВСПМ) двух стационарных случайных сигналов $x(n)$ и $y(n)$ как преобразование Фурье их ВКФ [1, 10, 12]:

$$P_{xy}(jf) = T_д \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m) e^{-j2\pi f m T_д}. \qquad (9.3)$$

Даже для действительных последовательностей $x(n)$ и $y(n)$ вследствие несимметрии их ВКФ ($r_{xy}(-m) \neq r_{xy}(m)$) ВСПМ является *в общем случае комплексной*. В то же время она обладает свойством $P_{xy}(jf) = P_{yx}^*(jf)$.

Простейшим, но важным является дискретный случайный процесс типа *белый шум* $v(n)$. Его АКФ $r_{vv}(m) = \sigma_v^2 u_0(m)$, где $u_0(m) = 1$ при $m = 0$ и $u_0(m) = 0$ при $m \neq 0$ – единичный импульс. СПМ белого шума

$$P_{vv}(f) = T_д\sigma_v^2 = \sigma_v^2 / f_д = Q_0.$$

На определениях (9.1), (9.3) основывается коррелограммный метод вычисления СПМ и ВСПМ случайный дискретных сигналов (см. п. 9.2).

Прямой метод определения СПМ и ВСПМ

Условию эргодичности процесса отвечает следующая *эквивалентная* (9.1) *форма определения* СПМ [12]:

$$P_{xx}(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T_д} E\left\{ \left| T_д \sum_{n=-N}^{N} x(n) e^{-j2\pi f nT_д} \right|^2 \right\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{T_д}{(2N+1)} E\left\{ X(jf) X^*(jf) \right\} = \lim_{N\to\infty} \frac{T_д}{(2N+1)} E\left\{ |X(jf)|^2 \right\}. \quad (9.4)$$

Она соответствует математическому ожиданию или статистически усредненному квадрату модуля преобразования Фурье дискретной последовательности $x(n)$, поделенному на ее длину, стремящуюся в пределе к бесконечности. Такое определение включает *усреднение* и по времени и по ансамблю. В эквивалентном выражении для ВСПМ квадрат модуля $|X(jf)|^2 = X(jf)X^*(jf)$ в (9.4) должен быть заменен на произведение $X(jf)Y^*(jf)$.

На эквивалентном определении СПМ и ВСПМ основывается периодограммный метод их вычисления (см. п. 9.4).

9.2. Статистические оценки характеристик дискретныхслучайных сигналов. Вычисление СПМ и ВСПМ методом коррелограмм

Реально при спектральном и корреляционном анализе случайных сигналов вместо истинных АКФ, ВКФ, СПМ, ВСПМ используются их *статистические оценки*, получаемые по конечному набору данных или по реализациям сигнала конечной длины, а для СПМ и ВСПМ – и по конечному числу усредняемых реализаций сигнала. Рассмотрим, как они определяются [12].

Оценка автокорреляции (АКФ)

$$\breve{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n+m)x^*(n)\ ,\ 0 \le m \le N-1\ ,$$

$$\breve{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*(n+|m|)x(n)\ ,\ -(N-1) \le m \le 0\ . \quad (9.5)$$

Данная оценка является *смещенной*, ее математическое ожидание $E\{\breve{r}_{xx}(m)\} = (1-|m|/N)r_{xx}(m)$ (произведение истинной АКФ и треугольной весовой функции) не равно $r_{xx}(m)$. В то же время она более эффективна, чем

несмещенная оценка $\hat{r}_{xx}(m) = N/(N-|m|)\breve{r}_{xx}(m)$ [8, 12], и часто используется на практике.

При $m = 0$ $\breve{r}_{xx}(0) = \hat{r}_{xx}(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \breve{x}_N^2$ является *оценкой среднего квадрата или мощности* случайного процесса.

Оценка взаимной корреляции (ВКФ)

$$\breve{r}_{xy}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x(n+m)y^*(n)\ ,\ 0 \le m \le N-1\ ,$$

$$\breve{r}_{xy}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+m)y^*(n+|m|)\ ,\ -(N-1) \le m \le 0. \qquad (9.6)$$

Она также является *смещенной* и связана с *несмещенной оценкой* $\hat{r}_{xy}(m)$ соотношением $\breve{r}_{xy}(m) = \hat{r}_{xy}(m)(N-|m|)/N$.

При оценке авто- и взаимной ковариации используется *оценка среднего значения* случайного процесса $\hat{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$.

Статистические коррелограммные оценки СПМ и ВСПМ

Статистическими оценками СПМ и ВСПМ как преобразований Фурье АКФ и ВКФ случайных процессов являются, соответственно, преобразования Фурье введенных выше статистических оценок АКФ и ВКФ (9.5), (9.6), вычисляемых по реализациям сигнала конечной длины N:

$$\hat{P}_{xx}(f) = T_д \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(m)e^{-j2\pi fmT_д}\ ; \qquad (9.7)$$

$$\hat{P}_{xy}(jf) = T_д \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xy}(m)e^{-j2\pi fmT_д}\ . \qquad (9.8)$$

Аналогичным образом определяются оценки СПМ (ВСПМ) $\breve{P}_{xx}(f)$, $\breve{P}_{xy}(jf)$ по смещенным оценкам АКФ и ВКФ $\breve{r}_{xx}(m)$, $\breve{r}_{xy}(m)$. Обе оценки СПМ (ВСПМ) являются *смещенными*: их математические ожидания представляют собой свертки истинной СПМ (ВСПМ) $P_{xx}(f)$ ($P_{xy}(jf)$ с частотной характеристикой $W(jf)$ весовой функции (окна) $w(m)$, ограничивающего длину преобразуемой АКФ (ВКФ) [12]. При несмещенной оценке АКФ (ВКФ) – это *прямоугольное окно* $w_R(m)$ и

$$E\{\hat{P}_{xx}(f)\} = P_{xx}(f) * W_R(f),\ E\{\hat{P}_{xy}(jf)\} = P_{xy}(jf) * W_R(f),$$

при смещенной оценке АКФ (ВКФ) – это *треугольное окно* $w_T(m)$ с частотной характеристикой $W_T(f) = (2/N)W_R^2(f/2)$ и

$$E\{\breve{P}_{xx}(f)\} = P_{xx}(f) * (2/N)W_R{}^2(f/2),\ E\{\breve{P}_{xy}(jf)\} = P_{xy}(jf) * (2/N)W_R{}^2(f/2),$$

где $W_R(f) = \sin(\pi f N T_д)/\sin(\pi f T_д)$.

Дисперсия (*погрешность*) *оценок* СПМ (ВСПМ), как и оценок АКФ (ВКФ), возрастает с уменьшением длины реализации N и увеличением максимального вычисляемого индекса $m_{max} = M - 1$, где $M \le N$, что обусловлено уменьшением эффекта усреднения. *Максимальная погрешность* оценки СПМ (ВСПМ) имеет место при $M = N$. Она соизмерима со средним значением СПМ (ВСПМ) и является практически неприемлемой [8, 12]. Достаточная точность оценок СПМ (ВСПМ) обеспечивается при вычислении АКФ и ВКФ до значений $M \le 0{,}1N$ [8, 12]. При $M < N$ пределы суммирования в (9.7), (9.8) нужно заменить на $-(M-1) \le m \le (M-1)$.

Вычисление СПМ (ВСПМ) случайных сигналов по оценкам их АКФ (ВКФ) называют *косвенным методом спектрального анализа случайных сигналов, или методом коррелограмм* [10, 12].

Уменьшение эффекта просачивания спектра через боковые лепестки неявно присутствующего окна и уменьшение дисперсии коррелограммной оценки спектра достигается умножением несмещенной АКФ (ВКФ) на симметричное относительно $m = 0$ пронормированное $(2M-1)$-точечное *корреляционное окно* $\omega(m)$, $\omega(0) = 1$, $-(M-1) \le m \le (M-1)$, т.е.

$$\hat{P}_{xx}(f) = T_д \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \omega(m)\hat{r}_{xx}(m)e^{-j2\pi f m T_д}, \qquad (9.9)$$

$$\hat{P}_{xy}(jf) = T_д \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \omega(m)\hat{r}_{xy}(m)e^{-j2\pi f m T_д}. \qquad (9.10)$$

В этом случае среднее значение оценок является сверткой истинной СПМ (ВСПМ) и преобразования Фурье корреляционного окна $\Omega(f)$:

$$E\{\hat{P}_{xx}(f)\} = P_{xx}(f) * \Omega(f);\ E\{\hat{P}_{xy}(jf)\} = P_{xy}(jf) * \Omega(f).$$

В качестве корреляционных применяют окна, преобразования Фурье которых не имеют отрицательных значений, т.е. $\Omega(f) > 0$ при $-f_д/2 \le f \le f_д/2$, наличие таких значений приведет к отрицательным значениям $\hat{P}_{xx}(f)$, что невозможно и необъяснимо физически. Этому условию отвечает, например, треугольное окно.

Коррелограммный метод вычисления СПМ и ВСПМ

Вычисляя с помощью (9.5), (9.6) или другим способом автокорреляционные и взаимокорреляционные последовательности $r_{xx}(m)$, $r_{xy}(m)$ для значений задержки $-(M-1) \le m \le (M-1)$, где $M \le N_1$, взвешивая их корреляционным окном $\omega(m)$ той же длины и выполняя их ДПФ по числу точек $N = 2M - 1$, можно в

соответствии с (9.9), (9.10) найти *коррелограммные оценки* СПМ $\widehat{P}_{xx(к)}(f)$ и ВСПМ $\widehat{P}_{xy(к)}(jf)$ на дискретных частотах $f_k = kf_д/N$:

$$\widehat{P}_{xx(к)}(f_k) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \omega(m) r_{xx}(m) e^{-j2\pi f_k m T_д} = 2 \sum_{m=0}^{M-1} \omega(m) r_{xx}(m) \cos(2\pi f_k m T_д); \quad (9.11)$$

$$\widehat{P}_{xy(к)}(jf_k) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \omega(m) r_{xy}(m) e^{-j2\pi f_k m T_д},$$

где $k = 0, 1, \ldots, 2M - 1$ (в формулах (9.11) опущен размерный множитель $T_д$, поскольку СПМ, ВСПМ выражают обычно в относительных единицах – децибеллах).

Число N вычисляемых точек ДПФ может быть увеличено *добавлением* к преобразуемой последовательности N_0 *нулевых отсчетов* с целью уменьшения шага дискретизации оценок СПМ (ВСПМ) по частоте ($f_д/N$) или приведения N к целой степени двойки: $N = 2M - 1 + N_0 = 2^L$, необходимой для применения *алгоритма* БПФ.

9.3. Статистические периодограммные оценки СПМ и ВСПМ дискретных случайных сигналов

Эквивалентной форме определения СПМ эргодического случайного сигнала (9.4) с опущенными операциями математического ожидания $E\{\cdot\}$ и предельного перехода lim соответствуют *простейшие периодограммные оценки* СПМ (ВСПМ) [12]:

$$\widehat{P}_{xx\,(п)}(f) = \frac{T_д}{N_1} |X(jf)|^2, \quad \widehat{P}_{xy\,(п)}(jf) = \frac{T_д}{N_1} X(jf) Y^*(jf). \quad (9.12)$$

Они основываются на преобразовании Фурье последовательностей $x(n)$, $y(n)$ конечной длины N_1: $X(jf) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x(n) e^{-j2\pi f n T_д}$. Эти оценки *эквивалентны* преобразованиям Фурье АКФ (ВКФ) (9.7), (9.8) при длине корреляционных последовательностей M, равной длине обрабатываемых реализаций сигнала N_1 [8, 12]. Они имеют дисперсию, соизмеримую со средним значением СПМ (ВСПМ), и являются слишком грубыми.

Все *другие периодограммные оценки* СПМ (ВСПМ) направлены на повышение их *точности* (статистической устойчивости) путем введения *усреднения*. В периодограмме Даньелла [12] это достигается усреднением *соседних выборок* спектра. Периодограммные оценки Бартлета и Уэлча получаются путем *усреднения простейших периодограмм* (9.12), вычисляемых для *отдельных секций* $x_l(n)$ длиной N_1, на которые разбивается обрабатываемая случайная последовательность: $\widehat{P}_{(п)}(f) = \frac{1}{L} \sum_l \widehat{P}_l(f)$, где L – число секций.

Эта операция подобна *усреднению по ансамблю*. При этом полагается, что соседние секции сигнала *не коррелированы* между собой, т.е. длительность их превышает время корреляции сигнала. Разделение последовательности на секции возможно *без их перекрытия* (периодограмма Бартлета) и *с перекрытием* и *взвешиванием* (умножением на весовую функцию или окно) $w(n)x_l(n)$ – периодограмма Уэлча.

Математическое ожидание оценки *периодограммы* со взвешиванием определяется сверткой истинной СПМ (ВСПМ) с квадратом модуля частотной характеристики весовой функции [12]:

$$E\left\{\hat{P}_{(\text{п})}(f)\right\} = P(f) * |W(jf)|^2 / U, \qquad (9.13)$$

где $W(jf) = \sum_{n=0}^{N_1-1} w(n) e^{-j2\pi f n T_\text{д}}$; $U = \sum_{n=0}^{N_1-1} w^2(n)$.

Это означает, что при любой весовой функции периодограммная оценка СПМ (ВСПМ) будет *неотрицательной*, в отличие от взвешенных коррелограммных оценок (9.9), (9.10), где свертка в частотной области осуществляется просто с преобразованием Фурье весовой функции.

Обратное преобразование Фурье математического ожидания оценки периодограммы (9.13) дает математическое ожидание эффективной оценки АКФ случайного сигнала, вычисляемой по его периодограмме:

$$E\left\{\hat{r}_{xx(\text{п})}(m)\right\} = \Phi(m)/U \quad m \quad U,$$

где $\Phi(m) = w(m) * w(-m) = T_\text{д} \sum_{n=0}^{N_1-1} w(n+m)w(n)$ – представляет АКФ окна $w(n)$ со значением $\Phi(0) = U$. При этом $E\left\{\hat{r}_{xx\,(\text{п})}(0)\right\} = r_{xx}(0)$ – является несмещенной оценкой мощности сигнала.

Из рассмотренного следует, что *периодограмма* может быть использована также *для косвенного вычисления оценок* АКФ (ВКФ) *по реализациям сигнала большой длины с помощью* ДПФ (БПФ).

Периодограммный метод вычисления СПМ (ВСПМ) является *прямым методом* спектрального анализа случайных сигналов, выполняемым непосредственно по их отсчетам [10, 12].

9.4. Вычисление СПМ и ВСПМ методом периодограмм Уэлча

Исходными данными для спектрального анализа методом периодограмм Уэлча являются частота дискретизации сигнала $f_\text{д}$, требуемое разрешение по частоте $\Delta f_\text{р}$ и общее доступное время наблюдения (регистрации) сигнала $T_\text{н}$.

Спектральный анализ *включает* выбор типа весовой функции, ее длины, способа разбиения сигнала на секции, определения числа секций, вычисления L взвешенных периодограмм и усредненной периодограммы.

Весовая функция $w(n)$ выбирается исходя из особенностей решаемой задачи, а ее длина, определяющая *длину реализации* (секции) сигнала N_1 и *время анализа* $N_1T_д$, находятся из условия некоррелированности соседних секций случайного сигнала и обеспечения требуемого частотного разрешения:

$$N_1 = \Delta F_{\text{гл(6)}} f_д / \Delta f_р .$$

Разбиение сигнала на реализации (секции) конечной длины N_1 осуществляется либо без перекрытия секций, либо с коэффициентом перекрытия $K_{пер}$, равным чаще всего 0,5 (рис. 9.2). Перекрытие уменьшает общее время анализа и влияние разрывов сигнала на краях секций, но несколько ухудшает точность оценок СПМ, которая также зависит от типа весовой функции.

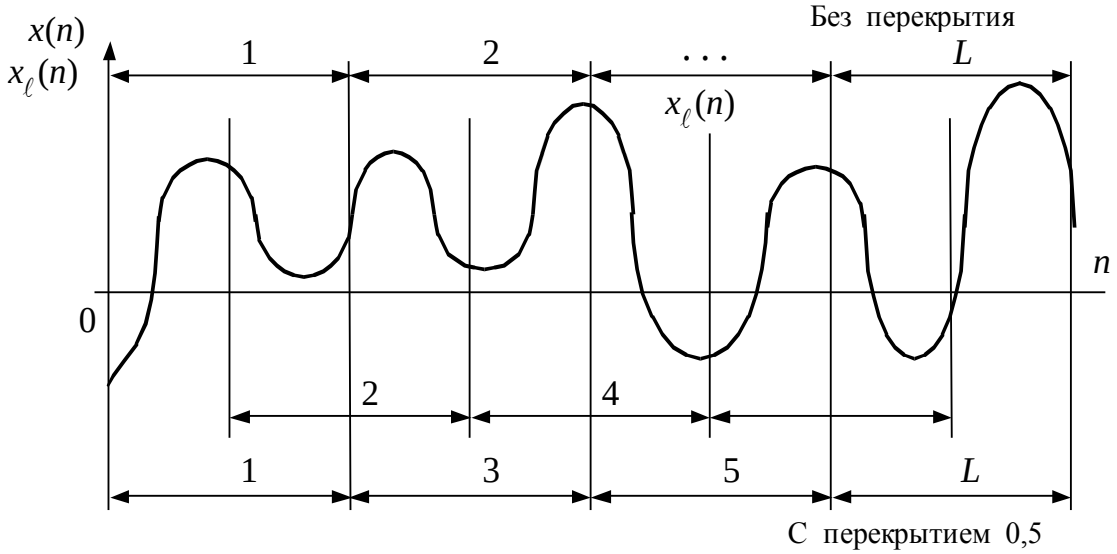


Рис. 9.2. Способы разбиения обрабатываемого сигнала на секции

Число усредняемых реализаций (секций) L выбирается или находится с учетом следующих возможных условий:

♦ общего доступного времени наблюдения сигнала $T_н$:

$$L = \{[(T_н/T_д) - K_{пер}N_1]/(N_1 - K_{пер}N_1)\}_{ц.ч},$$

где (ц.ч) – символ целой части отношения, заключенного в скобках;

♦ стационарности случайного сигнала на интервале $T_{сд} = LN_1T$;

♦ необходимой степени q уменьшения дисперсии оценки СПМ (эффективности усреднения). При $K_{пер} = 0$ (без перекрытия) степень уменьшения дисперсии $q = L$, при $K_{пер} = 0{,}5$ $q = L/[1 + 2c^2_{(0,5)}(L-1)/L] < L$, где $c_{(0,5)}$ – коэффициент, определяемый видом весовой функции [9]: $c_{(0,5)} = 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}235$, соответственно, для весовых функций: прямоугольной, треугольной и Хэмминга. Например, при использовании весовой функции Хэмминга, $K_{пер} = 0{,}5$ и $L = 10$ степень уменьшения дисперсии составляет $q \approx 9$.

По L считанным реализациям сигнала $x_\ell(n) = x[n + (\ell - 1)(1 - K_{\text{пер}})N_1]$, $\ell = 1, 2, ..., L$, $n = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ вычисляются L N-точечных ДПФ ($N = N_1 + N_0$):

$$\hat{X}_\ell(jk) = \sum_{n=0}^{N_1-1} w(n)x_\ell(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, ..., N-1$$

и L *периодограмм*:

$$\hat{P}_{x\ell}(k) = \frac{1}{UN_1}\left|\hat{X}_\ell(jk)\right|^2,$$

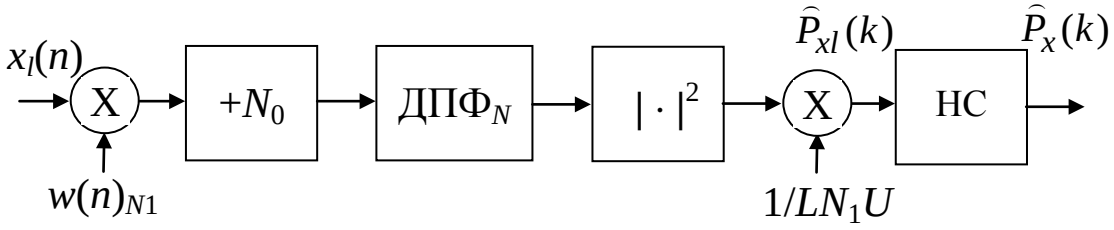
где $U = \sum_{n=0}^{N_1-1} w^2(n)$.

Путем их усреднения находится усредненная периодограмма, или оценка СПМ:

$$\hat{P}_x(k) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L}\hat{P}_{x\ell}(k) = \frac{1}{UN_1L}\sum_{\ell=1}^{L}\left|\hat{X}_\ell(jk)\right|^2. \qquad (9.14)$$

Номеру частотной выборки k СПМ соответствуют значения частоты $f_k = kf_д/N$. Дополнение секций нулевыми отсчетами N_0 используется при недостаточном шаге анализа по частоте, а при большой дисперсии СПМ – увеличивается число усредняемых реализаций L. Для приведения к размерности [В^2/Гц] выражение (9.14) умножается на $T_д$.

Структурная схема анализатора спектра (вычислителя СПМ) на основе метода периодограмм приведена на рис. 9.3.



9.3. Структурная схема анализатора СПМ случайных сигналов по методу периодограмм

Накопление (усреднение) периодограмм $\hat{P}_\ell(k)$ на схеме осуществляется с помощью накапливающего сумматора НС.

При вычислении ВСПМ *методом периодограмм* (рис. 9.4) секционирование и взвешивание выполняются рассмотренным выше образом для обеих обрабатываемых последовательностей $x(n)$ и $y(n)$. Периодограмма для ВСПМ определяется как

$$\hat{P}_{xy\ell}(k) = \frac{1}{UN_1}\text{ÄÏ }\hat{\text{O}}_{\text{N}}\left[w(n)x_\ell(n)\right]\text{ÄÏ }\hat{\text{O}}^*_{N}\left[w(n)y_\ell(n)\right] = \frac{1}{UN_1}\hat{X}_\ell(jk)\hat{Y}^*_\ell(jk),$$

а усредненная периодограмма или оценка ВСПМ как

$$\hat{P}_{xy}(k) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L}\hat{P}_{xy\ell}(k). \qquad (9.15)$$

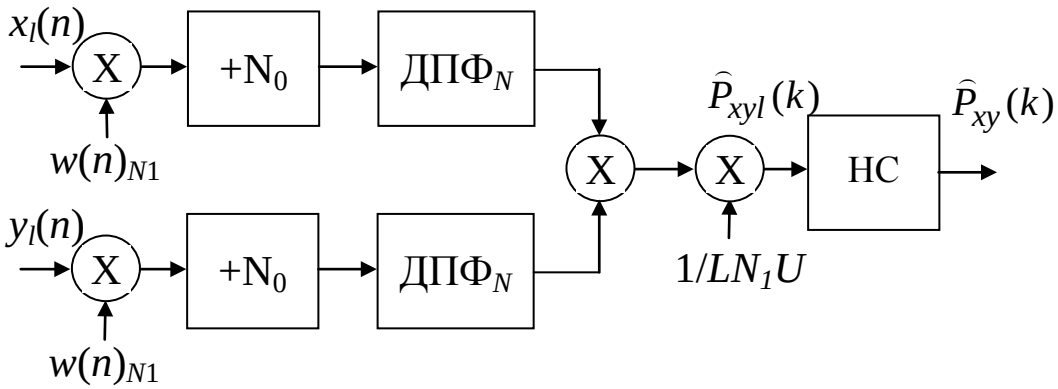


Рис. 9.4. Структурная схема анализатора ВСПМ случайных сигналов по методу периодограмм

Предлагается самостоятельно сравнить эффективность вычислений СПМ, ВСПМ коррелограммным и периодограммным методами в соответствии с формулами (9.11) и (9.14), (9.15).

9.5. Вычисление оценок корреляции с помощью ДПФ

Прямое вычисление АКФ (ВКФ) в соответствии с (9.5), (9.6) включает $(N - |m| - 1)$ операций сложения и умножения на каждый $(2M - 1)$ отсчет автокорреляционной $r_{xx}(m)$ или взаимокорреляционной $r_{xy}(m)$ последовательностей, где $M \le N$ – максимальное по модулю значение (число дискретов) задержки. При больших значениях M и N требуемый для корреляционного анализа сигнала на основе (9.5), (9.6) объем обработки может быть очень большим.

Применение ДПФ для вычисления оценок АКФ и ВКФ по реализациям сигнала конечной длины N_1 основывается на связи между корреляцией и сверткой. Так, корреляционную сумму $\sum_{n=0}^{N_1-m-1} x(n+m)x^*(n)$ можно представить линейной сверткой двух последовательностей $x(n)$ и $x^*(-n)$ (сигнала с его зеркальным комплексно-сопряженным отражением):

$$\sum_{n=0}^{N_1-m-1} x(n+m)x^*(n) = x(n) * x^*(-n) = \sum_{n=0}^{N_1-m-1} x^*(n)x(m-(-n)).$$

Аналогичное соотношение справедливо и для ВКФ:

$$\sum_{n=0}^{N_1-m-1} x(n+m)y^*(n) = x(-n) * y^*(n).$$

Линейной свертке двух N_1-точечных последовательностей во временной области соответствует произведение их ДПФ в частотной области: ДПФ$[x(n)] = X(jf_k)$, ДПФ$[x^*(-n)] = X^*(jf_k)$, вычисляемых на дискретных частотах $f_k = kf_д/N$, $k = 0, 1, \ldots N-1$ по числу точек N, равному в общем случае $(2N_1 - 1)$:

$$\text{ДПФ}_N[r_{xx}(m)] = R_{xx}(f_k) = \frac{1}{N_1} X(jf_k)X^*(jf_k) = \frac{1}{N_1} |\text{ДПФ}_N[x(n)]|^2; \quad (9.16)$$

$$\text{ДПФ}_N[r_{xy}(m)] = R_{xy}(jf_k) = \frac{1}{N_1} X(jf_k)Y^*(jf_k) =$$

$$= \frac{1}{N_1} \text{ДПФ}_N[x(n)]\text{ДПФ}^*_N[y(n)]. \quad (9.17)$$

При этом к каждой из последовательностей $x(n)$, $y(n)$ добавляется $N_0 = N_1$ (*или более*) нулевых отсчетов.

Искомые оценки АКФ и ВКФ получаются обратным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ) полученных в соответствии с (9.16), (9.17) дискретных последовательностей $R_{xx}(f_k)$, $R_{xy}(jf_k)$:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \text{ОДПФ}\left\{\frac{1}{N_1} |\text{ДПФ}_N\{[x(n)]|_N\}^2\right\} = \frac{1}{N_1 N}\left(\sum_{k=0}^{N-1} R_{xx}(f_k)\, e^{j2\pi f_k m T_д}\right); \quad (9.18)$$

$$\hat{r}_{xy}(m) = \text{ОДПФ}\left\{\frac{1}{N_1} \text{ДПФ}_N\{[x(n)]\text{ДПФ}^*_N[y(n)]\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N_1 N}\sum_{k=0}^{N-1} R_{xy}(jf_k) e^{j2\pi f_k m T_д}. \quad (9.19)$$

Для повышения точности оценок АКФ, ВКФ число их отсчетов M, т.е. максимальный номер индекса $m_{\max} = (M-1)$, выбирают намного меньше длины реализации N_1: $M << N_1$, например, $M \approx 0{,}1N_1$ [12]. С учетом этого минимально необходимое для вычисления ДПФ, ОДПФ число точек N составит $N = N_1 + M - 1$, число добавляемых к $x(n)$, $y(n)$ нулевых отсчетов $N_0 = M$, а

пределы изменения индекса m получаемых оценок $r_{xx}(m)$, $r_{xy}(m)$ $-m$ = 0, 1, …, $(2M-1)$ или $m = 0, \pm1, \ldots, \pm(M-1)$.

Рассмотренный алгоритм вычисления АКФ, ВКФ применим для относительно коротких последовательностей $N = (N_1 + M - 1) = (2^{10}–2^{12})$ ввиду трудоемкости расчета ДПФ (БПФ) по большому числу точек. Соответствующие ему структурные схемы вычислителей АКФ и ВКФ для коротких последовательностей приведены на рис. 9.5.

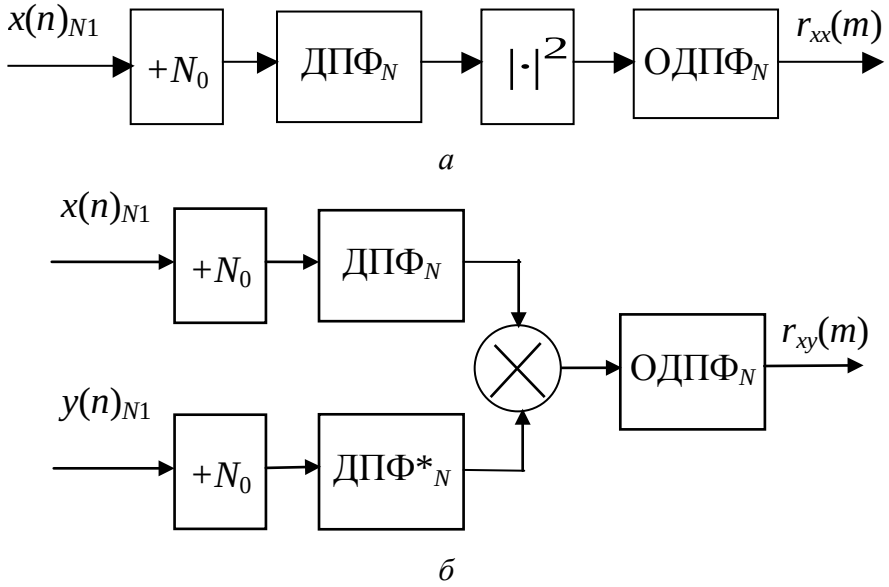


Рис. 9.5. Структурные схемы вычислителей АКФ (*а*) и ВКФ (*б*) на основе ДПФ

Предлагается самостоятельно сравнить эффективность вычисления АКФ, ВКФ во временной области в соответствии с формулами (9.5), (9.6) и в частотной области с помощью (9.18), (9.19) в зависимости от соотношения N_1 и M.

По оценкам (9.14), (9.15) СПМ, ВСПМ $\hat{P}_{xx(\text{п})}(f_k)$, $\hat{P}_{xy(\text{п})}(jf_k)$, вычисленным методом периодограмм, можно косвенно определить также и оценки АКФ, ВКФ, связанные с СПМ (ВСПМ) обратным преобразованием Фурье:

$$\hat{r}_{xx(\text{п})}(m) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{(N-1)/2}\hat{P}_{xx(\text{п})}(f_k)\cos(2\pi f_k m T_{\text{д}}),$$

$$m = 0,\ 1,\ldots,\ M-1;\ \hat{r}_{xx(\text{п})}(-m) = \hat{r}_{xx(\text{п})}(m)\ ;\ M \le N;$$

$$\hat{r}_{xy(\text{п})}(m) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{P}_{xy(\text{п})}(jf_k)e^{j2\pi f_k m T_{\text{д}}},\ m = 0,\ \pm1,\ldots\pm(M-1).$$

Вычисление оценок АКФ и ВКФ по реализациям сигналов большой длины *с помощью периодограмм* намного эффективнее их прямого вычисления во временной области.

Рассмотренные методы спектрально-корреляционного анализа случайных сигналов эффективно используются для измерения частотных характеристик линейных устройств и каналов связи по откликам их на шумовые и псевдослучайные воздействия, в том числе наложенные на полезный информационный сигнал.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные характеристики дискретных случайных сигналов?
2. Как определяются АКФ и ВКФ дискретных случайных сигналов?
3. Как определяется СПМ и ВСПМ дискретных случайных сигналов?
4. Каковы статистические оценки АКФ и ВКФ дискретных случайных сигналов?
5. Каковы статистические оценки СПМ и ВСПМ дискретных случайных сигналов?
6. В чем заключается коррелограммный метод оценки СПМ (ВСПМ)?
7. В чем заключается периодограммный метод оценки СПМ (ВСПМ)?
8. Как достигаются необходимая точность и частотное разрешение в методах коррелограмм и периодограмм?
9. Как обеспечивается применение БПФ для вычисления СПМ (ВСПМ) методами периодограмм и коррелограмм?
10. Какова эффективность вычисления оценок СПМ (ВСПМ) методами коррелограмм и периодограмм?
11. Как осуществляется оценка АКФ (ВКФ) случайных сигналов с помощью БПФ?
12. Как осуществляется оценка АКФ (ВКФ) длинных последовательностей с помощью периодограмм?
13. Какова вычислительная эффективность косвенных оценок АКФ (ВКФ)?
14. Какова роль весовых функций при спектрально-корреляционном анализе дискретных случайных сигналов?

Лекция 10
Алгоритмы быстрого преобразования Фурье

Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) – это способы быстрого вычисления ДПФ $X(jk)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j(2\pi/N)kn}$, устраняющие свойственную ДПФ вычислительную избыточность. Они основываются на *свойствах комплексной экспоненты* $e^{-j(2\pi/N)kn}$, для удобства обозначаемой W_N^{kn} ($W_N=e^{-j(2\pi/N)kn}$); ее *симметрии* $W_N^{(N-k)n}=W_N^{(N-n)k}=(W_N^{kn})^*$ и *периодичности* $W_N^{(k+N)(n+N)}=W_N^{kn}$ с периодом, равным длине обрабатываемой реализации сигнала N (числу точек БПФ). В соответствии с последним свойством экспоненте $W_N^{pkn}=W_{N/p}^{kn}$ отвечает период N/p, где p – целые числа, на которые делится N. Использование данных свойств в алгоритмах БПФ исключает большое число повторяющихся при вычислении ДПФ операций.

Общий принцип БПФ заключается в разбиении ДПФ исходной последовательности на ДПФ подпоследовательностей меньшей длины, вплоть до минимально возможной (равной основанию БПФ), через которые и вычисляется ДПФ исходной последовательности.

Разбиение означает *прореживание* последовательностей во временной или в частотной области. В связи с этим различают БПФ *с прореживанием по времени* и БПФ *с прореживанием по частоте*.

В отличие от ДПФ, БПФ может вычисляться только по определенному числу точек N, соответствующему целой степени его *основания* m: $N = m^L$, где L – это число *этапов прореживания*: $L = \log_m N$. Чаще всего применяют БПФ *по основанию* 2.

10.1. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени

Пусть задана последовательность $x(n)_N$ конечной длины N, $n = 0, \ldots, N - 1$. Нужно найти ее ДПФ: $X(jk)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$ для $k = 0, 1, \ldots, N - 1$ (номера бинов ДПФ) с минимальным объемом вычислений. Для этого исходную последовательность $x(n)$ разобьем на 2 подпоследовательности длиной $N/2$ – *четную*, включающую отсчеты $x(n)$ с четными индексами n: $x_1(n) = x(2n)$, и *нечетную*: $x_2(n) = x(2n + 1)$, $n = 0, 1,\ldots, (N/2) - 1$. Это соответствует первому прореживанию сигнала по времени (рис. 10.1).

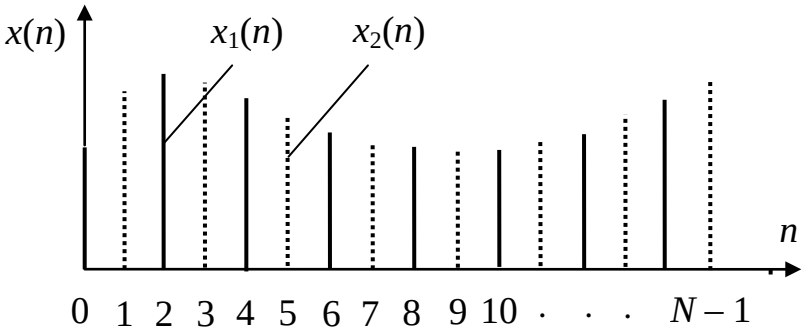


рис. 10.1. иллюстрация прореживания сигнала по времени

Обозначим их ДПФ как $X_1(jk)_{N/2}$ и $X_2(jk)_{N/2}$. Выразим ДПФ исходной последовательности $x(n)_N$ через ДПФ подпоследовательностей $x_1(n)_{N/2}$, $x_2(n)_{N/2}$:

$$X(jk) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} =$$

$$= X_1(jk) + W_N^k X_2(jk)\ ,\ k = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1. \qquad (10.1)$$

Это первые $N/2$ частотных выборок ДПФ.

Вторую половину частотных выборок $X(jk)$ для $k = (N/2), \ldots, (N-1)$ найдем с учетом свойства периодичности:

$$X\left[j\left(k + \frac{N}{2} \right) \right] = X_1(jk) + W_N^{k+(N/2)} \cdot X_2(jk) =$$

$$= X_1(jk) - W_N^k X_2(jk)\ ,\ k = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1. \qquad (10.2)$$

Выражения (10.1), (10.2) определяют *базовую операцию* БПФ (операцию объединения):

$$X(jk) = X_1(jk) + W_N^k \cdot X_2(jk);$$

$$X\left[j(k + (N/2) \right] = X_1(jk) - W_N^k \cdot X_2(jk), \quad k = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1. \qquad (10.3)$$

Входящий в (10.3) *множитель* W_N^k, равный по модулю единице, называют *поворачивающим*. Вычисления в соответствии с (10.3) включают одно комплексное умножение и пару операций сложения–вычитания.

Базовую операцию представляют графически (рис. 10.2) с помощью *сигнального графа* (бабочки БПФ).

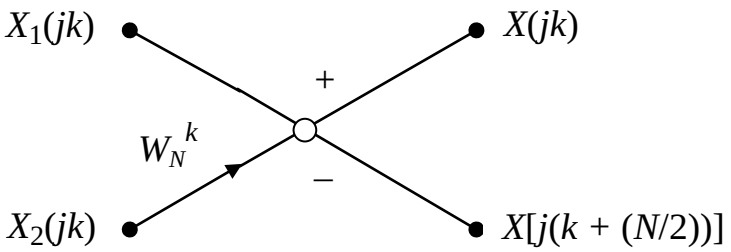


Рис. 10.2. Сигнальный граф базовой операции БПФ

На нем символ ⋇ означает операцию сложения (верхний выход) и вычитания (нижний выход), а стрелка → соответствует умножению на поворачивающий множитель W_N^k.

Сигнальный граф алгоритма БПФ получается в виде совокупности графов базовых операций. Для первого этапа прореживания он показан на рис. 10.3 ($N = 8$).

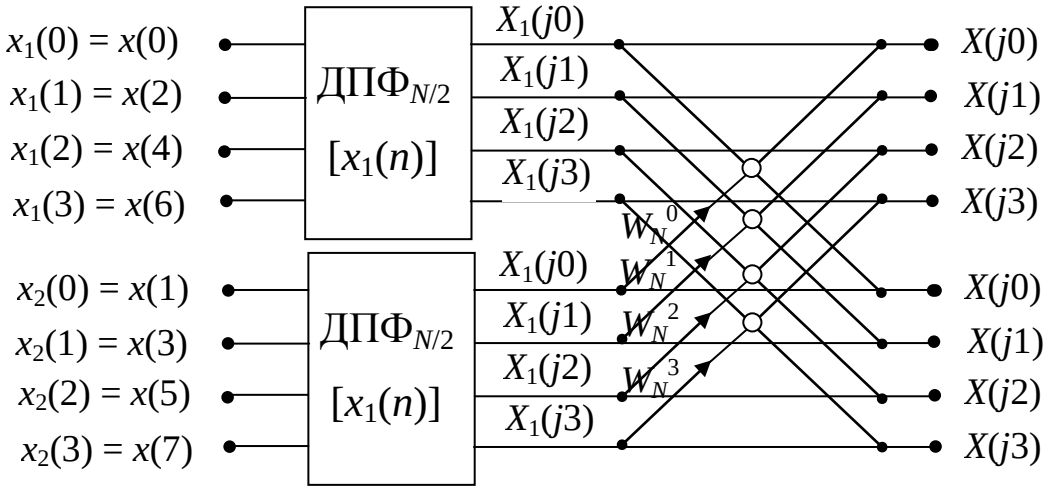


рис. 10.3. сигнальный граф бпф для первого этапа прореживания

Оценим требуемый объем вычислений в соответствии с данным графом по числу операций умножения: для дпф $k_{\text{умн дпф}} = n^2$; для бпф $k_{\text{умн бпф}} = 2(n/2)^2 + n/2 = n^2/2 + n/2$.

Как видим, в результате *однократного прореживания объем вычислений уменьшился* примерно в 2 раза.

Дальше каждую из последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ можно разбить еще на две подпоследовательности вдвое меньшей длины: $x_{11}(n)$, $x_{12}(n)$ и $x_{21}(n)$, $x_{22}(n)$ (четную и нечетную) и повторить вышеприведенные операции объединения их ДПФ с помощью базовых операций. Такое прореживание выполняем L раз до получения $N/2$ *двухточечных последовательностей* $x_l(0)$, $x_l(1)$, ДПФ которых вычисляется тривиально:

$$X_l(j0) = x_l(0) + W_2^{\ 0} x_l(1), \qquad X_l(j1) = x_l(0) - W_2^{\ 0} x_l(1).$$

В результате получаем *полный граф* БПФ для $N = 8$ (рис. 10.4).

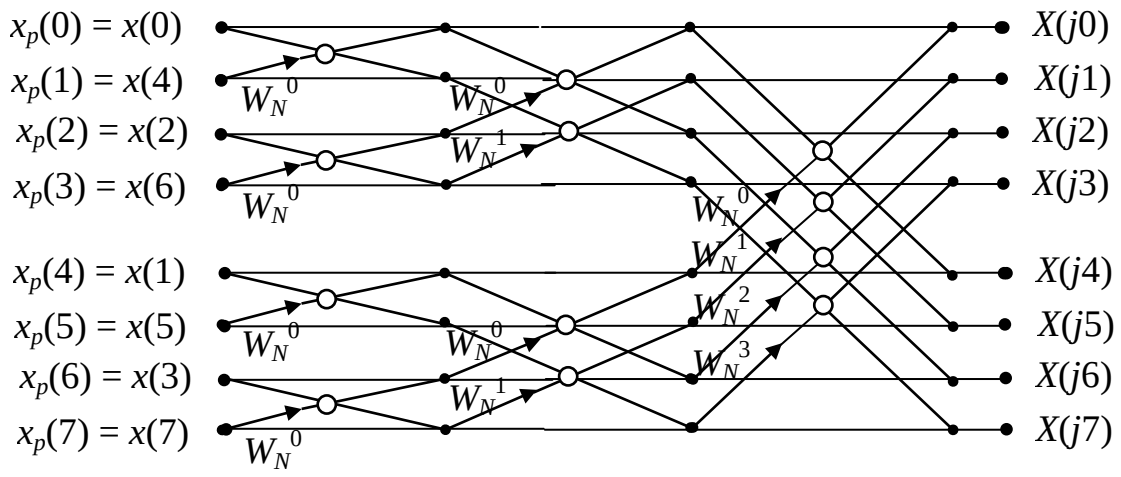


Рис. 10.4. Полный граф БПФ для $N = 8$

В соответствии с графом на каждом из L *этапов вычисления–объединения* ДПФ выполняются $N/2$ базовых операций, а *общий объем вычислений* для комплексных операций умножения и сложения–вычитания составляет:

$$K_{\text{умн.БПФ}} = \frac{N}{2}L = \frac{N}{2}\log_2 N,\ K_{\text{слож.БПФ}} = NL = N\log_2 N\,. \qquad (10.4)$$

Число операций с *вещественными числами* в 4 раза больше для умножения и в 2 раза больше для сложения–вычитания. Выигрыш БПФ относительно ДПФ по числу операций умножения $K_{\text{умнДПФ}}/K_{\text{умн БПФ}} = 2N/\log_2 N$. Так, при $N = 2^{10} = 1024$ $K_{\text{умнБПФ}} = 5120$, $K_{\text{умнДПФ}} \approx 10^6$, выигрыш равен 204,8.

Выделенные на рис. 10.4 узловые точки графа соответствуют *ячейкам оперативной сигнальной памяти*. Так как вычисления выполняются поэтапно, то возможно *замещение* ячеек памяти, определяющее *общую требуемую сигнальную память* в объеме, равном $2N$ ячеек для N комплексных чисел (их реальной и мнимой части). При этом используемые ячейки памяти на входе графа с N отсчетами входного сигнала $x(n)$ (в общем случае комплексного) замещаются в конечном итоге N комплексными частотными выборками БПФ $X(jk)$.

Особенностью алгоритма БПФ с прореживанием по времени является требуемый им *неестественный порядок отсчетов входного сигнала*, обусловленный его многократными разбиениями на четные и нечетные подпоследовательности ($n = 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$ для $N = 8$).

Таблица 10.1

$n_{(10)}$	$n_{(2)}$	$n_{(2\text{-инв})}$	p
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Такой порядок следования называют *двоично-инверсным* или бит-реверсным. Это приводит к необходимости предварительной *перестановки отсчетов* исходной последовательности до начала вычислений. Для этого естественные номера отсчетов $n_{(10)}$ последовательности $x(n)$ представляются в L-разрядном двоичном коде $n_{(2)}$, коды эти прочитываются в обратном порядке, т.е. справа налево ($n_{(2\text{-инв})}$) и преобразуются затем снова в десятичную форму, соответствующую номеру отсчета p переставленной последовательности $x(p)$ (табл. 10.1).

10.2. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по частоте

Рассмотрим кратко, как осуществляют прореживание в данном алгоритме БПФ и определяют его базовую операцию. Для этого входную последовательность $x(n)$ представляют в виде двух подпоследовательностей:

$$x_1(n) = x(n) \text{ и } x_2(n) = x(n + (N/2)),$$
$$n = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1,$$

т.е. в виде ее первой $x_1(n)$ *и* второй $x_2(n)$ половин, и выражают через них ДПФ исходной последовательности:

$$X(jk) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n) W_N^{k(n+(N/2))},$$
$$k = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Далее выполняют *прореживание* ДПФ-последовательности $X(jk)$ путем разбиения ее на две $(N/2)$-точечные ДПФ-подпоследовательности $X(j2k)$, $X[j(2k + 1)$, соответствующие частотным выборкам с четными и нечетными номерами k:

$$X(j2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1(n) W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n) W_{N/2}^{kn} =$$
$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_{N/2}^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f_1(n) W_{N/2}^{kn};$$

$$X(j(2k+1)) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1(n) W_{N/2}^{kn} W_N^n + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n) W_{N/2}^{kn} W_N^n W_N^{(2k+1)N/2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n W_{N/2}^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_1(n) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1.$$

В результате ДПФ исходной последовательности выражается через ДПФ некоторых $N/2$-точечных последовательностей $f_1(n)$, $g_1(n)$, определяемых следующим образом:

$$f_1(n) = x_1(n) + x_2(n),$$
$$g_1(n) = [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n, \quad n = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1. \qquad (10.5)$$

Выражения (10.5) и соответствуют *базовой операции* данного алгоритма, представляемой графически зеркально отраженным сигнальным графом БПФ с прореживанием по времени (рис. 10.2).

Из последовательностей $f_1(n)$ и $g_1(n)$ по тому же правилу можно снова сформировать по две $(N/4)$-точечные последовательности, ДПФ которых также в совокупности образуют ДПФ исходной последовательности $x(n)$. В результате на L-м этапе прореживания получается $(N/2)$ двухточечных последовательностей, ДПФ которых вычисляется в соответствии с базовой операцией (10.5) и образуют вместе ДПФ исходной последовательности $X(jk)$. Однако из-за прореживаний в частотной области порядок следования частотных выборок ДПФ оказывается *неестественным* – двоично-инверсным, требующим по завершении вычисления дополнительных перестановок. Они выполняются так же, как и перестановки входной последовательности $x(n)$ перед вычислением БПФ с прореживанием по времени. Входная же последовательность здесь имеет естественный порядок следования. Это полезная в ряде случаев *отличительная особенность* данного алгоритма.

Полный *сигнальный граф* БПФ с прореживанием по частоте является зеркальным отображением сигнального графа БПФ с прореживанием по времени (рис. 10.3 для $N = 8$).

Оба алгоритм БПФ имеют *одинаковую вычислительную эффективность*, определяемую выражением (10.4).

Присущие алгоритмам БПФ с прореживанием по времени и частоте особенности позволяют *совместно и эффективно* использовать их при реализации нерекурсивных цифровых фильтров на основе ДПФ (БПФ) (рис. 10.5).

С помощью БПФ с прореживанием по частоте, не требующего перестановок на входе, вычисляются ДПФ входной последовательности $x(n)$ и импульсной характеристики $h(n)$, а с помощью БПФ с прореживанием по времени – ОДПФ их произведения $Y(jk)$, имеющего необходимый для данного алгоритма двоично-инверсный порядок отсчетов.

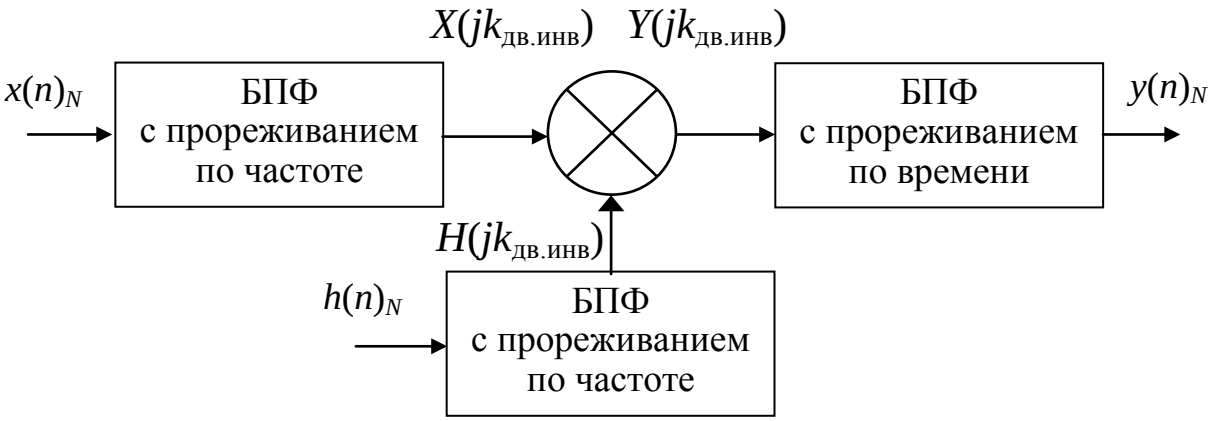


рис. 10.5. структура нерекурсивного фильтра на основе БПФ
с прореживанием по времени и по частоте

Выходные отсчеты ОДПФ при этом получаются в естественном порядке, в результате чего полностью исключается необходимость перестановок отсчетов и частотных выборок в процессе обработки.

Следует отметить, что рассмотренные алгоритмы БПФ разработаны для комплексных входных сигналов. При обработке *действительных* (вещественных) сигналов эффективность их может быть повышена путем исключения лишних операций с отсутствующей мнимой составляющей сигнала [11]. В первом из методов это достигается путем одновременного вычисления с помощью одного N-точечного комплексного БПФ двух разных N-точечных действительных последовательностей. Во втором методе с помощью одного N-точечного комплексного БПФ вычисляется БПФ одной $2N$-точечной действительной последовательности.

При реализации алгоритмов БПФ решаются также вопросы масштабирования сигналов и обеспечения точности вычислений [8, 10].

Контрольные вопросы

1. В чем заключаются алгоритмы БПФ с прореживанием по времени и по частоте?
2. Как оценивается эффективность алгоритмов БПФ?
3. В чем заключаются вычисления с замещением в алгоритмах БПФ?
4. Что дает совместное использование алгоритмов БПФ с прореживанием по времени и по частоте?

Т Е М А 4
СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Л е к ц и я 11
Методы многоскоростной обработки сигналов

К *многоскоростным* системам (МСС) относят системы ЦОС, которые на разных этапах обработки сигнала имеют различные значения частоты дискретизации. Иначе их называют системами с *передискретизацией* сигнала.

Передискретизация сигнала обеспечивает согласование скорости и объема обработки с изменяющейся в результате обработки полосой частот обрабатываемого сигнала и таким образом улучшает *реализационные характеристики* систем ЦОС.

В соответствии с общей структурной схемой МСС (рис. 11.1) сигнал на ее входе может иметь частоту дискретизации $f_{д1}$, на выходе – $f_{д2}$, а внутренние сигналы могут быть дискретизированы с частотой $f_{д3}$.

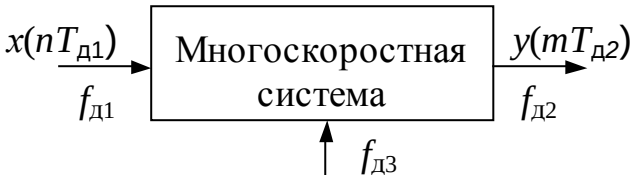


Рис. 11.1. Общая структура многоскоростной системы ЦОС

Согласно *классификации* различают: восходящие (с повышением частоты дискретизации), нисходящие (с понижением частоты дискретизации), комбинированные, однократные, многократные многоскоростные системы.

Многоскоростные системы *применяют* для решения следующих задач:

♦ интерполяции сигналов – восстановления отсутствующих промежуточных отсчетов между узловыми точками сигнала, например, с целью улучшения его визуализации;

♦ децимации, или прореживания, сигналов для исключения избыточности информации и сжатия данных;

♦ сопряжения систем с различными значениями частот дискретизации или приведения их к стандартным значениям, например, 44,1 кГц и 48 кГц – в аудиосистемах, 32 кГц и 512 кГц – в цифровой радиосвязи и т.д.;

♦ переноса спектров сигналов и формирования – разделения сигналов с одной боковой полосой спектра;

♦ высококачественного ввода–вывода аналоговых сигналов.

11.1. Восходящие дискретные системы. Интерполяция сигналов

Восходящей называется дискретная система, в которой частота дискретизации выходного сигнала в целое число раз превышает частоту дискретизации входного сигнала. Выполняемая такой системой обработка называется интерполяцией сигнала.

Структура восходящей дискретной системы. Временное представление сигналов

В восходящей дискретной системе (ВДС) (рис. 11.2), сигнал $x(mT'_д)$ с низкой частотой дискретизации $f'_д$ преобразуется в интерполированный сигнал $y(nT_д)$ с высокой частотой дискретизации $f_д = L\,f'_д$, подобной ему по форме и частотному спектру: $y(nT_д) \cong x(mT'_д)$. Допустимым при этом является временное запаздывание интерполированного сигнала относительного исходного (рис. 11.3).

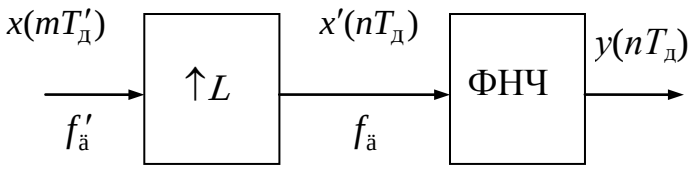


Рис. 11.2. Структура восходящей дискретной системы

Базовыми элементами ВДС являются *фильтр-интерполятор нижних частот* (ФНЧ) с частотой среза $f_{сд} \approx f'/2$ и *экспандер частоты дискретизации* (ЭЧД), обозначенный символом $\uparrow L$. С помощью ЭЧД осуществляется непосредственное повышение частоты дискретизации сигнала в L раз. Сигнал $x'(nT_д)$ на выходе ЭЧД в соответствии с его алгоритмом работы определяется как

$$x'(nT_д) = \begin{cases} x(mT'_д), & n = mL \\ 0 \text{ при} & . \quad n \neq mL \end{cases} \qquad (11.1)$$

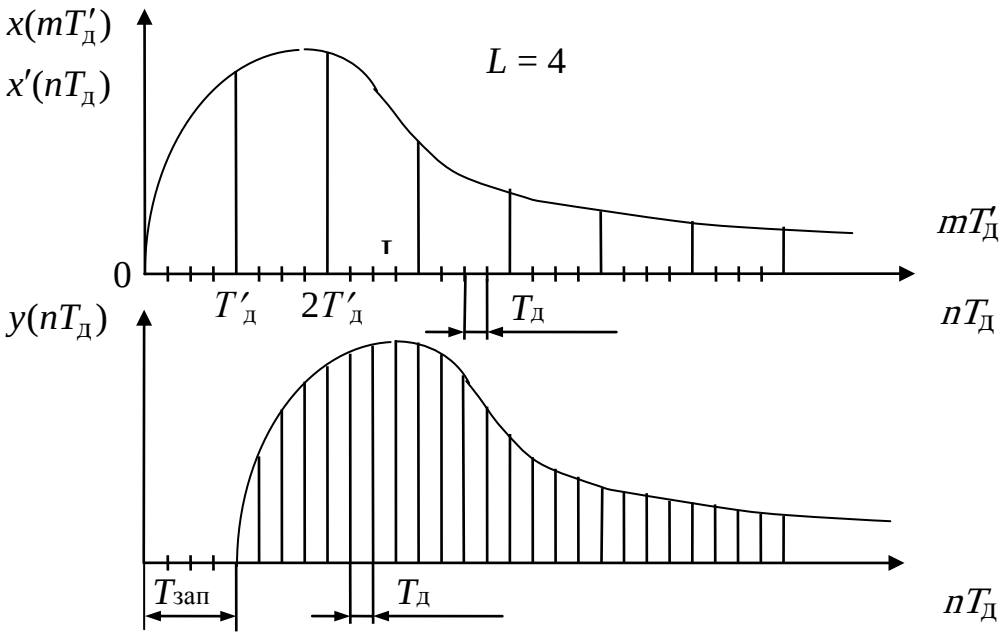


рис. 11.3. временные диаграммы сигналов в вдс

Он получается добавлением к входному сигналу $x(mT'_д)$ $(L-1)$ *нулевых отсчетов* на каждом периоде его дискретизации $T'_д$ или между каждой парой его отсчетов. Фильтром-интерполятором на каждом интервале $T'_д$ вычисляются значения $(L-1)$-го дополнительного отсчета интерполированного сигнала $y(n)$.

Спектральное представление сигналов ВДС

Рассмотрим преобразования сигналов ВДС в частотной области.

Сигналы МСС, имеющие разные частоты дискретизации, характеризуют *спектральной плотностью*, соответствующей преобразованию Фурье сигнала, отнесенному к значению его основной полосы частот, равной частоте дискретизации этого сигнала. Для входного сигнала $x(mT'_д)$ спектральная плотность $X(j\omega) = T'_д \sum_{m=0}^{\infty} x(mT'_д) \cdot e^{-j\omega mT'_д} = X\left[j(\omega \pm k\omega'_д \right]$ периодична с низкой частотой дискретизации $f'_д = 1/T'_д$ (рис. 11.4, *а*), для сигнала $x'(nT_д)$ на выходе ЭЧД спектральная плотность периодична с высокой частотой дискретизации $f_д = 1/T_д$:

$$X'(j\omega) = T_д \sum_{n=0}^{\infty} x'(nT_д) \cdot e^{-j\omega nT_д} = X\left[j(\omega \pm k\omega_д \right], \qquad (11.2)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ – целые числа. Выражая $x'(nT_д)$ в (11.2) через $x(mT'_д)$ в соответствии с (11.1), получаем

$$X'(j\omega) = (T'_д/L)\sum_{m=0}^{\infty} x(mT'_д)\cdot e^{-j\omega mLT_д} = (1/L)X(j\omega). \qquad (11.3)$$

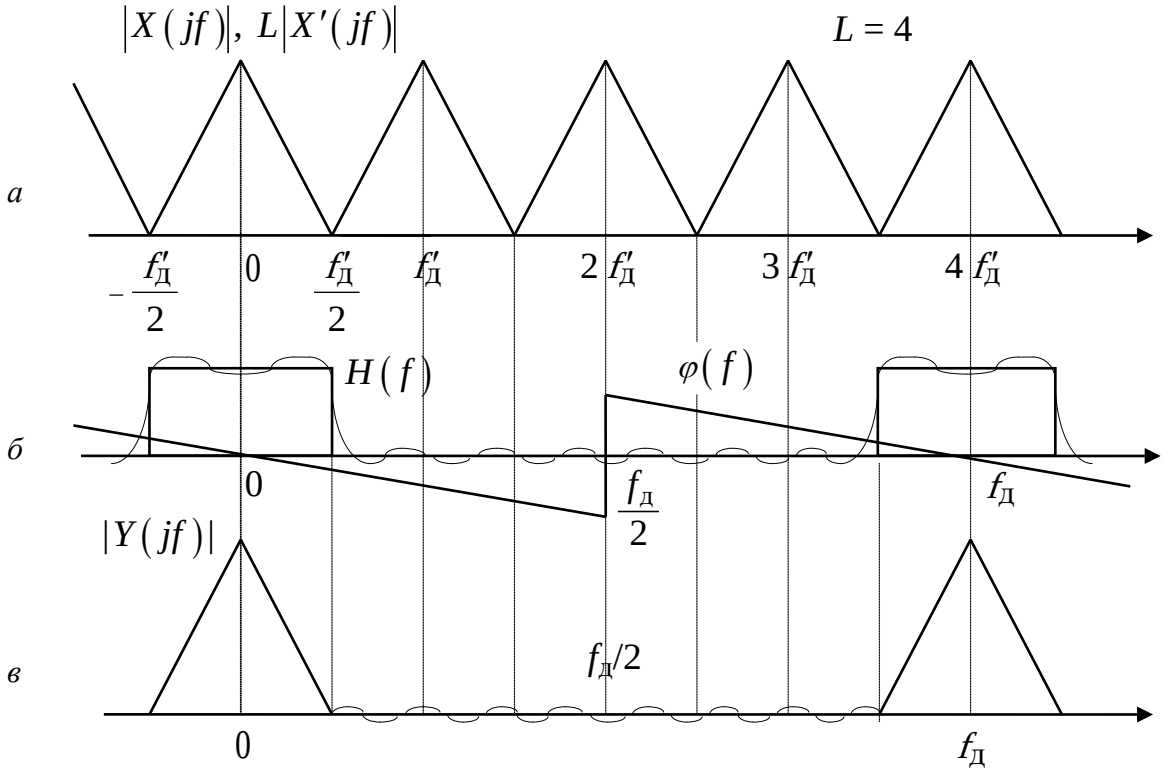


Рис. 11.4. Спектральные диаграммы сигналов в ВДС

Из (11.3) следует, что спектр сигнала $x'(nT_д)$ на выходе ЭЧД (рис. 11.4, *а*) с точностью до постоянного множителя $(1/L)$ является периодическим повторением спектра сигнала $x(mT'_д)$ с периодом, равным высокой частоте дискретизации $f_д$. При этом в основной полосе спектра сигнала $x'(nT_д)$ укладывается L периодов спектра сигнала $x(mT'_д)$, равных $f'_д$. Любой из этих периодов в полосе $(0–f_д/2)$ может быть выбран с помощью цифрового фильтра-интерполятора, включаемого на выходе элемента ЧД и работающего с высокой частотой дискретизации $f_д$. При использовании ЦФ типа ФНЧ (рис.11.2) с частотой среза $f_с = f'_д/2$ выделяется спектр входного сигнала, соответствующий его основной полосе $\pm f'_д/2$ (рис. 11.4, *б, в*). *Спектральная плотность сигнала y(n) на выходе* ВДС находится умножением спектральной плотности сигнала $x'(nT_д)$ на частотную характеристику ЦФ $H(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X'(j\omega) = \frac{1}{L}|H(\omega)|\cdot X(j\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (11.4)$$

В случае идеализированного ФНЧ с АЧХ, равной $|H(\omega)|=L$ в полосе $\pm\omega'_д/2$ и нулю за ее пределами (рис. 11.4, *б*), из выражения (11.4), преобразуемого к виду

$$Y(j\omega)=|X(j\omega)|\cdot e^{j[\varphi x(\omega)+\varphi(\omega)]},$$

следует точное соответствие амплитудных спектров входного и выходного сигналов ВДС в полосе частот $\pm\omega'_д/2$:

$$|Y(j\omega)|=|X(j\omega)|\Big|_{|\omega|\le\omega'_д/2}.$$

Если при этом ФЧХ фильтра строго линейна: $\varphi(\omega)=-\omega T_{çàï}$ (рис. 11.4. *б*), то и во временной области обеспечивается точное соответствие или подобие форм обоих сигналов с учетом постоянного времени запаздывания $T_{зап}$ выходного сигнала: $y(nT_д)\cong x(mT'_д-T_{зап})$ (рис. 11.3). Это полностью удовлетворяет математической задаче интерполяции сигнала. Для *реального фильтра-интерполятора* всегда присутствуют некоторые *искажения* спектра и формы интерполированного сигнала (рис. 11.4, *б*, *в*).

Перенос спектра сигналов в ВДС

С помощью ВДС наряду с интерполяцией сигнала возможно также дискретное смещение его спектра в пределах полосы $(0–f_д/2)$. Для этого на выходе ЭЧД нужно включить *полосовой фильтр-интерполятор* (ПФИ), настроенный на центральную частоту выделяемой полосы и имеющий полосу пропускания, равную ее ширине (рис. 11.5).

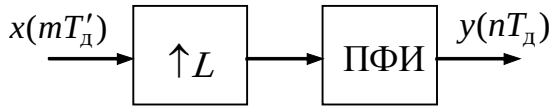


Рис. 11.5. Структурная схема ВДС с переносом спектра сигнала

При этом возможен перенос как обеих боковых полос спектра сигнала, так и одной его боковой полосы.

Переносу обеих полос спектра соответствуют центральные частоты ПФИ $f_i = if'_д$, i = 1, 2, …, $[L/2]_{ц.ч}$, где $[L/2]_{ц.ч}$ – целая часть отношения $L/2$, определяющая число дискретных частот (каналов), на которые может быть смещен спектр обрабатываемого сигнала. Полоса пропускания фильтра в этом случае должна быть равна частоте $f'_д$: $\Delta f_п = f'_д$.

Перенос одной боковой полосы спектра (рис. 11.6) осуществляется с помощью ПФИ, имеющего полосу пропускания $\Delta f_п = f'_д/2$ и центральную частоту $f_i = if'_д/2 + f'_д/4$, i = 1, 2, …, L – 1, где $(L$ – 1) соответствует числу дискретных частот, на которые возможно смещение спектра (рис. 11.6, *а*).

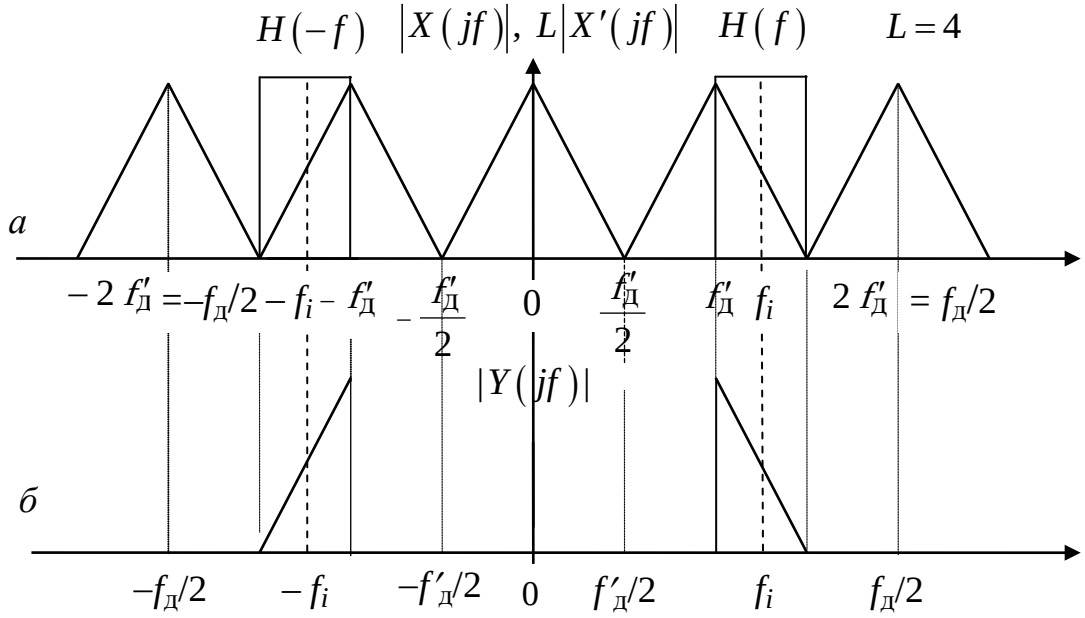


Рис. 11.6. Частотные диаграммы переноса одной боковой полосы спектра

В результате переноса получается вещественный однополосный сигнал (рис. 11.6, *б*). Нечетным значениям i соответствует инверсный спектр сигнала. Для преобразования его в прямой сигнал $y(n)$ нужно умножить на $(-1)^n$.

Требования к цифровым фильтрам-интерполяторам

Спектр интерполируемого сигнала предполагает наличие защитных полос ($\Delta f_з$) вблизи частоты $f'_д/2$, а в некоторых случаях и вблизи частоты $f = 0$ (рис. 11.7). Ими определяются значения переходных полос фильтров-интерполяторов нижних частот: $\Delta f_{пер} = 2\Delta f_{з1}$ и полосовых фильтров-интерполяторов: $\Delta f_{пер1} = 2\Delta f_{з1}$, $\Delta f_{пер2} = 2\Delta f_{з2}$ при переносе спектра с выделением одной боковой полосы.

Требуемый порядок фильтра зависит от отношения переходной полосы к частоте дискретизации $f_д$, на которой работает фильтр-интерполятор: $\gamma = \Delta f_{пер} / f_д = \Delta f_{пер} / f'_д \cdot L$. Чем меньше это отношение, т.е. чем больше коэффициент интерполяции L, тем выше требования к ЦФ. Для чаще используемых в ВДС *нерекурсивных цифровых фильтров* (НФ) с линейной ФЧХ переходная полоса частотной характеристики связана с параметрами фильтра соотношением $\Delta f_{пер} = D f_д / N = D f'_д L / N$, в котором константа $D \geq 2$ зависит от используемого метода синтеза ЦФ (так называемый D-фактор). Отсюда требуемый порядок $N - 1$ или длина импульсной характеристики фильтра $N = D f'_д L / \Delta f_{пер}$.

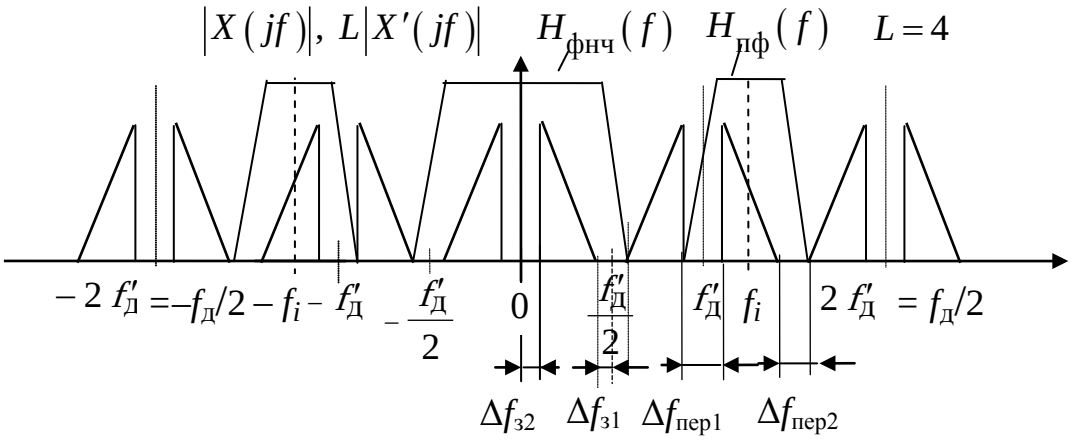


Рис. 11.7. Частотные диаграммы для определения переходной полосы цифрового фильтра-интерполятора

Например, фильтр на основе весовой функции Хэмминга при $f'_д$ = 8 кГц, L = 14, $f_д$ = 112 кГц, $\Delta f_{пер}$ = 0,6 кГц должен иметь достаточно большую длину импульсной характеристики $N \geq$ 780.

Многократные восходящие дискретные системы

В многократных ВДС (рис. 11.8) повышение частоты дискретизации осуществляется поэтапно или многократно. Это возможно при значениях коэффициентов повышения частоты дискретизации L, представляемых произведением K целых чисел: $L = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_K$ (на рис. 11.8 K = 2).

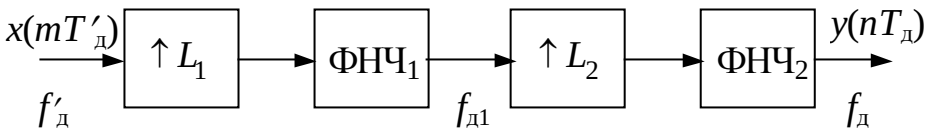


Рис. 11.8. Структурная схема многократной вдс

Можно показать (рис. 11.9), что многократное повышение частоты дискретизации позволяет существенно снизить требования к цифровым фильтрам.

Пусть $f'_д$ = 8 кгц, l = 14, $f_д$ = 112 кгц, $\Delta f_{пер}$ = 0,6 кгц и используется нф с весовой функцией хэмминга (d = 4). Представим l произведением двух сомножителей: l = 14 = 2·7, что соответствует двукратной вдс с коэффициентами l_1 = 2 и l_2 = 7. Для первого цф нижних частот $\Delta f_{пер1}$ = 0,6 кгц (рис. 11.9, *а*), $f_{д1} = l_1 f'_д$ = 16 кгц, $n_1 = d f'_д l_1 / \Delta f_{пер1} \approx 107$.

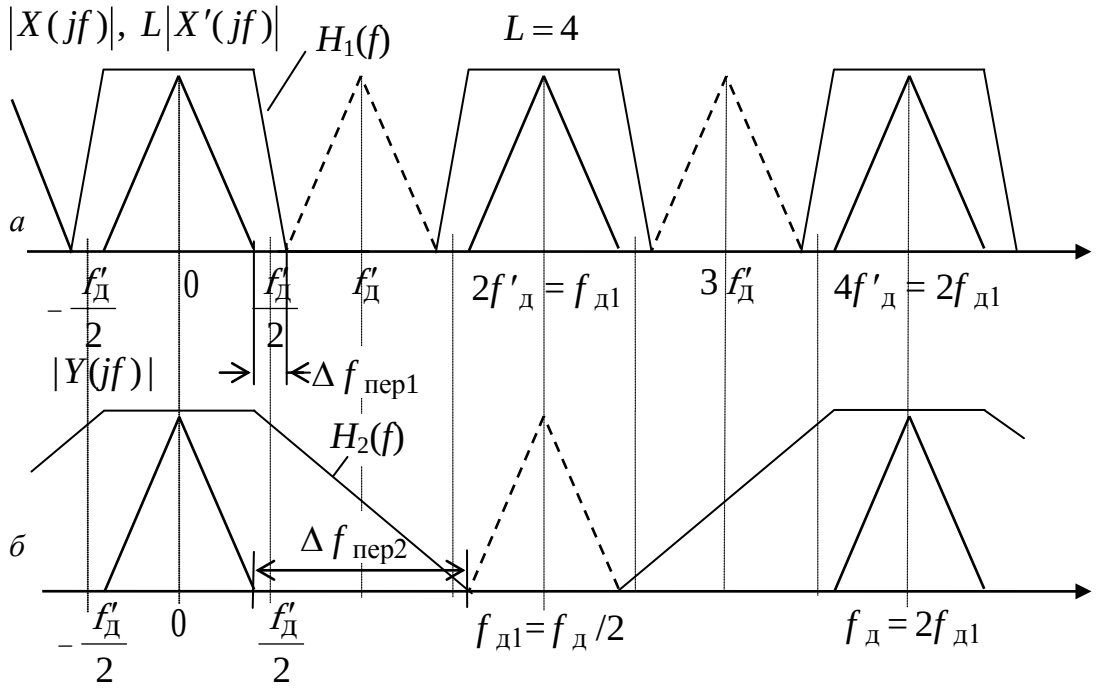


Рис. 11.9. Частотные диаграммы сигналов двукратной ВДС

В результате однократного повышения частоты дискретизации допустимая переходная полоса для второго ФНЧ$_2$ расширяется до $\Delta f_{пер2} = \Delta f_{пер1} + f'_д = 8{,}6$ кГц (рис.11.9, *б*), что соответствует требуемой длине второго фильтра $N_2 = D\, f_д / \Delta f_{пер2} \approx 52$.

Общий объем вычислений и памяти фильтров двукратной ВДС составляет $N = N_1 + N_2 = 159$. Это примерно в 4,9 раза меньше, чем для однократной системы, где $N = 780$.

Особенности реализации нерекурсивных фильтров в ВДС

При использовании в ВДС нерекурсивных фильтров возможно упрощение их реализации или уменьшение объема вычислений за счет исключения операций с нулевыми отсчетами, имеющими место во входном сигнале. Эта возможность реализуется в дуальной структуре НФ на основе ДПФ и в мультиплексной структуре НФ [2, 15].

Подсистема вывода аналоговых сигналов с повышением частоты дискретизации

Принцип интерполяции используется для высококачественного вывода аналоговых сигналов в цифровых синтезаторах сигналов, в устройствах

воспроизведения цифровой звукозаписи (звуковых картах персональных компьютеров, CD-плейерах [4]). Применение интерполяции позволяет снизить требования к аналоговому сглаживающему фильтру нижних частот (АФНЧ), уменьшить вносимые им частотные искажения, а также снизить уровень шумов квантования в выходном сигнале. Структурная схема одной из подсистем вывода, применяемой в проигрывателях компакт-дисков, приведена на рис. 11.10.

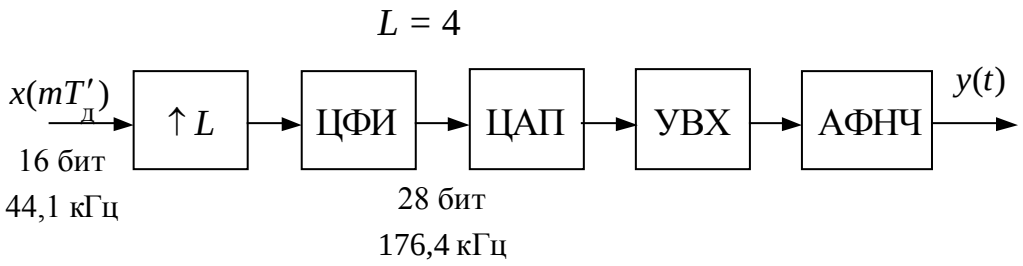


Рис. 11.10. Структура подсистемы вывода аналоговых сигналов с интерполяцией сигнала

Преобразуемый подсистемой цифровой сигнал $x(mT'_д)$ разрядностью 16 бит имеет частоту дискретизации $f'_д$ = 44,1 кГц (стандартную для цифровых аудиосистем), коэффициент интерполяции L = 4, что соответствует частоте дискретизации интерполированного сигнала $y(n)$ $f_д$ = 176,4 кГц. Экспандер частоты дискретизации и цифровой фильтр-интерполятор (ЦФИ) выполнены на основе упомянутой выше БИС SAA-3070. Ее выходной сигнал имеет разрядность 28 бит. С помощью ЦАП он преобразуется в аналоговую форму. Выходное напряжение ЦАП после завершения переходных процессов фиксируется в устройстве выборки-хранения (УВХ) и сглаживается аналоговым ФНЧ.

Выходной сигнал ЦФИ в данной схеме имеет спектр, соответствующий рис. 11.11. Он периодичен с частотой $f_д$ = 176,4 кГц и ограничен полосой, примерно равной $f'_д$ /2 (более точно – 20,5 кГц). Частотная характеристика ЦФИ имеет подъем на границе полосы пропускания, компенсирующий спады частотных характеристик ЦАП и АФНЧ (так называемое предискажение сигнала).

Задача ЦАП и АФНЧ заключается в депериодизации спектра цифрового сигнала, т.е. подавлении составляющих на частотах, кратных частоте дискретизации $f_д$ ($f_д$, $2f_д$, и т.д.). ЦАП имеет частотные свойства фильтра-интерполятора нулевого порядка [6, 7]. Возможная АЧХ АФНЧ показана на рис. 11.11. Фильтр имеет частоту среза $f_с$ = 20 кГц и достаточно большую (за счет повышения частоты дискретизации) переходную полосу $\Delta f_{пер}$ = 136,4 кГц. Даже при большом требуемом затухании в полосе задерживания такой фильтр реализуется достаточно просто и вносит малые искажения сигнала в полосе частот (0–20) кГц. В приводимом примере подсистемы аналогового вывода АФНЧ представляет фильтр Бесселя 3 порядка с затуха-

нием АЧХ –18 дБ/октаву и практически линейной ФЧХ. Общее затухание, создаваемое ЦАП и АФНЧ, составляет около 50 дБ.

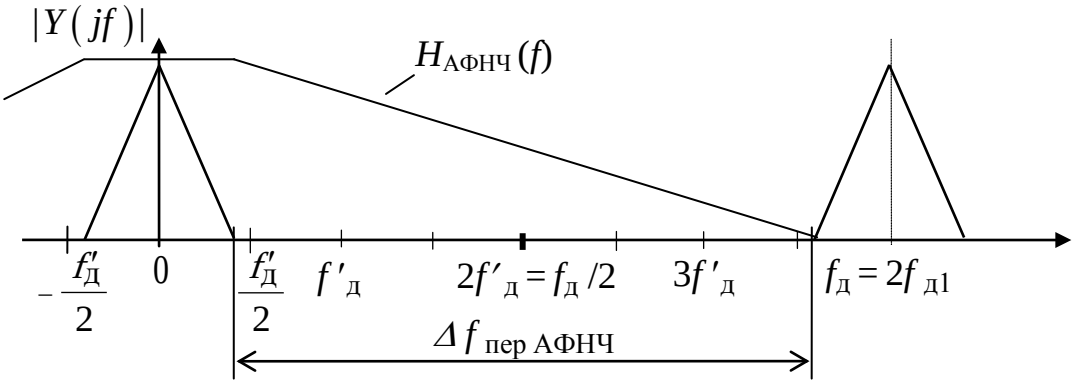


Рис. 11.11. Частотные диаграммы для подсистемы аналогового вывода

В подсистемах вывода без передискретизации сигнала для получения тех же характеристик используются сложные в изготовлении и настройке АФНЧ 9, 12 и более высокого порядка.

В современных подсистемах вывода коэффициент передискретизации достигает значений (128–256), а применение принципа сигма-дельта модуляции [4, 11, 16] позволяет уменьшить разрядность ЦАП до 1 бита. Примером реализации таких подсистем является БИС SAA7320.

11.2. Нисходяще дискретные системы. Децимация сигналов

Нисходящей (НДС) называется дискретная система, в которой частота дискретизации выходного сигнала в целое число раз меньше частоты дискретизации входного.

Временное и спектральное представление сигналов НДС

Понижение частоты дискретизации в НДС осуществляется путем взятия из сигнала с высокой частотой дискретизации $f_д$ каждой M-й выборки, которые и образуют сигнал с низкой частотой дискретизации $f'_д = f_д/M$ (рис. 11.12).

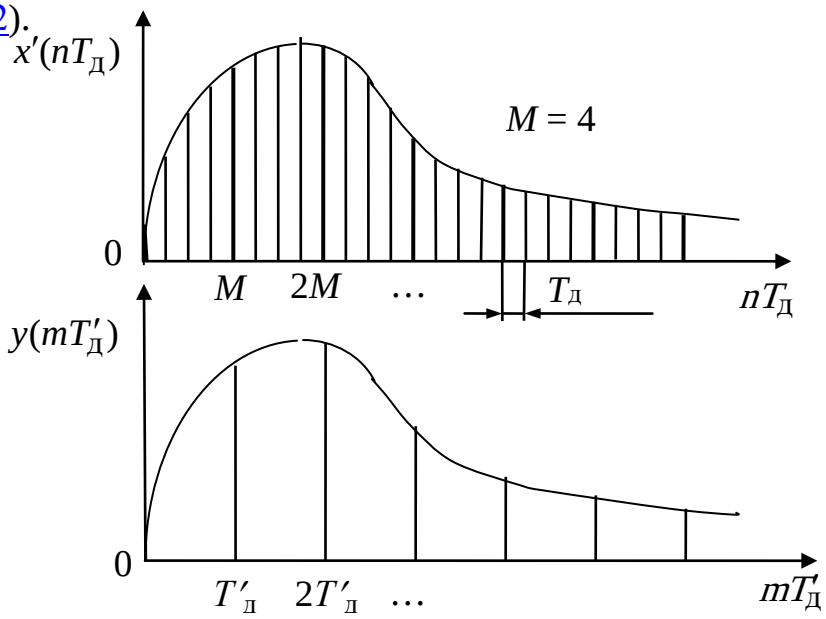


Рис. 11.12. Временные диаграммы сигналов КЧД

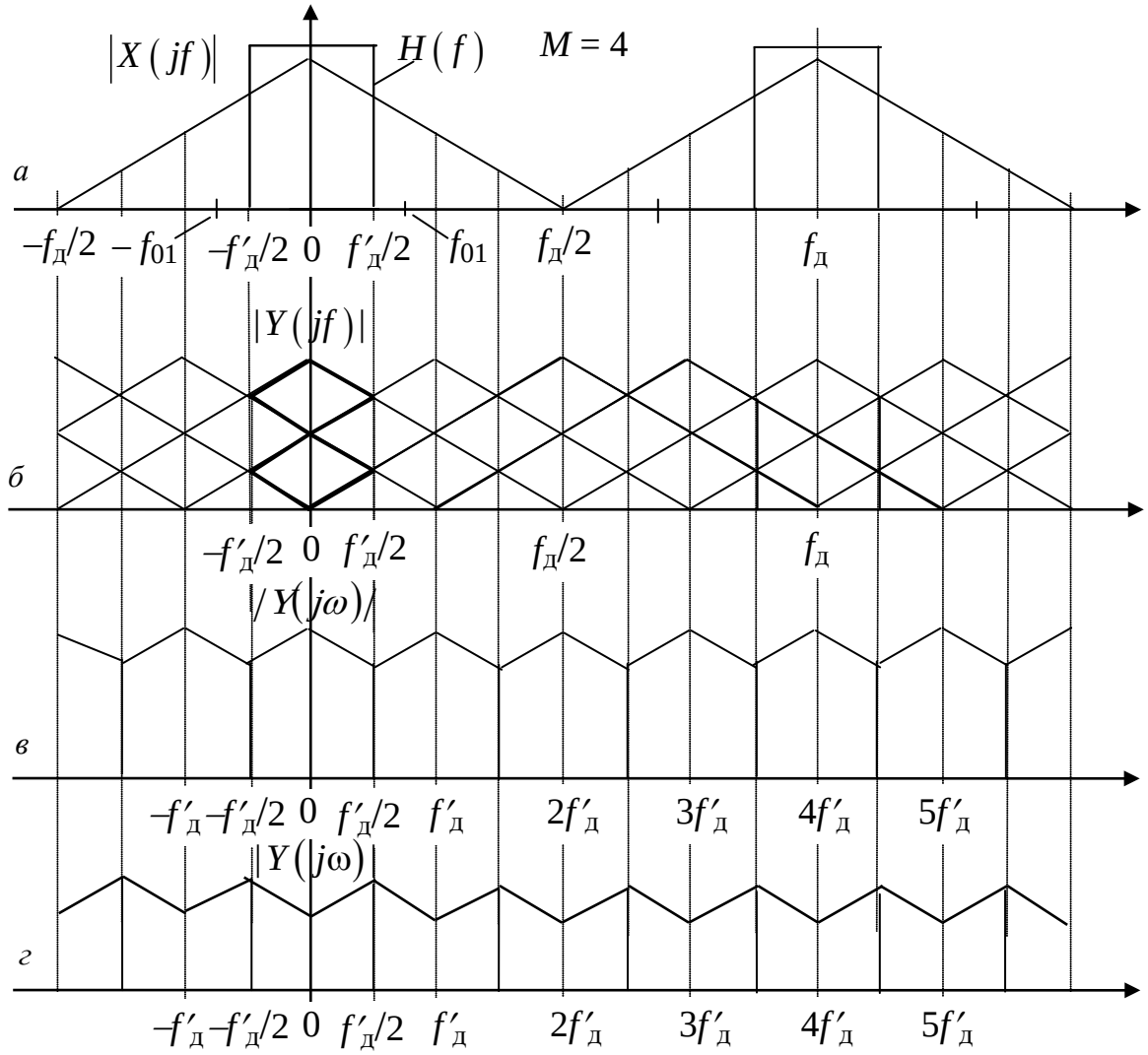


Рис. 11.13. Спектральные диаграммы сигналов НДС

Понижение частоты дискретизации называют также *прореживанием*, или *децимацией* сигнала [4, 9, 11]. Операция понижения частоты дискретизации реализуется *компрессором частоты дискретизации* (КЧД), обозначаемым на структурных схемах символом ↓M. Сигналы на его входе $x'(nT_д)$ и выходе $y(mT_д')$ связаны соотношением

$$y(mT_д') = x'(nT_д), \qquad n = mM, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{11.5}$$

Понижение частоты дискретизации приводит к периодизации спектра сигнала $x'(nT_д)$ с низкой частотой дискретизации $f'_д$ (рис. 11.13):

$$Y(j\omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X'[j(\omega - k\omega'_д)] \ . \tag{11.6}$$

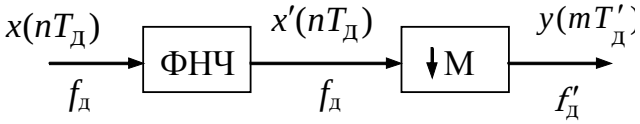
Спектр выходного сигнала $Y(j\omega)$ в основной полосе его частот $(\pm\omega'_д/2)$ определяется суммой M смещенных на $k\omega'_д$ спектров сигнала $x'(nT_д)$.

Коэффициент $(1/M) = (T_д/T'_д)$ в (11.6) обусловлен различием размерных масштабирующих множителей $T'_д$ и $T_д$ для спектральных плотностей обоих сигналов. Если полоса частот входного сигнала КЧД превышает $(\pm\omega'_д/2)$, то происходит M-кратное перекрытие (наложение) спектров $X(j\omega)$ в этой полосе (как и при дискретизации аналогового сигнала с максимальной частотой спектра $\omega_m > \omega'_д/2$). Этому случаю соответствует диаграмма спектра сигнала КЧД (рис. 11.13, *б*), полученного непосредственно понижением в M раз частоты дискретизации входного сигнала НДС $x(nT_д)$, спектр которого $X(j\omega)$ имеет полосу $(\pm\omega_д / 2)$ (рис. 11.13, *а*). Спектр прореженного сигнала $y(mT'_д)$ не совпадает здесь ни с одной из условных полос спектра сигнала $x(nT_д)$.

Структурная схема нисходящей дискретной системы

Понижению частоты дискретизации сигналов с широкой полосой спектра $(\pm\omega_д/2)$ в соответствии с вышерассмотренным должно предшествовать ограничение их полосы до значения, равного или меньшего $(0\pm\omega'_д/2)$, которое выполняется с помощью цифрового ФНЧ. Этому отвечает общая структурная схема НДС (рис. 11.14).

Рис. 11.14. Общая структурная схема НДС



ФНЧ с частотной характеристикой $H(j\omega)$ (рис. 11.13, *а*) вырезает из спектра $X(j\omega)$ входного сигнала $x(nT_д)$ полосу частот $(0\pm\omega'_д/2)$, определяющую спектр сигнала $x'(nT_д)$ на выходе фильтра: $X'(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ (рис. 11.13, *в*). В результате вызываемой КЧД периодизации этого спектра с периодом $\omega'_д$ соседние полосы его в спектре выходного сигнала $y(mT'_д)$ примыкают друг к другу без взаимного перекрытия. При этом отсутствуют искажения наложения спектров, а выражение (11.6) для спектра выходного сигнала принимает вид

$$Y(j\omega) = \frac{1}{M} X'(j\omega) = \frac{1}{M} H(\omega) \cdot X(j\omega) \Big| |\omega| \le \omega'_д/2 .$$

При идеальной частотной характеристике фильтра: $H(j\omega) = M$ в полосе $(-\omega'_д/2) \le \omega \le (\omega'_д/2)$ и $H(j\omega) = 0$ за ее пределами спектры выходного и входного сигналов НДС в полосе частот $(0\pm\omega'_д / 2)$ точно совпадают:

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \big| |\omega| \le \omega'_д/2 .$$

Отличие частотной характеристики ФНЧ от идеальной приводит к временному запаздыванию сигналов и некоторым *искажениям наложения*.

Дуальность преобразований сигналов в ВДС и НДС

Системы НДС и ВДС являются *дуальными*, в чем можно убедиться, подав на вход НДС сигнал $x(nT_д)$ со спектром $X(j\omega)$, содержащим M разделенных между собой полос шириной $\omega'_д$ (рис. 11.15, *а*).

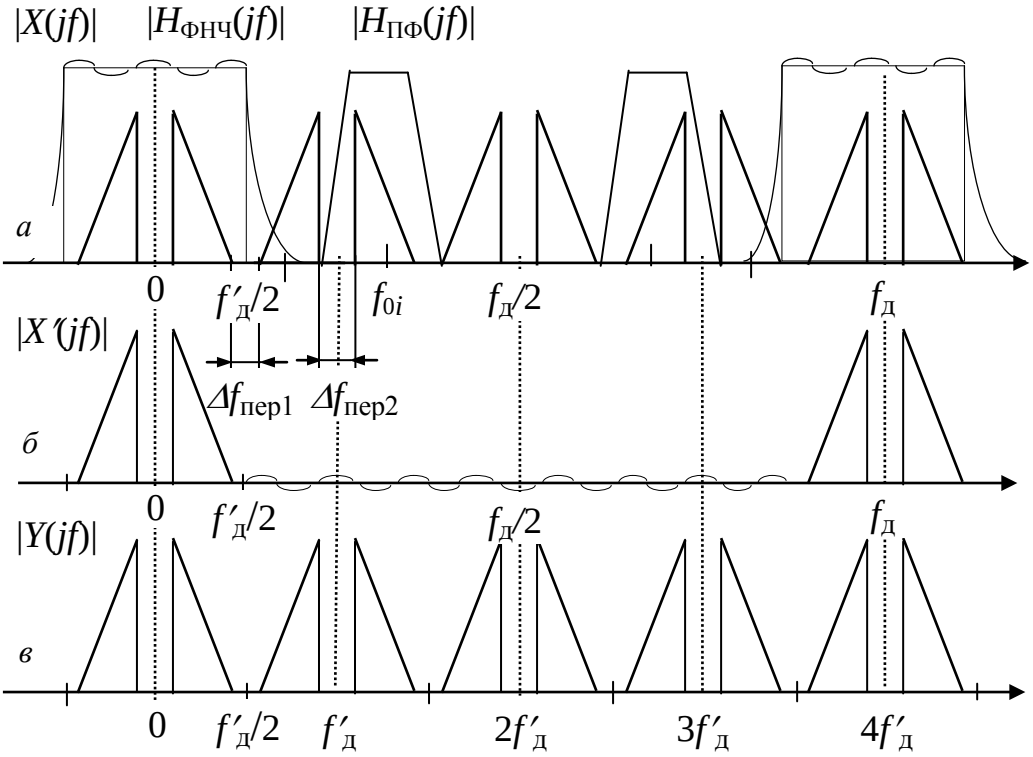


Рис. 11.15. Сопоставление спектральных диаграмм сигналов НДС и ВДС

На графиках (рис. 11.15) показаны тонкими линиями частотная характеристика реального ФНЧ (рис. 11.15, *а*) и вызываемые ее неидеальностью искажения спектра сигнала (рис. 11.15, *б*). Графики спектров сигналов ВДС (рис. 11.4) и НДС (рис.11.15) практически совпадают.

Перенос спектров сигналов в НДС

С помощью НДС в область частот $(0\pm\omega'_д/2)$ сигнала $y(mT'_д)$ с низкой частотой дискретизации $\omega'_д$ (рис. 11.13, 11.15) можно без наложения спектров перенести не только выделяемую ФНЧ полосу $(0\pm\omega_д/2M)$ сигнала $x(n)$ с высокой частотой дискретизации (т. е. полосу, примыкающую к нулевой частоте), но и $(M-1)$ других полос шириной $\omega_д/2M$, которые могут быть выделены полосовым фильтром (рис. 11.16).

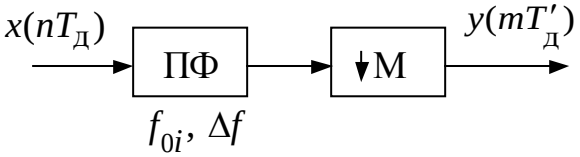


Рис. 11.16. Структурная схема НДС с переносом спектра сигнала

Центральные частоты этих полос шириной ($\omega_д/2M$) и соответственно полосовых фильтров определяются как $f_{0i} = \frac{f_д}{4M} + \frac{f_д}{2M} \cdot i$, $i = 1, 2, \ldots, M-1$ (рис. 11.13, *а*, *г*; рис. 11.15, *а*). В случае нечетного значения i перенос спектра сопровождается его инверсией.

Требования к цифровым фильтрам в НДС

Требования к ЦФ в НДС без переноса и с переносом спектра сигнала определяются по аналогии с ВДС. Для этого нужно задать максимально возможную переходную полосу фильтра в соответствии со значениями имеющихся защитных полос в спектре сигналов (рис. 11.15, *а*) или допустимых полос перекрытия выделяемых фильтром спектров сигналов (рис. 11.13), приводящих к *искажениям наложения*. Необходимый порядок фильтра возрастает с уменьшением отношения $\gamma = \Delta f_{пер} / f_д = \Delta f_{пер} / f'_д \cdot M$ и, следовательно, с увеличением коэффициента понижения частоты дискретизации M.

Для НФ порядок $N-1$ или длина импульсной характеристики N определяется так же, как и в ВДС: $N = Df'_д M / \Delta f_{пер}$, где коэффициент L заменен на M.

Многократные нисходящие дискретные системы

В многократных ндс понижение частоты дискретизации может быть поэтапным, если значение м представляется произведением k целых чисел: $м = м_1 \cdot м_2 \cdot \ldots \cdot м_k$ (рис. 11.17, $к = 2$). Это позволяет снизить общие требования к цф, которые суммарно значительно ниже, чем к одному цф однократной ндс.

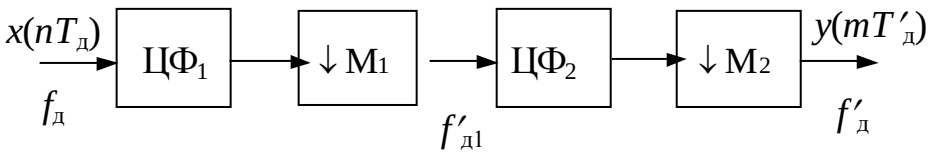


Рис. 11.17. Структурная схема многократной ндс

Воспользуемся в качестве *примера* теми же исходными данными, что и для вдс: $f_д = 112$ кгц, $м = 14$, $f'_д = 8$ кгц, $\Delta f_{пер} = 0{,}6$ кгц, цифровой фильтр – нф на основе весовой функции хэмминга ($d = 4$). Представим $м$ произведением: $м = 14 = 7 \cdot 2$, соответствующим двукратной ндс с коэффициентами $м_1 = 7$ и $м_2 = 2$. Заметим, что порядок двукратного, как и многократного понижения частоты дискретизации: $м_1 \geq м_2$ и т.д. Обратен порядку повышения ее в вдс, где $l_1 \leq l_2 \ldots \leq l_k$. Для первого цф нижних частот может быть выбрана широкая переходная полоса $\Delta f_{пер1} = \Delta f_{пер} + f'_д =$ $= 8{,}6$ кгц (рис. 11.18, *а*), что соответствует требуемой длине фильтра $n_1 = d\, f_д / \Delta f_{пер1} \approx 52$. Для второго

фнч переходная полоса $\Delta f_{пер2} = \Delta f_{пер} = 0{,}6$ кгц (рис. 11.18, *б*), но частота дискретизации обрабатываемого им сигнала в $м_1$ раз меньше, поэтому его порядок $n_2 = D\,F_Д / M_1 \Delta F_{ПЕР2} \approx 107$.

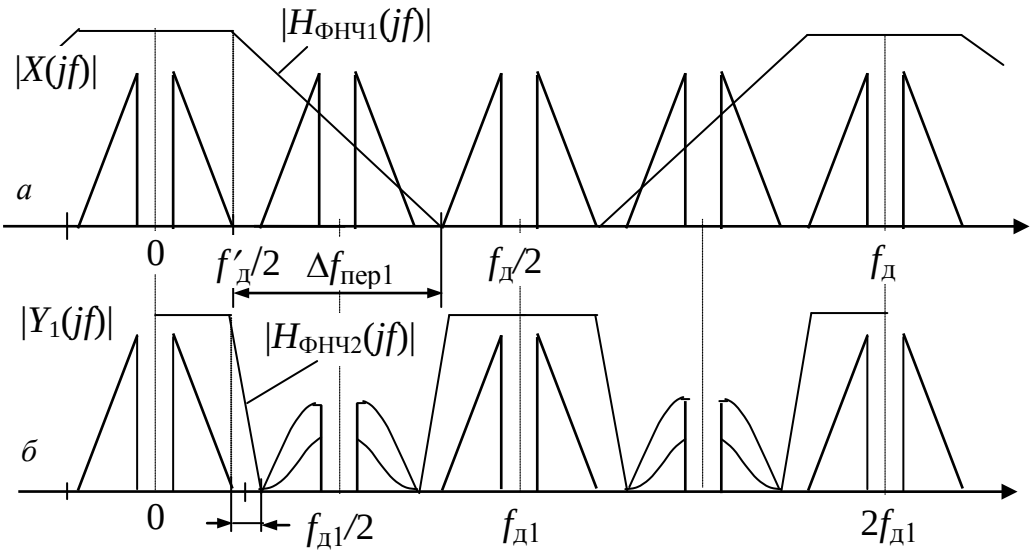


рис. 11.18. частотные диаграммы сигналов двукратной ндс

Общий объем вычислений и памяти фильтров двукратной НДС, как и ВДС, составляет $N = N_1 + N_2 = 159$. Это примерно в 4,9 раза меньше, чем для однократных систем, где $N = 780$.

НДС на основе нерекурсивных фильтров

При использовании в НДС нерекурсивных ЦФ можно упростить их реализацию или уменьшить объем вычислений за счет исключения операций с отсчетами, подлежащими прореживанию компрессором частоты дискретизации, что является принципиально невозможным для рекурсивных ЦФ.

Структурная схема НДС, учитывающая указанные особенности работы НФ, приведена в литературе [2, 15].

Подсистема ввода с понижением частоты дискретизации

Применение принципов НДС при вводе аналоговых сигналов позволяет упростить требования к аналоговому противомаскировочному фильтру и его реализации, снизить вносимые им искажения, в том числе фазочастотные, улучшить соотношение мощности сигнала и шума квантования, вызываемого АЦП, и расширить динамический диапазон вводимых сигналов. Общая идея такого ввода заключается в том, что входной аналоговый сигнал, спектр которого содержит полезные составляющие в полосе частот (0–f_m) и мешающие составляющие (помехи) за ее пределами, обычно подавляемые противомаскировочным аналоговым ФНЧ (АФНЧ), дискретизируется с вы-

сокой частотой дискретизации, намного превышающей максимальную полезную частоту его спектра f_m, обрабатывается цифровым фильтром нижних частот (ЦФНЧ) с полосой пропускания (0–f_m), осуществляющим основную селекцию полезного сигнала, а затем частота его дискретизации понижается до значения $f'_д$, соответствующего ограниченной полосе частот его спектра.

В качестве *примера* на рис. 11.19 приведена структурная схема подсистемы ввода с передискретизацией сигнала, используемая в системах цифровой звукозаписи, в том числе и в звуковых картах ПК [12].

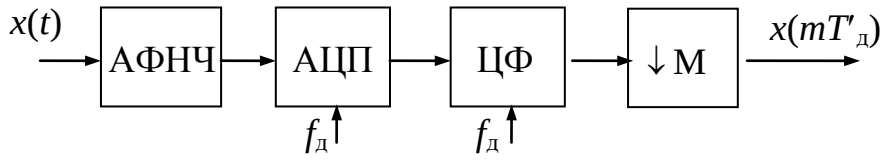


Рис. 11.19. Структурная схема подсистемы ввода аналоговых сигналов на основе НДС

Она содержит УВХ, осуществляющее дискретизацию сигнала с частотой дискретизации $f_д$ = 176,4 кГц, АЦП разрядностью q_x, преобразующий его в цифровой код, цифровой ФНЧ, работающий с частотой дискретизации $f_д$ и компрессор частоты дискретизации ↓M, понижающий частоту дискретизации в 4 раза до значения $f'_д = f_д/4$ = 44,1 кГц (M = 4). Предварительное ограничение полосы частот входного сигнала выполняет АФНЧ. Частота среза его составляет около 22 кГц, а частота задерживания $f_з = f_д/2$ = 88,2 кГц, что соответствует значению переходной полосы 66,2 кГц. Такой фильтр даже при большом затухании в полосе задерживания имеет невысокий порядок. Это может быть, например, фильтр Бесселя или Баттерворта (3–5)-го порядка с достаточно линейной ФЧХ. В обычных подсистемах без передискретизации его порядок достигает 10–12 и более.

Цифровой ФНЧ имеет частоты среза $f_c \approx$ 20,05 кГц и задерживания $f_з \approx$ 24,05 кГц и является обычно нерекурсивным фильтром с линейной ФЧХ. Частотные диаграммы подсистемы ввода приведены на рис. 11.20.

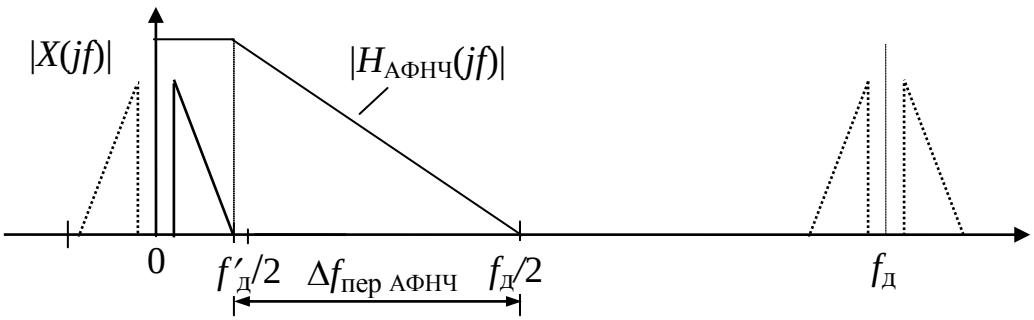


Рис.11.20. Частотные диаграммы подсистемы аналогового ввода

Спектральная плотность мощности шума квантования АЦП при дискретизации сигнала с частотой $f_д$ = 176,4 кГц $P_e(f) = \sigma_e^2 / f_д = 2^{-2q_x}/(12\, f_д)$ в 4

раза меньше, чем при дискретизации с частотой $f_д$ = 44,1 кГц. В результате мощность шума квантования АЦП на выходе ЦФНЧ и КЧД также уменьшается в 4 раза: $\sigma^2_{\text{вых}} = P_e(f)\,f_m = 2^{-2q_x} \cdot f_m/(12\,f_д)$. В общем случае это уменьшение составляет M раз, а улучшение отношения сигнал–шум по мощности $\Delta(\text{С/Ш})_{\text{кв}}$ = 10lg$M$, дБ. Получаемый выигрыш может быть использован в том числе и для уменьшения требуемой разрядности АЦП.

В современных подсистемах аналогового ввода коэффициент передискретизации достигает значений 128–256, что соответствует улучшению отношения сигнал-шум на 21–24 дБ [4]. Добавление к аналоговому сигналу широкополосного шума обеспечивает декорреляцию шума квантования, особенно при малых уровнях сигнала, расширяя динамический диапазон ввода. Использование сигма-дельта модуляции смещает спектр шума квантования в область высоких частот, обеспечивая необходимое соотношение мощностей сигнала и шума квантования даже при разрядности АЦП, равной 1 бит [4]. При этом не требуется УВХ, а порядок аналогового противомаскировочного фильтра Баттерворта или Бесселя равен обычно 3.

Контрольные вопросы

1. Для чего применяются МСС ЦОС?
2. Что такое интерполяция (децимация) сигналов и как она осуществляется в системах ЦОС?
3. Какие задачу решают ВДС (НДС) и какие требования предъявляются к ним?
4. Что такое экспандер (компрессор) частоты дискретизации и какой алгоритм обработки он реализует?
5. Как математически и графически описываются сигналы ВДС (НДС) во временной области?
6. Как математически и графически описываются сигналы ВДС (НДС) в частотной области?
7. Как осуществляется перенос спектров сигналов в ВДС (НДС)?
8. Как определяются требования к цифровому фильтру в ВДС (НДС) и от чего они зависят?
9. Что такое многократные ВДС (НДС) и какова их структура?
10. В чем заключаются преимущества многократных ВДС (НДС)?
12. Какие особенности работы и реализации имеют ЦФ в ВДС (НДС)?
13. Какова структура, принцип работы и преимущества подсистемы вывода на основе ВДС?
14. Какова структура, принцип работы и преимущества подсистемы ввода с применением НДС?

Лекция 12
Методы переноса и преобразования спектров дискретных сигналов

Преобразования сигналов, связанные с *перемещением спектра* из одной области частот в другую (называемые в радиоприемных устройствах преобразованиями частоты сигналов), не только имеют большое самостоятельное значение, но и используются при решении задач модуляции и демодуляции сигналов. Они включают в себя операции *переноса*, или *смещения* спектра по частоте, и *цифровой фильтрации*. Применяемые при таких преобразованиях методы приводят к *комплексным дискретным сигналам* и их эффективной *квадратурной обработке*. Важными *приложениями* методов переноса спектров являются квадратурная обработка и демодуляция узкополосных сигналов, модуляция (формирование) и демодуляция сигналов с одной боковой полосой. Применение *однополосной модуляции* обеспечивает частотное уплотнение каналов в многоканальных системах связи и передачи данных, улучшает энергетику каналов связи. Также на основе методов переноса спектров реализуется широко используемая в цифровых системах связи и передачи данных квадратурная (амплитудно-фазовая) модуляция и демодуляция сигналов [6]. Данные методы эффективно применяются и в системах многоканального полосового спектрального анализа и восстановления речевых, биомедицинских, радиолокационных, аудио и других сигналов.

Ниже рассматриваются реализация и особенности применения переноса (смещения) спектров дискретных сигналов, являющихся основой их различных преобразований в конкретных системах ЦОС.

12.1. Перенос спектров сигналов методом цифрового гетеродинирования. Комплексные дискретные сигналы

Перенос спектра дискретного вещественного сигнала $x(n)$ методом цифрового квадратурного гетеродинирования выполняется умножением преобразуемого сигнала на комплексный гармонический сигнал гетеродина $x_{\text{г}}(n) = e^{\pm j\omega_{\text{г}} nT_{\text{д}}} = \cos(\omega_{\text{г}} nT_{\text{д}}) \pm j\sin(\omega_{\text{г}} nT_{\text{д}})$ с частотой гетеродина $\omega_{\text{г}}$:

$$y(n) = x(n)\cdot x_{\text{г}}(n) = x(n)\cos(\omega_{\text{г}} n T_{\text{д}}) \pm jx(n)\sin(\omega_{\text{г}} n T_{\text{д}}) = \\ = y_{\text{Re}}(n) \pm y_{\text{Im}}(n). \qquad (12.1)$$

Структурно метод квадратурного гетеродинирования представляется схемой, предполагающей вычисления с комплексными числами (рис. 12.1, *а*), или схемой (рис. 12.1, *б*), в которой все операции выполняются с вещественными числами.

В результате преобразования получается комплексный сигнал $y(n)$, спектр которого $Y(j\omega)$ изображен на рис. 12.2.

Он соответствует смещенным влево (при $x_г(n) = e^{-j\omega_г n T_д}$) или вправо (при $x_г(n) = e^{j\omega_г n T_д}$) верхним и нижним полосам спектра входного сигнала $x(n)$:

$$Y(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{\pm j\omega_г n T_д} e^{-j\omega n T_д} = X\left[j(\omega \mp \omega_г)\right]. \qquad (12.2)$$

Знаку минус в $X\left[j(\omega \mp \omega_г)\right]$ отвечает смещение спектра вправо (рис. 12.2, *а*), а знаку плюс – влево (рис. 12.2, *б*)

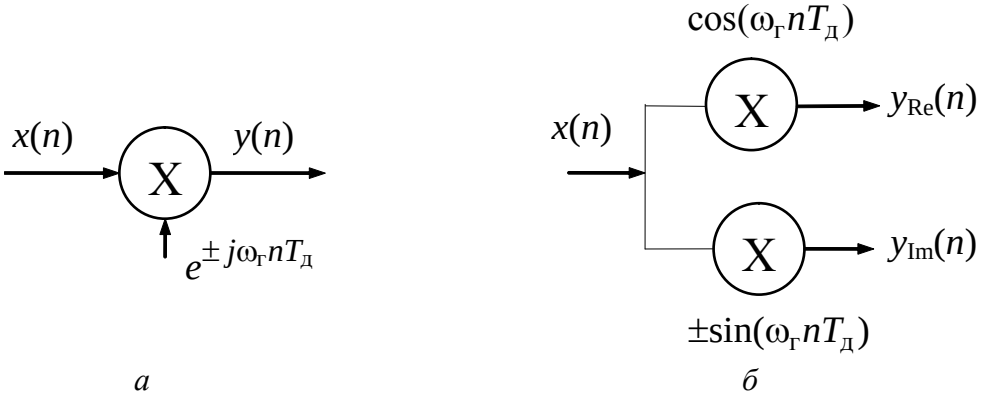


Рис. 12.1. Структурные схемы переноса спектра с операциями над комплексными (*а*) и вещественными (*б*) числами

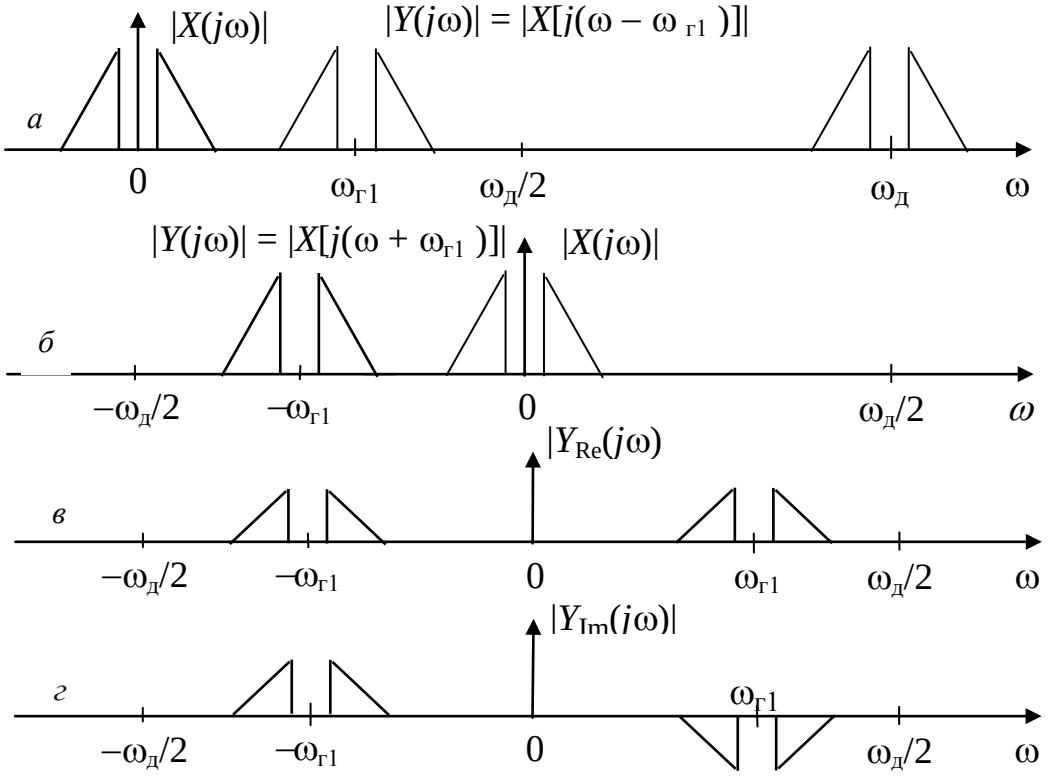


Рис. 12.2. Диаграммы смещения спектра вещественного сигнала на частоту $\omega_{г1}$

Очевидно, что *пределы смещения спектра* дискретного сигнала составляют $\pm\omega_д/2$, в то время как для аналогового сигнала они ограничены только техническими возможностями.

Особенности спектров комплексных сигналов

В отличие от спектра вещественного сигнала, боковые полосы которого всегда симметричны относительно частоты $\omega = 0$, *спектр комплексного сигнала несимметричен относительно частоты* $\omega = 0$, что является характерным признаком такого сигнала. В то же время реальную $y_{Re}(n)$ и мнимую $y_{Im}(n)$ составляющие комплексного сигнала можно рассматривать как вещественные сигналы с симметричными (комплексно-сопряженными) относительно оси ординат спектрами $Y_{Re}(j\omega)$, $Y_{Im}(j\omega)$, смещенными к частоте $\omega_г$ и $-\omega_г$ (рис. 12.2, *в, г*). При этом для сигнала $y(n)$, спектр которого смещен влево (рис. 12.2, *б*), одинаковые по модулю боковые полосы спектров $Y_{Re}(j\omega)$, $Y_{Im}(j\omega)$, смещенные к частоте $-\omega_г$, суммируются (удваиваются), а смещенные к частоте $\omega_г$ – вычитаются и компенсируются. В этом можно самостоятельно убедиться на примере комплексного гармонического сигнала $x(n) = e^{-j\omega nT_д}$. Для комплексного сигнала, спектр которого смещен вправо (рис. 12.2, *а*), компенсируются составляющие спектров $Y_{Re}(j\omega)$, $Y_{Im}(j\omega)$, смещенные к частоте $-\omega_г$.

Например, при смещении на частоту $\omega_г$ спектра вещественного гармонического сигнала $x(n) = \cos(\omega_c nT_д) = (1/2)e^{j\omega_c nT_д} + (1/2)e^{-j\omega_c nT_д}$, в спектре комплексного выходного сигнала $y(n)$ будут присутствовать составляющие с частотами $\omega_г + \omega_c$ и $\omega_г - \omega_c$, а в спектрах его реальной и мнимой частей – составляющие с частотами $\pm(\omega_г + \omega_c)$ и $\pm(\omega_г - \omega_c)$.

Неквадратурное гетеродинирование дискретных сигналов

Неквадратурное гетеродинирование сигналов осуществляется путем умножения их на вещественный гармонический сигнал гетеродина $\cos(\omega_г nT_д)$ или $\sin(\omega_г nT_д)$. В отличие от квадратурного гетеродинирования ему присущи зеркальные каналы приема на частотах $\omega_з = \omega_г \pm \omega_{пч}$ при переносе спектра на некоторую промежуточную частоту $\omega_{пч} = |\omega_г - \omega_c|$. Кроме того, при смещении спектра вещественного гармонического или узкополосного сигнала на частоту $\omega_г = -\omega_c$, совпадающую с частотой сигнала ω_c или его несущей (т.е. при смещении спектра к нулевой частоте, например, с целью демодуляции сигнала), наблюдается зависимость амплитуды выходного сигнала от соотношения фаз входного сигнала и гетеродина. При смещении спектра умножением на комплексный сигнал гетеродина с частотой $\omega_г = -\omega_c$ ин-

формация об амплитуде сигнала не зависит от фазы, так как она заключена в его реальной и мнимой составляющих.

Перенос спектров комплексных дискретных сигналов

В общем случае преобразуемый по частоте сигнал $x(n)$ может быть не только вещественным, но и *комплексным*. Его обработка в соответствии с алгоритмом, оперирующим с вещественными числами, осуществляется следующим образом:

$$y_{\mathrm{Re}}(n) = x_{\mathrm{Re}}(n)\cos(\omega_{\Gamma} n T_{\Д}) - x_{\mathrm{Im}}(n)\sin(\omega_{\Gamma} n T_{\Д});$$
$$y_{\mathrm{Im}}(n) = x_{\mathrm{Im}}(n)\cos(\omega_{\Gamma} n T_{\Д}) + x_{\mathrm{Re}}(n)\sin(\omega_{\Гamma} n T_{\Д}).$$

Этот алгоритм также можно представить структурной схемой по аналогии с рис. 12.1 (см. далее рис. 12.7, *б*, блок, выделенный пунктиром).

Инверсия спектра дискретных сигналов

При смещении спектра дискретного сигнала на частоту $\omega_{\Г} = \omega_{\Д}/2$ получается вещественный сигнал

$$y(n) = x(n)e^{j(\omega_{\Д}/2)n\ T_{\Д}} = (-1)^n x(n). \qquad (12.3)$$

Спектр такого сигнала $Y(j(\omega) = X\left[j(\omega - (\omega_{\Д}/2)\right]$ называют *инверсным* (рис. 12.3).

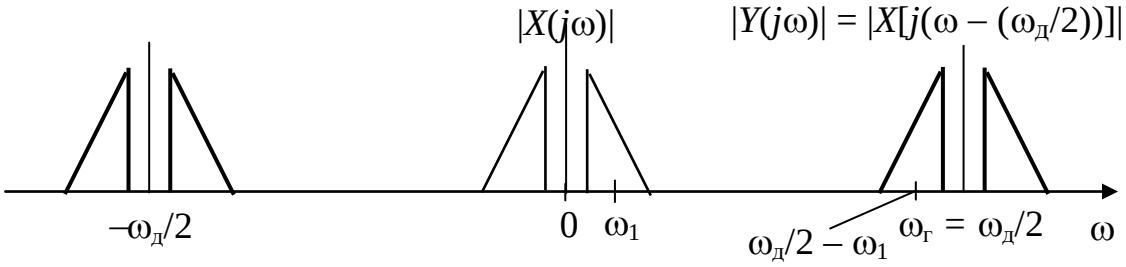


Рис. 12.3. Диаграмма прямого и инверсного спектров вещественного сигнала

Частоте ω_1 в исходном спектре соответствует в инверсном спектре частота $\omega_{И1} = \omega_{\Д}/2 - \omega_1$. Инверсия спектра выполняется простым инвертированием (изменением знака) нечетных отсчетов исходного сигнала $x(n)$, т.е. его каждого второго отсчета. Она используется, например, для засекречивания связи.

Задачи цифровой фильтрации при переносе спектров сигналов

С переносом спектров связана, как правило, необходимость фильтрации сигнала, например, выделения одной из боковых полос спектра до или после смещения его по частоте.

Для одночастотного вещественного сигнала с помощью цифровой фильтрации разделяются образующиеся при смещении частотные составляющие $\omega_г \pm \omega_c$.

Фильтрация комплексного сигнала при переносе спектра в соответствии с (12.1) осуществляется либо непосредственно одним ЦФ с комплексными коэффициентами, либо раздельно его реальной и мнимой составляющих с помощью двух идентичных вещественных ЦФ. Двухканальную обработку комплексных сигналов называют *квадратурной*, их реальную составляющую – *синфазной*, мнимую – *квадратурной*.

12.2. Квадратурная обработка узкополосных сигналов

Узкополосными (УПС) называют радиосигналы с полосой, намного меньшей их центральной частоты ω_0 [1]. Математически аналоговые и дискретные УПС описываются следующими выражениями:

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)];$$
$$x(nT_д) = A(nT_д)\cos[\omega_0 nT_д + \varphi(nT_д)] = \mathrm{Re}\{A(nT_д)e^{j\omega_0 nT_д}\, e^{j\varphi(nT_д)}\} = \quad (12.4)$$
$$= A_c(nT_д)\cos(\omega_0 nT_д) + A_s(nT_д)\sin(\omega_0 nT_д),$$

где $A(nT_д)$, $\varphi(nT_д)$ представляют собой медленно изменяющуюся огибающую и фазу УПС; $\dot{A}_k(nT_д) = A(nT_д)e^{j\varphi(nTд)} = A_c(nT_д) + jA_s(nT_д)$ соответствуют комплексной огибающей УПС, а $A_c(nT_д) = A(nT_д)\cos\varphi(nT_д)$, $A_s(nT_д) = -A(nT_д)\sin\varphi(nT_д)$ – ее косинусной и синусной составляющим.

Цель обработки УПС заключается в его *демодуляции,* т.е. выделении огибающей и фазы и оценке параметров УПС. Она осуществляется в соответствии со структурными схемами систем квадратурной обработки УПС, оперирующих с комплексными числами (рис. 12.4, *а*) и вещественными числами (рис. 12.4, *б*). Обработка включает смещение спектра вещественного УПС к частоте $\omega = 0$ путем умножения на комплексный гармонический сигнал гетеродина $x_г(n) = e^{-j\omega_г nT_д} = e^{-j\omega_0 nT_д}$, преобразующего его в комплексный сигнал

$$y'(nT_д) = x(nT_д)e^{-j\omega_0 nT_д} = (1/2)\,\dot{A}_k(nT_д) + (1/2)\,\dot{A}_k^*(nT_д)e^{-j2\omega_0 nT_д},$$

и выделение смещенной полосы спектра с помощью комплексного или пары вещественных цифровых ФНЧ.

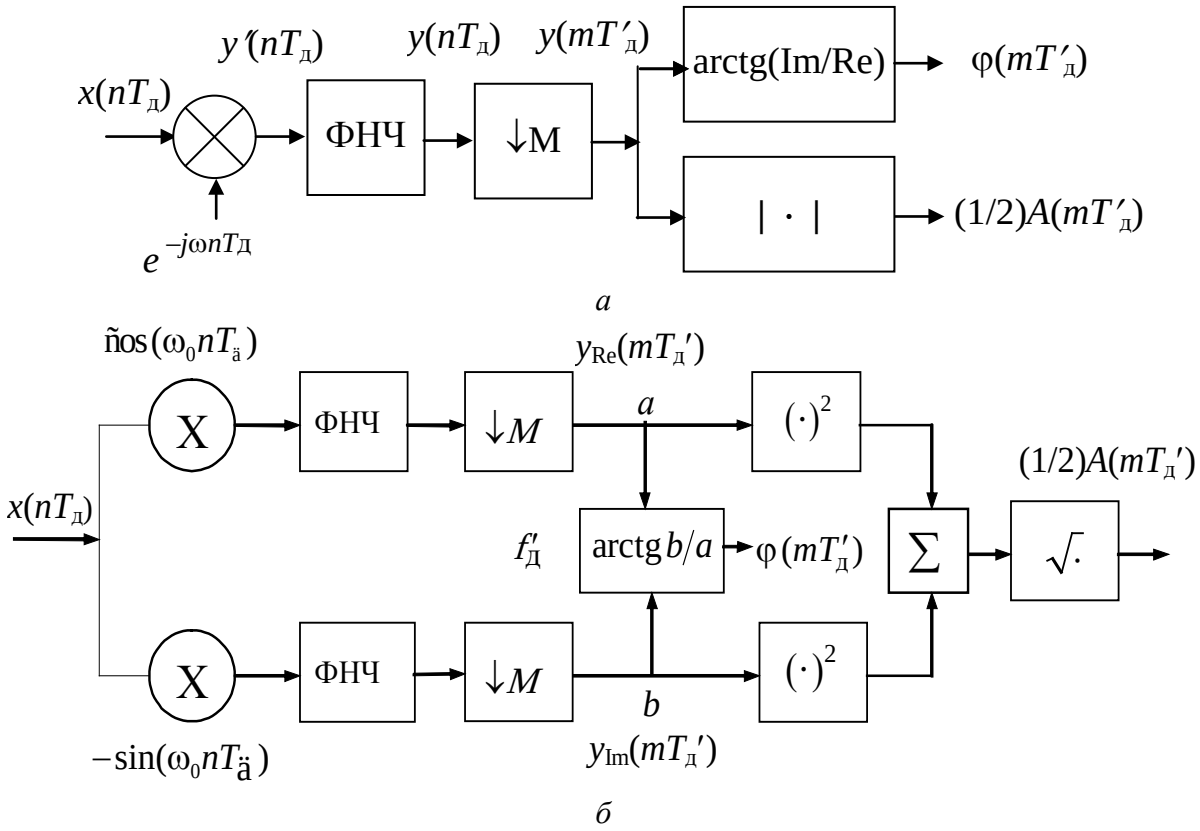


Рис. 12.4. Структурные схемы систем квадратурной обработки УПС, оперирующие с комплексными (*а*) и вещественными (*б*) числами

Образующийся на их выходах сигнал $y(nT_д) = (1/2)\dot{A}_к(nT_д)$ соответствует комплексной низкочастотной огибающей УПС. Частота его дискретизации может быть понижена до значения $f'_д = f_д / M \geq 2F_m$, определяемого максимальной частотой спектра огибающей F_m. Понижение выполняется путем M-кратного прореживания сигнала с помощью обозначенного на схемах элемента ↓M (компрессора частоты дискретизации).

По синфазной и квадратурной составляющим комплексной огибающей с низкой частотой дискретизации $y_{Re_д}(mT') = (1/2)A_{сд}(mT')\cos[\varphi(mT'_д)]$, $y_{Im_д}(mT') = (1/2)A_{сд}(mT')\sin[\varphi(mT'_д)]$ вычисляются отсчеты огибающей и фазы УПС:

$$(1/2)A(mT'_д) = \left[y^2_{Re}(mT'_д) + y^2_{Im}(mT'_д)\right]^{1/2},$$
$$\varphi(mT'_д) = \operatorname{arctg}\left[y_{Im}(mT'_д) / y_{Re}(mT'_д)\right]. \qquad (12.5)$$

Эти операции отражены на структурных схемах (рис. 12.4) элементами с соответствующими математическими обозначениями.

Систему квадратурной обработки УПС называют также квадратурным амплитудным и фазовым демодулятором, а часть ее, включающую гетеродин, умножители и ФНЧ, – фазовым детектором [1, 6, 11].

Наличие нелинейных операций $(\cdot)^2$, $\sqrt{\cdot}$, которые преобразуют (расширяют) спектр сигнала, в структуре с квадратурной обработкой практически не влияет на выбор частоты дискретизации $f'_{\text{д}}$, в то время как в других случаях может привести к ошибкам наложения и необходимости увеличения $f'_{\text{д}}$.

Квадратурная обработка применяется также в задачах *обнаружения сигнала*, где с целью упрощения вычислений операции $(\cdot)^2$, $\sqrt{\cdot}$ заменяются обычно на операции $c = |a| + |b| \geq C_{\text{порог}}$ – суммирования модулей синфазной и квадратурной компонент и сравнения с порогом (так называемая модульная обработка).

При квадратурной обработке исключается влияние неизвестной начальной фазы несущей входного сигнала.

В случае *высокочастотных УПС* применяется гибридная аналоговая и цифровая обработка, при которой осуществляются смещение спектра и низкочастотная фильтрация сигнала на аналоговом уровне (расщепление сигнала на квадратурные составляющие), последующее двухканальное аналого-цифровое преобразование обеих составляющих с низкой частотой дискретизации и их цифровая обработка. При этом после АЦП могут включаться также цифровые ФНЧ, улучшающие фильтрацию сигнала, в том числе согласованные с его комплексной огибающей [1, 9].

Преобразования спектров при квадратурной обработке вещественного сигнала с амплитудной тональной модуляцией предлагается рассмотреть самостоятельно.

12.3. Однополосная модуляция дискретных сигналов

Однополосные дискретные сигналы (ОБП, SSB) могут быть комплексными и вещественными. На рис. 12.5 приведены примеры спектров сигналов с тональной однополосной модуляцией; несущая составляющая их (с частотой ω_1) при этом может как присутствовать, так и быть подавленной (полностью или частично).

В системах ЦОС используются два основных способа формирования сигналов ОБП: фильтровой и на основе преобразования Гильберта.

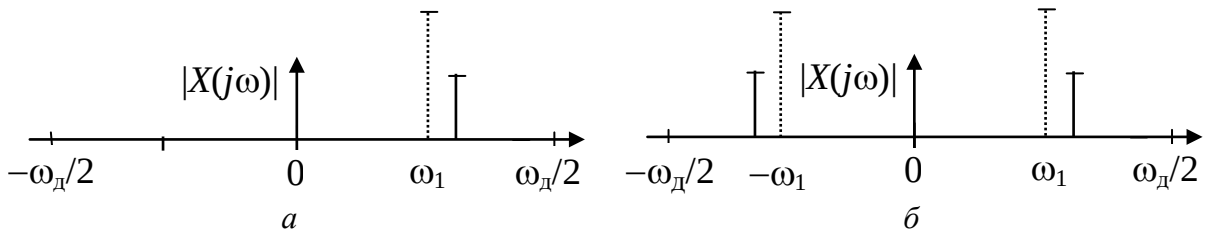


Рис. 12.5. Примеры спектров однополосного комплексного (*а*)
и вещественного (*б*) сигналов

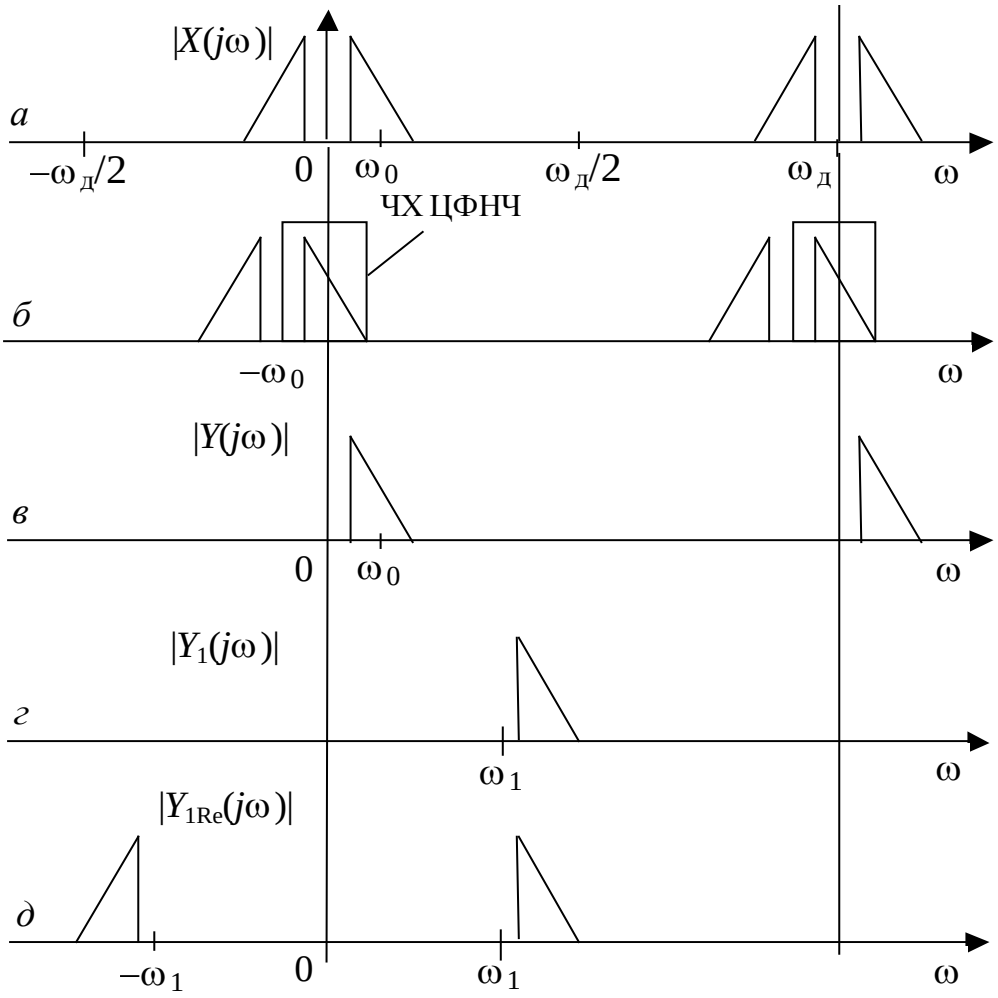


Рис. 12.6. Спектральные преобразования
при формировании сигналов ОБП

Фильтровой способ формирования однополосных дискретных сигналов

Для вещественного сигнала $x(n)$ со спектром, примыкающим к нулевой частоте (рис. 12.6, *а*) задача формирования сигнала ОБП заключается в выделении одной боковой полосы его спектра – верхней или нижней – (рис. 12.6, *в*), в ее смещении (при необходимости) на заданную частоту ω_1 (рис. 12.6, *г*) и переходе от комплексного сигнала ОБП к вещественному (рис. 12.6, *д*). Указанные спектральные преобразования могут быть получены путем смещения одной боковой полосы спектра сигнала на частоту ω_0, равную ее центральной частоте (на рис. 12.6, *б* – влево), ее выделения комплексным ЦФ нижних частот с показанной на рис. 12.6, *б* идеализированной частотной характеристикой, смещения выделенной боковой полосы в обратном направлении на

частоту ω_0 (рис. 12.6, *в*) или на частоту ω_1 (рис. 12.6, *г*) и взятия реальной части комплексного сигнала ОБП (рис. 12.6, *д*).

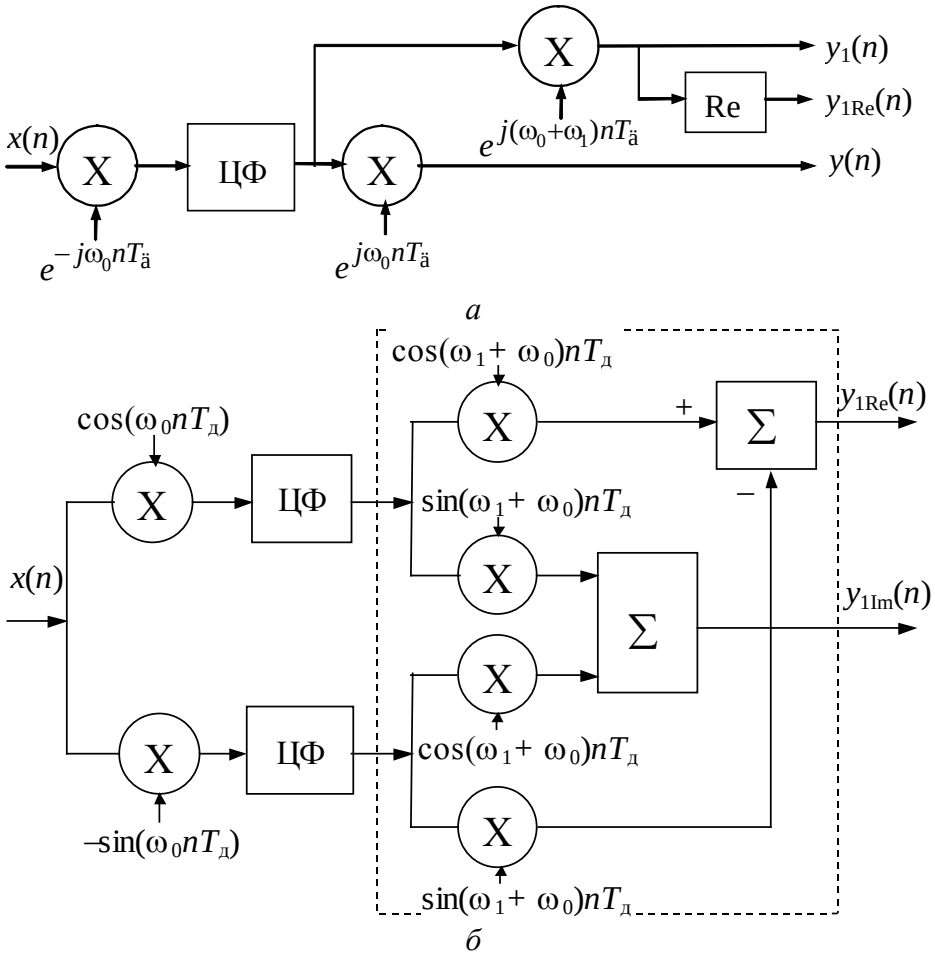


Рис. 12.7. Структурные схемы формирователей ОБП, оперирующих с комплексными (*а*) и вещественными (*б*) числами

Данным преобразованиям соответствуют структурные схемы формирователей ОБП, оперирующие с комплексными числами (рис. 12.7, *а*) и вещественными (рис. 12.7, *б*). Умножением на комплексный гармонический сигнал $e^{-j\omega_0 nT_д}$ спектр сигнала смещается влево на частоту ω_0, а умножением на сигнал $e^{j\omega_0 nT_д}$ или $e^{j(\omega_0+\omega_1)nT_д}$ – вправо на частоту ω_0 или ω_1.

Математически алгоритм формирования сигналов ОБП записывается следующим образом:

$$y(n) = \Phi\left[x(n)e^{-j\omega_0 nT_д}\right]e^{j\omega_0 nT_д}, \quad y_1(n) = y(n)e^{j\omega_1 nT_д},$$

где $\Phi[\cdot]$ – оператор, реализуемый цифровым фильтром.

При формировании вещественного сигнала ОБП $y_{1\mathrm{Re}}(n)$ из обведенной пунктиром части схемы рис. 12.7, *б* исключаются пара умножителей и сумматор неиспользуемого сигнала $y_{1\mathrm{Im}}(n)$.

Требования к ЦФНЧ формирователя сигналов ОБП определяются необходимой степенью подавления второй (неиспользуемой) боковой полосы

спектра сигнала и зависят от значений нижней и верхней граничных частот спектра сигнала $f_н$, $f_в$, определяющих значения переходной полосы цифрового ФНЧ.

Например, для речевого сигнала, передаваемого по стандартному телефонному каналу, $f_н$ = 0,3 кГц; $f_в$ = 3,4 кГц; $f_д$ = 8 кГц; $f_д/2$ = 4 кГц; f_0 = 2 кГц, при этом частота среза и минимальная переходная полоса ФНЧ составляют: f_c = 1,7 кГц, $\Delta f_{пер} = 2\,f_н$ = 0,6 кГц.

Формирование однополосного дискретного сигнала с помощью преобразователя Гильберта

Известно, что вещественный сигнал $x(n)$ и сигнал, сопряженный с ним по Гильберту $x_H(n)$, представляют совместно *комплексный аналитический сигнал* $y(n) = x(n) + jx_H(n)$, спектр которого соответствует одной боковой полосе спектра вещественного сигнала в области положительных частот [1]. Таким образом, используя преобразователь Гильберта (рис. 12.8), можно сформировать сигнал ОБП со спектром, представленным на рис. 12.8, *б*. Он может быть далее перенесен на заданную частоту ω_1 с помощью схемы смещения спектра комплексного сигнала рис. 12.7, *б*, обведенной пунктиром, которую нужно подключить к выходу схемы рис. 12.8, *а*.

Идеальный преобразователь Гильберта (ПГ) – это всепропускающий или полосовой фильтр с АЧХ $|H_H(j\omega)| = 1$ и ФЧХ вида $\varphi_H(\omega)| = -\pi/2$ при $\omega > 0$ и $\varphi_H(\omega)| = \pi/2$ при $\omega < 0$ (рис. 12.8, *в*). Он может быть реализован на основе нерекурсивного цифрового фильтра (НФ), синтезируемого методом весовых функций путем аппроксимации заданной частотной характеристики ПГ конечным рядом Фурье [8, 11, 13].

Формирование сигнала ОБП с помощью ПГ можно проиллюстрировать на простом примере гармонического сигнала

$$x(n) = \cos(\omega_c n T_д) = (1/2)e^{j\omega_{сд} nT} + (1/2)e^{-j\omega_{сд} nT}.$$

Для него $y_{\mathrm{Re}}(n) = x(n) = \cos(\omega_c n T_д)$. Сигнал, сопряженный по Гильберту,

$$x_H(n) = y_{\mathrm{Im}}(n) = (1/2)e^{j(\omega_{сд} nT - \pi/2)} + (1/2)e^{-j(\omega_{сд} nT - \pi/2)} = \sin(\omega_c n T_д).$$

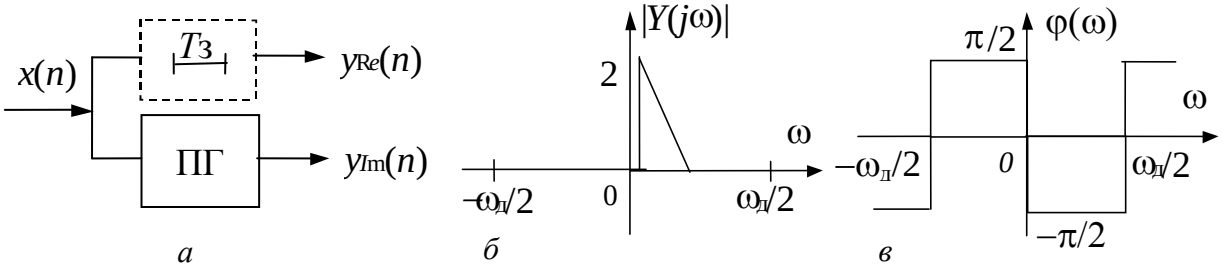


Рис. 12.8. Формирователь сигналов ОБП на основе преобразователя Гильберта (*а*), спектр его выходного сигнала (*б*) и ФЧХ (*в*)

Следовательно, вещественному сигналу $x(n) = \cos(\omega_{\text{с}} n T_{\text{д}})$ соответствует комплексный однополосный гармонический сигнал

$$y(n) = \cos(\omega_{\text{с}} n T_{\text{д}}) + j \sin(\omega_{\text{с}} n T_{\text{д}}) = e^{j\omega_{\text{сд}} nT} .$$

Аналогичным образом преобразуются и другие частотные составляющие, которые в общем случае присутствуют в сигнале $x(n)$.

Реальный ПГ на основе НФ вносит задержку сигнала, определяемую как $T_{\text{з}} = T_{\text{д}}(N - 1)/2$, где N – длина импульсной характеристики аппроксимирующего нерекурсивного ЦФ. Она может быть скомпенсирована включением такой же задержки в канал реальной части формирователя сигнала ОБП (пунктир на рис. 12.8, *а*). Возникает также и неравномерность АЧХ, вызывающая искажения при формировании сигналов ОБП.

Демодуляция сигналов с одной боковой полосой

Демодуляция сигналов ОБП является обратной задаче их формирования и решается теми же методами с помощью так называемых дуальных структур [9]. Для этого входы-выходы исходной структурной схемы меняются местами, как и направления смещения спектров, узлы заменяются сумматорами, а сумматоры узлами. Структура демодулятора сигналов ОБП, дуальная структурной схеме их формирования фильтровым способом (рис. 12.7, *а*) приведена на рис. 12.9.

На ее основе или по структуре рис. 12.7, *б* рекомендуется самостоятельно построить структурную схему демодулятора, оперирующую с вещественными числами.

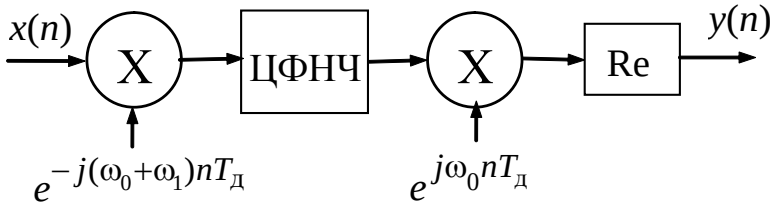


Рис. 12.9. Структурная схема демодулятора сигналов ОБП фильтрового типа

Следует отметить, что демодуляция сигналов ОБП требует точного знания частот ω_0 и ω_1 (частично или полностью подавленной несущей сигнала), что создает определенные трудности при ее реализации в системах связи [6].

Контрольные вопросы

1. Как осуществляется и математически описывается пере
нос спектра сигналов методом цифрового гетеродинирования?
2. Что такое комплексный дискретный сигнал и как он получается методом цифрового квадратурного гетеродинирования?
3. В чем отличие спектров комплексного и вещественного дискретных сигналов?
4. Чем отличается перенос спектров дискретных сигналов от аналоговых?
5. Что такое инверсия спектра, как она осуществляется и используется?
6. Что такое квадратурная обработка сигналов и для чего она применяется?
7. Как осуществляется квадратурная обработка узкополосных радиосигналов и какие задачи ею решаются?
8. Что такое дискретные сигналы ОБП, какой спектр они имеют (вещественные, комплексные)?
9. В чем заключается фильтровой способ формирования сигналов ОБП?
10. Как определяются требования к ЦФ в фильтровом методе формирования сигналов ОБП?
11. В чем заключается и как математически описывается формирование сигналов ОБП с помощью преобразования Гильберта?
12. Как осуществляется демодуляция сигналов ОБП?

Л е к ц и я 13
Цифровая обработка сигналов в многоканальных системах связи с частотным уплотнением каналов

Общими *задачами* рассматриваемого класса многоканальных систем ЦОС являются объединение и/или разделение информационных каналов по частотному признаку.

Основной областью их *применения* являются связь и передача данных с частотным уплотнением каналов.

Многоканальные системы (МКС) отличаются числом информационных каналов K и способами их объединения – разделения. В МКС различают *канальные сигналы и групповые.*

Канальные сигналы $x_i(mT'_д)$ характеризуются:

♦ номером $i = 0, 1, \ldots, K-1$ соответствующего им канала МКС;

♦ полосой частот или шириной спектра канального сигнала $\Delta f_{кс}$;

♦ граничными частотами спектра канального сигнала $f_{кс\,min}$, $f_{кс\,max}$;

♦ частотой дискретизации канального сигнала $f'_д \geq 2\Delta f_{кс}$.

Групповые сигналы $y(nT_д)$ характеризуются:

♦ полосой частот, занимаемой групповым сигналом $\Delta f_{гс}$;

♦ частотой дискретизации группового сигнала $f_д \geq 2\Delta f_{гс}$.

Параметры группового и канальных сигналов связаны соотношением

$$\Delta f_{гс} / \Delta f_{кс} = f_д / f'_д = L \geq K,$$

где L – коэффициент передискретизации (повышения или понижения частоты дискретизации) сигналов в МКС.

Чем ближе значение коэффициента L к K – числу каналов, тем выше эффективность МКС: меньше занимаемая ею полоса частот при заданном числе каналов или больше число каналов, размещаемых в заданной полосе частот, меньше требуемые объем и скорость обработки. Максимальное значение коэффициента L имеет место при использовании обеих боковых полос спектра канальных сигналов: $L_{max} = 2(K + K_з)$, минимальное – *одной боковой полосы* спектра, т.е. сигналов ОБП: $L_{min} = (K + K_з)$, где $K_з$ – число так называемых защитных полос в спектре группового сигнала, зависящее от назначения системы. Поэтому в МКС с частотным разделением сигналов (каналов) там, где это возможно, преимущественно применяют *однополосные групповые сигналы.*

В качестве *примера* приведены частотные диаграммы спектров канального сигнала $X_i(jf)$ (рис. 13.1, *а*) и однополосного вещественного группового сигнала $Y(jf)$ (рис. 13.1, *б*) для случая $L = K = 4$, т.е. 4-ка- нальной МКС.

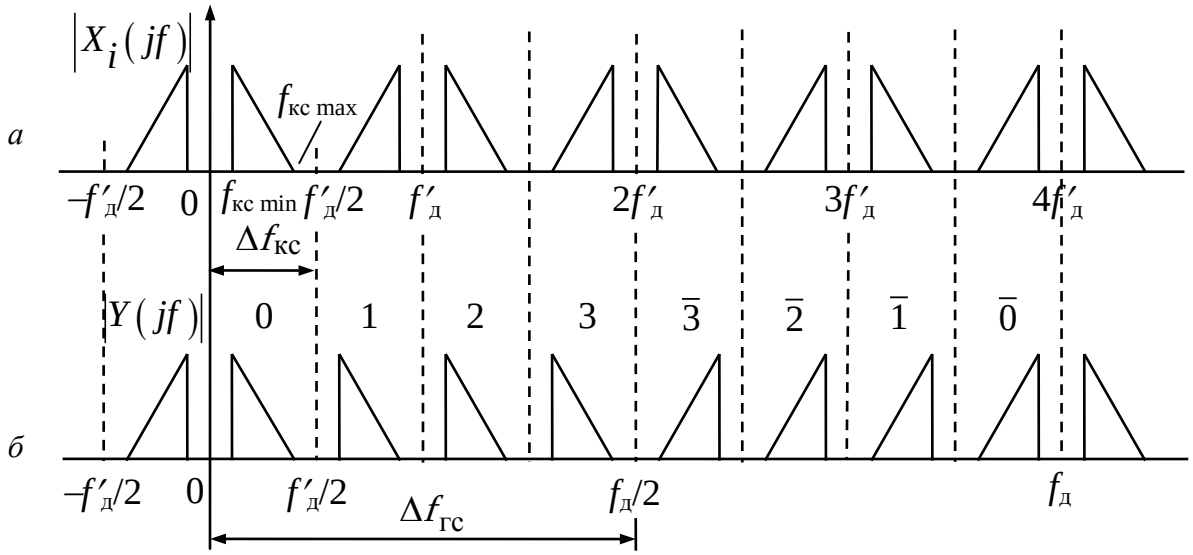


Рис. 13.1. Частотные диаграммы спектров канального и группового сигналов

Каждому канальному сигналу или каналу в соответствии с его номером (в данном примере i = 0, 1, 2, 3) в групповом сигнале отводится своя полоса частот (*полоса канала*), равная $\Delta f_к = f'_д/2$, которая, как правило, превышает ширину спектра канального сигнала: $\Delta f_к > \Delta f_{кс}$. Благодаря этому в полосе каждого канала образуются небольшие частотные интервалы $f_{кс\ min}$, $\Delta f_к - f_{кс\ max}$, облегчающие расфильтровку канальных сигналов. В полосе частот, отводимой для группового сигнала $\Delta f_{гс} = K\Delta f_к = f_д/2$, размещаются K боковых полос спектра канальных сигналов. Центральные частоты каналов в групповом сигнале определяются как $f_{0i} = (f'_д/4) + if'_д/2$. В случае вещественного группового сигнала в полосе $(f_д/2)–f_д$ размещаются K зеркально отраженных относительно частоты $f_д/2$ инверсных боковых полос спектров канальных сигналов.

Качество реальных МКС определяется *частотными искажениями* канальных сигналов при их объединении и разделении и *межканальными искажениями*, или помехами, обусловленными прохождением сигналов из канала в канал, т.е. взаимным влиянием каналов. Межканальные искажения количественно оценивают коэффициентом или степенью развязки каналов МКС $a_р$, дБ. Значение межканальной развязки составляет от 40 дБ и выше.

13.1. Формирование групповых сигналов

Задача формирования групповых сигналов заключается в объединении K канальных сигналов $x_i(mT'_д)$ в групповой сигнал $y(nT_д)$ с неперекрывающимися (разделяющимися по частоте) спектрами объединяемых сигналов.

Она решается путем смещения спектров канальных сигналов по частоте и их последующего объединения или суммирования.

Подсистема формирования групповых сигналов (ФГС) относится к *восходящим дискретным системам* (ВДС), т.е. системам с повышением частоты дискретизации сигналов в процессе обработки.

По *способу переноса спектров* канальных сигналов различают подсистемы ФГС на основе полосовых фильтров-интерполяторов и на основе цифрового гетеродинирования с квадратурной обработкой сигналов.

Формирование групповых сигналов методом переноса спектров при интерполяции сигналов

Применение данного метода формирования групповых сигналов обусловлено соответствием полос и центральных частот каналов f_{0i} в структуре спектра группового сигнала (рис. 13.1, *б*) значениям полос и дискретных частот, на которые возможен перенос спектра в ВДС *с помощью полосовых фильтров-интерполяторов*.

Структурная схема подсистемы ФГС на основе полосовых фильтров-интерполяторов (рис. 13.2) содержит идентичные по структуре каналы, состоящие из экспандера частоты дискретизации $\uparrow L$, которым частота дискретизации канального сигнала повышается до частоты дискретизации группового, и полосового фильтра $ПФ_i$, которым выделяется одна из периодизированных с высокой частотой дискретизации полоса спектра канального сигнала, соответствующая его номеру или центральной частоте в спектре группового сигнала.

В каналах с нечетными номерами дополнительно входной сигнал умножается на последовательность $(-1)^n$, смещающую спектр сигнала на частоту $f'_д / 2$ для компенсации инверсии спектра, возникающей при выделении полосовым фильтром нечетных боковых полос. В нулевом канале вместо полосового используется фильтр нижних частот, а в $(K - 1)$-м канале – фильтр верхних частот. Групповой сигнал получается суммированием выходных сигналов всех каналов. В случае *идеальных полосовых фильтров* с полосой пропускания $\Delta f_п = f'_д / 2$, равной полосе частот канала и центральной частотой $f_{0i} = (f'_д / 4) + if'_д / 2$, совпадающей с центральными частотами каналов, спектры выходных сигналов каналов не перекрываются (рис. 13.1, *б*) и объединение канальных сигналов не сопровождается их искажениями.

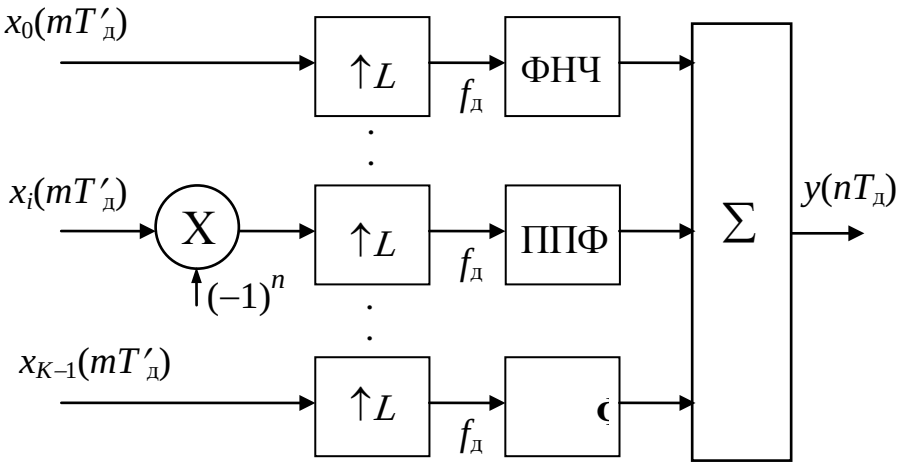


Рис. 13.2. Структурная схема подсистемы ФГС
на основе полосовых фильтров

Искажения сигналов в реальной подсистеме ФГС вызываются отличием частотных характеристик полосовых фильтров от идеальных: неравномерностью в полосе пропускания, конечным затуханием в полосе задерживания и конечными значениями переходных полос.

Граничные частоты полосовых фильтров выбираются в соответствии с границами периодизированных с высокой частотой дискретизации спектров канальных сигналов, ширина которых $\Delta f_{кс}$ меньше, как правило, полосы частот канала $\Delta f_к$: $\Delta f_{кс} < \Delta f_к$. Значения нижних граничных частот среза, задерживания $f_{с1}$, $f_{з1}$ и верхних $f_{с2}$, $f_{з2}$ определяются при этом соотношениями

$$f_{с1} = f_{0i} - (f'_д / 4) + f_{кс\,min}; \quad f_{з1} = f_{0i} - (f'_д / 4) - f_{кс\,min};$$
$$f_{с2} = f_{0i} - (f'_д / 4) + f_{кс\,max}; \quad f_{з2} = f_{0i} + (3f'_д / 4) - f_{кс\,max}. \qquad (13.1)$$

По ним находятся значения полос пропускания и переходных полос фильтров, необходимые для их синтеза.

Частотные искажения канальных сигналов в подсистеме ФГС определяются неравномерностью частотных характеристик фильтров в полосе пропускания $a_п$, дБ.

Межканальные искажения сигналов в подсистеме ФГС связаны с тем, что за счет конечного затухания частотной характеристики фильтра в полосе задерживания на выходе каждого канала возникают составляющие не только выделяемой боковой полосы частот, но и ослабленных фильтром ее периодизированных копий, совпадающих с частотными полосами остальных каналов МКС (рис. 13.3). В результате в реальной подсистеме ФГС спектры выходных сигналов каналов после их суммирования перекрываются. Это эквивалентно прохождению сигналов из канала в канал или взаимному влиянию каналов (например, прослушиванию соседних каналов в телефонии). По-

этому требование к затуханию фильтров в полосе задерживания ($a_з$, дБ) в МКС определяется допустимым взаимным влиянием каналов, т.е. коэффициентом или степенью межканальной развязки при формировании группового сигнала $a_р$, дБ. При этом затухание фильтров в полосе задерживания должно быть выше $a_р$ на $20\lg(K-1)$ дБ, т.е. $a_з = a_р + 20\lg(K-1)$, дБ. Если же затухание АЧХ возрастает по мере удаления от полосы пропускания фильтра, то степень влияния данного канала на другие отстоящие от него каналы уменьшается.

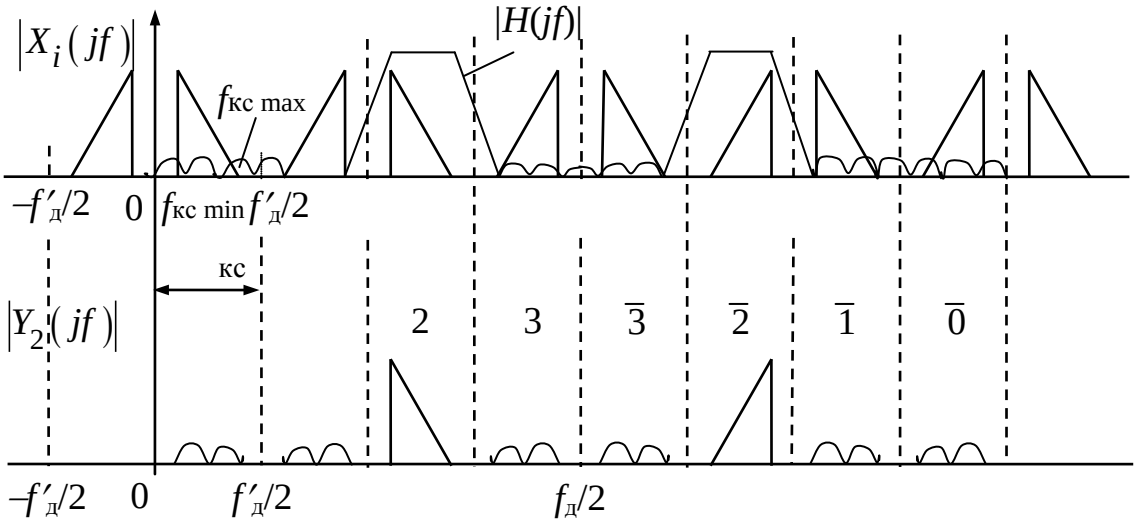


Рис. 13.3. Спектральная диаграмма сигналов i-го канала ФГС

Подсистема ФГС на основе полосовых фильтров-интерполяторов является достаточно простой, но *нетехнологичной* ввиду неидентичности канальных полосовых фильтров. *Несимметрия* АЧХ *полосовых фильтров* относительно центральной частоты f_{0i} также в ряде случаев может стать источником дополнительных искажений. Кроме того, данная подсистема ФГС *не является универсальной*, так как возможные значения полос каналов и их центральных частот находятся в жесткой взаимосвязи с частотой дискретизации и не могут быть произвольными.

Формирование групповых сигналов методом цифрового гетеродинирования и квадратурной обработки

Такие подсистемы ФГС основываются на фильтровом способе формирования сигналов с одной боковой полосой с переносом их спектра на заданную частоту в основной полосе ($0–f_д/2$) группового сигнала. Структурная схема подсистемы ФГС с квадратурной обработкой (рис. 13.4) содержит K идентичных каналов, состоящих из умножителей (смесителей), осуществляющих смещение спектров сигналов в соответствии с частотой гетеродина, экспандера частоты дискретизации $\uparrow L$ и фильтра-интерполятора нижних частот ФНЧ.

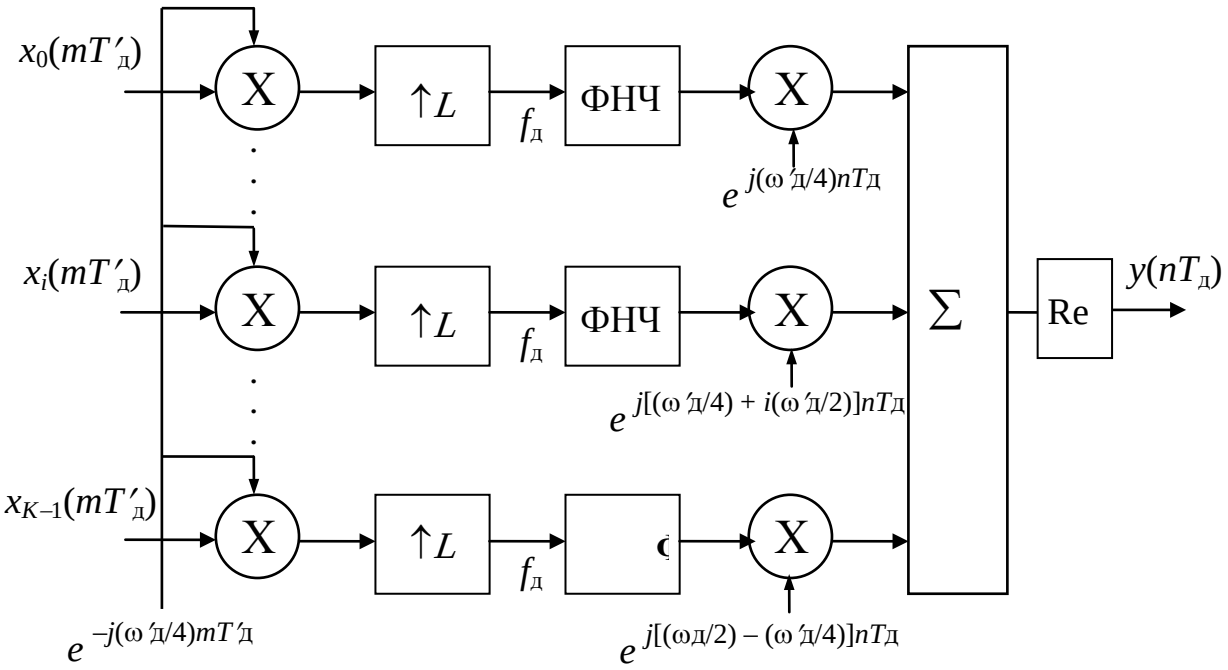


Рис. 13.4. Структурная схема подсистемы ФГС с квадратурной обработкой

Структуре i-го канала соответствует следующая последовательность операций обработки сигналов:

♦ спектр каждого канального сигнала смещается влево на частоту $f'_д/4$ путем умножения его на комплексный гармонический сигнал гетеродина $e^{-j2\pi(f'_д/4)mT'_д}$;

♦ частота дискретизации полученного комплексного сигнала повышается в L раз до частоты дискретизации группового сигнала;

♦ фильтром нижних частот с частотой среза $f'_с \approx f'_д/4$ выделяется смещен-ная к нулевой частоте боковая полоса спектра;

♦ умножением выходного сигнала ФНЧ на комплексный гармонический сигнал гетеродина $e^{j2\pi f_{0i}nT}$ выделенная боковая полоса переносится на центральную частоту f_{0i} i-го канала;

♦ разнесенные по частоте комплексные выходные сигналы каналов суммируются, образуя после операции взятия реальной части (Re) вещественный групповой сигнал.

Спектры суммируемых канальных сигналов не перекрываются, если фильтры нижних частот имеют идеальные частотные характеристики; объединение сигналов при этом не сопровождается их искажениями.

На рис. 13.5 приведена структура одного канала ФГС с квадратурной обработкой, в которой все операции выполняются с вещественными числами.

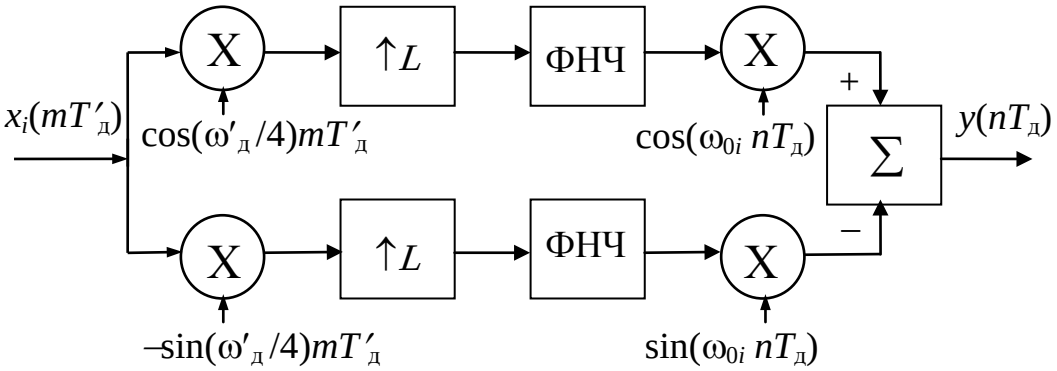


Рис. 13.5. Структура канала подсистемы ФГС с квадратурной обработкой, оперирующая с вещественными числами

Отличие частотных характеристик фильтров от идеальных является причиной *искажения сигналов* в реальной подсистеме ФГС.

Граничные частоты среза, задерживания для комплексных ФНЧ задаются для положительных и отрицательных частот и определяются в данном случае соотношениями:

$$f_{c1} = f_{кс\,max} - (f'_д/4); \quad f_{з1} = (3f'_д/4) - f_{кс\,max} - f_{кс\,min};$$
$$f_{c2} = -(f'_д/4) + f_{кс\,min}; \quad f_{з2} = -(f'_д/4) - f_{кс\,min}. \qquad (13.2)$$

Для вещественных ФНЧ в структуре (рис. 13.5) в качестве частоты среза принимается одна из частот f_{c1}, f_{c2}, большая по модулю, а в качестве частоты задерживания – одна из частот $f_{з1}$, $f_{з2}$, меньшая по модулю:

$$f_c = \max\{|f_{c2}|, f_{c1}\}, \quad f_з = \min\{|f_{з2}|, f_{з1}\}. \qquad (13.3)$$

По значениям граничных частот находятся переходная полоса и полоса пропускания ФНЧ.

Частотные и межканальные искажения сигналов в подсистеме ФГС на основе цифрового гетеродинирования определяются, как и в подсистеме ФГС на основе полосовых фильтров-интерполяторов.

Подсистема ФГС с квадратурной обработкой несколько сложнее, чем с полосовыми фильтрами-интерполяторами, но она более *технологична* за счет идентичности всех канальных цифровых фильтров и *создает меньшие частотные искажения*, так как частотные характеристики вещественных ФНЧ строго симметричны относительно нулевой частоты. Она также *универсальна*, так как не имеет ограничений на значения полос каналов и их центральных частот.

13.2. Частотное разделение групповых сигналов

Задача частотного разделения групповых сигналов (РГС) является обратной их формированию и заключается в выделении из группового сигнала $x(nT_д)$ K составляющих его канальных сигналов $y_i(mT'_д)$ без наложения их спектров. Она также решается путем смещения спектров сигналов, их передискретизации и цифровой фильтрации.

Подсистема РГС является *нисходящей дискретной системой* (НДС), в которой имеет место понижение частоты дискретизации сигналов в процессе обработки.

Для разделения групповых сигналов используются *методы*, основанные на переносе спектров в НДС и цифровом гетеродинировании с квадратурной обработкой сигналов. Структуры реализующих их подсистем РГС являются *дуальными* структурам соответствующих подсистем ФГС. Для перехода от заданной структуры системы ЦОС к дуальной нужно отразить ее зеркально, поменяв местами входы–выходы и порядок следования элементов, заменить сумматоры узлами, узлы сумматорами, экспандеры частоты дискретизации поменять на компрессоры и наоборот, изменить на обратные знаки частот комплексных гармонических сигналов (частот гетеродинов).

Разделение групповых сигналов методом переноса спектров при децимации сигналов

Применение данного метода разделения групповых сигналов обусловлено соответствием полос и центральных частот каналов f_{0i} в структуре спектра группового сигнала (рис. 13.1, *б*) значениям полос и их центральных дискретных частот, которые с помощью полосовых фильтров и понижения частоты дискретизации могут быть перенесены в основную полосу $(0\pm f'_д/2)$ частот канального сигнала без наложения спектров сигналов. Частотное разделение каналов данным методом осуществляется в соответствии со структурной схемой (рис. 13.6), которая является дуальной структуре подсистемы ФГС (рис. 13.2).

Подсистема содержит К идентичных по структуре каналов, состоящих из полосового фильтра $ПФ_i$, компрессора частоты дискретизации $\downarrow$L, а в нечетных каналах также умножителя, выполняющего инверсию спектра канального сигнала. В каждом канале осуществляется выделение полосовым фильтром из группового сигнала частотной полосы i-го канала и последующее понижение частоты дискретизации выходного сигнала фильтра в L раз (прореживание или децимация сигнала). В нулевом канале вместо полосового используется фильтр нижних частот, а в $(K-1)$-м канале – фильтр верхних частот.

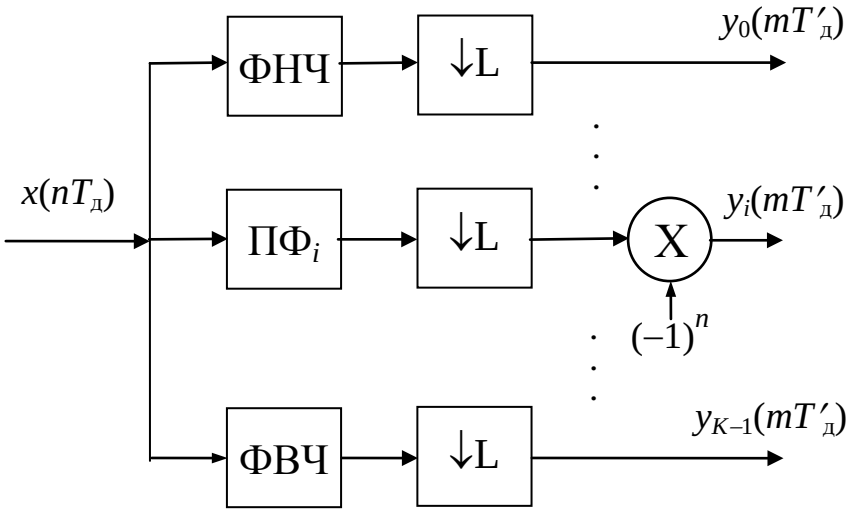


Рис. 13.6. Структурная схема подсистемы РГС
на основе полосовых фильтров

Если полосовые фильтры имеют *идеальную* частотную характеристику с полосой пропускания $\Delta f_п = f'_д/2$, равной полосе частот канала и центральной частотой $f_{0i} = (f'_д/4) + if'_д/2$, совпадающей с центральными частотами каналов, то после понижения частоты дискретизации спектры их выходных сигналов за счет периодизации с низкой частотой дискретизации переносятся в основную полосу частот канального сигнала $(0 \pm f'_д/2)$ без наложения или перекрытия спектров. При этом разделение канальных сигналов не сопровождается их искажениями.

Искажения сигналов в реальной подсистеме РГС вызываются отличием частотных характеристик полосовых фильтров от идеальных и конечными значениями переходных полос. *Межканальные искажения* сигналов в подсистеме РГС связаны с тем, что за счет конечного затухания частотной характеристики полосового фильтра в полосе задерживания на выход его проходят составляющие не только боковой полосы частот выделяемого канала, но и ослабленных фильтром сигналов остальных $(K - 1)$-го каналов, которые после понижения частоты дискретизации накладываются на выделенный канальный сигнал в основной полосе частот $(0 \pm f'_д/2)$ (рис. 13.3). *Граничные частоты* полосовых фильтров-дециматоров и обусловленные ими *частотные и межканальные искажения* сигналов определяются при этом, как и в подсистеме ФГС, на основе полосовых фильтров-интерполяторов.

Подсистеме РГС на основе полосовых фильтров-дециматоров присущи те же свойства, что и подсистеме ФГС на основе полосовых фильтров-интерполяторов.

Разделение групповых сигналов методом цифрового гетеродинирования и квадратурной обработки

Частотное разделение каналов данным методом осуществляется в соответствии со структурной схемой подсистемы РГС (рис. 13.7), которая является дуальной подсистеме ФГС (рис. 13.4).

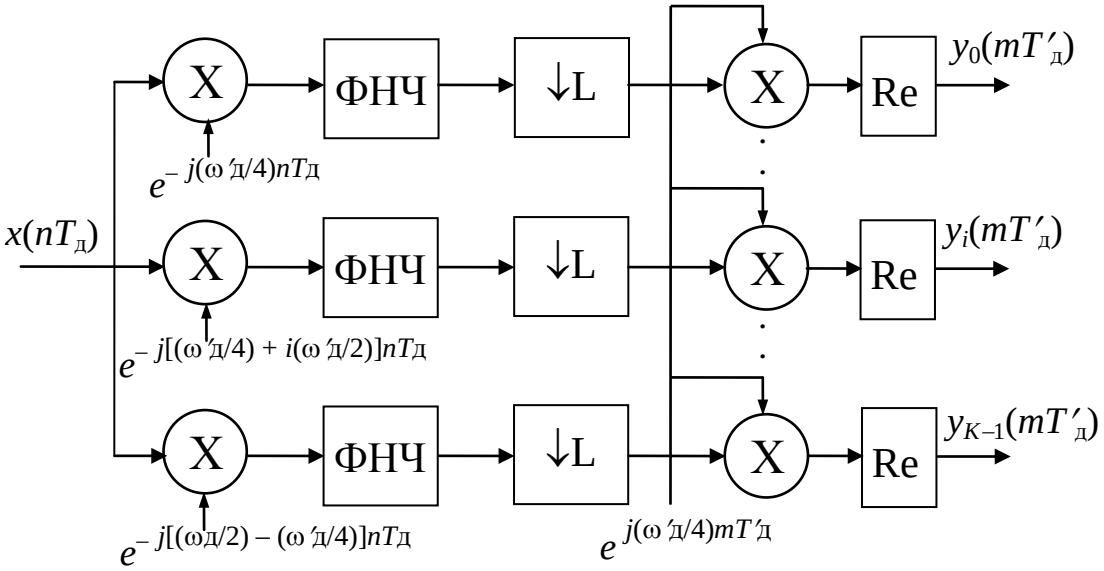


Рис. 13.7. Структурная схема подсистемы РГС
на основе цифрового гетеродинирования сигналов

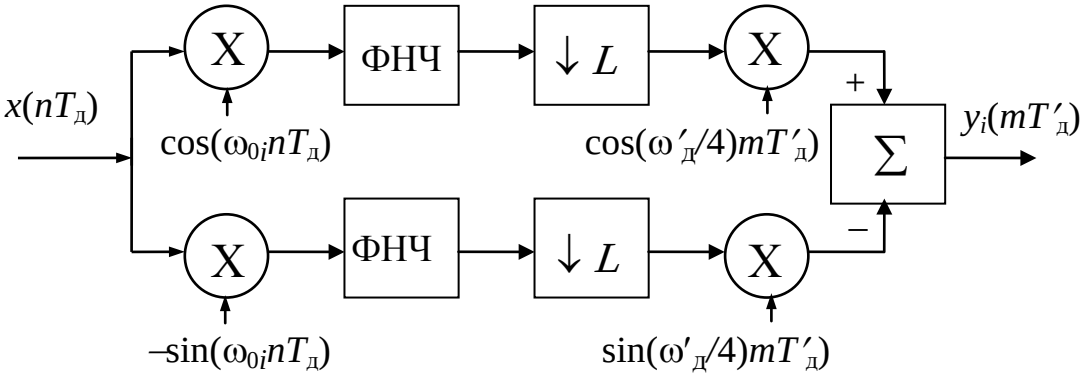


Рис. 13.8. Структурная схема одного канала подсистемы РГС,
оперирующая с вещественными числами

На рис. 13.8 показана также структура одного канала подсистемы РГС (рис. 13.7), в которой все операции выполняются с вещественными числами.

Подсистема РГС содержит K идентичных по структуре каналов, состоящих из умножителей (смесителей), осуществляющих смещение спектров сигналов в соответствии со значениями частот гетеродина, фильтра нижних частот (ФНЧ) и компрессора частоты дискретизации ↓L.

Структуре *i*-го канала соответствует следующая последовательность операций обработки сигналов:

♦ спектр группового сигнала в каждом канале смещается влево на центральную частоту f_{0i} *i*-го канала, т.е. к нулевой частоте путем умножения его на комплексный гармонический сигнал гетеродина $e^{-j2\pi f_{0i}nT}$;

♦ фильтром нижних частот с частотой среза $f'_{с} \approx f'_{д}/4$ выделяется смещенная к нулевой частоте боковая полоса спектра канального сигнала;

♦ частота дискретизации комплексного выходного сигнала ФНЧ понижается в *L* раз до частоты дискретизации канального сигнала;

♦ умножением выходного сигнала компрессора частоты дискретизации на комплексный гармонический сигнал гетеродина $e^{j2\pi(f'_{д}/4)mT'_{д}}$ выделенная боковая полоса спектра канального сигнала смещается на ее центральную частоту $f'_{д}/4$;

♦ с помощью операции взятия реальной части (Re) осуществляется переход от комплексного к вещественному канальному сигналу.

Разделение группового сигнала на канальные происходит без наложения их спектров, если фильтры нижних частот имеют идеальные частотные характеристики. При этом отсутствуют и искажения сигналов при разделении.

Отличие частотных характеристик фильтров от идеальных является причиной *искажения сигналов* в реальной подсистеме РГС.

Граничные частоты среза, задерживания для комплексных ФНЧ задаются для положительных и отрицательных частот и определяются теми же соотношениями (13.2), что и для ФГС.

Для вещественных ФНЧ в структуре канала подсистемы РГС, оперирующей с вещественными числами (рис. 13.8), значения частот среза и задерживания соответствуют соотношению (13.3) для подсистемы ФГС (рис. 13.4). Аналогичным образом определяются частотные и межканальные искажения сигналов, вносимые фильтрами.

Межканальные искажения сигналов в подсистеме РГС на основе цифрового гетеродинирования связаны с тем, что за счет конечного затухания частотной характеристики ФНЧ в полосе задерживания на выход проходят составляющие не только боковой полосы частот выделяемого канала, но и ослабленные фильтром сигналы остальных (K – 1)-го каналов, которые после понижения частоты дискретизации накладываются на выделенный канальный сигнал в полосе частот $(0 \pm f'_{д}/4)$.

Подсистема РГС с квадратурной обработкой обладает такими же свойствами, как подсистема ФГС с квадратурной обработкой.

Каналообразование и разделение сигналов в МКС возможны не только с помощью цифровых фильтров, но и с помощью ДПФ (БПФ).

Трансмультиплексоры

Трансмультиплексоры (ТМП) [9] относятся к устройствам, осуществляющим сопряжение многоканальных систем связи и передачи данных с

частотным разделением каналов (ЧРК) и временным разделением каналов (ВРК). Они строятся на базе подсистем ФГС и РГС (рис. 13.9).

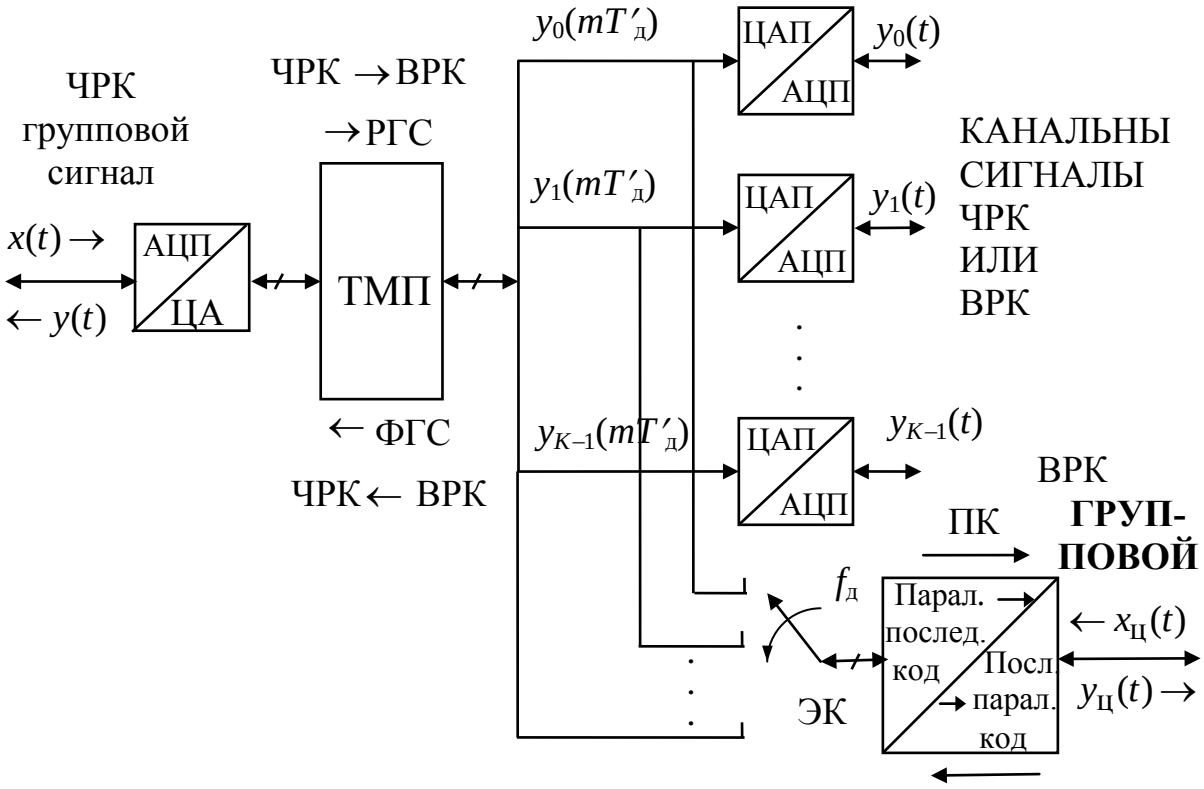


Рис. 13.9. Общая структура устройства сопряжения систем типа ЧРК–ВРК

ТМП имеют аналоговый вход и выход группового сигнала системы ЧРК $x(t)$, $y(t)$ и цифровой вход и выход группового сигнала системы ВРК $x_ц(t)$, $y_ц(t)$, а также аналоговые входы и выходы канальных сигналов $x_i(t)$, $y_i(t)$. При приеме сообщения с системы ЧРК ее групповой сигнал $x(t)$ оцифровывается АЦП и обрабатывается в ТМП подсистемой РГС. Образующиеся на ее выходах цифровые канальные сигналы $y_i(mT'_д)$ в параллельном коде либо преобразуются в аналоговые $y_i(t)$ с помощью ЦАП для передачи абоненту, либо поступают на электронный коммутатор (ЭК) и преобразователь кода (ПК), с помощью которого они преобразуются в групповой сигнал системы ВРК для дальнейшей передачи.

Коммутатор работает с частотой дискретизации $f_д$, считывая циклически параллельные коды разрядностью q_y одноименных (имеющих одинаковый номер m) отсчетов канальных сигналов $y_i(mT'_д)$, $i = 0, 1, \ldots, (K-1)$. С помощью преобразователя кода ПК они переводятся из параллельного кода в последовательный, т.е. в последовательность нулей и единиц, передаваемых по одной линии с частотой, превышающей частоту дискретизации $f_д$ в q_y раз.

Если сообщения поступают с системы ВРК, то последовательный код ее группового сигнала преобразуется в последовательность параллельных кодов, соответствующих одноименным отсчетам канальных сигналов $y_i(mT'_д)$, разделяемых с помощью электронного коммутатора ЭК. В результате образуются K канальных цифровых сигналов, которые либо через ЦАП

передаются абоненту, либо поступают на подсистему ФГС ТМП для передачи их в систему ЧРК. С помощью подсистемы ФГС канальные сигналы объединяются в групповой сигнал системы ЧРК, который преобразуется ЦАП в аналоговую форму и передается в линию связи.

В ТМП на 60 каналов [9] сигналы дискретизируются с частотой 8, 112 и 576 кГц.

В *заключение* отметим, что при рассмотрении методов ФГС и РГС с использованием однополосной модуляции не затрагивались вопросы обеспечения равенства частот гетеродинов и дискретизации в территориально разнесенных подсистемах ФГС и РГС, которые решаются при разработке систем связи и передачи данных другими средствами. Влияние несоответствия этих частот на качественные характеристики систем многоканальной связи с частотным уплотнением каналов может быть достаточно интересной темой для самостоятельного исследования – как теоретического, так и с помощью моделирования на ЭВМ.

Контрольные вопросы

1. Какие сигналы различают в МКС, как взаимосвязаны их параметры?
2. В чем преимущество использования сигналов с однополосной амплитудной модуляцией в МКС?
3. Как осуществляется формирование (разделение) групповых сигналов с помощью полосовых фильтров?
4. Как возникают межканальные искажения при формировании групповых сигналов с помощью полосовых фильтров?
5. Как возникают межканальные искажения при разделении групповых сигналов с помощью полосовых фильтров?
6. Как осуществляется формирование (разделение) группового сигнала с помощью квадратурной обработки?
7. Как преобразуются спектры сигналов в подсистеме ФГС с квадратурной обработкой?
8. Как преобразуются спектры сигналов в подсистеме РГС с квадратурной обработкой?
9. Как возникают межканальные искажения при формировании групповых сигналов с квадратурной обработкой?
10. Как возникают межканальные искажения при разделении групповых сигналов с квадратурной обработкой?

Лекция 14
Системы многоканального полосового анализа – синтеза сигналов

Многоканальный полосовой анализ методически относится к общей задаче разделения сложных дискретных сигналов на частотные полосы или каналы в соответствии с требуемым частотным разрешением. Цели и решение этой задачи зависят от структуры разделяемого сигнала. В п. 13.1 предполагалось, что разделяемый групповой сигнал представляет совокупность объединенных известным образом информационных сигналов (каналов), разнесенных и не перекрывающихся по частоте. Целью разделения являлось извлечение информации, переносимой канальными сигналами, путем их частотной селекции и демодуляции.

При полосовом спектральном анализе (ПСА) спектр сигнала может быть не структурирован и случаен, а центральные частоты и полосы выделяемых каналов определяются исходя из *целей* спектрального анализа. Они заключаются в определении оценок необходимых спектральных характеристик сигналов – спектров амплитуд и фаз, спектральной плотности, спектральной плотности мощности (СПМ) и (или) взаимной спектральной плотности мощности (ВСПМ) – в соответствии с видом анализируемых сигналов. Кроме того, методами полосового анализа обеспечивается также и возможность восстановления (*синтеза*) сигналов по их спектру, в том числе и случайных.

Многоканальный полосовой анализ может быть как с равномерным, так и неравномерным разносом каналов анализа и их полос, выполняться параллельно или последовательно во времени.

В отличие от спектрального анализа на основе ДПФ, ПСА является *текущим*. Его оценки получаются в *реальном времени* по текущим отсчетам анализируемого процесса и являются *функциями не только частоты, но и времени* (эпохи анализа). Это важно для анализа *нестационарных сигналов* – речевых, биомедицинских, радиолокационных, виброакустических и др. Он предпочтительней в ряде случаев по возможностям представления результатов анализа и требуемому объему вычислений.

Многоканальный полосовой анализ относится к *фильтровым методам* спектрального анализа. В зависимости от спектральных характеристик, подлежащих оценке, он выполняется *методом полосовой фильтрации*, основанном на соотношении Парсеваля, и методом *квадратурной обработки*, основанном кратковременном преобразовании Фурье.

14.1. Спектральный анализ сигналов методом полосовой фильтрации

В методе полосовой фильтрации частотные полосы сигнала Δf, примыкающие к центральным частотам каналов анализа f_i, выделяются с помощью гребенки узкополосных цифровых фильтров. Метод обеспечивает оценку усредненной спектральной плотности мощности сигнала $\hat{P}_x(f_i)$ в заданной полосе частот канала анализа, относимую к центральной частоте канала f_i (рис. 14.1). Для нестационарных случайных сигналов она является также функцией текущего момента времени (номера выборки n) $\hat{P}_x(f_i, n)$.

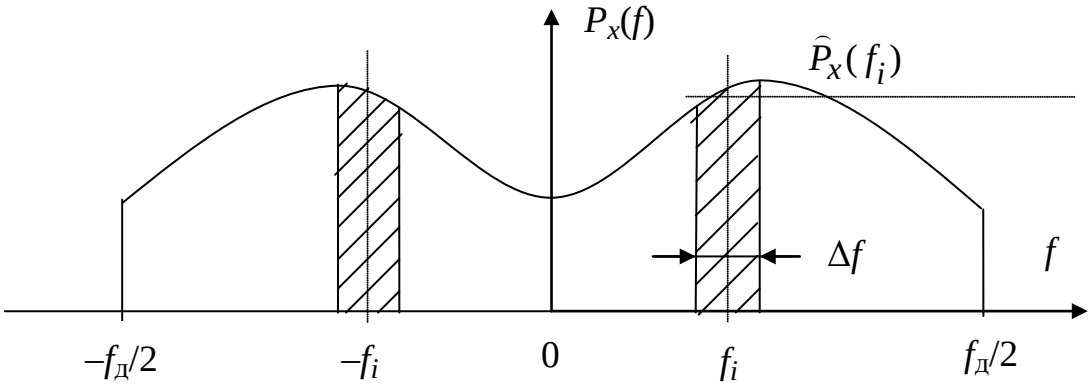


Рис. 14.1. Определение спектральной оценки в анализаторе спектра на основе полосовых фильтров

Полоса канала анализа Δf на рис. 14.1 определяется эффективной полосой пропускания частотной характеристики фильтра $H_i(jf)$. Для реальных фильтров частотные характеристики соседних каналов частично перекрываются между собой, но их суммарная частотная характеристика, т.е. частотная характеристика анализатора спектра, должна иметь минимальную неравномерность в пределах диапазона его рабочих частот.

Оценки СПМ $\hat{P}_x(f_i, n)$ находятся путем цифровой обработки узкополосных сигналов $x_i(nT_д)$, выделенных полосовыми фильтрами. Алгоритм этой обработки основывается на известном соотношении Парсеваля о равенстве средней мощности сигнала $x_i(nT_д)$ во временной и частотной областях.

Во временной области оценка средней мощности сигнала находится по его текущей реализации длиной N отсчетов:

$$\tilde{\bar{x}}_i^2(n) = (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} x_i^2[(n-m)T_д].$$

Через СПМ сигнала средняя мощность выражается как

$$\bar{x}_i^2 = 2\int_0^{f_д/2} P_x(f)\left|H_i(jf)\right|^2 df$$

или в соответствии с теоремой о среднем

$$\overline{x}_i^2 = 2\int_{f_i-\Delta f/2}^{f_i+\Delta f/2} P_x(f)df \;\not\equiv\; 2\Delta f \cdot P_x(f_i).$$

Переходя к текущей *оценке* СПМ $\widehat{P}_x(f_i,n)$, и приравнивая оценки средней мощности сигнала во временной и частотной области, получим

$$\tilde{\overline{x}}_i^2(n) = (1/N)\sum_{m=0}^{N-1} x_i^2[(n-m)T_Д] = 2\Delta f \cdot \tilde{P}_x(f_i,n). \qquad (14.1)$$

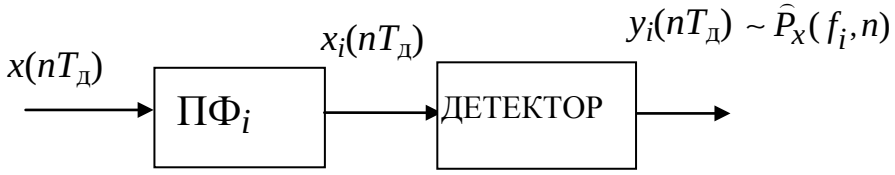


Рис. 14.2. Общая структурная схема анализатора спектра на основе полосовых фильтров

Таким образом, определив оценку СПМ сигнала во временной области $\tilde{\overline{x}}_i^2(n)$ и поделив ее на полосу частот $2\Delta f$, можно найти оценку СПМ сигнала $\widehat{P}_x(f_i,n)$ на частоте f_i. Для этого во временной области нужно выполнить операции возведения сигнала в квадрат и усреднения (интегрирования) его на интервале времени $NT_Д$ (по N отсчетам). Совокупность этих операций реализуется квадратичным детектором, подключенным к выходу полосового фильтра i-го канала (рис. 14.2).

Детектор (рис. 14.3) содержит квадратор, устройство усреднения (уу) (сглаживающий фильтр (сф)) и элементы понижения частоты дискретизации в м раз и извлечения квадратного корня.

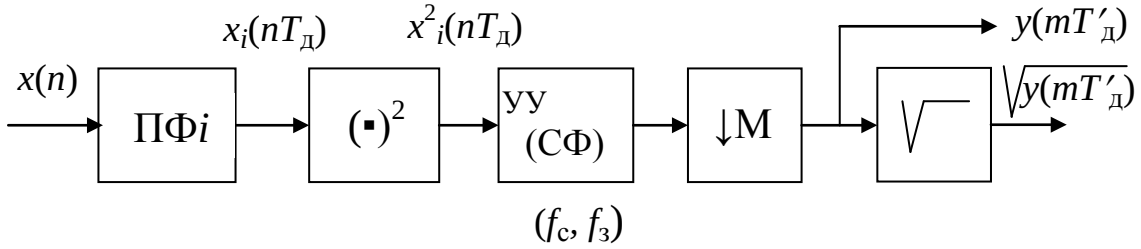


Рис. 14.3. Развернутая структурная схема канала анализатора спектра на основе полосовых фильтров

На выходе квадратора образуются комбинационные частотные составляющие разностной и суммарной частот $|mf_l \pm pf_q|$. Устройство усреднения представляет собой ФНЧ с достаточно узкой полосой пропускания $\Delta f \approx f_д/N$ и подавляет ВЧ-составляющие $(mf_l + pf_q)$. Это позволяет понизить частоту выборок медленно изменяющихся оценок СПМ $y(mT'_д) - \sim \widehat{P}_x(f_i,m)$ до зна-

чения $f'_{д} > 2\Delta f$. Путем извлечения квадратного корня находится при необходимости оценка среднеквадратического значения сигнала $\hat{\sigma}_x(f_i, n)$.

В качестве устройства усреднения используются как нерекурсивные фильтры (однородный сглаживающий фильтр или триангулярный фильтр – с треугольной импульсной характеристикой), так и сглаживающий рекурсивный фильтр экспоненциального весового усреднения первого порядка [2].

Точность оценок, получаемых методом полосовой фильтрации, зависит от степени близости частотных характеристик полосовых фильтров к идеальным, от времени усреднения (накопления) и от изменчивости спектральных характеристик сигналов во времени, т.е. От степени стационарности их на интервале наблюдения.

Вместо операции возведения сигнала в квадрат в анализаторах спектра иногда используют более простую операцию выпрямления (взятия по модулю). С помощью пересчета в этом случае тоже получаются необходимые спектральные оценки.

Методом полосовой фильтрации и преобразования гильберта возможен также анализ взаимной спектральной плотности сигналов [2].

Очевидно, что данный метод не позволяет восстановить сигнал по его текущему энергетическому спектру.

14.2. Многоканальный полосовой анализ сигналов на основе кратковременного преобразования Фурье

Полосовые анализаторы спектра с квадратурной обработкой сигналов основываются на определении *кратковременного* преобразования Фурье [7]. В отличие от анализаторов на основе полосовых фильтров, измеряющих только энергетические характеристики спектра, они позволяют оценить *комплексную спектральную плотность сигнала* и обеспечивают возможность его восстановления (синтеза) по результатам анализа и последующей обработки, в частности, в системах *анализа – синтеза* речевых сигналов.

Кратковременное преобразование Фурье введено для сигналов с изменяющимися во времени спектральными характеристиками. Оно является функцией двух аргументов – частоты ω и времени $nT_{д}$ (или номера отсчета n) и определяется выражением

$$\hat{X}(j\omega, n) = \sum_{l=-\infty}^{n} w(n-l)x(l)e^{-j\omega l T_{д}} = y(n, j\omega). \qquad (14.2)$$

При фиксированном n $\hat{X}(j\omega, n)$ представляет обычное преобразование Фурье последовательности $w(n-l)x(l)$, которая является сегментом (частью) последовательности $x(l)$, взвешенной зеркально отраженной и смещенной на n отсчетов весовой функцией (временным окном) $w(l)$ (рис. 14.4).

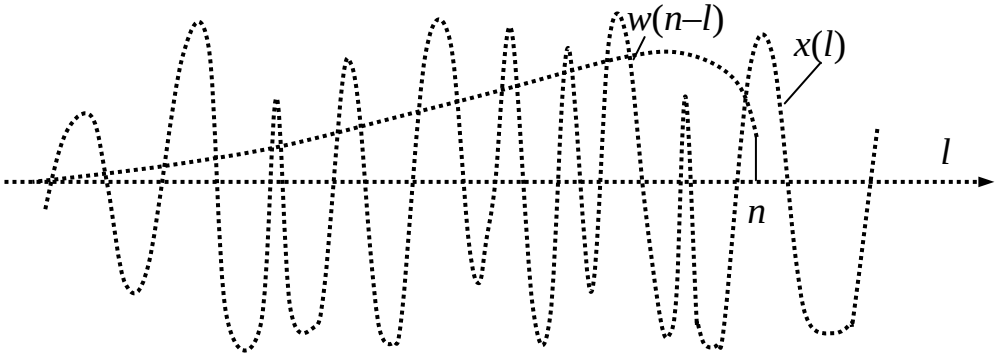


Рис. 14.4. К определению кратковременного преобразования Фурье

Умножению $w(n-l)x(l)$ во временной области отвечает соответствующая (14.2) свертка преобразований Фурье последовательностей $x(l)$ и $w(n-l)$, приводимая к виду

$$\widehat{X}(j\omega, n) = \frac{T_д}{2\pi}\int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} W(j\theta)X\left[j(\theta+\omega)\right]e^{j\theta nT_д}d\theta. \qquad (14.3)$$

Если преобразование Фурье (частотная характеристика) весовой функции $W(j\omega)$ близка к прямоугольной и имеет узкую полосу, то кратковременное преобразование Фурье $\widehat{X}(j\omega, n)$ взвешенной последовательности $w(n-l)x(l)$ достаточно точно соответствует преобразованию Фурье $X(j\omega)$ выделенного временным окном сегмента сигнала $x(l)$, т.е. его спектральной плотности на частоте ω.

При фиксированном значении ω (14.2) является обратным преобразованием Фурье произведения частотной характеристики весовой функции $W(j\theta)$ и смещенного к нулевой частоте преобразования Фурье $X\left[j(\theta+\omega)\right]$ последовательности $x(l)$.

Возможность восстановления сигнала по его кратковременному преобразованию Фурье

Так как кратковременное преобразование Фурье при фиксированном n обладает всеми свойствами обычного преобразования Фурье, то это значит, что последовательность $x(l)$ может быть *точно восстановлена* по ее кратковременному преобразованию Фурье на интервале временного окна $w(n-l)$:

$$x(l) = \frac{T_д}{2\pi w(n-l)}\int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} \widehat{X}(j\omega, n)e^{j\omega lT_д}d\omega, \quad l=-\infty, ..., n. \qquad (14.4)$$

Единственным легко выполнимым условием восстановления сигнала в соответствии с (14.4) является неравенство $w(0) \neq 0$ при $l = n$. Возможность

восстановления сигнала по его кратковременному преобразованию Фурье имеет большое практическое значение.

Интерпретация кратковременного преобразования Фурье посредством низкочастотной цифровой фильтрации

При фиксированном значении ω выражение (14.2) представляет собой свертку $y(n, j\omega)$ последовательностей $w(n)$ и $x(n)e^{-j\omega nT_д}$ и может быть интерпретировано посредством линейной фильтрации.

Интерпретация кратковременного преобразования Фурье посредством низкочастотной цифровой фильтрации осуществляется в соответствии со структурными схемами (рис. 14.5). В этих схемах спектр сигнала $x(n)$ смещается к нулевой частоте и фильтруется комплексным или парой вещественных ФНЧ с *импульсной характеристикой* $h(n) = w(n)$, являющейся весовой функцией $w(n)$ в (14.2).

Чем ближе частотная характеристика фильтра к прямоугольной и уже ее полоса пропускания, тем точнее соответствует сигнал на выходе фильтра (фильтров) $y(n, j\omega) = \hat{X}(j\omega, n)$ значению спектральной плотности сегмента последовательности $x(m)$ на частоте ω, относящемуся к моменту времени n.

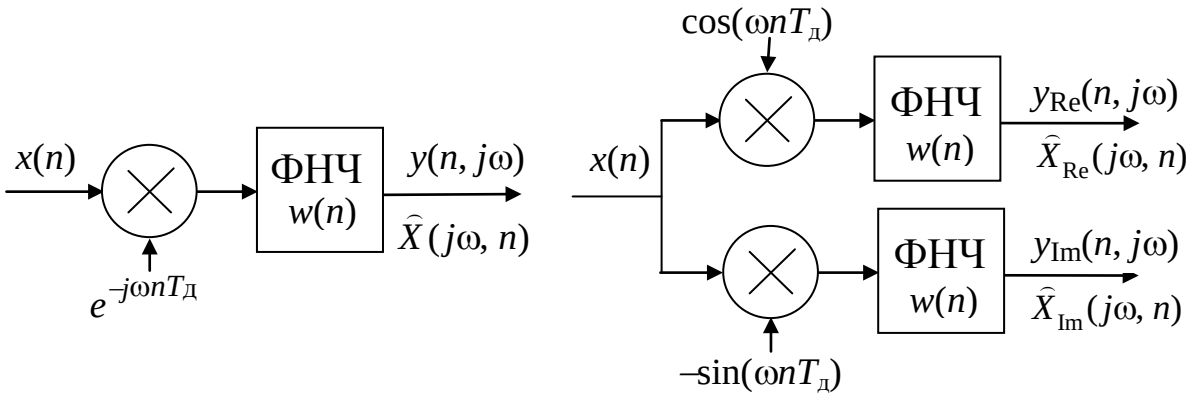


Рис. 14.5. Структурные схемы представления кратковременного преобразования Фурье с помощью цифровой фильтрации, оперирующие с комплексными (*а*) и вещественными (*б*) числами

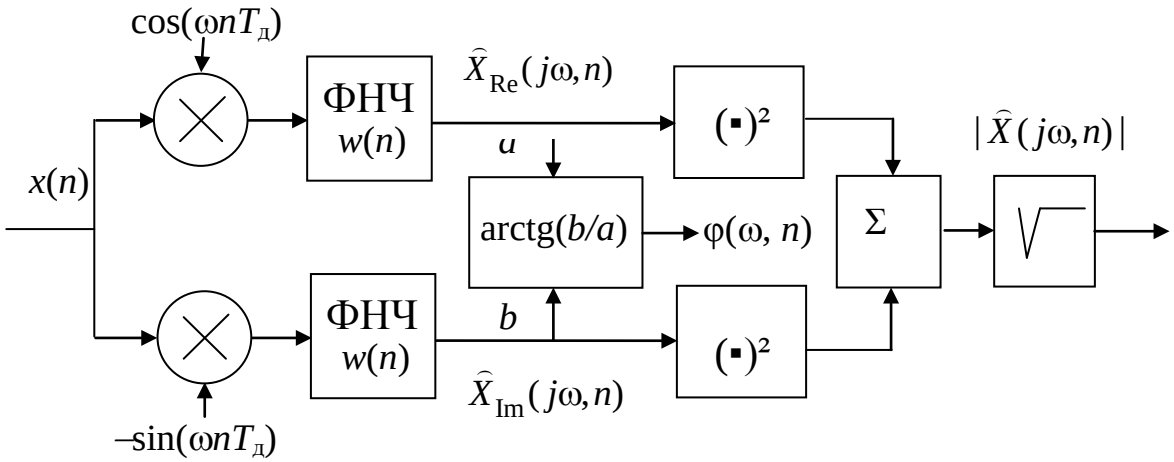


Рис. 14.6. Структурная схема вычисления модуля кратковременного преобразования Фурье

Вычисление амплитудного и фазового спектров

По реальной и мнимой части комплексного преобразования Фурье можно вычислить также амплитудный и фазовый спектры сигнала

$$\left|\widehat{X}(j\omega, n)\right| = \left[\widehat{X}^2_{\mathrm{Re}}(j\omega,n) + \widehat{X}^2_{\mathrm{Im}}(j\omega,n)\right]^{1/2},$$

$$\varphi(\omega,n) = \mathrm{arctg}(\widehat{X}_{\mathrm{Im}}(j\omega,n) / \widehat{X}_{\mathrm{Re}}(j\omega,n))$$

в соответствии со структурной схемой рис. 14.6, получаемой на основе структуры рис. 14.5. Она представляет квадратурный фазовый и амплитудный детекторы, причем, в отличие от анализатора на основе полосовой фильтрации (рис. 14.3), квадратурный амплитудный детектор (демодулятор) не требует усредняющего или сглаживающего фильтра.

Многоканальные анализаторы спектра с квадратурной обработкой сигналов

Многоканальный анализатор спектра на основе кратковременного преобразования Фурье получается путем дискретизации сигнала в частотной области, т.е. путем разбиения полосы частот $(0\pm\omega_д/2)$ на полосы анализа или каналы с центральными частотами ω_k. *Дискретизация по частоте* должна быть выполнена с шагом $\Delta\omega$, исключающим наложения во временной области. Наиболее просто этот вопрос решается в случае импульсных характеристик фильтров (т.е. весовых функций $w(n)$) конечной длины N. Так как весовая функция ограничивает текущую реализацию сигнала $x(n)$ N отсчетами, то, как и для ДПФ, шаг дискретизации по частоте должен отвечать условию $\Delta\omega \le \omega_д/N$ (условию теоремы отсчетов в частотной области). При таком шаге дискретизации по частоте можно точно восстановить сигнал $x(n)$ по значениям $\widehat{X}(j\omega_k, n)$.

Таким образом, длина импульсной характеристики анализирующих фильтров (весовой функции $w(n)$) определяет и число каналов анализа спектра K, равное N в случае комплексных сигналов и $N/2$ – в случае вещественных. При этом эффективные полосы частотных характеристик соседних каналов анализатора спектра с квадратурной обработкой *не перекрываются.* Сигналы $\widehat{X}(j\omega_k, n)$ на выходах каналов анализатора имеют спектр, ограниченный частотой задерживания $f_з$ фильтров нижних частот, что позволяет понизить частоту дискретизации выходных сигналов во временной области до значения $f'_д \ge 2f_з$. Это соответствует коэффициенту прореживания $M = f_д / f'_д = f_д / 2f_з$.

В качестве ФНЧ могут быть использованы КИХ-фильтры, импульсной характеристикой $h(n)$ которых является одна из типовых весовых функций, например, прямоугольная, треугольная, Ханна, Хэмминга и др. В этом

случае минимальное значение $f'_д$ определяется шириной главного лепестка $\Delta f_{гл}$ весовой функции:

$$f'_д \geq \Delta f_{гл} = Df_д/N; \qquad M = f_д / f'_д = N/D,$$

где $D \geq 2$ – коэффициент (D-фактор), зависящий от вида весовой функции. Например, для фильтра на основе весовой функции Хэмминга ($D = 4$) длине $N = 100$ и частоте дискретизации входного сигнала $f_д = 10000$ Гц соответствуют значения $f'_д = 400$ Гц, $M = 25$. При этом нужно учитывать, что за счет конечного затухания частотной характеристики фильтра в полосе задерживания будут иметь место наложения в частотной области, зависящие от уровня боковых лепестков весовой функции, который должен быть достаточно мал.

Кратковременное преобразование Фурье при дискретизации в частотной области с шагом $\Delta f = f_д/N$ и при (N/D)-кратном прореживании во временной области требует обработки в D раз больше отсчетов, чем для описания самого сигнала $x(n)$, усеченного весовой функцией длиной N. Однако такое представление создает возможность гибкого управления параметрами сигнала во временной и частотной областях с последующим его восстановлением, что очень важно при обработке аудио- и речевых сигналов.

Если в спектре сигнала отсутствуют частотные составляющие в определенной полосе или они не представляют интереса, то соответствующие каналы в структуре анализатора спектра могут быть опущены.

14.3. Системы полосового анализа–синтеза сигналов

Системы анализа–синтеза наряду с полосовым анализом обеспечивают также восстановление сигналов по их текущему спектру.

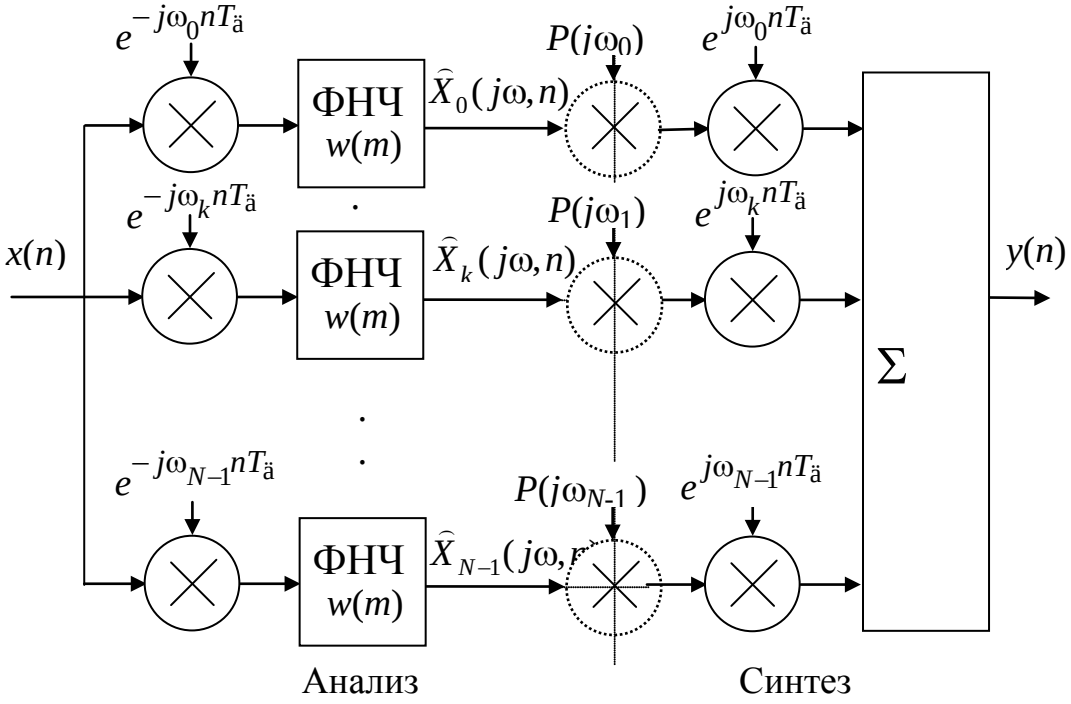
Восстановление сигналов по их кратковременному преобразованию Фурье

Восстановление, или *синтез*, *сигналов*, по их кратковременному преобразованию Фурье осуществляется путем переноса спектра и суммирования выходов гребенки фильтров в соответствии со структурной схемой (рис. 14.7).

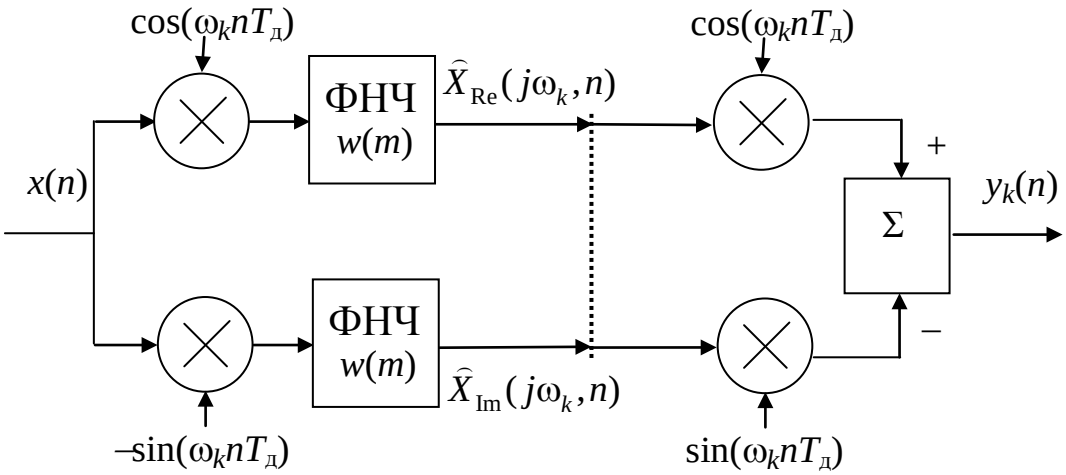
При обработке вещественных сигналов структура системы анализа–синтеза (рис. 14.7, *а*) содержит только каналы с номерами $k = 0, 1, \ldots, (N/2)$ с включенными на их выходах элементами взятия реальной части (Re). Обработке вещественных сигналов отвечает структура канала рис. 14.7, *б*.

В подсистеме анализа возможно изменение параметров сигнала в желаемом направлении (редактирование в частотной области) путем взвешивания выходов каналов анализа некоторой комплексной последовательностью $P(j\omega_k)$ с последующим восстановлением в подсистеме синтеза скорректиро-

ванного сигнала, например, аудио, речевого и др. (пунктир на рис. 14.7, *а*). Операцию взвешивания можно выполнить и на выходах каналов синтеза сигнала. С помощью комплексных весовых коэффициентов осуществляется также *коррекция* результирующей частотной характеристики *системы анализа–синтеза*, приближающая ее к идеальной – со строго плоской АЧХ и линейной ФЧХ.



а



б

Рис. 14.7. Структурная схема системы анализа–синтеза сигналов на основе кратковременного преобразования Фурье (*а*) и структура одного канала, оперирующая с вещественными числами (*б*)

Исследуя структуру канала рис. 14.7, *а*, можно показать, что она эквивалентна с учетом весовых коэффициентов полосовому фильтру с веществен-

ной импульсной характеристикой $h_k(n) = 2|P_k|w_k(n)\cos(w_k nT_д)$. Каналу $k = 0$ при этом соответствует ФНЧ с импульсной характеристикой $h_0(n) = w_0(n)$, а каналу $k = N/2$ (при четном N) – ФНЧ с импульсной характеристикой $h_{N/2}(n) = w_{N/2}(n)(-1)^n$ (или ФВЧ). Однако при реализации системы на основе таких фильтров отсутствуют выходы комплексных сигналов подсистемы анализа.

Полные структуры каналов анализа–синтеза с квадратурной обработкой сигналов

На рис. 14.8 приведены полные структурные схемы одного канала систем анализа – синтеза с квадратурной обработкой сигналов с использованием ФНЧ, оперирующие с комплексными (*а*) и вещественными (*б*) числами, которые учитывают понижение частоты дискретизации по времени при анализе сигнала в M раз и повышение частоты дискретизации при синтезе в $L = M$ раз. При правильной дискретизации сигналов во временной и частотной областях (см. выше) общая импульсная характеристика системы анализа–синтеза

$$\tilde{h}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n)e^{j\omega_k nT_д} = Nw(0)u_0(n)$$

представляет масштабированный единичный импульс $u_0(n)$, а ее выходной сигнал

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}(j\omega_k, n)e^{j\omega_k nT_д} = Nw(0)x(n)$$

совпадает с масштабированным входным сигналом.

Хотя приведенные выше частоты дискретизации во временной и частотной областях являются теоретически минимальными, в [7] показана возможность точного восстановления сигнала (при наличии постоянной задержки на время $rNT_д$), когда дискретизация в частотной области осуществляется на частотах $\omega_k = k\omega_д/K$, $k = 0, 1\ldots, K-1$, где $K < N$, т.е. когда число каналов анализа меньше длины импульсной характеристики фильтров N, а также для случая неравноразнесенных центральных частот каналов. При этом эффективные полосы полосовых фильтров каналов анализатора спектра с квадратурной обработкой не перекрываются. Там же рассмотрен синтез реальных БИХ и КИХ-фильтров (ФНЧ и ППФ), которые удовлетворяют условию точного восстановления сигнала при числе каналов анализатора спектра $K < N$. Они используются в системах анализа–синтеза речи с минимальной памятью (т.е. в системах сжатия речи) или минимальной скоростью передачи речи, а также для визуального отображения спектра.

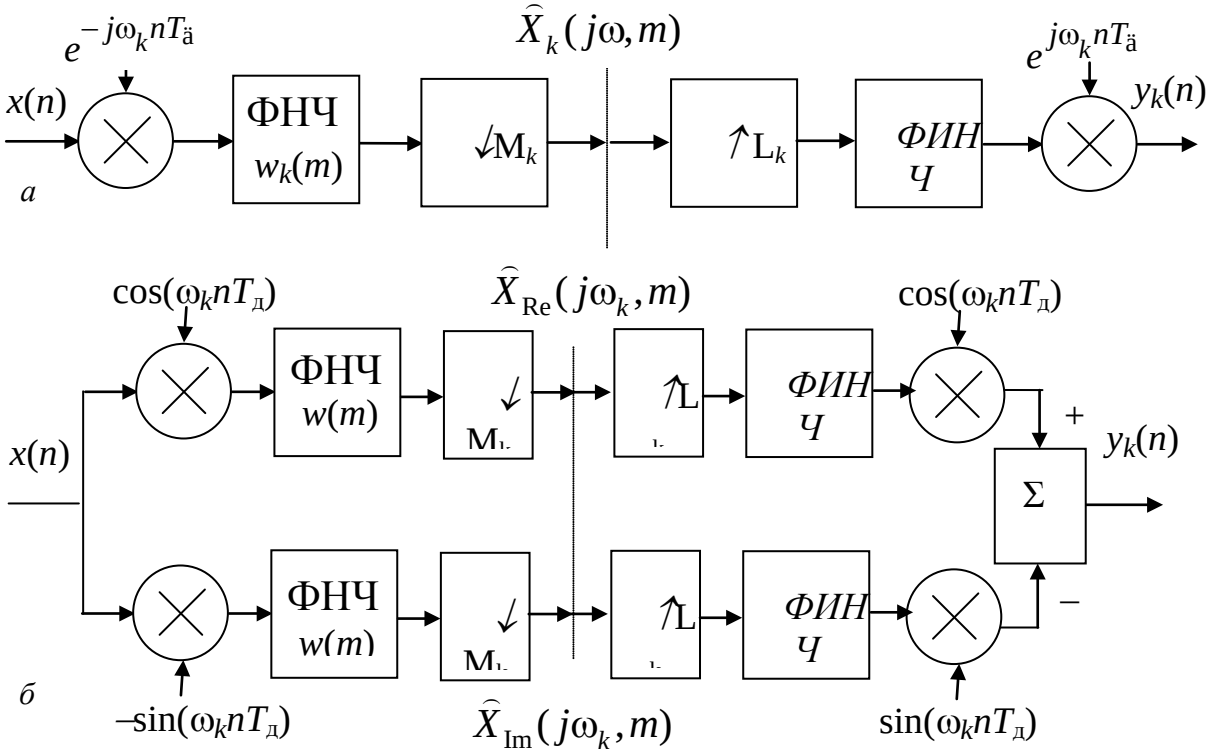


Рис. 14.8. Полные структурные схемы одного канала системы анализа – синтеза с квадратурной обработкой сигналов с использованием ФНЧ (*а*), (*б*) и полосовых фильтров (*в*)

Например, в литературе [7] приведена система анализа–синтеза речи с параметрами: частота дискретизации $f_д$ = 10000 гц, частотное разрешение Δf = 100 гц, центральные частоты каналов $f_k = kf_д/n$, где $n = f_д/\Delta f = 100$, $k = 0, 1,\ldots, к - 1$, $к < n$. Полоса анализа (100–3000) гц, что соответствует числу каналов $к$ = 30. В качестве фнч в этой системе использованы рф бесселя 6-го порядка с частотой среза f_c = 60 гц, имеющие практически линейную фчх. Путем введения дополнительной задержки получена удовлетворительная результирующая частотная характеристика гребенки фильтров с неравномерностью ачх около 0,8 дб и нелинейностью фчх 0,6 град.

Полосные вокодеры

Примером систем полосового спектрального анализа–синтеза является полосный вокодер, предназначенный для низкоскоростной передачи речи. Его применение основывается на свойствах достаточно медленного изменения во времени модуля спектра речевого сигнала по сравнению с самим сигналом. Он практически постоянен на интервале от 10 до 30 мс, что позволяет

дискретизировать выборки модулей спектра на выходах каналов анализатора с низкой частотой дискретизации, экономично их кодировать и в виде сформированного группового сигнала передавать в линию связи или сохранять с минимально необходимой памятью.

На рис. 14.9, 14.10 приведены структурные схемы анализатора и синтезатора полосного вокодера.

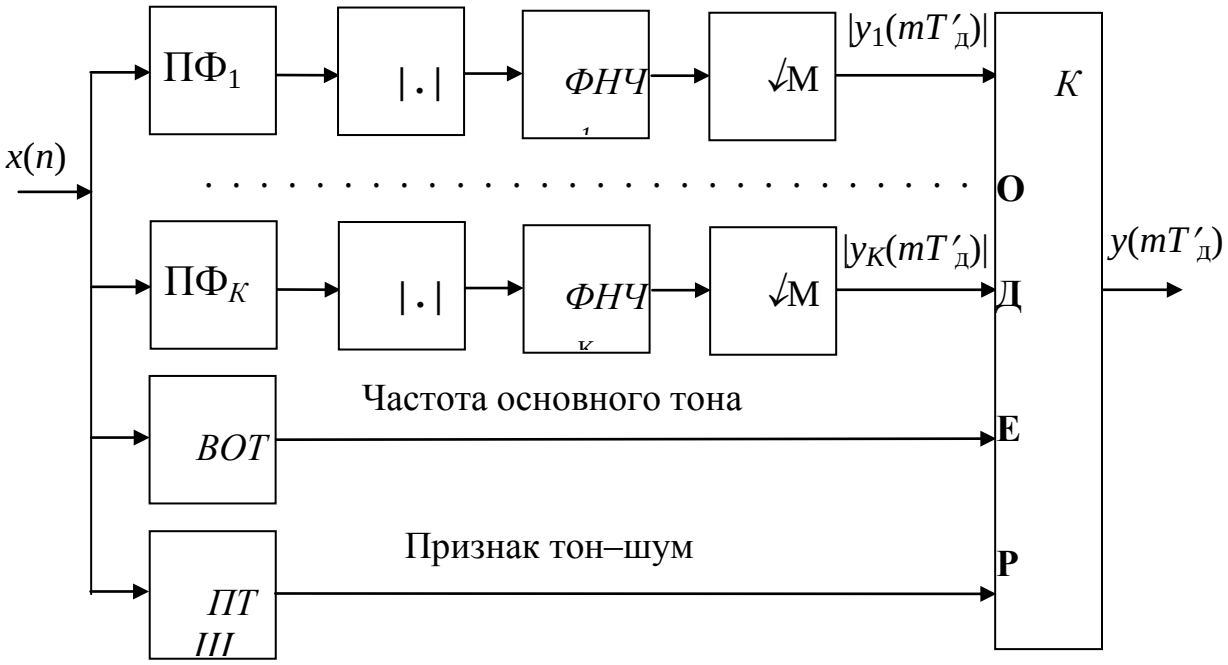


Рис. 14.9. Структурная схема анализатора полосного вокодера

Анализатор полосного вокодера (рис. 14.9) состоит из гребенки полосовых фильтров $ПФ_i$, детекторов средневыпрямленных значений, включающих элемент взятия сигнала по модулю (выпрямитель) и фильтр нижних частот ФНЧ, прореживателей и кодирующих элементов. Гребенка полосовых фильтров может быть реализована любым из рассмотренных выше способов, в том числе и на основе квадратурной обработки с использованием ФНЧ.

Для обеспечения возможности восстановления речи по значениям модуля ее спектра в анализаторе оцениваются также параметры возбуждения речевого сигнала, связанные с дискретной моделью речеобразования и голосового тракта [7]: значения частоты основного тона (выделитель основного тона ВОТ) и признака тон–шум (ПТШ). Они определяют тип возбуждения голосового тракта – случайный шум для невокализованной речи или периодические импульсы с частотой основного тона – для вокализованной речи.

Поступающие в синтезатор полосного вокодера (рис. 14.10) сигналы модуля спектра умножаются на сигнал возбуждения, модулируя его по закону изменения спектра. Сигнал возбуждения поступает через ключ, управляемый в соответствии с признаком тон–шум, либо от генератора шума, либо от генератора импульсов с частотой основного тона. Полученные модулирован-

ные сигналы проходят через гребенку полосовых фильтров, идентичную полосовым фильтрам анализатора, и суммируются. Образующийся на выходе речевой сигнал с некоторыми искажениями соответствует входному сигналу анализатора. Степень искажения зависит от числа каналов, составляющего обычно 15 и более, качества фильтров, разрядности кодов.

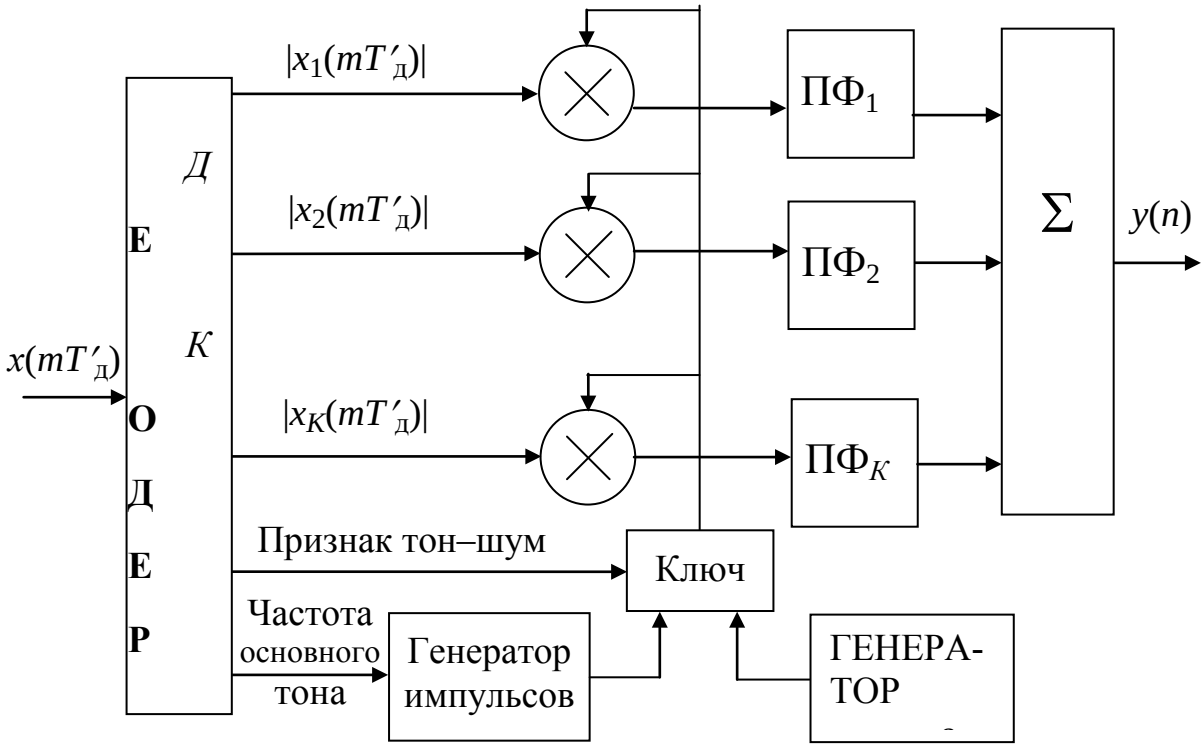


Рис. 14.10. Структурная схема синтезатора полосного вокодера

Необходимая скорость непосредственной передачи речевого сигнала разрядностью 10 бит, дискретизированного с частотой $f_д$ = 8000 Гц, составляет 80000 бит/с. Полосные вокодеры могут работать со скоростями (1200–9600) бит/с. Это снижает требования к каналу передачи информации, повышает возможную степень его уплотнения. За счет сжатия речи уменьшается требуемый объем памяти для ее записи.

Контрольные вопросы

1. В чем различие систем полосового спектрального анализа сигналов и спектрального анализа на основе ДПФ?

2. Какие спектральные характеристики сигналов оцениваются методом полосовой фильтрации?

3. Каково математическое обоснование полосового спектрального анализа сигналов на основе полосовых фильтров?

4. От чего зависит точность спектральных оценок, получаемых методом полосовой фильтрации?

5. Какие требования предъявляются к частотной характеристике полосовых фильтров и общей частотной характеристике анализатора спектра на основе полосовых фильтров?

6. Какие преобразования спектра сигнала осуществляются детектором анализатора спектра на основе полосовых фильтров?

7. Как определяется и используется кратковременное преобразование Фурье для полосового спектрального анализа сигналов?

8. Какова интерпретация кратковременного преобразования Фурье посредством цифровой фильтрации?

9. Какие спектральные характеристики позволяют оценить полосовые анализаторы спектра с квадратурной обработкой?

11. Как преобразуются спектры сигналов в результате цифрового гетеродинирования в структуре анализатора спектра с квадратурной обработкой?

12. Какие требования предъявляются к ФНЧ в анализаторе спектра с квадратурной обработкой?

13. Как осуществляется и для чего применяется понижение частоты дискретизации в анализаторе спектра с квадратурной обработкой?

14. Каковы условия правильной дискретизации сигналов в частотной и временной области в системах полосового анализа с квадратурной обработкой?

15. Каковы условия восстановления сигнала по его кратковременному преобразованию Фурье?

16. Как осуществляется восстановление сигнала в системах анализа – синтеза по его кратковременному преобразованию Фурье?

17. Как используется и реализуется редактирование спектра в системе анализа–синтеза сигналов на основе квадратурной обработки?

18. В чем заключаются задачи и особенности цифровой обработки речевых сигналов?

19. Что такое полосные вокодеры и какие методы полосного анализа–синтеза они используют?

Т Е М А 5
МЕТОДЫ И СРЕДСТВА АППАРАТНО-ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Л е к ц и я 15
Реализация цифровой обработки сигналов на основе микропроцессорных средств

Общей *задачей* реализации ЦОС является обеспечение требуемой скорости и точности обработки при минимальных массо-габаритных характеристиках, энергопотреблении и стоимости. К *реализационным показателям* относится также уровень программируемости и открытости системы, определяющий возможность ее функционального развития и модификации.

Различают программный, аппаратный и аппаратно-программный *способы реализации* ЦОС.

К *программной реализации* относится обработка на ЭВМ записей сигналов или данных в нереальном времени, включающая также моделирование алгоритмов и систем ЦОС. Такая реализация не предполагает взаимодействия с устройствами внешнего ввода-вывода сигналов или данных.

В данной теме рассматриваются аппаратный и аппаратно-программный способы реализации ЦОС, выполняемой в режиме реального времени, т.е. в темпе поступления данных. С этим связаны и основные особенности реализации таких систем.

Аппаратно реализуются непрограммируемые системы ЦОС, а*ппаратно-программно* – программируемые системы, содержащие средства как аппаратного, так и программного обеспечения.

15.1. Общие вопросы реализации систем цифровой обработки сигналов

Аппаратное обеспечение системы (рис. 15.1) независимо от способа ее реализации состоит из процессора ЦОС (ПЦОС) – программируемого или нет – и сопрягаемых с ним подсистем (п/с) ввода–вывода (В/В) и синхронизации.

Различают подсистемы аналогового ввода–вывода (аналого-цифрового интерфейса) и цифрового ввода–вывода, которые могут быть одноканальными и многоканальными. В одной и той же системе возможны различные сочетания числа и вида каналов ввода–вывода.

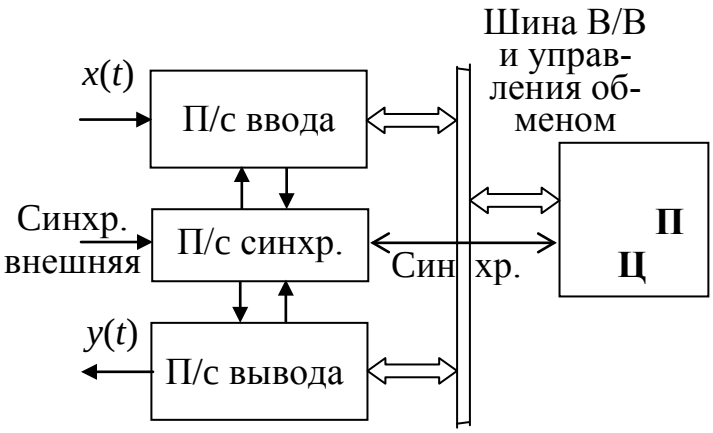


рис. 15.1. Общая структура аппаратного обеспечения системы цос

Средствами реализации подсистем ввода–вывода и синхронизации являются АЦП, ЦАП, аналоговые устройства (фильтры, усилители, УВХ), цифровые и запоминающие устройства, микроконтроллеры (для управления вводом-выводом) и др.

Средствами реализации процессора ЦОС определяется способ реализации системы в целом – аппаратный или аппаратно-программный. Для аппаратной реализации ЦОС это жесткая логика и программируемые логические интегральные микросхемы (ПЛИС), для аппаратно-программной – различные микропроцессорные средства.

Средства аппаратной реализации процессора ЦОС

Процессоры ЦОС на элементах жесткой логики или ПЛИС обеспечивают максимальное быстродействие системы, но не обладают необходимой функциональной гибкостью, так как жестко привязаны к конкретной решаемой задаче и реализуемому алгоритму обработки. Частично это ограничение снимается при использовании ПЛИС (интегральные схемы программируемой структуры – ИСПС), относящихся к современным средствам аппаратной реализации процессоров ЦОС. ПЛИС представляет собой кристалл или БИС из набора базовых элементов, режим работы которых и соединения между ними (конфигурация ПЛИС) задаются в соответствии с реализуемой электрической схемой. Возможно многократное изменение схемы внутри кристалла, в том числе непосредственно в рабочей системе. Базовыми элементами ПЛИС являются вентили, триггеры, блоки памяти. Степень интеграции ПЛИС достигает нескольких миллионов вентилей, число входов-выходов – до 2000, тактовая частота – (100–500) МГц и выше. Имеются ПЛИС со встроенными многоразрядными аппаратными умножителями и программируемыми процессорами, в том числе сигнальными.

Ведущими в области ПЛИС являются фирмы XILINX, (семейства ПЛИС Virtex4, Spartan3, CollRuner2), ALTERA (семейства ПЛИС MAX 7000, MAX 9000) и др. Проектирование процессоров ЦОС на основе ПЛИС аналогично проектированию их на жесткой логике. Разработанная на основе базовых элементов ПЛИС принципиальная схема цифрового устройства вводится

или импортируется из схемотехнической САПР, например, OrCad, в систему автоматизированного проектирования ПЛИС, генерирующую файл конфигурации ПЛИС. В соответствии с ним и производится программирование подключаемой к компьютеру ПЛИС. Все чаще для описания больших и сложных схем используются специальные языки описания аппаратуры, такие, как VHDL, Verilog, существенно облегчающие проектирование таких схем. САПР ПЛИС включает также библиотеку параметризированных модулей (LPM), автоматически реализующих сложные цифровые элементы программируемой размерности – счетчики, регистры, мультиплексоры, дешифраторы, а также сумматоры, умножители, память.

Средства аппаратно-программной реализации процессора ЦОС

Аппаратно-программный способ реализации процессора ЦОС на основе различных микропроцессорных средств является менее быстродействующим, но обладает функциональной гибкостью, структура его аппаратного обеспечения практически не зависит от реализуемого алгоритма, который определяется программным обеспечением процессора. Системы такого типа открыты для развития и модификации, выполняемой на программном уровне. Их быстродействие и точность могут быть повышены с помощью дополнительных средств *аппаратной поддержки* (ускорителей). Это позволяет в определенной степени разрешить *противоречия между быстродействием, точностью обработки и программируемостью систем* ЦОС. В качестве процессора ЦОС могут использоваться готовые (универсальные) процессорные устройства и создаваться специализированные.

К процессорам, не требующим разработки, относятся ПК, функционально завершенные одноплатные компьютеры (процессоры), процессорные модули систем сбора и обработки данных, в том числе с элементами аналого-цифрового интерфейса. Разработка аппаратного обеспечения системы сводится в этом случае к выбору типа процессора и созданию или выбору готовых средств аналого-цифрового интерфейса, их сопряжению с процессором ЦОС, решению задач синхронизации системы.

Специализированные процессоры ЦОС разрабатываются и реализуются на основе микропроцессорных средств – микропроцессоров общего назначения, однокристальных микроконтроллеров и цифровых сигнальных процессоров.

Общая структура процессора ЦОС

Процессоры ЦОС независимо от способа их реализации (на жесткой, программируемой логике или их сочетании) имеют общую структуру (рис. 15.2). Функционально они содержат арифметическое устройство (АУ), устройство управления (УУ), память коэффициентов ($П_К$) и память отсчетов сигнала (сигнальная память $П_С$). Устройство управления программируемых

процессоров содержит память программ, которая может быть общей с памятью данных в случае фон-Неймановской архитектуры процессора или раздельной в случае гарвардской архитектуры.

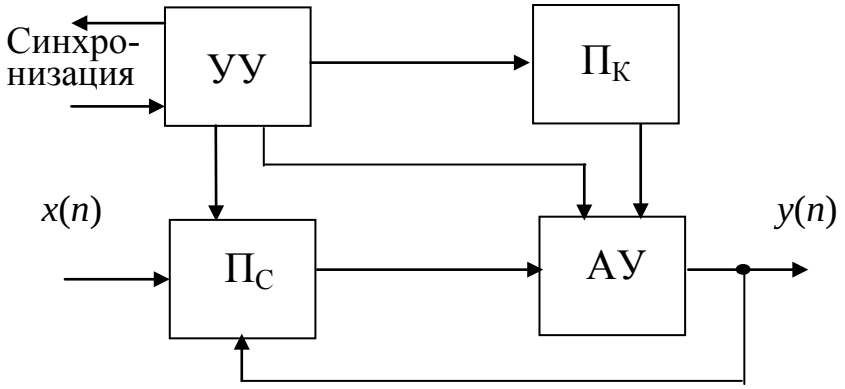


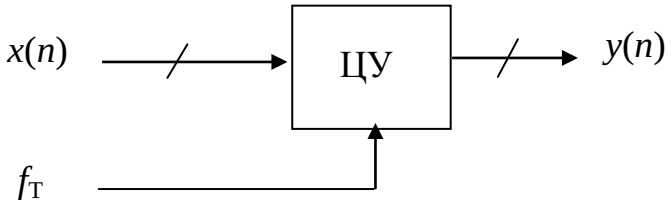
Рис. 15.2. Общая структура процессора ЦОС

Структура процессоров ориентирована на эффективную реализацию основной (базовой) операции ЦОС – накопления сумм произведений: $Y = A \cdot Y + B \cdot X$, где A, B и X могут представлять собой как скалярные, так и векторные величины.

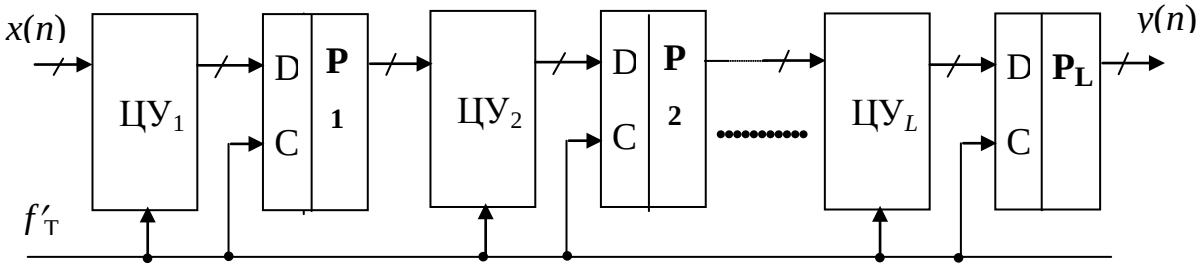
Принципы реализации ЦОС

Системы ЦОС, в зависимости от требуемой скорости обработки, могут быть *однопроцессорными и многопроцессорными*. При высоких требованиях к производительности (числе операций в единицу времени) процессор ЦОС выполняют в виде совокупности процессорных модулей, осуществляющих обработку сигналов в соответствии с принципами конвейеризации и распараллеливания.

Принцип конвейерной, или поточной, обработки заключается в том, что сложное цифровое устройство ЦУ (рис. 15.3, *а*) с временем задержки (обработки) $t_з$ и соответствующей ему максимальной частотой тактирования и дискретизации сигнала, равной $f_{т\ max} = f_{д\ max} = 1/t_з$, разбивается (если это возможно) на L более простых не охваченных общей обратной связью каскадно включенных устройств (звеньев) $ЦУ_1$–$ЦУ_L$ (рис.15.3, *б*) с одинаковым временем задержки (обработки), равным примерно $t_{з1} = t_з/L$, между которыми включаются параллельные регистры памяти $Р_1$–$Р_L$ с временем задержки $t_{çð} << t_{ç1}$.



а



б

Рис. 15.3. Структура цифрового устройства без конвейерной обработки (*а*) и с конвейерной обработкой (*б*)

При этом очередной отсчет сигнала на вход устройства и его отдельных звеньев можно подавать через интервалы времени $T' = t_{з1} + t_{зр}$, соответствующие максимальной частоте тактирования и дискретизации:

$$f'_{т\,max} = f'_{д\,max} = 1/(t_з + t_{зр}) \approx L/t_з = Lf_{т\,max} = Lf_{д\,max}.$$

В результате конвейерной обработки быстродействие L-звенного цифрового устройства (процессора ЦОС) повышается практически в L раз, т.е. до быстродействия одного звена или модуля. Данный принцип непосредственно применим к каскадной структуре многозвенного рекурсивного цифрового фильтра.

При конвейерной обработке процессорные модули оперируют с разными отсчетами одного сигнала. В соответствии же с *принципом распараллеливания* они осуществляют одновременную обработку текущего отсчета сигнала или группы одновременно обрабатываемых отсчетов сигнала. Очевидно, что увеличение числа арифметических устройств уменьшает время обработки, но ценой увеличения объема аппаратуры и ее усложнения. Принципу распараллеливания непосредственно отвечает параллельная структура многозвенного рекурсивного цифрового фильтра. Параллельная многопроцессорная обработка применяется также в сложных многоканальных системах ЦОС.

Альтернативой многопроцессорной обработки является обработка сигналов в соответствии с *принципом временного разделения или мультиплексирования,* когда с помощью одного высокопроизводительного процессора, характеризующегося временем обработки $T_{обр}$ или максимальной тактовой частотой $f_{т\,max}$, одновременно обрабатываются K сигналов (последовательностей), дискретизируемых с периодом $T_д \geq KT_{обр}$ или частотой $f_д \leq f_{т\,max}/K$. Данный принцип реализации направлен на уменьшение объема аппаратуры и применяется в одноканальных и многоканальных системах ЦОС.

Синхронизация ввода–вывода и обработки данных в системах ЦОС

Системы ЦОС реального времени выполняют *циклическую* последовательность операций ввода, обработки и вывода данных. *Задача их синхронизации* заключается в обеспечении жесткой привязки циклов ввода, обработки и вывода к заданному периоду (частоте) дискретизации сигнала, определяющему длительность временного цикла системы:

$$T_{ц} = T_{вв} + T_{обр} + T_{выв} + T_{ож} = T_{д} = \text{const}.$$

Кроме времени ввода $T_{вв}$, вывода $T_{выв}$ и обработки $T_{обр}$, он включает также время ожидания $T_{ож}$, которое дополняет временной цикл до постоянного периода дискретизации сигнала $T_{д}$.

При *аппаратной реализации* процессора ЦОС это время постоянно ($T_{ож}$ = const) или равно нулю, так как постоянными являются все другие составляющие временного цикла. Синхронизация при этом выполняется с помощью устройства управления, в том числе микропрограммного, формирующего последовательность управляющих и синхронизирующих сигналов.

При *аппаратно-программной реализации* процессора ЦОС время ожидания завершения цикла может быть как постоянным $T_{ож}$ = const, так и переменным: $T_{ож}$ = var, когда все или одна из составляющих $T_{вв}$, $T_{обр}$, $T_{выв}$ зависят от конкретных значений сигнала, т.е. переменны. Если $T_{ож}$ = const, то длительность временного цикла системы может быть задана программно, что соответствует ее *внутренней программной синхронизации*. При $T_{ож}$ = var используется аппаратная или аппаратно-программная синхронизация. *Аппаратная синхронизация* осуществляется по прерыванию (или запросу ПДП) процессора, а *аппаратно-программная* – путем программного опроса регистра состояния канала ввода (бита готовности буфера данных АЦП), а возможно также и канала вывода. Аппаратная и аппаратно-программная синхронизации могут выполняться как от *внешнего источника*, так и *внутреннего* типа таймера. Их применяют и в системах с постоянными значениями времени ввода, вывода и обработки, т.е. при $T_{ож}$ = const.

Следует отметить, что в конкретной системе интервалы ввода, вывода и обработки могут перекрываться во времени с частичным или полным поглощением меньшего из них.

Пример развернутой структурной схемы синхронизированной системы цифровой обработки аналоговых сигналов представлен на рис. 15.4.

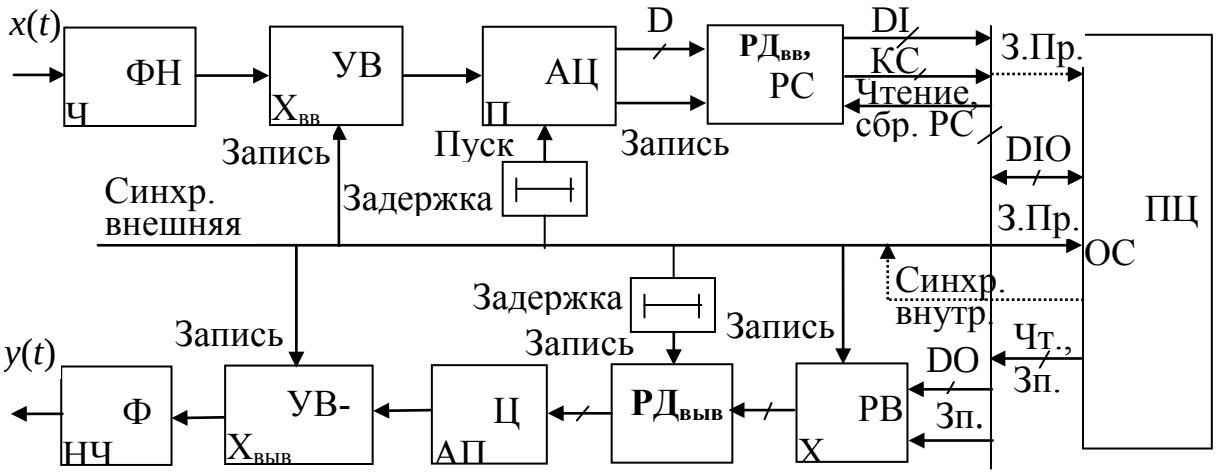


Рис. 15.4. Пример структурной схемы синхронизированной системы ЦОС

Система включает процессор ЦОС, элементы аналого-цифрового интерфейса и синхронизации. Внешний сигнал синхронизации или внутренний, сформированный процессором ЦОС (программно или с помощью таймера), переводит входное и выходное устройства выборки-хранения $УВХ_{вв}$, $УВХ_{выв}$ из режима слежения в режим хранения сигнала и с некоторой задержкой запускает АЦП и переписывает выходные данные из регистра временного хранения РВХ в регистр данных $РД_{выв}$ ЦАП. Процессор ЦОС сигналом синхронизации (при аппаратно-программной реализации – по прерыванию этим сигналом) считывает регистр данных $РД_{вв}$ АЦП, обрабатывает данные, записывает их в РВХ и ждет нового сигнала синхронизации или формирует его (при внутренней синхронизации). Совмещенный с регистром данных $РД_{вв}$ регистр состояния канала ввода РС сбрасывается после ввода данных и устанавливается после завершения преобразования АЦП его выходным сигналом готовности. При синхронизации по прерыванию или опросу готовности РС ввод данных начинается с момента его установки.

Форматы чисел, используемые в процессорах с фиксированной точкой

В процессорах с фиксированной точкой используются *дробный, смешанный и целочисленный* форматы двоичных чисел, обобщенно представляемые как $q_з.q_ц.q_{др}$, где $q_з$ – число знаковых двоичных разрядов, $q_ц$ – число двоичных разрядов целой части, $q_{др}$ – число двоичных разрядов дробной части. Последнее определяет вес единицы младшего разряда (EMP), равный $2^{-q_{др}}$, и точность представления чисел. Например, формату 1.1.14 соответствует 1 разряд знака, 1 разряд целой части и 14 разрядов дробной части; $EMP = 2^{-14}$; формату 1.15.0 соответствует 1 разряд знака и 15 разрядов целой части; $EMP = 2^0 = 1$. Форматы отличаются только значениями весов разрядов, т.е. способом интерпретации кодов.

Процессорам, оперирующим с числами в *дробном формате* (а это большинство сигнальных процессоров) непосредственно соответствует цифровое представление отсчетов сигнала правильной дробью ($q_{\text{ц}} = 0$), принятое в цифровой обработке сигналов.

Смешанный формат имеют коэффициенты, превышающие по модулю 1, на которые умножаются отсчеты сигналов. Их либо преобразуют к формату правильной дроби, либо корректируют результаты (преобразуют формат) вычислительных операций с ними. Так, в результате умножения отсчета сигнала в формате $1.0.q_{\text{дрс}}$, на коэффициент в формате $1.q_{\text{цк}}.q_{\text{дрк}}$ получаемое произведение имеет формат $2.q_{\text{цк}}.(q_{\text{дрк}} + q_{\text{дрс}})$. Путем ограничения разрядности и коррекции оно должно быть приведено к формату, принятому для отсчетов сигнала, т.е. $1.0.q_{\text{дрс}}$. При этом полагается, что при правильном масштабировании сигналов произведения не превышают по модулю (меньше) 1. В этом случае нужно осуществить сдвиг произведения влево на число разрядов ($q_{\text{цк}} + 1$) с сохранением знакового разряда (который при указанном условии масштабирования совпадает с разрядом целой части произведения) и ограничить число разрядов до ($q_{\text{дрс}} + 1$). Например, при $q_{\text{дрс}} = 15$ бит, $q_{\text{цк}} = 2$ бита, $q_{\text{дрк}} = 13$ бит произведения имеют формат 2.2.28. Путем сдвига влево на 3 разряда и усечения они приводятся к формату 1.0.15.

Возможен также вариант с преобразованием формата накопленных сумм произведений, т.е. выходных кодов сумматоров.

Число двоичных разрядов целой части определяется коэффициентом, имеющим максимальное по модулю значение $|K|_{\max}$: $q_{\text{цк}} = \text{int}\log 2|K|_{\max}$. Если коэффициент не содержит дробной части и равен, например, $|K|_{\max} = 2$, то с целью уменьшения числа разрядов целой части его можно приближенно представить значением 1,9999... с $q_{\text{ц}} = 1$.

Если ассемблерные инструкции процессора поддерживают только *целочисленную арифметику* (например, для процессоров i80x86, ПК IBM PC, ЦСП TMS320xx), то исходные значения коэффициентов должны быть преобразованы к целочисленному двоичному формату путем их умножения на $2^{q_{\text{др}}}$ и взятия целой части, т.е. $K_{\text{ц}} = [K_{\text{др}} \cdot 2^{q_{\text{др}}}]_{\text{ц.ч.}}$. *Например*, коэффициент $a_1 = -1{,}576$, представляемый в смешанном формате 1.1.14, приводится к целочисленному формату путем умножения его на $2^{q_{\text{др}}} = 2^{14} =$ $= 16384$, т.е. $a_{1\text{ц}} = [-1{,}576 \cdot 16384]_{\text{ц.ч}} = -25821$. Для обратного перевода целого числа к дробному или смешанному формату его нужно поделить на $2^{q_{\text{др}}}$ или умножить на $2^{-q_{\text{др}}}$.

15.2. Программирование цифровых фильтров на основе микропроцессорных средств

Реализация систем ЦОС на основе микропроцессорных средств общего назначения включает разработку их программного обеспечения, которая выполняется на языке ассемблера, обеспечивающем наибольшую скорость обработки системы. Программированию микропроцессорных систем ЦОС предшествует разработка реализационного алгоритма обработки, который учитывает особенности архитектуры и системы команд микропроцессора и представляется в виде граф-схемы или программы на гипотетическом языке высокого уровня. Вопросы микропроцессорной реализации ЦОС рассматривается ниже на примере программирования рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров.

Программирование рекурсивных фильтров

Программирование РФ предусматривает выбор его структуры (каскадной или параллельной), описание реализуемого математического алгоритма обработки, переход к программным переменным и распределение памяти коэффициентов и сигнальной памяти процессора.

В памяти процессора размещаются коэффициенты разностных уравнений звеньев второго порядка m_J, b_{1J}, b_{2J}, a_{1J}, a_{2J} (программные переменные M(J), B1(J), B2(J), A1(J), A2(J)) и отсчеты внутренних сигналов, соответствующих, например, канонической форме реализации звеньев $w_J(n-1)$, $w_J(n-2)$ (программные переменные W1(J), W2(J)), где J = 1, 2, …, L – номера последовательно или параллельно включенных звеньев, L – число звеньев. Они образуют массивы данных K и W (рис. 15.5).

Базово-индексные адреса операндов символически обозначены на рис. 15.5, соответственно, как ADRK + U и ADRW + I. Общее число коэффициентов РЦФ составляет 5L (с учетом масштабных множителей m_J).

Каждый коэффициент в массиве K имеет свой фиксированный индекс U = 1, 2, …, 5L. Размещенным в сигнальной памяти 2L отсчетам сигнала соответствуют фиксированные номера-индексы I = 1, 2, …, 2L. При инициализации системы сигнальная память (массив W) обнуляется.

Массив K	АДРЕС
m_1	ADRK + 1
$-a_{21}$	ADRK + 2
$-a_{11}$	ADRK + 3
b_{21}	ADRK + 4
b_{12}	ADRK + 5
.	.
m_J	ADRK + U
$-a_{2J}$	.
$-a_{1J}$	.
b_{2J}	.
b_{1J}	.
.	.
m_L	.
$-a_{2L}$	.
$-a_{1L}$	.
b_{2L}	.
b_{1L}	ADRK + (5L)

а

Массив W	АДРЕС
$w_1(n-2)$	ADRW + 1
$w_1(n-1)$	ADRW + 2
$w_2(n-2)$	ADRW + 3
$w_2(n-1)$	ADRW + 4
.	.
.	ADRW + I
$w_J(n-2)$	.
$w_J(n-1)$	.
.	.
.	.
.	.
$w_L(n-2)$	
$w_L(n-1)$	ADRW + (2L)

б

Рис. 15.5. Распределение памяти коэффициентов и сигнальной памяти рф

Обработка сигнала одинакова для всех звеньев РФ и осуществляется во внутреннем операционном цикле по числу звеньев L. Реализационному алгоритму обработки и инициализации РФ отвечает следующее описание их на условном (гипотетическом) языке высокого уровня:

```
                DO  1  J =1, L
                {очистка сигнальной памяти}
1       W1(J) = 0; W2(J) = 0
                {для прямой формы реализации звеньев
        X1(J) =0; X2(J) = 0; Y1(J) = 0; Y2(J) =0}
3       WAIT IRQ
        INPUT X
        DO  2  J =1, L
2       {базовая операция}
        W=M(J)·X – A1(J)·W1(J) – A2(J)·W2(J)
        Y=B0(J)·W + B1(J)·W1(J) + B2(J)·W2(J)
        W2(J) = W1(J); W1(J) = W; X = Y
                OUTPUT Y
        GOTO 3
```

В фигурные скобки здесь заключены комментарии к программе.

Реальное время обработки на одно звено РФ может составлять единицы – десятки микросекунд в зависимости от тактовой частоты микропроцессора.

Программирование нерекурсивных фильтров

Для НФ, осуществляющих обработку в соответствии с математическим алгоритмом ДВС: $y(n)=\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$, возможны два способа реализации – без сдвига сигнальной памяти и со сдвигом сигнальной памяти.

В способе *без сдвига сигнальной памяти* операндами базовой операции Y = Y + H(U)X(I) являются значения импульсной характеристики $h(m)$ (программная переменная H(U)) и отсчеты сигнала $x(n – m)$ (программная переменная X(I)), которые в памяти системы образуют массив коэффициентов H и структуру типа очередь постоянной длины (программный кольцевой буфер) X (рис. 15.6).

Базово-индексные адреса элементов массивов символически обозначены как ADRH + U, U = 0, 1, …, $N – 1$ и ADRX + I, I = 0, 1, …, $N – 1$. Так как значения длины импульсной характеристики N НФ обычно велики, то базовая операция выполняется в цикле по индексной переменной U. При этом текущий номер (индекс) элемента очереди I связан со значением U и началом очереди I0 соотношением $I = [U + I0]_{mod\ N}$, вычисляемым по модулю N. Начало очереди I = I0 (при U = 0) определяет положение текущего отсчета сигнала в очереди: X(I0) = $x(n)$. Исходное значение I0 выбирается произвольным в пределах (0, N –1), например, I0 = 0. После завершения обработки очередного отсчета сигнала (N-кратного выполнения базовой операции) значение I0 уменьшается на единицу (также по модулю N), т.е. $I0 = [I0 – 1]_{mod\ N}$. При декрементном режиме изменения U: U = N – 1, N – 2, …, 0, значение начала очереди инкрементируется, т.е. увеличивается на 1: $I0 = [I0 + 1]_{mod\ N}$.

Массив H АДРЕС

$h(0)$	ADRH + 0
$h(1)$	ADRH + 1
$h(2)$	ADRH + 2
.	.
.	.
.	ADRH + U
.	.
.	.
$h(N – 3)$	ADRH + (N – 3)
$h(N – 2)$	ADRH + (N – 2)
$h(N – 1)$	ADRH + (N – 1)

а

Очередь X АДРЕС

.	ADRX + 0
.	ADRX + 1
.	ADRX + 2
$x(n – N + 2)$	.
$x(n – N + 1)$	ADRX + I
$x(n)$	ADRX + I0
$x(n – 1)$	.
$x(n – 2)$	.
.	
.	ADRX +(N – 2)
.	ADRX +(N – 1)

б

Рис 15.6. Размещение операндов в памяти нерекурсивного фильтра

Это приводит к замещению последнего элемента очереди $x(n - N + 1)$ новым отсчетом $x(n)$ и изменению адреса и положения каждого отсчета сигнала $x(n - m)$ в сигнальной памяти без ее физического сдвига, исключающего достаточно медленные операции пересылки типа память–память. В то же время для адресации операндов в данном алгоритме необходимы два индексных регистра.

Реализационному алгоритму обработки НФ и его инициализации отвечает следующее их алгоритмическое описание на условном (гипотетическом) языке высокого уровня:

```
                DO  1  I =0, N – 1
        {очистка сигнальной памяти}
1       X(I) = 0
3        WAIT READY
       Y = 0; INPUT X;  X(I) = X
             DO  2  U = 0, N – 1
       Y = Y + H(U)·X(I)   {базовая операция}
       IF U < N – 1 THEN I = I + 1
2       IF I = N  THEN I = 0
        OUTPUT Y
                GOTO 3
```

Алгоритм реализации НФ без сдвига сигнальной памяти эффективно поддерживается в ЦСП семейства ADSP-21xx с помощью режима модульной (циклической) адресации аппаратно создаваемых в памяти кольцевых буферов [17]. Такие же возможности имеют и другие семейства ЦСП.

В варианте *реализации* НФ *со сдвигом сигнальной памяти* в каждом цикле базовой операции адреса и положение отсчетов сигнала $x(n)$, $x(n - 1)$, …, $x(n - N + 1)$ в сигнальной памяти является неизменными. Реализационный алгоритм обработки для него, включая и очистку сигнальной памяти, описывается на условном (гипотетическом) языке высокого уровня следующим образом:

```
                DO  1  U = 0, N – 1
1       X(U) = 0 {очистка сигнальной памяти}
3       WAIT IRQ
       INPUT X; X(0) = X; Y = H(0)·X(0)
       DO  2  U = N – 1, 1
       Y = Y + H(U)·X(U)  {базовая операция}
 X(U) = X(U – 1)
                OUTPUT Y
                GOTO 3
```

Возможность совмещения базовой операции со сдвигом сигнальной памяти в одном командном цикле предусмотрена в ЦСП семейства TMS320Cxx, эффективно реализующих НФ данным способом [16].

Реальное быстродействие НФ на основе МП общего применения получается очень низким [2]. Оно может быть повышено использованием

средств аппаратной поддержки, однако более обоснованным является применение для целей обработки сигналов специально ориентированных на это цифровых сигнальных процессоров.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные задачи, способы и средства реализации ЦОС?
2. Какие принципы используются при реализации ЦОС?
3. В чем заключается принцип конвейерной реализации ЦОС?
4. В чем заключается принцип распараллеливания при реализации ЦОС?
5. В чем заключается принцип временного разделения при реализации ЦОС?
6. Что понимается под реализационным алгоритмом обработки?
7. Какова общая структура процессора ЦОС?
8. Какую базовую операцию реализуют процессоры ЦОС?
9. В чем заключается реализация ЦОС на основе ПЛИС?
10. Как реализуются НЦФ на основе жесткой логики и ПЛИС?
11. Как реализуются РЦФ на основе жесткой логики и ПЛИС?
12. Каковы основные компоненты и структура МПС ЦОС?
13. Как обеспечивается синхронизация обработки сигналов в режиме реального времени в МПС ЦОС?
14. Как обеспечивается аппаратная синхронизация МПС ЦОС?
15. При каких условиях может быть использована программная синхронизация МПС ЦОС?
16. В чем заключается алгоритм аппаратно-программной реализации НЦФ без сдвига сигнальной памяти?
17. В чем заключается алгоритм аппаратно-программной реализации НЦФ со сдвигом сигнальной памяти?
18. Как осуществляется программирование РЦФ на основе микропроцессорных средств?
19. Каковы основные способы повышения быстродействия МПС ЦОС?
20. Какие средства аппаратной поддержки используются в МПС ЦОС?
21. Какие форматы чисел используются при аппаратно-программной реализации ЦОС и как они преобразуются в процессе обработки?
22. Как осуществляется переход к целочисленному формату при программировании процессоров, оперирующих с целыми числами?

Л е к ц и я 16
Цифровые сигнальные процессоры

Цифровые сигнальные процессоры (ЦСП) – это класс микропроцессорных средств, аппаратно и программно ориентированных (оптимизированных) на задачи ЦОС [16]. ЦСП являются также мощными ускорителями для персональных компьютеров (мультимедийные приложения, трёхмерная графика и др.).

Задачей курса является изучение общих особенностей и возможностей ЦСП и их применения на примере конкретного ЦСП, в данном случае семейства ADSP-218x.

16.1. Общая характеристика цифровых сигнальных процессоров

Цифровые сигнальные процессоры, как и другие микропроцессоры, имеют свою классификацию, в соответствии с которой выделяют несколько групп ЦСП:

♦ универсальные и специализированные (аудио, видео, фурье–процессоры и др.);

♦ без встроенных и со встроенными средствами аналого-цифрового интерфейса (гибридные ЦСП);

♦ с фиксированной точкой (Fixed Point), плавающей точкой (Floating Point) или поддерживающие оба типа арифметики;

♦ разрядностью данных 16, 24, 32, 40, 64 бита и др. или оперирующие с данными различной длины;

♦ низкой, средней и высокой производительности с достаточно условными ее оценками и границами, например, ниже 25 млн операций в секунду, десятки млн операций в секунду и сотни – тысячи млн операций в секунду.

К *отличительным признакам* ЦСП относят гарвардскую архитектуру; конвейерное выполнение команд; аппаратную реализацию всех вычислительных операций; короткий командный цикл, одинаковый для всех или большинства команд; независимость времени обработки от обрабатываемых данных; высокий уровень аппаратного и программного распараллеливания; развитые средства поддержки реального времени; многообразие каналов и средств ввода-вывода; наличие специальных команд и режимов адресации.

Гарвардской архитектуре ЦСП соответствует раздельная память команд (программ) и данных и, соответственно, раздельные шины команд и данных (шины адреса памяти программ ШАПП и памяти данных ШАПД, шины данных памяти программ ШДПП и памяти данных ШДПД, рис. 16.1), что допускает их одновременную выборку. Реально в ЦСП используется модифицированная гарвардская архитектура, допускающая частичное размещение данных (констант) в памяти команд. В фон-Неймановской архитектуре па-

мять является общей для программ и данных, доступ к ней осуществляется по общей шине команд и данных.

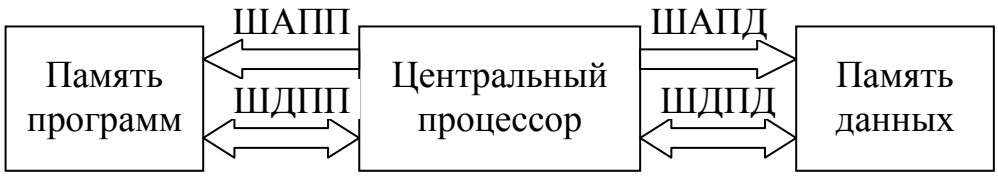


Рис. 16.1. Структура процессора на основе гарвардской архитектуры

Конвейерное выполнение команд заключается в одновременном выполнении двух и более команд на разных этапах: выборка команды, декодирование, выборка одного или одновременно двух операндов, исполнение.

С помощью специальных инструкций и режимов адресации обеспечивается эффективная реализация базовых алгоритмов ЦОС (цифровой фильтрации, корреляции, ДПФ, БПФ).

Например, в ЦСП семейства TMS320 циклически повторяющаяся базовая операция КИФ-фильтра реализуется с помощью двух команд:

```
RPTK255   ; повторить 256 раз
MACD      ; выполнить умножение, накопление (Y=Y+K*X),
; сдвиг сигнальной памяти, модификация адресов операндов.
```

Общая структура ЦСП

Структура сигнального процессора (рис. 16.2), соответствующая модифицированной гарвардской архитектуре, отражает базовый состав его функциональных устройств, их связи и взаимодействие. Устройство управления программой осуществляет генерацию адреса памяти программ (команд), выборку команд, их дешифрацию, управляет вводом-выводом, прерываниями, пдп, периферийными модулями, размещенными на кристалле (таймеры, средства аналогового ввода-вывода и др.), вычислительными устройствами (алу, сдвигатель, умножитель-накопитель), выполняющими обработку данных и дополнительными функциональными модулями – сопроцессорами (цифровые фильтры, декодеры и др.). Устройство генерации адреса обеспечивает адресацию памяти данных. Межмодульные связи осуществляются по шинам адреса и данных памяти программ и памяти данных и шине управляющих сигналов (шу).

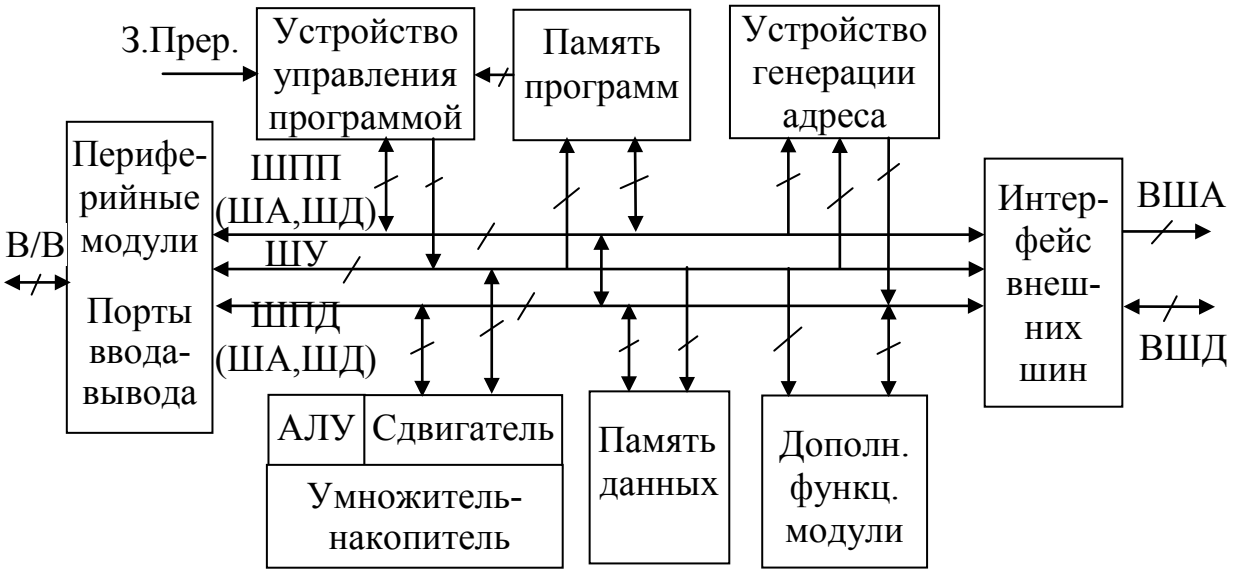


Рис. 16.2. Общая структура ЦСП

Структуры конкретных семейств цсп, отражая признаки базовой структуры, имеют свойственные каждому семейству архитектурные особенности.

Обзор цсп

Базовые принципы цсп предложены в начале 80-х г. И реализованы в одном из первых сигнальных процессоров tms320c10 фирмы texas instruments с производительностью 5 млн операций в секунду. Современное состояние цсп характеризуется огромным разнообразием их типов и производительностью от единиц миллионов до нескольких миллиардов инструкций в секунду. Ведущими фирмами-производителями цсп являются: texas instruments, motorola, analog devices, lucent technologies и др. Наиболее популярные семейства цсп этих фирм [16]:

♦ tms320cxx, tms320c5xx, tms320c5xxx, tms320c6xxx (фирма texas instruments);

♦ adsp-21xx, adsp- 21xxx (фирма analog devices);

♦ dsp560xx, dsp563xx, dsp566xx, dsp568xx, dsp96xxx (фирма motorola);

♦ dsp16xx, dsp16xxx (фирма lucent technologies).

Они включают цсп как с фиксированной точкой, так и не уступающие им по быстродействию цсп с плавающей точкой, появившиеся в конце 80-х гг. Такие цсп имеют широкий динамический диапазон сигналов и данных, что обеспечивает высокое соотношение сигнал–шум и снимает проблему масштабирования сигналов при цифровой обработке. В процессоре tms320c50 впервые использована кольцевая (модульная) адресация памяти, позволяющая одновременно создавать 2 кольцевых буфера и эффективно вычислять свёртки и корреляции.

Улучшение стандартной архитектуры за счет размещения на кристалле двух и более вычислительных ядер и специализированных сопроцессоров

позволило увеличить количество одновременно выполняемых операций под управлением одной команды. Такой способ реализован в процессорах adsp-211xx sharc (super harvard architecture computer) производительностью 600 mflops, dsp16xxx (800 mips), 320vc5510 (400 mips) и других.

В цсп на основе vliw-архитектуры – очень длинное слово команды – с помощью независимо работающих операционных модулей обеспечено одновременное выполнение образующих такую команду простых коротких команд, каждая из которых определяет одну операцию (принцип работы risc-процессоров). Примерами цсп с такой архитектурой являются tms320c62xx, tms320c64xx, tms320c67xx, каждый из которых содержит 8 операционных модулей, разбитых на две группы и два регистровых файла объемом 32×32 бит. Производительность их составляет 4800 mips для цсп tms320c6416, 2000 mips для tms320c6202 и 1000 mflops для tms320c6416. Процессор msc810x фирмы motorola производительностью 1200 mips содержит на кристалле 4 алу и фильтр-сопроцессор.

Высокую производительность имеют также цсп с параллельной суперскалярной vliw-архитектурой [16]. К ним относятся tigersharc процессоры adsp-ts001 (300 mflops) и adsp-ts201s (1200 ммасs для 32-битных данных и 4800 ммасs для 16-битных данных).

К новому поколению относятся цсп с фиксированной точкой семейства adsp-219x с улучшенной архитектурой и повышенной производительностью (150–300 mips) и высокопроизводительные малопотребляющие (до 0,5 мвт/mips) процессоры blackfin: adsp-bf535p (350мгц, 700 mips), adsp-bf531(2) (400мгц, 800 mips), adsp-bf533 (600мгц, 1200 mips). Это гибридные процессоры (цсп плюс контроллер) с переменной длиной слова (8, 16, 32 бита), оптимизированные на видео, интернет, коммуникационные приложения.

Реализационные возможности цсп

Эффективность цсп и их реализационные возможности характеризуются также оценками времени выполнения ими базовых и специальных тестовых алгоритмов цос (табл. 16.1) [16]. Эти оценки наряду с другими показателями учитываются при обосновании выбора типа цсп для реализуемой системы цос. К базовым тестовым алгоритмам цос относят алгоритмы бпф по основанию 2 и цифровые фильтры бих и их-типа. Оценкой быстродействия для их-фильтров является время выполнения одной базовой операции, называемое также *временем обработки на один отвод*. Полное время обработки получается умножением его на значение длины импульсной характеристики фильтра n.

Таблица 16.1

Цсп, тип Арифметики	Тактовая частота, Мгц	Время цикла, Нс	Комплексный Ких-ф., Нс/отвод	Вещественный Ких-ф., Нс/отвод	Комплексное 256-точ. Бпф, мкс
Dsp56311 (фт)	150	6,7	19	6,3	58
Tms320c6701(пт)	167	6	11,5	2,5	21
Adsp-21065 (пт)	50	20	40,5	13,5	–
Adsp-21160 (пт)	100	10	15,5	5,7	–
Tms320c6203(фт)	300	3,3	–	1	0,9
Msc8101 (фт)	300	3,3	–	0,5	6
Tms320c64xx (фт)	600	1,67	–	0,3	–
Adsp-ts201s (ф/пт)	600	1,67		0,83	1,5

О времени реализации бих-фильтров можно судить по его значениям для цсп adsp-21020 (пт) и blackfin, составляющим, соответственно, 200 нс и 2,5·bq + 3,5 нс на одно биквадратное звено (bq).

Средства разработки

Существуют многочисленные средства разработки и автоматизации проектирования для цсп. Они разделяются на программные и аппаратные.

Программные средства – это ассемблер, с-компилятор, компоновщик, библиотекарь, симулятор, отладчик, и др.; *аппаратные* – демонстрационные и оценочные модули (платы); внутрисхемный эмулятор; полномасштабный эмулятор.

Программные и аппаратные средства разработки совмещаются в интегрированных наборах, образующих интегрированную среду разработчика.

К возможным способам и средствам *автоматической генерации программ* для цсп относятся: использование *библиотек*, *компиляторов* языков высокого уровня (с) или проблемно-ориентированных языков, *кодогенераторов* – специальных программ, генерирующих код цсп по описанию реализуемого алгоритма (в том числе *matlab*, *labview*).

Состав и архитектура процессоров семейства ADSP-218x

ADSP-218x – это третье поколение 16-разрядных программно совместимых ЦСП с фиксированной точкой фирмы Analog Devices. Они имеют общую архитектурой и отличаются в основном техническими характеристиками (табл. 16.2). Совместимыми с ними по коду являются и высокопроизводительные ЦСП нового поколения ADSP-219x.

Таблица 16.2

Цсп	Тактовая частота, мгц*	Озу Программ, кслов	Озу Данных, кслов	Энергопо-требление, ма/mips	Пита-ние, в
Adsp-2181	40, 33, 28	16	16	1,8	5
Adsp-2183	52, 40, 33, 28	16	16	0,8	3,3
Adsp-2184 l	40	4	4	1,2	3,3
Adsp-2185m	75	16	16	0,4	2,5
Adsp-2186l	40, 33, 28	8	8	1,1	3,3
Adsp-2187l	52, 40	32	32	0,8	3,3
Adsp-2188m	75	48	56	0,4	2,5
Adsp-2189m	32	48	75	0,4	2,5

∗Тактовой частотой характеризуется производительность процессоров данного семейства (MIPS), так как все их команды выполняются за один такт (цикл) процессора.

Архитектура процессоров ADSP-218x, отражающая состав, взаимосвязи и взаимодействие их функциональных устройств или модулей, включает:

♦ Три независимых вычислительных устройства – арифметико-логическое (ALU), умножитель/аккумулятор (MAC) и устройство циклического сдвига (SHIFTER).

♦ Два устройства генерации адресов данных DAG1, DAG2 (Data Address Generator).

♦ Программный автомат или генератор адресов инструкций**,** управляющий выполнением программы.

♦ Память программ (PM) типа ОЗУ или ПЗУ, где могут храниться также и данные, и память данных (DM) типа ОЗУ.

♦ Внутренние 14-разрядные шины адреса памяти данных DMA (Data Memory Address) и адреса памяти программ PMA (Program Memory Address), 16-разрядная шина данных памяти данных DMD (Data Memory Data) и 24-разрядная шина данных памяти программ PMD (Program Memory Data), мультиплексируемые в две внешние шины – шину адреса и шину данных; общая шина результатов вычислительных устройств (R).

♦ Устройство обмена данными между 24-разрядной шиной PMD и 16-разрядной шиной DMD (8-битный регистр обмена PX).

Знание функциональных устройств и в первую очередь вычислительных и управления данными на уровне их программных регистровых моделей необходимо для программирования ЦСП на языке ассемблера.

16.2. Функциональные устройства и интерфейс сигнальных процессоров ADSP-218x

Вычислительные устройства процессоров семейства ADSP-218x оперируют со следующими типами данных:

♦ Строки битов.

♦ Целые числа в форматах 0.16.0 (без знака) и (1.15.0) (со знаком).

♦ Дробные числа в формате 1.0.15.

Все вычислительные устройства содержат внутренние *входные регистры и регистры результата*, через которые они получают или передают данные на шины данных процессора DMD, PMD. Кроме основного набора вычислительные устройства имеют также второй (*теневой*) ряд программно доступных регистров. Он используется для быстрого контекстного переключения (например, во время подпрограммы обслуживания прерывания). Считывание с регистров производится в начале цикла, а запись в регистры – в конце цикла. Это позволяет регистрам ввода обеспечивать вычислительные устройства операндом в начале цикла и обновляться следующим операндом из памяти в конце того же цикла. Аналогично, в течение одного и того же цикла возможно сохранение регистра результатов в памяти и обновление этого регистра новым значением результата.

Входными данными любого из вычислительных устройств являются также выходные результаты данного вычислительного устройства и других вычислительных устройств, передаваемые по общей шине результата R.

Каждое вычислительное устройство реализует набор стандартных функций, которые поддерживаются соответствующей группой команд ЦСП.

Режимы работы вычислительных устройств задаются либо через регистр состояния режима устройства управления программой, либо непосредственно указываются в кодах (модификаторах) команд.

Арифметико-логическое устройство

Арифметико-логическое устройство (АЛУ) выполняет арифметические и логические операции с 16-битовыми операндами X, Y и возвращает 16-битовый результат R. Источниками операнда X являются входные регистры AX0, AX1 и регистры результатов АЛУ (AR), умножителя-накопителя (MR0, MR1, MR2) и устройства сдвига (SR0, SR1). Источниками операнда Y являются входные регистры AY0, AY1 и регистр обратной связи АЛУ AF.

АЛУ принимает также сигнал переноса CI из регистра состояния ASTAT устройства управления программой и генерирует 6 сигналов (признаков) состояния, фиксируемых в этом же регистре: нуля (AZ), отрицания (AN), переноса (AC), переполнения (AV), знака операнда X (AS) и частного (AQ). Программно доступные регистры AX0, AX1, AY0, AY1, AR, AF основного и теневого набора представляют АЛУ на общей программной регистровой модели процессора (рис. 16.3).

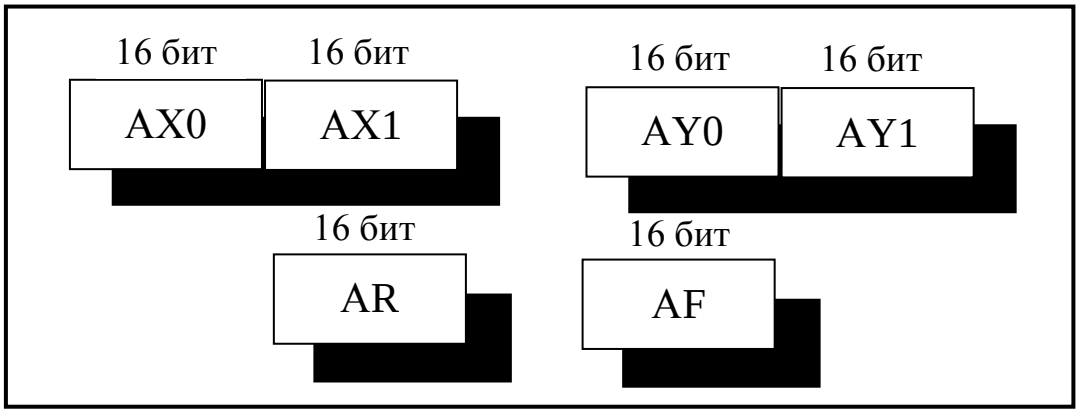


Рис. 16.3. Программная регистровая модель АЛУ

АЛУ реализует 19 *стандартных функций или операций* типа:

R = X + Y; R = X + Y + CI; R = X – Y;
R = X – Y + CI – 1; R = X OR Y и т.д.

Им соответствуют условные и безусловные ассемблерные инструкции ALU:

IF AV AR = AX0 + AY1; AR = AX1 + AY1 + C; AF = AX0 – AY0;
AR = AX1 – AY0 + C – 1; IF EQ AR = AX0 OR AY0.

Умножитель-накопитель

Умножитель-накопитель (MAC) оперирует с 16-битовыми операндами X, Y и возвращает 40-битовый результат R. Источниками операнда X являются входные регистры MX0, MX1 и регистры результатов умножителя-накопителя (MR0, MR1, MR2), АЛУ (AR) и устройства сдвига (SR0, SR1). Источниками операнда Y являются входные регистры MY0, MY1 и регистр обратной связи MF.

Регистр результата MR разрядностью 40 бит состоит из трех регистров меньшей разрядности: MR0 (биты 0–15) и MR1 (биты 16–31) разрядностью 16 бит и MR2 (биты 32–39) разрядностью 8 бит.

Повышенная разрядность сумматора/вычитателя предотвращает переполнения при выполнении серии операций умножения-накопления.

Программно доступные регистры MX0, MX1, MY0, MY1, MR (MR2, MR1, MR0) и MF основного и теневого ряда представляют умножитель-накопитель на общей программной регистровой модели ЦСП (рис. 16.4).

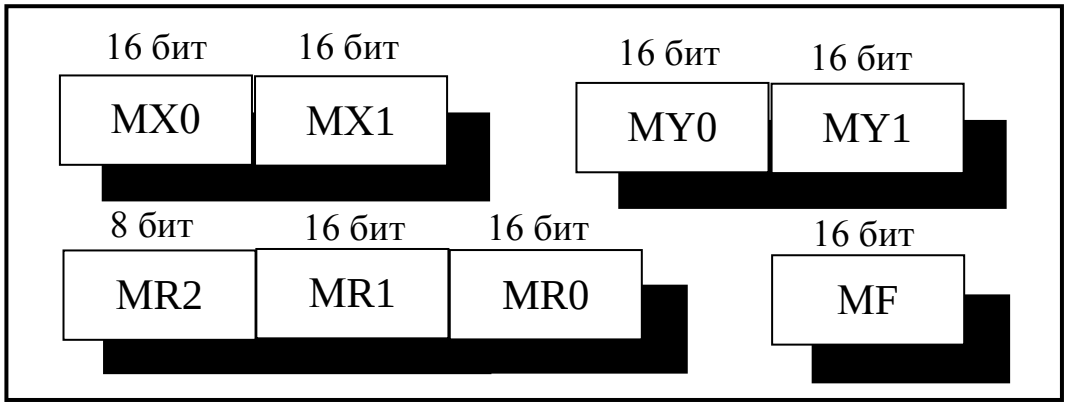


Рис. 16.4. Программная регистровая модель умножителя-накопителя

Умножитель-накопитель реализует 4 *стандартные функции*:

R = X*Y – умножение операндов X и Y;

R = MR + X*Y – умножение операндов X и Y и сложение результата с содержимым регистра MR;

R = MR – X*Y – умножение операндов X и Y и вычитание полученного результата из содержимого регистра MR;

MR = 0 – обнуление содержимого регистра MR.

Правильность результатов умножителя-накопителя при различных типах данных обеспечивается путем задания *режимов* его работы. Это режимы умножения дробных чисел и целых чисел и режимы, соответствующие форматам вводимых операндов X, Y: «знаковый – знаковый» (SS); «беззнаковый – знаковый» (US); «знаковый – беззнаковый» (SU); «беззнаковый – беззнаковый» (UU). Они используются как при вычислениях с одинарной точностью, так и для поддержки вычислений с повышенной (двойной) точностью.

Режимы умножения дробных и целых чисел задаются значениями бита регистра состояния режимов процессора MSTAT, который может изменяться также командой ENA M_MODE (умножение целых чисел) и DIS M_MODE (умножение дробных чисел).

Форматы операндов X, Y (SS, SU, US, UU) непосредственно указываются в соответствующем поле (модификаторе) кода команды умножителя-накопителя.

Если в процессе накопления результат выходит за пределы 32-разрядной (MR0/MR1) границы, умножитель-накопитель генерирует сигнал (признак) *переполнения* MV. Старшие восемь бит регистра MR при этом не являются все нулями или единицами. Предусмотрен *режим насыщения* регистра MR, когда при переполнении он устанавливается на максимальное положительное (MR = 007FFFFFFF) или максимальное отрицательное (MR = FF80000000) значение в зависимости от знака результата.

Операция насыщения выполняется под управлением условной команды IF MV SAT и действует только в течение одного цикла. Она используется,

как правило, по завершении последовательности умножений с накоплением так, чтобы промежуточные переполнения сумматора не приводили к насыщению регистра MR.

В накапливающем сумматоре-вычитателе предусмотрена возможность *округления* 40-разрядного результата R на границе между 16 и 15 битами. Округление задается как часть кода команды (RND). Округленный 16-разрядный результат направляется в регистр MR1 или в MF. Округленное значение MR1 отражается и на содержимом MR2: MR1 и MR2 содержат в этом случае округленный 24-разрядный результат.

Операции и режимы умножителя-накопителя поддерживаются группой команд MAC ЦСП. Примером их являются условная и безусловная ассемблерные инструкции умножения со сложением и умножения с вычитанием:

IF NE MR = MR + MX0∗MY0 (SS);
MR = MR – MX1∗MY1 (RND).

Устройство циклического сдвига

Устройство сдвига (SHIFTER) обеспечивает полный набор функций сдвига для 16-разрядных входных значений, преобразуемых в 32-разрядный результат. Устройство выполняет операции:

- ♦ арифметического (ASHIFT) и логического (LSHIFT) сдвига;
- ♦ нормализации (NORM);
- ♦ определения порядка (EXP);
- ♦ нахождения блочного порядка (EXPADJ),

где в скобках указана мнемоника соответствующих им команд ЦСП.

Нормализация представляет преобразование числа с фиксированной точкой в число с плавающей точкой, при котором генерируется его мантисса и порядок; денормализация чисел соответствует обратному преобразованию числа с плавающей точкой в число с фиксированной точкой.

Программная регистровая модель устройства сдвига приведена на рис. 16.5. Ввод данных в устройство производится с *регистра ввода* SI разрядностью 16 бит или с регистров AR, SR или MR по R-шине.

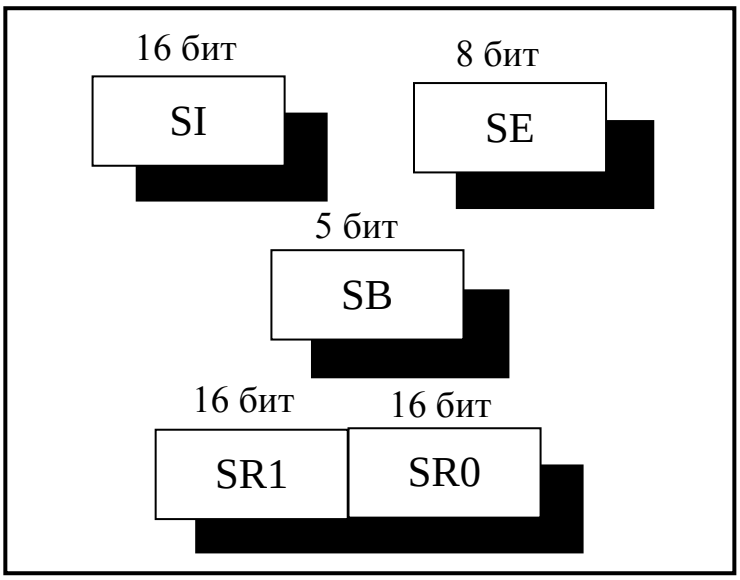


Рис. 16.5. Программная регистровая модель устройства сдвига

Регистр результата устройства сдвига SR имеет разрядность 32 бита и разделяется на два 16-разрядных регистра SR0 и SR1.

Регистр экспоненты (порядка) SE разрядностью 8 бит содержит значение порядка числа с плавающей точкой во время операций нормализации и денормализации. В него записывается также управляющий код, показывающий направление и число позиций, на которое сдвигается входное значение. Этот же код (C) может содержаться и непосредственно в коде команды.

Регистр SB, имеющий разрядность 5 бит, используется для операций с блочной плавающей точкой, во время которых в нем содержится определяемое или заданное значение блочного порядка, т.е. значение порядка самого большого числа в блоке чисел. Модификатором кодов команд HI/LO задается опорная точка сдвига. По сигналу HI сдвиги происходят относительно регистра SR1 (старших бит результата), по сигналу LO – относительно регистра SR0 (младших бит результата).

При циклическом сдвиге все биты справа от входного значения в области результата заполняются нулями, а биты слева – в соответствии с видом сдвига (арифметический, логический, см. приводимые ниже примеры).

Определение порядка (EXP) входного значения (числа лишних знаковых разрядов) производится с учетом его интерпретации, определяемой модификатором команды HI/LO и битом переполнения АЛУ AV.

В режиме HI входное значение интерпретируется как число с одинарной точностью или как старшие биты числа с двойной точностью. Ему соответствуют значения порядка от 0 до –15.

В режиме HI, AV (обозначаемом как HIX) при установленном бите AV выводится порядок +1.

В режиме LO входное значение интерпретируется как младшие биты числа с двойной точностью. Ему соответствуют значения порядка от –15 до

–31, которые записываются в регистр SE, если все старшие биты числа с двойной точностью знаковые.

Ниже приведен пример инструкции SHIFTER, выполняющей *непосредственный логический сдвиг* вправо относительно старших бит SR (SR1), т.е. в режиме HI:

```
SI = 0xB6A3; {Комментарий: запись в SI входного значения в 16-ричной системе, двоичное значение 10110110 10100011};
SR = LSHIFT SI BY –5 (HI); {Сдвиг вправо на –5 бит};
{Результат сдвига SR = 00000101 10110101 00011000 00000000}.
```

Устройства генерации адреса данных

Особенностью ЦСП является наличие раздельных устройств генерации адреса инструкций (управления программой) и устройств управления данными. Устройство генерации адреса данных в соответствии с его программной регистровой моделью рис. 16.6 содержит два независимых генератора адреса данных DAG1, DAG2, позволяющих одновременно работать с данными в памяти программ и памяти данных. DAG1 может генерировать только адреса памяти данных, а DAG2 – как памяти данных, так и памяти программ. DAG2 также может быть источником адреса следующей инструкции в командах условного и безусловного перехода и вызова подпрограмм.

Генератор имеет три регистровых файла: файл *индексных* регистров I, файл регистров *модификации* M и файл регистров *длины буфера* L. Каждый из регистровых файлов состоит из четырех регистров разрядностью 14 бит, считывание и запись данных которых осуществляется с младших 14 бит шины DMD.

Индексные регистры (I0–I3 в DAG1, I4–I7 в DAG2) содержат реальные адреса, по которым осуществляется доступ к памяти. Биты адреса на выходе DAG1 могут быть также переставлены в обратном порядке *(битреверсная адресация)*, если установлен соответствующий бит в регистре режима MSTAT или с помощью инструкции ENA BIT_REV. Этот режим ускоряет адресацию данных в алгоритмах БПФ.

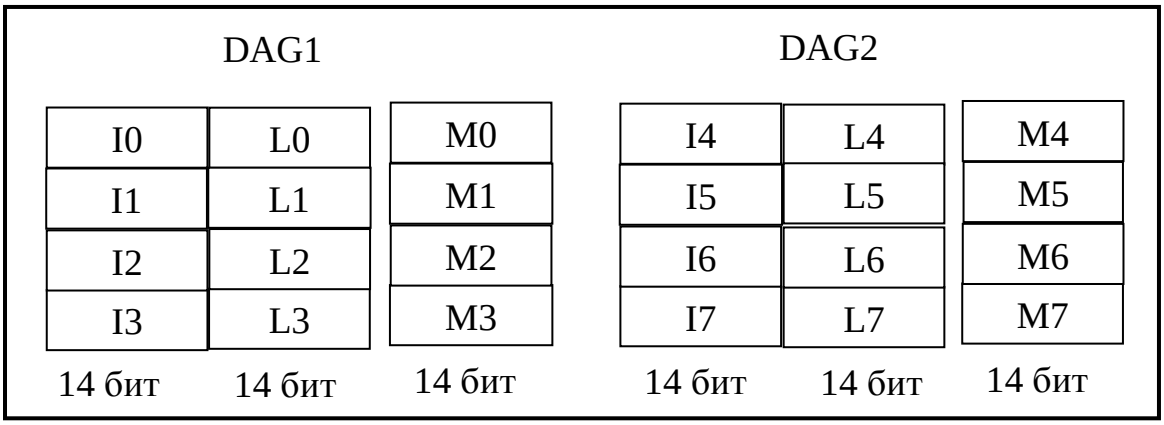


Рис. 16.6. Программная регистровая модель генераторов адреса данных

С помощью регистров модификации M (M0–M3 в DAG1, M4–M7 в DAG2) после каждого доступа к данным обеспечивается автоматическое обновление или *пост-модификация адреса данных* в соответствии со значением, записанном в заданном регистре M. Выбор регистров M и I произволен в пределах одного генератора DAG.

Содержимое регистров L определяет режим *линейной* или *циклической адресации* данных и длину *циклического буфера*, аппаратно создаваемого в памяти. Циклическую адресацию называют также *модульной*, а циклический буфер – *кольцевым*. Режим адресации линейного или циклического буферов для используемого индексного регистра I задается регистром длины буфера L, имеющим с регистром I одинаковый номер, т.е. I0–L0, I1–L1 и т.д.

Линейная адресация обеспечивается при записи в регистр L нулевого значения (L = 0). Следующий адрес данных при линейной адресации вычисляется как I = I + M.

При инициализации регистра L отличным от нуля значением автоматически *адресуется циклический буфер данных* длиной, определяемой записанным в регистр L значением.

Следующий адрес циклического (кольцевого) буфера вычисляется в соответствии с выражением: $I = (I + M - B)_{\text{по модулю L}} + B$, где B – известный базовый адрес; L – длина буфера, отвечающая условию L > |M|.

Например, при I0 = 4, M0 = 1, L0 = 3, B = 4 адрес циклического буфера принимает значения: 4, 5, 6, 4, 5, 6, … и т.д.

Следующий *пример* иллюстрирует задание и совместное использование косвенной линейной и циклической адресаций на языке ассемблера:

```
I3=0x3800;  M2=1;  L3=0; {запись начального адреса и кода модификации адреса линейного буфера, организуемого в памяти данных}
I7=0x0100;  M4=1;  L7=0x0080; {запись начального адреса, кода модификации адреса и длины L = 128 кольцевого буфера в памяти программ}
MX0=DM (I3, M2);  MX1=PM (I7, M4); MR=MX0*MX1; {выборка и перемножение X и Y операндов}.
```

Модульная адресация применяется обычно в циклах, организуемых с помощью инструкции DO UNTIL.

Для понимания программирования ЦСП полезно познакомиться также с описанием устройства управления программой, в том числе управления прерываниями, и описаниями других функциональных устройств ЦСП (таймеров, последовательных портов), которые приводятся в [2, 17].

Интерфейс сигнального процессора

Под интерфейсом сигнального процессора понимают различные программные и аппаратные средства взаимодействия его с элементами системы. Различают системный интерфейс, интерфейс ввода–вывода и памяти. На рис. 16.7 приведен пример общей конфигурации системы на базе процессора ADSP-2181, иллюстрирующий его интерфейсные средства и возможности.

К *системному интерфейсу* относятся линии и сигналы управления процессора: сброса (RESET), внешней и внутренней синхронизации (CLKIN, XTAL), вывода тактовой частоты (CLKOUT), запросов прерывания (IRQ0–2, IRQE, IRQL0, IRQL1), понижения потребляемой мощности (PWD, PWDACK) и др.

Сопряжение процессора с *внешними устройствами* осуществляется через последовательные порты и специальную область *памяти ввода–вывода*.

Интерфейс памяти задает ее конфигурацию и обеспечивает управление памятью. Процессор имеет доступ к 16К внутренней памяти программ, 16К внутренней памяти данных, к двум сегментам по 8К внешней оверлейной памяти программ разрядностью 24 бита и двум сегментам по 8К внешней оверлейной памяти данных разрядностью 16 бит.

На обращение к соответствующей области внешней памяти указывают сигналы PMS, DMS, BMS и IOMS (рис.16.7). Сигналом CMS выбирается внешняя составная память. Внешняя память связана с внешними шинами адреса ADDR13–0 и данных DATA23–0.

Отдельная область *памяти ввода–вывода* состоит из 2048 ячеек, разделенных на 4 фрагмента с программируемыми состояниями ожидания. Адресация этой области осуществляется линиями шины адреса A10–0, данные передаются по линиям шины данных D23–8 (16 бит). Через эту область памяти можно подключать к процессору различные параллельные внешние устройства, например, АЦП и ЦАП, или использовать как дополнительный канал связи с хост–машиной.

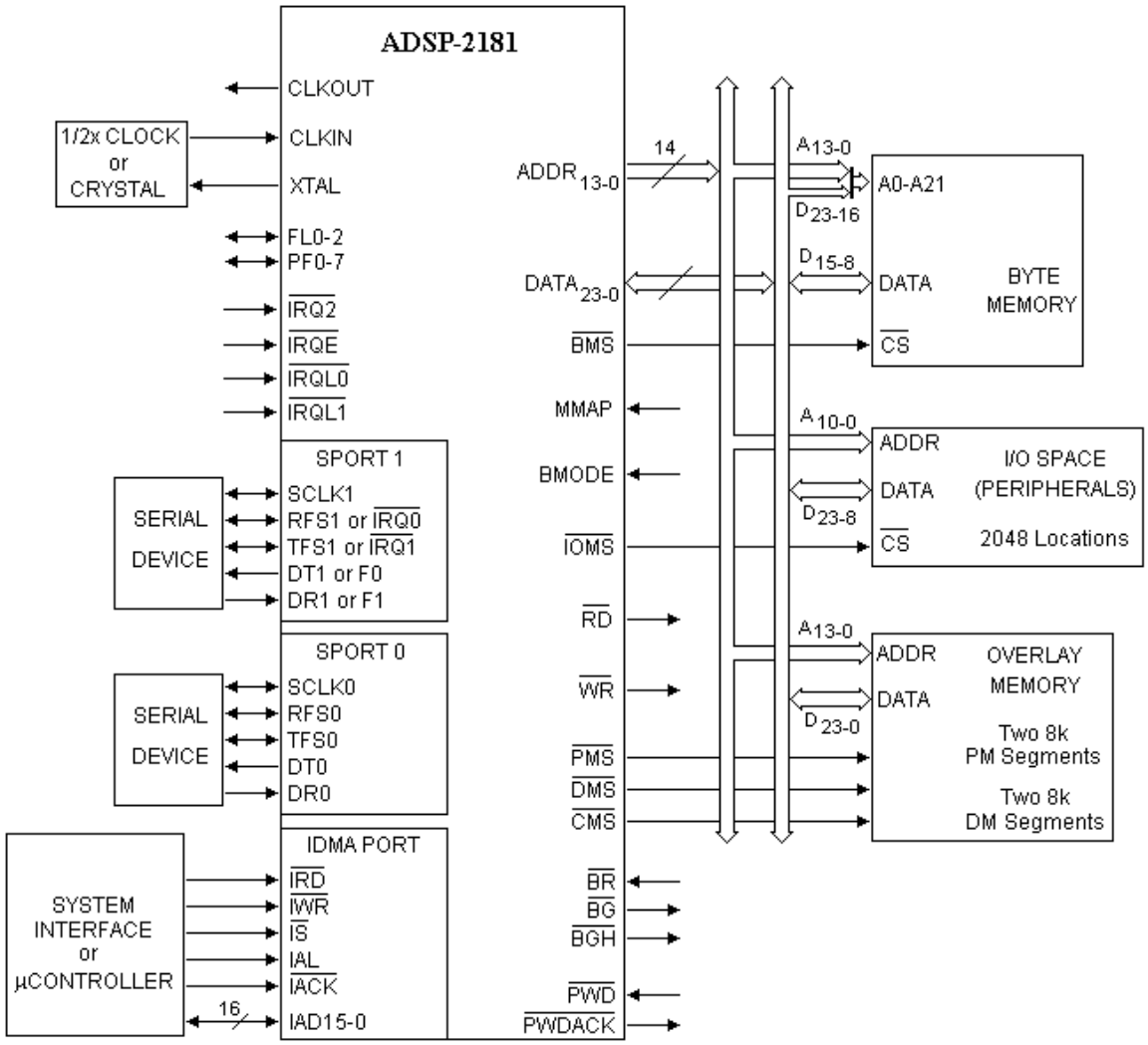


Рис. 16.7. Пример конфигурации системы
на базе процессора ADSP-2181

Область *байтовой памяти* позволяет хранить и адресовать до 4 Мбайт кода программы или данных. Она разбита на 256 страниц (выбираемых линиями шины данных D23–16), содержащих каждая по 16К 8-разрядных слов, адресуемых по линиям A13–0 шины адреса. Данные в байтовую память передаются по линиям шины данных D15–8.

Порт прямого доступа к байтовой памяти BDMA позволяет передавать коды программ и данные между внутренней памятью программ и данных и внешней памятью с байтовой организацией в фоновом режиме, т.е. одновременно с выполнением процессором команд программы с потерей («кражей») только одного цикла процессора за переданное слово.

Порт прямого доступа к внутренней памяти IDMA – это параллельный порт ввода/вывода, позволяющий хост-машине осуществлять запись–считывание внутренней памяти без участия процессора с непроизводительной потерей одного цикла процессора на каждое передаваемое слово.

Примеры сопряжения ЦСП с устройствами ввода–вывода данных через последовательные порты и область памяти ввода–вывода приведены в литературе [2, 17].

Контрольные вопросы

1. В чем заключается аппаратная и программная оптимизация ЦСП на задачи ЦОС?
2. Какие операции выполняют вычислительные устройства ЦСП?
3. Каково функциональное назначение АЛУ и его регистров?
4. Что такое режим насыщения АЛУ и как он реализуется?
4. Каковы функции умножителя-накопителя (MAC) и назначение его регистров?
5. Что такое режимы насыщения и округления MAC и как они реализуются?
6. Каково функциональное назначение устройства сдвига и его регистров, какие операции оно реализует?
7. Каково назначение теневого набора регистров вычислительных устройств?
8. Каково функциональное назначение генераторов адреса данных и их регистров?
9. Что такое косвенная линейная и модульная адресации данных и как они задаются?
10. Каковы основные виды интерфейсов сигнальных процессоров и их назначение?
11. Как используется область памяти ввода/вывода сигнальных процессоров?
12. Каковы функции портов BDMA и IDMA сигнальных процессоров?
13. Как осуществляется обработка прерываний в процессорах ADSP-218x?
14. Как осуществляется управление программными циклами в процессорах ADSP-218x?

Лекция 17
Программирование цифровых сигнальных процессоров

Программирование ЦСП осуществляется на языке ассемблера. Целью лекции является ознакомление с ассемблером ЦСП, элементами программирования и примерами разработки программ цифровых фильтров.

17.1. Система команд и структура программсигнального процессора

Ядром языка ассемблера является система команд (инструкций) сигнального процессора. Для процессоров семейства ADSP-21xx она представлена обобщенным компактным описанием, приводимом в литературе [2, 17].

Набор инструкций процессоров разделен на следующие группы:

♦ вычислительные (инструкции ALU, MAC и SHIFTER);
♦ пересылки данных;
♦ управления программой;
♦ многофункциональные;
♦ другие инструкции.

Система команд поддерживает прямой и косвенный (линейный или циклический) режимы адресации для доступа к памяти. *Прямая адресация* возможна только для памяти данных и использует непосредственное выражение в качестве адреса памяти: DM(<addr>). *Косвенная адресация* памяти данных и памяти программ использует индексные (I) регистры генераторов адресов данных DAG и регистры модификации M: DM(I3, M3), PM(I4, M7). Она обеспечивает эффективную адресацию массивов данных и соответствующих им буферов.

Примеры команд

Примеры *инструкций* ALU, MAC и SHIFTER был рассмотрены при описании вычислительных устройств.

В группе *команд* MAC в качестве второго операнда yop можно использовать операнд xop, т.е. типа xop*xop (возведение в квадрат и накопление сумм квадратов за один цикл).

Пример: MR=MX0*MX0; MR=MR+MX1*MX1;

Многофункциональные инструкции в наибольшей мере отражают возможности, обеспечиваемые архитектурой процессоров данного семейства. Отдельные части многофункциональной инструкции разделяются запятой, заканчивается многофункциональная инструкция, как и любая другая, точкой с запятой. Например, инструкция

MR=MR+MX0*MY0 (SS), MX0=DM (I0, M0), MY0=PM (I4, M5)

выполняет операцию умножения-накопления в начале командного цикла, а в конце его загружает два новых операнда из памяти данных DM и памяти программ PM, после чего происходит пост-модификация указателей I0, I4 значениями регистров M0, M5.

По *команде управления IDLE(n)* процессор входит в состояние неопределенного ожидания в режиме пониженной потребляемой мощности с понижением внутренней тактовой частоты процессора в n = 32, 64 или 128 раз, до получения сигнала прерывания. После обслуживания прерывания процессор переходит в нормальный режим работы, и программа выполняется дальше, начиная с команды, следующей за командой IDLE.

Наряду с условной инструкцией цикла DO UNTIL, возможен вариант безусловной инструкции DO <addr> (без UNTIL), задающей бесконечный цикл.

В группе *команд пересылки данных* имеются инструкции записи и считывания области памяти ввода/вывода:

IO(<addr>) = dreg; dreg = IO(<addr>);

где <addr> – 11-разрядный адрес ячейки памяти ввода/вывода.

Структура ассемблерной программы. Директивы языка ассемблера

Программы на языке ассемблера сигнальных процессоров семейства ADSP-218x представляют совокупность главного программного модуля и модулей подпрограмм**,** ассемблируемых ассемблером easm218x.exe и объединяемых редактором связей (компоновщиком) на уровне объектных файлов (файлов с расширением .doj) в стандартном формате ELF.

Исходный файл программы (с расширением .asm) наряду с символическими ассемблерными *инструкциями* и адресными метками содержит также *директивы ассемблера* (условные и безусловные) и *команды препроцессора*, управляющие процессами ассемблирования, компановки и загрузки. К исходному ассемблерному файлу могут подключены файлы данных с расширением .dat и файлы системных и пользовательских констант и указателей с расширением .h.

Имена директив ассемблера (.directive) пишутся в верхнем и нижнем регистрах (заглавными и прописными буквами) с точкой впереди, заканчивается описание директивы, как и инструкции, точкой с запятой.

Все программы на языке ассемблера включают директивы *объявления* (описания) *и инициализации переменных*, *секционирования памяти и межмодульных связей*.

Программной единицей данных в ассемблере является *переменная* типа одномерный массив, которая объявляется и инициализируется директивой .VAR. Массив с одним элементом соответствует простой переменной, массив с большим числом элементов называют *буфером данных*. Переменная (буфер

данных) задается своим именем и длиной (числом элементов). Буфер может быть линейным или циклическим в зависимости от используемого режима косвенной адресации данных. Примеры объявления и инициализации переменных:

.VAR abc = 0x1C37; // простая переменная abc, равная 1C37 в 16-ричной системе (префикс 0x).

.VAR Ins, Outs, Remains; //три неинициализированных простых переменных.

.VAR sinus[] = «inp_signal.dat»; //буфер, инициализируемый из файла.

.VAR buf_data1[N]=0; //буфер длиной N с нулевыми начальными значениями элементов.

.VAR /CIRC data_buffer [taps]; //неинициализированный циклический буфер длиною taps.

.VAR samples[] = 10, 11, 12, 13, 14; // буфер, инициализируемый десятичными числами.

Объявлению переменной предшествует описание *секции*, или сегмента, области памяти, где она размещается и с которой однозначно ассоциируется. Описание памяти осуществляется с помощью директивы ассемблера .SECTION в соответствии с файлом архитектуры системы, имеющем расширение .ldf. Например, исходя из решаемой задачи, можно выделить три сегмента в памяти программ системы – сегмент векторов прерываний seg_inttab, сегмент данных seg_pm_data, сегмент кода seg_code и два сегмента в памяти данных системы – seg_inp_data, seg_out_data. Соответствующее такому распределению описание памяти системы и переменных в ассемблерной программе может иметь вид

```
.SECTION/PM Ireset; //вектор прерывания сброса;
  jamp start; //начало выполнения программы по сбросу;
.SECTION/PM pm_data; // в этой секции размещаются коэффициенты;
.VAR coef [] = «coef .dat»; //буфер коэффициентов из файла;
.SECTION/CODE programa; //в этой секции размещается код программы;
.SECTION/DM inp_data; // в этой секции размещаются входные данные;
.VAR inp_sig[] = « inp1.dat»; //буфер входного сигнала;
.SECTION/DATA out_data; // в этой секции размещаются выходные данные;
.VAR out_sig[N] = 0; //обнуленный буфер выходного сигнала.
```

Имя переменной (буфера) используется в качестве указателя адреса переменной (буфера), а длина буфера возвращается оператором LENGTH, например:

```
.SECTION/DATA data1;
.VAR data_buffer[256];
.SECTION/CODE programa;
I0 = data_buffer; //указатель начала буфера;
L0 = length(data_buffer); //длина кольцевого буфера.
```

Имя буфера в команде с прямой адресацией памяти является адресом его первого элемента (значения):

```
DM(data_buffer) = AX1;
```

С помощью директив .GLOBAL, .EXTERN устанавливаются связи между программными модулями.

Директива .GLOBAL internal_symbol, … ; делает переменную или адресную метку internal_symbol и другие следующие за ней видимыми (доступными) из других модулей программы.

Директива .EXTERN external_symbol, external_programm_label объявляет используемые программой внешние переменные и метки.

Например:

```
.VAR coefs[10], taps = 100;
.GLOBAL coefs, taps; //буфер и переменная объявлены общедоступными.
В другой подпрограмме, использующей эти переменные, пишется директива:
.EXTERN coefs, taps; // coefs, taps – импортируемые глобальные символы.
```

Команды препроцессора начинаются со знака решетки # и заканчиваются возвратом каретки. Наиболее используемые из них:

#define constanta value – определяет константу и ее значение.

#include «file_name» – включает в программу любой исходный текст на языке ассемблера (с расширением .asm), а также файлы данных (.dat) и системных и пользовательских констант и указателей (.h).

Примеры команд препроцессора:

#define N 100 //объявляет константу N = 100;

#define z 0.875r //объявляет дробную константу z;

#define MACRO1 // объявляет макрос;

#include «def2181.h» //подключает файл системных констант и указателей.

Ассемблер поддерживает двоичный, десятичный, 16-ричный и дробный форматы чисел в выражениях и в ассемблерных инструкциях:

```
0xnumber –  16-ричное число (префикс 0x) (0xA19F);
B#number или b#number – двоичное число (b#1010001011000101);
number – десятичное число (174);
numberr – дробное десятичное (суффикс r) (0.5r).
Примеры возможного представления дробных чисел:
.VAR myFracts[] = 0.3r, –0.5r, .8134r, 0.39e–4r, –0.25e–2r;
```

Комментарии в ассемблерных программах выделяются символами /* comment …*/ или // comment … .

Запуск ассемблера easm218x.exe осуществляется командной строкой или из интегрированной среды VisualDSP++, автоматизирующей все этапы разработки, отладки, моделирования и эмуляции программ ЦСП.

Программы для процессоров семейства ADSP-219x ассемблируются с помощью ассемблера easm219x.exe.

17.2. Программирование цифровых фильтров на языке ассемблера процессоров ADSP-218x

Разработка программ цифровых фильтров на языке ассемблера ЦСП включает те же этапы, что и для микропроцессорных средств общего назначения. Основными задачами программирования при этом являются:

♦ настройка системных регистров и прерываний, используемых для синхронизации ввода-вывода данных в ЦСП;

♦ инициализация каналов (портов) ввода-вывода;

♦ инициализация (настройка) генераторов адресов данных для адресации сигнальной памяти и памяти коэффициентов ЦФ;

♦ ввод-вывод данных в ЦСП;

♦ алгоритмическая обработка сигналов реализуемым ЦФ (рекурсивным или нерекурсивным).

Определение конфигурации системы и структуры программ

В соответствии с перечисленныи задачами анализируются возможные варианты структуры программы и конфигурации системы. К главному программному модулю, выполняющему функции управления программой, относят, как правило, и настройку системных регистров и прерываний. Инициализацию каналов (портов) ввода-вывода с учетом их типа и используемых интерфейсных средств ЦСП можно включить либо в главный программный модуль, либо реализовать отдельной подпрограммой, поддерживающей, например, программно-управляемый параллельный ввод-вывод данных в микропроцессор.

В данном примере используем подсистему ввода-вывода данных с канальными АЦП/ЦАП последовательного типа, сопрягаемую с ЦСП через последовательные порты SPORT1 (канал вывода) и SPORT0 (канал ввода).. Синхронизация ввода-вывода в подсистеме осуществляется по прерыванию приема данных порта SPORT0, а дискретизация сигнала выполняется с частотой внутренней кадровой синхронизации порта SPORT1, равной 7680 Гц. Настройку каналов и портов ввода-вывода в данном случае также возложим на главный модуль программы.

Собственно программу цифровой фильтрации реализуемых ЦФ (РФ, НФ) целесообразно разделить на две подпрограммы – подпрограмму настройки генераторов адресов данных, которая выполняется один раз при запуске программы, и подпрограмму циклической алгоритмической обработки отсчетов сигнала в реальном времени, определяющую быстродействие ЦФ. В этой же подпрограмме осуществляется и ввод-вывод в ЦСП данных с приемо-передающих регистров последовательных портов.

Подпрограмма настройки генераторов адресов данных (инициализации фильтра) вызывается из главного модуля программно, а подпрограмма обработки данных – по прерыванию приема очередного отсчета сигнала.

Программирование ЦФ на языке ассемблера включает также распределение (секционирование) памяти программ и памяти данных ЦСП.

В памяти программ в данном примере нужно выделить секцию (сегмент) для векторов прерываний (seg_Ivtable), секцию коэффициентов (seg_coef), и секцию кода программы (seg_code).

В памяти данных достаточно иметь одну секцию внутренних сигналов фильтра (seg_signal).

Коэффициенты фильтра будем вводить в программу из файла данных, системные константы и указатели из файла def2181.h, а необходимые пользовательские константы – порядок фильтра и др. – из файла users_const.h.

Главный модуль программ цифровой фильтрации

Главный модуль программ цифровой фильтрации filtr_program является общим для нерекурсивного и рекурсивного ЦФ. Он обеспечивает:

♦ настройку системного интерфейса и прерываний;

♦ инициализацию каналов и портов ввода-вывода;

♦ управление инициализацией фильтров, синхронизированным вводом-выводом данных и их алгоритмической обработкой с помощью вызываемых подпрограмм filtr_init, filtr_proc для соответствующего ЦФ (РФ, НФ).

В главном модуле программы filtr_program объявляются внешние стартовые адреса вызываемых подпрограмм filtr_init, filtr_proc, осуществляется настройка подсистемы прерываний и системных регистров процессора, выполняется программирование последовательных портов, вызов подпрограммы инициализации фильтров, организуется цикл ожидания прерывания приема данных. По генерируемому портом прерыванию вызывается подпрограмма обработки данных цифрового фильтра, при возврате из которой процессор снова переводится в цикл ожидания очередного отсчета данных из последовательного порта.

Ниже приведен исходный текст главного управляющего модуля программ цифровой фильтрации filtr_program.asm с поясняющими его комментариями:

```
/* Главный модуль программы цифровой фильтрации */
#include "def2181.h";        //подключение файла системных констант и указателей
.EXTERN filtr_init, filtr_proc;
.SECTION/pm seg_Ivtable;
/* загрузка векторов прерываний с нулевого адреса */
jump start;rti;rti;rti;        /*0x0000  прерывание перезапуска reset*/
rti;rti;rti;rti;               /*0x0004  прерывание IRQ2*/
rti;rti;rti;rti;               /*0x0008  прерывание IRQL1*/
rti;rti;rti;rti;               /*0x000C  прерывание IRQL0*/
rti;rti;rti;rti;               /*0x0010  прерывание передачи SPORT0 sp0 tx*/
      jamp filtr_proc; rti;rti;rti;    /*0x0014  прерывание приема SPORT0 sp0 rx*/
rti;rti;rti;rti;                 /*0x0018  прерывание IRQE */
rti;rti;rti;rti;                 /*0x001C  прерывание BDMA*/
```

```
        rti;rti;rti;rti;          /*0x0020  прерывание записи SPORT1 или IRQ1*/
        rti;rti;rti;rti;          /*0x0024  прерывание приема SPORT1 или  IRQ0*/
        rti;rti;rti;rti;                /*0x0028  прерывание таймера TIMER*/
        rti;rti;rti;rti;                /*0x002C  прерывание выхода из режима
                                          пониженной мощности POWER DOWN*/
        .SECTION/pm     seg_code;
        start:
        /*  Инициализация последовательного порта SPORT1*/
        AX0 = 15;                                  /*установка кадровой частоты */
        DM(Sport1_Rfsdiv) = AX0;                        /*синхронизации RFS 7680 Гц*/
        AX0 = 134;                                 /*установка тактовой частоты */
        DM(Sport1_Sclkdiv) = AX0;                  /*синхронизации SCLC 122880 Гц*/
            AX0 =0xCF0E;
            DM(Sport1_Ctrl_Reg) = AX0;
        /*  Инициализация последовательного порта SPORT0*/
        AX0 =0xBF0F;
        DM(Sport0_Ctrl_Reg) = AX0;
   /*Активизация последовательных портов, настройка памяти и системы*/
        IFC = b#00000011111111;    /*очистить все незавершенные прерывания */
        ICNTL = b#00000;            /*вложение прерываний запрещено*/
        AX0 =0x1C00;               /*активны оба последовательных порта, состояния */
        DM(Sys_Ctrl_Reg) = AX0;   /* циклы ожидания памяти программ по умолчанию */
        AX0 = 0x7FFF;              /* циклы ожидания памяти данных по умолчанию */
        DM(Dm_Wait_Reg) = AX0;
        MSTAT = b#1000000;         /* режим умножения дробных чисел*/
            CALL filtr_init;          /* вызов подпрограммы инициализации фильтра*/
            IMASK = b#0001000000;     /*разрешены только прерывания SPORT0*/
        RTI;
mainloop:   IDLE;                  /*цикл ожидания прерывания SPORT0*/
            JUMP mainloop;
```

ПОДПРОГРАММА ИНИЦИАЛИЗАЦИИ НЕРЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА

Сигнал на выходе НФ $y(n)$ определяется суммой текущего $x(n)$ и $(N-1)$-го предыдущих отсчетов входного сигнала, взятых с весовыми коэффициентами, соответствующими значениям импульсной характеристики фильтра $h(n)$ конечной длины N (алгоритм ДВС):

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \cdot x(n-m).$$

В данном примере значения импульсной характеристики $h(N-1)$, $h(N-2)$, …, $h(1)$, $h(0)$ в указанной последовательности размещаются по возрастающим адресам памяти программ, образуя массив или циклический буфер коэффициентов coef_buffer. Они умножаются на соответствующие отсчеты входного сигнала $x(n-N+1)$, $x(n-N+2)$, …, $x(n-1)$, $x(n)$, которые образуют сигнальную память фильтра или циклический буфер отсчетов сигнала data_buffer в памяти данных процессора. Ему отвечает структура дан-

ных типа очередь постоянной длины. Очередной отсчет сигнала $x(n)$ после его обработки замещает самое старое значение сигнала в очереди $x(n - N)$. Адрес этого отсчета определяет начало очереди, которое циклически перемещается в буфере в процессе обработки сигнала. Такому способу обработки соответствует алгоритм программной реализации НФ без сдвига сигнальной памяти. Исходный адрес начала очереди совпадает обычно с началом буфера data_buffer в памяти данных.

В приводимой ниже *подпрограмме инициализации* filtr_init объявляются метка входа в подпрограмму filtr_init, буферы данных data_buffer и коэффициентов coef_buffer, осуществляется инициализация буфера коэффициентов из файла «coef.dat», инициализируются регистры генераторов адресов данных, адресующие циклические буферы, загружается счетчик циклов и производится очистка буфера данных в цикле DO UNTIL. В подключаемом файле «users_const.h» задается фактическое значение порядка фильтра (число отводов) n_taps = N, например: #define n_taps 31;

```
/* Подпрограмма инициализации нерекурсивного фильтра */
#include "users_const.h";     /* подключение файла пользовательских констант */
.SECTION/dm seg_signal;
.VAR/DM data_buffer[n_taps];
.SECTION/pm seg_coef;
.VAR/PM coef_buffer[n_taps] = "coef.dat";
.GLOBAL data_buffer, coef_buffer, filtr_init;

.SECTION/code seg_code;
filtr_init:   I0 = data_buffer;          /* загрузка указателя буфера данных */
              L0 = length(data_buffer);   /* задание длины циклического буфера данных */
              M0 = 1;                     /* модифицирующее значение адреса данных */
              I4 = coef_buffer;           /* загрузка указателя буфера коэффициентов */
              L4 = length(coef_buffer);    /* задание длины циклического буфера коэфф-в */
              M4 = 1;                     /* модифицирующее значение адреса коэфф-в */
              CNTR = length(data_buffer);          /* загрузка счетчика циклов*/
                        DO clear UNTIL CE;         /* очистка буфера данных */
                   clear:     DM(I0, M0) = 0;
                              RTS;
  filtr_init.end:
```

Подпрограмма обработки нерекурсивного фильтра

В приводимом модуле *подпрограммы обработки* прерываний нерекурсивного фильтра filtr_proc.asm, реализующем базовую операцию свертки, объявляются метка входа filtr_proc, внешние переменные data_buffer и coef_buffer и осуществляется алгоритмическая обработка очередного отсчета сигнала, который считывается с приемного регистра RX0 порта SPORT0.

Все коэффициенты и значения данных для нерекурсивного фильтра представляются в формате 1.0.15. Ограничение разрядности выходного сигнала до 16 бит осуществляется округлением накопленной суммы произведений с помощью модификатора RND инструкции MAC. Выходной отсчет

данных записывается в передающий регистр TX1 последовательного порта SPORT1.

```
 /*Подпрограммы обработки нерекурсивного фильтра*/
.EXTERN data_buffer, coef_buffer;
.GLOBAL filtr_proc;

.SECTION/code seg_code;
   filtr_proc:
       CNTR = length(coef_buffer) – 1;       /*CNTR = N – 1*/
       SI = RX0;              /*чтение отсчета данных x(n) с порта SPORT0*/
       DM(I0, M0)=SI;      /*пересылка x(n) в начало очереди данных */
       MR=0, MX0=DM(I0, M0), MY0=PM(I4, M4);   /* обнуление накопителя, */
                    /*считывание значений x(n – N + 1) и h(N – 1) из памяти*/
       DO top UNTIL CE;    /*цикл умножения h(m)·x(n–m) с накоплением */
top:  MR=MR+MX0*MY0(SS), MX0=DM(I0,M0), MY0=PM(I4,M4);
         MR=MR+MX0*MY0(RND); /*умножение h(0)·x(n), накопление */
              IF MV SAT MR;                /*и округление с насыщением */
         TX1 = MR1;       /*запись y(n) из MR1 в регистр передачи SPORT1*/
RTI;                    /*возвращение в главную программу */
filtr_proc.end:
```

Обработка осуществляется за 7 + N циклов. При длительности цикла ЦСП $\tau_ц$ = 30 нс время обработки НФ $T_{обр}$ = 210 + + 30·N, нс. Для N = 200 оно составляет 6210 нс, что соответствует максимально возможной частоте дискретизации сигнала $f_д$ = 161 кГц. Для микропроцессора i80486 с той же тактовой частотой $f_{дmax}$ = 725 Гц.

Подпрограмма инициализации рекурсивного фильтра

Рекурсивный фильтр или фильтр с бесконечной импульсной характеристикой реализован по *каскадной структуре* в виде последовательно соединенных L базовых биквадратных звеньев. Выходные сигналы звеньев $y(n)$ при *прямой форме* их реализации находятся в соответствии с разностным уравнением:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2),$$

в котором $x(n)$ являются текущими отсчетами входных сигналов звеньев, $x(n – 1)$, $x(n – 2)$ и $y(n –1)$, $y(n – 2)$ – предыдущими (задержанными) отсчетами входных и выходных сигналов звеньев, b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 – весовыми коэффициентами звеньев. Входные сигналы всех звеньев дополнительно умножаются на масштабные коэффициенты $m < 1$, исключающие переполнения сумматоров фильтра. Их принимаются равными ближайшим значениям $m \approx 2^{-r}$, где r = 1, 2, 3,…– коэффициенты сдвига. Масштабирование сигналов $x(n)$ осуществляется путем сдвига их двоичных значений вправо на r бит.

Коэффициенты звеньев могут иметь максимальные по модулю значения, не превышающие 2. Для представления их в дробном формате 1.0.15 их

нужно поделить на 2, преобразовав к значениям $b'_0 = b_0/2$, $b'_1 = b_1/2$, $b'_2 = b_2/2$, $a'_1 = a_1/2$, $a'_2 = a_2/2$, а выходные сигналы звеньев $y(n)$ после завершения обработки сдвинуть влево на 1 бит, т.е. умножить на 2. Для уменьшения собственных шумов звеньев вместо квантования частных произведений в ЦСП используют квантование накопленных сумм произведений. Базовая обработка для такого звена включает последовательность операций:

$$x(n) = mx(n);\ y(n) = b'_0x(n) + b'_1x(n-1) + b'_2x(n-2) -$$
$$-a'_1y(n-1) - a'_2y(n-2);$$
$$y(n) = [y(n)]_{кв}\ (\text{операция квантования});\ \ y(n) = 2y(n);$$
$$x(n-2) = x(n-1);\quad x(n-1) = x(n);$$
$$y(n-2) = y(n-1);\ \ y(n-1) = y(n);\ x(n) = y(n).$$

Коэффициенты $r, b'_2, b'_1, b'_0, a'_2, a'_1$ образуют память коэффициентов фильтра. В такой последовательности они размещаются в циклическом буфере coef_buffer длиною $6L$ памяти программ согласно порядку включения звеньев. Отсчеты сигналов $x(n-2)$, $x(n-1)$, $y(n-2)$, $y(n-1)$ размещаются в указанной последовательности в памяти данных процессора по возрастающим адресам в соответствии с порядком включения звеньев, образуя сигнальную память фильтра в виде циклического буфера data_buffer длиною $4L$.

Отличие подпрограмм инициализации filtr_init РФ и НФ заключается в использовании дублирующих регистров I1, L1 для сдвига сигнальной памяти и в содержимом подключаемого файла коэффициентов «coef.dat» и файла констант «users_const.h», в котором задается фактическое значение числа секций (звеньев) фильтра n_sec = L, например: #define n_sec 4.

```
/* Подпрограмма инициализации рекурсивного фильтра */
#include "users_const.h";      /* подключение файла пользовательских констант */
.SECTION/dm seg_signal;
.VAR/DM data_buffer[4*n_sec];
.SECTION/pm seg_coef;
.VAR/PM coef_buffer[6*n_sec] = "coef.dat";
.GLOBAL data_buffer, coef_buffer, filtr_init;

.SECTION/code seg_code;
filtr_init:   I0 = data_buffer;          /* загрузка указателя буфера данных */
              L0 = length(data_buffer);  /* задание длины циклического буфера данных */
              M0 = 1;                    /* модифицирующее значение адреса данных */
              I1 = data_buffer;          /* загрузка указателя буфера данных */
              L1 = length(data_buffer);  /* задание длины циклического буфера данных */
              I4 = coef_buffer;          /* загрузка указателя буфера коэффициентов */
              L4 = length(coef_buffer);  /* задание длины циклического буфера коэфф-в */
              M4 = 1;                    /* модифицирующее значение адреса коэфф-в */
              CNTR = length(data_buffer);          /* загрузка счетчика циклов*/
                     DO clear UNTIL CE;            /* очистка буфера данных */
              clear:   DM(I0, M0) = 0;
              RTS;
```

```
filtr_init.end:
```

Подпрограмма обработки рекурсивного фильтра

В приводимом модуле *подпрограммы обработки* прерываний рекурсивного фильтра filtr_proc объявляются метка входа в подпрограмму filtr_proc, внешние переменные data_buffer и coef_buffer и в соответствии с разностным уравнением осуществляется покаскадная алгоритмическая обработка очередного отсчета сигнала, который считывается с приемного регистра порта RX0.

Обработка выполняется в цикле по числу звеньев фильтра. Ограничение разрядности сигналов звеньев осуществляется округлением накопленных сумм произведений до 16 бит с помощью модификатора RND инструкции MAC. Выходной отсчет данных всего фильтра записывается в передающий регистр последовательного порта TX1.

```
/*Модуль подпрограммы обработки рекурсивного фильтра*/
.EXTERN data_buffer, coef_buffer;
.GLOBAL filtr_proc;

.SECTION/code seg_code;
filtr_proc:
     CNTR = n_sec;       /*CNTR = L */
     SI = RX0;           /*чтение отсчета данных x(n) с порта SPORT0*/
DO num UNTIL CE;     /*цикл обработки по звеньям */
     SE = PM(I4, M4);    /* чтение r – числа масштабирующих сдвигов */
     SR = ASHIFT SI (HI);     /* промасштабированное значение x(n) */
     MX0 = DM(I0, M0), MY0 = PM(I4, M4);     /* чтение x(n – 2), b'2 */
 MR = MX0*MY0 (SS), MX0 = DM(I0, M0), MY0 = PM(I4, M4);
                /* MR= b'2·x(n – 2);  чтение x(n – 1), b'1 */
      DM(I1, M0)=MX0;    /* x(n – 2) = x(n – 1) */
      DM(I1, M0)=SR1;      /* x(n – 1) = x(n) */
       MR = MR+MX0*MY0 (SS), MY0 = PM(I4, M4);
       /* MR = MR+b'1·x(n – 1); чтение b'0 */
       MR = MR+SR1*MY0 (SS), MX0 = DM(I0, M0), MY0 = PM(I4, M4);
                /* MR = MR+b'0·x(n);  чтение y(n – 2), –a'2 */
       MR = MR+MX0*MY0 (SS), MX0 = DM(I0, M1), MY0 = PM(I4, M4);
                /*  MR = MR+(–a'2·y(n – 2); чтение y(n – 1), –a'1 */
          DM(I1, M0)=MX0, MR = MR+MX0*MY0 (RND);  /* y(n – 2) = y(n – 1) */
                /* MR = MR+(–a'1·y(n – 1) = y(n)/2 */
IF MV SAT MR;          /* включить  насыщение */
SR1 = MR1;             /* SR1 = y(n)/2 с насыщением */
SR = IF NOT MV ASHIFT MR1 BY 1 (HI);      /* SR1 = y(n) */
DM(I1, M0) = SR1;      /* y(n – 1) = y(n) */
num:   SI = SR1;             /* x(n) = y(n) */
       TX1 = SR1;     /* запись y(n) из SR1 в регистр передачи SPORT1*/
RTI;                 /* возврат в главную программу */
filtr_proc.end:
```

Время выполнения программы составляет 15*L + 4 циклов. При длительности цикла $\tau_ц$ = 30 нс время обработки РФ $T_{обр}$ = 120 + 450·L, нс. Числу звеньев L = 4 отвечает время обработки $T_{обр}$ = 1920 нс и максимально возможная частота дискретизации сигнала $f_{д\,т}$ = 520 кГц. Применение ЦСП ADSP-2188M с тактовой частотой 75 МГц повышает $f_{дт}$ до 1,17 МГц. Для микропроцессора i80486 с соизмеримой тактовой частотой значение $f_{д\,т}$ составляет 8 кГц.

Таким образом, ЦСП семейства ADSP-218x обеспечивают достаточно высокое быстродействие при реализации цифровых фильтров, что позволяет эффективно использовать их в системах многоканальной цифровой обработки речевых, биомедицинских, виброакустических и др. сигналов. Еще большими реализационными возможностями обладают рассмотренные выше новые поколения ЦСП.

Контрольные вопросы

1. Какие группы включает набор инструкций ЦСП?
2. Как задаются режимы адресации данных в инструкциях ЦСП?
3. Какие инструкции относятся к многофункциональным и как они исполняются?
4. Как выполняются и используются инструкции IDLE, IDLE(n)?
5. Как обобщенно описывается и исполняется инструкция DO UNTIL?
6. Какова структура ассемблерной программы?
7. Каковы функции директив ассемблера и команд препроцессора?
8. Каковы технология разработки и структура программ цифровой фильтрации?
9. Какие функции выполняет главный модуль программы цифровой фильтрации?
10. Каковы функции подпрограмм инициализации нерекурсивного и рекурсивного фильтров?
11. Как осуществляется обработка сигналов в подпрограммах обработки нерекурсивного и рекурсивного фильтров?
12. Как преобразовать подпрограмму обработки рекурсивного фильтра для прямой формы реализации его звеньев в подпрограмму обработки для канонической формы их реализации?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидно, что круг вопросов, рассмотренных в курсе лекций, не охватывает всего многообразия существующих и перспективных направлений, методов и средств ЦОС. Это связано как с ограниченным объемом курса, так и методической сложностью изучения и отражения в учебном издании новых научных результатов. Однако по мере методической адаптации результаты новых теоретических исследований и достижений технологии будут замещать и дополнять вопросы ЦОС, изучаемые в настоящее время.

Отметим наиболее важные и актуальные направления и методы ЦОС, не охваченные учебной программой лекционного курса. К ним, по мнению автора, относятся методы цифрового представления сигналов с использованием сигма–дельта-модуляции, неоднородного и векторного квантования и кодирования; параметрические методы спектрально-корреляционного анализа – авторегрессии, скользящего среднего, минимума дисперсии, сингулярного анализа; методы вейвлет-анализа сигналов; быстрые вычислительные алгоритмы ЦОС – Винограда, полиномиальные, теоретико-числовые; методы адаптивной, нелинейной и многомерной цифровой обработки сигналов; методы векторно-матричного описания и описания в пространстве состояний алгоритмов и систем ЦОС; методы модуляции и демодуляции сигналов; нейрокомпьютерные технологии обработки сигналов; проектирование процессоров ЦОС на основе цифровых сигнальных процессоров и интегральных схем программируемой структуры.

Лишь немногие из этих методов отражены в существующей учебной литературе. Преимущественно же они излагаются в научной литературе – монографиях, трудах конференций, периодических изданиях, в издаваемом специализированном журнале «Цифровая обработка сигналов», а также на сайтах Интернет. Поэтому углубленное изучение цифровой обработки сигналов невозможно без самостоятельного обращения к данным источникам информации.

Современными средствами освоения и реализации ЦОС являются универсальные пакеты программ для научных исследований и автоматизированного проектирования – *MatLab*, *LabVIEW*, *SystemView*, *ADS/Ptolemy*, *Filter-Solutions* и др.

Эффективное освоение методов ЦОС достигается в лабораторном практикуме, предусматривающем моделирование, экспериментальное исследование и программирование алгоритмов и устройств ЦОС, при курсовом проектировании систем ЦОС и самостоятельном решении задач.

Следует подчеркнуть, что знание основ цифровой обработки сигналов является сейчас востребованным при работе в любой из областей радиотехники и радиоэлектроники, использующей информационные технологии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст]: учеб. пособие / И. С. Гоноровский, М. П. Демин. М.: Радио и связь, 1994.

2. Глинченко, А. С. Цифровая обработка сигналов [Текст]: учеб. пособие / А. С. Глинченко. 2-е изд., перераб. и доп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005.

3. Глинченко, А. С. Цифровая обработка сигналов [Текст]: учеб. пособие: в 2 ч. / А. С. Глинченко. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001. Ч. 1.

4. Айфичер, Э. С. Цифровая обработка сигналов: практический подход [Текст]: пер. с англ. / Э. С. Айфичер, Б. У. Джервис. 2-е изд. М.: Издат. дом «Вильямс», 2004.

5. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов [Текст]: учеб. для вузов / А. Б. Сергиенко. СПб.: Питер, 2002.

6. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов [Текст]: учеб. пособие / А. Б. Сергиенко. 2-е изд. СПб.: Питер, 2006.

7. Рабинер, Л. Цифровая обработка речевых сигналов [Текст]: пер. с англ. / Л. Рабинер, Р. Шафер. М.: Радио и связь, 1981.

8. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов [Текст]: пер с англ. / А. Оппенгейм, Р. Шафер. М.: Техносфера, 2006.

9. Гольденберг, Л. М. Цифровая обработка сигналов [Текст]: учеб. пособие / Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. М.: Высш. шк., 1990.

10. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов [Текст]: пер. с англ./ Л. Рабинер, Б. Гоулд. М.: Мир, 1979.

11. Ричард, Л. Цифровая обработка сигналов [Текст]: пер с англ. / Л. Ричард. 2-е изд. М.: ООО «Бином-Пресс», 2007.

12. Марпл, С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения [Текст]: пер. с англ. / С. Л. Марпл. М.: Мир, 1990.

13. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций [Текст] / А. И. Солонина, Д. А. Улахович., С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

14. Федосов, В. П. Цифровая обработка сигналов в LabVIEW [Текст] / В. П Федосов, А. К. Нестеренко. М.: ДМК Пресс, 2007.

15. Глинченко, А. С. Цифровая обработка сигналов [Текст]: учеб. пособие: в 2 ч. / А. С. Глинченко. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001. Ч. 2.

16. Солонина, А. И. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов [Текст]/ А. И. Солонина, Д. А. Улахович, Л. А. Яковлев. СПб.: БХВ-Петербург, 2001.

17. Глинченко, А. С. Принципы организации и программирования сигнальных процессоров ADSP-21xx [Текст]: учеб.-метод. пособие / А. С. Глинченко, А. И. Голенок Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2000.