

Л. М. СОРОКО

ОСНОВЫ  
ГОЛОГРАФИИ  
И  
КОГЕРЕНТНОЙ  
ОПТИКИ



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
МОСКВА 1974

**Основы голографии и когерентной оптики.** Сороко Л. М., монография, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.

Систематическое изложение теории голографии и когерентных оптических систем. В начале упрощенно объясняются физические свойства голографии, затем рассматриваются свойства оптического сигнала, когерентность света, а также информационная структура оптического сигнала. Далее последовательно излагаются: принцип голографии как метод полной регистрации волны света, соотношение между предметом и голограммой, классификация голограмм, а также различные типы голографических устройств. Рассматриваются также оптические методы обработки информации, включая теорию оптического каскада, пространственное дифференцирование оптических сигналов и методы изготовления двумерных трансляторов. Кратко рассматриваются свойства регистрирующих сред, используемых в голографии.

Таблиц 5, рисунков 339, библиография — 371 название.

*Лев Маркович Сороко*

ОСНОВЫ ГОЛОГРАФИИ И КОГЕРЕНТНОЙ ОПТИКИ

М., 1971 г., 616 стр. илл.

Редактор А. И. Квстиенко

Техн. редактор С. Я. Шкляр

Корректор Л. С. Солова

Сдано в набор 21/IV 1971 г. Подписано к печати 21/X 1971 г. Бумага 60×90/16.  
Физ. печ. л. 38,5. Условн. печ. л. 38,5. Уч.-изд. л. 36,57. Тираж 9000 экз.  
Т-16333. Цена книги 2 р. 50 к. Зак. № 928.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете  
Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .		7
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>		<b>11</b>
1-1. Принцип голографии. Интерференция света . . . . .		12
1-2. Объемность изображения. Параллакс . . . . .		18
1-3. Плоская голограмма . . . . .		20
1-4. Дифракция света на плоской голограмме . . . . .		23
1-5. Когерентность света . . . . .		26
1-6. Источники света в голографии . . . . .		31
1-7. История голографии . . . . .		35
<b>Глава 2. Оптический сигнал и его преобразования . . . . .</b>		<b>45</b>
2-1. Комплексный сигнал в оптике . . . . .		45
2-2. Преобразование Фурье . . . . .		49
2-3. Свойства преобразования Фурье . . . . .		50
2-4. Типичные примеры преобразования Фурье и общепринятые обозначения часто встречающихся функций . . . . .		57
2-5. Оптические устройства, осуществляющие преобразования Фурье . . . . .		64
2-6. Свертка и ее свойства . . . . .		66
2-7. Корреляция и ее свойства . . . . .		70
2-8. Свертка и корреляция на плоскости . . . . .		70
2-9. Оптические устройства для осуществления операций свертки и кросс-корреляции . . . . .		71
2-10. Скалярное произведение функций . . . . .		74
2-11. Обобщенные функции, или распределения . . . . .		77
2-12. Примеры обобщенных функций . . . . .		80
2-13. Преобразование Фурье обобщенных функций . . . . .		86
2-14. Свертка обобщенных функций . . . . .		93
2-15. Преобразование Фурье и свертка функций в пространстве многих измерений . . . . .		98
2-16. Дельта-функции на плоскости . . . . .		102
2-17. Преобразование Фурье радиальных функций, заданных на плоскости . . . . .		106
2-18. Преобразование Ганкеля . . . . .		109
2-19. Усеченное преобразование Фурье . . . . .		111
2-20. Преобразование Гильберта . . . . .		117
2-21. Линейный фильтр . . . . .		119
2-22. Линейный двухмерный фильтр . . . . .		125
2-23. Дисперсионные соотношения и принцип причинности . . . . .		130
2-24. Соотношение Фурье — Гильберта — Ганкеля . . . . .		134
2-25. Модуляция сигнала . . . . .		140
2-26. Преобразование Френеля . . . . .		152
2-27. Соотношение Френеля — Фурье . . . . .		155
2-28. Сандвич Френеля . . . . .		159
2-29. Схема Биккеля — Бомана . . . . .		

§	2-30. Дополнительный параметр в преобразовании Френеля	164
§	2-31. Преобразование Дирака и преобразование отсчетов . . .	165
§	2-32. Сопоставление интегральных преобразований в оптике	166
<b>Глава 3. Случайный сигнал . . . . .</b>		<b>172</b>
§	3-1. Случайная функция и случайный сигнал . . . . .	172
§	3-2. Стационарный случайный сигнал . . . . .	175
§	3-3. Функции корреляции . . . . .	176
§	3-4. Преобразование Фурье функций кросс-корреляции . . . . .	183
§	3-5. Средняя мощность . . . . .	185
§	3-6. Спектральное распределение энергии и его физический смысл . . . . .	192
§	3-7. Случайный шум и помехи . . . . .	194
§	3-8. Корреляционные методы подавления помех и шумов . . . . .	196
§	3-9. Обнаружение сигналов известной формы . . . . .	197
§	3-10. Функция неопределенности . . . . .	201
§	3-11. Построение функции по заданной функции автокорреляции	206
<b>Глава 4. Когерентность света . . . . .</b>		<b>211</b>
§	4-1. Функция взаимной интенсивности . . . . .	211
§	4-2. Свойства аналитического сигнала и функции взаимной интенсивности . . . . .	218
§	4-3. Процесс испускания света атомами . . . . .	220
§	4-4. Временная и пространственная когерентность . . . . .	225
§	4-5. Временная когерентность . . . . .	227
§	4-6. Интерференция волн различных частот . . . . .	229
§	4-7. Обобщение функции взаимной интенсивности на случай интерференции света от источников двух разных частот	238
§	4-8. Поперечная и продольная пространственная когерентность . . . . .	240
§	4-9. Некогерентный протяженный источник, создающий пространственно когерентный свет . . . . .	247
§	4-10. Когерентность и дифракция света . . . . .	249
§	4-11. Методы определения и измерения когерентности . . . . .	262
§	4-12. Соотношения между когерентностью и спектром излучения	275
§	4-13. Волновое уравнение функции взаимной интенсивности	278
§	4-14. Интегральное представление функции $\Gamma_{12}(\tau)$ . . . . .	279
§	4-15. Измерение когерентности лазерного пучка . . . . .	282
§	4-16. Когерентность и матовый экран . . . . .	286
<b>Глава 5. Информационная структура оптического сигнала . . . . .</b>		<b>292</b>
§	5-1. Введение . . . . .	292
§	5-2. Принцип неопределенности . . . . .	293
§	5-3. Классическое представление сигнала в теории информации	295
§	5-4. Элементарный сигнал . . . . .	298
§	5-5. Детерминированная функция с ограниченным спектром	299
§	5-6. Свойства функции отсчетов . . . . .	303
§	5-7. Детерминированная функция конечной продолжительности . . . . .	304
§	5-8. Одномерные функции с ограниченным спектром . . . . .	306
§	5-9. Двухмерные функции с ограниченным спектром . . . . .	314
§	5-10. Теорема отсчетов в оптике . . . . .	317
§	5-11. Матрица освещения . . . . .	322
§	5-12. Матрица интенсивности . . . . .	330
§	5-13. Матрица изображения и матрица детектора . . . . .	332
§	5-14. Временные отсчеты . . . . .	339



<b>Глава 6. Голография</b> . . . . .	<b>341</b>
6-1. Постановка задачи . . . . .	341
6-2. Основная схема голографии . . . . .	345
6-3. Процесс проявления фотоэмульсии . . . . .	348
6-4. Соотношение между предметом и волной света в зрачке . . . . .	354
6-5. Голограммы простейших предметов . . . . .	360
6-6. Голографический микроскоп . . . . .	363
6-7. Соотношение между предметом и волной света в зрачке для произвольного освещения . . . . .	366
6-8. Теория голографической установки наиболее общего вида . . . . .	369
6-9. Альтернативные представления сферического френелевского образа и его фурье-образа . . . . .	374
6-10. Строгая классификация голограмм . . . . .	379
6-11. Наиболее характерные схемы получения различных типов голограмм . . . . .	386
6-12. Поглощающая и рельефно-фазовая голограммы . . . . .	389
6-13. Амплитудный синтез изображений . . . . .	393
6-14. Корреляционная компенсация протяженности опорного источника . . . . .	394
6-15. Обоснование метода компенсации протяженности источника . . . . .	397
6-16. Голограмма фазовых предметов . . . . .	400
6-17. Информационная емкость фотоэмульсии и ее использование в голографии . . . . .	413
6-18. Некоторые особенности амплитудного синтеза изображений с помощью голографии . . . . .	417
6-19. Искусственная голограмма . . . . .	420
6-20. Когерентность в голографии . . . . .	434
6-21. Голограмма интенсивности при некогерентном освещении . . . . .	445
6-22. Трафаретная голограмма . . . . .	457
6-23. Ахроматическая голография . . . . .	459
6-24. Объемная голограмма . . . . .	469
6-25. Голограмма векторного поля (двухполяризационная голограмма) . . . . .	481
6-26. Фантомные изображения . . . . .	482
6-27. Многоцветные изображения . . . . .	484
6-28. Аберрации в голографии . . . . .	487
6-29. Обобщенная голограмма и принцип опорного предмета . . . . .	491
6-30. Стробоскопическая голограмма . . . . .	495
<b>Глава 7. Оптические методы обработки информации</b> . . . . .	<b>498</b>
7-1. Возрастающая роль оптики в кибернетике . . . . .	498
7-2. Преобразование Фурье в когерентной оптической системе . . . . .	499
7-3. Оптический линейный фильтр . . . . .	503
7-4. Принцип пространственной фильтрации изображения . . . . .	504
7-5. Оптический коррелятор . . . . .	505
7-6. Свертка и корреляция в когерентной оптической системе . . . . .	510
7-7. Распознавание образов . . . . .	512
7-8. Бинарный согласованный фильтр . . . . .	515
7-9. Основные элементы оптической когерентной системы . . . . .	517
7-10. Обобщенная функция Френеля . . . . .	519
7-11. Оптический каскад . . . . .	521
7-12. Условие образования изображения . . . . .	523
7-13. Условие получения фурье-образа . . . . .	524
7-14. Изменение масштаба фурье-образа . . . . .	526
7-15. Многокаскадная оптическая система . . . . .	528
7-16. Многоканальные системы . . . . .	530

§ 7-17. Пространственная инвариантность оптического линейного фильтра . . . . .	532
§ 7-18. Подавление шумов путем пространственного дифференцирования оптических сигналов . . . . .	535
§ 7-19. Допустимые сдвиги фильтра . . . . .	540
§ 7-20. Некоторые схемы оптических устройств, используемых для изготовления согласованных фильтров . . . . .	546
§ 7-21. Библиотека согласованных фильтров . . . . .	549
§ 7-22. Емкость библиотеки согласованных фильтров . . . . .	551
§ 7-23. Некогерентные системы оптической обработки информации . . . . .	558
§ 7-24. Двухмерный транслятор . . . . .	564
§ 7-25. Временной голографический фильтр . . . . .	567
§ 7-26. Корреляционное сравнение двух сигналов . . . . .	570
§ 7-27. Перераспределение информационных степеней свободы . . . . .	574
§ 7-28. Принцип действия когерентной радиолокационной станции бокового обзора . . . . .	584
§ 7-29. Теория когерентной радиолокационной станции бокового обзора . . . . .	588
§ 7-30. Обработка данных в кадре радиолокационной станции когерентного приема . . . . .	595
§ 7-31. Апостериорная обработка изображений. Аподизация . . . . .	599
§ 7-32. Устранение сферической аберрации линз . . . . .	601
Литература . . . . .	602

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга по основам голографии и когерентной оптики представляет собой существенно переработанный и дополненный конспект лекций, прочитанных автором студентам старших курсов МФТИ и участникам постоянно действующего семинара по голографии в 1966—1967 гг.

Голография, возникшая около 20 лет тому назад и получившая распространение одновременно с появлением лазеров в физических лабораториях, быстро и широко внедряется в самые неожиданные разделы науки и техники. Процесс этот сопровождается непрерывным расширением круга специалистов, разрабатывающих для своих собственных нужд оптические устройства, при построении которых используются современные методы когерентной оптики и голографический принцип. Эта обширная категория специалистов нуждается в современном и достаточно многогранном изложении теории и физических принципов, лежащих в основе голографии. Книга задумана как ответ на запросы этой группы специалистов, в ней в качестве первого шага излагается теория голографии. Многое из того, что затронуто в книге, является квинтэссенцией или развитием многочисленных дискуссий и обсуждений, в которых участвовал автор.

В период написания данной книги первой и единственной в мировой литературе монографией по голографии была книга Дж. Строука «Введение в когерентную оптику и голографию», выпущенная издательством «Мир» в переводе на русский язык в 1967 г. Эта монография Дж. Строука не может удовлетворить многочисленных запросов читателей. Прежде всего, книга Дж. Строука написана предельно кратко, перегружена обращениями к оригинальным работам и поэтому весьма трудна при чтении. В литературе были отмечены также и другие ее недостатки. Вместе с тем книга Дж. Строука широко распространена за рубежом, и в 1968 г. вышло ее второе издание.

Обзоры по голографии, опубликованные в отечественных журналах, также иногда написаны очень кратко и освещают узкие темы. Поэтому, даже будучи собранными вместе, они далеки от систематического изложения, весьма необходимого читателям в эпоху широкого распространения голографии в различных областях науки и техники.

Замысел автора состоял в том, чтобы в необходимой полноте и придерживаясь единой точки зрения изложить основы голографии. Данная монография является, по существу, первой попыткой систематического изложения теории голографии с привлечением достижений ведущих разделов современной науки: физической оптики, статистической радиофизики и теории информации.

Голография — сравнительно новый термин, и поэтому монография начинается с вводной, описательной главы, в которой наглядно и поэтому несколько упрощенно объясняются физические основы голографии. Несмотря на это, в ней правильно излагаются все аспекты голографии, включая понятие когерентности света, которое, как известно, имеет в голографии первостепенное значение.

Во второй главе вводится понятие оптического сигнала и рассматриваются подробно свойства интегральных линейных преобразований, которые может испытывать оптический сигнал. Эти преобразования непосредственно связаны с голографией, спектроскопией Фурье, с техникой создания искусственных голограмм, двухмерных трансляторов и фильтров в когерентных оптических системах.

В качестве примера даны описания устройств, в которых используется некогерентное освещение. Корреляторы и комплексные двухмерные фильтры рассматриваются подробно в седьмой главе.

В конце второй главы формулируются общие свойства интегральных преобразований с ядром класса Фурье, которые обладают свойством обратимости и допускают построение многокаскадной оптической системы обработки информации фактически без потери какой-либо части информации.

В третьей главе излагаются основные свойства случайного оптического сигнала. Материал, приведенный в этой главе, используется в дальнейшем при изложении когерентности света — в четвертой главе, основ голографии — в шестой главе и оптических методов обработки информации и фильтрации оптических сигналов — в седьмой главе.

В четвертой главе рассматривается классическая теория когерентности (не квантовая). Описываются последние эксперименты по когерентности света и приводятся известные в настоящее время методы измерения когерентности. Теория когерентности света составляет основу голографии.

В пятой главе рассматривается информационная структура оптического сигнала, в частности те информационные инварианты, которые определяют разрешающую способность в оптике и в голографии, информационная емкость передаваемого сообщения и характер влияния степени когерентности света на объем информа-

ции, передаваемый без искажения пучком частично когерентного света.

В шестой главе последовательно излагается принцип голографии как метод полной регистрации волны света; соотношение между предметом и оптическим сигналом, регистрируемым голограммой; классификация голограмм и требования к разрешающей способности регистрирующих сред; различные типы голографических устройств: при когерентном освещении, при пространственно некогерентном освещении, ахроматические системы, объемные и стробоскопические голограммы, а также искусственные голограммы. В конце главы излагается обобщенная голограмма и возможные пути создания рентгеновского голографического микроскопа.

В седьмой главе изложены оптические методы обработки информации, основанные главным образом на голографическом принципе. Далее приводятся: теория оптического каскада, когерентные методы распознавания образов, пространственное дифференцирование оптических сигналов, методы изготовления двумерных трансляторов.

В монографию не включена теория регистрирующих сред, теория аберраций в голографии, в частности аберрационная теория голографического микроскопа, анализ высших поправок к операционному методу и детальное рассмотрение условий его применимости, а также не рассматриваются применения голографии в различных разделах науки и техники. Любая из вышеперечисленных тем настолько обширна, что для изложения ее требуется самостоятельная монография.

При написании этой монографии возникла необходимость частичной перефразировки некоторых положений тех дисциплин, которые являются составными частями голографии. Подобная перефразировка и предельно краткая форма записи основных соотношений, к которым стремился автор, упрощают сближение этих дисциплин и позволяют в дальнейшем подойти к построению нового языка, адекватного фундаментальным положениям голографии и радиооптики, которые возникли на стыке наук и являются наиболее молодыми разделами современной науки.

Монография рассчитана на широкий круг исследователей: физиков, радиофизиков, биофизиков, инженеров, а также математиков, ведущих работы по распознаванию образов и в других разделах кибернетики. Монография может служить также учебным пособием для студентов и аспирантов.

Естественно, что при написании первой монографии по такому молодому разделу прикладной физики, каким является голография, трудно избежать недостатков. Автор будет весьма признателен читателям, которые сообщат свои отзывы, критические замечания и пожелания.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Я. А. Смородинскому, инициировавшему у автора интерес к голографии, члену-корреспонденту АН СССР В. П. Желепову за постоянную поддержку работ автора по голографии. Автор признателен академику Б. М. Понтекорво, члену-корреспонденту АН СССР И. И. Гуревичу, доктору физико-математических наук Г. И. Копылову, кандидату физико-математических наук А. Ф. Писареву, инженеру И. П. Налимову за интересные беседы по голографии, а также профессору С. Л. Манделштаму и профессору Г. В. Скродцкому, живо отозвавшимся на прогресс в оптике и квантовой электронике и внесшим важные изменения в учебные программы студентов старших курсов, а также оказавшим автору большую поддержку.

Автор особо благодарен В. М. Сороко, без разносторонней помощи которой создать эту книгу было бы невозможно.

Автор хотел бы также выразить свою признательность Дж. Строуку, профессору Университета штата Нью-Йорк в Стони-Брук, научные связи с которым способствовали более полному освещению последних успехов голографии.

*Л. Сороко*

г. Дубна, 1969 г.

## ВВЕДЕНИЕ

*Голография* — принципиально новый метод получения изображений предметов и обработки *оптических сигналов*, основанный на явлении интерференции света.

*Голограмма*, в которой содержится интерференционная картина, является своеобразным аналогом фотонегатива и играет в голографии такую же роль, как фотонегатив в фотографии. На голограмме в закодированной форме записана вся информация о предмете — его многоцветное и объемное изображение. Голограмма регистрируется на фотопластинке с повышенной разрешающей способностью. При экспонировании фотопластинка помещается открытой перед предметом так, чтобы на нее падали не только лучи света от освещенного предмета (*предметный пучок*), но также и свет от источника когерентного монохроматического излучения (*опорный пучок*). Особенность голографического метода состоит в том, что в нем явно или неявно участвуют *два пучка* взаимно когерентного света.

На голограмме полностью отсутствуют элементы, хотя бы немного напоминающие очертания оригинала. Если посмотреть на голограмму в микроскоп, то в простейшем случае наблюдатель увидит систему темных и светлых полос (рис. 1.1). На голограмме сложной сцены преобладает нерегулярная на вид микроструктура (рис. 1.2).

Чтобы увидеть изображение предмета, голограмму просвечивают, словно диапозитив, только одним опорным пучком света. Под углом к нему, за голограммой, наблюдатель увидит, как сквозь маленькое окошко, объемное изображение предмета.

Голограмма обладает высокой степенью надежности. Ее можно разбить на несколько частей, и при этом любой ее осколок при просвечивании воссоздаст такую же картину, как и целая голограмма, если не считать того, что по мере уменьшения размера осколка голограммы четкость изображения и ощущение объемности постепенно будут ослабевать.

Голография — не только метод получения изображений, дополняющий и вытесняющий обычную фотографию, но и мощный метод физических исследований в лабораториях и метод технического контроля на производстве. В настоящее время разрабатываются и изготавливаются голографические установки различного назна-

чения. С появлением голографии существенно повысились роль и значение света как переносчика и хранителя информации. Новые возможности открываются при внедрении методов голографии в кибернетику. Важным фактором здесь является то, что и в физике, и в космонавтике, а также и в других разделах науки и техники получаемая и подвергающаяся обработке информация имеет двухмерную или трехмерную природу. Такую информацию очень



Рис. 1.1. Вид голограммы простейшего предмета в микроскоп при большом увеличении. Расстояние между соседними полосами равно примерно 5—20 мкм.

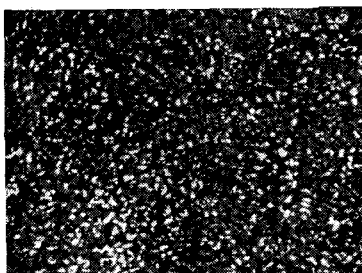


Рис. 1.2. Вид голограммы сложной сцены в микроскоп при большом увеличении. Зернистость фотоэмульсии при данном увеличении обнаружить еще невозможно.

трудно ввести в электронно-вычислительные машины и затем обработать с требуемой скоростью. Фундаментальная особенность голографического метода записи и обработки информации заключается в его приспособленности к быстрой обработке многомерной информации, в огромных возможностях создания двухмерных трансляторов и других кибернетических устройств с большой емкостью памяти.

### § 1-1. Принцип голографии. Интерференция света

В голографии информация об удаленности точек предмета регистрируется по величине запаздывания лучей от разных точек предмета. При этом запись дальности в голограмме ведется путем *корреляционного* сравнения двух лучей света: опорного и предметного. Отличие голографического метода, основанного на интерференции света, от других методов систем корреляционного сравнения сигналов заключается в том, что в голографии сигналы сначала сравниваются, а затем регистрируются. Это вызвано тем, что частоты электромагнитных колебаний в световой волне настолько велики ( $10^{14}$ — $10^{15}$  гц), что никакой детектор света не



успевают откликнуться на такие быстрые изменения поля. Только сама волна света пригодна в качестве эталона сравнения родственного ей оптического сигнала.

Для того чтобы осуществить такое сравнение, оба пучка света — один (предметный), идущий от предмета, и другой (опорный), создаваемый непосредственно источником света, — направляются на фотопластинку, вблизи которой эти пучки пересекаются. В области их пересечения возникает интерференционная картина.

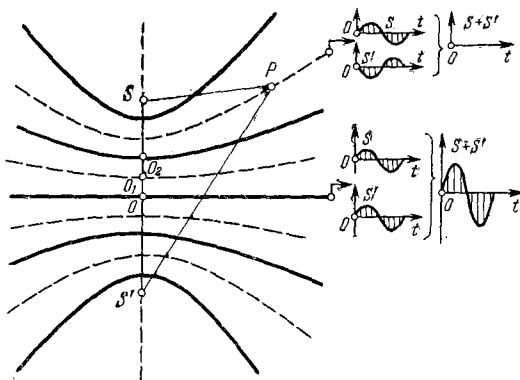


Рис. 1.3. Разрез пространственной картины интерференции света от двух точечных источников монохроматического света  $S$  и  $S'$ . Экваториальная плоскость, проходящая через точку  $O$ , — плоскость наибольшей интенсивности. В остальном пространстве геометрическое место точек равной интенсивности образует систему гиперболоидов вращения.

Ее можно зарегистрировать лишь в том случае, если она не смещается относительно фотопластинки при экспонировании и имеет достаточно высокий контраст. Оба эти требования выполняются, если источник света испускает остронаправленный монохроматический пучок.

Свойство света создавать неподвижную интерференционную картину в большом объеме пространства называется *когерентностью*. Предположим сначала, что все условия, необходимые для получения неподвижной интерференционной картины, выполнены, а о когерентности света подробнее расскажем несколько позже.

Рассмотрим структуру наиболее простой интерференционной картины, которая создается двумя точечными взаимно когерентными источниками монохроматического света (рис. 1.3). Такими свойствами обладают источники, полученные с помощью зеркала Ллойда  $M$  (рис. 1.4), на некотором расстоянии от которого располагается неподвижный точечный источник монохроматического света  $S$ . В зеркале  $M$  появится второй, мнимый, источник света  $S'$ . Два источника света  $S$  и  $S'$  — взаимно когерентны, так как лучи света, идущие от мнимого источника  $S'$ , являются копией

лучей, вышедших из самого источника  $S$ , но только сдвинуты и зеркально повернуты в пространстве. Сдвигом фазы при отражении мы пренебрегаем для удобства и простоты рассуждений.

Явление интерференции — следствие векторного сложения электрических полей двух пучков света в области их пересечения. В тех точках пространства и в те моменты времени, где и когда электрические поля совпадают по направлению, происходит увеличение интенсивности света. Там и в тот момент времени, где и когда поля двух пучков света противоположно направлены, они ослабляют друг друга. Суммарное поле может обратиться в нуль, если два поля равны по величине и противоположно направлены.

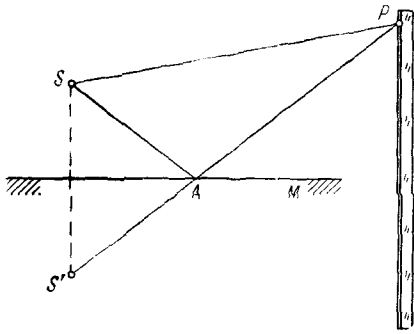


Рис. 1.4. Схема получения двух взаимно когерентных источников света с помощью зеркала Ллойда  $M$ .

Для того чтобы нарисовать интерференционную картину от двух точечных источников света (рис. 1.3) в пространстве, проведем через точку  $O$  — середину отрезка  $SS'$  — экваториальную плоскость, перпендикулярную этому отрезку. Световые волны, испущенные одновременно источниками  $S$  и  $S'$ , достигнут лю-

бой точки этой экваториальной плоскости одновременно в силу взаимной когерентности этих волн. Сдвиг (рассогласование) между фазами электромагнитных колебаний в экваториальной плоскости отсутствует.

Перенесемся из точки  $O$  в точку  $O_1$  отрезка  $SS'$ , отстоящую от точки  $O$  на  $\lambda/4$ , где  $\lambda$  — длина волны света. Излучение из точки  $S$  прибывает в точку  $O_1$  с опережением на четверть периода электромагнитных колебаний. Свет, прибывший в точку  $O_1$  от источника  $S'$ , испытывает такое же запаздывание. Между полями в точке  $O_1$  возникает взаимный сдвиг фаз, соответствующий половине периода. Поэтому поля, возбуждаемые источниками  $S$  и  $S'$  в точке  $O_1$ , противоположно направлены, и они взаимно гасят друг друга.

В точке  $O_2$ , отстоящей от точки  $O$  на расстоянии  $\lambda/2$ , взаимное запаздывание равно полному периоду. Интерференция волн в этой точке происходит с усилением. Легко сделать обобщающий вывод: точки отрезка  $SS'$ , в которых волны интерферируют с усилением, отстоят друг от друга на расстоянии, равном  $\lambda/2$  — половине длины волны. Через эти точки можно провести поверхности, точки которых обладают теми же свойствами. Это — гиперболоиды вращения, геометрическое место точек, разность расстояний от

которых до двух точек  $S$  и  $S'$ , где находятся источники света, равна постоянной величине.

Окружим теперь источники  $S$  и  $S'$  светочувствительным объемом с гипотетическими свойствами: он прозрачен и имеет показатель преломления, равный 1. После экспонирования и проявления в нем возникнут поверхности наибольшего почернения. Между ними расположатся поверхности, где заметного почернения нет, и они останутся прозрачными (рис. 1.5). Очевидно, что такие поверхности можно ввести лишь условно, так как почернение

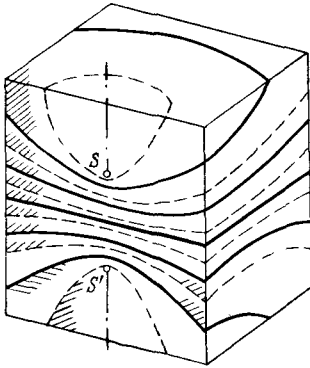


Рис. 1.5. Расположение поверхностей наибольшего (сплошные кривые) и наименьшего (пунктир) почернения в пространстве для двух точечных источников  $S$  и  $S'$  взаимно когерентного излучения.

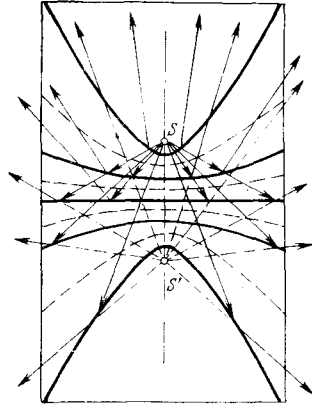


Рис. 1.6. Стадия восстановления мнимого изображения второго источника  $S'$  при освещении голограммы, образованной двумя точечными когерентными источниками света  $S$  и  $S'$ , только одним источником  $S$ .

плавно меняется от наибольшего к наименьшему значению. Однако замена огромного количества поверхностей с плавно меняющимся почернением только двумя поверхностями возможна потому, что две соседние поверхности максимального почернения почти тождественны друг другу и поэтому можно забыть о всех тех поверхностях, которые расположены между ними.

Проявленный светочувствительный объем является голограммой любого из двух источников света. Для того чтобы убедиться в этом, осветим полученную объемную голограмму только одним источником света, например  $S$ . Лучи света испытают отражение от зеркальноподобных поверхностей почернения, образующих систему гиперболических зеркал. В силу оптических свойств гиперболического зеркала лучи, идущие от источника, расположенного в одном из фокусов, отразятся от зеркала и восстановят мнимое изображение источника  $S'$  (рис. 1.6), которое находится во втором фокусе гиперболоида вращения. Поэтому, направив на голо-

грамму лучи света от первого источника света  $S$ , наблюдатель увидит за голограммой второй источник света  $S'$  — его мнимое изображение.

Основными элементами и своеобразными «кирпичиками», из которых состоит голограмма произвольного объекта, являются те голограммы, которые образуются расходящимися и коллимированными пучками взаимно когерентного света. Легко убедиться

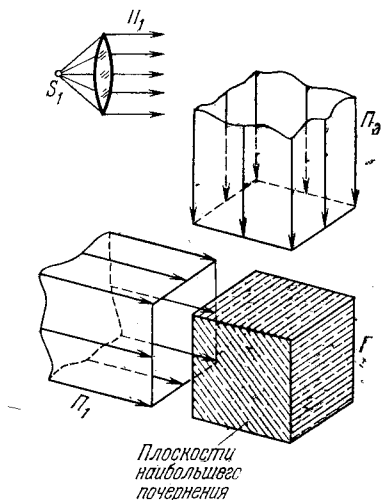


Рис. 1.7. Стадия регистрации интерференционной картины в области пересечения двух коллимированных пучков света. Запечатленная в светочувствительном объеме картина интерференции состоит из совокупности параллельных и эквидистантных плоскостей наибольшего и наименьшего почернения. Это — голограмма любого из двух пучков света,  $P_1$  или  $P_2$ .

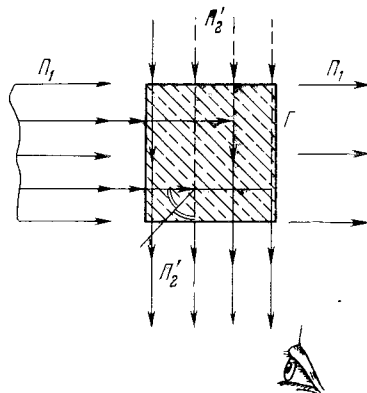


Рис. 1.8. Стадия восстановления второго пучка  $P_2$  при освещении голограммы  $G$  только пучком  $P_1$ . Наблюдатель видит пучок  $P_2'$ , являющийся вторичным пучком, образованным при отражении лучей света пучка  $P_1$  от плоскостей наибольшего почернения голограммы  $G$ .

в том, что голограмма  $G$  двух коллимированных пучков света состоит из эквидистантных зеркальноподобных плоскостей наибольшего почернения (рис. 1.7).

При освещении такой голограммы только одним пучком, например  $P_1$ , возникает вторичный пучок, являющийся мнимым изображением пучка  $P_2$ . Здесь происходит процесс отражения лучей от системы плоских зеркал (рис. 1.8).

Наибольший интерес для голографии имеет сочетание коллимированного и расходящегося пучков, так как свет, рассеянный от освещенного предмета, можно разложить на совокупность пучков расходящихся лучей, идущих от разных точек предмета. Найдем картину интерференции, возникающую при пересечении

коллимированного пучка света и пучка света, расходящегося из одной точки освещенного предмета (рис. 1.9). Лучи света, отраженные от точки  $A$ , войдут в светочувствительный блок под разными углами к лучам коллимированного пучка. Поэтому форма поверхностей почернения и расстояние между ними окажутся различными в разных точках. На рис. 1.9 показан примерный вид интерференционной картины в поперечном сечении для точки  $A$ . Показана только одна из  $10^4$  поверхностей почернения. На выносных рисунках эти поверхности даны при большом увеличении. Минимальный зазор между поверхностями наибольшего (или наименьшего) почернения равен  $\lambda/2$ , или, более точно,  $\lambda/2n$ , где  $n$  — показатель преломления среды, условно принятый здесь равным 1. Для видимого света это расстояние равно около 0,3 мкм.

После экспонирования и проявления блока полученную объемную голограмму установим строго на прежнее место. Точку  $A$  при этом уберем. Если теперь на стадии восстановления голограмму  $G$  осветить опорным пучком  $P_1$ , то благодаря отражению из голограммы выйдет расходящийся пучок света. Лучи, которые пройдут в глаз наблюдателя (рис. 1.10), являются лишь отрезками тех коший лучей, которые существовали на стадии получения голограммы. Глаз дорисовывает эти отрезки до точки их пересечения. Наблюдатель видит светящуюся точку  $A'$  — мнимое изображение точки  $A$ . Напомним, что изображение, которое видит наблюдатель, называется *мнимым*, если для его получения лучи света продолжаютя в направлении, обратном их распространению. Изображение называется *действительным*, если оно образуется лучами света при их прямом продолжении.

С помощью той же голограммы можно получить действительное изображение точки  $A$ . Для этого достаточно изменить направление опорного пучка на обратное (рис. 1.11). Параллельные лучи *обратного опорного пучка* частично отразятся от поверхностей почернения, которые теперь для лучей обратного опорного пучка являются *вогнутыми*, а не *выпуклыми*, как в случае

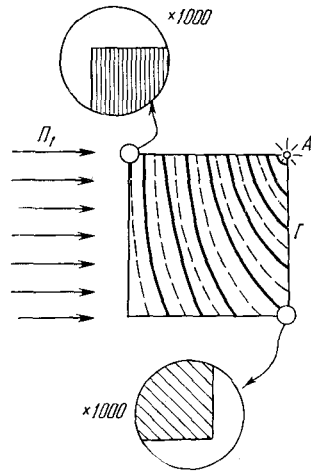


Рис. 1.9. Стадия получения голограммы при интерференции параллельного пучка света  $P_1$  и пучка света, расходящегося из точки  $A$ . Форма поверхностей почернения и расстояние между ними различны в разных точках светочувствительного блока. Дан разрез интерференционной картины в плоскости чертежа, причем нанесена только одна из 10000 поверхностей почернения. Эти поверхности показаны полностью на выносных рисунках с большим увеличением. Наименьшее расстояние между соседними поверхностями почернения равно  $\lambda/2n$ .

прямого опорного пучка. Лучи света, отразившись от вогнутых поверхностей почернения, теперь сфокусируются в точку  $A''$ , которая представляет собой действительное изображение точки  $A$ . Лучи, образующие мнимое изображение, отличаются от лучей, образующих действительное изображение, только направлением распространения. При этом изменение направления распространения лучей опорного пучка на обратное приводит к одновре-

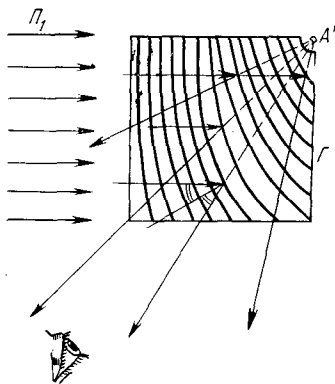


Рис. 1.10. Стадия восстановления мнимого изображения точечного предмета  $A'$  при освещении голограммы  $G$  прямым опорным пучком  $P_i$ . При отражении параллельных лучей света прямого пучка  $P_i$  от поверхностей почернения из голограммы  $G$  выходит расходящийся пучок, образующий мнимое изображение точки  $A$ .

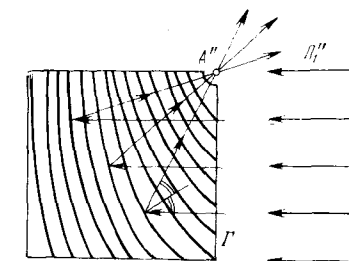


Рис. 1.11. Стадия восстановления действительного изображения точечного предмета  $A''$  при освещении голограммы  $G$  обратным опорным пучком  $P_i''$ .

менно изменению направления восстановленных лучей, и мнимое изображение превращается в действительное.

Здесь полезно использовать несколько упрощенную аналогию. А именно можно сказать, что мнимое изображение создается лучами света, которые, уходя от предмета, распространяются в «будущее». Действительное изображение создается лучами света, которые, возвращаясь обратно к предмету, распространяются в «прошлое».

Действительное изображение точки можно спроектировать на матовый экран, его можно наблюдать также непосредственно. Наблюдатель должен отойти подальше от голограммы. Сходящиеся лучи, пройдя сквозь действительное изображение точки  $A$ , вывернутся и превратятся в расходящиеся. Наблюдатель увидит действительное изображение, обладающее в то же время свойствами мнимого изображения.

## § 1-2. Объемность изображения. Параллакс

Рассмотрим теперь объект наблюдения, состоящий из двух точек  $A$  и  $B$ , например двух пылинок, которые расположены на различных расстояниях от светочувствительного объема. На

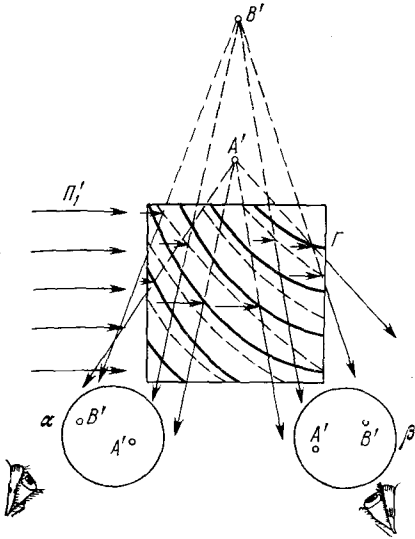


Рис. 1.12. Стадия восстановления мнимого изображения двух пылинок  $A'$  и  $B'$  при освещении голограммы прямым опорным пучком  $\Pi_1$ .

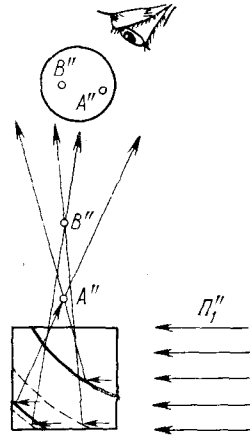


Рис. 1.13. Стадия восстановления действительного изображения двух пылинок  $A''$  и  $B''$  при освещении голограммы обратным опорным пучком  $\Pi_1''$ . Наблюдатель видит обратное расположение пылинок  $A''$  и  $B''$  в пространстве (эффект ложной объемности).

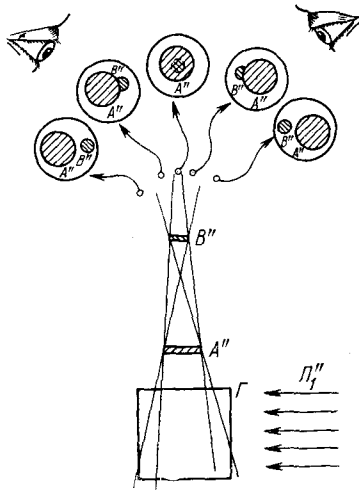


Рис. 1.14. Эффект ложной объемности действительного изображения предметов  $A''$  и  $B''$  при наблюдении с большого расстояния. Исчезает ближний предмет ( $B''$ ), и как бы сквозь него виден предмет ( $A''$ ), расположенный дальше от наблюдателя.

стадии получения голограммы возникнет две системы интерференционных поверхностей — одна от пылинки  $A$ , другая — от пылинки  $B$ . Чем дальше от светочувствительного объема расположена пылинка, тем с меньшей расходимостью в него входят лучи света и, следовательно, тем меньше искривлены поверхности почернения. Этот фактор отображает дальность до пылинки и позволяет предельно полно передать объемность сцены. На стадии восстановления (рис. 1.12) наблюдатель увидит обе пылинки и, меняя точку наблюдения, ощутит глубину и объемность пространства, в котором застыли их изображения. В крайнем левом положении ( $\alpha$ ) пылинка  $B'$  расположена слева от пылинки  $A'$ , а в крайнем правом положении ( $\beta$ ), наоборот, пылинка  $B'$  находится справа от пылинки  $A'$ . Это и есть *эффект параллакса*, создающий ощущение объемности. Осветив голограмму обратным опорным пучком, наблюдатель, расположившись далеко от голограммы, увидит действительные изображения  $A''$  и  $B''$  двух пылинок (рис. 1.13).

Сходящиеся лучи, образующие действительное изображение, по пути успеют вывернуться и превратиться в расходящиеся. Теперь пылинка  $B''$  находится ближе к наблюдателю, чем пылинка  $A''$ . Этот необычный эффект называется ложной объемностью или *псевдоскопией*.

Эффект псевдоскопии лучше всего наблюдать с предметами конечных размеров. В случае мнимого изображения ближний предмет ( $A''$ ) закрывает дальний предмет ( $B''$ ). В случае же действительного изображения исчезает ближний предмет ( $B''$ ) и вместо него и как бы сквозь него виден предмет, расположенный дальше от наблюдателя (рис. 1.14).

### § 1-3. Плоская голограмма

Итак, *объемная голограмма* настолько полно отображает объемный мир, что на стадии восстановления наблюдатель испытывает своеобразный эффект присутствия. Рассмотрим теперь более сложную задачу — отображение третьего измерения в *плоской голограмме*. Эта задача имеет большое прикладное значение потому, что плоские голограммы имеют пока что более широкое применение, чем объемные.

Если объемную голограмму уменьшить по толщине настолько, что расстояние между соседними интерференционными максимумами станет намного превышать ее толщину, то такую голограмму следует считать тонкой или плоской. Принципиального различия между схемами получения объемной и плоской голограммы нет. Однако тонкий слой фотоэмульсии захватывает лишь небольшую часть всего объема, где пересекаются два пучка и где расположатся в будущем поверхности почернения объемной голограммы.



Такая потеря информации, сосредоточенной в области интерференции, не проходит бесследно. В результате плоская голограмма на стадии восстановления образует всегда два изображения — и мнимое, и действительное. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим интерференцию света от двух коллимированных пучков света  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$ , образующих между собой угол  $\theta$  (рис. 1.15). Интерференционная картина состоит из эквидистантных плоскостей наибольшей засветки, параллельных биссектрисе угла  $\theta$ . При замене пучка  $\Pi_1$  на пучок  $\Pi_2$  эти плоскости займут другое

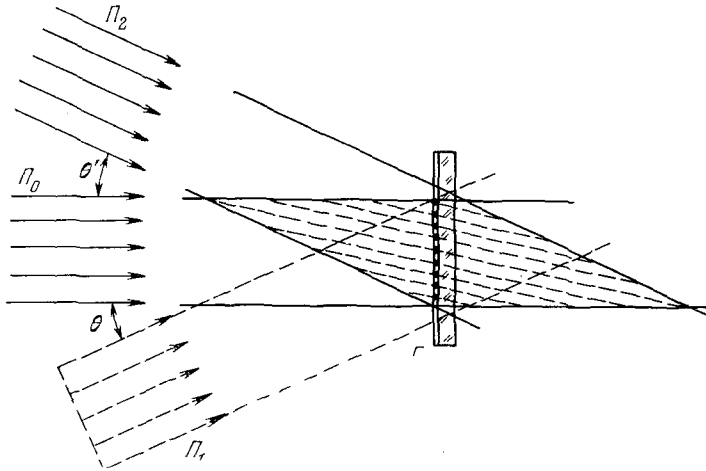


Рис. 1.15. Стадия получения одной и той же плоской голограммы  $G$  с помощью либо двух пучков  $\Pi_0 + \Pi_1$ , либо двух пучков  $\Pi_0 + \Pi_2$  при условии, что  $\theta' = -\theta$ .

положение. Однако структура интерференционных полосок, которые возникнут на плоской голограмме, при такой замене пучков не изменится. Обе плоские голограммы окажутся совершенно идентичными.

При освещении любой из этих двух плоских голограмм только одним прямым опорным пучком (рис. 1.16) наблюдатель увидит одновременно оба восстановленных пучка  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  независимо от того, какой из них освещал фотопластинку на стадии получения голограммы. Нечувствительность плоской голограммы к подобной замене пучков приводит к фундаментальному различию в свойствах плоской и объемной голограмм. Это различие возникает потому, что, вырезав из объемной голограммы тонкий плоский слой, мы навсегда теряем сведения о том, принадлежат ли интерференционные полоски почернения на голограмме выпуклым или вогнутым поверхностям почернения в дополняющей ее объемной голограмме. Но именно этот фактор определяет тип изображения, которое получается на стадии восстановления,—

мнимое или действительное. Лучи света, образующие мнимое изображение от объемной голограммы, возникают при отражении прямого опорного пучка от выпуклых поверхностей почернения, и, наоборот, действительное изображение возникает при отражении лучей обратного опорного пучка от вогнутых поверхностей почернения. Но поскольку всегда можно считать, что полоски почернения на плоской голограмме принадлежат одновременно двум воображаемым поверхностям почернения, как вогнутым, так

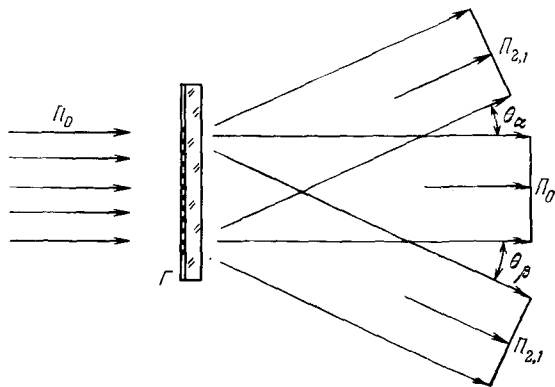


Рис. 1.16. Стадия одновременного восстановления пучков  $P_1$  и  $P_2$  при освещении плоской голограммы прямым опорным пучком  $P_0$  ( $\theta_\alpha = \theta_\beta$ ).

и выпуклым, то на стадии восстановления с необходимостью следует ожидать появления одновременно двух изображений — мнимого и действительного. Именно это наблюдается на опыте.

Пользуясь полезной аналогией, можно сказать, что «будущее» в плоской голограмме, которое отвечает прямому опорному пучку и естественной последовательности событий, и «прошлое», которое вызывается обратным опорным пучком и отвечает обратной последовательности событий, абсолютно неразличимы. Это свойство плоской голограммы накладывает принципиальное ограничение на возможное расположение голографируемых предметов относительно опорного пучка. А именно все предметы должны располагаться только по одну сторону от него. В другом полупространстве не должно находиться ничего, кроме темного фона. В противном случае лучи мнимого и действительного изображений наложатся друг на друга, создавая взаимные помехи. В этом состоит единственное, но в то же время принципиальное ограничение, которое следует учитывать при работе с плоской голограммой.

### § 1-4. Дифракция света на плоской голограмме

Как происходит процесс образования мнимого и действительного изображений при освещении плоской голограммы опорным пучком? Где расположены эти два изображения? В отличие от объемной голограммы плоская голограмма не содержит в себе зеркальноподобных поверхностей. От них остались лишь системы узких полосок или пятен почернения. Поэтому на смену процессу зеркального отражения лучей света, подчиняющемуся правилам геометрической оптики, приходит процесс *дифракции света*.

Дифракция и интерференция света — родственные процессы. Различие между ними состоит в том, что интерференция света, как правило, происходит в области пересечения пучков света, распространяющихся от двух взаимно когерентных источников, в то время как дифракция света — это интерференционное наложение световых волн, образующихся при разрушении фронта плоской волны на микроскопических неоднородностях голограммы.

Строго говоря, дифракция света происходит как на микроскопических, так и на макроскопических неоднородностях. Поэтому при прохождении света через объемную голограмму также происходит процесс дифракции света. Однако дифракцией света в объемной голограмме можно полностью пренебречь, так как величины углов дифракции оказываются очень малыми и это почти не искажает модели зеркального отражения лучей от поверхностей почернения в объемной голограмме. В противоположность этому углы дифракции света на плоской голограмме очень велики и захватывают практически все пространство. Здесь имеются свои закономерности, которые управляют процессом образования изображений на стадии восстановления.

Рассмотрим теперь, как изменится фронт плоской волны при прохождении через плоскую голограмму. В самом простейшем случае картина интерференции двух коллимированных взаимно когерентных пучков света  $P_0$  и  $P_1$  (или  $P_0$  и  $P_2$ ), регистрируемая в плоской голограмме, имеет вид микроскопических полосок, равноотстоящих друг от друга на расстоянии  $a \approx \lambda/\theta$ , т. е. имеет структуру, аналогичную структуре *дифракционной решетки*. После прохождения плоского пучка  $P_0$  через такую простейшую голограмму наступает характерное разрушение фронта электромагнитной волны. Это — результат того, что часть лучей, которые встречаются с полосками почернения, отражается или поглощается и, таким образом, не проходит вправо от голограммы. Остальные лучи, идущие мимо полосок почернения, проходят вправо беспрепятственно. Это приводит к разрушению единого фронта плоской волны опорного пучка, он теряет свою цельность и превращается в совокупность отдельных узких островков, которые

на рис. 1.17 показаны в разрезе в виде коротких отрезков. Такое разрушение фронта волны сопровождается возникновением большого числа вторичных пучков света, которые слева от голограммы отсутствовали. Каждая прозрачная полоска, пропустившая лучи света вправо от голограммы, становится источником вторичных волн, которые, пересекаясь, интерферируют друг с другом. Так возникают *вторичные дифракционные пучки*, ориентированные определенным образом в пространстве. Чтобы определить направление вторичных пучков, следует пользоваться правилом, согласно которому фаза электромагнитных колебаний на фронте вторичной волны имеет в среднем вполне определенное значение. Через образовавшиеся островки разрушенного фронта волны можно провести не один, а несколько плоских фронтов, ориентированных симметрично относительно освещающего пучка.

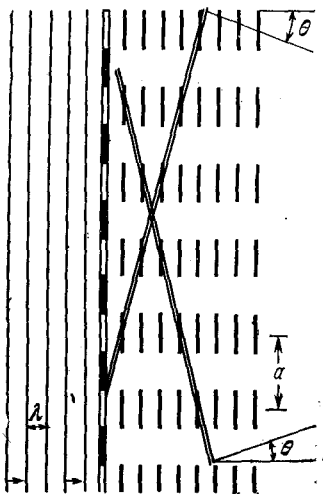


Рис. 1.17. Простейшая голограмма, образованная двумя коллимированными пучками света  $P_1$  и  $P_2$  (см. рис. 1.16). При прохождении света через голограмму фронт волны приводит к явлению дифракции, т. е. к появлению нескольких волновых фронтов, которые справа от голограммы распространяются независимо друг от друга, образуя два вторичных пучка, ориентированных симметрично относительно освещающего пучка. При нарушении определенных условий получения и фотохимического проявления голограммы могут возникнуть вторичные пучки, идущие под углами  $\pm 2\theta$ ,  $\pm 3\theta$  и т. д.

Интенсивность вторичных пучков света обычно резко спадает по мере возрастания кратности угла наклона. Существуют такие условия экспонирования и проявления фотопластинки, при которых интенсивность пучков, идущих под всеми другими углами, кроме  $\pm\theta$ , пренебрежимо мала. В этих условиях наблюдатель увидит только два вторичных пучка, расположенных симметрично относительно освещающего пучка. Эти два пучка образуют мнимое и действительное изображения пучка  $P_1$ .

Аналогично образуются мнимое и действительное изображения предметов. Здесь каждая точка предмета образует на голограмме

волн, которые, пересекаясь, интерферируют друг с другом. Так возникают *вторичные дифракционные пучки*, ориентированные определенным образом в пространстве. Чтобы определить направление вторичных пучков, следует пользоваться правилом, согласно которому фаза электромагнитных колебаний на фронте вторичной волны имеет в среднем вполне определенное значение. Через образовавшиеся островки разрушенного фронта волны можно провести не один, а несколько плоских фронтов, ориентированных симметрично относительно освещающего пучка.

Прежде всего, можно провести фронт волны, параллельный фронту волны освещающего пучка. Это — та часть пучка, которая не испытала поглощения при прохождении через голограмму. Два фронта волны, ориентированных под углами  $+\theta$  и  $-\theta$  к освещающей волне, образуют основные восстановленные пучки. Кроме того, образуется система волновых фронтов, распространяющихся под углами  $\pm 2\theta$ ,  $\pm 3\theta$  и т. д. Интен-

свою систему полос разной ширины и меняющегося шага. Лишь условно ее можно рассматривать как сложную дифракционную решетку. Изменяющийся шаг между полосками почернения приводит к локальным изменениям направлений распространения вторичных дифракционных пучков. Поэтому на стадии восстановления возникает два сферических фронта волны (рис. 1.18). Один из них обращен выпуклостью, а другой — вогнутостью в сторону освещающего пучка. В первом случае образуется мнимое изображение точки предмета, а во втором случае — действительное изображение. Они возникают одновременно и имеют равные интенсивности.

Изображения, восстанавливаемые с помощью плоской голограммы, обладают интересными особенностями. Это — позитивы, т. е. прямые изображения. Если с исходной голограммы снять копию противоположной полярности, например, контактной печатью, т. е. получить «обращенную» голограмму, в которой темные пятна стали светлыми и наоборот, то изображение, восстановленное с помощью такой копии, будет по-прежнему позитивным и неотличимым от изображения, полученного с помощью исходной голограммы. Такая нечувствительность голограммы к изменению ее полярности обусловлена тем, что изображение на голограмме закодировано в виде вариации контраста полос и локального расстояния между ними, а они при изменении полярности не меняются.

Наконец, еще одна особенность голограммы состоит в том, что на одной фотопластинке можно запечатлеть несколько изображений так, что на стадии восстановления эти изображения появляются без взаимных помех. Приемы наложения могут быть различными. Иногда производят несколько экспонирований при одном и том же опорном пучке. При каждом экспонировании освещается только один предмет. Чтобы избежать наложения восстановленных изображений друг на друга, предметы при экспонировании располагают каждый раз в различных местах. В другом варианте предметы устанавливают на одно и то же место, но при этом меняют направление опорного пучка либо поворачивают

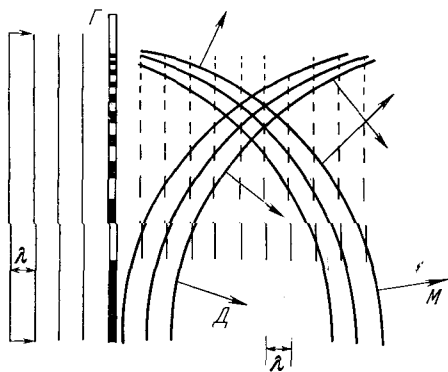


Рис. 1.18. Появление вторичных сферических (или же параболических) волновых фронтов при освещении голограммы точечного источника, имеющего неравномерно расположенные поглощающие полосы. Мнимое изображение точки образуется выпуклым сферическим фронтом  $M$ . Действительное изображение образуется вогнутым сферическим фронтом  $D$ .

саму фотопластинку на некоторый угол в ее плоскости. После нескольких экспонирований голограмма приобретает структуру микроскопических узоров различной ориентации.

Используя технику совмещения изображений нескольких предметов на одной голограмме, можно получить голограмму предметов в цветах. Известно, что любое цветовое впечатление достигается при помощи трех монохроматических цветов, соответствующим образом подобранных по длине волны и по интенсивности. В голографии используется монохроматический свет, т. е. свет одной длины волны. Для передачи цветового ощущения используется техника наложения на одной фотопластинке нескольких голограмм. В одном из возможных вариантов цветной голографии предмет освещают тремя пучками света, длины волн которых подобраны так, чтобы наиболее полно передать цветное ощущение. От тех же трех источников формируются опорные пучки. На одной черно-белой фотопластинке после ее проявления получается голограмма, состоящая из трех независимых компонент: красной, желтой и синей. Чтобы восстановить изображение трехцветного предмета, голограмму помещают в то же самое место, которое она занимала при экспонировании. Каждый из трех пучков при освещении трехкомпонентной голограммы на стадии восстановления образует три мнимых и три действительных изображения — всего девять мнимых и девять действительных изображений. Три из девяти точно совпадут в пространстве, образуя цветное изображение предмета. Остальные изображения, например «красное» изображение от «синей» компоненты, расположатся в других местах, не мешая основному изображению. Перекрестные, мешающие изображения, которые появляются на стадии восстановления, полностью исключаются, если вместо плоской голограммы использовать объемную голограмму.

### § 1-5. Когерентность света

Каким требованиям должна удовлетворять голографическая установка, способная продемонстрировать все те свойства голографии, о которых говорилось выше? Как уже отмечалось, интерференционная картина, образующаяся в области пересечения опорного и предметного пучков света, не должна сдвигаться при экспонировании относительно фотопластинки. Более точно, области пространства, где электромагнитные поля складываются с усилением, не должны сдвигаться при экспонировании в область пространства, где эти поля гасят или ослабляют друг друга. Если вспомнить, что длина волны видимого света равняется примерно 0,6 мкм, а минимальное расстояние между областями наибольшей засветки равно  $\lambda/2n$ , где  $n$  — показатель преломления регистрирующей среды, то легко представить трудности, которые возника-

ют при достижении механической жесткости всех элементов голографической установки в пределах долей микрона. Использование импульсных лазеров существенно упрощает систему, так как длительность импульса может быть сокращена до  $10^{-8}$  сек.

Стационарность интерференционной картины в пространстве также определяется когерентностью света, т. е. его способностью образовывать неподвижную интерференционную картину с высоким контрастом.

Так как расстояние между поверхностями почернения в объемной голограмме прямо пропорционально длине волны света, то любое изменение длины волны света приводит к размытию интерференционной картины. Поэтому в идеальном случае источник света должен испускать свет одной и при этом постоянной длины волны. В цветной голографии каждая из трех цветных компонент должна быть монохроматической.

Однако свет, излучаемый реальными источниками, не является строго монохроматическим. Длина волны света подвержена хаотическим временным и пространственным вариациям, в результате чего всегда излучается спектр длин волн.

Пусть источник излучает свет, длина волны которого подвержена лишь небольшим вариациям, так что ширина спектра весьма мала по сравнению с длиной волны. Каждая компонента этого спектра создаст свою собственную интерференционную картину. За время экспонирования, при усреднении во времени и по разным участкам источника, освещенности разных компонент интерференционной картины усредняются, и это приведет к ослаблению контраста.

*Степень монохроматичности света* характеризуется отношением  $\lambda_0/\Delta\lambda$  средней длины волны света  $\lambda_0$  к разности  $\Delta\lambda$  между наибольшей и наименьшей длинами волн, встречающихся в спектре излучения источника:

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{макс}} - \lambda_{\text{мин}},$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} (\lambda_{\text{макс}} + \lambda_{\text{мин}}).$$

Для того чтобы оценить влияние степени монохроматичности света на контраст интерференционной картины, вернемся к примеру двух точечных взаимно когерентных источников. Пусть теперь источник излучает свет, длина волны которого хаотически изменяется при экспонировании в пределах от  $\lambda_{\text{мин}}$  до  $\lambda_{\text{макс}}$ . Свет с длиной волны  $\lambda_{\text{мин}}$  образует интерференционную картину, изображенную на рис. 1.19 сплошными линиями, а свет с длиной волны  $\lambda_{\text{макс}}$  дает несколько сдвинутую картину, изображенную пунктиром. Полное число образующихся гиперboloидов наибольшей засветки  $N$  равно целому числу полуволн, уместающихся на

отрезке  $S_1S_2$ . Изменение длины волны будет сопровождаться скачкообразным изменением полного числа поверхностей наибольшей засветки и деформацией картины расположения их в пространстве. Появление или исчезновение поверхностей наибольшей засветки при переходе от одной длины волны к другой происходит вблизи полупрямых  $S_1M$  и  $S_2N$ , и поэтому именно здесь возникает наиболее сильная деформация интерференционных поверхностей. По мере удаления от этих полупрямых деформация ослабевает и исчезает совсем вблизи экваториальной плоскости, где свет любой длины волны интерферирует с усилением.

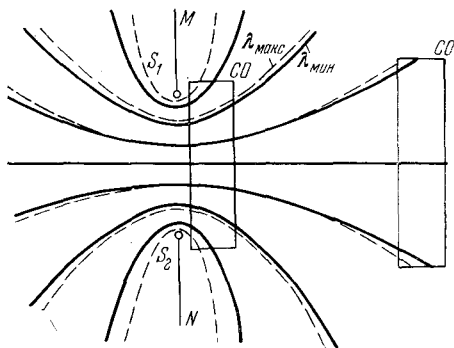


Рис. 1.19. Наложение интерференционных картин в пространстве от двух точечных источников  $S_1$  и  $S_2$ , испускающих одновременно свет двух длин волн:  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$ .

Число зарегистрированных в светочувствительном объеме  $CO$  поверхностей почернения зависит от его размеров и расположения относительно точек  $S_1$  и  $S_2$ . Если светочувствительный объем расположен вплотную к источникам  $S_1$  и  $S_2$ , то поверхности наибольшей засветки захватываются почти полностью. Картина интерференции в этом случае регистрируется наиболее полно.

Изменение длины волны света вызывает размытие интерференционной картины. При этом чем дальше от экваториальной плоскости расположены поверхности почернения, тем сильнее размытие. Степень ослабления контраста постепенно ослабевает по мере приближения к экваториальной плоскости.

Пусть длина волны света изменяется за время экспонирования настолько, что число поверхностей почернения  $N$  возрастает или уменьшается на единицу. Это приведет к потере контрастности примерно у половины всех поверхностей почернения. Отсюда следует вывод: для сохранения контраста у преобладающей части числа  $N$  поверхностей почернения необходимо, чтобы их число варьировалось при экспонировании по тем или иным причинам заметно меньше, чем на единицу. Это в свою очередь означает, что степень монохроматичности света должна заметно превышать полное число поверхностей почернения, образовавшихся в голограмме. Таким образом, чем больше поверхностей почернения регистрирует голограмма, тем жестче требования к монохроматичности света. В свою очередь число поверхностей почернения на голограмме — объемной или плоской — находится



в прямом соотношении с количеством информации, которую можно вместить в голограмму, в частности с четкостью восстановленного изображения и глубиной сцены.

Однако опыт показывает, что только одной монохроматичности света еще недостаточно, чтобы получить контрастную картину интерференции двух пучков света. Вторым важным условием является острая направленность лучей света от источника, или

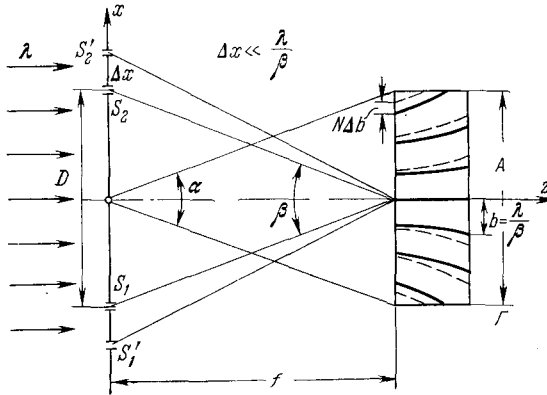


Рис. 1.20. Наложение интерференционных картин в объеме голограммы  $\Gamma$  от двух пар точечных источников  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S'_1$ ,  $S'_2$ , испускающих свет одной длины волны. Сдвиг  $S_1S'_1$  и  $S_2S'_2$  — вдоль оси  $x$ .

*пространственная когерентность.* Отметим здесь, что монохроматичность света, связанную с вариацией частот электромагнитных колебаний и, следовательно, с длительностью дуга волн, называют *временной когерентностью*.

Пространственная когерентность света определяется протяженностью реальных источников света. Легко убедиться в том, что размер источника не должен превышать расстояния между соседними поверхностями почернения, взятыми в различных участках объемной голограммы. В противном случае произойдет их размытие, а это приведет к ослаблению контраста. Поэтому источники света в голографии либо должны иметь очень малые размеры, либо должны располагаться на очень большом расстоянии от предмета и светочувствительного объема.

Рассмотрим теперь, как влияет протяженность реальных источников на контраст интерференционной картины. Для этого заменим каждый из точечных источников  $S_1$  и  $S_2$  двумя источниками, расположенными близко друг к другу (рис. 1.20). Сплошными линиями показана интерференционная картина, образованная светом от источников  $S_1$  и  $S_2$ , а пунктирными линиями — интерференционная картина от источников  $S'_1$  и  $S'_2$ . Так как максималь-

ный сдвиг поверхностей почернения на краях голограммы должен быть значительно меньше расстояния между ними, равного  $b \sim \lambda/\beta$ , где  $\beta$  — угол, под которым видна пара источников  $S_1$  и  $S_2$ , то контраст интерференционной картины не ослабнет, если протяженность источников вдоль оси  $x$  будет удовлетворять условию

$$S_1 S'_1 = S_2 S'_2 = \Delta x \ll \lambda/\beta.$$

Полное число интерференционных поверхностей, уменьшающихся в голограмме размером  $A$ , равно

$$N = A \frac{\beta}{\lambda}.$$

В оптимальном случае размер голограммы  $A$  равен примерно длине отрезка  $S_1 S_2$ , что эквивалентно равенству  $\alpha \approx \beta$ .

Таким образом, чем дальше от источника расположена голограмма, т. е. чем меньше угол  $\beta$ , тем больше допустимый размер

источника  $\Delta x$ . Аналогичные рассуждения приводят к следующим оценкам допустимых размеров протяженного источника вдоль осей  $y$  и  $z$ :

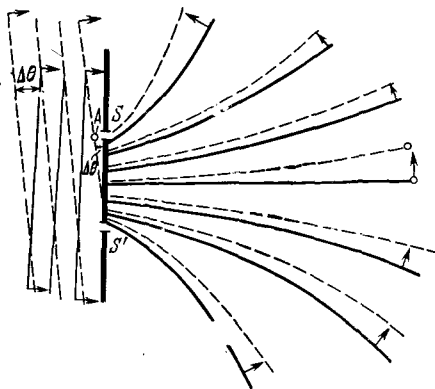
$$\Delta y \ll \lambda/\beta, \quad \Delta z \ll \lambda/\beta^2.$$

Из сказанного следует вывод о том, что для достижения высокой контрастности интерференционной картины необходимо либо иметь источники монохроматического света очень малых размеров, либо же удалять их на достаточно большое расстояние. В том и другом случае источник должен уместиться в объеме пространственной когерентности, определяемом величинами

Рис. 1.21. Влияние расходимости лучей  $\Delta\theta$  в коллимированном пучке на контрастность интерференционной картины, образующейся справа за экраном с двумя точечными отверстиями  $S$  и  $S'$ .

нами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . При этом чем лучше выполняются неравенства, тем выше степень пространственной когерентности. Для точечного монохроматического источника  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$  степень пространственной когерентности максимальна и ее можно считать равной единице.

Малые размеры источника нужны фактически для того, чтобы лучи света имели острую направленность. Пространственную когерентность можно также выразить через угловую расходи-



мость пучка. Возьмем в качестве исходной плоскую волну, падающую на непрозрачный экран с двумя точечными отверстиями, заменяющими точечные источники  $S$  и  $S'$  (рис. 1.21). Найдем допустимые вариации наклона плоской волны, исходя из требования сохранения высокого контраста интерференционной картины, образующейся за экраном. Для этого поворот фронта плоской волны должен приводить к малым вариациям фаз в точках  $S$  и  $S'$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\delta}{\lambda} \ll 1.$$

Поскольку  $\delta \approx D \cdot \Delta\theta$ , где  $\Delta\theta$  — угол между двумя плоскими фронтами в пучке, а  $D$  — расстояние между точечными отверстиями  $S$  и  $S'$ , то допустимая угловая расходимость пучка ограничена условием

$$\Delta\theta \ll \lambda/D.$$

Если  $l$  — расстояние от источника света до экрана, то угловая расходимость  $\Delta\theta$  эквивалентна его поперечным размерам

$$\Delta x = l \cdot \Delta\theta \ll l \frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda}{\alpha},$$

которые определены условием, полученным выше.

Итак, когерентность света, т. е. его способность создавать неподвижную и контрастную интерференционную картину в пространстве, определяется двумя факторами:

1) монохроматичностью света, или временной когерентностью; степень монохроматичности света, равна  $\lambda_0/\Delta\lambda$ , должна превышать число поверхностей почернения  $N$ , уместящихся на голограмме;

2) острой направленностью лучей света, или пространственной когерентностью; размеры источников света должны уместиться в достаточно малой части объема пространственной когерентности.

### § 1-6. Источники света в голографии

Для того чтобы понять, что скрывается за ограничениями размеров источника света в голографии, которые были получены выше, и насколько трудно их выполнить, оценим размеры источника, освещающего голограмму размером  $3 \times 3 \text{ см}^2$ , отстоящую от источника на расстоянии  $30 \text{ см}$ . В этом случае угол  $\alpha = 1/10$  радиан, а объем пространственной когерентности определяется размерами  $\Delta x_0 \ll 5 \text{ мкм}$ ,  $\Delta y_0 \ll 5 \text{ мкм}$ ,  $\Delta z_0 \ll 50 \text{ мкм}$ . Поэтому источник должен иметь микроскопические размеры. Изготовить такой источник практически невозможно. Вместо этого берут обычный источник, например ртутную лампу с монохроматором,

и диафрагмируют свет либо удаляют ее на очень большое расстояние. Если ртутная лампа имеет размер 1 см, то при отсутствии диафрагмы в нашем примере ее придется удалить более чем на 100 м. Для получения голограммы больших размеров или для повышения плотности информации на ней источник света придется отодвинуть на расстояние в несколько километров. Время экспонирования при этом достигнет одного и более года! По мере увеличения расстояния между источником и голограммой пространственная когерентность непрерывно растет, но при этом сильно падает освещенность. Коэффициент использования света обычных источников в голографии весьма низок и не превышает, как правило,  $10^{-8}$ . Этот факт послужил основанием для безоговорочного утверждения, согласно которому острая направленность лучей света несовместима с их высокой интенсивностью. Изобретение лазера, по существу, опрокинуло это утверждение, которое теперь относится только к обычным, нелазерным источникам света.

Анализируя временную и пространственную когерентность света, хочется невольно сопоставить обычный свет и радиоволны. Основное различие между электромагнитными возмущениями, которые создаются электронами, колеблющимися в передающей антенне радиостанции, и излучением обычных источников света состоит в том, что процесс излучения света не является единым и непрерывным процессом. В общем случае человек не может им управлять. Эта особенность вызвана тем, что свет образуется в результате паложения множества одиночных излучательных актов. Вместо одной радиоантенны при излучении радиоволн в случае света имеется огромное число атомных антенн, каждая из которых излучает свет независимо. При беспорядочном паложении самопроизвольно протекающих процессов образуется свет с весьма неблагоприятными для голографии характеристиками.

Согласованные движения молекул воздуха под действием звучащей струны являются хорошим аналогом согласованных колебательных движений электронов в радиоантенне под действием переменного электрического поля. Нельзя ли вызвать аналогичный процесс в атомах, излучающих свет? Нельзя ли заставить атомы в разрядной трубке излучать свет так же согласованно, как струна создает звук или как антенна излучает радиоволны? Решение этой проблемы воплощено сейчас в лазере.

Как же достигается монохроматичность и пространственная когерентность в лазере? Рассмотрим схему работы газового лазера непрерывного действия. Один из элементов лазера — стеклянная трубка, заполненная смесью газов определенного состава. При включении лазера в ней загорается электрический разряд, под действием которого атомы переходят в возбужденное состояние. Для некоторых возбужденных состояний можно создать

такие условия, что атомы будут находиться в них достаточное время. Тогда удастся накопить их в большом количестве, так что индуцированные акты излучения начнут преобладать над самопроизвольными. Плазма в разрядной трубке превращается в активную среду, которая способна усиливать свет тех длин волн, которые совпадают с длиной волны, испускаемой при разряде долгоживущего возбужденного состояния. Особенность этого процесса усиления света состоит в том, что свет, испускаемый индуцированно, точно копирует характеристики света, положившего начало лавинному процессу усиления света в лазере. При этом сохраняются неизменными не только длина волны, но также направление распространения луча и его поляризация. Благодаря этому свет, пройдя через активную среду, лавинообразно увеличивает свою интенсивность, не теряя при этом своего первоначального направления.

Высокую интенсивность пучка света, выходящего из лазера, удается получить только при многократном прохождении пучка через активную среду. Для этого вне разрядной трубки помещают зеркала, которые отбирают только остронаправленные лучи. Все лучи света, хотя бы немного отклонившиеся от оптической оси лазера, попадают на стенки разрядной трубки и выбывают из игры. Процесс многократного прохождения света через разрядную трубку лазера эквивалентен удалению на очень большое расстояние того первого атома, который удачно испустил луч подходящей длины волны и направления. В гелий-неоновом лазере непрерывного действия лучи света пронизывают разрядную трубку около  $10^5$  раз, прежде чем выйдут наружу через полупрозрачное зеркало. Это означает, что эквивалентный источник света удален от наблюдателя на расстояние примерно в 100 км! Однако такая удаленность не сопровождается потерей света.

При помощи этих же зеркал достигается высокая монохроматичность света. При каждом акте отражения света от зеркала, которое имеет тонкое покрытие и является, по существу, интерференционным фильтром-монохроматором, различные длины волн отражаются по-разному. Наибольшей проходимостью обладают те лучи света, длина волны которых совпадает с длиной волны перехода в активной среде. Система из двух зеркал является резонатором, который настраивается на эту длину волны. Лучи света пронизывают этот резонатор огромное число раз, и после каждого нового прохождения отбор определенной длины волны происходит все острее и острее. После  $10^5$  прохождений степень монохроматичности света достигает значения  $10^6$  и больше. В этих условиях легко получить голограммы с  $10^5$  поверхностей или полосок почернений.

Сочетание высокой интенсивности лазера с острой направленностью и весьма высокой монохроматичностью делает его почти

незаменимым элементом голографической установки. Таким образом, пример газового лазера непрерывного действия убеждает нас в том, что в определенных условиях атомы превращаются в согласованно действующий источник когерентного света высокой интенсивности. Этот источник имеет микроскопические эффективные размеры, и его можно назвать *оптической радиостанцией*. Излучением такой оптической радиостанции можно управлять, как управляют процессом излучения обычных радиоволн. Так, например, при модуляции лазерного пучка во времени в зоне прямой видимости луча можно передавать сотни телефонных разговоров, а в ближайшем будущем число их возрастет до нескольких тысяч и, кроме того, появится возможность передачи телевизионных программ. В принципе, лазерный луч способен переносить гораздо больший поток информации, чем радиосигналы больших длин волн. Однако для голографии гораздо большее значение имеет другое свойство лазерного пучка, когда он подвергается *пространственной*, а не временной модуляции. Выполняя эту функцию, лазерный луч приобретает новые информационные свойства, которые реализуются лишь в однопроводной системе связи. При лазерном освещении не возникает того неприятного «шерепутывания проводов», которое наблюдается при обычном, некогерентном освещении. Если, например, перед фотообъективом фотокамеры поместить матовое стекло, то изображения мы не увидим. Между тем, если в голографии на пути лазерного пучка поместить неподвижное матовое стекло, никаких пагубных последствий не возникнет. Фронт волны независимо от того, принадлежит ли он опорному или предметному пучку в голографии, примет лишь другую форму. Для голографии эти деформации оказываются обратимыми, и их можно устранить на стадии восстановления. Действительное изображение образуется лучами света, которые идут в «прошлое» и, пройдя через то же матовое стекло, но в обратном направлении, без искажений восстанавливают изображение предмета. Осуществить такой же опыт при некогерентном освещении, например в фотографии, нельзя по той простой причине, что для регистрации волнового фронта требуется голографическая установка с когерентным источником освещения. На обычной фотографии информация о форме волнового фронта полностью отсутствует.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешающей способности голограммы, который тесно связан с размерами объема пространственной когерентности. Если две точки предмета попадают в один и тот же элементарный объем когерентности, то они образуют почти одинаковые интерференционные картины. Поэтому на стадии восстановления вместо двух точек появится одна и при этом темного размытая. Если же две точки предмета достаточно далеки друг от друга, так что они принадлежат разным объемам когерентности, то на стадии восстановления они будут видны раздельно.

но. Отсюда следует вывод: в голографии разрешающая способность по предмету равна объему когерентности. Поскольку размеры объема когерентности находятся в обратном соотношении с размерами голограммы, то чем больше размер голограммы, тем выше разрешающая способность по предмету. Такая же закономерность существует в фотографии, где разрешающая способность по предмету зависит от апертуры объектива.

Разрешающая способность по предмету переплетается с вопросом о разрешающей способности фотоэмульсии, на которой регистрируется картина интерференции. Так как среднее расстояние между соседними полосками почернения равно  $\lambda/\alpha$ , то разрешающая способность должна быть несколько лучше этой величины, чтобы хорошо очертить каждую интерференционную полоску. Если, например,  $\alpha = 1/10$ , то среднее расстояние между полосками равно  $\lambda/\alpha = 100\lambda \sim 5 \text{ мкм}$ , и для качественной регистрации такой интерференционной картины требуется фотоэмульсия с разрешением не хуже, чем  $200 \text{ линий/мм}$ , например  $1000 \text{ линий/мм}$ . Требования к разрешающей способности фотоэмульсии в голографии, как правило, гораздо выше, чем в обычной фотографии.

### § 1-7. История голографии

Несмотря на многовековую практику применения света в информационных целях, до последнего времени его информационные свойства использовались лишь частично. Это происходило потому, что человек не располагал физическим прибором, который давал бы ему возможность так зарегистрировать световые волны, рассеянные предметом, чтобы затем полностью воспроизвести их и таким образом воссоздать изображение предмета в пространстве.

Любой приемник света — человеческий глаз, фотоэмульсия или фотоэлектронный умножитель — это квадратичный детектор, способный откликнуться только на среднюю интенсивность света при экспонировании или же сосчитать число фотонов, упавших на него. Ни один из детекторов света не может непосредственно зарегистрировать распределение в пространстве мгновенных значений амплитуды и фазы электромагнитного поля в световой волне.

Только сам свет годится в качестве эталона. При эталонном сравнении двух пучков света возникает интерференционная картина. Учение об интерференции так же старо, как и вся физическая оптика. Однако вплоть до середины XX века интерференционные приборы применялись как *пассивные* методы исследований. Наблюдатель был вынужден каждый раз совершать преобразование или пересчет показаний, полученных в опыте, прежде чем получить окончательный результат измерений.

Так продолжалось до 1947 г., пока английский физик Деннис Габбр (по происхождению из Венгрии), не изобрел голографии,

т. е. способа регистрации формы и яркости волнового фронта стационарной картины поля. Термин «голография» происходит от греческого слова «олос» — полный и «графо» — пишу и означает: «полная запись», т. е. запись пространственной структуры световой волны или волнового фронта, распространяющегося от наблюдаемого объекта.

Идея голографии возникла у Габора при анализе оптического парадокса, который длительное время привлекал его внимание. Этот парадокс связан с процессом образования оптического изображения. Как известно, фотографическое изображение получается четким только при определенном расположении предмета, фотообъектива и фотопластинки. Между тем лучи света, образующие изображение на фотопластинке, не исчезают на участке между объективом и фотопластинкой, а также к ним не добавляются посторонние лучи. Это означает, что изображение предмета существует в скрытом виде в любой плоскости между объективом и фотопластинкой, например в плоскости, которая лежит непосредственно перед или позади фотообъектива. Однако, поместив фотопластинку сразу же позади объектива и произведя ее экспонирование в лучах света, рассеянного предметом, мы ничего, кроме сплошного поля почернения, после проявления не обнаружим. Возникает вопрос: почему нельзя таким образом сохранить информацию о предмете?

Разбираясь в причинах этого парадокса, Д. Габор развил новую теорию образования изображения, в которой были использованы понятия теории информации, бурно развивавшейся в то время. Как известно, изображение предмета состоит из  $N$  мельчайших различных элементов, которые условно можно назвать «точками» изображения. Размер элемента определяется объемом пространственной когерентности, но не может быть сделан меньше длины волны света. Если монохроматический свет, освещающий предмет, не является пространственно когерентным, то для записи информации об изображении предмета, если ее регистрировать в плоскости непосредственно позади фотообъектива, при условии, чтобы изображение имело то же самое качество, как и изображение, полученное с помощью фотообъектива, необходимо зарегистрировать не  $N$  точек, а  $N^2$  точек, т. е. во много раз больше. Иначе говоря, световое поле в плоскости объектива задается  $N^2$  точками, если само изображение состоит из  $N$  точек. Таков вывод теории Д. Габора. Приведем пример. Если на экране телевизора в одном кадре содержится около  $10^6$  точек, то для записи информации об этом изображении без помощи линз требуется получить  $10^{12}$  элементарных данных. Очевидно, что такого бесцельного увеличения объема информации никто не делает и все пользуются надежным методом образования изображения с помощью фотообъектива.



Причину столь огромного возрастания числа информационных элементов легко понять, если учесть, что пространственно некогерентный свет возбуждается огромным количеством независимых функционирующих оптических радиостанций. Теория Д. Габора утверждает, что в самом общем случае число таких элементарных оптических радиостанций равно числу точек в изображении. Иначе говоря, суммарное волновое поле перед фотообъективом состоит из  $N$  компонент. Чтобы расчленить суммарное поле на эти компоненты, требуется огромное количество времени, и поэтому за эту задачу никогда никто не брался.

Однако положение качественно меняется, если предмет осветить пространственно когерентным светом. В этих условиях возникает контрастная интерференционная картина. А этого достаточно, чтобы обойтись без помощи объектива. Согласно теории Д. Габора для регистрации  $N = n \cdot n$  точек изображения без помощи линзы достаточно создать контрастную интерференционную картину, состоящую из  $n$  полос. Это означает, что размер элемента изображения вдоль оси  $Ox$  равен примерно расстоянию между интерференционными полосами. Таким образом, пространственно когерентное освещение позволяет записать данные об  $N$  элементах, чтобы затем полностью восстановить изображение предмета. И это уже не простой эквивалент фотографии, а голографический метод, эффективно отображающий третье измерение. Если голограмма содержит меньшее число интерференционных полос либо из-за малых размеров голограммы, либо из-за большой удаленности от объекта, то размер информационного элемента увеличивается, разрешение по предмету ухудшается и, таким образом, информационная эквивалентность предмета и голограммы уже отсутствует.

Таковы положения теории информации, лежащие в основе теории образования изображений и голографического метода. Непосредственной проблемой, которая толкнула Д. Габора к открытию голографии, явилась задача усовершенствования электронного микроскопа. В то время казалось, что электронная линза, являющаяся узлом электронного микроскопа и управляющая фокусировкой электронного пучка, обладает неустранимыми дефектами, которые приводят к низкому качеству изображений. Д. Габор предложил метод, с помощью которого низкогокачественное изображение можно превратить в высококачественное.

Д. Габор рассуждал примерно так. Пусть картина, которая регистрируется в электронном микроскопе, несколько искажена. Чтобы устранить эти искажения, полученную фотографию следует рассматривать с помощью оптической системы, которая обладает теми же искажениями, что и электронная линза. Метод обычной фотографии здесь, конечно, непригоден, так как на первой стадии требуется зарегистрировать не само изображение, а фронт

искаженной волны. Сформулировав так проблему, Габор ввел второй, опорный пучок, который первоначально назывался *когерентным фоном*. Предметом регистрации стала интерференционная картина, образующаяся при наложении когерентного фона на предметную волну.

В 1947—1948 гг. Д. Габор с сотрудником И. Вильямсом изготовил первые голограммы. Это были плоские голограммы, для

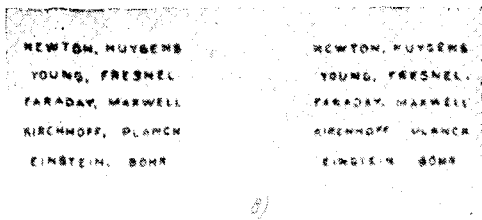
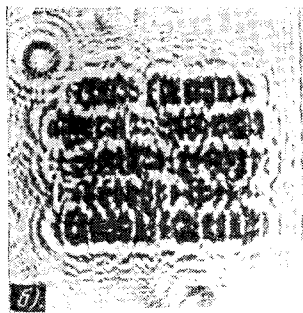
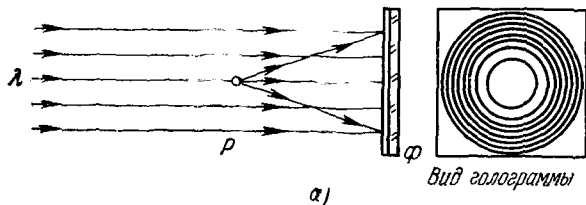


Рис. 1.22. Голография Габора. Стадия получения голограммы. а) Когерентный пучок света освещает точечный предмет и саму фотопластинку  $\Phi$ . Голограмма имеет вид зонной картины Френеля; б) одна из первых голограмм, полученных Д. Габором в 1948 г.; в) слева — оригинальный текст; справа — восстановленное действительное изображение, отфильтрованное специальными масками от лучей мнимого изображения.

получения которых использовался сильно сколлимированный пучок от ртутной лампы. Размер диафрагмы равнялся нескольким микронам, а время экспонирования — несколькими часам. Принцип действия голографии Д. Габора показан на примере получения голограммы пылинки (рис. 1.22). Проэкспонированную и проявленную фотопластинку освещают на стадии восстановления тем же когерентным пучком света (рис. 1.23). Д. Габор доказал теоретически и экспериментально, что его система регистрации обладает свойством *обратимости*. Изображение предмета на стадии восстановления возникает как бы автоматически. После этого открытия интерференционные приборы приобрели черты активного метода.

Недостатки первоначальной схемы Д. Габора состояли в том, что на стадии восстановления два изображения — мнимое и действительное — создавали взаимные помехи. Кроме того, исследуемый образец мог быть только полупрозрачным, так как в противном случае блокировался когерентный фон. Это сужало класс предметов, к которым можно было применить голографический метод. Последователи Д. Габора, пытаясь устранить недостатки его первой схемы, использовали много различных приемов, но никто из них не последовал по пути, предложенному самим Д. Габором и заключающемуся в том, чтобы использовать оптические светоделители. В работе Д. Габора и В. Госса, выполненной в 1951—1956 гг., подобные светоделители были использованы с целью устранения наложения мнимого и действительного изображений в голографическом оптическом микроскопе. Однако эта работа не получила поддержки ни фирм, ни институтов и была опубликована только в 1966 г.

Д. Габор полагал, что он приступит затем к опытам на электронном микроскопе. Однако работы по применению голографии в электронном микроскопе, несмотря на усилия физиков, вскоре заглохли. Позднее был потерян сам смысл этих исследований, так как улучшение качества изображения в электронном микроскопе было достигнуто другими средствами. Планы Д. Габора оказались нереализованными, но идеи о голографии остались.

Очередная волна прогресса наступила примерно через 15 лет, в 1962—1964 гг., после того как в физической лаборатории появился лазер. Поворотным пунктом явились эксперименты американских радиофизиков и оптиков И. Лейта и Дж. Юпатниекса, открывших новую эру в развитии голографии. Опираясь на идеи, почерпнутые из теории связи и физической оптики, И. Лейт и Дж. Юпатниекс отделили в пространстве опорный пучок от предметного и этим полностью устранили взаимные помехи между мнимым и действительным изображениями. В их установке опорный и предметный пучки пересекались непосредственно перед фотопластинкой (рис. 1.24). Год спустя Э. Лейт и Дж. Юпатниекс получили объемное восстановленное изображение, реализовав тем самым одно из предсказаний Д. Габора.

Ближе всего к решению проблемы пространственного разделения мнимого и действительного изображений находился А. Ломан, который в 1956 г. предложил одну из схем так называемой *однополосной фильтрации*. Почти одновременно с блестящими

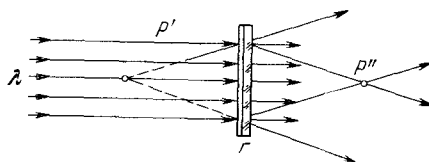


Рис. 1.23. Стадия получения изображения. При освещении голограммы образуются два изображения: мнимое  $\rho'$  и действительное  $\rho''$ , лучи от которых накладываются друг на друга.

опытами И. Лейта и Дж. Юпатниекса А. Ломан в 1961 г. разработал интерференционную систему, основным элементом которой являлись дифракционные решетки. Ахроматизм системы А. Ломана позволял получать от ртутной лампы голограммы с гораздо большим числом интерференционных полос, чем в первоначальной схеме Д. Габора. Однако это было осуществлено в 1966 г., когда опыты с ахроматической голограммой выполнили И. Лейт и Дж. Юпатниекс.

После введения Лейтом и Юпатниексом диффузного освещения предмета качество восстановленных изображений еще больше

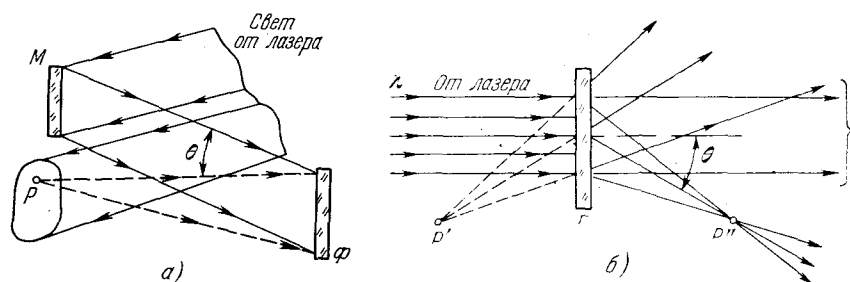


Рис. 1.24. Схема голографии Лейта — Юпатниекса. а) Стадия получения голограммы. Предметный и опорный лучи разделены в пространстве; б) стадия получения восстановленных изображений. Мнимое восстановленное изображение  $P'$  и действительное изображение  $P''$  разделены в пространстве.

повысилось. Информация на голограмме перестала быть локальной. Голограмма приобрела высокую степень надежности. Каждая точка на фотопластинке теперь подвергалась действию света, рассеянного всеми точками объекта, и, наоборот, свет, рассеянный каждой точкой объекта, освещал всю поверхность фотопластинки. Благодаря этому в каждом небольшом участке голограммы в закодированном виде хранилось все изображение! Было доказано, что *голографический метод кодирования информации* является предельно надежным и обладает в то же время наибольшей полнотой отображения трехмерного мира.

Дальнейший вклад в голографию сделал Дж. Строук. Разрабатывая в течение многих лет методы изготовления и контроля качества дифракционных решеток с предельно высокими параметрами, Дж. Строук находился ближе к голографии, чем кто-либо другой из его оптиков-современников. После завершения в 1956—1961 гг. исследования по интерферометрии дифракционных решеток, обладающих несовершенной структурой, Дж. Строук перешел в голографию.

Дж. Строук разработал новые схемы получения голограмм; сформулировал некоторые направления разработок голографического рентгеновского микроскопа; обосновал и осуществил метод

повышения разрешающей способности по предмету с использованием протяженных источников когерентного света. Наконец, Дж. Струок совместно с Д. Габором доказал, что первоначальную схему Д. Габора, предложенную им в 1948 г., можно видоизменить так, что устраняются все ее недостатки, в частности взаимное наложение мнимого и действительного изображений.

Первым оптиком в Советском Союзе, который создал новое направление в голографии, был Ю. Н. Денисюк. Начав в 1958 г. эксперименты с липпмановскими эмульсиями, Ю. Н. Денисюк в 1962 г. изготовил *первые объемные голограммы*, которые, как известно, образуют только одно восстановленное изображение. Это — одно из достоинств данного метода. Количество информации, которое можно уместить в объемной голограмме, намного превышает то, что умещается в плоской голограмме Д. Габора. Теория объемной голограммы Ю. Н. Денисюка и ее основных характеристик была дополнена Ван Хирденом в 1963 г. Объемная голограмма обладает интересными свойствами. Она может выполнять функцию оптического коллиматора, монохроматора и, как следствие этих двух свойств, — быть фильтром когерентности, отбирая из всего излучения только когерентную монохроматическую компоненту. Рассмотрим эти интересные свойства объемной голограммы.

При отражении монохроматического света от двух и более поверхностей почернения, образующих объемную голограмму, возникают процессы интерференции и дифракции света. Некоторые лучи света складываются с усилением, а другие — с ослаблением. Характер интерференции зависит от *оптической разности хода*. В простейшем случае параллельных эквидистантных плоскостей почернения оптическая разность хода между лучами, отраженными от соседних плоскостей почернения, равна

$$\Delta = 2d \sin \theta,$$

где  $d$  — зазор между плоскостями, и, таким образом, зависит от угла скольжения  $\theta$ . Сложение волн с усилением происходит в том случае, если величина  $\Delta$  равна целому числу длин волн. Все лучи, для которых это условие (условие Брэгга — Вульфа) нарушено, при отражении от плоскостей почернения испытывают ослабление. Чем больше число поверхностей почернения в объемной голограмме, тем острее отбор только разрешенных направлений или только разрешенных длин волн. При этом определенному направлению соответствует определенная длина волны света. В этом смысле здесь имеется некоторая аналогия с лазерным пучком, расходимость которого уменьшается по мере увеличения числа прохождений луча между зеркалами, образующими оптический резонатор. Поэтому, если объемную голограмму осветить коллимированным пучком белого света, то из его широкого спектра голограмма

отберет свет только одной длины волны. Чем больше число поверхностей почернения в объемной голограмме, тем выше степень монохроматичности отраженного пучка света. И здесь имеется аналогия с оптическим резонатором и многолучевым интерферометром. Чем больше число эффективных отражений, тем острее разрешающая способность интерферометра. Чтобы получить восстановленное изображение от объемной голограммы, ее необходимо осветить пучком света той же длины волны и под тем же углом, что и на стадии получения объемной голограммы. Если же условие Брэгга — Вульфа нарушено, например, из-за усадки эмульсионного блока после его проявления, то восстановленное изображение исчезнет. Однако если объемную голограмму осветить пучком белого света, то голограмма сама выберет из его спектра лучи необходимой длины волны и направления, и изображение вновь появится. Вот почему на стадии восстановления с объемной голограммы не обязательно использовать лазер. Годаются простые источники света, например карманный фонарик или Солнце.

Очень важно подчеркнуть, что при освещении объемной голограммы светом той же длины волны и под тем же направлением, что и на стадии получения объемной голограммы, образуется вторичная интерференционная картина, которая в точности совпадает с поверхностями почернения, образующими саму объемную голограмму. Это приводит к тому, что все волновые характеристики света словно исчезают. Поэтому свойство объемной голограммы удается объяснить, и достаточно полно, не прибегая к волновым свойствам света. При этом можно пренебречь процессом дифракции света, так как углы дифракции малы и лишь незначительно искажают картину, полученную с помощью законов геометрической оптики.

Когерентность и явление интерференции света, составляющие основу голографии, тщательно изучались в течение многих лет известными специалистами по физической оптике, в частности французскими учеными Андре Маршалем, Полем Кросом и Морисом Франсоном, немецким оптиком Цернике, а также американскими учеными О'Нейлом и Катроном. В настоящее время голографию разрабатывают во многих лабораториях мира.

Голографию нельзя рассматривать лишь как альтернативу классической фотографии. Более того, голография выходит далеко за пределы оптики и в недалеком будущем станет мощным инструментом кибернетики. С помощью голографии можно выполнять широкий класс математических операций над комплекснозначными функциями, представленными в виде транспаранта, модулирующего в пространстве амплитуду и фазу световой волны. Голография дала толчок к образованию самостоятельного раздела современной физической оптики, который так относится к доголо-

графической оптике, как теория комплексных функций относится к теории действительных функций. Сравнение это — не только красивая аналогия. Оно отражает новые «математические возможности» голографической оптики. С помощью голографии можно выполнять следующие вычислительные операции над комплекснозначными функциями: сложение и вычитание, умножение и деление, дифференцирование любого порядка, некоторый класс интегральных операций и оперативное решение некоторых уравнений в свертках.

Блестящим примером математических возможностей голографии являются *искусственные голограммы*, с помощью которых А. Ломан и Д. Парис создали *двухмерный транслятор*. Не менее удивительной является система *пространственного дифференцирования* оптических сигналов, разработанная С. Ловенталем и И. Бельво в духе методов оптической фильтрации А. Марешаля и П. Кроса.

Преимущество голографических методов обработки информации состоит в том, что в голографии исходная информация обрабатывается практически одновременно по всему полю. Когерентная оптическая система не нуждается в операциях сканирования или развертки изображения либо в разнесении действительной и мнимой частей комплекснозначной функции в отдельные каналы, как этого требует логика электронных цепей.

С появлением голографии возникла возможность корректировать оптические свойства и исправлять качество изображений после полного окончания опыта, т. е. *апостериорно*. Последний пример — восстановление четкого изображения земной поверхности на размытой фотографии, сделанной при плохой наводке на фокус фотокамеры на космическом корабле «Джемини-12». Стали также осуществимы опыты по оптической интерференции двух пучков света, которые *не перекрываются ни во времени, ни в пространстве*.

Голография продолжает бурно развиваться. Ю. Н. Денисюк разработал систему получения голограмм, когда опорная и предметная волны света отличаются по частоте. Эксперименты, в которых наблюдалась бегущая интерференционная картина в аналогичных условиях, были выполнены Ф. Фишером. Большое значение приобрела голография в прикладных задачах. Создан прибор для наблюдения в большом объеме пространства частичек аэрозоля и капелек тумана. Аналогичный прибор начали применять физики для регистрации частиц. Изготовлен голографический микроскоп. Исследуются возможности использования голографического метода в акустике, в радиодиапазоне и в инфракрасных лучах. Широкое распространение получила голографическая интерферометрия и, в частности, метод двойного экспонирования. Ведутся разработки приборов для сортировки информации,

в частности данных геофизической разведки, и для распознавания образов. Пристальное внимание привлекает проблема голографического телевидения и кино.

Интересно отметить, что через три года после открытия голографии, в 1951 г., возникла *спектроскопия Фурье*, основоположником которой явился П. Феллджет. Без труда можно провести параллель между идеей о замене изображения на его *дифракционный образ* (Д. Габор) и идеей о замене спектра на его *фурье-образ* (А. Майкельсон и П. Феллджет). Спектроскопия Фурье, достигшая большого развития, связана с именем П. Жакино, а также Жанин и Пьера Кон. Последний этап широкого распространения спектроскопии Фурье связан с новыми методами *быстрого преобразования Фурье* на электронно-вычислительной машине. Этот же прием в значительной степени способствовал распространению искусственных голограмм и двумерных трансляторов. Так разные на первый взгляд области взаимно влияют на свое развитие.

Открытие голографии по своим последствиям можно сравнить только с проведением первого сеанса радиосвязи. Вся история голографии еще раз убеждает нас в том, что корни главных открытий последних лет, имеющих большое прикладное значение, лежат в глубоких теоретических исследованиях и изысканиях «чистой» науки и обычно на много лет опережают эпоху реализации предсказанных теорий и опробованных в лабораторных условиях новых методов.



## ОПТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ И ЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Отметив наиболее доступные черты физических явлений, лежащих в основе голографического метода и когерентных оптических систем, приступим к систематическому изучению теории голографии. Начнем с рассмотрения математического аппарата, описывающего физические процессы в когерентных системах, а затем перейдем к изучению голографических и интерференционных устройств. Этот математический аппарат излагается в форме анализа свойств оптического сигнала, несущего определенное сообщение. Наиболее наглядно эти свойства проявляются при прохождении оптического сигнала через различные линейные системы. Содержание этой главы, а также глав 3, 4 и 5 неоднократно используются в остальных разделах книги.

Ради компактности и удобства записи все соотношения записываются в форме, которая в наибольшей степени отвечает духу современной оптики. Используются обозначения и сокращения, получившие широкое распространение в отечественных книгах по теоретической физике и зарубежных изданиях по радиосвязи и оптике.

## § 2-1. Комплексный сигнал в оптике

Выражение *оптический сигнал* применяется для описания пространственной и временной структуры световой волны, которую методами голографии можно зарегистрировать полностью. Оптический сигнал определяется следующим образом.

Рассмотрим электромагнитные колебания, возбуждаемые стационарным квазимонохроматическим источником света в неподвижной точке  $P(\mathbf{r})$  с координатами  $\mathbf{r}(x, y, z)$  в момент времени  $t$ . Квазимонохроматический источник света характеризуется эффективной шириной частот  $\Delta\omega$ , которая значительно меньше средней частоты  $\omega_0$  испускаемого света:

$$\Delta\omega/\omega_0 \ll 1. \quad (2.1.1)$$

Предположим для простоты, что свет линейно поляризован. Тогда электрическое поле в точке  $P$  описывается некоторой действительной функцией координат и времени  $E(\mathbf{r}, t)$ , которую

можно записать в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \cos[\varphi(\mathbf{r}, t) - \omega_0 t], \quad (2.1.2)$$

где  $a(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — медленно меняющиеся действительные функции. Вместо тригонометрических функций  $\cos$  и  $\sin$  удобно ввести экспоненциальные функции. Переход к такой записи осуществляется несколькими путями.

В первом из них гармонические функции заменяются действительной частью комплексной экспоненты:

$$\cos(\varphi - \omega_0 t) = \operatorname{Re} e^{i(\varphi - \omega_0 t)}. \quad (2.1.3)$$

После проведения всех математических преобразований из результата произведенных операций выделяется действительная часть  $\operatorname{Re}$ . Следуя этому правилу, можно вместо действительной функции  $E(\mathbf{r}, t)$  оперировать с комплексной функцией

$$E_h(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) e^{i[\varphi(\mathbf{r}, t) - \omega_0 t]}. \quad (2.1.4)$$

Так как по условию  $\omega_0$  — постоянная величина, то множитель

$$e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.1.5)$$

являющийся общим для всех точек пространства, можно выделить и записать (2.1.4) в виде

$$E_h(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.1.6)$$

Комплексная функция

$$f(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.1.7)$$

называется *оптическим сигналом*. Это, по существу, комплексная амплитуда электромагнитных колебаний или *огibaющая* квази-гармонических колебаний  $E(\mathbf{r}, t)$ .

Условие квазимонохроматичности, накладываемое на электромагнитные колебания, означает, что оптический сигнал  $f(\mathbf{r}, t)$  изменяется весьма мало за время периода  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

Оптический сигнал называется *стационарным*, если функция не зависит от времени:

$$f(\mathbf{r}, t) \equiv f(\mathbf{r}). \quad (2.1.8)$$

Существенное различие между оптическим сигналом  $f(\mathbf{r}, t)$  и радиосигналом состоит в том, что любой детектор света регистрирует непосредственно только среднюю интенсивность

$$\overline{I(\mathbf{r})} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |E|^2 dt = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |f(\mathbf{r})|^2 dt = \overline{|f(\mathbf{r})|^2}, \quad (2.1.9)$$

т. е. квадрат абсолютного значения сигнала  $f(\mathbf{r})$ . В противоположность этому радиосигнал в данной точке пространства

можно, как правило, полностью зарегистрировать непосредственно, например, с помощью электронно-лучевой трубки, снабженной временной разверткой. Это различие — одна из тех причин, которые до самого последнего времени мешали широкому применению оптических сигналов для передачи, записи и обработки информации. Положение резко изменилось с изобретением голографии, которая, по существу, является методом *обратимой* регистрации сигнала  $f(\mathbf{r})$  как по амплитуде, так и по фазе.

Оптический сигнал  $f(\mathbf{r})$  задается в общем случае в трех измерениях. Для простоты рассуждений и компактности выкладок рассмотрим одномерный сигнал  $f(x)$ , а затем обобщим результаты на двух- и трехмерный случаи. Для наглядности и возможности привлечения полезных аналогий с радиотехникой вместо сигнала  $f(x)$ , зависящего от пространственных координат, иногда будем вводить сигнал  $f(t)$ , зависящий от времени. Наконец, будем также рассматривать общий случай, когда оптические сигналы зависят от времени явно.

Второй метод удобного представления оптического сигнала с помощью экспоненциальных функций состоит в чисто формальной замене тригонометрических функций на экспоненциальные:

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]. \quad (2.1.10)$$

Здесь возникают положительные и отрицательные частоты. Два единичных комплексных вектора  $e^{i\omega t}$  и  $e^{-i\omega t}$  вращаются в противоположных направлениях. На примере простых механических моделей можно представить физический смысл биполярных частот: направление вращения вала или маховика должно быть отмечено знаком. Физический смысл биполярных частот оптического сигнала будет рассмотрен позже.

Первый метод представления сигнала в экспоненциальной форме состоит, по существу, в том, что вместо действительного сигнала

$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \equiv A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.1.11)$$

содержащего как положительные, так и отрицательные частоты, вводится сигнал

$$V(t) = f(t) + i\chi(t), \quad (2.1.12)$$

который содержит только положительные частоты. Сигнал  $V(t)$  получается из действительного сигнала  $f(t)$  путем добавления к нему чисто мнимого сигнала  $i\chi(t)$ . При этом функция  $\chi(t)$  однозначно задается функцией  $f(t)$  и образуется по следующему правилу:

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \quad \chi(t) \\ \cos \omega t \rightarrow \sin \omega t \\ \sin \omega t \rightarrow -\cos \omega t. \end{array} \right\} \quad (2.1.13)$$

Преобразование, определяемое этим правилом, не изменяет спектра сигнала, а только подавляет отрицательные частоты, которые, как будет показано ниже — (2.3.36), (2.3.37) — в случае действительного сигнала  $f(t)$ , фактически не несут никакой дополнительной информации. Сигнал  $V(t)$  содержит только положительные частоты, а его амплитуда оказывается увеличенной вдвое по сравнению с амплитудой исходного сигнала  $f(t)$ . Функция  $V(t)$  называется *аналитическим сигналом*.

Преобразование, осуществляемое по правилу (2.1.13), называется *преобразованием Гильберта* и для произвольной функции времени записывается следующим образом:

$$\chi(t) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad (2.1.14)$$

где интегрирование ведется в смысле главного значения Коши.

При анализе процессов, происходящих в голографических установках в любых диапазонах длин волн, встречаются линейные преобразования, которые описывают прохождение оптического сигнала через различные их элементы. Перечисленные ниже линейные преобразования отвечают вполне определенным физическим процессам, происходящим в оптико-информационных системах, в частности в когерентных оптических системах. Охарактеризуем основные черты этих линейных преобразований.

**Преобразование Фурье.** Описывает дифракцию света в далекой зоне (дифракцию Фраунгофера) при прохождении когерентного пучка света через оптическую систему с достаточно малой угловой апертурой. Преобразование Фурье используется в теории голографии Фурье, в бесцелевой спектроскопии Фурье, в когерентных оптических корреляторах и т. д.

**Преобразование Френеля.** Описывает процесс дифракции света в ближней зоне (дифракцию Френеля). Используется при анализе свойств широкополосной частотно-модулированной несущей, которая обладает оптимальной информационной емкостью. Преобразование Френеля описывает свойства голографии Френеля, трафаретной голографии, спектроскопии высокой светосилы и свойства синтезированных антенн.

**Преобразование Дирака.** Выделяет эффект единичного точечного источника света. Свертка и преобразование Дирака являются тождественными преобразованиями. Преобразования Дирака обычно появляются в результате двух последовательных линейных операций с ядром типа Фурье.

**Преобразование отсчетов.** Описывает свойства оптического сигнала, поступающего из системы с конечной апертурой или ограниченной полосой пространственных частот.

Встречается при оценке разрешающей способности и информационной емкости оптического сигнала. Является типичной функцией рассеяния когерентных оптических систем.

**Интегральная операция свертки.** Используется для описания кратных процессов дифракции или последовательного наложения нескольких взаимно подобных процессов. Связывает сигналы на выходе и входе оптической системы с ее аппаратной функцией.

**Функция корреляции.** Используется для описания наблюдаемых величин случайных процессов. Встречается в теории когерентности света и в общей теории голографических процессов.

**Преобразование Гильберта.** Не изменяет спектрального состава сигнала. Выделяет только положительные частоты. Определяет свойства сигнала в однополосной голограмме. Встречается при рассмотрении принципа причинности в оптике.

**Преобразование в линейном фильтре.** Оптическую систему можно рассматривать как линейный фильтр, если линейное преобразование этого фильтра *пространственно инвариантно*.

Перечисленные выше линейные преобразования составляют теоретическую основу голографии. Все эти преобразования в общем виде рассматриваются в данной 2-й главе, а затем в последующих главах, посвященных непосредственно основам голографии; они вводятся при анализе конкретных голографических устройств.

## § 2-2. Преобразование Фурье

По определению преобразованием Фурье функции  $f(x)$  называется интегральная операция

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (2.2.1)$$

Обратное преобразование Фурье записывается следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (2.2.2)$$

Сокращенно эти соотношения выражаются с помощью операторных символов преобразования Фурье  $\hat{\mathcal{F}}$  и  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$ :

$$f(x) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F(\omega) \quad (2.2.3)$$

и

$$F(\omega) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}^{-1}} f(x). \quad (2.2.4)$$

Функцию  $F(\omega)$  называют *фурье-образом* функции  $f(x)$ . В свою очередь функция  $f(x)$  называется *инверсным фурье-образом* функции  $F(\omega)$  или *прообразом*. Различие между прямым фурье-образом и инверсным фурье-образом заключается в различных знаках, содержащихся в экспонентах выражений (2.1.4) и (2.2.2), а также в наличии множителя  $1/2\pi$  в формуле обратного преобразования. В литературе встречаются также и другие определения преобразования Фурье, отличающиеся от принятого здесь как знаком в экспоненте, так и численными коэффициентами, стоящими перед интегралом.

Иногда пишут

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f(x)], \quad (2.2.5)$$

$$f(x) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}[F(\omega)]. \quad (2.2.6)$$

Очень часто различием между символами  $\hat{\mathcal{F}}$  и  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$  пренебрегают, а множитель  $1/2\pi$  ради простоты опускают.

Для того чтобы фурье-образы (2.2.1) и (2.2.2) существовали, достаточно, чтобы функции  $f(x)$  и  $F(\omega)$  были абсолютно интегрируемы, т. е. чтобы значения интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega \quad (2.2.7)$$

были конечными. Однако это условие не является необходимым и имеются функции, которые не абсолютно интегрируемы, но имеют фурье-образы. Рассмотрение вопроса о существовании фурье-образа здесь полностью опускается, и приводятся только наиболее важные результаты и пояснения без строгих математических доказательств.

### § 2-3. Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье.

**Л и н е й н о с т ь.** Это свойство — общее для всех линейных преобразований. Если  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$  — фурье-образы функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно, а  $a_1$  и  $a_2$  — произвольные комплексные числа, то фурье-образ функции  $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ , являющейся линейной комбинацией функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , равен  $F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$ , т. е. линейной комбинации соответствующих фурье-образов:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega). \quad (2.3.1)$$

Таким образом, процессу суперпозиции функций  $f_k(x)$  отвечает эквивалентный процесс суперпозиции фурье-образов  $F_k(\omega)$ . Это

свойство играет в когерентной оптике и голографии очень важную роль.

**Свойства симметрии.** Вычислим фурье-образ функции  $f^*(x)$ , т. е. функции, комплексно-сопряженной с  $f(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-i\omega x} dx = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(-\omega)x} dx \right)^* = F^*(-\omega). \quad (2.3.2)$$

Таким образом,

$$f^*(x) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F^*(-\omega). \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим несколько случаев.

а) Если  $f(x)$  — действительная функция, т. е.  $f(x) = f^*(x)$ , то

$$F^*(-\omega) = F(\omega), \quad F^*(\omega) = F(-\omega). \quad (2.3.4)$$

б) Если  $f(x)$  — действительная и четная функция, т. е.

$$f(x) = f^*(x) = f^*(-x), \quad (2.3.5)$$

то

$$F(\omega) = F^*(-\omega) = F^*(\omega). \quad (2.3.6)$$

Функция  $F(\omega)$  — действительная и четная.

в) Если  $f(x)$  — действительная и нечетная функция, т. е.

$$f(x) = -f(-x) = f^*(x), \quad (2.3.7)$$

то

$$F(\omega) = -F(-\omega) = F^*(-\omega) \quad (2.3.8)$$

или

$$F^*(\omega) = -F(\omega). \quad (2.3.9)$$

Таким образом,  $F(\omega)$  — чисто мнимая нечетная функция и ее можно записать в виде

$$F(\omega) = iG(\omega), \quad (2.3.10)$$

где  $G(\omega)$  — действительная и нечетная функция  $\omega$ .

г) Если  $f(x)$  — чисто мнимая функция, т. е.  $f^*(x) = -f(x)$ , то

$$F^*(\omega) = -F(-\omega), \quad F(\omega) = -F^*(-\omega). \quad (2.3.11)$$

**Изменение масштаба.** Если  $a$  — действительное число, то

$$f(ax) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (2.3.12)$$

Пусть  $a > 0$ . Тогда по определению

$$\hat{\mathfrak{F}}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\frac{\xi\omega}{a}} d\xi = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Аналогично, если  $a < 0$ , то

$$\hat{\mathfrak{F}}[f(ax)] = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

и окончательно

$$f(ax) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Особый интерес представляет случай  $a = -1$ :

$$f(-x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} F(-\omega). \quad (2.3.13)$$

**Т е о р е м а о п е р е н о с е.** Если функцию  $f(x)$  сдвинуть на величину  $x_0$ , то фурье-образ новой функции  $f(x - x_0)$  окажется равным

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{F}}[f(x - x_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega(x+x_0)} dx = \\ &= e^{-i\omega x_0} \hat{\mathfrak{F}}[f(x)]. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Таким образом, при переносе функции  $f(x)$  на величину  $x_0$  ее фурье-образ умножается на  $e^{-i\omega x_0}$ , а модуль остается без изменения.

Сдвиг фурье-образа по частоте. Если  $\omega_0$  — действительное число, то

$$F(\omega - \omega_0) = \int e^{-i(\omega - \omega_0)x} f(x) dx = \hat{\mathfrak{F}}[f(x) e^{i\omega_0 x}], \quad (2.3.15)$$

т. е. сдвиг фурье-образа по частоте приводит к появлению дополнительного множителя  $e^{i\omega_0 x}$  перед функцией исходного сигнала.

Последние два свойства преобразования Фурье и некоторые полезные следствия из них можно представить в виде таблицы 2.1.

**С о о т н о ш е н и е в з а и м н о с т и.** Если  $F(\omega)$  — фурье-образ функции  $f(x)$ , то в результате прямого преобразования Фурье получим

$$F(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} 2\pi f(-\omega). \quad (2.3.16)$$

Это соотношение вытекает из равенства

$$2\pi f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (2.3.17)$$



Таблица 2.1

Исходный сигнал	Фурье-образ сигнала
$f(x)$	$F(\omega)$
$f(x \pm x_0)$	$e^{\pm i\omega x_0} F(\omega)$
$f(x+x_0) + f(x-x_0)$	$2 \cos \omega x_0 F(\omega)$
$f(x+x_0) - f(x-x_0)$	$2i \sin \omega x_0 F(\omega)$
$2f(x) - f(x+x_0) - f(x-x_0)$	$4 \sin^2 \frac{\omega x_0}{2} F(\omega)$
$f(x) e^{\pm i\omega_0 x}$	$F(\omega \mp \omega_0)$
$f(x) \cos \omega_0 x$	$\frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$
$f(x) \sin \omega_0 x$	$\frac{1}{2i} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$
$f(x) \sin^2 \frac{\omega_0 x}{2}$	$\frac{1}{4} [2F(\omega) - F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$

Дифференцирование по координате. Выполняя дифференцирование обеих сторон равенства

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (2.3.18)$$

$n$  раз по координате  $x$ , получаем

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^n F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \hat{\mathcal{F}}^{-1}[(i\omega)^n F(\omega)],$$

или

$$(i\omega)^n F(\omega) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}^{-1}} \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \quad (2.3.19)$$

Соотношение (2.3.19) справедливо только в том случае, если производная  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$  существует. Для этого достаточно, чтобы функция  $x^n f(x)$  была абсолютно интегрируема.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi. \quad (2.3.20)$$

Если  $\Phi(\omega)$  — ее фурье-образ, то

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x), \quad (2.3.21)$$

а

$$i\omega\Phi(\omega) = F(\omega). \quad (2.3.22)$$

Если, кроме того, функция  $\Phi(x)$  абсолютно интегрируема, то

$$\Phi(\infty) = 0. \quad (2.3.23)$$

Действительно,

$$\Phi(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \Big|_{(\omega_0=0)} e^{i\omega_0\xi} d\xi = F(\omega_0) \Big|_{\omega_0=0},$$

а кроме того, в силу конечности  $\Phi(\omega)$

$$F(\omega) = i\omega\Phi(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0. \quad (2.3.24)$$

В этом случае

$$\int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \frac{F(\omega)}{i\omega}. \quad (2.3.25)$$

Условие  $F(0) = 0$  является достаточным, но не необходимым условием того, чтобы имело место соотношение (2.3.25).

Д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е по частоте. Дифференцируя равенство

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (2.3.26)$$

$n$  раз по частоте, получаем

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix)^n e^{-i\omega x} dx = \hat{\mathfrak{F}} [(-ix)^n f(x)],$$

или

$$x^n f(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}, \quad (2.3.27)$$

если только  $\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$  существует.

Т е о р е м а м о м е н т о в. Эта теорема связывает производные от  $F(\omega)$  при  $\omega = 0$  с моментами инверсного фурье-образа, т. е. исходной функции  $f(x)$ . По определению  $m$ -м моментом  $m_n$

функции  $f(x)$  называется интеграл

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.28)$$

Теорема моментов утверждает, что

$$m_n = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n F(0)}{d\omega^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.29)$$

Случай  $n = 0$  непосредственно следует из (2.2.1):

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(0). \quad (2.3.30)$$

Для того чтобы доказать общую формулу (2.3.29), разложим  $e^{-i\omega x}$  и  $F(\omega)$  в ряды:

$$e^{-i\omega x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega x)^n}{n!}, \quad (2.3.31)$$

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} \frac{\omega^n}{n!}. \quad (2.3.32)$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega x)^n}{n!} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n m_n \frac{\omega^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} \frac{\omega^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях  $\omega$ , получим (2.3.29).

Соотношение (2.3.29) справедливо при условии, если частичные интегралы в (2.3.33) существуют, а это в свою очередь возможно только в том случае, если моменты функции  $f(x)$  конечны.

Обратное утверждение неверно: существование производной  $\frac{d^n F(0)}{d\omega^n}$  не гарантирует конечности  $m_n$ .

Свойства симметрии модуля и фазы фурье-образа. Пусть фурье-образ действительной функции  $f(x)$  равен

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}, \quad (2.3.34)$$

где  $A(\omega)$  — модуль, а  $\Phi(\omega)$  — фаза. Докажем, что функция  $A(\omega)$  четная, а  $\Phi(\omega)$  нечетная и, таким образом, фаза нулевой частоты равна нулю:  $\Phi(0) = 0$ . Действительно, если совершить переход  $\omega \rightarrow (-\omega)$ :

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = A(-\omega) e^{i\Phi(-\omega)}, \quad (2.3.35)$$

то видно, что модуль интеграла в силу действительности  $f(x)$  при таком преобразовании не меняется, т. е.  $F^*(\omega) = F(-\omega)$ , и

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad (2.3.36)$$

а фаза меняется на обратную:

$$\Phi(\omega) = -\Phi(-\omega). \quad (2.3.37)$$

Именно из этих двух свойств (2.3.36) и (2.3.37) фурье-образа следует вывод о том, что отрицательные частоты действительной функции не несут никакой дополнительной информации по сравнению с положительными частотами.

Связь между поведением фурье-образа при нулевой частоте и моментами исходной функции. Моменты функции  $f(x)$  связаны со значениями наклона кривой фазы  $\Phi(\omega)$  и кривизны кривой модуля  $A(\omega)$  фурье-образа при нулевой частоте. Докажем это.

Для простоты предположим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = A(0) = 1. \quad (2.3.38)$$

Разлагая четную функцию  $A(\omega)$  и нечетную функцию  $\Phi(\omega)$  в ряды, получим

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= 1 + \frac{a_2}{2!} \omega^2 + \dots, \\ \Phi(\omega) &= b_1 \omega + \frac{b_3}{3!} \omega^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3.39)$$

Следовательно,

$$e^{i\Phi(\omega)} = 1 + ib_1 \omega - \frac{b_1^2}{2!} \omega^2 + \dots,$$

а

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \left(1 + \frac{a_2}{2!} \omega^2 + \dots\right) \left(1 + ib_1 \omega - \frac{b_1^2}{2!} \omega^2 + \dots\right) = \\ &= 1 + ib_1 \omega + \frac{a_2 - b_1^2}{2!} \omega^2 + \dots \end{aligned}$$

С учетом (2.3.32) находим

$$b_1 = -m_1, \quad a_2 = m_1^2 - m_2. \quad (2.3.40)$$

Если ввести обозначения для величин

$$x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx, \quad (2.3.41)$$

где  $x_0$  — координата центра тяжести сигнала  $f(x)$ , или средняя эпоха, а  $\sigma^2$  — среднеквадратичное отклонение от средней эпохи, или дисперсия, то

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2x_0 \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + x_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = m_2 - m_1^2.$$

Таким образом, координата центра тяжести сигнала, или средняя эпоха, равна взятой с обратным знаком производной по частоте от фазы фурье-образа при нулевой частоте:

$$x_0 = -b_1 = -\frac{d\Phi(0)}{d\omega}, \quad (2.3.42)$$

а дисперсия сигнала равна взятой с обратным знаком второй производной по частоте от модуля фурье-образа при нулевой частоте, или кривизне, так как  $\frac{dA(0)}{d\omega} = 0$ :

$$\sigma^2 = -a_2 = -\frac{d^2A(0)}{d\omega^2}. \quad (2.3.43)$$

## § 2-4. Типичные примеры преобразования Фурье и общепринятые обозначения часто встречающихся функций

Рассмотрим преобразования Фурье для трех простейших функций, которые неоднократно потребуются нам в дальнейшем.

**1. Прямоугольный импульс.** Прямоугольный импульс (рис. 2.1) представляется функцией

$$\Pi_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & |x| < A, \\ 0, & |x| > A. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Фурье-образ этой функции равен

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[\Pi_A(x)] = \int_{-A}^A \frac{1}{2A} e^{-i\omega x} dx = \frac{\sin \omega A}{\omega A} = \text{sinc} \frac{\omega A}{\pi}. \quad (2.4.2)$$

Функция  $\text{sinc} \frac{x}{\pi} = \frac{\sin x}{x}$  называется *функцией отсчетов*.

Если прямоугольный импульс (2.4.1) сдвинуть на величину  $x_0$  (рис. 2.2), то согласно (2.3.14)

$$\hat{\mathcal{F}}[\Pi_A(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} \frac{\sin \omega A}{\omega A} = e^{-i\omega x_0} \operatorname{sinc} \frac{\omega A}{\pi}. \quad (2.4.3)$$

**2. Функция отсчетов.** Функция отсчетов произвольной частоты  $\omega_0$  запишется так:

$$\operatorname{sinc} \frac{\omega_0 x}{\pi} = \frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0 x}. \quad (2.4.4)$$

Фурье-образ функции отсчетов (2.4.4)

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}} \left[ \operatorname{sinc} \frac{\omega_0 x}{\pi} \right] = 2\pi \Pi_{\omega_0}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0}, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases}$$

равен прямоугольному импульсу (рис. 2.3), что с очевидностью следует из соотношения взаимности (2.3.17).

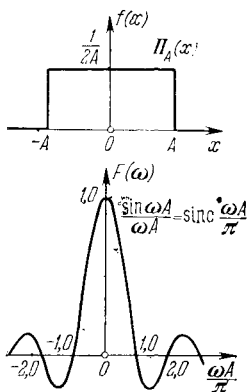


Рис. 2.1. Графики функции «прямоугольный импульс»  $\Pi_A(x)$  и ее фурье-образа  $\operatorname{sinc} \frac{\omega A}{\pi}$ , где  $2A$  — ширина прямоугольного импульса.

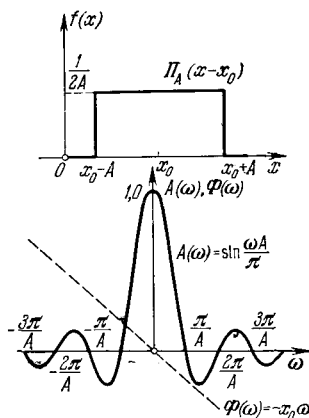


Рис. 2.2. Графики функции «сдвинутый прямоугольный импульс»  $\Pi_A(x - x_0)$  и ее фурье-образа  $e^{-i\omega x_0} \operatorname{sinc} \frac{\omega A}{\pi}$ .

**3. Гармонический сигнал, промодулированный прямоугольным импульсом,** может быть представлен функцией

$$f(x) = \Pi_A(x) \cos \omega_0 x, \quad (2.4.5)$$

где  $\Pi_A(x)$  — прямоугольный импульс (2.4.1). Для нахождения фурье-образа этой функции воспользуемся свойством (2.3.15).

Если

$$f_0(x) \xrightarrow{\widehat{\mathcal{F}}} F_0(\omega),$$

то

$$e^{i\omega_0 x} f_0(x) \xrightarrow{\widehat{\mathcal{F}}} F_0(\omega - \omega_0),$$

а также

$$f_0(x) \cos \omega_0 x =$$

$$= \frac{f_0(x)}{2} [e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}] \xrightarrow{\widehat{\mathcal{F}}} \frac{1}{2} [F_0(\omega - \omega_0) + F_0(\omega + \omega_0)]. \quad (2.4.6)$$

В нашем случае  $f_0(x)$  равна прямоугольному импульсу  $\Pi_A(x)$ ,

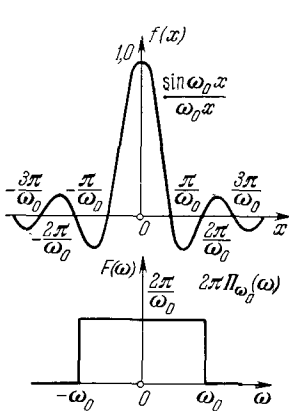


Рис. 2.3. Графики функции отсчетов  $\frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0 x}$  и ее фурье-образа  $2\pi\Pi\omega_0(\omega)$ .

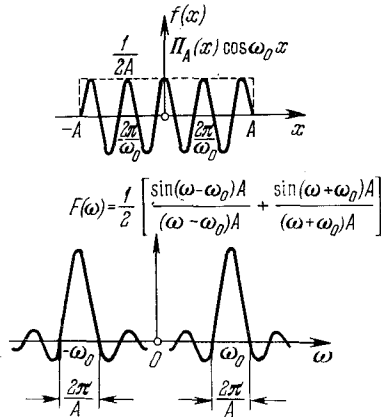


Рис. 2.4. Графики гармонического сигнала, промодулированного прямоугольным импульсом  $\Pi_A(x) \cos \omega_0 x$ , и его фурье-образа.

и поскольку известен ее фурье-образ (2.4.2), то (рис. 2.4)

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_0) A}{(\omega - \omega_0) A} + \frac{\sin(\omega + \omega_0) A}{(\omega + \omega_0) A} \right]. \quad (2.4.7)$$

4. Два прямоугольных импульса одной полярности. Эта функция запишется так:

$$f(x) = \Pi_A(x + 2A) + \Pi_A(x - 2A). \quad (2.4.8)$$

Фурье-образ этой функции равен

$$F(\omega) = \frac{\sin \omega A}{\omega A} (e^{-i2A\omega} + e^{i2A\omega}) = 2 \cos 2\omega A \frac{\sin \omega A}{\omega A}. \quad (2.4.9)$$

5. Два прямоугольных импульса разной полярности. Функция  $f(x)$  в этом случае имеет вид (рис. 2.5)

$$f(x) = \Pi_A(x - A) - \Pi_A(x + A). \quad (2.4.10)$$

Фурье-образ такой функции равен

$$F(\omega) = \frac{\sin \omega A}{\omega A} (e^{i\omega A} - e^{-i\omega A}) = 2i \frac{\sin^2 \omega A}{\omega A}. \quad (2.4.11)$$

6. Треугольный импульс. Функцию треугольного импульса (рис. 2.6) можно записать в виде

$$\Lambda_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{|x|}{A}\right), & |x| < A, \\ 0, & |x| > A. \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Легко убедиться в том, что треугольный импульс (2.4.12) представляет собой интеграл от двух прямоугольных импульсов

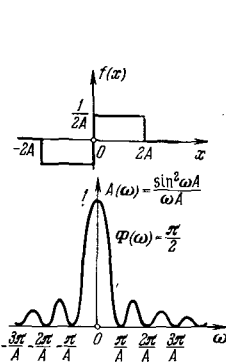


Рис. 2.5. Графики функции из двух прямоугольных импульсов разной полярности и ее фурье-образа.

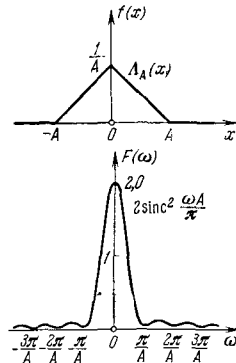


Рис. 2.6. Графики функции «треугольный импульс»  $\Lambda_A(x)$  и ее фурье-образа.

разной полярности (рис. 2.5), деленный на  $A$ . Интегрированию исходной функции (см. (2.3.20))

$$\int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$$

соответствует операция

$$F(\omega) \rightarrow \Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega}$$



над фурье-образом  $F(\omega)$  исходной функции  $f(x)$  (см. (2.3.25)). Таким образом, с помощью (2.4.11) получаем

$$\Lambda_A(x) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} 2i \frac{\sin^2 \omega A}{\omega A} \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{1}{A} = 2 \frac{\sin^2 \omega A}{\omega^2 A^2} = 2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega A}{\pi}. \quad (2.4.13)$$

**7. Квадрат функции отсчетов, или ядро Фезера.** Эта функция обладает следующим свойством:

$$\frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \pi \Lambda_{\omega_0}(\omega). \quad (2.4.14)$$

Воспользовавшись теоремой моментов (2.3.30), легко убедиться в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2} dx = \hat{\mathcal{F}} \left[ \frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2} \right]_{\omega=0} = \pi \Lambda_{\omega_0}(0) = \frac{\pi}{\omega_0}. \quad (2.4.15)$$

По аналогии с (2.4.6) находим

$$\frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2} \cos \Omega x \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{\pi}{2} [\Lambda_{\omega_0}(\omega + \Omega) + \Lambda_{\omega_0}(\omega - \Omega)]. \quad (2.4.16)$$

**8. Экспоненциальный спад.** Эта функция отлична от нуля только при  $x > 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Имеем

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\alpha + i\omega} \quad (2.4.18)$$

(рис. 2.7) или

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x} (x > 0) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{\alpha + i\omega} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-i \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

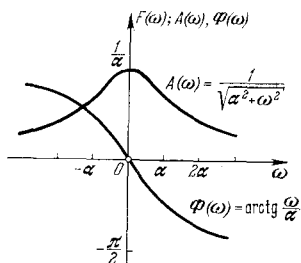


Рис. 2.7. Фурье-образ функции  $e^{-\alpha x}$  ( $x > 0$ ). Отдельно показана зависимость от частоты  $\omega$  модуля амплитуды  $A(\omega)$  и фазы  $\Phi(\omega)$ .

Из (2.4.19) легко можно получить фурье-образ функции  $e^{-\alpha|x|}$ . Действительно, любую функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = f_{\oplus}(x) + f_{\ominus}(x). \quad (2.4.20)$$

Далее, воспользовавшись свойствами симметрии (2.3.6) и (2.3.9) фурье-образов четной и нечетной действительных функций, обнаруживаем, что

$$\hat{\mathcal{F}}[f(x)] = F(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega) + i \operatorname{Im} F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f_{\oplus}(x)] + i \hat{\mathcal{F}}[f_{\ominus}(x)]. \quad (2.4.21)$$

Поскольку функция

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\alpha|x|} \quad (2.4.22)$$

является четной частью функции  $e^{-\alpha x}$  ( $x > 0$ ), то для определения ее фурье-образа достаточно взять действительную

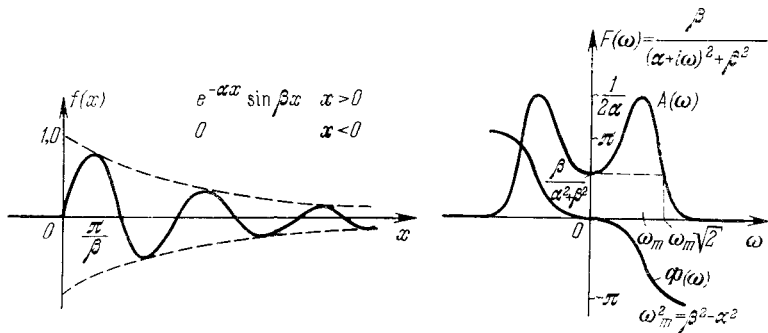


Рис. 2.8. Графики функции  $e^{-\alpha x} \sin \beta x$  ( $x > 0$ ) и ее фурье-образа, представленного функциями  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ .

часть фурье-образа функции  $e^{-\alpha x}$  ( $x > 0$ ). Таким образом,

$$e^{-\alpha|x|} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (2.4.23)$$

Далее легко можно получить

$$\frac{x^{n-1} e^{-\alpha x}}{(n-1)!} (x > 0) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{(\alpha + i\omega)^n}, \quad (2.4.24)$$

а также (рис. 2.8)

$$e^{-\alpha x} \sin \beta x (x > 0) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{\beta}{(\alpha + i\omega)^2 + \beta^2}. \quad (2.4.25)$$

**9. Функция Гаусса.** По определению

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}. \quad (2.4.26)$$

Для того чтобы определить ее фурье-образ, воспользуемся свойствами моментов. Сначала определим нулевой момент

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx = \alpha \sqrt{\pi}. \quad (2.4.27)$$

Дифференцируя (2.4.27)  $n$  раз по  $\alpha$ , находим

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \alpha^{2n+1} \sqrt{\pi}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.28)$$

так как моменты нечетного порядка от четной функции равны нулю. Таким образом,

$$F(\omega) = \alpha \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) (2\alpha^2)^n}{(2n)!} (-i\omega)^{2n} = \alpha \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2 \alpha^2}{4}}, \quad (2.4.29)$$

или

$$e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \alpha \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2 \alpha^2}{4}}. \quad (2.4.30)$$

Для  $\alpha^2 = 2$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (2.4.31)$$

**10. Косинусный и синусный фурье-образы.** Фурье-образ действительной функции (2.2.1) можно разложить на действительную и мнимую части:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx. \quad (2.4.32)$$

Первое слагаемое,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = F_c(\omega), \quad (2.4.33)$$

называется *косинусным* фурье-образом, а второе (без множителя  $i$ ),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = F_s(\omega), \quad (2.4.34)$$

— *синусным* фурье-образом. Функция  $\cos \omega x$  может иметь некоторый сдвиг фаз, и ее можно записать так:  $\cos(\omega x + \varphi)$ . Легко видеть, что косинусный фурье-образ получается в случае, если фаза  $\varphi = 0$ , а синусный фурье-образ соответствует фазе  $\varphi = \pi/2$ . Случай произвольной фазы соответствует линейной комбинации косинусного и синусного фурье-образов.

## 2.5. Оптические устройства, осуществляющие преобразование Фурье

Рассмотрим оптическое устройство, которое позволяет осуществлять преобразование Фурье. Исходная функция  $f(x)$  задается в виде переменной плотности на фотопластинке. Принцип действия этого устройства, схема которого приведена на рис. 2.9, состоит в том, что пластинка с исходной функцией  $f(x)$  освещается светом, интенсивность которого меняется в пространстве по синусоидальному закону с варьируемой пространственной частотой.

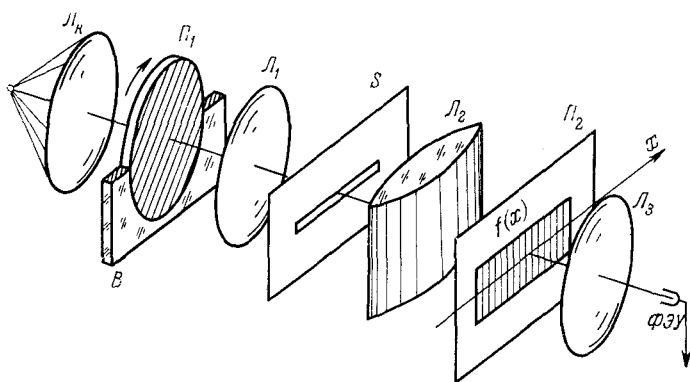


Рис. 2.9. Схема оптического устройства для осуществления преобразования Фурье-сигналов, заданных в виде транспарантов. Коллимированный пучок света, сформированный линзой  $L_K$ , освещает пластинку  $P_1$  с нанесенными на нее черно-белыми полосами, которые отображаются линзой  $L_1$  на щель  $S$ . Далее периодический сигнал проектируется цилиндрической линзой  $L_2$  на плоскость  $P_2$ , в которой расположен транспарант  $f(x)$ . Частота периодического сигнала изменяется путем вращения пластинки  $P_1$  в подшипнике  $B$ . Линза  $L_3$  захватывает весь свет, выполняя интегрирование. Сигнал регистрируется ФЭУ и отображается на экране осциллографа путем развертки луча синхронно с вращением пластинки  $P_1$ .

С этой целью на пластинку  $P_1$ , которая вращается в подшипнике  $B$ , наносят правильно расположенные параллельные полосы, изображение которых, получаемое с помощью линзы  $L_1$ , проектируется на узкую щель  $S$ . Далее свет, прошедший через щель, захватывается цилиндрической линзой  $L_2$ , ось которой перпендикулярна щели, и проектируется на транспарант, расположенный в плоскости  $P_2$ , переменное пропускание по интенсивности которого соответствует исходной функции  $f(x)$ . Поэтому функция  $f(x)$  является не оптическим сигналом, т. е. не амплитудой волны света, а квадратом модуля оптического сигнала. Линза  $L_3$  собирает свет на фотозу, ток с которого подается на вход осциллографа. Синхронность поворота пластинки  $P_1$  и горизонтальной развертки осциллографа позволяют воспроизводить спектр функции  $f(x)$  повторно при каждом повороте. При враще-

нии первой пластинки  $\Pi_1$  расстояние между полосами в щели  $S$  изменяется в зависимости от угла между щелью и направлением полос на пластинке. Интенсивность света, которую измеряет фотоэлемент, пропорциональна интегралу

$$F(\omega, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x + \varphi) dx. \quad (2.5.1)$$

В зависимости от значения фазы  $\varphi$  регистрируется либо косинусный фурье-образ  $F_c(\omega)$ , либо синусный фурье-образ  $F_s(\omega)$ . Значение  $\varphi$  варьируется путем изменения положения центра вращения пластинки  $\Pi_1$  относительно полос. Косинусный фурье-образ получается, если ось вращения пластинки проходит через

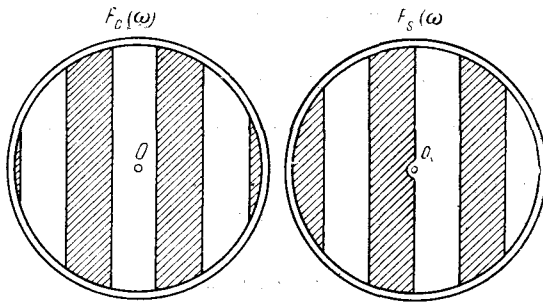


Рис. 2.10. Положение оси вращения пластинки  $\Pi_1$  (см. рис. 2.9) при наблюдении косинусного фурье-образа  $F_c(\omega)$  и синусного фурье-образа  $F_s(\omega)$  соответственно.

линию максимального пропускания системы полос (рис. 2.10). Для регистрации синусного фурье-образа ось вращения должна проходить через точку, расположенную точно посередине между линиями максимального и минимального пропускания.

В таком приборе фурье-образ функции  $f(x)$  измеряется только до определенной максимальной частоты  $\omega_{\text{макс}}$ , равной полному числу полос, нанесенных на пластинке  $\Pi_1$ . Поток света, проходящий через систему и регистрируемый фотоэлементом, равен

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) a_0 dx + \int_a^b f(x) \cos(\omega x + \varphi) dx = A_0 + F_\varphi(\omega). \quad (2.5.2)$$

где  $a_0$  — уровень смещения, равный средней освещенности, так что  $|A_0| \geq |F(\omega)|$ . Действительная функция  $f(x)$ , которую можно нанести на транспарант  $\Pi_2$ , должна быть *униполярной* (положительной). Если же исходная функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, то вместо нее приходится брать новую функцию

$$f_1(x) = f_0 + f(x); \quad (2.5.3)$$

при этом  $f_0$  выбирается из условия

$$|f_0| \geq |f(x)|. \quad (2.5.4)$$

Эта новая функция  $f_1(x)$  является униполярной. Оптические системы, в которых используется некогерентное освещение, могут обрабатывать только униполярные функции. В этом их недостаток. Подобными свойствами не обладают оптические устройства, использующие когерентное освещение и голографический принцип.

С помощью голографии можно запечатлеть не только биполярные сигналы, но и произвольные комплекснозначные функции. (Подробно об этом см. главу 6, посвященную голографии, а также главу 7 об оптических методах обработки информации.)

### § 2-6. Свертка и ее свойства

Следующим классом интегральных преобразований, имеющим большое значение в оптике и голографии, является интегральная операция *свертка*.

Если функция  $f_1(x)$  абсолютно интегрируема, т. е. интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)| dx$$

конечен, а функция  $f_2(x)$  ограничена на интервале  $(-\infty, \infty)$ , то существует функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi, \quad (2.6.1)$$

которая называется *сверткой* двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  и обозначается с помощью операторного символа  $\otimes$ :

$$f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x). \quad (2.6.2)$$

Для дискретных функций  $f_i$  и  $g_i$  операция свертки записывается следующим образом:

$$[f_i \otimes g_i]_j = \sum_i f_i g_{j-i}. \quad (2.6.3)$$

Переменная  $x$  в (2.6.1) задает последовательность сдвигов функции  $f_2(x)$  относительно  $f_1(x)$ . Подынтегральное выражение интеграла (2.6.1) равно произведению функции  $f_1(\xi)$  на перевернутую функцию  $f_2(x - \xi)$ , сдвинутую относительно первой функции на величину  $x$ . На рис. 2.11 даны примеры свертки дискретных функций.

Если  $\xi$  заменить на  $x - \xi$  в (2.6.1), то, изменив пределы и дифференциал, получим

$$f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - \xi) f_2(\xi) d\xi = f_2(x) \otimes f_1(x). \quad (2.6.4)$$

Таким образом, операция свертки является коммутативной: результат свертки не зависит от порядка «сомножителей». Если  $f_1(x) = f_2(x)$ , то интегральная операция (2.6.1) называется *автосверткой*.

**Прямая теорема свертки.** Фурье-образ  $F(\omega)$  свертки  $f(x)$  двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  равен произведению фурье-образов  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$  исходных двух функций.

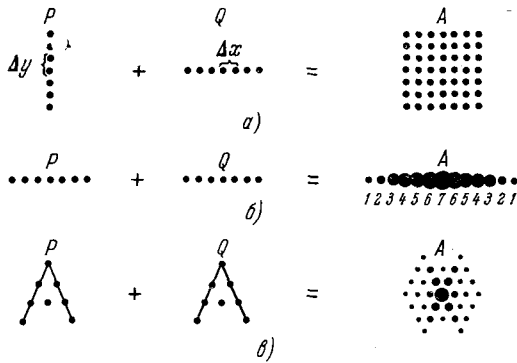


Рис. 2.11. Примеры свертки и корреляции дискретных функций — точек на плоскости. а) Свертка системы 7 ярких точек, расположенных вертикально на равном расстоянии друг от друга, с системой 7 ярких точек, расположенных горизонтально на равном расстоянии друг от друга. Справа показан результат операции свертки — матрица из 7 × 7 точек. б) Если же обе системы из 7 точек расположить горизонтально, то в результате операции свертки появится ряд из 13 точек различной яркости. Яркость условно изображается размером кружочка-точки. Наиболее яркая точка — центральная. Наиболее слабые точки расположены по краям. в) Автокорреляция системы из 8 точек, которые расположены на плоскости и образуют контуры буквы А. Справа приведена автокорреляция такого образа буквы А.

Действительно, используя соотношение (2.2.2.) для обратного преобразования Фурье функции  $f_2(x)$ , получаем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{i(x-\xi)\omega} d\omega d\xi. \quad (2.6.5)$$

Изменим порядок интегрирования в (2.6.5). Для этого необходимо, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{i(x-\xi)\omega} d\omega \quad (2.6.6)$$

равномерно сходился по  $\xi$ . Если воспользоваться (2.2.2), то

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\xi\omega} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) F_1(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Соотношение (2.6.7) иначе можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathfrak{F}} [f(x)] = F(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

или

$$f_1(x) \otimes f_2(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega). \quad (2.6.8)$$

**Обратная теорема свертки.** Произведению исходных функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответствует свертка фурье-образов  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$  этих функций.

Из соотношения взаимности

$$F(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} 2\pi f(-\omega) \quad (2.6.9)$$

и прямой теоремы свертки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (2.6.10)$$

следует, что

$$F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} 2\pi f_1(x) \cdot f_2(x), \quad (2.6.11)$$

или

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega). \quad (2.6.12)$$

**Интересные частные случаи:**

а) Рассмотрим свертку  $f(x)$  при  $x = 0$ :

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) d\omega. \quad (2.6.13)$$

Получаем следующее фундаментальное следствие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) d\omega \quad (2.6.14)$$



ИЛИ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega. \quad (2.6.15)$$

Условие применимости соотношения (2.6.14) состоит в том, что функции  $f_1(x)$  и  $F_2(\omega)$  абсолютно интегрируемы.

б) Учитывая, что замена  $f_2(x)$  на  $f_2^*(-x)$  влечет за собой замену  $F_2(\omega)$  на  $F_2^*(\omega)$ , находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega. \quad (2.6.16)$$

в) Пользуясь теоремой свертки, можно доказать, что свертка двух функций Гаусса также есть функция Гаусса

$$e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \otimes e^{-\frac{x^2}{\beta^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\beta^2}} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \alpha\beta e^{-\frac{x^2}{\gamma^2}} \quad (2.6.17)$$

с дисперсией  $\gamma^2$ , которая равна

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (2.6.18)$$

г) Если  $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ , то из (2.6.16) получаем соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.6.19)$$

известное в литературе как *формула Парсеваля*. В общем виде (2.6.19) запишется так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F^*(u - \omega) du. \quad (2.6.20)$$

д) Наконец, обобщением (2.6.14) и (2.6.16) является соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - u) F_2(u) du. \quad (2.6.21)$$

### § 2-7. Корреляция и ее свойства

Кроме интегральной операции свертки двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  существует интегральная операция *кросс-корреляции* этих функций:

$$\varphi_{12}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^*(x' + x) dx', \quad (2.7.1)$$

которая обозначается операторным символом \*:

$$\varphi_{12}(x) = f_1(x) * f_2(x). \quad (2.7.2)$$

В то время как свертка коммутативна относительно перестановки функций  $f_1$  и  $f_2$ , кросс-корреляция подобным свойством не обладает. Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x') f_1^*(x' + x) dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x' - x) f_1^*(x') dx' = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^*(x' - x) dx' \right]^* = \varphi_{12}^*(-x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi_{21}(x) = \varphi_{12}^*(-x). \quad (2.7.3)$$

Кросс-корреляцию можно свести к свертке:

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^*(x' + x) dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^*[x' - (-x)] dx' = \\ &= f_1(x) \otimes f_2^*(-x). \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Таким образом,

$$f_1(x) * f_2(x) = f_1(x) \otimes f_2^*(-x). \quad (2.7.5)$$

Это соотношение позволяет перенести все свойства свертки двух функций, рассмотренные в предыдущем параграфе, на кросс-корреляцию этих функций.

Если  $f_1(x) = f_2(x)$ , то интегральная операция (2.7.4) называется *автокорреляцией*. (Более подробно о корреляции см. главу 3, посвященную случайным сигналам.)

### § 2-8. Свертка и корреляция на плоскости

Определение свертки (2.6.1) или корреляции (2.7.4) для функций одной переменной можно обобщить на двухмерный случай. При этом двухмерной сверткой называется интеграл

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\mathbf{x} - \xi) d\xi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.8.1)$$

где  $\mathbf{x}(x, y)$ ,  $\xi(\xi, \eta)$  — координаты фиксированной и текущей точек на плоскости. Далее вместо (2.6.8) и (2.6.12) получаем

$$f_1(\mathbf{x}) \otimes f_2(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (2.8.2)$$

и

$$f_1(\mathbf{x}) \cdot f_2(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{(2\pi)^2} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega). \quad (2.8.3)$$

Аналогичные соотношения существуют и для кросс-корреляции. (Более подробно о свойствах преобразования Фурье-свертки в многомерном пространстве см. § 2-18, а о кросс-корреляции — главу 3. Наиболее характерные примеры двумерных сверток приведены на рис. 2.17.)

### § 2-9. Оптические устройства для осуществления операций свертки и кросс-корреляции

Описываемое здесь оптическое устройство позволяет находить двумерную свертку или двумерную корреляцию функций двух переменных, заданных на плоскости. При этом используется некогерентное немонахроматическое освещение. Так же как и в § 2-5,

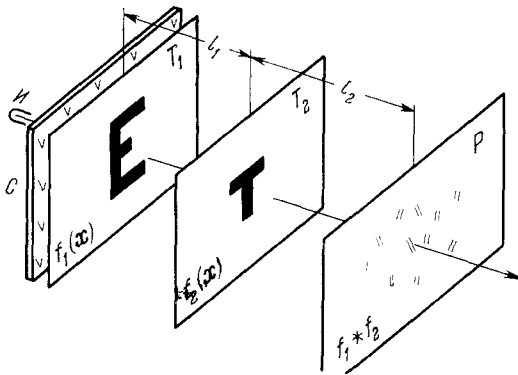


Рис. 2.12. Схема оптического устройства, выполняющего операцию корреляции двухмерных функций, заданных в виде транспарантов или вырезов в непрозрачном экране. Исходные транспаранты изготовлены в масштабах, отношение которых определяется расстояниями  $l_1$  и  $l_2$ .

исходные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , наносимые на фотографический транспарант, должны быть униполярными и действительными. Каждая из этих функций описывает пропускание этих транспарантов по интенсивности.

На рис. 2.12 изображена схема оптического устройства. Источник света  $I$  освещает транспарант  $T_1$ , перед которым

установлено матовое стекло  $C$ , создающее равномерное освещение. Второй транспарант  $T_2$  помещается на расстоянии  $l_1$  от первого транспаранта и на расстоянии  $l_2$  перед выходным экраном, где располагается фотопластинка  $P$ , которая регистрирует свертку или корреляцию функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Масштабы координатных осей, относительно которых нанесены исходные функции, должны различаться между собой в отношении  $(l_1 + l_2)/l_2$ . Если предположить, что линейные размеры транспарантов малы по сравнению с расстоянием  $l = l_1 + l_2$ , то фотопластинка  $P$  зарегистрирует свертку или корреляцию функций  $f_1$  и  $f_2$  в масштабе

$$M = \frac{x}{a} = \frac{1}{2} + \frac{l_2}{l_1}. \quad (2.9.1)$$

Из (2.9.1) видно, что  $M = 1$  при  $l_2/l_1 = 1/2$ .

Несколько более удобным является оптическое устройство, которое не требует изготовления транспарантов в разных масштабах (рис. 2.13). Линза  $L_1$ ,

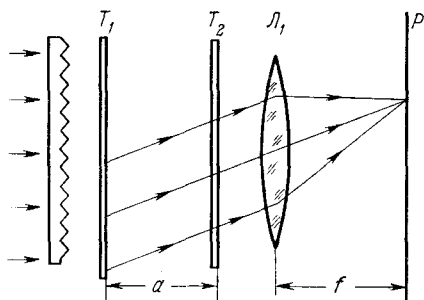


Рис. 2.13. Схема прохождения лучей в оптическом корреляторе с использованием линзы  $L_1$ . Масштабы транспарантов  $T_1$  и  $T_2$  одинаковы.

расположенная перед выходным экраном на расстоянии, равном ее фокусному расстоянию, собирает в точку параллельные лучи света. При  $a = f$  масштаб функции, получаемой в ответе, равен  $M = 1$ .

В зависимости от того, какую операцию предполагается выполнить — свертку или корреляцию, транспаранты располагаются по-разному.

Для получения кросс-корреляции двух функций  $f_1$  и  $f_2$  соответствующие транспаранты необходимо установить параллельно друг другу (рис. 2.14). Для осуществления свертки одна из функций, например  $f_2$ , должна быть повернута относительно оси  $z$ , направленной перпендикулярно плоскости  $x(x, y)$ , на угол  $180^\circ$  (рис. 2.15). При отражении одной из функций в зеркале, расположенном перпендикулярно плоскости  $x$ , в ответе получится сверточно-корреляционная операция (рис. 2.16). Итак, при параллельном расположении функций в ответе получается кросс-корреляция

$$\varphi_{12}(x, y) = \int f_1(\xi, \eta) f_2(\xi + x, \eta + y) d\xi d\eta. \quad (2.9.2)$$

При отражении одной из функций относительно оси  $z$  в ответе получается свертка

$$f(x, y) = f_1 \otimes f_2 = \int f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (2.9.3)$$

При зеркальном отражении одной из функций в ответе получается свертка вдоль одной координаты и кросс-корреляция вдоль

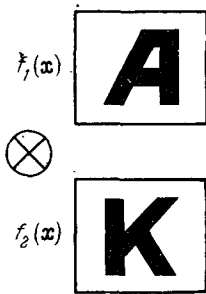


Рис. 2.14. Схема взаимного расположения исходных транспарантов  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  для получения в ответе кросс-корреляции.

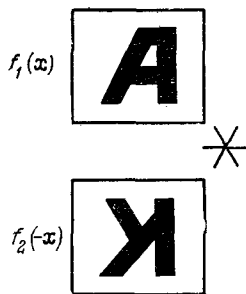


Рис. 2.15. Схема взаимного расположения исходных транспарантов  $f_1(x)$  и  $f_2(-x)$  для осуществления операции свертки. Транспарант  $f_2(x)$  должен быть повернут на  $180^\circ$  в своей плоскости.

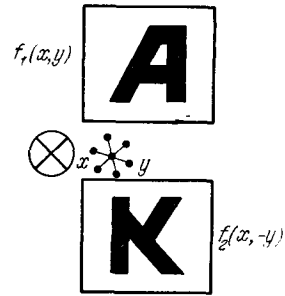


Рис. 2.16. Схема взаимного расположения исходных транспарантов  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, -y)$  для осуществления сверточно-корреляционной операции. Транспарант  $f_2(x, y)$  отражается в вертикальном зеркале так, что  $x \rightarrow x, a y \rightarrow -y$ .

другой координаты. Здесь возможны два случая сверточно-корреляционных операций:

$$\int f_1(\xi, \eta) f_2(\xi + x, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.9.4a)$$

$$\int f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, \eta + y) d\xi d\eta. \quad (2.9.4б)$$

Существует интересная связь между свойствами симметрии исходной функции  $f$  и ее автокорреляции. Если исходная функция не имеет никакой вращательной или зеркальной симметрии (буква  $B$  или  $A$ ), то ее функция автокорреляции имеет циклическую симметрию второго порядка, или в общепринятых обозначениях  $C_2$ , т. е. симметрию при повороте на угол  $180^\circ$ . Напомним здесь, что группа симметрии  $C_n$  отвечает симметрии при циклических поворотах на угол  $360^\circ/n$ . Если представить двумерную функцию автокорреляции  $\varphi_{11}$  в полярных координатах  $(\rho, \theta)$ , то автокорреляции  $\varphi_{11}$  входят в циклическую группу симметрии  $C_n$  при соблюдении условия

$$\varphi_{11}(\rho, \theta) = \varphi_{11}\left(\rho, \theta + k \frac{2\pi}{n}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.9.5)$$

Если исходная функция имеет зеркальную симметрию (буквы *H* или *B*), т. е. отвечает двугранной группе симметрии  $D_1$ , то функция автокорреляции входит в двугранную группу симметрии  $D_2$ . Это означает, что, кроме симметрии зеркального отражения, появляется циклическая симметрия второго порядка.

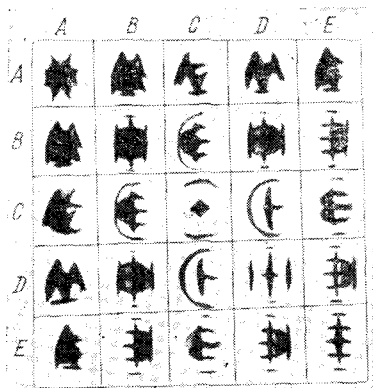


Рис. 2.17. Матрица корреляций начальных букв латинского алфавита. Элементы этой матрицы обнаруживают интересные свойства симметрии, разобранные в тексте.

симметрию также  $D_2$ , подобно тому как это происходит в случае букв *A* и *C*, исходные функции которых обладают симметрией только класса  $D_1$ , т. е. симметрией одного двугранного отражения.

На рис. 2.17 приведена матрица корреляций начальных букв латинского алфавита.

## § 2-10. Скалярное произведение функций

В § 2-2 было отмечено, что достаточным условием существования фурье-образа является абсолютная интегрируемость исходной функции, т. е. конечность интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Однако преобразование Фурье можно рассматривать на совсем другом классе функций, а именно на классе функций с интегрируемым квадратом. По определению функция  $f(x)$  называется функцией с интегрируемым квадратом, если существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad (2.10.1)$$

Итак, если исходная картина имеет симметрию класса  $n$  — либо циклическую, либо зеркальную, — то при четном  $n$  функция автокорреляции обладает симметрией того же порядка, а при нечетном  $n$  — порядка  $2n$ .

Поэтому функция автокорреляции букв *H* и *Z*, обладающих только симметрией класса  $C_2$ , характеризуется той же симметрией  $C_2$ . Но, как уже отмечалось, исходные функции, не обладающие никакой циклической симметрией (буквы *B* и *A*), дают автокорреляции с симметрией класса  $C_2$ . Аналогично, автокорреляция функций, обладающих двугранной симметрией  $D_2$  (буквы *H* и *X*), имеет

который иначе называется *квадратом нормы функции*  $f(x)$  и обозначается

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2. \quad (2.10.2)$$

Требование конечности нормы функции  $\|f\|$  позволяет существенно расширить класс функций, над которыми можно совершать преобразования Фурье и свертки. В частности, этому требованию удовлетворяют так называемые *обобщенные функции* или *распределения*.

Действительно, если функция  $f(x)$  имеет конечную норму  $\|f\|$ , то из формулы Парсеваля (2.6.19) следует, что фурье-образ также является функцией с интегрируемым квадратом, а его норма с точностью до множителя  $\sqrt{1/2\pi}$  равна норме исходной функции:

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \|F\|. \quad (2.10.3)$$

Отсюда следует важный вывод. Если две произвольные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные нормы  $\|f\|$  и  $\|g\|$ , то их сумма  $f(x) + g(x)$  также имеет конечную норму, что можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f + g|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F + G|^2 d\omega \quad (2.10.4)$$

или, если расписать выражение (2.10.4) подробно, в виде

$$\begin{aligned} \|f\|^2 + \|g\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx = \\ = \frac{1}{2\pi} \left\{ \|F\|^2 + \|G\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) G(\omega) d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (2.10.5)$$

Используя (2.10.3), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f g^* dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^* g dx = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F G^* d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} F^* G d\omega \right\}. \quad (2.10.6)$$

Если аналогичные рассуждения повторить для функции  $f(x) + ig(x)$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f + ig)(f^* - ig^*) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F + iG)(F^* - iG^*) d\omega \quad (2.10.7)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f^*g - fg^*) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F^*G - FG^*) d\omega. \quad (2.10.8)$$

Из (2.10.6) и (2.10.8) следует, что если  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные нормы, то справедливо следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega. \quad (2.10.9)$$

Его можно сформулировать следующим образом: если две произвольные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные нормы, т. е. являются функциями с интегрируемым квадратом, то в результате преобразования Фурье сохраняется интеграл, который называется *скалярным произведением* двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$  и имеет смысл перекрестной нормы этих функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx. \quad (2.10.10)$$

Ниже используется следующее обозначение:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx. \quad (2.10.11)$$

Понятие скалярного произведения двух функций, так же как и понятие нормы, аналогично понятиям скалярного произведения и нормы в векторной алгебре. Действительно, если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — векторы с компонентами  $a_k$  и  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то скалярным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется величина  $\mathbf{ab} = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ .

Если же  $a_k = f(x_k)$ ,  $b_k = g(x_k)$ , то  $\mathbf{ab} = \sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)$ . Если все расстояния между  $x_{k+1}$  и  $x_k$  устремить к нулю, то сумма обращается в интеграл. Тогда приходим к выражению (2.10.11).

Одно из наиболее фундаментальных свойств преобразования Фурье состоит в том, что скалярное произведение двух функций при этом преобразовании сохраняется с точностью до постоянного множителя.

Отметим сначала основные свойства скалярного произведения.



Если скалярное произведение существует, то операция скалярного умножения двух функций является коммутативной и ассоциативной по отношению к сложению:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \langle g(x), f(x) \rangle, \quad (2.10.12)$$

$$\langle a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x), g(x) \rangle = a_1 \langle f_1(x), g(x) \rangle + a_2 \langle f_2(x), g(x) \rangle, \quad (2.10.13)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные комплексные числа.

Далее,

$$\left. \begin{aligned} \langle f(x), g(x) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle F(\omega), G(-\omega) \rangle, \\ \langle f(x), g^*(x) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle F(\omega), G^*(\omega) \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2.10.14)$$

Если скалярное произведение функции  $f(x)h(x)$  на функцию  $g(x)$  существует, то

$$\langle f(x)h(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)g(x)dx = \langle f(x), g(x)h(x) \rangle. \quad (2.10.15)$$

При переносе одной функции на величину  $x_0$  получаем

$$\begin{aligned} \langle f(x-x_0), g(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)g(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x+x_0)dx = \langle f(x), g(x+x_0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.10.16)$$

При сжатии одной из функций в  $a$  раз имеем

$$\begin{aligned} \langle f(ax), g(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)g(x)dx = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), g\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.10.17)$$

## § 2-11. Обобщенные функции, или распределения

В конце прошлого века инженер Хэвисайд ввел правила символических расчетов, которые он применил для решения физических проблем и которые легли в основу современного операционного исчисления. Однако долгое время правила Хэвисайда, дававшие верные результаты, считались нестрогими и математика их обходила стороной.

Следующий шаг был сделан физиком Дираком. Он ввел понятие дельта-функции  $\delta(x - x_0)$ , которая в понимании физиков равна нулю всюду, кроме одной точки  $x_0$ , где она равна бесконечности, но интеграл от дельта-функции равен единице. Такое понятие было несовместимо с классическими определениями функции интеграла, а поэтому дельта-функция была для математиков, строго говоря, неприемлема.

Еще более сильные возражения вызвали правила дифференцирования этих «незаконных» функций. Так, например, дельта-функция Дирака  $\delta(x)$  равна производной функции Хэвисайда  $Y(x)$ , которая равна нулю для  $x < 0$  и равна единице для  $x \geq 0$ . Аналогично определялись производные  $\delta'(x)$ ,  $\delta''(x)$  от дельта-функции Дирака.

Представление о непрерывной среде или непрерывном поле, вытекающее из основных понятий классической математики, было тормозом при формулировке принципов математической физики. Фактически математика игнорировала дискретное строение материи, выступившее на передний план после создания квантовой механики и фундаментальных открытий современной физики.

Внутренними натяжками обладала и сама теория уравнений математической физики, с помощью которых описывались поля и процессы, происходящие в природе. Решение этих уравнений записывалось с помощью классических функций только в не так называемых *сингулярных точках*. Однако именно эти сингулярные точки играют фундаментальную роль, так как в этих точках расположены источники полей и получаемых решений. Это вело к математическим ухищрениям, с помощью которых увязывались в непротиворечивое единство, с одной стороны, строгость математического языка и, с другой стороны, физическая картина описываемого им явления. Это вызывало методические трудности как в математике, так и в физике, а стремление последовательного проведения этих методов с неизбежностью усложняло подход и вызывало общую неудовлетворенность.

Все это послужило толчком для широкого развития нового раздела математического анализа — *теории распределений*, или *обобщенных функций*, который хотя и не дал новых методов решений, но привел к усовершенствованию аналитической формулировки задач и более глубокому исследованию проблемы существования решений уравнений математической физики.

Теория обобщенных функций разрешает много неясных вопросов теории преобразования Фурье и создает удобный аппарат для решения задач, рассмотрение которых до последнего времени было невозможно без громоздких индивидуальных приемов. В предыдущем параграфе было показано, что преобразование Фурье является строго обратимым только для тех функций, которые имеют конечную норму или квадратично интегрируемы, причем фурье-

образы таких функций также имеют конечную норму. Если же исходная функция не имеет конечной нормы, но является абсолютно интегрируемой, то ее фурье-образ в общем случае не абсолютно интегрируем, а представляет собой ограниченную функцию.

В качестве примера таких «трудных» функций можно указать на функции  $f(x) = 1(x)$  и  $f(x) = \sin(x)$ .

Чтобы разрешить все эти трудности, достаточно сделать один шаг: обобщить понятие функции. Существенным фактором здесь является то, что в обычных задачах физики и оптики дельта-функции и другие сингулярные функции встречаются, как правило, только на промежуточных этапах. В окончательном ответе сингулярные функции или отсутствуют совсем, или входят под знак интеграла в виде множителя вместе с другой достаточно «хорошей» функцией.

Поэтому вместо того, например, чтобы точно определять дельта-функцию, достаточно указать результат операции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (2.11.1)$$

для любой достаточно «хорошей» функции  $g(x)$ . Интеграл (2.11.1) при заданной функции  $g(x)$  представляет число. Если взять другую достаточно «хорошую» функцию  $g_1(x)$ , то мы получим, вообще говоря, другое число. Правило, согласно которому каждой функции  $g(x)$  из класса «хороших» функций приписывается некоторое число, называется *функционалом*. Как видно из (2.10.4) и (2.10.11), таким функционалом является *скалярное произведение* двух функций, рассмотренное в предыдущем параграфе:

$$\langle \delta(x - x_0), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx. \quad (2.11.2)$$

Если взять произвольную обобщенную функцию  $f(x)$ , то заданная числа

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx, \quad (2.11.3)$$

определенного для любой «хорошей» функции  $g(x)$ , достаточно, чтобы полностью определить свойства функции  $f(x)$ , не определяя ее непосредственно.

Чтобы закончить краткое определение обобщенных функций, необходимо раскрыть понятие «хорошей» функции  $g(x)$ .

Приведем наиболее простое определение «хорошей» функции. Основной или «хорошей» функцией называется такая функция  $g(x)$  точки  $x$ , которая имеет непрерывные производные всех

порядков и финитна, т. е. отлична от нуля только в конечной области независимой переменной  $x$ .

Все «хорошие» функции допускают преобразования Фурье. Действительно, достаточным условием существования фурье-образа является абсолютная интегрируемость исходной функции. Поскольку «хорошие» функции отличны от нуля только на конечной области независимой переменной, то они, в силу непрерывности, абсолютно интегрируемы.

Поэтому все свойства преобразования Фурье, рассмотренные выше, полностью сохраняются для «хороших» функций. Это, однако, не означает, что к понятию обобщенной функции следует обращаться всякий раз, когда изучаемая функция не является «хорошей».

Например, функция

$$f(x) = \frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0 x}$$

не является «хорошей», так как область ее задания не ограничена. Тем не менее она имеет фурье-образ и допускает обратное преобразование Фурье. Поэтому к понятию обобщенной функции необходимо обращаться в следующих случаях:

- исходная функция неинтегрируема абсолютно;
- исходная функция входит в класс сингулярных функций;
- необходимо осуществить дифференцирование функций абсолютно интегрируемых, но имеющих разрывы.

Запись скалярного произведения обобщенной функции  $f(x)$  и «хорошей» функции  $g(x)$  с помощью интеграла (2.11.3) является чисто условной, так как значение интеграла зависит от последовательности устремления к пределу, а поэтому, строго говоря, интеграл не имеет смысла.

## § 2-12. Примеры обобщенных функций

Обобщенная дельта-функция Дирака. Любой «хорошей» функции  $g(x)$  можно приписать число  $g(0)$ , равное значению этой функции в нуле. Это — определение обобщенной функции Дирака  $\delta(x)$ :

$$\langle \delta(x), g(x) \rangle = g(0). \quad (2.12.1)$$

Аналогичный функционал записывается для сдвинутой дельта-функции  $\delta(x - x_0)$ :

$$\langle \delta(x - x_0), g(x) \rangle = \langle \delta(x), g(x + x_0) \rangle = g(x_0). \quad (2.12.2)$$

Дельта-функцию  $\delta(x - x_0)$  можно интерпретировать как точечную единичную массу, расположенную на прямой — оси  $Ox$  в точке  $x = x_0$ .

Для произведения двух «хороших» функций  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  имеем

$$\begin{aligned} \langle \delta(x - x_0), g_1(x) g_2(x) \rangle &= \langle \delta(x - x_0), g_1(x) g_2(x_0) \rangle = \\ &= \langle \delta(x - x_0), g_1(x_0) g_2(x) \rangle = g_1(x_0) g_2(x_0). \end{aligned} \quad (2.12.3)$$

Дельта-функция от сложного аргумента равна

$$\delta[\varphi(x - x_0)] = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{d\varphi}{dx}(x_0) \right|}, \quad (2.12.4)$$

или, иначе,

$$\langle \delta[\varphi(x - x_0)], g(x) \rangle = \left\langle \delta(x - x_0), \frac{g(x)}{\left| \frac{d\varphi}{dx}(x_0) \right|} \right\rangle = \frac{g(x_0)}{\left| \frac{d\varphi}{dx}(x_0) \right|}. \quad (2.12.5)$$

В простейшем частном случае

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}. \quad (2.12.6)$$

Если уравнение

$$\varphi(x) = 0 \quad (2.12.7)$$

имеет счетное число корней  $x_i$ , то

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x_i)|}. \quad (2.12.8)$$

Иначе говоря, функция  $\delta[\varphi(x)]$  состоит из последовательности точечных масс, значение каждой из которых равно

$$m_i = \frac{1}{\varphi'(x_i)}, \quad (2.12.9)$$

т. е. величине, обратной значению производной функции  $\varphi(x)$  в точках  $x_i$ , являющихся корнями уравнения  $\varphi(x) = 0$ .

Рассмотрим основные свойства обобщенных функций, которые в литературе иногда называются распределениями.

1. Функционал (2.11.3) является *линейным*, если

$$\begin{aligned} \langle a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x), g(x) \rangle &= \\ &= a_1 \langle f_1(x), g(x) \rangle + a_2 \langle f_2(x), g(x) \rangle, \end{aligned} \quad (2.12.10)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные комплексные числа.

2. Если функционал (2.11.3) равен нулю:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0, \quad (2.12.11)$$

для любой функции  $g(x)$ , то это означает, что  $f(x) = 0$ .

3. По определению две обобщенные функции равны, если их разность равна нулю. Если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  равны, то  $f_1(x) - f_2(x) = 0$ , и поэтому

$$\langle f_1(x) - f_2(x), g(x) \rangle = 0,$$

или

$$\langle f_1(x), g(x) \rangle - \langle f_2(x), g(x) \rangle = 0,$$

или

$$\langle f_1(x), g(x) \rangle = \langle f_2(x), g(x) \rangle. \quad (2.12.12)$$

Наоборот, если равенство (2.12.12) выполняется для любых  $g(x)$ , то две обобщенные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  равны друг другу. Это не означает равенства  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  во всех точках задания этих функций, а только их равенство почти всюду, т. е. они могут отличаться в некотором числе изолированных точек.

4. Произведение любой обобщенной функции  $f(x)$  на бесконечно дифференцируемую функцию  $a(x)$  равно по определению

$$\langle a(x) f(x), g(x) \rangle = \langle f(x), a(x) g(x) \rangle. \quad (2.12.13)$$

Пусть, например,  $f(x) = \delta(x)$  — обобщенная функция Дирака и  $a(x) = x$ . Тогда имеем

$$\langle x\delta(x), g(x) \rangle = \langle \delta(x), xg(x) \rangle = [xg(x)]_{x=0}, \quad (2.12.14)$$

так как по определению обобщенная функция Дирака устанавливает соответствие между любой «хорошей» функцией и значением этой функции при  $x = 0$ . Поскольку  $g(x)$  ограничена, то

$$[xg(x)]_{x=0} = 0.$$

Следовательно,

$$x\delta(x) = 0. \quad (2.12.15)$$

Перемножить две произвольные обобщенные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  в общем случае нельзя. Например, не имеет смысла выражение  $f^2(x)$ .

Таким образом, теория обобщенных функций допускает только операции умножения типа  $f(x) a(x)$ , где  $a(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция.

Если для известной обобщенной функции  $f(x)$  имеет место равенство

$$\langle xf(x), g(x) \rangle = \langle f(x), xg(x) \rangle = 0, \quad (2.12.16)$$

то  $f(x) = \alpha\delta(x)$ , где  $\alpha$  — комплексное число.

5. Формула (2.10.16), выражающая свойство трансляции для обычных функций, также справедлива и для обобщенных функций:

$$\langle f(x - x_0), g(x) \rangle = \langle f(x), g(x + x_0) \rangle. \quad (2.12.17)$$

Применив это свойство к обобщенной функции Дирака  $\delta(x)$ ,

получим очевидный результат:

$$\langle \delta(x - x_0), g(x) \rangle = \langle \delta(x), g(x + x_0) \rangle = g(x_0).$$

6. Отражение в начале координат:

$$\langle f(-x), g(x) \rangle = \langle f(x), g(-x) \rangle. \quad (2.12.18)$$

7. Обобщенные функции имеют производные всех порядков, которые также являются обобщенными функциями.

Проиллюстрируем схему доказательства на примере обычной функции. Если функция  $f(x)$  непрерывна и обладает непрерывной производной, то можно построить функционал

$$\left\langle \frac{df(x)}{dx}, g(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} g(x) dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что функция  $g(x)$  обращается в нуль вне конечного отрезка  $[a, b]$ , получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{df(x)}{dx}, g(x) \right\rangle &= f(x)g(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx = \\ &= \left\langle f(x), -\frac{dg(x)}{dx} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.12.19)$$

Формула применима и к обобщенным функциям.

Легко убедиться в том, что

$$\left\langle \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, g(x) \right\rangle = + \left\langle f(x), \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right\rangle. \quad (2.12.20)$$

Для случая многих независимых переменных  $x(x, y, z, \dots)$  последовательность дифференцирования при получении смешанных производных можно менять. Упомянем также, что лапласиан от распределения  $f(x)$  определяется следующей формулой:

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle, \quad (2.12.21)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Функция Хэвисайда (рис. 2.18), условно обозначаемая символом

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (2.12.22)$$

или единичная ступенька, имеет производную  $Y'(x)$ , которая определяется функционалом

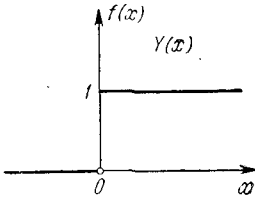
$$\left\langle \frac{dY(x)}{dx}, g(x) \right\rangle = \left\langle Y(x), -\frac{dg(x)}{dx} \right\rangle = - \int_0^{\infty} \frac{dg(x)}{dx} dx = \\ = g(0) = \langle \delta(x), g(x) \rangle,$$

откуда

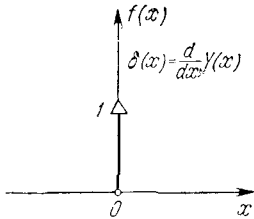
$$\frac{dY(x)}{dx} = \delta(x). \quad (2.12.23)$$

Таким образом, скачок единичной ступеньки равен единичному импульсу, т. е. дельта-функции.

Дальнейшее дифференцирование позволяет определить производные от дельта-функции:



$$\langle \delta'(x), g(x) \rangle = - \langle \delta(x), g'(x) \rangle = - \frac{dg(0)}{dx}. \quad (2.12.24)$$



Функция  $\delta'(x)$  означает «единичное биеие». Ее можно интерпретировать как единичный диполь с моментом  $p = -1$ , помещенный в начало координат. При этом

$$\langle \delta^{(m)}(x), g(x) \rangle = (-1)^m g^{(m)}(0). \quad (2.12.25)$$

Рис. 2.18. Графики функции Хэвисайда  $Y(x)$  и ее производной  $\frac{dY}{dx} = \delta(x)$ .

Если  $f(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция при  $x < 0$  и при  $x > 0$ , но она сама и ее производные в точке

$x = 0$  имеют скачки  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$ , то

$$\langle f', g \rangle = - \langle f, g' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} fg' dx = - \int_{-\infty}^{\infty} fg' dx - \int_0^{\infty} fg' dx.$$

При этом

$$- \int_0^{\infty} fg' dx = - [f(x)g(x)]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} f(x)g(x) dx = \\ = f(+0)g(0) + \int_0^{\infty} f'(x)g(x) dx$$



и

$$-\int_{-\infty}^0 f(x) g'(x) dx = -f(-0)g(0) + \int_{-\infty}^0 f'(x)g(x) dx,$$

или

$$-(fg') = \sigma_0 g(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx; \quad (2.12.26)$$

окончательно

$$f' = \{f'\} + \sigma_0 \delta,$$

где  $\{f'\}$  — обобщенная функция, определяемая функциями, которые равны обычным производным при  $x < 0$  и  $x > 0$  и не определены в точке  $x = 0$ . Обобщая далее, находим

$$f'' = \{f''\} + \sigma_0 \delta' + \sigma_1 \delta \text{ и т. д.} \quad (2.12.27)$$

Например, функция  $Y(x) \frac{\cos x}{\sin x}$ , равная 0 при  $x < 0$  и  $\frac{\cos x}{\sin x}$  при  $x > 0$ , имеет производные

$$\left. \begin{aligned} [Y(x) \cos(x)]' &= -Y(x) \sin x + \delta(x), \\ [Y(x) \sin(x)]' &= Y(x) \cos x. \end{aligned} \right\} \quad (2.12.28)$$

**Пример.** Обобщенная функция «главное значение  $P \frac{1}{x}$ »:

$$\left\langle P \frac{1}{x}, g(x) \right\rangle = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) dx}{x} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right]. \quad (2.12.29)$$

Очевидно, что

$$\frac{d \ln |x|}{dx} = P \frac{1}{x} \quad (2.12.30)$$

в смысле распределений.

**Пример.** Обобщенная функция  $e^{i\omega x}$ . По определению

$$\langle e^{i\omega x}, g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = G(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[g(x)], \quad (2.12.31)$$

т. е. обобщенная функция определяется функционалом, который ставит в соответствие любой «хорошей» функции  $g(x)$  ее фурье-образ  $G(\omega)$ .

Обобщенные функции, или распределения, можно интерпретировать как распределение точечных излучателей света либо как распределение точечных масс или зарядов.

Распределение Дирака  $\delta(x - x_0)$  изображает точечную массу, равную +1 и помещенную в точку  $x_0$ . Распределение, связанное с локально-интегрируемой функцией  $f(x)$ , истолковывается как распределение заряда с плотностью  $f(x)$ . Обобщая, можно

утверждать, что математические распределения представляют собой точное математическое определение распределений, встречающихся в физике.

Рассмотрим теперь свойства преобразования Фурье обобщенных функций.

### § 2.13. Преобразование Фурье обобщенных функций

Основное соотношение, задающее свойства фурье-образа обобщенных функций, имеет вид

$$\langle f(x), g^*(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\mathcal{F}}[f(x)], \hat{\mathcal{F}}^*[g(x)] \rangle \quad (2.13.1)$$

и называется равенством Парсеваля. Одновременно это соотношение является определением фурье-образа  $F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f(x)]$  обобщенной функции  $f(x)$ . Функция  $g(x)$  входит в класс основных, или «хороших», функций. Видно, что соотношение (2.13.1) для обобщенной функции  $f(x)$  совпадает с аналогичным равенством (2.10.14) для обычных функций. Однако формула (2.13.1) применима не к любой обобщенной функции и фурье-образ произвольной обобщенной функции не существует. Так выделяется класс «умеренных» обобщенных функций, которые имеют фурье-образ. В этот класс входят:

- функции, абсолютно интегрируемые;
- ограниченные функции;
- обобщенные функции, имеющие ограниченную область задания.

Если умеренную обобщенную функцию  $f(x)$  умножить на конечную степень  $x^m$ , то полученная обобщенная функция  $x^m f(x)$  является умеренной. Любые производные умеренных обобщенных функций — также умеренные обобщенные функции. Наконец, фурье-образ умеренной обобщенной функции является умеренной обобщенной функцией. Функция  $e^x$  — пример функции, не являющейся умеренной. Имеются также примеры, когда фурье-образ некоторой обобщенной функции или даже некоторой функции является обобщенной функцией.

**Пример.** Обобщенная функция  $\delta(x)$  (рис. 2.19):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{F}}[\delta(x)], G(\omega) \rangle &= 2\pi \langle \delta(x), g(x) \rangle = \\ &= \langle \delta(x), \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} G(\omega) d\omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \langle 1(\omega), G(\omega) \rangle; \end{aligned}$$

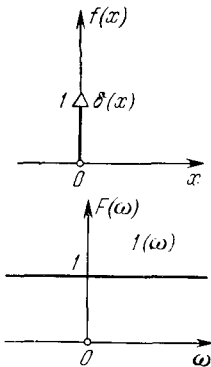


Рис. 2.19. График-дельта функции  $\delta(x)$  и ее фурье-образ.

таким образом,

$$\hat{\mathcal{F}}[\delta(x)] = 1(\omega). \quad (2.13.2)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{F}}[\delta(x-x_0)], G(\omega) \rangle &= 2\pi \langle \delta(x-x_0), g(x) \rangle = \\ &= \langle \delta(x-x_0), \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} G(\omega) d\omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_0} G(\omega) d\omega = \langle e^{i\omega x_0}, G(\omega) \rangle, \end{aligned}$$

откуда

$$\hat{\mathcal{F}}[\delta(x-x_0)] = e^{i\omega x_0}. \quad (2.13.3)$$

Также доказывается, что (рис. 2.20)

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}[1(x)] &= 2\pi\delta(\omega), \\ \hat{\mathcal{F}}[(-ix)^m] &= 2\pi\delta^{(m)}(\omega), \\ \hat{\mathcal{F}}[e^{i\omega_0 x}] &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.13.4)$$

Можно утверждать, что преобразование Фурье умеренных обобщенных функций взаимно обратимо, т. е. фурье-образ умеренной обобщенной функции также является умеренной обобщенной функцией. Ранее мы уже упоминали о том, что преобразование фурье-функции с ограниченной нормой имеет ту же норму с точностью до множителя  $\sqrt{1/2\pi}$ . Класс умеренных обобщенных функций гораздо более широкий, чем класс нормальных функций.

Как следствие этого утверждения упомянем, что если

$$\hat{\mathcal{F}}[f(x)] = 0,$$

то

$$f(x) = 0.$$

**Пример.** Пусть обобщенная функция  $f(x)$  образована одиночными массами  $+1$  во всех точках с целочисленными абсциссами, т. е. является гребенкой Дирака:

$$III(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT), \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.13.5)$$

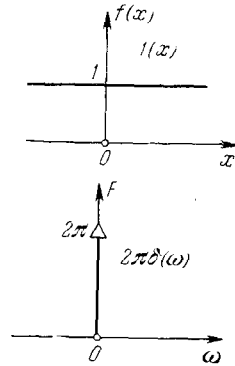


Рис. 2.20. График функции  $1(x)$  и ее фурье-образ.

Найдем ее фурье-образ:

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{F}}[III(x)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mathfrak{F}}[\delta(x - nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega nT} = \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0).\end{aligned}\quad (2.13.6)$$

Следовательно, фурье-образ гребенки Дирака также равен гребенке Дирака:

$$\hat{\mathfrak{F}}[III(x)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) = \omega_0 \cdot III(\omega).\quad (2.13.7)$$

Для фурье-образов обобщенных функций справедливы формулы дифференцирования фурье-образов обычных функций:

$$\left. \begin{aligned}\frac{dF(\omega)}{d\omega} &= \hat{\mathfrak{F}}[(ix)f(x)], \\ (-i\omega)F(\omega) &= \hat{\mathfrak{F}}\left[\frac{df(x)}{dx}\right].\end{aligned}\right\} \quad (2.13.8)$$

Докажем первую из них:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathfrak{F}}[(ix)f(x)], \hat{\mathfrak{F}}[g(x)] \rangle &= 2\pi \langle (ix)f(x), g(x) \rangle = \\ &= 2\pi \langle f(x), (-ix)g(x) \rangle = \langle \hat{\mathfrak{F}}[f(x)], \hat{\mathfrak{F}}[(-ix)g(x)] \rangle = \\ &= \left\langle \hat{\mathfrak{F}}[f(x)], -\frac{d}{d\omega} \hat{\mathfrak{F}}[g(x)] \right\rangle = \left\langle \frac{d}{d\omega} \hat{\mathfrak{F}}[f(x)], \hat{\mathfrak{F}}[g(x)] \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{dF(\omega)}{d\omega}, \hat{\mathfrak{F}}[g(x)] \right\rangle.\end{aligned}\quad (2.13.9)$$

Фурье-образ от полинома  $M(x)$  равен

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{F}}[M(x)] &= \hat{\mathfrak{F}}[M(x) \cdot 1(x)] = M\left(-i\frac{d}{d\omega}\right) \cdot \hat{\mathfrak{F}}[1(x)] = \\ &= 2\pi M\left(-i\frac{d}{d\omega}\right) \delta(\omega),\end{aligned}\quad (2.13.10)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}[\delta^{(2m)}(x)] &= 2\pi (-1)^m \omega^{2m}, \\ \hat{\mathcal{F}}[\delta^{(2m+1)}(x)] &= 2\pi (-1)^{m+1} \cdot i \cdot \omega^{2m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13.11)$$

Фурье-образ показательной функции  $e^{\omega_0 x}$  равен

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}[e^{\omega_0 x}] &= \hat{\mathcal{F}}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_0^n x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_0^n}{n!} \hat{\mathcal{F}}[x^n] = \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_0^n}{n!} \left(-i \frac{d}{d\omega}\right)^n \delta(\omega) = 2\pi \delta(\omega + i\omega_0). \end{aligned} \quad (2.13.12)$$

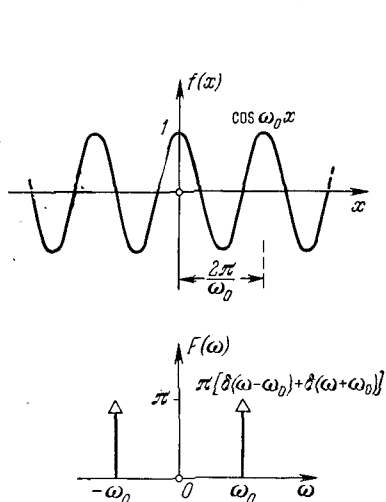


Рис. 2.21. График косинусоиды и ее фурье-образ, содержащий только действительную часть.

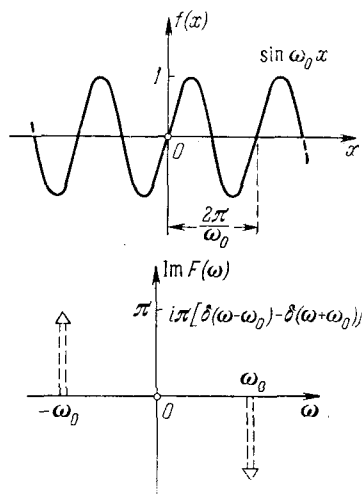


Рис. 2.22. График синусоиды и ее фурье-образ, содержащий только мнимую часть.

**Пример.** Найдем фурье-образ гармонических функций  $\cos \omega_0 x$  и  $\sin \omega_0 x$  (рис. 2.21). Очевидно,

$$\cos \omega_0 x = \frac{e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}}{2} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (2.13.13)$$

и (рис. 2.22)

$$\sin \omega_0 x = \frac{e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x}}{2i} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} i\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (2.13.14)$$

**Пример.** Рассмотрим решение уравнения

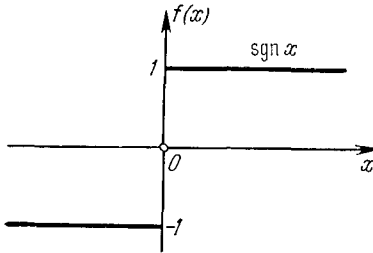
$$xf(x) = 1. \quad (2.13.15)$$

Для  $x \neq 0$ , очевидно,

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \quad (2.13.16)$$

Однако распространить решение на точку  $x = 0$  нельзя, так как в этой точке может быть задана обобщенная функция, и такой обобщенной функцией является распределение Дирака. Легко проверить, что решением (2.13.15) является обобщенная функция

$$f(x) = \frac{1}{x} + K\delta(x). \quad (2.13.17)$$



В этом легко убедиться, если учесть, что

$$x\delta(x) = 0.$$

Если же нам встретится уравнение

$$x^2f(x) = 1, \quad (2.13.18)$$

Рис. 2.23. График знаковой функции.

то его решением будет обобщенная функция

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + K_1\delta(x) + K_2\delta'(x). \quad (2.13.19)$$

В общем случае, если  $a(x)$  имеет в точке  $x = x_0$  нуль порядка  $p$ , то решением уравнения

$$a(x)f(x) = 1 \quad (2.13.20)$$

является обобщенная функция

$$f(x) = \frac{1}{a(x)} + K_1\delta(x - x_0) + K_2\delta'(x - x_0) + \dots + K_p\delta^{(p-1)}(x - x_0), \quad (2.13.21)$$

причем функция  $1/a(x)$  в точке  $x = x_0$  не определена.

**Пример.** Вычислим фурье-образ знаковой функции (рис. 2.23):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (2.13.22)$$

Легко проверить, что

$$\operatorname{sgn} x = 2Y(x) - 1, \quad (2.13.23)$$

где  $Y(x)$  — единичный скачок, или обобщенная функция Хэвисайда. Таким образом, задача сводится к определению фурье-образа обобщенной функции Хэвисайда.

Как было отмечено выше,

$$Y'(x) = \delta(x),$$

а поэтому

$$\hat{\mathfrak{F}}[Y(x)] = \hat{\mathfrak{F}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx\right] = \frac{\hat{\mathfrak{F}}[\delta(x)]}{i\omega} = \frac{1(\omega)}{i\omega}, \quad (2.13.24)$$

и отсюда следует уравнение

$$\hat{\mathfrak{F}}[Y(x)] \cdot i\omega = 1(\omega), \quad (2.13.25)$$

аналогичное только что рассмотренному уравнению (2.13.15). Его решение

$$\hat{\mathfrak{F}}[Y(x)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (2.13.26)$$

приведено на рис. 2.24. Тогда (рис. 2.25)

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{F}}[\operatorname{sgn} x] &= \hat{\mathfrak{F}}[2Y(x) - 1(x)] = \\ &= 2\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right] - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{i\omega} = -\frac{2}{\omega}i. \end{aligned} \quad (2.13.27)$$

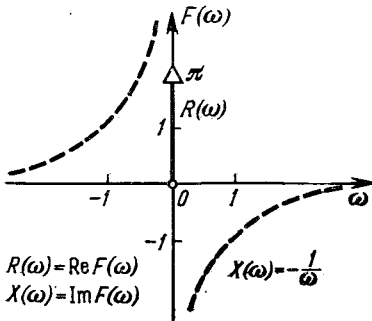


Рис. 2.24. Фурье-образ функции Хэвисайда, содержащий действительную и мнимую части.

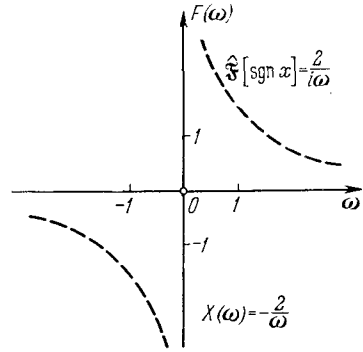


Рис. 2.25. Фурье-образ знаковой функции, содержащий только мнимую часть.

**Пример.** Найдем фурье-образ обобщенной функции  $f(x) = |x|$ . С помощью обобщенной функции  $\operatorname{sgn} x$  обобщенную функцию  $|x|$  можно записать в виде

$$f(x) = |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x.$$

Умножению исходной обобщенной функции  $\text{sgn } x$  на  $x$  отвечает операция дифференцирования фурье-образа по частоте. Поэтому

$$x \cdot \text{sgn } x \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{(-i)} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{2}{i\omega} \right) = -\frac{2}{\omega^2}.$$

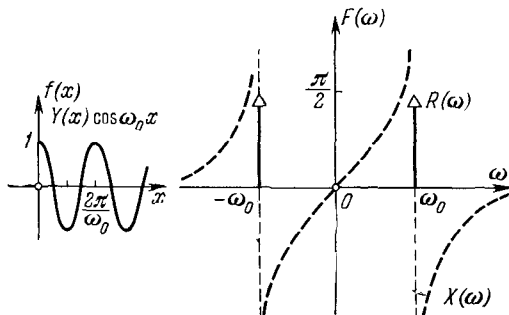


Рис. 2.26. График функции  $Y(x) \cos \omega_0 x$  и ее фурье-образ.

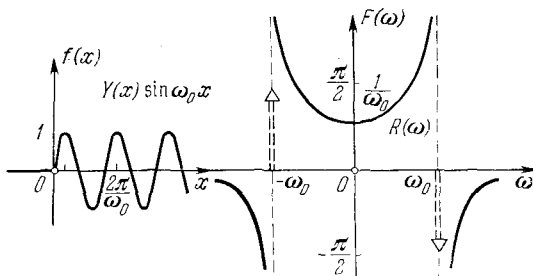


Рис. 2.27. График функции  $Y(x) \sin \omega_0 x$  и ее фурье-образ.

Таким образом,

$$\hat{\mathcal{F}}[|x|] \approx -\frac{2}{\omega^2}. \quad (2.13.28)$$

**Пример.** Ступенчато-модулированная гармоника

$$f_1(x) = Y(x) \cos \omega_0 x = Y(x) \frac{e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}}{2} \quad (2.13.29)$$

имеет фурье-образ

$$\frac{1}{2} \hat{\mathcal{F}}[Y(x)]_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{F}}[Y(x)]_{\omega=-\omega_0}.$$



Используя (2.13.26), находим (рис. 2.26)

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{\omega + \omega_0} + \frac{1}{\omega - \omega_0} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.13.30)$$

Аналогично, обобщенная функция  $f_2(x) = Y(x) \sin \omega_0 x$  имеет фурье-образ (рис. 2.27)

$$F_2(\omega) = i \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.13.31)$$

### § 2-14. Свертка обобщенных функций

Сверткой двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  называется интегральная операция

$$f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi. \quad (2.14.1)$$

В теории обобщенных функций, или распределений, кратко рассмотренной в предыдущих двух параграфах, операция свертки имеет большое значение. Чтобы определить операцию свертки обобщенной функции, введем понятие прямого произведения двух обобщенных функций.

Если обобщенная функция  $f_1(x)$  задана на линейной области  $x$ , а обобщенная функция  $f_2(y)$  задана на другой линейной области  $y$ , то прямое произведение

$$f_1(x) \times f_2(y) \quad (2.14.2)$$

задано на области  $(x, y)$ , которая представляет собой плоскость. Если  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  заданы на своих пространствах трех измерений  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  и  $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ , то прямое произведение функций  $f_1(\mathbf{x})$  и  $f_2(\mathbf{y})$ :

$$f_1(\mathbf{x}) \times f_2(\mathbf{y}) \equiv [f_1(\mathbf{x}) \cdot f_2(\mathbf{y})], \quad (2.14.3)$$

задано в пространстве шести измерений  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ .

Вместо основных функций  $g(x)$  и  $g(y)$  вводится основная функция  $g(x, y)$ . Если к этой основной функции  $g(x, y)$  применить функционал  $f_2(y)$ , т. е. образовать скалярное произведение

$$\langle f_2(y), g(x, y) \rangle, \quad (2.14.4)$$

то можно доказать, что такое скалярное произведение обладает свойствами основных функций и к нему можно применить другой функционал  $f_1(x)$ , т. е. образовать скалярное произведение

$$\langle f_1(x), \langle f_2(y), g(x, y) \rangle \rangle. \quad (2.14.5)$$

Это скалярное произведение определяет некоторый функционал

$$f_1(x) \times f_2(y),$$

который называется *прямым произведением функционала  $f_1(x)$  на функционал  $f_2(y)$* .

Рассмотрим свойства прямого произведения на примере основных функций  $g(x, y)$ , являющихся произведением основных функций  $g_1(x)$  и  $g_2(y)$ . По определению

$$\begin{aligned} \langle f_1(x) \times f_2(y), g_1(x) g_2(y) \rangle &= \langle f_1(x), \langle f_2(y), g_1(x) g_2(y) \rangle \rangle = \\ &= \langle f_1(x) g_1(x), \langle f_2(y), g_2(y) \rangle \rangle = \langle f_1(x), g_1(x) \rangle \cdot \langle f_2(y), g_2(y) \rangle. \end{aligned} \quad (2.14.6)$$

**Пример.** Прямое произведение  $\delta(x) \times \delta(y)$  равно  $\delta(x, y)$ .

**Пример.** Прямое произведение  $\delta(x) \times 1(y)$  является функционалом, действующим по формуле

$$\langle \delta(x) \times 1(y), g(x, y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(0, y) dy. \quad (2.14.7)$$

Прямое произведение позволяет дать простое описание функционалов, инвариантных относительно сдвигов по каким-либо из координат. Рассмотрим прямое распределение функционала  $f(y)$  и функционала  $1(x)$ . Исходим из

$$\langle 1(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx.$$

Функционал  $1(x) \times f(y)$  инвариантен относительно сдвигов по оси  $x$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \langle 1(x) \times f(y), g(x + \Delta, y) \rangle &= \langle f(y), \langle 1(x), g(x + \Delta, y) \rangle \rangle = \\ &= \langle f(y), \int_{-\infty}^{\infty} g(x + \Delta, y) dx \rangle = \langle f(y), \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dx \rangle = \\ &= \langle 1(x) \times f(y), g(x, y) \rangle. \end{aligned} \quad (2.14.8)$$

Обратно, если обобщенная функция  $f(x, y)$  инвариантна относительно любых сдвигов по  $x$ , то ее можно записать в виде прямого произведения  $1(x) \times g(y)$ , где  $g(y)$  — функционал по координате  $y$ . Наконец, если обобщенная функция  $f(x)$  инвариантна относительно любых сдвигов по  $x$ , то она равна постоянной величине. Утверждение, что функционал  $f(x)$  инвариантен относительно сдвигов по  $x$ , эквивалентно утверждению, что функционал  $f(x)$  имеет производную  $\partial f / \partial x$ , равную нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Если две функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — абсолютно интегрируемые функции  $x$ , а  $f(x)$  — их свертка:

$$f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x),$$

то функционал, определяемый функцией  $f(x)$ , можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle f(x), g(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right\} g(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\eta) g(\xi + \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.14.9)$$

Выражение (2.14.9) можно интерпретировать как результат применения к функции  $g(x + y)$  функционала  $f_1(x) f_2(y)$ , являющегося прямым произведением функций  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ . На основании этого выражения свертку двух любых обобщенных функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  можно определить следующим образом:

$$\langle f_1(x) \otimes f_2(x), g(x) \rangle = \langle f_1(x) \times f_2(y), g(x + y) \rangle. \quad (2.14.10)$$

Однако поскольку функция  $g(x + y)$  в общем случае не является «хорошей» функцией переменных  $x$  и  $y$ , то соотношение (2.14.10) верно не всегда. Свертка двух умеренных обобщенных функций не обязательно существует.

Равенство (2.14.10) приобретает смысл, если полоса  $|x + y| \leq a$ , в которой задана функция  $g(x + y)$ , имеет лишь ограниченные области пересечения с областью задания прямого произведения  $f_1 \times f_2$ . В этом случае функцию  $g(x + y)$  можно заменить в полосе  $|x + y| \leq a$  финитной функцией  $g(x, y)$ , не изменяя ее значений в точках пересечения полосы с областью задания функционала  $f_1 \times f_2$ . Тогда там определено значение

$$\langle f_1 \times f_2, g(x, y) \rangle,$$

которое не зависит от выбора значений  $g(x, y)$  вне указанного пересечения. Проще, чтобы (2.14.10) имело смысл, функции  $f_1$  и  $f_2$  должны удовлетворять следующим требованиям:

— одна из обобщенных функций  $f_1$  или  $f_2$  должна иметь ограниченную область определения, а вторая — являться умеренной обобщенной функцией;

— области определения двух обобщенных функций  $f_1$  и  $f_2$  должны быть ограничены с одной и той же стороны (например,  $f_1 = 0$  при  $x < a$ , а  $f_2 = 0$  при  $y < b$ ).

При соблюдении этих условий свертка обобщенных функций  $f_1$  и  $f_2$  приобретает смысл. Можно указать и более широкие условия существования свертки, но при использовании операции свертки в оптике каждый раз проще проверить непосредственными расчетами, существует ли свертка двух функций или нет.

Например, обобщенная функция Дирака имеет ограниченную область задания — единичную точку — и поэтому всегда имеет смысл свертка обобщенной функции Дирака с любой другой обобщенной функцией.

**Пример.** Найдем свертку  $\delta(x) \otimes f(x)$ . По определению

$$\begin{aligned} \langle \delta \otimes f, g \rangle &= \langle \delta(x) \times f(y), g(x, y) \rangle = \\ &= \langle f(y), \langle \delta(x), g(x+y) \rangle \rangle = \langle f(y), g(y) \rangle = \langle f, g \rangle. \end{aligned} \quad (2.14.11)$$

Таким образом, для любой обобщенной функции  $f(x)$

$$\delta(x) \otimes f(x) = f(x). \quad (2.14.12)$$

В соответствии с определением свертки (2.14.10) свертка обобщенных функций  $f_1$  и  $f_2$  коммутативна и ассоциативна:

$$\left. \begin{aligned} f_1 \otimes f_2 &= f_2 \otimes f_1, \\ (f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 &= f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.14.13)$$

Также верна формула дифференцирования свертки

$$D(f_1 \otimes f_2) = Df_1 \otimes f_2 = f_1 \otimes Df_2, \quad (2.14.14)$$

где  $D$  — дифференциальный оператор. Таким образом, для того чтобы продифференцировать свертку, необходимо продифференцировать любой из «сомножителей» свертки.

Далее,

$$\langle D(f_1 \otimes f_2), g \rangle = \langle f_1 \otimes f_2, D^*g \rangle, \quad (2.14.15)$$

где  $D^* = (-1)^{\nu}D$ , а  $D$  — однородный дифференциальный оператор порядка  $\nu$ . Если обобщенная функция  $f(x) = f(x, \lambda)$  зависит от параметра  $\lambda$ , то

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (f \otimes g) = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \otimes g. \quad (2.14.16)$$

Для того чтобы формула (2.14.16) имела место, необходимо, чтобы области задания обобщенной функции  $f(x, \lambda)$  были ограничены величинами  $a$  и  $b$  ( $f = 0$  при  $x < a$  и  $g \neq 0$  при  $y < b$ ), не зависящими от параметра  $\lambda$ .

Если две обобщенные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют фурье-образы  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$ :

$$\begin{aligned} f_1(x) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F_1(\omega), \\ f_2(x) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F_2(\omega), \end{aligned}$$

то свертка  $f_1 \otimes f_2$ , если она существует, имеет фурье-образ

$$\hat{\mathfrak{F}} [f_1(x) \otimes f_2(x)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega), \quad (2.14.17)$$

равный произведению фурье-образов исходных обобщенных функций, т. е. формула (2.14.17) для обобщенных функций тождественна формуле (2.6.8) для обычных функций.

Далее, произведение двух обобщенных функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеет фурье-образ

$$\hat{\mathfrak{F}} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega), \quad (2.14.18)$$

равный свертке их фурье-образов.

Таким образом, преобразование Фурье превращает операцию свертки в умножение, а умножение — в свертку.

Наконец, следует указать обобщенное соотношение

$$\begin{aligned} \langle f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes f_3(x), g(x) \rangle &= \\ &= \langle F_1(u), F_2(v), F_3(w), g(u+v+w) \rangle. \end{aligned} \quad (2.14.19)$$

Все требования, предъявляемые в этом случае к функциям  $f(x)$ , сохраняются.

Приведем пример, где нарушается ассоциативность свертки. Известно, что (см. (2.14.12))

$$\delta(x) \otimes f(x) = f(x),$$

а также (см. 2.14.14))

$$\delta'(x) \otimes f(x) = f'(x).$$

Возьмем в качестве обобщенной функции  $f(x)$  функцию Хэвисайда  $Y(x)$ . Тогда

$$\delta'(x) \otimes Y(x) = Y'(x) = \delta(x).$$

Далее,

$$(\delta'(x) \otimes Y(x)) \otimes 1(x) = \delta(x) \otimes 1(x) = 1(x). \quad (2.14.20)$$

Теперь воспользуемся ассоциативностью свертки и вместо (2.14.20) вычислим

$$(Y(x) \otimes \delta'(x)) \otimes 1(x) = Y(x) \otimes (\delta'(x) \otimes 1(x)).$$

Но

$$\delta'(x) \otimes 1(x) = 1'(x) \equiv 0(x).$$

Таким образом, получаем два ответа: как

$$(Y(x) \otimes (\delta'(x) \otimes 1(x))) = 1(x),$$

так и

$$Y(x) \otimes (\delta'(x) \otimes 1(x)) = 0(x),$$

которые противоречат друг другу. Это означает, что в нашем примере свертка не ассоциативна или, более того, невозможно

определить свертку обобщенных функций  $Y(x)$  и  $1(x)$ . Таким образом, свертка

$$Y(x) \otimes 1(x)$$

не имеет смысла.

Соотношение (2.14.12) означает, что «единицей операции свертки» является обобщенная функция Дирака  $\delta(x)$ . Аналогично

$$\delta(x - x_0) \otimes f(x) = f(x - x_0), \quad (2.14.21)$$

$$\delta^{(n)}(x) \otimes f(x) = f^{(n)}(x). \quad (2.14.22)$$

Проверим последнее равенство:

$$\begin{aligned} \langle \delta'(x) \otimes f(x), g(x) \rangle &= \langle \delta'(x) f(y), g(x + y) \rangle = \\ &= \langle f(y), \delta'(x) g(x + y) \rangle = - \langle f(y), g'(y) \rangle = \langle f'(x), g(x) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь использовалось следующее свойство скалярного произведения:

$$\langle f'(x), g(x) \rangle = - \langle f(x), g'(x) \rangle. \quad (2.14.23)$$

При дифференцировании свертки дифференцируется один из ее сомножителей:

$$\begin{aligned} (f(x) \otimes h(x))' &= \delta'(x) \otimes (f \otimes h) = \delta' \otimes f \otimes h = \\ &= (\delta' \otimes f) \otimes h = f' \otimes h = \delta' \otimes f \otimes h = \delta' \otimes h \otimes f = \\ &= (\delta' \otimes h) \otimes f = f \otimes (\delta' \otimes h) = f \otimes h'. \end{aligned} \quad (2.14.24)$$

При переносе (трансляции) свертки переносится один из сомножителей:

$$\begin{aligned} (f \otimes h)_{x=x_0} &= \delta(x - x_0) \otimes (f \otimes h) = \delta(x - x_0) \otimes f \otimes h = \\ &= (\delta(x - x_0) \otimes f) \otimes h = f(x - x_0) \otimes h(x) = \\ &= (\delta(x - x_0) \otimes h) \otimes f = f(x) \otimes h(x - x_0). \end{aligned} \quad (2.14.25)$$

## § 2-15. Преобразование Фурье и свертка функций в пространстве многих измерений

Рассмотрим кратко преобразование Фурье и свертку в пространстве многих измерений. Затем — для задач голографии — более подробно проанализируем случай двух измерений. Если задана функция  $f(\mathbf{x})$  в  $n$ -мерном пространстве, то фурье-образ этой функции, если он существует, равен, согласно определению, интегралу

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\omega\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (2.15.1)$$

где интегрирование ведется по всему  $n$ -мерному пространству  $\mathbf{x}$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Для существования интеграла (2.15.1) достаточно, чтобы функция  $f(\mathbf{x})$  была абсолютно интегрируема в своем

пространстве, т. е. чтобы существовал интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В противном случае необходимо действовать методами теории обобщенных функций.

Все соотношения, рассмотренные выше для фурье-образов функции  $f(x)$  в одном измерении, можно распространить на случай  $n$ -мерного пространства.

Эти соотношения можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F(\boldsymbol{\omega}), \\ f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F(\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.15.2)$$

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{x}} &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0), \\ f(\mathbf{a}\mathbf{x}) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{|a_1 a_2 \dots a_n|} F\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}}\right), \end{aligned} \right\} \quad (2.15.3)$$

где  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , а  $\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}}\left(\frac{\omega_1}{a_1}, \frac{\omega_2}{a_2}, \dots, \frac{\omega_n}{a_n}\right)$ .

При произвольном преобразовании координат имеет место соотношение

$$f(\hat{T}\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{\|\hat{T}\|} F(\hat{T}^{-1}\boldsymbol{\omega}), \quad (2.15.4)$$

где  $\hat{T}$  — матрица преобразования, связывающая старые координаты с новыми:

$$\mathbf{Y} = \hat{T}\mathbf{x},$$

а  $\hat{T}^{-1}$  — матрица, обратная  $\hat{T}$ ;  $\|\hat{T}\|$  — детерминант матрицы  $\hat{T}$ . Если матрица  $\hat{T}_0$  унитарна, то  $\hat{T}_0^{-1} = \hat{T}_0$ ,  $\|\hat{T}\| = 1$  и

$$f(\hat{T}_0\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F(\hat{T}_0\boldsymbol{\omega}). \quad (2.15.5)$$

Унитарная матрица преобразования охватывает очень важный случай вращения осей. При этом, если произвести поворот осей в пространстве  $\mathbf{x}$ , то фурье-образ не изменится, если произвести такое же вращение осей в пространстве фурье-координат  $\boldsymbol{\omega}$ .

По аналогии с (2.3.16) имеем

$$F(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} (2\pi)^n f(-\boldsymbol{\omega}), \quad (2.15.6)$$

где  $n$  — размерность пространства.

Если  $D^q$  — дифференциальный оператор вида

$$D^q = \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}},$$

а

$$(\mathbf{x})^q = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n},$$

то

$$(i)^q (\mathbf{x})^q f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} D^q F(\boldsymbol{\omega}), \quad (2.15.7)$$

а также

$$D^q f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} (-i)^q (\boldsymbol{\omega})^q F(\boldsymbol{\omega}). \quad (2.15.8)$$

Скалярное произведение двух функций  $f_1(\mathbf{x})$  и  $f_2(\mathbf{x})$  равно

$$\langle f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.15.9)$$

и обладает следующими свойствами:

$$\langle f_1(\mathbf{x}), f_2^*(\mathbf{x}) \rangle = (2\pi)^{-n} \langle F_1(\boldsymbol{\omega}), F_2^*(\boldsymbol{\omega}) \rangle. \quad (2.15.10)$$

Обобщенные функции в пространстве нескольких измерений определяются через основные функции  $g(\mathbf{x})$  независимых переменных  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Простейшими обобщенными функциями являются  $n$ -мерные дельта-функция Дирака  $\delta(\mathbf{x})$  и единица  $1(\mathbf{x})$ . Их фурье-образы равны

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}[\delta(\mathbf{x})] &= 1(\boldsymbol{\omega}), \\ \hat{\mathcal{F}}[1(\mathbf{x})] &= 2\pi^n \delta(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \right\} \quad (2.15.11)$$

Если обобщенная функция  $f(\mathbf{x})$  инвариантна относительно преобразования  $\hat{T}$ :

$$f(\hat{T}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

то ее фурье-образ инвариантен относительно преобразования  $\hat{T}^{-1}$  и умножения на  $\|\hat{T}\|$ . Например, если обобщенная функция  $f(\mathbf{x})$  сферически симметрична, т. е.  $f(\mathbf{x}) \equiv f(r)$ , а поэтому для каждого поворота  $\hat{T}$  имеем

$$f(\hat{T}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = f(r),$$

то фурье-образ такой функции сферически симметричен:  $F(\boldsymbol{\omega}) = F(\omega_r)$ .

Например, фурье-образ простейшей радиальной функции

$$f(r) = e^{-\pi r^2}.$$



где

$$r^2 = \mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

равен

$$F(\omega) = e^{-\pi\rho^2},$$

де

$$\omega^2 = \boldsymbol{\omega}^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2, \quad \rho^2 = \frac{\omega^2}{4\pi}.$$

Фурье-образ прямого произведения

$$f(\mathbf{x}) \times h(\mathbf{y})$$

равен прямому произведению фурье-образов функционалов  $f$  и  $h$

$$\hat{\mathcal{F}} [f \times h] = \hat{\mathcal{F}} [f] \cdot \hat{\mathcal{F}} [h]. \quad (2.15.12)$$

Отметим следующие свойства  $n$ -мерной дельта-функции в пространстве многих переменных:

$$\left. \begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle &= g(\mathbf{0}), \\ \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}), g(\mathbf{x}) \rangle &= g(\mathbf{a}), \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}), g(\mathbf{x}) \right\rangle &= -\frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15.13)$$

Умеренное распределение  $f(\mathbf{x})$  обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}), g^*(\mathbf{x}) \rangle &= (2\pi)^{-n} \langle F(\boldsymbol{\omega}), G^*(\boldsymbol{\omega}) \rangle, \\ \langle f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), g(\mathbf{x}) \rangle &= \langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \rangle, \\ \langle D^q f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle &= (-1)^q \langle f(\mathbf{x}), D^q g(\mathbf{x}) \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (2.15.14)$$

в частности,

$$\left\langle \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, g(\mathbf{x}) \right\rangle = - \left\langle f(\mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial x_1} g(\mathbf{x}) \right\rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} g(\mathbf{x}) dx.$$

(2.15.15)

По определению  $n$ -мерная свертка двух функций  $f_1(\mathbf{x})$  и  $f_2(\mathbf{x})$  равна

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) \otimes f_2(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\boldsymbol{\xi}) f_2(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (2.15.16)$$

и обладает свойствами, аналогичными свойствам свертки в одном измерении.

Далее,

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}) \otimes g(\mathbf{x}) &\xrightarrow{\hat{\delta}} F(\boldsymbol{\omega}) \cdot G(\boldsymbol{\omega}), \\ f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) &\xrightarrow{\hat{\delta}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n F(\boldsymbol{\omega}) \otimes G(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \right\} \quad (2.15.17)$$

Также

$$\left. \begin{aligned} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \otimes f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}), \\ D^q f(\mathbf{x}) &= D^q \delta(\mathbf{x}) \otimes f(\mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (2.15.18)$$

Формула Парсеваля для  $n$ -мерного случая запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} |F(\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega}. \quad (2.15.19)$$

Особый интерес представляет случай факторизации, когда

$$f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n). \quad (2.15.20)$$

Фурье-образ такой функции равен произведению частичных фурье-образов:

$$F(\boldsymbol{\omega}) = F_1(\omega_1) \cdot F_2(\omega_2) \cdot \dots \cdot F_n(\omega_n). \quad (2.15.21)$$

## § 2-16. Дельта-функции на плоскости

Рассмотрим более подробно свойства дельта-функций, заданных на плоскости. Эти функции имеют широкое применение в оптике и в голографии, где исходная и выходная информации обычно задаются в виде плоского транспаранта.

Дельта-функция  $\delta(x - x_0)$  на плоскости  $\mathbf{x}(x, y)$  определяется следующим образом. Если задана «хорошая» функция  $\varphi(\mathbf{x})$ , то функционал

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \varphi(x_0, y) \quad (2.16.1)$$

приписывает функции  $\varphi(\mathbf{x})$  ее значение на прямой линии, имеющей уравнение  $x = x_0$ .

Двухмерная дельта-функция

$$\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \quad (2.16.2)$$

определяется функционалом

$$\langle \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), g(\mathbf{x}) \rangle = g(\mathbf{x}_0) = g(x_0, y_0), \quad (2.16.3)$$

который приписывает функции  $g(\mathbf{x})$  ее значение в точке  $\mathbf{x}_0(x_0, y_0)$  на пересечении прямых  $x = x_0$  и  $y = y_0$ .

Дельта-функции на плоскости  $\delta(x - x_0)$  или  $\delta(y - y_0)$  можно интерпретировать как линейные единичные массы, размещенные на прямых  $x = x_0$  или  $y = y_0$ .

Двухмерную дельта-функцию  $\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  можно интерпретировать как точечную единичную массу, сосредоточенную в точке  $\mathbf{x}_0(x_0, y_0)$  на пересечении прямых  $x = x_0$  и  $y = y_0$ . Тогда дельта-функция  $\delta(r - r_0)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а  $r_0$  — число, изображает линейную массу, размещенную на окружности радиуса  $r_0$ . Далее, функция  $\delta(r - r_0) \delta(x - x_0)$  характеризуется двумя точечными массами (если только  $r_0 < x_0$ ), расположенными в точках пересечения окружности  $r = r_0$  и прямой  $x = x_0$ . Однако в последнем случае значения точечных масс зависят от координат точек пересечения окружности с прямой.

Если вместо прямых  $y = y_0$  и  $x = x_0$  рассматривать произвольную кривую  $g(x, y) = 0$ , то дельта-функция  $\delta[g(x, y)]$  имеет смысл линейной массы, размещенной на кривой  $g(x, y) = 0$ . Найдем плотность этой массы.

На рис. 2.28 дана кривая  $g(x, y) = 0$  и элемент этой кривой  $ds$ , проекции которого на оси координат равна  $dx$  и  $dy$ . Легко видеть, что проекция линейной массы на ось  $x$  равна

$$dm = \frac{dx}{\left| \frac{dg}{dx} \right|} \quad (2.16.4)$$

по аналогии с выражением (2.12.9) для значения точечной массы на прямой. Длина элемента кривой  $ds$  равна

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dg/dy}{dg/dx} \right)^2}. \quad (2.16.5)$$

Таким образом, плотность массы на единице длины кривой  $g(x, y) = 0$  с учетом (2.16.4) и (2.16.5) равна

$$\lambda = \frac{dm}{ds} \left[ \sqrt{\left( \frac{dg}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dy} \right)^2} \right]^{-1}. \quad (2.16.6)$$

**Пример.** Рассмотрим дельта-функцию на плоскости  $\delta(r - r_0)$ . Здесь функция  $g(x, y) = r - r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} - r_0$ . Вычисляя  $dg/dx$ ,  $dg/dy$ , находим с помощью (2.16.6)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{dg}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dy} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2}} = 1.$$

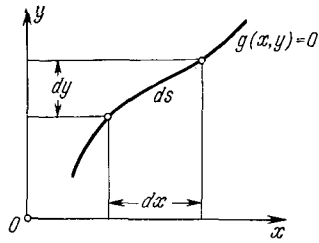


Рис. 2.28. Рисунок, поясняющий свойства дельта-функции на плоскости вдоль кривой  $g(x, y) = 0$ .

Таким образом, дельта-функция  $\delta(r - r_0)$  описывает модель линейной массы, размещенной на окружности  $r = r_0$  и имеющей линейную плотность, равную единице.

Линейную массу с линейной плотностью  $\lambda$  можно аппроксимировать поверхностной массой, размещенной на полоске шириной  $\varepsilon$ , равной  $\lambda/\varepsilon$ . Средняя линия этой полоски совпадает с кривой  $g(x, y) = 0$ .

Определим значение массы в точках пересечения кривых  $r = r_0$  и  $x = x_0$  ( $r_0 > x_0$ ), т. е. запишем в явном виде функционал, связанный с произведением дельта-функции  $\delta(r - r_0)$  на дельта-функцию  $\delta(x - x_0)$ .

Для этого рассмотрим более общий случай двухмерной дельта-функции

$$\delta^2 = \delta[g_1(x, y)] \cdot \delta[g_2(x, y)]. \quad (2.16.7)$$

Это произведение задано в точке пересечения кривых

$$g_1(x, y) = 0 \text{ и } g_2(x, y) = 0. \quad (2.16.8)$$

Воспользуемся «физическими» интерпретациями дельта-функции на плоскости. Как уже было отмечено, произведение (2.16.7) эквивалентно точечной массе, помещенной в точку  $x_0(x_0, y_0)$  и равной по величине

$$m_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sin \theta}, \quad (2.16.9)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — плотности линейных масс вдоль кривой  $g_1 = 0$  и  $g_2 = 0$  соответственно в точке  $x_0$ , а  $\theta$  — угол между кривыми в точке их пересечения. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся правилом аппроксимации линейных масс с помощью полосок, поверхностные плотности масс которых равны  $\lambda_i/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — ширина полоски, а  $\lambda_i$  — линейная плотность масс. Произведение поверхностных масс равно

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\varepsilon^2}, \quad (2.16.10)$$

а площадь области пересечения двух полосок равна  $\varepsilon (\varepsilon/\sin \theta) = \varepsilon^2/\sin \theta$  (рис. 2.29). Отсюда полная масса в ромбе равна

$$m = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\sin \theta} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sin \theta}, \quad (2.16.11)$$

и этот результат не изменится, если ширину полосок устремим к нулю ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Если две кривые (2.16.8) пересекаются в счетном числе точек  $x_i$ , то произведение (2.16.7) нормируется суммой масс во всех

точках пересечения, которая равна

$$m = \sum_i \frac{\lambda_{1i} \lambda_{2i}}{\sin \theta_i}. \quad (2.16.12)$$

Поскольку

$$\sin \theta_i = \frac{|g'_{1x_i} g'_{2y_i} - g'_{1y_i} g'_{2x_i}|}{\sqrt{g'^2_{1x_i} + g'^2_{1y_i}} \sqrt{g'^2_{2x_i} + g'^2_{2y_i}}}, \quad (2.16.13)$$

где

$$g'_{hx_i} = \left. \frac{dg_h}{dx} \right|_{x_i}, \quad g'_{hy_i} = \left. \frac{dg_h}{dy} \right|_{x_i} \quad (k = 1, 2), \quad (2.16.14)$$

то, используя (2.16.12), окончательно получаем

$$\delta^2 = \delta[g_1(x, y)] \delta[g_2(x, y)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i) \delta(y - y_i)}{|g'_{1x_i} g'_{2y_i} - g'_{1y_i} g'_{2x_i}|}. \quad (2.16.15)$$

**Пример.** Двухмерная дельта-функция, заданная в виде произведения (рис. 2.30)

$$\delta^2 = \delta(r - a) \delta(x - x_0), \quad (2.16.16)$$

определяется углом  $\theta$  пересечения окружностей  $r = r_0$  с прямой  $x = x_0$ , где  $\sin \theta = \sqrt{1 - (x_0/r_0)^2}$ . Тогда значение каждой из

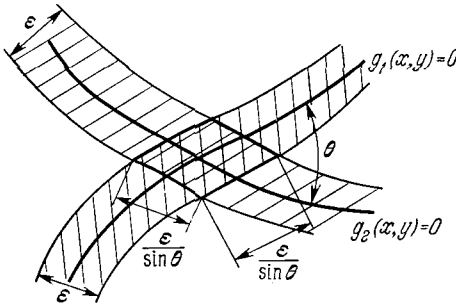


Рис. 2.29. Рисунок, поясняющий свойства дельта-функции на плоскости.

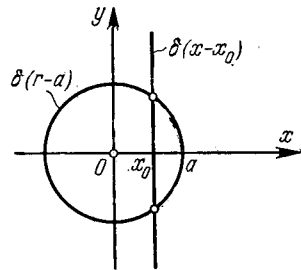


Рис. 2.30. Пример дельта-функции на плоскости, заданной в виде произведения  $\delta(r - a) \delta(x - x_0)$ .

двух точечных масс, расположенных в точках пересечения, равно

$$m = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - x_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x_0/r_0)^2}} = \frac{r_0}{y_0}. \quad (2.16.17)$$

Окончательно получаем

$$\langle \delta(r - r_0) \delta(x - x_0), g(x, y) \rangle = \begin{cases} 2 \frac{g(x_0, y_0)}{\sqrt{1 - (x_0/r_0)^2}} = 2 \frac{g(x_0, y_0) r_0}{y_0} & (x_0 < r_0), \\ 0 & (x_0 > r_0). \end{cases} \quad (2.16.18)$$

### § 2-17. Преобразование Фурье радиальных функций, заданных на плоскости

Рассмотрим более подробно случай функции  $f(\mathbf{x})$ , заданной на плоскости и являющейся радиальной функцией, т. е. функцией, зависящей только от радиуса  $r$ :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^2) = f(r). \quad (2.17.1)$$

Из радиальной симметрии функции  $f(r)$  следует радиальная симметрия ее фурье-образа, которая зависит от длины радиуса-вектора в частотном пространстве  $\omega = |\omega| = 2\pi\nu$ :

$$\hat{\mathcal{F}}[f(r)] = F(\omega) = R(\nu), \quad (2.17.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\omega\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}, \quad \omega\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.17.3)$$

Если воспользоваться свойством унитарного произведения сохранять инвариантным скалярное произведение  $\omega\mathbf{x}$ , то можно его положить равным  $2\pi\nu v$ . Тогда в пространстве  $n$  измерений

$$R(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu v} f(r) d\mathbf{x}. \quad (2.17.4)$$

Для того чтобы вычислить интеграл по объему изотропного пространства, сначала вычислим интеграл по сфере радиуса  $r$ , а затем уже проинтегрируем вдоль радиуса. Таким образом,

$$R(\nu) = \int_0^{\infty} dr \int_S f(r) e^{-i2\pi\nu v} dS. \quad (2.17.5)$$

Если  $\theta$  — угол, образованный радиусом-вектором точки  $\mathbf{x}$  с осью  $Ox$ , то геометрическое место точек, для которых этот угол заключен между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , образует  $(n - 1)$ -мерную область. «Пло-

щадь» этой области равна произведению толщины  $r d\theta$  на  $(n-2)$ -мерную «площадь» сечения сферы плоскостью  $x = r \cos \theta$ , которая в свою очередь равна

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} (r \sin \theta)^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad (2.17.6)$$

где  $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$  — гамма-функция. Для  $n = 2$  «площадь» этого сечения равна  $2r$ . Для  $n = 3$  «площадь» сечения равна  $2\pi r \sin \theta$ .

Площадь элементарной области равна

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} (r \sin \theta)^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} r d\theta, \quad (2.17.7)$$

а интеграл по сфере преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_S f(r) (r \sin \theta)^{n-2} r d\theta \cdot e^{-i2\pi v r \sin \theta} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} &= \\ &= r^{n-1} f(r) \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{-i2\pi v r \sin \theta} (\sin \theta)^{n-2} d\theta = \\ &= 2\pi v^{-\frac{n-2}{2}} r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi v r) f(r). \end{aligned} \quad (2.17.8)$$

Окончательно находим фурье-образ функции  $f(r)$ :

$$R(v) = 2\pi e^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r v) f(r) dr, \quad (2.17.9)$$

где  $J_p$  — функция Бесселя  $p$ -го порядка. Аналогично записывается обратная связь между функциями  $R(v)$  и  $f(r)$ :

$$f(r) = 2\pi r^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty v^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi v r) R(v) dv. \quad (2.17.10)$$

Эти два взаимно обратных преобразования, устанавливающие связь между исходной радиальной функцией  $f(r)$ , заданной в  $n$ -мерном пространстве, и ее фурье-образом  $R(v)$ , называются преобразованием Ганкеля порядка  $(n-2)/2$ . Преобразования

(2.17.9) и (2.17.10), записанные в форме одномерного интеграла для любого  $n$ -мерного пространства, потеряли свою исходную форму полного преобразования Фурье (2.15.4) в результате перехода от  $n$ -мерного интегрирования к одномерному. Именно в этом состоит смысл преобразования Ганкеля.

Рассмотрим в отдельности случаи  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n = 3$ .

С л у ч а й  $n = 1$ . Здесь

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

и поэтому

$$R(v) = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi vr) f(r) dr. \quad (2.17.11)$$

Это — формула преобразования Фурье в одномерном случае, записанная для четной действительной функции  $f(r)$  при  $\omega = 2\pi v$ .

С л у ч а й  $n = 2$ . Под интеграл входит функция Бесселя нулевого порядка, и поэтому

$$R(v) = 2\pi \int_0^{\infty} r J_0(2\pi vr) f(r) dr = \hat{\mathfrak{H}}^0[2\pi f(r)]. \quad (2.17.12)$$

Здесь операторный символ  $\hat{\mathfrak{H}}^0$  введен для обозначения преобразования Ганкеля нулевого порядка, определением которого является само выражение (2.17.12). Если ввести полярные координаты

$$\mathbf{x}(x_1, x_2) = \mathbf{x}(r, \theta)$$

в формуле (2.17.5), то получим (2.17.12). Действительно,

$$\begin{aligned} R(v) &= \int_0^{\infty} f(r) dr \int_S e^{-i2\pi v \mathbf{x}} dS = \int_0^{\infty} r f(r) dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2\pi vr \cos \theta} d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(2\pi vr) dr, \end{aligned} \quad (2.17.13)$$

так как по определению функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta.$$

Иначе соотношение (2.17.12) можно записать в виде

$$R(v) = \hat{\mathfrak{F}}[f(r)] = 2\pi \hat{\mathfrak{H}}^0[f(r)]. \quad (2.17.14)$$

Более подробно преобразование Ганкеля рассматривается ниже.



С л у ч а й  $n = 3$ . Здесь

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

и

$$R(\nu) = \frac{2}{\nu} \int_0^{\infty} r \sin(2\pi\nu r) f(r) dr. \quad (2.17.15)$$

Таким образом, при нечетном  $n$  под интеграл входят тригонометрические функции, а при четном  $n$  — функции Бесселя с целочисленными индексами.

**Пример.** Вычислим фурье-образ функции  $f(r)$  при  $n = 2$ , если

$$f(r) = \begin{cases} 1, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (2.17.16)$$

Имеем

$$R(\nu) = 2\pi \int_0^{r_0} r J_0(2\pi\nu r) dr. \quad (2.17.17)$$

Если воспользоваться рекуррентным соотношением для функций Бесселя

$$\frac{d}{dz}(z^k J_k(\lambda z)) = \lambda z^k J_{k-1}(\lambda z) \quad (2.17.18)$$

при  $k = 1$ , то

$$R(\nu) = \frac{r_0}{\nu} J_1(2\pi r_0 \nu). \quad (2.17.19)$$

Как известно, эта формула описывает распределение амплитуды света в результате дифракции Фраунгофера однородной плоской когерентной волны света на круговом отверстии радиуса  $r_0$ .

## § 2-18. Преобразование Ганкеля

Ганкелевский образ функции  $f(r)$  равен по определению

$$\mathfrak{F}(\omega) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\omega r) dr = \hat{\mathfrak{S}}\alpha^0[f(r)], \quad (2.18.1)$$

т. е. получается из исходной функции  $f(r)$  путем преобразования Ганкеля нулевого порядка. Символически преобразование Фурье и преобразование Ганкеля запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f(r) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} F(\omega), \\ f(r) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{S}}\alpha^0} \mathfrak{F}(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (2.18.2)$$

откуда

$$F(\omega) = 2\pi \hat{\mathfrak{F}}(\omega). \quad (2.18.3)$$

Для обратных преобразований имеем

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}^{-1}} f(r), \\ \hat{\mathfrak{F}}(\omega) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}a^{0^{-1}}} f(r), \end{aligned} \right\} \quad (2.18.4)$$

где

$$f(r) = \hat{\mathfrak{F}}a^{0^{-1}}[\hat{\mathfrak{F}}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega \hat{\mathfrak{F}}(\omega) J_0(r\omega) d\omega. \quad (2.18.5)$$

### Примеры.

1) Рассмотрим функцию

$$f(r) = \delta(r - r_0), \quad (2.18.6)$$

описывающую кольцевую щель. Тогда

$$\delta(r - r_0) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}a^0} a_0 J_0(a_0 r). \quad (2.18.7)$$

2) Если же

$$f(r) = a_0 J_0(a_0 r), \quad (2.18.8)$$

то

$$a_0 J_0(a_0 r) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}a^0} \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.18.9)$$

3) Пусть

$$f(r) = \Pi\left(\frac{r}{2r_0}\right), \quad (2.18.10)$$

тогда

$$\hat{\mathfrak{F}}a^0[f(r)] = \frac{2\pi r_0}{\omega} J_1(\omega r_0). \quad (2.18.11)$$

Аналогично находим:

$$4) \quad \frac{\sin \omega_0 r}{r} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}a^0} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (2.18.12)$$

$$5) \quad \frac{1}{r} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}a^0} \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.18.13)$$

$$6) \quad e^{-\omega_0 r} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}a^0} \frac{2\pi \omega_0}{[\omega^2 + \omega_0^2]^{3/2}}. \quad (2.18.14)$$

Преобразование Ганкеля обладает следующими свойствами, похожими на аналогичные свойства преобразования Фурье:

$$\left. \begin{aligned} f(r) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}_a^0} \mathfrak{F}(\omega), \\ f(ar) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}_a^0} \frac{1}{a^2} \mathfrak{F}\left(\frac{\omega}{a}\right), \\ f_1(r) + f_2(r) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}_a^0} \mathfrak{F}_1(\omega) + \mathfrak{F}_2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (2.18.15)$$

Преобразование Ганкеля не допускает никакого сдвига исходной функции в плоскости  $x, y$ , так как при этом сдвиге полностью разрушается та круговая симметрия, которая позволяет заменять двухмерное преобразование Фурье на одномерное преобразование Ганкеля.

Двухмерная свертка двух функций радиуса  $f(r)$  и  $g(r)$  записывается в виде двухмерного интеграла:

$$f(r) \otimes \otimes g(r) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r') g(R) r' dr' d\theta, \quad (2.18.16)$$

где

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta.$$

В результате преобразования Ганкеля свертки (2.18.16) имеем

$$f(r) \otimes \otimes g(r) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}_a^0} \mathfrak{F}(\omega) \mathfrak{G}(\omega). \quad (2.18.17)$$

### § 2-19. Усеченное преобразование Фурье

Очень часто оказывается невозможным осуществить полное обратное преобразование Фурье, и линейная система осуществляет только так называемое *усеченное* обратное преобразование Фурье:

$$f_{yc}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (2.19.1)$$

Иначе говоря, в системе используется только часть спектра, и внешняя отсеченная часть его пропадает.

Можно доказать, что

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} f_{yc}(x) = f(x). \quad (2.19.2)$$

Преобразуем выражение (2.19.1) следующим образом. Подставим в него выражение для  $F(\omega)$ :

$$\begin{aligned} f_{yc}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[ \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega(x-\xi)} d\omega \right] d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin \Omega(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi = f(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x}. \end{aligned} \quad (2.19.3)$$

Как будет доказано ниже (см. § 2-25), при  $\Omega \rightarrow \infty$

$$\frac{\sin \Omega x}{\pi x} \rightarrow \delta(x). \quad (2.19.4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} f_{yc}(x) &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left[ f(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x} \right] = \\ &= f(x) \otimes \left[ \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \Omega x}{\pi x} \right] = f(x) \otimes \delta(x) = f(x). \end{aligned} \quad (2.19.5)$$

Рассмотрим подробно класс функций  $f(x)$ , которые имеют разрывы в точке  $x = 0$  и которые можно записать в виде

$$f(x) = f_0(x) + [f(0^+) - f(0^-)] Y(x), \quad (2.19.6)$$

где  $Y(x)$  — функция Хэвисайда, а  $f_0(x)$  — непрерывная функция. Осуществляя сначала прямое преобразование Фурье, а затем усеченное обратное преобразование Фурье, находим согласно (2.19.3)

$$f_{\Omega}(x) = f_0(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x} + [f(0^+) - f(0^-)] Y(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x}. \quad (2.19.7)$$

Второе слагаемое можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x} &= \int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\Omega x} \frac{\sin x}{\pi x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{\pi x} dx + \int_0^{\Omega x} \frac{\sin x}{\pi x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\Omega x), \end{aligned} \quad (2.19.8)$$

где

$$\text{Si}(\Omega x) = \int_0^{\Omega x} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (2.19.9)$$

Функция  $Y(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x}$  показана на рис. 2.31. Легко видеть, что при  $\Omega \rightarrow \infty$

$$f_{\Omega}(0) = f_0(0) + \frac{1}{2}[f(0^+) - f(0^-)] = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}. \quad (2.19.10)$$

Предположим теперь, что  $\Omega$  конечно. Если при этом  $\Omega$  достаточно велико, то первое слагаемое (2.19.7) стремится к  $f_0(x)$ :

$$f_0(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x} \approx f_0(x); \quad (2.19.11)$$

однако второе слагаемое при конечном  $\Omega$  всегда имеет вид, приведенный на рис. 2.32. Увеличение  $\Omega$  лишь изменяет масштаб

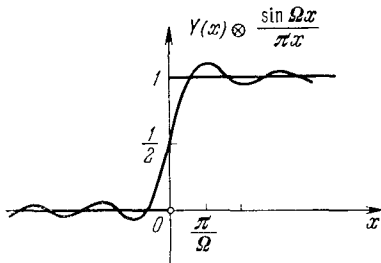


Рис. 2.31. График функции  $Y(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x}$ , являющейся аппроксимацией функции  $Y(x)$  и полученной путем обратного преобразования Фурье усеченного фурье-образа исходной функции.

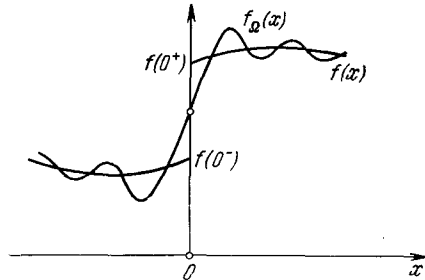


Рис. 2.32. График усеченной функции  $f_{\Omega}(x)$  вблизи точек разрыва исходной функции  $f(x)$ . Выбросы слева и справа от точки разрыва называются выбросами Гиббса. Амплитуда этих выбросов остается неизменной при любой конечной частоте  $\Omega$

шкалы вдоль оси  $x$ , а глубину выбросов слева и справа оставляет неизменной. Такое поведение усеченной функции  $f_{\Omega}(x)$  вблизи точек разрыва функции  $f(x)$  называется *эффектом Гиббса*. Таким образом, усеченная функция не может удовлетворительно аппроксимировать исходную функцию вблизи точек разрыва, каким бы большим ни было  $\Omega$ .

Возникает вопрос, можно ли найти другую функцию  $\Phi_{\Omega}(x)$  с той же усеченной частотой  $\omega_{yc} = \Omega$ , чтобы получить лучшую аппроксимацию исходной разрывной функции  $f(x)$ .

Напомним, что процесс дискриминации высоких частиц  $\omega > \Omega$  сводится фактически к умножению фурье-образа  $F(\omega)$  исходной функции  $f(x)$  на прямоугольный импульс  $\Pi_\Omega(x)$ . Действительно, по определению (см. (2.4.1))

$$\Pi_\Omega(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Omega, \\ \frac{1}{2\Omega}, & |\omega| = \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega, \end{cases}$$

и поэтому усеченный фурье-образ равен

$$F_{yc}(\omega) = F(\omega) \cdot \Pi_\Omega(\omega) \cdot 2\Omega. \quad (2.19.12)$$

При обратном преобразовании получаем (см. (2.19.1))

$$f_{yc}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{yc}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Появление эффекта Гиббса непосредственно связано с формой отсекающей функции, и если взять другую отсекающую функцию, например треугольный импульс  $\Lambda_\Omega(x)$ , то эффект Гиббса исчезнет. В этом случае усеченный фурье-образ равен

$$\Phi_\Omega(\omega) = F(\omega) \cdot \Lambda_\Omega(\omega) \cdot \Omega, \quad (2.19.13)$$

где

$$\Lambda_\Omega(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} \left(1 - \frac{|\omega|}{\Omega}\right), & |\omega| < \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega, \end{cases}$$

и аппроксимирующая функция равна

$$\begin{aligned} \Phi_\Omega(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \Lambda_\Omega(\omega) \cdot \Omega e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \cdot \Lambda_\Omega(\omega) \cdot \Omega e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{2 \sin \left[ \Omega \frac{(x - \xi)}{2} \right]}{\Omega (x - \xi)^2} d\xi = f(x) \otimes K_\Omega(x). \quad (2.19.14) \end{aligned}$$

Здесь  $K_{\Omega}(x)$  — так называемое ядро Фейжера. Так как функция  $K_{\Omega}(x)$  униполярна, то функция  $\Phi_{\Omega}(x)$  возрастает около точки разрыва монотонно (рис. 2.33), и выбросы Гиббса пропадают.

Поскольку при  $\Omega \rightarrow \infty$

$$\frac{2 \sin^2 \frac{\Omega x}{2}}{\pi \Omega x^2} \rightarrow \delta(x), \quad (2.19.15)$$

то

$$\Phi_{\Omega}(x) \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} f(x). \quad (2.19.16)$$

Введение отсекающего треугольного импульса не единственный метод аппроксимации исходной функции без выбросов. Так, например, в качестве отсекающей функции можно взять функцию отсчетов

$$\frac{\sin \omega T}{\omega T}.$$

Тогда усеченный фурье-образ имеет вид

$$F_{yc}(\omega) = F(\omega) \cdot \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \quad (2.19.17)$$

Аппроксимирующая функция равна

$$f_{yc}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \frac{\sin \omega A}{\omega A} e^{i\omega x} d\omega. \quad (2.19.18)$$

Чтобы вычислить  $f_{yc}(x)$ , воспользуемся общим правилом, согласно которому умножению фурье-образов отвечает свертка соответствующих исходных функций. В данном случае (см. (2.2.3) и (2.4.2))

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{\hat{F}} F(\omega), \\ P_A(x) &\xrightarrow{\hat{F}} \frac{\sin \omega A}{\omega A}. \end{aligned}$$

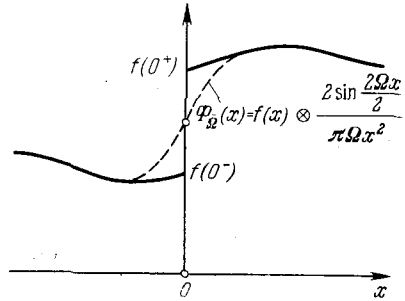


Рис. 2.33. График аппроксимирующей функции  $\Phi_{\Omega}(x)$  вблизи точек разрыва исходной функции  $f(x)$ . При переходе от отсекающей функции в форме прямоугольного импульса  $\Pi_{\Omega}(\omega)$  к отсекающей функции, имеющей вид треугольного импульса  $\Lambda_{\Omega}(\omega)$ , выбросы Гиббса пропадают.

Поэтому

$$f_{yc}(x) = f(x) \otimes \Pi_A(x) = \frac{1}{2A} \int_{x-A}^{x+A} f(\xi) d\xi. \quad (2.19.19)$$

Таким образом, аппроксимирующая функция  $f_{yc}(x)$  представляет собой не что иное, как усредненную на интервале длиной  $2A$  исходную функцию  $f(x)$ . На рис. 2.34 дан пример функции  $f(x) = Y(x)$  и сглаженной функции  $f_{yc}(x) = \bar{Y}(x)$ .

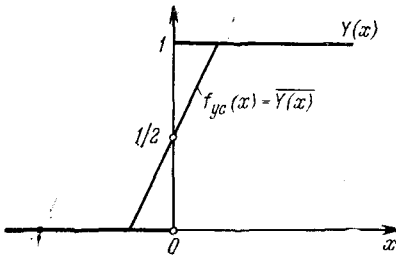


Рис. 2.34. График аппроксимирующей функции  $f_{yc}(x)$  вблизи точки разрыва исходной функции  $Y(x)$ . Отсекающая функция, равная функции отсчетов  $\sin \omega A / \omega A$ , создает операцию усреднения исходной функции на интервале  $-A < x < +A$ . Выбросы отсутствуют.

И в этом случае приближение функции  $f_{yc}(x)$  к  $f(x)$  происходит без выбросов.

При рассмотрении различных отсекающих функций не было использовано никаких общих требований. Теперь поставим задачу иначе. А именно найдем вид отсекающей функции, которая бы давала среднеквадратичное приближение, т. е. чтобы среднеквадратичное отклонение

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \psi(x)]^2 dx \quad (2.19.20)$$

было минимальным. Докажем, что величина  $\varepsilon$  минимальна,

когда отсекающая функция равна прямоугольному импульсу. Раскрывая выражение (2.19.20), получим

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f\psi dx. \quad (2.19.21)$$

Воспользовавшись соотношениями Парсеваля (2.6.16) и (2.19.19), находим

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \varepsilon &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} |\Psi(\omega)|^2 d\omega - \int_{-\Omega}^{\Omega} F^*(\omega) \Psi(\omega) d\omega - \\ &- \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) \Psi^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega + \int_{\Omega}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega + \\ &+ \int_{-\Omega}^{\Omega} [F(\omega) - \Psi(\omega)][F^*(\omega) - \Psi^*(\omega)] d\omega. \end{aligned} \quad (2.19.22)$$

Первые два интеграла не зависят от  $\Psi(\omega)$ , а последний интеграл неотрицателен, так как подынтегральное выражение равно

$$|F(\omega) - \Psi(\omega)|^2. \quad (2.19.23)$$



Поэтому  $\varepsilon$  минимально, если только

$$\Psi(\omega) = F(\omega) \text{ при } |\omega| < \Omega. \quad (2.19.24)$$

В этих условиях последний интеграл обращается в нуль. При этом минимальное значение  $\varepsilon$  равно

$$\varepsilon_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\Omega} |F(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.19.25)$$

Таким образом, здесь фактически доказано, что именно прямоугольный отсекающий импульс обеспечивает среднеквадратичное приближение, а соответствующей аппроксимирующей функцией является функция

$$f_{\Omega}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Эффект отсекающих функций рассматривается в главе по оптической обработке информации в связи с проблемой аподизации.

## § 2-20. Преобразование Гильберта

По определению преобразованием Гильберта действительной функции  $f(t)$  называется интегральная операция

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t') dt'}{t' - t}, \quad (2.20.1)$$

где интегрирование ведется в смысле главного значения, т. е.

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{f(t') dt'}{t' - t} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(t') dt'}{t' - t} \right]. \quad (2.20.2)$$

Функция  $\chi(t)$  называется *гильберт-образом* функции  $f(t)$ . Операция (2.20.1) обозначается операторным символом  $\hat{\mathfrak{H}}$ :

$$\chi(t) = \hat{\mathfrak{H}}[f(t)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t') dt'}{t' - t}. \quad (2.20.3)$$

Преобразование Гильберта, очевидно, является линейной операцией. Это, по существу, свертка исходной функции  $f(t)$

с обобщенной функцией «главное значение  $1/t$ » (2.12.24) или « $P \frac{1}{t}$ »:

$$\chi(t) = \hat{\mathfrak{H}}[f(t)] = \frac{1}{\pi} f(t) \otimes \frac{P}{t}. \quad (2.20.4)$$

Подействуем оператором Гильберта на гильберт-образ  $\chi(t)$ :

$$\hat{\mathfrak{H}}[\chi(t)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(t') dt'}{t' - t} = \frac{1}{\pi} \chi(t) \otimes \frac{P}{t} = \frac{1}{\pi^2} \chi(t) \otimes \frac{P}{t} \otimes \frac{P}{t}. \quad (2.20.5)$$

Можно доказать, пользуясь методами теории комплексных функций, что

$$\frac{P}{t} \otimes \frac{P}{t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \frac{dt'}{t' - t} = -\pi^2 \delta(t). \quad (2.20.6)$$

Тогда

$$\hat{\mathfrak{H}}[\chi(t)] = \hat{\mathfrak{H}}[\hat{\mathfrak{H}}[\hat{\mathfrak{H}}[f(t)]]] = \hat{\mathfrak{H}}\hat{\mathfrak{H}}[f(t)] = -f(t), \quad (2.20.7)$$

или в операторном виде

$$\hat{\mathfrak{H}}\hat{\mathfrak{H}} = -1.$$

Таким образом,

$$f(t) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}} \chi(t), \quad \chi(t) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}} [-f(t)]. \quad (2.20.8)$$

Можно также доказать, что имеют место следующие соотношения, близкие к свойствам преобразования Фурье, приведенные в табл. 2.1:

$$f(t + t_0) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}} \chi(t + t_0), \quad (2.20.9)$$

$$f(\pm at) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}} \pm \chi(\pm at), \quad (2.20.10)$$

$$(t + t_0) f(t) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}} (t + t_0) \chi(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt, \quad (2.20.11)$$

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{H}}} \frac{d\chi(t)}{dt}. \quad (2.20.12)$$

Кросс-корреляция исходных действительных функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  связана с кросс-корреляцией их гильберт-образов  $\chi_1(t)$  и  $\chi_2(t)$  следующим соотношением:

$$\int f_1(t) f_2(t + \tau) dt = \int \chi_1(t) \chi_2(t + \tau) dt. \quad (2.20.13)$$

Для того чтобы доказать это, вспомним, что кросс-корреляцию  $f_1(t) * f_2(t)$  можно свести к свертке  $f_1(t) \otimes f_2(-t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{S}}[\hat{\mathfrak{S}}[f_1(t) \otimes f_2(-t)]] &= \hat{\mathfrak{S}}[f_1(t)] \otimes \hat{\mathfrak{S}}[f_2(-t)] = \\ &= \chi_1(t) \otimes \{-\chi_2(-t)\} = -\chi_1(t) \otimes \chi_2(-t). \end{aligned} \quad (2.20.14)$$

Здесь использовано то, что действие линейного оператора на свертку эквивалентно линейному преобразованию одного из сомножителей свертки, а также учтено соотношение

$$\hat{\mathfrak{S}}[f(-t)] = -\chi(-t). \quad (2.20.15)$$

Принимая далее во внимание соотношение (2.20.7), окончательно находим

$$f_1(t) \otimes f_2(-t) = \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t),$$

т. е. (2.20.13).

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} f_1(t) \otimes \chi_2(-t) &= \int f_1(t) \chi_2(t + \tau) dt = \\ &= - \int \chi_1(t) f_2(t + \tau) dt = -\chi_1(t) \otimes f_2(-t), \end{aligned}$$

или

$$f_1(t) \otimes \chi_2(-t) = -\chi_1(t) \otimes f_2(-t). \quad (2.20.16)$$

Преобразование Гильберта используется в теории аналитического сигнала, содержащего только положительные частоты, и в теории когерентности света. При этом свойства гильберт-образа с неизбежностью выступают при различных операциях усечения, как, например, в спектроскопии Фурье и во многих других разделах когерентной оптики и голографии. Не затрагивая математической стороны вопроса теории преобразования Гильберта, отметим здесь, что аналитический сигнал

$$V(t) = f(t) + i \hat{\mathfrak{S}}[f(t)] = f(t) + i\chi(t),$$

рассматриваемый как функция комплексной переменной  $V(z)$ , является аналитической функцией в нижней половине комплексной плоскости, если только исходная функция  $f(t)$  удовлетворяет некоторым довольно общим условиям регулярности.

## § 2-21. Линейный фильтр

Перейдем теперь к анализу несколько более широкого класса линейных преобразований. Рассмотрим общие свойства некоторого произвольного линейного оператора  $\hat{L}$ , действующего на произвольную исходную функцию  $f(x)$ . Одним из фундаментальных свойств оператора  $\hat{L}$  является то, что действие оператора  $\hat{L}$

на функцию  $f(x)$  не зависит от расположения функции  $f(x)$  относительно выбранного начала координат. Очевидно, что результат действия оператора  $\hat{L}$  при сдвигах функции  $f(x)$  будет, разумеется, меняться.

В утверждении, приведенном выше, говорится о действии оператора, т. е. о законе преобразования.

Такому свойству *линейного оператора*  $\hat{L}$  соответствует понятие *линейного фильтра*. Обычно на практике линейный фильтр осуществляется в виде четырехполюсника или электронного усилителя либо, как будет объяснено ниже, в виде так называемого оптического фильтра, который преобразует оптический сигнал, поданный на его вход. Системы такого типа и многочисленные другие системы можно назвать линейным фильтром только в том случае, если преобразующий элемент обладает одновременно двумя свойствами.

1) в фильтре осуществляется линейное преобразование, и суперпозиция исходных сигналов соответствует такая же суперпозиция откликов фильтра;

2) характер или закон преобразования в таком фильтре не зависит от момента прибытия исходного сигнала.

Сформулируем эти два требования более точно. Рассмотрим фильтр, отклик которого на сигнал  $f(x)$ , поданный на вход, равен  $r(x)$ . Фильтр можно назвать линейным, если

1) отклик фильтра  $r(x)$  является линейной функцией сигнала на входе; сигналы  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , будучи поданы на фильтр, возбуждают каждый в отдельности отклики  $r_1(x)$  и  $r_2(x)$ , а будучи поданы на фильтр в линейной комбинации  $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные числа, возбуждают отклик  $r(x) = a_1 r_1(x) + a_2 r_2(x)$ , являющийся линейной суперпозицией откликов отдельных составляющих;

2) отклик линейного фильтра коммутирует со сдвигом (трансляцией) сигнала; если сигнал  $f(x)$  возбуждает отклик  $r(x)$ , то сдвинутый сигнал  $f(x - x_0)$  возбуждает настолько же сдвинутый отклик  $r(x - x_0)$ .

Рассмотрим вопрос о том, как следует характеризовать свойства произвольного линейного фильтра. Для этого подадим на вход линейного фильтра гармонический сигнал

$$f(x) = F_{\omega} e^{i\omega x}. \quad (2.21.1)$$

Если сигнал сдвинуть вдоль оси  $x$  на величину  $x_0$ , то новый сигнал равен

$$f(x - x_0) = F_{\omega} e^{i\omega(x - x_0)} = e^{-i\omega x_0} f(x). \quad (2.21.2)$$

В то же время, согласно пункту 2), сигнал  $f(x - x_0)$  вызывает

отклик  $r(x - x_0)$ , где согласно (2.21.2)

$$r(x - x_0) = r(x) e^{-i\omega x_0}.$$

Положив  $x = 0$ , находим

$$r(-x_0) = r(0) e^{-i\omega x_0}. \quad (2.21.3)$$

Если заменить  $(-x_0)$  на  $x$ , то получим

$$r(x) = r(0) e^{i\omega x} = R_\omega e^{i\omega x}. \quad (2.21.4)$$

Таким образом, амплитуда  $F_\omega$  перешла в результате преобразования в амплитуду  $R_\omega$ . С исходной гармоникой  $e^{i\omega x}$  ничего больше не произошло. Очевидно, что амплитуда  $R_\omega$  может в общем случае получаться разной в зависимости от  $\omega$ , и, таким образом, задав отношение  $\frac{R}{F}(\omega)$ , можно полностью характеризовать свойства линейного фильтра — преобразовывать гармонический сигнал частоты  $\omega$ .

Произвольный сигнал на входе можно представить его фурье-образом в частотных координатах  $\omega$ . Поэтому, задав значение отношений  $\frac{R}{F}(\omega)$  для всех частот  $\omega$ , можно предсказать отклик фильтра. Величина  $\frac{R}{F}(\omega)$ , как функция частоты  $\omega$ , называется *амплитудно-фазовой характеристикой* линейного фильтра и обозначается через  $G(\omega)$ . Иначе говоря,

$$\left. \begin{aligned} \frac{R(\omega)}{F(\omega)} = G(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (2.21.5)$$

или

$$R(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega).$$

Но произведению фурье-образов отвечает операция свертки. Поэтому

$$r(x) = f(x) \otimes g(x), \quad (2.21.6)$$

где  $g(x)$  — прообраз функции  $G(\omega)$ .

Аналогичные соотношения существуют для  $n$ -мерного линейного фильтра. Сигнал  $f(x)$  вызывает отклик  $r(x)$ , равный  $n$ -мерной свертке исходного сигнала  $f(x)$  с характеристическим откликом  $g(x)$ :

$$r(x) = f(x) \otimes g(x), \quad (2.21.7)$$

где

$$g(x) = \hat{\mathcal{F}}^{-1} [G(\omega)],$$

или

$$R(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega). \quad (2.21.8)$$

Необходимо подчеркнуть, что только при наличии совокупности двух характеристик 1) и 2) можно утверждать, что это устройство является линейным фильтром.

Вернемся к усилителю электрических сигналов. Для него коммутация с трансляцией сигнала выполняется достаточно точно и определяется стабильностью устройства. Что же касается линейности, то она осуществляется только в ограниченном интервале амплитуд.

В оптических фильтрах линейность, наоборот, осуществляется достаточно хорошо. Коммутация с трансляцией реализуется не всегда, и необходимо принимать специальные меры для ее обеспечения, в частности, эффективная апертура должна определяться в первом оптическом каскаде, так чтобы в последующих каскадах не возникало «зарезания» апертуры. Так или иначе, в обычной когерентной системе удается выполнить условия для осуществления постоянства оператора  $\hat{L}$  по всей апертуре.

В то же время существует определенный класс оптических устройств, где инвариантность оператора  $\hat{L}$  по рабочей апертуре полностью отсутствует. Это — системы волоконной оптики. Если взять пучок волокон, то характер преобразования в таком устройстве изменяется в широких пределах при изменении положения пучка волокон. При этом диапазон вариаций зависит от пространственной частоты  $\omega$ , и для очень низких пространственных частот, которым соответствует период пространственной структуры, примерно в 10 раз больший размера одного волокна, эта зависимость исчезает и оператор  $\hat{L}$  становится стационарным в пространстве. Это неприятное свойство волоконной оптики пропадает для всех пространственных частот, если изображение получать с помощью динамически подвижного пучка волокон.

Таким образом, все вышесказанное требует большой осторожности в оценке пространственной инвариантности оператора  $\hat{L}$  в случае оптических систем.

До сих пор рассматривались оптические системы, не включающие в себя приемник излучения. Детально это вопрос рассматривается в главе по голографии. Однако здесь следует отметить, что все регистрирующие устройства обладают заметной нелинейностью отклика по амплитуде сигнала.

Закончим параграф рассмотрением методов измерения характеристик линейного фильтра.

Возьмем в качестве исходного сигнала точечный излучатель — дельта-функцию. Найдем отклик системы

$$r(x) = f(x) \otimes g(x) = \delta(x) \otimes g(x) = g(x). \quad (2.21.9)$$

Из (2.21.9) следует, что *характеристический отклик*  $g(x)$  равен отклику системы на дельта-функцию  $\delta(x)$ .

Таким образом, характеристику линейного фильтра можно найти одним из двух методов:

— Подать на вход дельта-функцию. Отклик фильтра равен характеристическому отклику  $g(x)$ .

— Подать на вход синусоиду. Отклик фильтра равен синусоиде той же частоты, но с амплитудой, измененной в  $G(\omega)$  раз.

В общем случае фильтр, определяемый функцией  $G(\omega)$ , создает как амплитудное, так и фазовое изменение.

В зависимости от характера задачи и возможностей эксперимента выбирают один из этих двух, взаимно эквивалентных, способов описания линейного фильтра.

Свойство линейного фильтра, выражаемое соотношением (2.21.9), можно представить в несколько другом виде.

Рассмотрим произвольный оператор  $\hat{L}$ , который, действуя на одномерную функцию  $f(x)$ , дает отклик

$$g(x) = \hat{L}[f(x)]. \quad (2.21.10)$$

Гармоническая функция при прохождении через линейный фильтр остается гармонической функцией:

$$\hat{L}[e^{i\omega_0 x}] = G(\omega_0) e^{i\omega_0 x}. \quad (2.21.11)$$

Это свойство можно расценивать как ответ на вопрос: какие функции  $f(x)$  являются *собственными функциями* линейного оператора  $\hat{L}$ ? Из (2.21.10) следует, что гармонические функции  $e^{i\omega_0 x}$  являются собственными функциями линейного оператора в одномерном пространстве и удовлетворяют соотношению

$$\hat{L}[f(x)] = kf(x), \quad (2.21.12)$$

где  $f(x)$  — гармоническая функция, а  $k$  — комплексное число.

Рассмотрим теперь отклик линейной системы на единичную ступеньку  $Y(x)$  — функцию Хэвисайда. Пусть

$$\hat{L}[Y(x)] = a(x) \quad (2.21.13)$$

или, согласно (2.21.8),

$$\hat{\mathfrak{F}}[a(x)] = \hat{\mathfrak{F}}[Y(\omega)] \cdot G(\omega), \quad (2.21.14)$$

где  $G(\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика линейного оператора  $\hat{L}$ . Но согласно (2.13.26) фурье-образ функции Хэвисайда равен

$$\hat{\mathfrak{F}}[Y(x)] = \pi\delta(\omega) + \frac{P}{i\omega},$$

и тогда

$$\hat{\mathfrak{F}}[a(x)] = G(\omega) \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{P}{i\omega} \right]. \quad (2.21.15)$$

Выполнив обратное преобразование Фурье над равенством (2.21.15), получим

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[ P \frac{G(\omega)}{i\omega} + \pi \delta(\omega) G(\omega) \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \pi G(0) + \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{i\omega} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} G(0) + \int_{-\infty}^x g(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^x g(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, \end{aligned} \quad (2.21.16)$$

где  $G(0)$  — отклик линейной системы на постоянный сигнал на входе. Рассмотрим очевидное равенство

$$\int_{-\infty}^x f'(x) dx = f(x) - f(-\infty). \quad (2.21.17)$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^x f'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) Y(x - \xi) d\xi = f'(x) \otimes Y(x). \quad (2.21.18)$$

Таким образом, из (2.21.17) и (2.21.18) следует, что

$$f(x) = f(-\infty) + f'(x) \otimes Y(x). \quad (2.21.19)$$

Выберем функцию  $f(x)$  так, чтобы  $f(-\infty) = 0$ . Тогда, воспользовавшись (2.21.19), можно вычислить отклик линейной системы на произвольную функцию  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} \hat{L}[f(x)] &= \hat{L}[f'(x) \otimes Y(x)] = f'(x) \otimes \hat{L}[Y(x)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) a(x - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.21.20)$$

В справедливости (2.21.20) можно убедиться, если вспомнить, что действие оператора на свертку эквивалентно действию оператора на один из сомножителей свертки, а отклик линейной системы на единичную ступеньку  $Y(x)$  равен  $a(x)$  (2.21.16). Таким образом,

$$\hat{L}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) a(x - \xi) d\xi,$$

или

$$\hat{L}[f(x)] = f'(x) \otimes a(x).$$



Соотношение (2.21.20) можно представить также в ином виде. Для этого возьмем выражение

$$\hat{L} [f'(x) \otimes Y(x)],$$

которое преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{L} [f'(x) \otimes Y(x)] &= \hat{L} \frac{d}{dx} [f(x) \otimes Y(x)] = \\ &= \hat{L} \left[ f(x) \otimes \frac{dY(x)}{dx} \right] = \hat{L} [f(x) \otimes \delta(x)] = f(x) \otimes \hat{L} [\delta(x)]. \end{aligned} \quad (2.21.21)$$

Действительно, при вычислении производной от свертки достаточно продифференцировать один из сомножителей свертки, а производная от единичной ступеньки  $Y(x)$  равна дельта-функции  $\delta(x)$ .

Таким образом, с помощью (2.21.20) и (2.21.21) находим

$$\hat{L} [f(x)] = f(x) \otimes g(x), \quad (2.21.22)$$

где согласно (2.21.9) функция  $g(x) = \hat{L} [\delta(x)]$  равна отклику линейного фильтра на дельта-функцию.

## § 2-22. Линейный двухмерный фильтр

В оптических системах информация поступает и отображается на плоскости  $x(x, y)$ , и согласно общему соотношению (2.21.7) отклик двухмерной системы равен двухмерной свертке:

$$h(x, y) = \hat{L} [f(x, y)] = f(x, y) \otimes \otimes \delta(x, y). \quad (2.22.1)$$

Здесь характеристический отклик  $g(x, y)$  равен отклику оптического фильтра на двухмерную дельта-функцию  $\delta^2 = \delta(x) \delta(y)$ :

$$g(x, y) = \hat{L} [\delta^2] = \hat{L} [\delta(x) \delta(y)], \quad (2.22.2)$$

т. е. отклику на точечный источник, помещенный в точку  $x = 0, y = 0$ .

Операция свертки в случае двух измерений может быть как одномерной:

$$a(x, y) = b(x, y) \otimes_x c(x, y) = \int b(x', y) c(x - x', y) dx, \quad (2.22.3)$$

так и двухмерной:

$$\begin{aligned} a(x, y) &= b(x, y) \otimes \otimes c(x, y) = \\ &= \iint b(x', y') c(x - x', y - y') dx dy. \end{aligned} \quad (2.22.4)$$

Однако для сокращения и упрощения записи двухмерную свертку можно обозначить символом  $\otimes$ , оставив символы  $\otimes_x$  и  $\otimes_y$  для одномерных свертки вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Если на вход линейного двухмерного фильтра подан сигнал, описываемый дельта-функцией  $\delta(x)$ , или, иначе, — узкий щелевой источник, параллельный оси  $Oy$ , то отклик фильтра равен

$$s(x) = g(x, y) \otimes \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy. \quad (2.22.5)$$

В оптической системе гораздо проще и быстрее определить отклик  $s(x)$  от длинной узкой щели, чем отклик  $h(x, y)$  от точечного источника. Возникает вопрос: можно ли найти отклик системы на точечный источник, зная отклик системы на длинный щелевой источник? В общем случае такая обратная задача допускает решение только тогда, когда характеристический отклик от щели  $g(x)$  известен для всех направлений щели относительно оптического фильтра. Однако обратная задача существенно упрощается, если оптический фильтр обладает симметрией вращения, т. е. если отклик на точечный источник зависит только от радиуса:

$$g(x, y) = g(r), \quad (2.22.6)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Как и в общем случае (2.22.5), отклик на щелевой источник равен

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r) dy, \quad (2.22.7)$$

т. е. находится простым интегрированием отклика  $g(r)$  вдоль оси  $Oy$ . Решение обратной задачи, т. е. зависимость  $g(r)$  от  $s(x)$ , имеет вид

$$g(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int s(x) dy, \quad (2.22.8)$$

где  $s(x)$  — известный отклик системы на щелевой источник. Для доказательства (2.22.8) воспользуемся тождеством

$$g(r) = g(r) \otimes \delta(r) = \int_0^{\infty} g(\xi) \delta(r - \xi) d\xi. \quad (2.22.9)$$

Так как интегральное уравнение (2.22.7) является линейным, то из (2.22.9) следует, что для доказательства (2.22.8) достаточно рассмотреть частный случай

$$g(r) = \delta(r - a). \quad (2.22.10)$$

Воспользовавшись соотношением (2.15.13), находим

$$s_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - a) \delta(r - \xi) d\xi dy = \begin{cases} \frac{2a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (2.22.11)$$

и, далее,

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(r) dy = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{2a}{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \begin{cases} 2\pi a, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (2.22.12)$$

Дифференцируя (2.22.12) по  $x$ , находим

$$\frac{dq(x)}{dx} = -2\pi a \delta(x-a) = -2\pi x \cdot \delta(x-a). \quad (2.22.13)$$

Тогда для произвольного  $q(r)$  получаем

$$\frac{d}{dr} q(r) = -2\pi r g(r), \quad r > 0, \quad (2.22.14)$$

или, иначе, — соотношение (2.22.8).

Таким образом, в оптической двухмерной системе, обладающей симметрией вращения, отклик  $s(x)$  на щелевой источник и отклик на точечный источник  $q(r)$  связаны дифференциально-интегральным соотношением. Более сложная обратная задача может быть решена с помощью двухмерного преобразования Фурье, выраженного с помощью преобразования Ганкеля.

Результат оказывается тем же самым.

**Пример.** Пусть характеристический отклик на точечный источник имеет вид

$$q(r) = \delta(r-a).$$

Находя характеристический линейный отклик  $s(x)$ , согласно (2.22.7) имеем

$$s(x) = \frac{2a}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (|x| < a), \quad q(x) = 2\pi a \quad (|x|' < a).$$

На рис. 2.35 приведены функция  $g(r)$ , функция  $s(x)$ , а также вспомогательные функции  $q(x)$  и  $dq(x)/dx = q'(x)$ .

**Пример.** Характеристический отклик на щель имеет вид

$$s(x) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2-x^2}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (2.22.15)$$

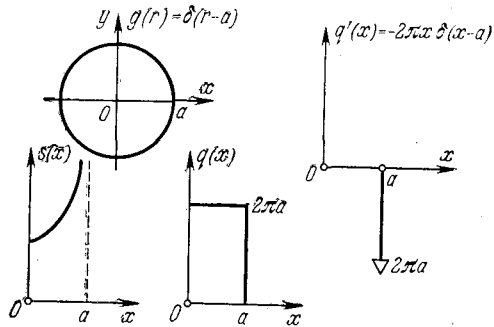


Рис. 2.35. Дельта-функция на плоскости  $\delta(r-a)$ , ее характеристический линейный отклик  $s(x)$ , а также вспомогательные функции  $q(x)$  и  $dq(x)/dx = q'(x)$ .

Найти  $g(r)$ . Вычислим сначала функцию  $q(x)$ :

$$q(x) = \int s(r) dy = 2 \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-r^2} dy = \begin{cases} \pi(a^2-x^2), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (2.22.16)$$

Следовательно, характеристический отклик на точечный источник равен

$$g(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} q(r) = \begin{cases} 1, & |r| < a, \\ 0, & |r| > a. \end{cases} \quad (2.22.17)$$

**Пример.** Пусть

$$s(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Найти  $g(r)$ . Сначала находим вспомогательную функцию

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+r^2} dy = 2 \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Далее находим

$$\frac{dq(r)}{dr} = -\pi r (1+r^2)^{-3/2}$$

и в ответе получаем

$$g(r) = -\frac{1}{2\pi r} (-\pi r) (1+r^2)^{-3/2} = \frac{1}{2} (1+r^2)^{-3/2}. \quad (2.22.18)$$

Продолжим рассмотрение двумерного линейного фильтра. В общем случае отклик фильтра  $h(x, y)$  на исходную функцию  $f(x, y)$  равен двумерной свертке:

$$h(x, y) = f(x, y) \otimes g(x, y), \quad (2.22.19)$$

где  $g(x, y)$  — характеристический отклик фильтра на двумерную дельта-функцию.

Сверточному соотношению (2.22.19) отвечает произведение фурье-образов

$$H(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) G(\omega_x, \omega_y). \quad (2.22.20)$$

**Т е о р е м а.** В оптической системе, обладающей симметрией вращения, фурье-образ  $S(\omega_x)$  характеристического отклика  $s(x)$  на щель равен

$$S(\omega) = G(\omega, 0). \quad (2.22.21)$$

С помощью ганкелевских образов функции на входе  $f(r)$ , отклика фильтра  $h(r)$  и характеристического отклика  $g(r)$ :

$$\left. \begin{aligned} f(r) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{G}}_a^0} \mathfrak{F}(\omega), \\ h(r) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{G}}_a^0} \mathfrak{H}(\omega), \\ g(r) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{G}}_a^0} \mathfrak{G}(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (2.22.22)$$

соотношение (2.22.20) можно выразить через ганкелевские образы этих функций следующим образом:

$$\mathfrak{H}(\omega) = 2\pi \mathfrak{G}(\omega) \mathfrak{F}(\omega). \quad (2.22.23)$$

Отсюда следует:

$$g(r) \otimes f(r) = 2\pi \mathfrak{G}(\omega) \mathfrak{F}(\omega). \quad (2.22.24)$$

Поскольку, далее,

$$G(\omega_x, \omega_y) = 2\pi \mathfrak{G}(\omega), \quad (2.22.25)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ , то

$$S(\omega) = G(\omega, 0) = 2\pi \mathfrak{G}(\omega). \quad (2.22.26)$$

Теорема доказана.

Отметим в заключение одно важное свойство функций Бесселя в двухмерной линейной системе, обладающей симметрией вращения. Пусть

$$f(r) = J_0(ar). \quad (2.22.27)$$

Тогда из (2.22.23) и (2.18.9) следует, что

$$\mathfrak{H}(\omega) = 2\pi \mathfrak{G}(\omega) \cdot \frac{\delta(\omega - a_0)}{a_0} = \frac{2\pi}{a_0} \mathfrak{G}(a_0) \delta(\omega - a_0). \quad (2.22.28)$$

Совершая обратное преобразование Ганкеля, находим

$$h(r) = 2\pi a_0 \cdot \mathfrak{G}(a_0) J_0(a_0 r), \quad (2.22.29)$$

т. е.

$$h(r) = \hat{L}[J_0(a_0 r)] = 2\pi \mathfrak{G}(a_0) J_0(a_0 r). \quad (2.22.30)$$

Равенство (2.22.30) означает, что для любого  $a_0$  функция Бесселя  $J_0(a_0 r)$  является собственной функцией линейного оператора  $\hat{L}$  на плоскости, который обладает вращательной симметрией. При этом собственное значение его равно ганкелевскому образу характеристического отклика  $g(r)$ , взятому в точке  $\omega = a_0$  и умноженному на  $2\pi$ .

Напомним здесь, что гармонические функции  $\cos \omega_0 x$  и  $\sin \omega_0 x$  являются собственными функциями одномерного линейного оператора  $\hat{L}$ , а собственные значения равны фурье-образу характеристического отклика  $g(x)$ , взятому в точке  $\omega = \omega_0$ , т. е.  $G(\omega_0)$ .

### § 2.23. Дисперсионные соотношения и принцип причинности

Соотношение (2.21.20), выражающее отклик линейной системы на произвольную функцию  $f(x)$  через характеристический отклик системы  $a(x)$  на единичную ступеньку  $Y(x)$ , справедливо для произвольной линейной системы. Однако реально осуществляются только те линейные системы, которые удовлетворяют *принципу причинности*. Этому принципу подчиняются все реальные физические процессы, наблюдаемые во времени как в макроскопических, так и микроскопических системах.

Следствием принципа причинности являются так называемые *дисперсионные соотношения* между действительной и мнимой частями комплексной функции  $G(\omega)$ , определяющей амплитудно-фазовую характеристику линейной системы.

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , которая отлична от нуля только для  $x > 0$ . Это свойство функции  $f(x)$  можно выразить следующим равенством:

$$f(x) = f(x) \cdot Y(x). \quad (2.23.1)$$

Произведем преобразование Фурье этого равенства (см. (2.16.12)):

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes U(\omega), \quad (2.23.2)$$

где  $U(\omega)$  — фурье-образ единичной ступеньки  $Y(x)$ , который был вычислен ранее:

$$U(\omega) = \pi \delta(\omega) + P \frac{1}{i\omega}. \quad (2.23.3)$$

Тогда (2.32.2) можно записать в виде

$$F(\omega) = \left[ \frac{1}{2} \delta(\omega) + P \frac{1}{2\pi i\omega} \right] \otimes F(\omega). \quad (2.23.4)$$

Поскольку всегда

$$F(\omega) = F(\omega) \otimes \delta(\omega),$$

то

$$F(\omega) = \frac{P}{i\pi} \left[ \frac{1}{\omega} \otimes F(\omega) \right], \quad (2.23.5)$$

или, если записать эту операцию явно,

$$F(\omega) = \frac{1}{i\pi} P \int \frac{F(\omega') d\omega'}{\omega - \omega'}. \quad (2.23.6)$$

Если  $F(\omega)$  — обобщенная функция, то соотношение (2.23.6) запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle F(\omega), G(\omega) \rangle &= \\ &= \frac{1}{i\pi} \left\langle F(\omega) \otimes \frac{1}{\omega}, G(\omega) \right\rangle = \frac{1}{i\pi} \left\langle \frac{F(\omega)}{\omega'}, G(\omega + \omega') \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.23.7)$$

Разобьем  $F(\omega)$  на действительную и мнимую части:

$$F(\omega) = F_1(\omega) + iF_2(\omega);$$

тогда

$$\begin{aligned} \langle F_1(\omega), G(\omega) \rangle + i \langle F_2(\omega), G(\omega) \rangle &= \\ = \frac{1}{i\pi} \left\{ \left\langle F_1(\omega) \frac{1}{\omega'}, G(\omega + \omega') \right\rangle + i \left\langle F_2(\omega) \frac{1}{\omega'}, G(\omega + \omega') \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2.23.8)$$

Из (2.23.8) следует:

$$\left. \begin{aligned} \langle F_1(\omega), G(\omega) \rangle &= \frac{1}{\pi} \left\langle \frac{F_2(\omega)}{\omega'}, G(\omega + \omega') \right\rangle, \\ \langle F_2(\omega), G(\omega) \rangle &= -\frac{1}{\pi} \left\langle \frac{F_1(\omega)}{\omega'}, G(\omega + \omega') \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2.23.9)$$

Эти два соотношения связывают действительную и мнимую части характеристики любого линейного фильтра  $F(\omega)$ , если  $f(x)$  является функцией.

Компактно эти соотношения можно записать в виде следующих дисперсионных формул:

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= F_1(\omega) + iF_2(\omega), \\ F_1(\omega) &= \frac{P}{\pi} F_2(\omega) \otimes \frac{1}{\omega} = \hat{\mathfrak{F}}[F_2(\omega)], \\ F_2(\omega) &= -\frac{P}{\pi} F_1(\omega) \otimes \frac{1}{\omega} = -\hat{\mathfrak{F}}[F_1(\omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.23.10)$$

Таким образом, функции  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$ , являющиеся действительной и мнимой частями частотной характеристики фильтра, образуют пару гильберт-образов. Поэтому, если известна действительная часть характеристики линейного фильтра, то его мнимая часть однозначно выражается через действительную часть. И это свойство возникает потому, что сигнал начинается в момент  $t = 0$ , а при  $t < 0$  отсутствует.

Любой линейный фильтр, являющийся п а с с и в н о й системой, обладает следующим свойством: если на входе до момента времени  $t = 0$  не было сигнала, т. е.  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , то на выходе линейного фильтра также не появится никакого сигнала, т. е. отклик  $r(t) = 0$  при  $t < 0$ . Это условие называется *условием причинности* и записывается так:

$$r(t) = \hat{L}[f(t)] = 0 \text{ для } t < 0. \quad (2.23.11)$$

В частности, отклик линейной системы на дельта-функцию

$$g(x) = \hat{L}[\delta(x)]$$

при  $t < 0$  равен нулю.

С учетом (2.23.11) соотношения (2.21.20) и (2.21.21) запишутся в несколько другом виде:

$$\hat{L}[f_c(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) a(x - \xi) d\xi = f'(x) \otimes a(x), \quad (2.23.12)$$

$$\hat{L}[f_c(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi = f(x) \otimes g(x). \quad (2.23.13)$$

Таким образом, различие между произвольной системой и причинной (каузальной) системой состоит в том, что произвольная система в точке  $x$  характеризуется поведением входного сигнала  $s(x)$  при всех значениях  $x$ . Причинная система полностью характеризуется заданием сигнала только в интервале  $(-\infty, t)$ .

Если система является причинной, то действительная и мнимая части ее характеристик удовлетворяют дисперсионным формулам (2.23.10).

В обратном порядке вопрос можно поставить следующим образом: каким условиям должна удовлетворять заданная функция

$$F(\omega) = F_1(\omega) + iF_2(\omega), \quad (2.23.14)$$

чтобы быть фурье-образом некоторой причинной функции  $f_c(x)$ ? В общем случае задача решения не имеет. Однако если на функцию  $F(\omega)$  наложить определенные ограничения, то можно сформулировать необходимые и достаточные условия, чтобы ее инверсный фурье-образ обращался в нуль на левой полупрямой, т. е.



при  $x < 0$ . Опять появляется ограничение на норму функции  $F(\omega)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \text{конечное число.} \quad (2.23.15)$$

Это означает, что сигнал  $f(x)$  имеет конечную энергию. Однако если  $F(\omega)$  содержит сингулярности, то эти сингулярности можно выделить из  $F(\omega)$  и критерии причинности накладывать на оставшуюся часть. Например, если в  $F(\omega)$  входит  $\delta(\omega - \omega_0)$ , то соответствующий причинный член в  $f(x)$  равен

$$\frac{1}{\pi} e^{i\omega_0 x} Y(x),$$

а его фурье-образ, равный

$$\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{i\pi(\omega - \omega_0)},$$

должен быть вычтен из  $F(\omega)$ .

Если

$$F(\omega) \rightarrow B \text{ при } \omega \rightarrow \infty,$$

то  $F(\omega)$  уже не имеет конечной нормы. В этом случае необходимо рассматривать новый фурье-образ, равный  $[F(\omega) - B]$ . Его прообразом является новая функция

$$f_1(x) = f(x) - B\delta(x).$$

Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция  $|F(\omega)| = A(\omega)$ , имеющая конечную норму, являлась фурье-образом причинной функции, сводится к конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega. \quad (2.23.16)$$

Дисперсионные соотношения и требования к фурье-образу, накладываемые причинным прообразом, имеют непосредственную связь со свойствами плоской голограммы, с помощью которой можно однозначно запечатлеть только односторонний предмет, т. е. в этом случае исходный сигнал должен являться *причинной функцией пространственной координаты  $x$*  и обращаться в нуль при  $x < x_0$ . В противном случае возникнут взаимные паложения действительного и мнимого восстановленных изображений.

В заключение небезынтересно привести взятый из истории физики софизм, который использовали противники физической реальности операции преобразования Фурье. Они утверждали:

преобразование Фурье никакого физического смысла не имеет и является чисто формальным. При этом они рассуждали так. Рассмотрим источник света, включенный в момент  $t = 0$ . Интенсивность этого источника описывается обобщенной функцией времени Хэвисайда  $Y(t)$ . Эту обобщенную функцию можно, согласно утверждениям сторонников преобразования Фурье, якобы разложить в интеграл Фурье и зависимость интенсивности от времени заменить наложением бесконечного набора колебаний с различными частотами так, что каждой частоте отвечают бесконечно продолжительные цуги гармонических колебаний от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Пусть наблюдатель смотрит на источник света в момент  $t < 0$  через светофильтр. Невозможно себе представить, говорили противники интеграла Фурье, чтобы при любом светофильтре гармонические колебания при  $t < 0$  перераспределялись всегда так, что в сумме интенсивность спектрального участка при  $t < 0$  была равна нулю. Они утверждали: во всяком случае это будет возможно не для любого фильтра. Отсюда следует вывод: наблюдатель должен увидеть свет от лампы до того, как она будет включена.

Это — очевидный абсурд, который с необходимостью приводит к единственному выводу: преобразование Фурье физического смысла не имеет. В чем ошибка этого софизма?

В рассуждениях имеется один дефект: противники преобразования Фурье не принимали во внимание принцип причинности, которому подчиняются все физические процессы. Именно принцип причинности накладывает связь на амплитудную и фазовую характеристики фильтра, и эта связь приводит к тому, что функция  $f(t)$ , равная интенсивности света, всегда равна нулю при  $t < 0$ , какие бы светофильтры мы ни применяли.

Пусть этот потерявший сейчас какую-либо актуальность парадокс, изложенный здесь в несколько упрощенном виде, будет напоминать о том, что в реальных процессах необходимо обязательно учитывать связь между амплитудной и фазовой характеристиками линейной системы, которые вытекают из всеобщего принципа причинности.

## § 2-24. Соотношение Фурье — Гильберта — Ганкеля

В заключение рассмотрим перекрестные соотношения между преобразованиями Фурье, Гильберта и Ганкеля, которые оказываются полезными при анализе двухмерных фильтров, обладающих вращательной симметрией.

Ганкелевский образ  $\mathfrak{F}(\omega)$  действительной функции  $f(r)$  можно выразить через фурье-образ вспомогательной функции

$$f_1(r) = rf(r)Y(r). \quad (2.24.1)$$

где  $Y(r)$  — функция Хэвисайда. Согласно определению фурье-образ функции  $f_1(r)$  равен

$$F_1(\omega) = \hat{\mathfrak{F}}[f_1(r)] = \int_0^{\infty} r f(r) e^{-i\omega r} dr = R_1(\omega) + iX_1(\omega), \quad (2.24.2)$$

где  $R_1(\omega)$  и  $X_1(\omega)$  — действительная и мнимая части функции  $F_1(\omega)$ . В то же время ганкелевский образ нулевого порядка функции  $f(r)$  равен

$$\mathfrak{F}(\omega) = \hat{\mathfrak{F}}^0[f(r)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r) dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega r \cos \theta} d\theta. \quad (2.24.3)$$

Изменяя в (2.24.3) порядок интегрирования, находим

$$\mathfrak{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\omega \cos \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_1(\omega \cos \theta) d\theta, \quad (2.24.4)$$

что следует из свойств симметрии действительной и мнимой частей  $F_1(\omega)$ :

$$R_1(-\omega) = R_1(\omega), \quad X_1(-\omega) = -X_1(\omega) \quad (2.24.5)$$

— в силу того, что функция  $f_1(r)$  является действительной.

Определим комплексное преобразование Ганкеля:

$$\mathfrak{F}_c(\omega) = \int_0^{\infty} r f(r) [J_0(\omega r) + iH_0(\omega r)] dr. \quad (2.24.6)$$

Для того чтобы установить связь между ганкелевскими образами  $\mathfrak{F}_c(\omega)$  и  $\mathfrak{F}(\omega)$ , вспомним, что согласно § 2-17 и § 2-20 аналитический сигнал

$$V(x) = f(x) + i\hat{\mathfrak{G}}[f(x)], \quad (2.24.7)$$

где  $\chi(x) = \hat{\mathfrak{G}}[f(x)]$  — гильберт-образ исходной функции  $f(x)$ , ассоциированный с действительной функцией  $f(x)$ , содержит только положительные частоты. Обратно, если в фурье-образе функции оставить только положительные частоты, то при обратном преобразовании Фурье возникает аналитический сигнал

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x) + i\chi(x), \quad (2.24.8)$$

ассоциированный с исходной функцией  $f(x)$ . По-другому соотношению (2.24.8) можно записать следующим образом:

$$V(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} 2F(\omega) Y(\omega), \quad (2.24.9)$$

где  $Y(\omega)$  — функция Хэвисайда.

Из определения функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{-i\omega x}}{\sqrt{1-\omega^2}} d\omega \quad (2.24.10)$$

следует, что ее фурье-образ равен

$$\hat{\mathfrak{F}}[J_0(x)] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}, & |\omega| < 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases} \quad (2.24.11)$$

Если проинтегрировать соотношение (2.24.10) только по области положительных частот, т. е. от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2 = 1$ , то в ответе получится аналитический сигнал  $V_B(x)$ , ассоциированный с функцией Бесселя  $J_0(x)$ :

$$V_B(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-i\omega x}}{\sqrt{1-\omega^2}} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta = J_0(x) + iH_0(x), \quad (2.24.12)$$

где функция

$$H_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \cos \theta) d\theta, \quad (2.24.13)$$

равная гильберт-образу функции Бесселя  $J_0(x)$ , называется функцией Струве.

Следовательно, если ограничить фурье-образ действительной функции только положительными частотами, что достигается умножением фурье-образа на функцию Хэвисайда, то при обратном преобразовании Фурье всегда возникает аналитический сигнал, действительная часть которого совпадает с исходной функцией, а мнимая часть равна гильбертовскому образу действительной части.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод о том, что действительная часть комплексного ганкелевского образа  $\mathfrak{F}_c(\omega)$  равна обычному ганкелевскому образу  $\mathfrak{F}(\omega)$ , а сам комплексный ганкелевский образ  $\mathfrak{F}_c(\omega)$  обладает свойствами аналитического сигнала: мнимая часть  $\mathfrak{F}_c(\omega)$  равна гильберт-образу  $\mathfrak{F}(\omega)$ . Подставляя интегральные соотношения для аналитического сигнала функции Бесселя

$$V_B(\omega r) = J_0(\omega r) + iH_0(\omega r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-i\omega r \cos \theta} d\theta \quad (2.24.14)$$

в (2.24.6) и изменяя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_c(\omega) &= \int_0^{\infty} r f(r) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-i\omega r \cos \theta} d\theta dr = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} r f(r) e^{-i\omega r \cos \theta} dr = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} F_1(\omega \cos \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2.24.15)$$

где

$$F_1(\omega \cos \theta) = \int_0^{\infty} r f(r) e^{-ir(\omega \cos \theta)} dr. \quad (2.24.16)$$

**Т е о р е м а.** *Соотношение, обратное*

$$\mathfrak{F}_c(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} F_1(\omega \cos \theta) d\theta, \quad (2.24.17)$$

имеет вид

$$F_1(\omega) = \omega \int_0^{\pi/2} \mathfrak{F}'_c(\omega \cos \theta) + \mathfrak{F}(0), \quad (2.24.18)$$

и аналогично

$$R_1(\omega) = \omega \int_0^{\pi/2} \mathfrak{F}'_r(\omega \cos \theta) d\theta + \mathfrak{F}(0). \quad (2.24.19)$$

Здесь через  $\mathfrak{F}'(\omega)$  обозначена производная по  $\omega$ .

Для доказательства воспользуемся двумя вспомогательными функциями:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dy \quad (2.24.20)$$

и

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(r) dy. \quad (2.24.21)$$

Найдем фурье-образ функции  $s(x)$ . По определению

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{F}}[s(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-i\omega x} dx dy = \\ &= \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta r f(r) e^{-i\omega r \cos \theta} = 2\pi \mathfrak{F}(\omega). \end{aligned} \quad (2.24.22)$$

Здесь использовалось определение функции (2.24.20), правило замены переменных и соотношение (2.24.3).

Переходу от функции  $s(x)$ , фурье-образ которой равен  $2\pi\hat{\mathfrak{F}}(\omega)$ :

$$s(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} 2\pi\hat{\mathfrak{F}}(\omega), \quad (2.24.23)$$

к функции  $s(x) \cdot Y(x)$  соответствует переход от фурье-образа  $2\pi\hat{\mathfrak{F}}(\omega)$  к фурье-образу  $\pi\hat{\mathfrak{F}}_c(\omega)$ , т. е.

$$s(x) Y(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \pi\hat{\mathfrak{F}}_c(\omega) = \int_0^{\infty} s(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (2.24.24)$$

Аналогичными свойствами обладает функция  $q(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} q(x) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} 2\pi\mathfrak{E}(\omega), \\ q(x) Y(x) &\xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \pi\mathfrak{E}_c(\omega) = \int_0^{\infty} q(x) e^{-i\omega x} dx = \\ &= \pi \int_0^{\infty} rs(r) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega r \cos \theta} d\theta dr. \end{aligned} \right\} \quad (2.24.25)$$

Далее, из (2.22.8) следует, что

$$2\pi x \cdot f(x) Y(x) = -q'(x) Y(x). \quad (2.24.26)$$

Продифференцировав (2.24.24) по  $\omega$ , находим

$$\pi\hat{\mathfrak{F}}'_c(\omega) = \int_0^{\infty} s(x) \frac{d}{d\omega} (e^{-i\omega x}) dx = \int_0^{\infty} (-ix) s(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (2.24.27)$$

откуда следует, что

$$(-ix) s(x) Y(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \pi\hat{\mathfrak{F}}'_c(\omega),$$

или

$$xs(x) Y(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \pi i\hat{\mathfrak{F}}'_c(\omega). \quad (2.24.28)$$

Докажем, что

$$\mathfrak{E}_c(\omega) = 2i \int_0^{\pi/2} \hat{\mathfrak{F}}'_c(\omega \cos \theta) d\theta. \quad (2.24.29)$$

Действительно, по (2.24.27)

$$\hat{\mathfrak{F}}'_c(\omega) = \frac{1}{i\pi} \int_0^{\infty} xs(x) e^{-i\omega x} dx,$$

или, иначе,

$$\hat{\mathfrak{F}}'_c(\omega \cos \theta) = \frac{1}{i\pi} \int_0^{\infty} rs(r) e^{-i\omega r \cos \theta} dr. \quad (2.24.30)$$

Далее, по определению комплексный ганкелевский образ функции  $s(r)$  равен

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_c(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r s(r) \int_0^{\pi} e^{-i\omega r \cos \theta} d\theta dr = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} r s(r) e^{-i\omega r \cos \theta} dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cdot \pi i \cdot \mathfrak{F}'_c(\omega \cos \theta) d\theta = \\ &= 2i \int_0^{\pi/2} \mathfrak{F}'(\omega \cos \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.24.31)$$

Продифференцируем по  $x$  функцию  $q(x) Y(x)$ :

$$\frac{d}{dx} [q(x) Y(x)] = q'(x) Y(x) + q(0) \delta(x). \quad (2.24.32)$$

Поскольку (см. (2.24.25))

$$q(x) Y(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \pi \mathfrak{E}_c(\omega),$$

то

$$\frac{d}{dx} [q(x) Y(x)] \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} (i\omega) \cdot \pi \mathfrak{E}_c(\omega). \quad (2.24.33)$$

Далее, очевидно, что

$$q(0) \delta(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} q(0). \quad (2.24.34)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} q'(x) Y(x) &= \\ &= \frac{d}{dx} [q(x) Y(x)] - q(0) \delta(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \pi i \omega \mathfrak{E}_c(\omega) - q(0). \end{aligned} \quad (2.24.35)$$

С другой стороны, согласно (2.24.26), (2.24.1) и (2.24.2)

$$q'(x) Y(x) = -2\pi x f(x) Y(x) = -2\pi f_1(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} -2\pi F_1(\omega), \quad (2.24.36)$$

откуда следует, что

$$2\pi F_1 = q(0) - \pi i \omega \mathfrak{E}_c(\omega), \quad (2.24.37)$$

а

$$q(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(r) dy |_{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-i\omega x} dx |_{\omega=0} = 2\pi \mathfrak{F}(0). \quad (2.24.38)$$

Подставляя в (2.24.37) выражение (2.24.31) для  $\mathfrak{E}_c(\omega)$  и (2.24.38) для  $g(t)$ , находим окончательно

$$F_1(\omega) = \omega \int_0^{\pi/2} \mathfrak{E}'_c(\omega \cos \theta) d\theta + \mathfrak{F}(0),$$

что соответствует (2.24.18). Теорема доказана.

### § 2-25. Модуляция сигнала

Рассмотрим некоторые общие вопросы теории модуляции сигнала, которые используются в голографии.

Любой сигнал передается путем модуляции. В радиосвязи модулируются электромагнитные колебания, излучаемые радиостанцией на несущей частоте. Колебания без модуляции не несут никакой информации и подобны чистой странице, без букв.

В голографии принцип модуляции также широко используется. Немодулированная дифракционная решетка, каковой является простейшая голограмма, не содержит никакой информации и аналогична белому листу бумаги.

Немодулированные колебания обычно представляют собой гармоническую несущую:

$$a(t) = a_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}. \quad (2.25.1)$$

Ее можно модулировать путем изменения во времени одной или нескольких величин, характеризующих эту гармонику.

Изменение амплитуды  $a_0$  называется *амплитудной модуляцией*. Изменение частоты  $\omega_0$  приводит к *частотной модуляции*, а изменение фазы  $\varphi_0$  дает *фазовую модуляцию*.

При амплитудной модуляции несущая (2.25.1) умножается на множитель

$$[1 + mg(t)], \quad (2.25.2)$$

где  $g(t)$  — модулирующая функция, представленная в таком масштабе, что  $|g(t)| \leq 1$ , а  $m$  — глубина модуляции, заключенная в пределах  $0 < m < 1$ .

Возникающий модулированный сигнал

$$f(t) = [1 + mg(t)] a_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \quad (2.25.3)$$

имеет фурье-образ

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \hat{\mathfrak{F}}[a_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}] + m a_0 \hat{\mathfrak{F}}[g(t) e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}] = \\ &= a_0 [\delta(\omega_0 - \omega) + m \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} e^{-i\omega t} dt] = \\ &= a_0 [\delta(\omega_0 - \omega) + m e^{i\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) e^{i\omega_0 t}] e^{-i\omega t} dt] = \\ &= a_0 \delta(\omega_0 - \omega) + m a_0 e^{i\varphi_0} G(\omega_0 - \omega), \end{aligned} \quad (2.25.4)$$



где  $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$  — фурье-образ модулирующей функции  $g(t)$  или сигнала модуляции.

Рассмотрим простейшие примеры. Если

$$g(t) = \cos \Omega t, \quad (2.25.5)$$

то

$$G(\omega) = \frac{\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)}{2}. \quad (2.25.6)$$

Фурье-образ модулированного сигнала, равный

$$F(\omega) = a_0 \left[ \delta(\omega - \omega_0) + m \frac{\delta(\omega_0 - \omega + \Omega) + \delta(\omega_0 - \omega - \Omega)}{2} \right], \quad (2.25.7)$$

состоит из трех спектральных линий (рис. 2.36).

Амплитудная модуляция приводит к появлению новых линий в спектре.

Если модулирующая функция периодична так, что

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\Omega t + \varphi_k), \quad (2.25.8)$$

то

$$f(t) = a_0 \left[ 1 + m \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\Omega t + \varphi_k) \right] e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \quad (2.25.9)$$

и ее фурье-образ, равный

$$F(\omega) = a_0 \left[ \delta(\omega - \omega_0) + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \delta(\omega_0 + k\Omega - \omega) + \delta(\omega_0 - k\Omega - \omega) \} \right], \quad (2.25.10)$$

состоит из двух групп, или *боковых полос*, новых спектральных линий, расположенных симметрично относительно линии несущей частоты  $\omega_0$  (рис. 2.37). Из формул (2.25.7) и (2.25.10) видно, что в процессе модуляции происходит трансляция спектра  $G(\omega)$  модулирующей функции  $g(t)$ .

Кроме описанной модуляции ( $m \neq 1$ ) возможна так называемая *балансная модуляция*, при которой несущая частота исчезает, а спектр состоит только из боковых полос. Модуляция при этом осуществляется другим методом, а именно путем *мультипликативной модуляции несущей*. Сигнал, модулированный таким способом,

равен

$$f(t) = g(t) \cdot a_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}, \quad (2.25.11)$$

причем  $g(t)$  не имеет постоянной составляющей.

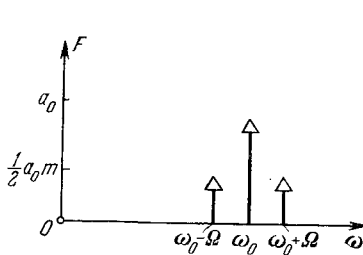


Рис. 2.36. Фурье-образ несущей, модулированной косинусоидой, состоит из трех спектральных линий.

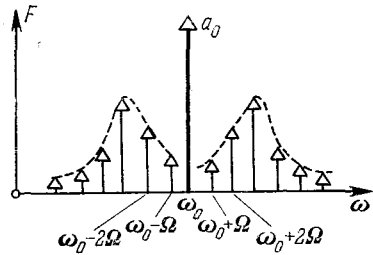


Рис. 2.37. Фурье-образ несущей, промодулированной периодическим сигналом.

При балансной модуляции фурье-образ сигнала (2.25.11), равный

$$F(\omega) = a_0 e^{i\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = a_0 e^{i\varphi_0} G(\omega_0 - \omega), \quad (2.25.12)$$

содержит только боковую полосу, а несущая частота колебаний полностью отсутствует.

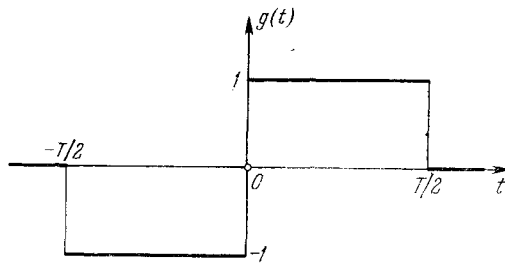


Рис. 2.38. Модулирующая функция в виде двух прямоугольных импульсов разной полярности.

Рассмотрим простейший пример. Пусть несущая равна

$$a(t) = a_0 \sin \omega_0 t = \frac{a_0}{2i} [e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}], \quad (2.25.13)$$

а модулирующая функция имеет вид двух прямоугольных импульсов разной полярности (рис. 2.38), т. е.

$$g(t) = \Pi_{\frac{T}{2}} \left( t - \frac{T}{2} \right) - \Pi_{\frac{T}{2}} \left( t + \frac{T}{2} \right). \quad (2.25.14)$$

Тогда модулированный сигнал равен (рис. 2.39)

$$f(t) = \left[ \Pi_{\frac{T}{2}} \left( t - \frac{T}{2} \right) - \Pi_{\frac{T}{2}} \left( t + \frac{T}{2} \right) \right] a_0 \sin \omega_0 t. \quad (2.25.15)$$

Поскольку фурье-образ  $g(t)$  равен

$$G(\omega) = i \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega T}, \quad (2.25.16)$$

то фурье-образ модулированного сигнала  $f(t)$  равен (рис. 2.40)

$$F(\omega) = \frac{2a_0}{iT} \left\{ \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 + \omega) T}{2}}{(\omega_0 + \omega)} - \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega) T}{2}}{(\omega_0 - \omega)} \right\}. \quad (2.25.17)$$

В нем полностью отсутствует составляющая с частотой  $\omega_0$ . Возникает необычное на первый взгляд явление: колебания, состоящие

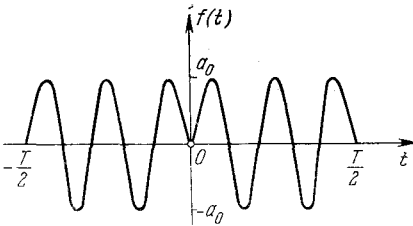


Рис. 2.39. Модулированный сигнал, полученный путем балансной модуляции синусоиды импульсом.

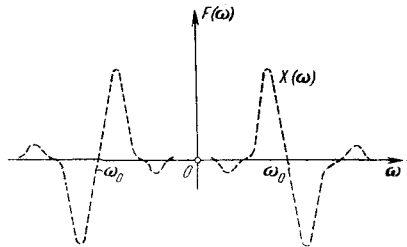


Рис. 2.40. Фурье-образ модулированного сигнала при балансной модуляции, не содержащий составляющей на несущей частоте.

из двух кусков гармонических колебаний, не содержат в своем спектре линий на основной частоте  $\omega_0$ . Это достигается тем, что нулевой момент модулирующей функции  $g(t)$  обращается в нуль:

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 0. \quad (2.25.18)$$

В противном случае в спектре модулированного сигнала будут всегда иметься линии на частоте  $\omega_0$ .

Рассмотрим теперь процесс *демодуляции*. Задача заключается в том, чтобы преобразовать линейным образом модулированный сигнал

$$f(t) = [1 + mg(t)] \cos \omega_0 t \quad (a_0 = 1, \varphi_0 = 0) \quad (2.25.19)$$

и извлечь информацию о модулирующем сигнале  $g(t)$ . Для этого можно произвести повторную модуляцию уже промодулированного

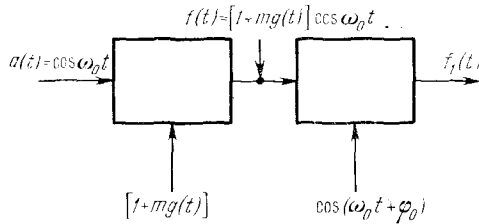


Рис. 2.41. Схема, поясняющая стадии модуляции и демодуляции. Стадия демодуляции осуществляется путем повторной модуляции исходной гармоники, но с другой фазой.

сигнала  $f(t)$  основной гармонике  $\omega_0$ . Получим дважды модулированный сигнал (рис. 2.41)

$$\begin{aligned} f_1(t) &= [1 + mg(t)] \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= [1 + mg(t)] \cdot \frac{1}{4} \{e^{i\varphi_0} + e^{-i\varphi_0} + [e^{i(2\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(2\omega_0 t + \varphi_0)}]\}. \end{aligned} \quad (2.25.20)$$

Его фурье-образ равен

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{1}{4} \{e^{i\varphi_0} [\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega) + mG(\omega - 2\omega_0) + mG(\omega)] + \\ &+ e^{-i\varphi_0} [\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega) + mG(\omega + 2\omega_0) + mG(\omega)]\} \end{aligned} \quad (2.25.21)$$

(рис. 2.42). Затем полученный сигнал пропускаем через фильтр низких частот, т. е. выделяем только частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_{\text{макс}} \ll \omega_0$ . На выходе низкочастотного фильтра останутся следующие компоненты:

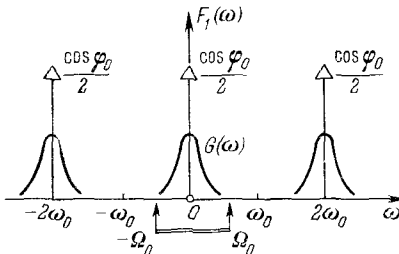


Рис. 2.42. Фурье-образ дважды модулированного сигнала.

$$\begin{aligned} F_1^\Phi(\omega) &= \frac{1}{2} [\delta(\omega) + \\ &+ mG(\omega)] \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (2.25.22)$$

Осуществив обратное преобразование Фурье, получим прообраз отфильтрованного демодулированного сигнала

$$f_1^\Phi(t) = \frac{1}{2} [1 + mg(t)] \cos \varphi_0. \quad (2.25.23)$$

С точностью до множителя  $\cos \varphi_0/2$  он совпадает с модулирующим сигналом (2.25.2). Амплитуда отфильтрованного демодулирован-

ного сигнала по крайней мере в 2 раза меньше амплитуды исходного модулирующего сигнала. Возникающие при этом потери следует приписать фильтру низкой частоты, в котором задерживаются высокочастотные компоненты. Дефазирующий множитель  $\cos \varphi_0$  изменяет только амплитуду выходного сигнала, не деформируя его самого.

В такой простейшей схеме демодуляции мы использовали о б е п л о с ы спектра модулированного сигнала. Возможна также

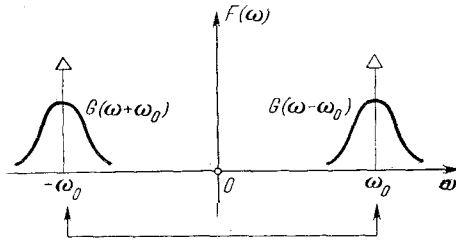


Рис. 2.43. Процесс фильтрации модулированного сигнала в схеме с однополосной модуляцией.

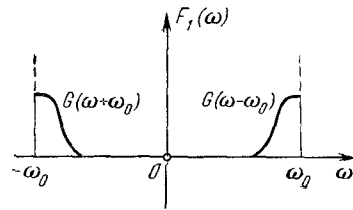


Рис. 2.44. Спектр сигнала на выходе однополосного фильтра (см. рис. 2.37).

схема *однополосной модуляции*, или модуляции в одной боковой полосе (SSB). Рассмотрим ее принцип.

Первая стадия — процесс модуляции — осуществляется, как в любом линейном фильтре. Модулирующая функция  $g(t)$ , фурье-образ которой равен  $G(\omega)$ , создает сигнал

$$f(t) = [1 + mg(t)] \cos \omega_0 t. \quad (2.25.24)$$

Фурье-образ этого сигнала равен

$$F(\omega) = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{m}{2} [G(\omega - \omega_0) + G(\omega + \omega_0)]. \quad (2.25.25)$$

Сигнал  $f(t)$  подается на фильтр, который пропускает полосу частот  $-\omega_0 < \omega < +\omega_0$  (рис. 2.43), или  $|\omega| \leq \omega_0$ . Спектр сигнала на выходе этого фильтра имеет вид (рис. 2.44)

$$F_1(\omega) = \frac{m}{2} \begin{cases} G(\omega - \omega_0), & 0 < \omega < \omega_0, \\ G(\omega + \omega_0), & -\omega_0 < \omega < 0. \end{cases} \quad (2.25.26)$$

Используя функцию Хэвисайда  $Y(\omega)$ , искаженный спектр  $F_1(\omega)$  можно представить так:

$$F_1(\omega) = \frac{m}{2} \{G(\omega + \omega_0) - G(\omega + \omega_0) \cdot Y(\omega_0 - \omega) + G(\omega - \omega_0) - \\ - G(\omega - \omega_0) \cdot Y(\omega - \omega_0)\} = \frac{m}{2} \{G(\omega)|_{-\omega_0} - [G(\omega) \cdot Y(-\omega)]_{-\omega_0} + \\ + G(\omega)|_{+\omega_0} - [G(\omega) \cdot Y(\omega)]_{+\omega_0}\}. \quad (2.25.27)$$

Здесь введена компактная форма записи сдвинутых функций. Фундаментальное свойство преобразования Фурье (табл. 2.1) позволяет с помощью (2.25.27) найти искаженный сигнал  $f_1(t)$ :

$$f_1(t) = \frac{m}{2} \left\{ g(t) e^{-i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \cdot \frac{1}{2} g(t) \otimes \left[ \delta(t) + \frac{P}{i\pi t} \right] + \right. \\ \left. + g(t) e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{1}{2} g(t) \otimes \left[ \delta(t) - \frac{P}{i\pi t} \right] \right\} = \\ = \frac{m}{2} \{2g(t) \cos \omega_0 t - g(t) \cos \omega_0 t + h(t) \sin \omega_0 t\}. \quad (2.25.28)$$

Здесь учтено, что если

$$\hat{\mathfrak{F}} \\ f(x) \rightarrow F(\omega),$$

то

$$f(x) e^{\pm i\omega_0 x} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} F(\omega \mp \omega_0),$$

а

$$f(x + x_0) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} e^{i\omega x_0} F(\omega)$$

и

$$f(-\omega) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}^{-1}} \frac{1}{2\pi} F(x).$$

Применим последнее соотношение к функции Хэвисайда: если

$$Y(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \pi \delta(\omega) + \frac{P}{i\omega},$$

то

$$\left. \begin{aligned} Y(\omega) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}^{-1}} \frac{1}{2} \left[ \delta(x) - \frac{P}{i\pi x} \right], \\ Y(-\omega) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}^{-1}} \frac{1}{2} \left[ \delta(x) + \frac{P}{i\pi x} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.25.29)$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} Y(\omega_0 - \omega) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}^{-1}} \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 x} \left[ \delta(x) + \frac{P}{i\pi x} \right], \\ Y(\omega - \omega_0) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}^{-1}} \frac{1}{2} e^{i\omega_0 x} \left[ \delta(x) - \frac{P}{i\pi x} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.25.30)$$

В (2.25.28) функция

$$h(t) = \frac{1}{\pi} g(t) \otimes \frac{P}{t} \quad (2.25.31)$$

равна гильберт-образу функции  $g(t)$ . Таким образом, сигнал  $f(t)$  превратился на выходе однополосного фильтра в и с к а ж е н н у ю функцию

$$f_1(t) = \frac{m}{2} \{g(t) \cos \omega_0 t + h(t) \sin \omega_0 t\}. \quad (2.25.32)$$

Теперь осуществим демодуляцию. Сигнал  $f_1(t)$  умножим на функцию  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , создаваемую на приемном конце. Получим сигнал  $f_2(t) = f_1(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Заменяя тригонометрические функции на экспоненциальные, запишем сигнал  $f_2(t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{m}{2} \{g(t) \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + h(t) \sin \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\} = \\ &= \frac{m}{8} \left\{ g(t) [e^{i\varphi_0} + e^{-i\varphi_0} + e^{i(2\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(2\omega_0 t + \varphi_0)}] - \right. \\ &\quad \left. - h(t) \left[ \frac{e^{i\varphi_0} - e^{-i\varphi_0}}{i} - \frac{e^{i(2\omega_0 t + \varphi_0)} - e^{-i(2\omega_0 t + \varphi_0)}}{i} \right] \right\}. \quad (2.25.33) \end{aligned}$$

Легко видеть, что спектр  $F_2(\omega)$  сигнала  $f_2(t)$  имеет вид

$$F_2(\omega) = \frac{m}{8} \left[ G(\omega) \cdot 2 \cos \varphi_0 + G(\omega - 2\omega_0) e^{i\varphi_0} + G(\omega + 2\omega_0) e^{-i\varphi_0} - \right. \\ \left. - H(\omega) 2 \sin \varphi_0 - \frac{e^{i\varphi_0}}{i} H(\omega - 2\omega_0) + \frac{e^{-i\varphi_0}}{i} H(\omega + 2\omega_0) \right], \quad (2.25.34)$$

где  $H(\omega)$  — фурье-образ функции  $h(t)$ . Из сигнала  $f_2(t)$  фильтр низких частот на приемном конце выделяет низкочастотную часть спектра  $F_2(\omega)$ :

$$F_2^{\text{НЧ}} = \frac{m}{4} \{ \cos \varphi_0 \cdot G(\omega) - \sin \varphi_0 \cdot H(\omega) \} = \\ = \frac{m}{8} \{ e^{i\varphi_0} [G(\omega) + iH(\omega)] + e^{-i\varphi_0} [G(\omega) - iH(\omega)] \}. \quad (2.25.35)$$

При этом получаем низкочастотный сигнал

$$f_2^{\text{НЧ}}(t) = \frac{m}{8} \{ e^{i\varphi_0} [g(t) + ih(t)] + e^{-i\varphi_0} [g(t) - ih(t)] \} = \\ = \frac{m}{4} [g(t) \cos \varphi_0 - h(t) \sin \varphi_0]. \quad (2.25.36)$$

Выясним теперь, как проявляются однополосные свойства фильтра. Докажем, что функция  $g(t) + ih(t)$  содержит только положительные частоты, а функция  $g(t) - ih(t)$  — только отрицательные. Из определения (2.25.31) функции  $h(t)$  следует:

$$\psi_1(t) = g(t) + ih(t) = g(t) + i \frac{1}{\pi} g(t) \otimes \frac{P}{t} = \\ = g(t) \otimes \left[ \delta(t) + \frac{iP}{\pi t} \right]. \quad (2.25.37)$$

Но фурье-образ функции  $\delta(t) + \frac{iP}{\pi t}$  равен  $2Y(\omega)$  (см. (2.25.30)). Поэтому фурье-образ  $\psi_1(t)$  равен

$$\Psi_1(\omega) = 2Y(\omega) \cdot G(\omega). \quad (2.25.38)$$

Функция Хэвисайда  $Y(\omega)$  оставляет только положительные частоты.



Аналогично, функция

$$\psi_2(t) = g(t) - ih(t) = g(t) \otimes \left[ \delta(t) - \frac{iP}{\pi t} \right]$$

содержит только отрицательные частоты:

$$\Psi_2(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[\psi_2^*(t)] = 2Y(-\omega)G(\omega). \quad (2.25.39)$$

Иначе соотношения (2.25.38) и (2.25.39) можно записать следующим образом:

$$G(\omega) + iH(\omega) = \begin{cases} 2G(\omega), & \text{если } \omega > 0, \\ 0, & \text{если } \omega < 0, \end{cases} \quad (2.25.40)$$

$$G(\omega) - iH(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega > 0, \\ 2G(\omega), & \text{если } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.25.41)$$

Легко видеть, что

$$iH(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & \text{если } \omega > 0, \\ -G(\omega), & \text{если } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.25.42)$$

В нашем случае функции  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  содержат множители  $e^{i\varphi_0}$  и  $e^{-i\varphi_0}$ . Поскольку  $\psi_1(t)$  дает вклад только в положительные частоты, а  $\psi_2(t)$  — только в отрицательные частоты, то низкочастотная часть спектра дважды линейно промодулированного сигнала на выходе низкочастотного фильтра имеет вид

$$F_2^{\text{SSB}}(\omega) = \begin{cases} G(\omega)e^{i\varphi_0}, & \text{если } \omega > 0, \\ G(\omega)e^{-i\varphi_0}, & \text{если } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.25.43)$$

Спектр, обладающий таким свойством, называется *однополосным*.

Если  $\varphi_0 = 0$ , т. е. местный генератор, осуществляющий линейную демодуляцию при приеме сигналов методом модуляции в одной боковой полосе, находится в фазе с несущими гармоническими колебаниями, то в приемнике восстанавливается исходный модулирующий сигнал  $g(t)$ .

Если же  $\varphi_0 = \pi/2$ , то в приемнике выделяется сигнал, являющийся гильберт-образом исходного сигнала  $g(t)$ . В общем же случае ( $\varphi_0 \neq 0$ ) принятый сигнал отличается от исходного, хотя при известном  $\varphi_0$  можно найти исходную функцию  $g(t)$ . При этом в любом случае выдвигается жесткое требование строгой согласованности по фазе колебаний местного генератора приемной станции с колебаниями на передающей станции. В противном случае возникают нелинейные искажения и отклик на выходе всей системы не будет пропорционален входному сигналу.

Рассмотрим теперь фазовую и частотную модуляции. По определению при фазовой модуляции сигнал имеет вид

$$f(t) = a_0 e^{i\varphi(t)}, \quad (2.25.44)$$

где меняющаяся во времени фаза  $\varphi(t)$  пропорциональна модулирующей функции  $g(t)$ :

$$\varphi(t) = \Delta\varphi \cdot g(t) + \varphi_0. \quad (2.25.45)$$

Таким образом,

$$f(t) = a_0 e^{i[\varphi_0 + \Delta\varphi \cdot g(t)]} \quad (2.25.46)$$

При частотной модуляции совершается переход от модулирующего сигнала  $g(t)$  к колебаниям вида

$$f(t) = a_0 e^{i[\varphi_0 + \alpha g(t)]}, \quad (2.25.47)$$

где  $\alpha = \Delta\varphi$  — индекс модуляции.

Поскольку по определению производная фазы по времени  $d\varphi(t)/dt$  равна мгновенной частоте  $\omega(t)$ , изменение во времени которой задается модулирующей функцией  $g(t)$ :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t) \equiv g(t), \quad (2.25.48)$$

то

$$\varphi(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (2.25.49)$$

и результирующий промодулированный сигнал имеет вид

$$f(t) = a_0 \exp i \left[ \varphi_0 + \int_0^t g(\tau) d\tau \right]. \quad (2.25.50)$$

Это соотношение в отличие от (2.20.3), описывающего амплитудную модуляцию, не является линейным относительно модулирующей функции  $g(t)$ . В этом легко убедиться без непосредственных выкладок, так как функция  $g(t)$  входит в аргумент экспоненциальной функции. Таким образом,

$$f(t) \neq f_1(t) + f_2(t), \quad (2.25.51)$$

если

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \hat{\mathcal{C}}\hat{\Phi}[g_1(t)], \\ f_2(t) &= \hat{\mathcal{C}}\hat{\Phi}[g_2(t)], \\ f(t) &\neq \hat{\mathcal{C}}\hat{\Phi}[g_1(t) + g_2(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.25.52)$$

Таким же свойством обладает и фазовая модуляция. Отсюда можно заключить, что частотно-фазовая модуляция является *нелинейным преобразованием сигнала*.

Как и в общем случае, нелинейные преобразования создают высшие гармоники и, следовательно, расширяют спектр модулированного сигнала. Докажем это.

Рассмотрим для простоты случай частотной модуляции в виде

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cos \Omega t \right], \quad (2.25.53)$$

т. е. случай, когда частота меняется по синусоидальному закону. Тогда фаза

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega_0 \left[ 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cos \Omega \tau \right] d\tau = \omega_0 t + \beta \sin \Omega t, \quad (2.25.54)$$

где  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$  — индекс модуляции, и

$$f(t) = a_0 e^{i[\omega_0 t + \beta \sin \Omega t]}. \quad (2.25.55)$$

Используя формулы из теории бесселевых функций:

$$\begin{aligned} e^{ix \sin \varphi} &= [J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\varphi + \\ &\quad + i [2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin (2n+1)\varphi], \\ e^{ix \cos \varphi} &= [J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\varphi + \\ &\quad + i [2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \cos (2n+1)\varphi], \end{aligned} \quad (2.25.56)$$

находим

$$f(t) = a_0 \{ J_0(\beta) e^{i\omega_0 t} + \sum_{h=1}^{\infty} J_h(\beta) [e^{i(\omega_0+h\Omega)t} + (-1)^h e^{i(\omega_0-h\Omega)t}] \}. \quad (2.25.57)$$

Из выражения (2.25.57) видно, что спектр модулированного сигнала  $f(t)$  состоит из бесконечного набора линий даже в простейшем случае частотной модуляции по гармоническому закону. Правда, этот спектр имеет определенную эффективную ширину. Так, например, если ограничиться учетом только тех гармоник спектра, которые имеют относительную амплитуду, меньшую 0,01, то можно количественно выразить эффективную ширину спектра модулированного сигнала, которая зависит от индекса частотной модуляции  $\beta$ .

### § 2-26. Преобразование Френеля

По определению *преобразованием Френеля* называется интегральное преобразование вида

$$\Phi(x) = \omega_0 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega_0^2(x-\xi)^2} d\xi, \quad (2.26.1)$$

где  $f(x)$  — исходная функция, а  $\Phi(x)$  — ее *френелевский образ*.  
Функция

$$z(x) = \omega_0 \sqrt{2} e^{i\omega_0^2 x^2} \quad (2.26.2)$$

называется *функцией Френеля*. Выражаясь нестрого, ее можно получить из гармонической функции  $e^{i\omega x}$ , если пространственную частоту  $\omega$  изменять по линейному закону:

$$\omega(x) = \omega_0(\omega_0 x). \quad (2.26.3)$$

Преобразование Френеля (2.26.1) играет в оптике и в голографии такую же фундаментальную роль, как и преобразование Фурье. Основные свойства преобразования Френеля будут рассмотрены ниже.

Начнем со свойств функции Френеля и вычислим ее *фурье-образ*:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \omega_0 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0^2 x^2} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \omega_0 \sqrt{2} e^{-i\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega_0 x - \frac{\omega}{2\omega_0}]^2} dx = \sqrt{2} e^{-i\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt, \end{aligned} \quad (2.26.4)$$

где  $t = \omega_0 x - \omega/2\omega_0$ . Можно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt = \sqrt{\pi i}. \quad (2.26.5)$$

Тогда

$$Z(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp i \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \right], \quad (2.26.6)$$

или, в символической записи,

$$z(x) = \omega_0 \sqrt{2} \exp i \omega_0^2 x^2 \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} Z(\omega) = \sqrt{2\pi i} \exp \left( -i \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \right); \quad (2.26.7)$$

иначе (2.26.7) для одномерного случая можно записать так:

$$\exp i \omega_0^2 x^2 \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{\sqrt{\pi i}}{\omega_0} \exp \left( -i \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \right), \quad (2.26.8)$$

и для двухмерного случая  $\mathbf{x}(x, y)$  и  $\omega(\omega_x, \omega_y)$ :

$$\exp i\omega_0^2 \mathbf{x}^2 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{\pi i}{\omega_0^2} \exp\left(-i \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}\right). \quad (2.26.9)$$

Таким образом, фурье-образ функции Френеля в координатах пространственных частот  $(\omega/2\omega_0)$  равен функции Френеля, умноженной на комплексный коэффициент  $\sqrt{2\pi}e^{i\pi/4} = \sqrt{2\pi}i$ . Аналогичным свойством обладает лишь функция Гаусса  $e^{-\omega_0^2 x^2}$ , фурье-образ которой равен самой функции Гаусса (см. (2.4.30)).

Из определения преобразования Френеля (2.26.1) следует, что это преобразование является с в е р т к о й исходной функции  $f(x)$  с функцией Френеля  $z(x)$ . Таким образом,

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x). \quad (2.26.10)$$

Каждое значение функции  $f(x)$  в точке  $x$  размывается в функцию Френеля, и затем все непрерывно смещенные картины Френеля суммируются.

Подобно преобразованию Фурье, интегральное преобразование Френеля является операцией, которая допускает восстановление исходной функции при повторном или обратном преобразовании Френеля. Действительно, если френелевский образ  $\Phi(x)$  функции  $f(x)$  равен

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x),$$

то френелевский образ функции  $\Phi(x)$ , согласно определению, равен

$$\begin{aligned} \Phi(x) \otimes z^*(x) &= [f(x) \otimes z(x)] \otimes z^*(x) = \\ &= f(x) \otimes z(x) \otimes z^*(x) = f(x) \otimes [z(x) \otimes z^*(x)]. \end{aligned} \quad (2.26.11)$$

Найдем свертку  $z(x) \otimes z^*(x)$ . Согласно определению свертки

$$\begin{aligned} z(x) \otimes z^*(x) &= 2\omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0^2 \xi^2} e^{i\omega_0^2 (x-\xi)^2} d\xi = \\ &= 2|\omega_0| e^{i\omega_0^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\omega_0^2 x\alpha} d\alpha = e^{i\omega_0^2 x^2} \delta(x) = \delta(x). \end{aligned} \quad (2.26.12)$$

Таким образом,

$$z(x) \otimes z^*(x) = \delta(x). \quad (2.26.13)$$

Свертка двух функций Френеля равна дельта-функции Дирака. Отсюда

$$f(x) \otimes z(x) \otimes z^*(x) = f(x). \quad (2.26.14)$$

Таким образом, в результате двух последовательных преобразований Френеля получается исходная функция. Или, иначе, соотношение (2.26.14) означает, что функция  $f(x)$  и ее френелевский

образ  $\Phi(x)$  образуют пару, связанную соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= \int f(\xi) z(x - \xi) d\xi = f \otimes z, \\ f(x) &= \int \Phi(\xi) z^*(x - \xi) d\xi = \Phi \otimes z^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.26.15)$$

Свойство (2.26.13) можно получить также с помощью теоремы о фурье-образе свертки двух функций. Действительно,

$$\hat{\mathcal{F}}[z \otimes z^*] = \frac{1}{2\pi} Z \cdot Z^* = \frac{1}{2\pi} \left| \sqrt{2\pi} \exp i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \right) \right|^2 = 1, \quad (2.26.16)$$

откуда

$$z \otimes z^* = \delta(x).$$

Аналогично, френелевский образ можно найти по формуле

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) Z(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (2.26.17)$$

где  $F(\omega)$  — фурье-образ функции  $f(x)$ , а  $Z(\omega)$  — фурье-образ функции Френеля. Этой формулой, естественно, следует пользоваться в том случае, если  $F(\omega)$  — функция более простая, чем  $f(x)$ .

Продолжим рассмотрение свойств функции Френеля. Свертка функции Френеля  $z(x)$  с единицей  $1(x)$  равна

$$z(x) \otimes 1(x) = \omega_0 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0^2 x^2} dx = \sqrt{2\pi i} = \sqrt{2\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (2.26.18)$$

При  $\omega_0 \rightarrow \infty$  функция Френеля  $z(x)$  ведет себя интересным образом. Для уяснения этого свойства функции Френеля вычислим предел

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} f(x) \otimes z(x). \quad (2.26.19)$$

Воспользовавшись (2.26.17), получим

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} f(x) \otimes z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) Z(\omega) e^{i\omega x} dx. \quad (2.26.20)$$

Поскольку  $Z(\omega)$  при  $\omega_0 \rightarrow \infty$  стремится к постоянному значению  $\sqrt{2\pi i}$  (см. 2.26.6), то

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} f(x) \otimes z(x) = \sqrt{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} dx = 2\pi \sqrt{2\pi i} f(x). \quad (2.26.21)$$

Вспомним, что аналогичным свойством обладает дельта-функция (см. (2.14.12)):

$$f(x) \otimes \delta(x) = f(x).$$

Было бы, однако, ошибочно из сравнения (2.26.21) и (2.14.12) сделать вывод о том, что  $\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} z(x) = 2\pi \sqrt{2\pi i} \cdot \delta(x)$ .

Не существует однозначного решения сверточного уравнения. Единственное, что можно утверждать, это то, что при  $\omega_0 \rightarrow \infty$  функция  $z(x)$  содержит бесконечно высокие пространственные частоты.

Из соотношения (2.26.17) следует, что френелевский образ существует всегда, когда существует фурье-образ исходной функции. Таким образом, все теоремы об условиях существования преобразования Фурье и свертках полностью применимы к анализу преобразования Френеля. Это позволяет достаточно определенно очертить класс функций, для которых существуют прямое и обратное преобразования Френеля.

Для функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , имеющих френелевские образы  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$ , справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) \otimes f_2^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \Phi_1(x) \otimes \Phi_2^*(x), \\ f_1(x) \otimes f_2^*(-x) &= \frac{1}{2\pi} \Phi_1(x) \otimes \Phi_2^*(-x). \end{aligned} \right\} \quad (2.26.22)$$

Если  $\xi = 0$ , то получаем соотношение Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x) \Phi_2^*(x) dx. \quad (2.26.23)$$

Необходимо подчеркнуть, что при преобразовании Френеля, которое является сверткой, все операции производятся в обычном, координатном пространстве. В этом оно качественно отличается от преобразования Фурье, в результате которого предмет преобразуется в частотно-спектральный образ, заданный в пространстве фурье-координат или пространственных частот.

## § 2-27. Соотношение Френеля — Фурье

Френелевский образ можно выразить через фурье-образ  $F(\omega)$  исходной функции  $f(x)$  и фурье-образ функции Френеля  $Z(\omega)$ . А именно согласно (2.6.8)

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= f(x) \otimes z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) Z(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) z(x') e^{-i\omega x'} e^{i\omega x} d\omega dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) z(x') e^{i\omega(x-x')} dx' d\omega. \end{aligned} \quad (2.27.1)$$

После замены переменных

$$x - x' = -\xi, \quad dx' = d\xi$$

получаем следующее соотношение Френеля — Фурье с учетом (2.3.17):

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(x + \xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} z(x + \xi) f(-\xi) d\xi = \\ &= \omega_0 \cdot 2\pi \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0^2(x+\xi)^2} f(-\xi) d\xi = \\ &= \omega_0 \cdot 2\pi \sqrt{2} \cdot e^{i\omega_0^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(-\xi) e^{i\omega_0^2 \xi^2} e^{i2\omega_0^2 x \xi} d\xi = \\ &= 2\pi e^{i\omega_0^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(-\xi) z(\xi) e^{i2\omega_0^2 x \xi} d\xi = \\ &= e^{i\omega_0^2 x^2} \{F(-2\omega_0^2 x) \otimes Z(2\omega_0^2 x)\}. \quad (2.27.2) \end{aligned}$$

В последнем шаге использовалась обратная теорема о свертке (2.6.12).

Далее находим

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x) = e^{i\omega_0^2 x^2} \left\{ F(-2\omega_0^2 x) \otimes \sqrt{2\pi i} \cdot \exp\left(-i \frac{4\omega_0^4 x^2}{4\omega_0^2}\right) \right\}, \quad (2.27.3)$$

или окончательно

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x) = \frac{\sqrt{2\pi i}}{2\omega_0^2} z(x) \{F(-2\omega_0^2 x) \otimes z^*(x)\}. \quad (2.27.4)$$

Аналогичное соотношение получаем для свертки фурье-образа исходной функции с функцией Френеля:

$$\Psi(x) = F(x) \otimes z^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \frac{1}{2\omega_0^2} z^*(x) [f(-2\omega_0^2 x) \otimes z(x)]. \quad (2.27.5)$$

Если далее учесть, что

$$\left. \begin{aligned} z(x) &= \omega_0 \sqrt{\frac{i}{\pi}} Z^*(2\omega_0^2 x), \\ z^*(x) &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\pi i}} Z(2\omega_0^2 x), \\ |z(x)|^2 &= \frac{\omega_0^2}{\pi} |Z(2\omega_0^2 x)|^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.27.6)$$



то соотношение (2.27.4) можно представить в другом виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Psi(2\omega_0^2 x) = f(x) \otimes z(x) = \\ &= \sqrt{\frac{i}{2\pi}} Z^*(2\omega_0^2 x) [F(-2\omega_0^2 x) \otimes Z(2\omega_0^2 x)]. \end{aligned} \quad (2.27.7)$$

Интерес представляет также следующее выражение:

$$f(x) z_1(x) \otimes z_2(x) = \frac{\sqrt{2\pi i}}{2\omega_2 \omega_{12}} z_1(x) [F(-2\omega_0^2 x) \otimes z_2(x)], \quad (2.27.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z_1(x) &= \omega_1 \sqrt{2} \cdot e^{i\omega_1^2 x^2}, \\ z_2(x) &= \omega_2 \sqrt{2} \cdot e^{i\omega_2^2 x^2}, \\ \omega_{12} &= \frac{\omega_2^2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.27.9)$$

или

$$\begin{aligned} f(x) z_1(x) \otimes z_2(x) &= \\ &= \frac{1}{2\omega_1 \omega_2} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \exp i \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} x^2 \left[ f\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} x\right) \otimes \exp i \frac{\omega_2^4}{\omega_1^2 + \omega_2^2} x^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.27.10)$$

Соотношения (2.27.4) и (2.27.7) широко применяются при решении различных задач дифракций Френеля в оптике и в голографии. В частности, их можно с успехом применить для нахождения френелевского образа произведения двух функций. Пусть, например,

$$f(x) = f_1(x) f_2(x). \quad (2.27.11)$$

Тогда

$$F(\omega) = \hat{\mathfrak{F}}[f_1(x) f_2(x)] = F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)$$

и

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} Z^*(2\omega_0^2 x) [F_1(-2\omega_0^2 x) \otimes F_2(-2\omega_0^2 x) \otimes Z(2\omega_0^2 x)]. \quad (2.27.12)$$

Френелевский образ  $\Phi(x)$  произведения двух функций выражается соотношением (2.27.12) в координатах Фурье  $\omega = 2\omega_0^2 x$ . Можно привести другую форму записи:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= Z^*(2\omega_0^2 x) \{F_2(-2\omega_0^2 x) \otimes [\Psi_1(2\omega_0^2 x) \cdot Z(2\omega_0^2 x)]\} = \\ &= Z^*(2\omega_0^2 x) \{F_1(-2\omega_0^2 x) \otimes [\Psi_2(2\omega_0^2 x) \cdot Z(2\omega_0^2 x)]\}, \end{aligned} \quad (2.27.13)$$

где

$$\Psi_{1,2}(2\omega_0^2 x) = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} Z^*(2\omega_0^2 x) [F_{1,2}(-2\omega_0^2 x) \otimes Z(2\omega_0^2 x)]. \quad (2.27.14)$$

Уравнения (2.27.12) и (2.27.14) имеют большое прикладное значение и позволяют найти френелевский образ сложных предметов.

Все соотношения данного параграфа можно обобщить на случай многих переменных.

Соотношение Френеля — Фурье (2.27.4) имеет наиболее простой вид при  $2\omega_0^2 = 1$ :

$$\Phi(x) = e^{i\frac{x^2}{2}} [F(-x) \otimes \sqrt{2\pi i} e^{-i\frac{x^2}{2}}], \quad (2.27.15)$$

или, иначе,

$$\frac{\Phi(x) e^{-i\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi i}} = F(-x) \otimes e^{-i\frac{x^2}{2}}. \quad (2.27.16)$$

Аналогично можно выразить фурье-образ функции  $f(x)$ , используя операцию свертки с функцией Френеля. Фурье-образ функции  $f(x)$  равен

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (2.27.17)$$

После тождественных преобразований получаем

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int f(x) e^{\frac{i}{2}(\omega-x)^2} e^{-i\frac{\omega^2}{2}} e^{-i\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= e^{-i\frac{\omega^2}{2}} \int f(x) e^{-i\frac{x^2}{2}} e^{i\frac{(\omega-x)^2}{2}} dx = e^{-i\frac{\omega^2}{2}} \{[f(x) e^{-i\frac{x^2}{2}}] \otimes e^{i\frac{x^2}{2}}\}(\omega). \end{aligned} \quad (2.27.18)$$

Если обозначить

$$z_0(x) = z(x), \quad \text{при } \omega_0^2 = 1/2, \quad (2.27.19)$$

то (2.27.18) запишется в следующем виде:

$$F(\omega) = z_0^*(\omega) \{[f(x) z_0^*(x)] \otimes z_0(x)\}(\omega). \quad (2.27.20)$$

Осуществив преобразование Френеля над равенством (2.27.20), получим

$$F(\omega) \otimes z_0(\omega) = \{[f(x) z_0^*(x)] \otimes z_0(x)\}(\omega) \cdot \delta(\omega), \quad (2.27.21)$$

или, в интегральном виде,

$$\int F(\omega) \otimes z_0(\omega) d\omega = \{[f(x) z_0^*(x)] \otimes z_0(x)\}_{\omega=0}. \quad (2.27.22)$$

§ 2-28. Сандвич Френеля

Прекрасную иллюстрацию физического смысла соотношения Фурье — Френеля (2.27.20), которое можно кратко записать в виде

$$F = z_0^* [(f \cdot z_0^*) \otimes z_0],$$

дает оптическое корреляционное устройство, работающее при некогерентном и некогерентном освещении. Принцип действия подобного коррелятора уже был рассмотрен в § 2-9.

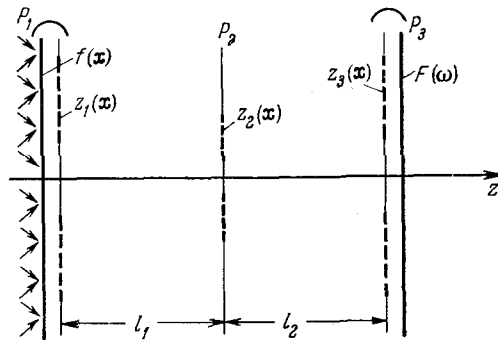


Рис. 2.45. Сандвич Френеля, осуществляющий преобразование Фурье, работает по принципу оптического корреляционного устройства при некогерентном освещении. Исходный двумерный сигнал в виде транспаранта  $f(x)$  устанавливается в плоскости  $P_1$  вплотную к первой зонной пластинке  $z_1(x)$ . В плоскости  $P_2$  устанавливается вторая зонная пластинка  $z_2(x)$ , уменьшенная в размере в отношении  $l_1/(l_1 + l_2)$ . Перед выходной плоскостью  $P_3$  устанавливается третья зонная пластинка  $z_3(x)$ , за которой отображается фурье-образ  $F(\omega)$  исходной функции  $f(x)$ .

Описываемое здесь устройство, получившее название сандвича Френеля, изображено на рис. 2.45.

Транспарант с исходной функцией  $f(x)$  устанавливается в плоскости  $P_1$ , освещенной диффузным некогерентным светом. Первая операция — умножение функции  $f$  на  $z_0^*$  — осуществляется с помощью функции Френеля, которая наносится на транспарант, располагаемый в плоскости  $P_1$  в контакте с транспарантом, где нанесена функция  $f(x)$ . Сандвич Френеля действует как коррелятор, не имеющий линз. В простейшем случае расстояния  $l_1$  и  $l_2$  можно выбрать равными,  $l_1 = l_2 = l$ , и тогда на втором транспаранте, устанавливаемом в плоскости  $P_2$ , функция Френеля должна быть вдвое мельче, чем функция Френеля, заданная в плоскости  $P_1$ .

В плоскости  $P_3$  отображается функция, равная свертке

$$(f \cdot z_0^*) \otimes z_0.$$

Последняя операция — умножение на функцию  $z_0$  — осуществляется с помощью транспаранта, устанавливаемого в плоскости  $P_3$  непосредственно перед фотопластинкой. При этом масштаб функции Френеля должен быть прежним. В результате всех операций получается фурье-образ  $F(\omega)$  исходной функции  $f(x)$ .

Сэндвич Френеля, как и корреляторы, описываемые в § 2-9, имеет в значительной степени только академический интерес, хотя не исключена возможность успешного использования такого устройства. Основная причина ограниченного применения заключается в том, что как исходная функция  $f(x)$ , так и функция Френеля  $z_0(x)$  должны быть униполярными функциями. Кроме того, обычно вместо функции Френеля используют ее знаковый образ, который в униполярном представлении описывается функцией

$$z_{\text{зн}}(x) = \text{sgn} z_0(x) + 1 \quad (2.28.1)$$

и имеет вид черно-белых колец. Очевидно, что по тем же причинам функция  $f(x)$  должна быть действительной, а не комплексной.

### § 2-29. Схема Биккеля — Бомана

Рассмотрим еще одну возможную схему устройства, где используется соотношение между преобразованиями Фурье и Френеля. Это — система Биккеля — Бомана, показанная схематически на рис. 2.46. С помощью ее

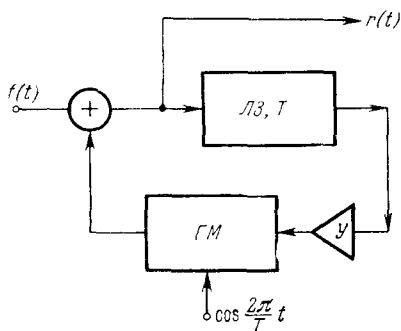


Рис. 2.46. Схема Биккеля — Бомана с циркуляторной памятью и гетеродина-модулятором.

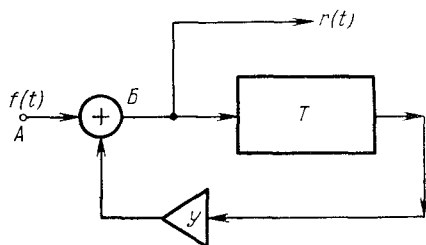


Рис. 2.47. Схема работы упрощенной цепи циркуляторной памяти при подаче на вход синусоиды постоянной амплитуды. Длительность линии задержки равна  $T$  сек.

можно осуществлять преобразование Фурье при непрерывном поступлении информации. По замыслу синтез Фурье производится в цепи линии задержки ЛЗ. Основным узлом этой системы является циркуляторная петля памяти, состоящая, кроме линии задержки ЛЗ длительностью  $T$  сек, из усилителя  $У$ , поддерживающего коэффициент усиления петли равным единице, и гетеродина-модулятора  $ГМ$ .

Чтобы представить себе принцип действия такого устройства и его оптический аналог, рассмотрим сначала работу простейшей цепи циркуляторной памяти (рис. 2.47). Пусть входной сигнал имеет вид синусоиды постоянной амплитуды

$$f(t) = a_0 \cos k \frac{2\pi}{T} t \quad (t > 0), \quad (2.29.1)$$

где  $k$  — целое число, а  $T$  — длительность линии задержки. Такой сигнал за  $T$  сек совершит  $k$  синусоидальных колебаний и прибедет в точку  $B$  в фазе с  $(k + 1)$ -волной. Амплитуда на

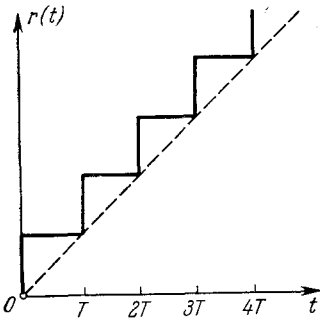


Рис. 2.48. Ступенчатая зависимость амплитуды на выходе при подаче на вход синусоиды постоянной амплитуды.

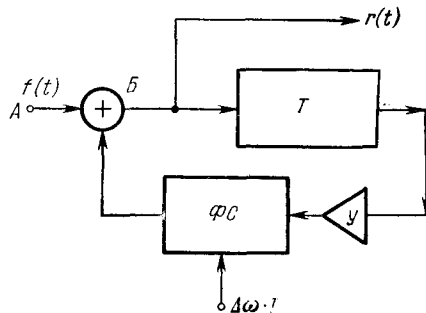


Рис. 2.49. Схема Биккеля — Бомана с фазосдвигающим элементом  $\Phi C$  в петле памяти. Накопленный сдвиг фазы возрастает линейно во времени.

выходе будет возрастать ступенчато (рис. 2.48). Отклик такой цепи в пределе можно описать линейной функцией времени.

Если же входной сигнал имеет частоту

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} k_1, \quad (2.29.2)$$

отличающуюся от целого значения  $2\pi/T$ , то сложение сигналов на входе линии задержки в точке  $B$  происходит векторно и отклик интегральной цепи будет меньше, чем при синхронизации. Однако входной синусоидальный сигнал в петле памяти можно преобразовать таким образом, что линейное синфазное сложение всех синусоид, присутствующих в точке  $B$ , будет осуществляться один раз каждые  $T$  сек; при этом будет существовать такое соотношение между частотой гармоники и моментом времени, при котором сложение синусоид происходит синфазно.

Перейдем теперь к более сложной системе, изображенной на рис. 2.49. В цепь петли памяти введен элемент  $\Phi C$ , который осуществляет сдвиг фазы. Пусть входной сигнал равен

$$f(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.29.3)$$

где  $\omega$  — частота сигнала, а  $\alpha$  — произвольная фаза. Сигнал, поступающий в точку  $B$  после прохождения цепи петли задержки  $T$ , имеет вид

$$f(t - T) = a_0 \cos(\omega t + \alpha - \omega T), \quad (2.29.4)$$

т. е. накопленный сдвиг фазы равен

$$\Delta\Phi = \omega T. \quad (2.29.5)$$

Если  $\omega = k(2\pi/T)$ , то в точке  $B$  произойдет синфазное сложение, как уже показано. В общем случае частоту  $\omega$  можно записать так:

$$\omega = k \frac{2\pi}{T} + \Delta\omega \quad \left(0 \leq \Delta\omega \leq \frac{2\pi}{T}\right), \quad (2.29.6)$$

где  $k$  — положительное целое число. Тогда накопленный сдвиг фазы равен

$$\Delta\Phi = k \cdot 2\pi + \Delta\omega T \quad (0 \leq \Delta\omega T \leq 2\pi). \quad (2.29.7)$$

Сигнал с произвольной частотой  $\omega$  удастся проинтегрировать синфазно с помощью петли с линией задержки длительностью  $T$ , если в петлю ввести опережение фазы на  $\Delta\omega T$  радиан. Для того чтобы проинтегрировать синфазно все сигналы с частотами, заполняющими интервал

$$k \frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{(k+1)2\pi}{T}, \quad \Delta\omega_{\text{макс}} = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.29.8)$$

необходимо, чтобы опережение фазы, вводимое блоком  $\Phi C$ , менялось во времени, т. е. блок генерировал функцию Френеля. Тогда момент времени, когда наблюдается синфазное сложение, указывает значение частоты сигнала, поданного на вход. При соблюдении ограничения (2.29.8) это соотношение будет однозначным.

Если сигнал (рис. 2.49) прикладывается в момент  $t = 0$ , то выходной сигнал наблюдается в течение интервала времени, заключенного в пределах

$$NT \leq t < (N+1)T, \quad (2.29.9)$$

где  $N$  — полное число повторных прохождений петли сигналом  $f(t)$ . Чем больше число  $N$ , тем острее разрешение системы, описываемое выражением  $\sin N\omega / \sin \omega$  (рис. 2.50). Система одновременного анализа сигнала в некотором интервале частот  $\Delta\omega$  путем монохроматического пропускания его через петлеобразный анализатор приводит, естественно, к ухудшению соотношения между сигналом и шумом.

Рассмотрим теперь оптический аналог системы Биккеля — Бомана. Представим, что ось времени  $t$  или же координаты  $x$  раз-

бита на равные интервалы длительности  $T$ , где аналогом  $T$  является время запаздывания в цепи задержки в схеме Биккеля — Бомана. Число этих интервалов равно  $N$ , где  $N$  — число проходов через петлю задержки. Входная функция  $f(x)$  аппроксимируется ступенчатой функцией, так что

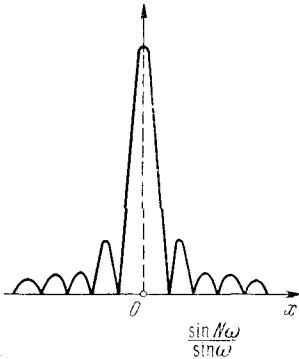


Рис. 2.50. Отклик системы Биккеля — Бомана, осуществляющий преобразование Фурье при непрерывном поступлении информации на синусоиду при  $N$  полных повторных проходах сигнала через петлю памяти.

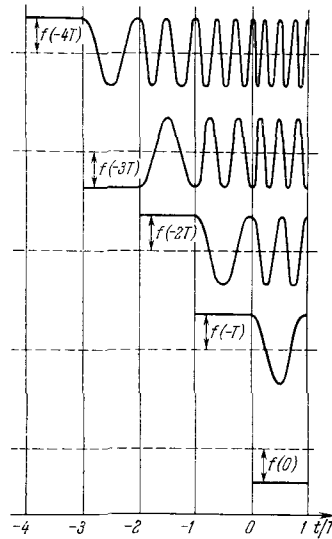


Рис. 2.51. Оптический аналог системы Биккеля — Бомана. Входная функция  $f(x)$  аппроксимируется ступенчатой функцией на ступеньках, длина которых равна периоду  $T$ . Каждая ступенька размывается в функцию Френеля. Результат такой свертки простирается на участке, равном многим периодам  $T$ . К концу цикла суммы значений функций по вертикали в соответствующих колонках отображают фурье-образ сигнала.

среднее значение  $f(x)$  в каждом из интервалов равно значению на ступеньке. Каждое из этих значений ступенчатой функции размывается в функцию Френеля с помощью процесса свертки. На рис. 2.51 последовательные значения

$$f(t_n) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) \tag{2.29.10}$$

показаны для простоты в последовательных рядах. Здесь диапазон частот  $\Delta\omega$  простирается от нулевой частоты до некоторой максимальной. К концу цикла, т. е. в последней колонке, отображается фурье-образ или спектр сигнала.

Оптические методы осуществления преобразования Френеля рассматриваются в § 6-27, посвященном голограмме интенсивности при пространственно некогерентном освещении. В § 6-28 описывается метод синтеза функций Френеля при некогерентном освещении.

### § 2-30. Дополнительный параметр в преобразовании Френеля

Кроме основного параметра, выступающего в преобразовании Френеля, — смещения функции Френеля — существует еще один параметр, а именно масштаб функции Френеля, определяемый величиной  $\omega_0$ . До сих пор этот параметр рассматривался как фиксированный. Возможна, однако, двухпараметрическая последовательность функций Френеля, которая схематически показана на рис. 2.52. Каждый ряд содержит функции Френеля в разных масштабах (различие  $\omega_0$ ), но при одном и том же положении центра функции Френеля. Если осуществить кросс-корреляцию между функциями Френеля с разными  $\omega_0$ , то обнаружится ярко выраженный максимум для одного и того же масштаба картин в каждом ряду.

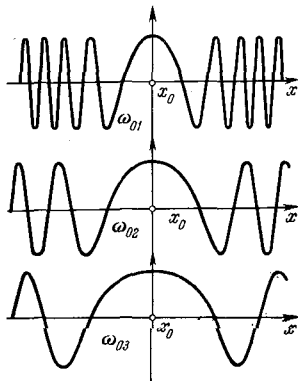


Рис. 2.52. Графики функции Френеля в разных масштабах.

Действительно, для двумерной функции

$$z(x; \omega_0) = 2\omega_0^2 e^{i\omega_0^2 x^2} \quad (2.30.1)$$

имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} z(x; \omega_0) z^*(x; \omega'_0) dx = 4\omega_0^2 \omega'^2_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2(\omega_0^2 - \omega'^2_0)} dx = \\ &= 4\omega_0^2 \omega'^2_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2(\omega_0^2 - \omega'^2_0)} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2(\omega_0^2 - \omega'^2_0)} dy = \\ &= 4\omega_0^2 \omega'^2_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2(\omega_0^2 - \omega'^2_0)} dx \right]^2 = \frac{4\omega_0^2 \omega'^2_0 \pi i}{\omega_0^2 - \omega'^2_0}. \end{aligned} \quad (2.30.2)$$

Очевидно, что при  $\omega_0 \rightarrow \omega'_0$

$$I \rightarrow 2\pi i \frac{\omega_0^3}{\omega_0 - \omega'_0}. \quad (2.30.3)$$

При дифракции Френеля различные масштабы функций Френеля возникают благодаря различным длинам волн либо вследствие различных продольных смещений. Способность отличать различные масштабы функций Френеля эквивалентна фокусирующим свойствам линз.



### § 2-31. Преобразование Дирака и преобразование отсчетов

Как известно, обобщенная функция Дирака  $\delta(x - x_0)$  определяется функционалом

$$\langle \delta(x - x_0), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0).$$

Соотношение

$$g(x) = g(x) \otimes \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \delta(x - \xi) d\xi \quad (2.31.1)$$

задает интегральное преобразование Дирака типа свертки. Функцию  $g(x)$  можно рассматривать как «дираковский образ». В результате преобразования Дирака исходной функции получается значение исходной функции для заданного значения независимой переменной. Совокупность таких значений определяет исходную функцию. Дираковский образ совпадает с исходной функцией. Получается своеобразная тавтология. Однако, несмотря на это, преобразование Дирака имеет вполне определенный физический смысл и описывает идеализированную операцию сканирования или развертки сигнала вдоль координаты  $x$  с помощью бесконечно острого луча.

Если вместо дельта-функции Дирака ввести интегральное ядро вида

$$\frac{\sin \pi \omega_0 x}{\pi x} = \omega_0 \operatorname{sinc} \omega_0 x, \quad (2.31.2)$$

то получим интегральное преобразование вида

$$S(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin \pi \omega_0 (x - \xi)}{\pi (x - \xi)} d\xi = f(x) \otimes \frac{\sin \pi \omega_0 x}{\pi x}, \quad (2.31.3)$$

которое называется *преобразованием отсчетов*, поскольку ядро вида (2.31.2) в радиооптике называется функцией отсчетов. При  $\omega \rightarrow \infty$  функция отсчетов стремится к  $\delta$ -функции:

$$\frac{\sin \omega x}{x} \xrightarrow[\omega \rightarrow \infty]{} \delta(x), \quad \text{а} \quad S(\omega, x) \xrightarrow[\omega \rightarrow \infty]{} f(x). \quad (2.31.4)$$

Преобразование отсчетов (2.31.3) весьма похоже на преобразование Дирака, но, в отличие от последнего, функция  $f(x)$  сканируется не бесконечно узким лучом, а лучом, размытым вдоль координаты  $x$ . При таком преобразовании происходит процесс

сглаживания исходной функции. Интервал  $\Delta x$ , на котором эффективно происходит процесс сглаживания, зависит от  $\omega_0$  — пространственной частоты: чем больше частота  $\omega_0$ , тем уже интервал  $\Delta x$ .

Преобразование отсчетов, таким образом, приводит к обрезанию или сужению эффективного спектра пространственных частот исходного сигнала  $f(x)$ .

Более подробно свойства преобразования отсчетов (2.31.3) рассматриваются при анализе информационной структуры оптического сигнала в главе 5. Ограничившись пока этими замечаниями, сделаем краткий обзор всех рассмотренных выше интегральных преобразований в оптике.

### § 2-32. Сопоставление интегральных преобразований в оптике

Рассмотрим иллюстративные схемы, поясняющие принцип действия каждого из интегральных преобразований.

На рис. 2.53 дано преобразование Дирака. Дираковский образ состоит из последовательности дельта-функций, умноженных на значение исходной функции в соответствующих точках.

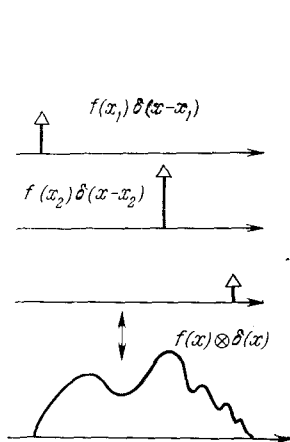


Рис. 2.53. Иллюстративная схема, поясняющая интегральное преобразование Дирака. Дираковский образ состоит из последовательности дельта-функций, ординаты которых равны значению исходной функции в соответствующих точках.

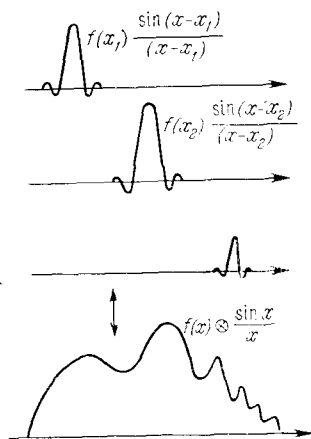


Рис. 2.54. Схема, поясняющая преобразование отсчетов.

На рис. 2.54 дано преобразование отсчетов. Отображается совокупность средних значений исходной функции на интервале эффективной длины  $\Delta x \sim 1/\omega_0$ . Происходит сглаживание функ-

ции. Преобразование в общем случае — необратимое. Однако если исходный сигнал имеет максимальную пространственную частоту  $\omega_{\text{макс}}$ , то при  $\omega_0 \gg \omega_{\text{макс}}$  преобразование становится обратимым.

На рис. 2.55 дано преобразование Фурье. Исходная функция представляется в виде бесконечной суммы многих гармоник последовательно возрастающих частот. Фурье-образ исходной функции совсем не похож на исходную функцию, однако изображает ее однозначно, так что при повторном преобразовании Фурье исходная функция полностью восстанавливается.

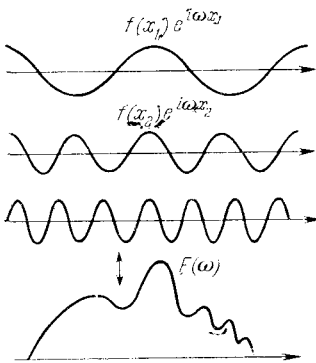


Рис. 2.55. Схема преобразования Фурье. Исходная функция изображается в виде бесконечной совокупности гармоник последовательно возрастающих частот соответствующих амплитуд.

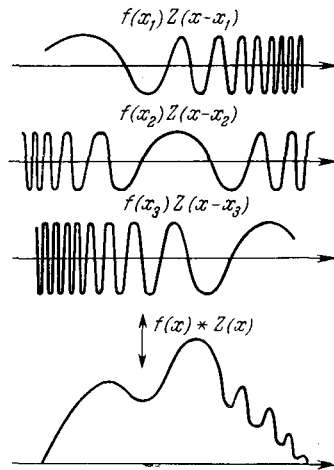


Рис. 2.56. Схема преобразования Френеля. Исходная функция изображается в виде бесконечной последовательности смещенных друг относительно друга картин Френеля соответствующих амплитуд.

На рис. 2.56 дано преобразование Френеля. Исходная функция здесь преобразуется в сумму последовательно смещенных картин Френеля соответствующей интенсивности. Каждая компонента френелевского образа определяется операцией свертки исходной функции с функцией Френеля. Френелевский образ редко похож на исходную функцию.

Подобно преобразованию Фурье, преобразование Френеля дает однозначное восстановление исходной функции: при повторном преобразовании Френеля исходная функция полностью восстанавливается.

Преобразования Дирака, Фурье и Френеля являются взаимно обратными интегральными преобразованиями. Эти свойства, однако, возникают по разным причинам.

В случае преобразования Фурье это — результат того, что гармонические функции  $e^{i\omega x}$  являются взаимно ортогональными:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{i\omega' x} dx = \delta(\omega - \omega'). \quad (2.32.1)$$

В случае же преобразования Дирака это — следствие того, что свертка двух дельта-функций Дирака равна дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = \delta(x) \otimes \delta(x) = \delta(x). \quad (2.32.2)$$

Аналогично, при преобразовании Френеля свертка двух функций Френеля

$$z(x) \otimes z^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0^2 \xi^2} e^{i\omega_0^2 (x-\xi)^2} d\xi = \delta(x)$$

также равна дельта-функции Дирака.

В теории интегральных уравнений встречается проблема разрешения уравнений вида

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) K(x, \omega) dx. \quad (2.32.3)$$

В результате такого интегрального преобразования исходная функция  $f(x)$  переходит в интегральный образ  $F(\omega)$ . Здесь  $K(x, \omega)$  — ядро интегрального преобразования, зависящее от параметра  $\omega$ .

Задача ставится так: по интегральному образу  $F(\omega)$  найти прообраз  $f(x)$ , т. е. исходную функцию. Решение сводится к нахождению интегрального ядра  $H(x, \omega)$ , с помощью которого можно осуществить обратный переход к прообразу

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) H(\omega, x) d\omega. \quad (2.32.4)$$

Существует класс интегральных ядер  $K(x, \omega)$ , которые обладают таким свойством, что  $H = K$  или  $H = K^*$ , т. е. прямое и обратное преобразования осуществляются с помощью одного и того же интегрального ядра. Интегральные ядра, обладающие таким свойством, называются *ядрами Фурье*.

Каким же требованиям должно удовлетворять ядро  $K(x, \omega)$ , чтобы входить в класс ядер Фурье? Ответ получен для класса интегральных ядер  $K(x, \omega)$ , имеющих вид

$$K(x, \omega) = K(x\omega), \quad (2.32.5)$$

т. е. когда параметр  $\omega$  и координата  $x$  входят в виде сомножителей и ядро  $K$  зависит фактически от одной переменной. Согласно общей теореме для этого необходимо, чтобы интегральные

преобразования Меллина ядра  $K$

$$\left. \begin{aligned} K(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x) x^{s-1} dx, \\ K(1-s) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x) x^{-s-2} dx \end{aligned} \right\} \quad (2.32.6)$$

удовлетворяли соотношению

$$K(s) K(1-s) = 1. \quad (2.32.7)$$

Эта теорема не распространяется на случай, когда интегральное ядро  $K(x, \omega)$  имеет вид

$$K(x, \omega) = K(x - \omega), \quad (2.32.8)$$

т. е. когда параметр  $\omega$  входит в аргумент функции  $K$  в виде разности с координатой  $x$ . Общей теоремы для этого случая, охватывающего класс преобразований свертки, не существует.

Достаточным условием обратимости интегрального преобразования свертки

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) K(x - \omega) dx = f(x) \otimes K(x) \quad (2.32.9)$$

является условие

$$K^*(x) \otimes K(x) = \delta(x), \quad (2.32.10)$$

т. е. свертка интегрального ядра (2.32.8) с самим собой равна дельта-функции Дирака.

Из класса интегральных операций типа свертки (2.32.9) до сих пор рассматривались только преобразование Дирака и преобразование Френеля. Этот класс можно расширить. Например, следует упомянуть преобразования Голея и Жирара, которые используются в спектроскопии и, несомненно, имеют прямое отношение к голографии. Читатель также может изобрести свое, новое, преобразование, удовлетворяющее требованию (2.32.10). Рецепт введения новых интегральных преобразований типа свертки задан соотношением (2.32.10) и весьма прост: свертка ядра  $K(x + \omega)$  с самим собой должна равняться дельта-функции. Эти возможности начинают использовать на практике.

Для того чтобы ядро  $K(x - \omega)$  могло обладать этим свойством, оно должно содержать достаточно высокие пространственные частоты. Согласно теореме Винера — Хинчина любой белый шум содержит широкий спектр частот и по этому признаку может быть взят в качестве взаимно обратного ядра  $K(x - \omega)$ .

Таким образом, любой импульс «шипения», являющийся частным случаем белого шума, годится в качестве преобразующего ядра. Необходимо, однако, помнить, что при повторном преобразовании с целью восстановления исходной функции

необходимо использовать тот же самый импульс «шипения» или, более точно, комплексно-сопряженный импульс.

Резюмируя, можно сказать, что наличие в преобразующем ядре высоких пространственных частот является необходимым и достаточным условием для достоверного кодирования и декодирования оптических сигналов. В противном случае, если пространственные частоты обрываются раньше максимальной пространственной частоты, содержащейся в оптическом сигнале, в процессе декодирования происходит безвозвратное искажение исходного сигнала, что, например, имеет место в преобразовании отсчетов, не согласованном по максимальной частоте с сигналом.

Свойства взаимно обратных интегральных преобразований используются в голографии Фурье и в методах компенсации протяженного источника с целью сохранения высокого пространственного разрешения, в безлинзовой схеме голографии Фурье, а также в спектроскопии Фурье. Интегральные преобразования, рассмотренные в этой главе и обладающие свойством восстанавливать исходный сигнал при повторном преобразовании, дают нам средство для выбора представления, в котором можно задать одну и ту же исходную функцию, т. е. одно и то же сообщение, заданное в виде оптического сигнала. Переход от одного представления к другому осуществляется с помощью линейных преобразований и в этом смысле напоминает различные представления одной и той же системы векторов в некотором многомерном пространстве. Физические свойства векторов при переходе от одной системы координат к другой остаются, разумеется, неизменными — инвариантными относительно любого линейного преобразования.

Рассмотренные выше интегральные преобразования с ядром  $K$  типа Фурье обладают очень важным свойством обратимости. После осуществления повторного преобразования, как правило, определяемого комплексно-сопряженным ядром  $K^*$ , вновь возвращаются к исходной функции, а это означает, что информация, содержащаяся в исходном оптическом сигнале, не искажается в результате осуществления взаимно обратных преобразований, таких, как преобразование Фурье, преобразование Гильберта, преобразование Френеля, линейная модуляция и линейная демодуляция, а также любых их сочетаний. Таким образом, процесс повторных преобразований происходит по цепочке, изображенной схематически на рис. 2.57. Начало цепочки таких преобразований может быть расположено в любом месте и не обязательно должно совпадать со ступенью, соответствующей заданию исходного оптического сигнала. В устройство обработки оптических сигналов с использованием голографического принципа можно вводить не только исходный сигнал, но и любой его образ класса Фурье.

Заканчивая главу о свойствах оптического сигнала, рассматриваемых применительно к когерентным системам обработки оптических сигналов, в частности голографии, необходимо отметить, что, в отличие от радиосигнала, оптический сигнал, переносимый информацией в когерентных оптических сигналах, обладает рядом особенностей, вызванных тем, что когерентная оптическая

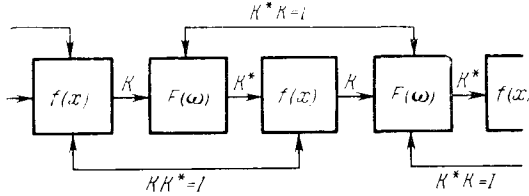


Рис. 2.57. Блок-схема последовательности взаимно обратных интегральных преобразований. Цепочка из двух или четного числа последовательных преобразований приводит к исходной функции. Исходную информацию можно задать либо в виде исходной функции  $f(x)$ , либо в виде интегрального образа  $F(\omega)$ .

система даже в отсутствие шумов представляет собой более сложную систему, чем узлы аппаратуры, используемые в классической радиотехнике. Причина, которая приводит к качественному различию между ними, связана с тем, что излучение, используемое в когерентной оптике, как правило, не является единым и непрерывным процессом, и это обусловлено природой процессов испускания света атомами. В результате случайные функции приходится вводить на гораздо более ранней стадии, чем это требуется, когда учитывают шумов. Возникает такое сложное и многогранное понятие, как когерентность света.

Все эти вопросы рассматриваются в главах 3 и 4, затем в главе 5 обсуждается информационная структура оптического сигнала и связь между разрешающей способностью системы, когерентностью света и информацией, переносимой оптическим сигналом.

## СЛУЧАЙНЫЙ СИГНАЛ

## § 3-1. Случайная функция и случайный сигнал

В предыдущей главе были рассмотрены основные свойства оптического сигнала, несущего определенное сообщение. Такой оптический сигнал рассматривается как детерминированный сигнал, который можно однозначно задать в пространстве и времени. В реальных системах передача и прием сообщения происходят на фоне случайных помех, в результате чего возникают неконтролируемые отклонения фактического сигнала от заданного значения. Сигнал, который появляется на приемном конце, уже нельзя рассматривать как детерминированный оптический сигнал. В общем случае это — случайный сигнал. В ряде частных случаев — наложение детерминированного сигнала и случайного сигнала.

В данной главе будут рассмотрены свойства и методы описания случайных процессов, приемы выделения детерминированного сигнала и способы подавления паразитных случайных помех.

Природа и техника изобилуют примерами случайных процессов. Простейшие из них — это акты испускания квантов света отдельными атомами. Процесс излучения разыгрывается в условиях, когда невозможно указать моменты излучения, направление импульса испущенных квантов и других параметров, определяющих это явление. Наблюдатель видит некоторую усредненную картину электромагнитного поля и, как правило, зная протекание процесса в прошлом, не может точно предсказать развитие процесса в будущем.

Среди многочисленного класса совершенно недетерминированных процессов можно выделить такие случайные процессы, которые допускают детерминистско-статистическое описание. Эти процессы подчиняются вполне определенным статистическим закономерностям. Функции, описывающие случайный процесс, называются *случайными функциями*. Эти функции могут зависеть от нескольких аргументов, в частности пространственных координат и времени.

*Случайным сигналом* называем комплексную амплитуду электромагнитных колебаний, или огибающую случайной функции, описывающую данный случайный электромагнитный процесс. Случайные сигналы, как и оптический сигнал, отвечают классу квазимонохроматических процессов. Случайная квазимонохроматическая функция  $V(\mathbf{r}, t)$  и случайный сигнал  $v(\mathbf{r}, t)$  связаны



соотношением

$$V(\mathbf{r}, t) = v(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.1.1)$$

где  $\omega_0$  — средняя частота квазимонохроматической случайной функции.

Для того чтобы исчерпывающе охарактеризовать произвольный случайный процесс, необходимо задать бесконечную совокупность функций  $V_i(\mathbf{r}, t)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), являющихся всеми возможными реализациями изучаемого процесса. Эти реализации, наблюдаемые в одних и тех же условиях опыта, различаются

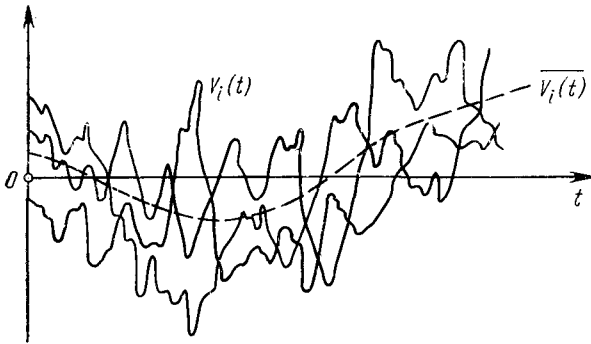


Рис. 3.1. Усредненная функция  $\overline{V_i(t)}$  многих реализаций  $V_i(t)$  случайного процесса.

между собой, и в этом проявляется случайный характер изучаемого процесса. Очевидно, что в практических приложениях такое описание случайного процесса непригодно ввиду его исключительной громоздкости.

Также неудобным и громоздким оказывается метод, заключающийся в том, что вместо совокупности случайных реализаций  $V_i(\mathbf{r}, t)$  вводятся функции распределения этих значений для всех возможных значений аргументов  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$ ,  $t = t_k$ .

Наиболее удобный метод описания случайного процесса состоит в том, что бесконечная совокупность реализаций случайного процесса заменяется несколькими усредненными характеристиками: *средним значением* функций, или математическим ожиданием, *дисперсией* и *корреляционными моментами различных порядков*.

Математическое ожидание простейшего случайного процесса, описываемого случайной функцией  $V_i(t)$ , зависящей только от времени, представляет собой усредненную функцию  $\overline{V_i(t)}$ , около которой группируются все реализации случайного процесса  $V_i(t)$  (рис. 3.1). Мерой рассеяния, или разброса, значений случайной функции  $V_i(t)$  относительно усредненной функции  $\overline{V_i(t)}$  служит дисперсия, или среднеквадратичное отклонение всевозможных реализаций от усредненной функции.

Однако для характеристики истинного разброса случайной функции недостаточно знать только дисперсию случайной функции. Так, например, возможные реализации, приведенные в виде кривых на рис. 3.2, существенно отличаются друг от друга, хотя математические ожидания и дисперсии у этих двух случайных процессов одинаковы. В первом случае зависимость между значениями случайной функции, взятыми при двух произвольных значениях независимой переменной  $t$ , гораздо более слабая, чем во втором случае. Если бы нам пришлось дифференцировать или интегрировать по  $t$  эти два случайных процесса или же осуществлять какие-либо другие линейные преобразования, то в этих двух случаях были бы получены совершенно различные результаты на выходе, несмотря на то что математические ожидания этих двух случайных процессов одинаковы.

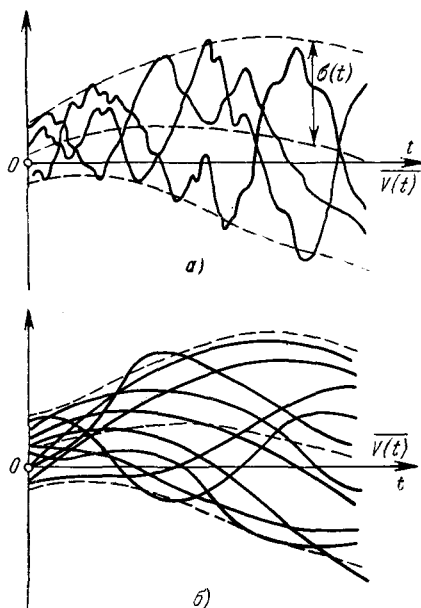


Рис. 3.2. Пример двух случайных процессов (а) и (б), имеющих одинаковые усредненные функции  $\overline{V}(t)$  и одинаковые дисперсии, но обладающих различными корреляционными моментами.

необходимо кроме математического ожидания и дисперсии знать так называемые корреляционные моменты.

Простейший корреляционный момент — это корреляция второго порядка, равная

$$K(t_1, t_2) = \overline{V_i(t_1) V_i^*(t_2)}. \quad (3.1.2)$$

Здесь усреднение проводится по всем возможным реализациям. Кроме того, возможны корреляционные моменты более высоких порядков, например:

$$K(t_1, t_2, \dots, t_n) = \overline{V_i(t_1) V_i^*(t_2) \dots V_i^*(t_n)}. \quad (3.1.3)$$

Если бы для описания случайного процесса потребовались корреляционные моменты всех порядков, от первого до какого-то очень высокого, то и здесь не было бы никаких преимуществ. Однако в большинстве встречающихся случаев, особенно в линейных системах, описание случайного процесса существенно упро-

щается и корреляционные моменты выше второго (3.1.2) либо выражаются через корреляционные моменты второго порядка, либо не наблюдаются вообще. Рассмотрение тех опытов в оптике, которые описываются корреляционными моментами высших порядков, выходит за рамки этой книги. Следует, однако, отметить, что такое компактное описание случайного процесса возможно при условии, если случайный процесс является стационарным и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

### § 3-2. Стационарный случайный сигнал

Случайный сигнал  $v_i(\mathbf{r}, t)$  называется *стационарным*, если все его статистические свойства, описываемые, например, с помощью корреляционных моментов, инвариантны относительно произвольного изменения начала отсчета времени. Стационарный случайный сигнал описывает установившийся случайный квазимонохроматический процесс, например излучение света атомами, находящимися длительное время в строго постоянных условиях.

Если случайный процесс стационарен, то корреляционный момент  $K(t_1, t_2)$  инвариантен относительно произвольного изменения отсчета времени, т. е.

$$K(t_1, t_2) = K(t_1 + t_0, t_2 + t_0), \quad (3.2.1)$$

где  $t_0$  — произвольное число, определяющее новый отсчет времени. Если взять  $t_0 = -t_1$ , то

$$K(t_1, t_2) = K(0, t_2 - t_1) \equiv \Gamma(\tau), \quad (3.2.2)$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ . Таким образом, корреляционный момент второго порядка стационарного случайного процесса зависит только от одной переменной,  $\tau$ , — разности между моментами времени  $t_1$  и  $t_2$ . Аналогичными свойствами должны обладать корреляционные моменты более высоких порядков.

Можно, однако, привести примеры случайных функций, у которых корреляционные моменты второго порядка стационарны в смысле (3.2.2), а корреляционные моменты более высокого порядка не инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени. Классическим примером такого типа является случайная функция

$$x(t) = X(t) \cos \omega t + Y(t) \sin \omega t, \quad (3.2.3)$$

где случайные сигналы  $X(t)$  и  $Y(t)$  не зависят друг от друга, но обладают одинаковыми математическими ожиданиями

$$\overline{X_i(t)} = \overline{Y_i(t)} = 0 \quad (3.2.4)$$

и дисперсиями

$$\overline{X_i^2(t)} = \overline{Y_i^2(t)} = D^2. \quad (3.2.5)$$

Легко проверить, что корреляционный момент второго порядка случайного процесса (3.2.3) зависит только от разности  $t_2 - t_1 = \tau$ :

$$\overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{X^2(t)} \cos \omega(t_2 - t_1) = D^2 \cos \omega\tau. \quad (3.2.6)$$

В то же время усредненная величина  $\overline{X^4(t)}$ , которая появится при вычислении корреляционных моментов четвертого порядка, зависит в общем виде не только от разности  $\tau = t_2 - t_1$ , но также и от моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  непосредственно. И только в частных случаях эта зависимость исчезает.

Случайная функция  $V(t)$  называется *стационарной в широком смысле*, если ее математическое ожидание постоянно, а корреляционный момент второго порядка зависит только от разности времени  $\tau = t_2 - t_1$ . Случайная функция  $V(t)$  называется *стационарной в узком смысле*, если корреляционные моменты любого высокого порядка  $n$  зависят только от интервалов времени  $t_2 - t_1 = \tau_1$ ,  $t_3 - t_1 = \tau_2$ ,  $t_n - t_1 = \tau_{n-1}$  и не зависят от абсолютного значения моментов времени  $t_n$ .

Практическое значение имеет класс случайных функций, стационарных в широком смысле. Причина этого состоит в том, что корреляционные моменты второго порядка имеют энергетический смысл. В частности, в оптике при рассмотрении интерференционных явлений, а также в голографии возникают корреляционные функции второго порядка. При описании прохождения случайных сигналов через линейные фильтры корреляционные моменты выше второго порядка отсутствуют.

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если операцию усреднения по множеству всех реализаций для заданного, а следовательно, любого момента времени можно заменить операцией усреднения по времени для одной реализации.

Таким образом, в случае эргодического стационарного процесса среднее по множеству реализаций равно среднему по времени для произвольно выбранной реализации  $V_i(t)$ :

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_i(t) V_i(t + \tau) dt, \quad (3.2.7)$$

а результат такого усреднения не зависит от того, какая именно реализация была выбрана. Это правило было использовано выше при вычислении средних значений сигналов  $X(t)$  и  $Y(t)$  в (3.2.4) и (3.2.5).

### § 3.3. Функции корреляции

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств интегральной операции вида (3.2.7). Напомним понятие функции корреляции. Если задана исходная функция  $f_1(t)$ , то *автокорреляцией*

этой функции называется интегральная операция

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1^*(t + \tau) dt. \quad (3.3.1)$$

В отличие от (3.2.7) здесь указаны бесконечные пределы интегрирования, а также комплексное сопряжение второго сомножителя подынтегрального выражения, так как функция  $f_1(t)$  в общем случае является комплексной.

Если заданы две функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , то *кросс-корреляцией* или *перекрестной корреляцией* называется функция

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t + \tau) dt. \quad (3.3.2)$$

Легко видеть, что функции корреляции (3.3.1) и (3.3.2) имеют смысл скалярного произведения соответствующих функций, что позволяет записать эти определения в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \langle f_1(t), f_1^*(t + \tau) \rangle, \\ \varphi_{12}(\tau) &= \langle f_1(t), f_2^*(t + \tau) \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

Напомним, что функция автокорреляции обладает следующим свойством:

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{11}^*(-\tau). \quad (3.3.4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \langle f_1(t), f_1^*(t + \tau) \rangle = \langle f_1(t - \tau), f_1^*(t) \rangle = \\ &= \langle f_1(t), f_1^*(t - \tau) \rangle^* = \varphi_{11}^*(-\tau). \end{aligned}$$

Если  $f_1(t)$  — действительная функция, то

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{11}(-\tau). \quad (3.3.5)$$

Если функция  $f(t)$  действительная, то функция автокорреляции имеет абсолютный максимум при  $\tau = 0$ . Значение функции автокорреляции нигде не превосходит ее значения в начале координат  $\tau = 0$ . Для доказательства рассмотрим очевидное неравенство

$$\langle f(t) + \lambda f(t + \tau), f(t) + \lambda f(t + \tau) \rangle \geq 0, \quad (3.3.6)$$

где  $\lambda$  — любое действительное число. Более подробно это можно записать в виде

$$\langle f(t), f(t) \rangle + 2\lambda \langle f(t + \tau), f(t) \rangle + \lambda^2 \langle f(t), f(t) \rangle \geq 0 \quad (3.3.7)$$

или

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0, \quad (3.3.8)$$

где

$$\begin{aligned} A &= C = \langle f(t), f(t) \rangle = \varphi_{11}(0), \\ B &= \langle f(t), f(t + \tau) \rangle = \varphi_{11}(\tau). \end{aligned}$$

Соотношение (3.3.8) верно для любого  $\lambda$ , в частности для  $\lambda = -1$ . В этом случае

$$\varphi_{11}(0) - 2\varphi_{11}(\tau) + \varphi_{11}(0) = 2|\varphi_{11}(0) - \varphi_{11}(\tau)| \geq 0,$$

откуда

$$\varphi_{11}(\tau) \leq \varphi_{11}(0). \quad (3.3.9)$$

Если же  $f(t)$  — комплексная функция, то

$$|\varphi_{11}(\tau)| \leq \varphi_{11}(0). \quad (3.3.10)$$

Таким образом, функция автокорреляции нигде не превосходит по модулю своего значения в начале координат. Соотношение (3.3.10) имеет очень большое практическое значение, так как позволяет указать место на двухлучевой интерферограмме точки, которая соответствует оптической разности хода, равной нулю. Абсолютный максимум кривой сигнала интерференции всегда располагается при  $\tau = 0$ . Если

$$f_1(t) = x_1(t) + iy_1(t), \quad \text{а} \quad f_2(t) = x_2(t) + iy_2(t),$$

то функцию автокорреляции можно представить в виде

$$\varphi_{f_1 f_2}(\tau) = \varphi_{x_1 x_2}(\tau) + \varphi_{y_1 y_2}(\tau) + i[\varphi_{y_1 x_2}(\tau) - \varphi_{x_1 y_2}(\tau)]. \quad (3.3.11)$$

Если функция  $f(t)$  равна сумме элементарных функций  $f_h(t)$ :

$$f(t) = \sum_h f_h(t), \quad (3.3.12)$$

причем сами элементарные функции не зависят друг от друга, то функция автокорреляции равна

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \langle f(t), f^*(t + \tau) \rangle = \\ &= \sum_{\alpha=\beta} \langle f_\alpha(t), f_\beta^*(t + \tau) \rangle + \sum_{\alpha \neq \beta} \langle f_\alpha(t), f_\beta^*(t + \tau) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

В силу независимости элементарных составляющих второе слагаемое суммы обращается в нуль:

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \langle f_\alpha(t), f_\beta^*(t + \tau) \rangle = 0,$$

если только

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t) dt = 0$$

для любого  $\alpha$ . Таким образом, после введения некоторых средних уровней смещения элементарных функций получаем

$$\varphi_{11}(\tau) = \sum_{\alpha} \langle f_\alpha(t), f_\alpha^*(t + \tau) \rangle = \sum_{\alpha} \varphi_{11}^{\alpha}(\tau). \quad (3.3.14)$$

Следовательно, автокорреляция суммы взаимно некоррелированных элементарных функций равна сумме автокорреляций элементарных функций.

Если использовать тот факт, что автокорреляция обладает свойствами скалярного произведения двух функций  $f(t)$  и  $f(t + \tau)$ , то можно непосредственно найти правила дифференцирования функции автокорреляции. Действительно, если

$$\varphi_{11}(\tau) = \langle f(t), f^*(t + \tau) \rangle,$$

то

$$\frac{d\varphi_{11}(\tau)}{d\tau} = \langle f'(t), f^*(t + \tau) \rangle = -\langle f(t), f'^*(t + \tau) \rangle, \quad (3.3.15)$$

а также

$$\frac{d^2\varphi_{11}(\tau)}{d\tau^2} = \langle f''(t), f^*(t + \tau) \rangle = -\langle f'(t), f'^*(t + \tau) \rangle = \langle f(t), f''^*(t + \tau) \rangle. \quad (3.3.16)$$

Если вместо  $\varphi_{11}(\tau)$  взять  $\varphi_{11}(-\tau)$ , то

$$\varphi_{11}(-\tau) = \langle f(t), f^*(t - \tau) \rangle,$$

$$\frac{d\varphi_{11}(-\tau)}{d\tau} = \langle f'(t), f^*(t - \tau) \rangle = -\langle f(t), f'^*(t - \tau) \rangle, \quad (3.3.17)$$

$$\frac{d^2\varphi_{11}(-\tau)}{d\tau^2} = \langle f''(t), f^*(t - \tau) \rangle = -\langle f'(t), f'^*(t - \tau) \rangle = \langle f(t), f''^*(t - \tau) \rangle \quad (3.3.18)$$

и так далее. В частном случае  $\tau = 0$  получаем

$$\varphi_{11}(0) = \langle f(t), f^*(t) \rangle,$$

$$\frac{d\varphi_{11}(0)}{d\tau} = \langle f'(t), f^*(t) \rangle = -\langle f'(t), f'^*(t) \rangle = 0, \quad (3.3.19)$$

$$\frac{d^2\varphi_{11}(0)}{d\tau^2} = \langle f''(t), f^*(t) \rangle = -\langle f'(t), f'^*(t) \rangle = \langle f(t), f''^*(t) \rangle. \quad (3.3.20)$$

Равенство (3.3.19) следует из свойства (2.12.14) скалярного произведения

$$\langle f', g \rangle = -\langle f, g' \rangle,$$

которое для  $f = g$  приводит к (3.3.19). Равенство (3.3.19) указывает на то, что функция автокорреляции  $\varphi_{11}(\tau)$  имеет экстремум при  $\tau = 0$ .

Выше было доказано, что этот экстремум — абсолютный максимум. Кроме того, из равенства (3.3.19) следует важный вывод

о том, что функция  $f(t)$  и ее производная  $f'(t)$ , взятые в один и тот же момент времени, не могут никогда коррелировать между собой:

$$\langle f(t), f'^*(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f'^*(t) dt = \langle f'(t), f^*(t) \rangle = 0.$$

Формулу (3.3.16) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 \varphi_f(t)}{dt^2} = -\langle f'(t), f'^*(t + \tau) \rangle = \varphi_{f', f'}(\tau), \quad (3.3.24)$$

т. е. функция автокорреляции производной  $f'(t)$  некоторой функции  $f(t)$  равна второй производной по  $\tau$ , взятой с обратным знаком, от функции автокорреляции исходной функции  $f(t)$ .

Функцию кросс-корреляции (3.3.2)

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t + \tau) dt,$$

как уже отмечалось выше, можно свести к интегральной операции свертки:

$$f_1(\tau) \otimes f_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau - t) dt. \quad (3.3.22)$$

Напомним также, что операция свертки коммутативна относительно перестановки «сомножителей»  $f_1$  и  $f_2$ . Подобным свойством кросс-корреляция не обладает. Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1^*(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) f_1^*(t) dt = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt \right]^* = \varphi_{12}^*(-\tau). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi_{21}(\tau) = \varphi_{12}^*(-\tau). \quad (3.3.23)$$

На рис. 3.3 приведены для наглядного сравнения операции свертки и автокорреляции ступенчатых функций, значения которых равны единице на указанных площадках. Для фиксированного сдвига между функциями значения свертки и корреляции пропорциональны площадям заштрихованных участков. Из сравнения этих схем видно существенное различие между двумя родственными интегральными операциями. Наглядная схема позволяет понять рецепт размещения исходных функций в оптических устройствах, осуществляющих операции свертки или корреляции (см. § 2-9).

Только для четных действительных функций, инвариантных относительно преобразования координат

$$x \rightarrow (-x),$$



т. е. когда

$$f(x) = f(-x), \quad (3.3.24)$$

различие между операциями свертки и кросс-корреляции исчезает.

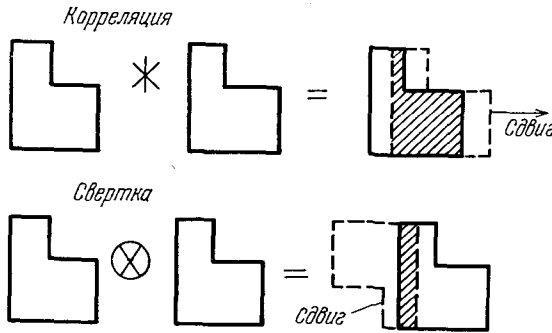


Рис. 3.3. Наглядное сравнение операций свертки и автокорреляции двумерной функции, равной единице внутри указанных площадок.

Вместо функций корреляций  $\varphi_{11}(\tau)$  и  $\varphi_{12}(\tau)$  обычно рассматривают нормированные функции корреляции

$$R_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f^*(t + \tau) dt = \overline{f(t) f^*(t + \tau)}, \quad (3.3.25)$$

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) f_2^*(t + \tau) dt = \overline{f_1(t) f_2^*(t + \tau)}. \quad (3.3.26)$$

Рассмотрим примеры вычисления нормированных корреляционных функций.

**Периодический сигнал.** Пусть задана функция

$$f(t) = a e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}. \quad (3.3.27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \exp i(\omega_0 t + \varphi_0) \exp -i[\omega_0(t + \tau) + \varphi_0] dt = \\ &= a^2 e^{-i\omega_0 \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = a^2 e^{-i\omega_0 \tau}. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Функция автокорреляции является периодической с периодом, равным периоду исходной функции.

Сигнал вида

$$f(t) = C + f_1(t), \quad (3.3.29)$$

где  $C$  — постоянная составляющая, а  $f_1(t)$  постоянной составляющей не имеет. В этом случае

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f^*(t + \tau) dt = \\ &= |C|^2 + C \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1^*(t + \tau) dt + C^* \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) dt + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) f_1^*(t + \tau) dt = |C|^2 + R_{f_1 f_1}(\tau), \quad (3.3.30) \end{aligned}$$

поскольку среднее значение функции  $f_1(t)$  равно нулю.

**Кросс-корреляция между функциями.** Пусть заданы функции  $f_1(t) = \sin \omega_0 t$  и  $f_2(t) = \cos \omega_0 t$ . Тогда

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t + \tau) dt = -\frac{\sin \omega_0 \tau}{2}. \quad (3.3.31)$$

Таким образом, нормированная кросс-корреляция функций  $\sin \omega_0 t$  и  $\cos \omega_0 t$  имеет период исходных функций.

**Кросс-корреляция между гармоническими функциями разных частот:**

$$\begin{aligned} f_1(t) &= a_1 e^{i\omega_1 t} \quad \text{и} \quad f_2(t) = a_2 e^{i\omega_2 t}, \quad \omega_1 \neq \omega_2. \\ R_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\omega_1 t} \exp -i\omega_2(t + \tau) \cdot a_1 a_2^* dt = \\ &= e^{-i\omega_2 \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \exp it(\omega_1 - \omega_2) \cdot a_1 a_2^* dt = \\ &= e^{-i\omega_2 \tau} a_1 a_2^* \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2) T}{(\omega_1 - \omega_2) T} = \begin{cases} a_1 a_2^* e^{-i\omega_0 \tau}, & \omega_1 = \omega_2 = \omega_0, \\ 0, & \omega_1 \neq \omega_2. \end{cases} \quad (3.3.32) \end{aligned}$$

Кросс-корреляция между гармоническими функциями разных частот обращается в нуль. Также обращается в нуль кросс-корреляция между их обертонами. Важно подчеркнуть здесь то, что

кросс-корреляция обращается в нуль только в пределе, при усреднении на достаточно большом интервале времени  $2T$ . При конечном значении  $T$  кросс-корреляция отлична от нуля даже при  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

Соотношение (3.3.32) можно распространить на периодические функции

$$f_1(t) = \sum_n \alpha_n e^{in\omega_1 t}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (3.3.33)$$

$$f_2(t) = \sum_n \beta_n e^{in\omega_2 t}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}. \quad (3.3.34)$$

В этом случае: если  $\omega_1 \neq \omega_2$ , то  $R_{12}(\tau) = 0$ ; если  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ , то  $R_{12}(\tau) = \sum_n \alpha_n \beta_n^* e^{in\omega_0 \tau}$ . Применение находит также следующее соотношение между нормированными корреляциями:

$$\begin{aligned} \overline{|f_1(t) \pm f_2(t + \tau)|^2} &= \overline{|f_1(t)|^2} + \overline{|f_2(t + \tau)|^2} \pm \\ &\pm [f_1(t) f_2^*(t + \tau) + f_1^*(t) f_2(t + \tau)] = \\ &= R_{11}(0) + R_{22}(0) \pm [R_{12}(\tau) + R_{12}^*(\tau)], \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

причем

$$|R_{12}(\tau)|^2 \leq R_{11}(0) R_{22}(0) \leq \frac{[R_{11}(0) + R_{22}(0)]^2}{4}. \quad (3.3.36)$$

### § 3-4. Преобразование Фурье функций кросс-корреляции

В главе 2 было доказано, что операция свертки двух функций соответствует умножению фурье-образов этих функций, а умножение самих функций соответствует свертке фурье-образов. Аналогичными свойствами обладают операции корреляции, которые принято обозначать операторным символом  $*$ :

$$\varphi_{12}(\tau) \equiv f_1(t) * f_2^*(t) = \langle f_1(t), f_2^*(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t + \tau) dt. \quad (3.4.1)$$

Рассмотрим произведение фурье-образов двух функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  в виде

$$F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega),$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Используя свойство свертки (2.6.8), находим

$$f_1(t) \otimes f_2^*(-t) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega), \quad (3.4.2)$$

где использовано

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-t) e^{-i\omega t} dt = \hat{\mathcal{F}}[f^*(-t)]. \end{aligned}$$

Поскольку, далее,

$$f_1(t) \otimes f_2^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2^*[t - (-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2^*(t + \tau) d\tau = \varphi_{12}(\tau),$$

то

$$\varphi_{12}(\tau) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega), \quad (3.4.3)$$

откуда

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.4.4)$$

Иначе (3.4.3) можно записать в виде

$$f_1(t) * f_2^*(t) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} F_1(\omega) F_2^*(\omega). \quad (3.4.5)$$

Аналогично доказывается, что

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) \cdot f_2^*(t) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2^*(\omega) \\ f_1^*(t) \cdot f_2(t) &\xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{2\pi} F_1^*(\omega) * F_2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.4.6)$$

Для функции автокорреляции сразу получаем

$$|f_1(t)|^2 \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_1^*(\omega). \quad (3.4.7)$$

Иногда встречается преобразование функции  $F(\omega)$  в функцию  $f(x)$  с помощью прямого, а не обратного преобразования Фурье.

В этих случаях соотношения будут другими. А именно, если использовать теорему взаимности:

$$\widehat{F}(x) \rightarrow 2\pi f(-\omega),$$

то

$$F_1(x) \cdot F_1^*(x) \rightarrow (2\pi) f_1(-\omega) * f_1^*(-\omega). \quad (3.4.8)$$

### § 3-5. Средняя мощность

В предыдущих параграфах были рассмотрены основные свойства корреляционных функций. Теперь воспользуемся этими свойствами и рассмотрим спектральную плотность мощности случайного процесса, а также докажем теорему Винера — Хинчина.

Введем понятие средней мощности и спектра мощности случайного процесса. Закономерности, характеризующие преобразование Фурье случайного сигнала, будут использованы в дальнейшем при рассмотрении когерентности света и процессов оптической фильтрации.

*Средней мощностью* сигнала  $f(t)$  называется предел

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt. \quad (3.5.1)$$

Случайный сигнал описывает стационарный и эргодический процесс, и фактически в выражении (3.5.1) подразумевается усреднение по всем возможным реализациям случайного процесса, которое на основе гипотезы об эргодичности процесса заменено усреднением во времени для произвольной реализации  $f(t)$ .

Если в класс рассматриваемых функций включить обобщенные функции или распределения, например гребенку Дирака

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(t - t_n) \quad (3.5.2)$$

со случайными значениями  $t_n$  и  $\alpha_n$ , то средней мощностью такого сигнала будем называть предел суммы

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_n |\alpha_n|^2, \quad (3.5.3)$$

где суммирование распределяется на те индексы  $n$ , для которых  $t_n$  попадает в интервал  $(-T, +T)$ .

Ограничимся рассмотрением класса таких функций  $f(t)$ , которые имеют конечную среднюю мощность, определенную выражениями (3.5.1) и (3.5.3).

С помощью прямоугольного импульса  $\Pi_T(t)$  соотношение (3.5.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{f^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) \Pi_T(t) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle f(t) f^*(t), \Pi_T(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left\langle F(\omega) \otimes F^*(-\omega), \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right\rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left\langle F(\omega) \cdot F^*(v), \frac{\sin(\omega - v) T}{(\omega - v) T} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle F(\omega) \cdot F^*(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega - v) T}{(\omega - v) T} = \delta(\omega - v). \quad (3.5.4)$$

Таким образом, средняя мощность выражается с помощью фурье-образа функции  $f(t)$ . Поэтому величину

$$S_{11}(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_1^*(\omega) \quad (3.5.5)$$

можно назвать *энергетическим спектром сигнала*  $f(t)$ . Например, случайный процесс  $f(t)$ , фурье-образ которого  $F(\omega)$  имеет вид

$$F(\omega) = \begin{cases} a, & \text{если } |\omega| < \omega_0, \\ 0, & \text{если } |\omega| > \omega_0, \end{cases} \quad (3.5.6)$$

называется *белым* или *флуктуационным шумом с ограниченной полосой частот*. Его средняя мощность равна

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} a^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} a^2 2\omega_0. \quad (3.5.7)$$

Случайный процесс называется просто белым шумом, если  $\omega_0 \rightarrow \infty$  и его фурье-образ отличен от нуля при всех частотах. Из (3.5.7) видно, что белый шум не может существовать в действительности, так как средняя мощность его была бы бесконечно большой. Одна-

ко белый шум с ограниченной полосой частот имеет конечную среднюю мощность и может описывать реальные помехи.

Рассмотрим два случайных процесса  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , фурье-образы которых равны  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$ . По аналогии с (3.5.5) введем взаимный энергетический спектр

$$S_{12}(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega). \quad (3.5.8)$$

Совершив обратное преобразование Фурье взаимного энергетического спектра  $S_{12}(\omega)$ , находим

$$\begin{aligned} S_{12}(\omega) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}^{-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t + \tau) dt = \varphi_{12}(\tau), \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\varphi_{12}(\tau) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} S_{12}(\omega). \quad (3.5.9)$$

Теорема Винера — Хинчина гласит: взаимный энергетический спектр двух случайных процессов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  равен фурье-образу функции кросс-корреляции этих процессов. Развернуто теорему Винера — Хинчина можно написать следующим образом:

$$S_{12}(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.5.10)$$

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t + \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.5.11)$$

Такие же соотношения имеют место для нормированных кросс-корреляций и взаимного спектра мощности  $W_{12}(\omega)$ :

$$R_{12}(\tau) = \overline{\varphi_{12}(\tau)} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} S_{12}(\omega) = W_{12}(\omega), \quad (3.5.12)$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (3.5.13)$$

$$W_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.5.14)$$

где

$$R_{12}(\tau) = \overline{\varphi_{12}(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) f_2^*(t+\tau) dt = \overline{f_1(t) f_2^*(t+\tau)}, \quad (3.5.15)$$

$$W_{12}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega = \overline{F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega)}. \quad (3.5.16)$$

Спектр мощности  $W_{11}(\omega) = W(\omega)$  сигнала  $f(t)$  равен фурье-образу нормированной автокорреляции  $R_{11}(\tau) = R(\tau)$ :

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (3.5.17)$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.5.18)$$

Докажем, что спектр мощности  $W(\omega)$  можно следующим образом выразить через функцию  $f(t)$ :

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (3.5.19)$$

Рассмотрим усеченную функцию

$$f_T(t) = f(t) \cdot \Pi_T(t) \cdot 2T, \quad (3.5.20)$$

фурье-образ которой равен

$$F_T(\omega) = \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.5.21)$$

а средняя мощность ее на интервале  $(-T, +T)$  равна

$$W_T(\omega) = \frac{1}{2T} |F_T(\omega)|^2. \quad (3.5.22)$$

Если  $R_T(\tau)$  — прообраз  $W_T(\omega)$ :

$$\hat{\mathfrak{F}} \\ R_T(\tau) \rightarrow W_T(\omega),$$

то

$$R_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f^*(t+\tau) dt = \frac{1}{2T} f_T(t) \otimes f_T(-t). \quad (3.5.23)$$



В пределе, при  $T \rightarrow \infty$ ,

$$R_T(\tau) \rightarrow R(\tau), \quad (3.5.24)$$

а также

$$W_T(\omega) \rightarrow W(\omega). \quad (3.5.25)$$

Таким образом,

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (3.5.26)$$

Формула (3.5.26) выражает теорему Хилли.

Как изменяется средняя мощность при прохождении сигнала  $f(t)$  через линейный фильтр, имеющий частотно-фазовую характеристику  $G(\omega)$ ? Известно, что отклик  $r(t)$  на выходе линейного фильтра равен

$$r(t) = f(t) \otimes g(t), \quad (3.5.27)$$

где  $g(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}[G(\omega)]$ , а  $G(\omega)$  — отклик линейного фильтра на гармонический сигнал частоты  $\omega$ . Автокорреляция отклика  $r(t)$  равна

$$\varphi_r(\tau) = r(t) * r^*(t) = [f(t) \otimes g(t)] * [f^*(t) \otimes g^*(t)].$$

Фурье-образ автокорреляции  $\varphi_{11}(\tau)$  равен

$$\begin{aligned} S_r(\omega) &= \hat{\mathcal{F}}[\varphi_{11}(\tau)] = \hat{\mathcal{F}}[f(t) \otimes g(t)] \hat{\mathcal{F}}^*[f(t) \otimes g(t)] = \\ &= F_f(\omega) \cdot G(\omega) \cdot F_f^*(\omega) \cdot G^*(\omega) = S_f(\omega) \cdot |G(\omega)|^2, \end{aligned}$$

или для среднего энергетического спектра

$$W_r(\omega) = W_f(\omega) \cdot |G(\omega)|^2, \quad (3.5.28)$$

а для средней корреляции

$$R_r(t) = R_f(t) \otimes g(t) \otimes g(-t). \quad (3.5.29)$$

**Пример.** Пусть автокорреляция на выходе равна дельта-функции:

$$R_f(t) = \delta(t), \quad (3.5.30)$$

т. е. энергетический спектр сигнала  $f(t)$  простирается равномерно до бесконечности:

$$S_f(\omega) = 1(\omega).$$

На выходе линейного фильтра  $G(\omega)$  энергетический спектр

$$S_r(\omega) = |G(\omega)|^2, \quad (3.5.31)$$

т. е. равен просто квадрату частотной характеристики  $G(\omega)$  линейного фильтра. Это важное соотношение часто применяется в расчетах.

**Пример.** Рассмотрим сигнал вида

$$f(t) = AY(t). \quad (3.5.32)$$

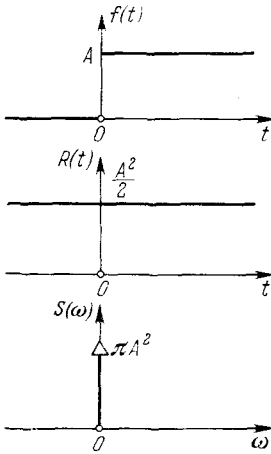
Средняя функция автокорреляции равна (рис. 3.4)

$$R(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|A|^2}{2T} \int_{-T}^T |Y(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_0^T dt = \frac{A^2}{2},$$

а спектр мощности

$$S(\omega) = \pi A^2 \cdot \delta(\omega).$$

**Пример.** Бесконечная последовательность равноотстоящих узких импульсов



$$f(t) = \sum_k \alpha_k \delta(t - kT),$$

где  $\alpha_k$  — действительные коэффициенты. Тогда

$$R(t) = \sum_k A_k \delta(t - kT),$$

где

$$A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2nT} \sum_{m=-n}^n \alpha_m \alpha_{m+k}.$$

Спектр мощности сигнала  $f(t)$  равен

$$S(\omega) = \sum_k A_k \cos kT\omega =$$

$$= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kT\omega,$$

Рис. 3.4. Исходная функция  $f(t) = AY(t)$ , нормированная функция автокорреляции  $R(t)$  и спектр мощности  $S(\omega)$ .

так как коэффициенты  $\alpha_k$  действительны, а отсюда  $A_k = A_{-k}$ . В частном случае  $\alpha_k = 1$  будем иметь

$$f(t) = \sum_k \delta(t - kT), \quad A_k = \frac{1}{T}, \quad R(t) = \frac{f(t)}{T},$$

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \sum_k e^{i\omega kT} = \frac{2\pi}{T^2} \sum_k \delta(\omega - n_k \omega_0),$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$  (рис. 3.5).

**Пример.** Периодическая функция

$$f(t) = \sum_n \alpha_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

В этом случае спектр мощности равен

$$S(\omega) = 2\pi \sum_n |\alpha_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3.5.33)$$

и автокорреляция  $R(t) = \sum_n |\alpha_n|^2 \cos n\omega_0 t$  для действительной функции  $f(t)$ , когда  $|\alpha_{-n}| = |\alpha_n|$ , принимает вид

$$R(t) = |\alpha_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \cos n\omega_0 t.$$

В частном случае, когда  $f(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , имеем

$$\alpha_1 = \alpha_{-1}^* = \frac{a}{2} e^{i\varphi_0}, \quad S(\omega) = \frac{\pi}{2} a^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],$$

$$R(t) = a^2 \cos \omega_0 t / 2.$$

**Пример.** Отклик линейного фильтра на импульс равен

$$r(t) = e^{-\alpha t} Y(t) \quad (\alpha > 0).$$

Автокорреляция импульса равна  $R_f(t) = \delta(t)$ . Определим автокорреляцию на выходе  $R_r(t)$  и спектр мощности на выходе  $S_r(\omega)$ .

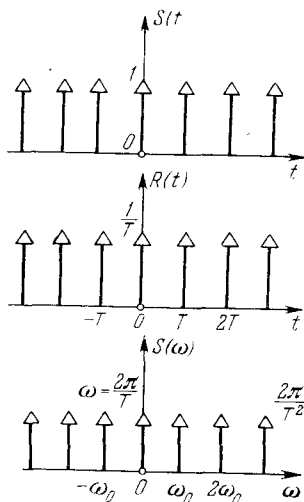


Рис. 3.5. Гребенка Дирака, ее нормированная функция автокорреляции и спектр мощности.

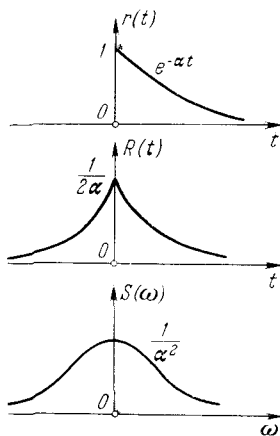


Рис. 3.6. Нахождение нормированной функции автокорреляции и спектра мощности на выходе линейного фильтра по отклику фильтра на дельта-функцию.

Поскольку фурье-образ отклика равен

$$G(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[e^{-\alpha t} Y(t)] = \frac{1}{\alpha + i\omega},$$

то

$$S_r(\omega) = G(\omega)G^*(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2},$$

а

$$R_r(t) = e^{-\alpha|t|}/2\alpha.$$

В этой задаче входной сигнал  $f(t)$  был задан неявно, а через его автокорреляцию (рис. 3.6).

**Пример.** Автокорреляция производного сигнала  $f(t)$ , имеющего автокорреляцию  $R(t)$  и спектр мощности  $S(\omega)$ , определяется соотношениями

$$R_{f'}(t) = -\frac{d^2 R(t)}{dt^2}, \quad S_{f'}(\omega) = +\omega^2 S(\omega). \quad (3.5.34)$$

В общем случае переход

$$f(t) \rightarrow \frac{d^{(n)} f(t)}{dt^n} \quad (3.5.35)$$

сопровождается переходом

$$R(t) \rightarrow (-1)^n \frac{d^{2n} R(t)}{dt^{2n}}.$$

### § 3-6. Спектральное распределение энергии и его физический смысл

Рассмотрим в качестве примера простейшую электрическую цепь (рис. 3.7), состоящую из омического сопротивления  $R$ .

Пусть задан электрический ток, проходящий через это сопротивление

$$i(t) = I_0 \cos \omega_0 t. \quad (3.6.1)$$

Падение напряжения, создаваемое током  $i(t)$  на сопротивлении  $R$ , равно

$$U(t) = I_0 R \cos \omega_0 t, \quad (3.6.2)$$

а мощность, выделяемая на сопротивлении  $R$ , определяется выражением

$$W(t) = RI_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} RI_0^2 + \frac{1}{2} RI_0^2 \cos 2\omega_0 t. \quad (3.6.3)$$

Легко можно найти фурье-образ электрического тока  $i(t)$ :

$$J(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[i(t)] = \frac{I_0}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (3.6.4)$$

который состоит из двух дельта-функций, сосредоточенных на частотах  $-\omega_0$  и  $+\omega_0$ .

Однако если вычислим фурье-образ мощности  $W(t)$ :

$$W(\omega) = \hat{\mathfrak{F}}[w(t)] = \frac{RI_0^2}{2} [\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)], \quad (3.6.5)$$

то, к удивлению, обнаружим (рис. 3.8), что в состав его входят дельта-функции на нулевой ( $\omega = 0$ ) и удвоенной частотах ( $-2\omega_0$  и  $+2\omega_0$ ). Таким образом, спектр мощности  $W(t)$  оказывается

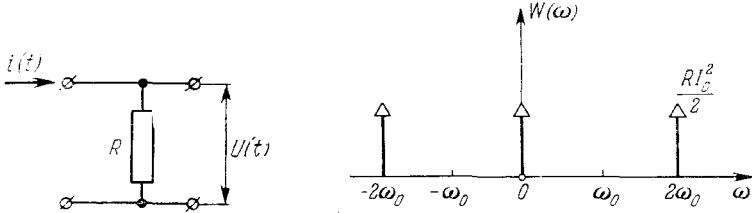


Рис. 3.7. Схема электрической цепи, состоящей из омического сопротивления  $R$ , через которую проходит ток  $i(t)$ .

Рис. 3.8. Фурье-образ мгновенной мощности  $W(t)$  содержит компоненты на нулевой и удвоенной частотах.

сосредоточенным на частотах, которые не содержатся в токе  $i(t)$ , под действием которого происходит выделение этой мощности. Этот своеобразный парадокс разрешается очень просто: спектральное распределение энергии в сигнале нельзя определять путем вычисления фурье-образа функции мощности, выделяемой на сопротивлении. Для решения этой задачи надо поступать иначе и сначала вычислить фурье-образ функции автокорреляции.

Средняя автокорреляция функции тока  $i(t)$  равна

$$R_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T I_0 \cos \omega_0 t \cdot I_0 \cos [\omega_0 (t + \tau)] dt = \frac{1}{2} I_0^2 \cos \omega_0 \tau, \quad (3.6.6)$$

а фурье-образ функции автокорреляции, равный (рис. 3.9)

$$W(\omega) = \hat{\mathfrak{F}}[R_{11}(\tau)] = \frac{1}{4} I_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (3.6.7)$$

содержит те же частоты, что и функция тока  $i(t)$ . Если у нас имеется периодический сигнал вида

$$f(t) = \sum_n \alpha_n e^{in\omega_0 t},$$

то спектр мощности этого сигнала равен (см. (3.5.33))

$$S(\omega) = 2\pi \sum_n |\alpha_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

т. е. сумме мощностей каждой из составляющих гармоник. Энергия взаимодействия между различными составляющими здесь отсут-

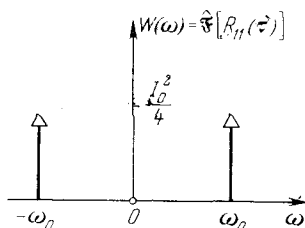


Рис. 3.9. Фурье-образ функции автокорреляции тона  $i(t) = I_0 \cos \omega_0 t$  содержит те же частоты, что и функция тона.

ствует. Каждая из составляющих гармоник транспортирует энергию независимо от присутствия в сигнале других гармонических составляющих. Иногда этот факт выражают утверждением, что две различные частоты не интерферируют между собой. Это заключение следует дополнить очень существенным замечанием. А именно, отмеченное утверждение справедливо только для средних величин, усредненных за бесконечно большой отрезок времени,  $2T \rightarrow \infty$ . Если же взять конечный интервал времени усреднения  $2T$ , то между

двумя гармониками возникнет интерференция в форме биений. Об условиях возникновения этого эффекта будет сказано в главе 4.

### § 3-7. Случайный шум и помехи

Понятия *случайный шум* и *помеха* не являются тождественными. Случайный шум обуславливается процессами флюктуационной природы и описывается наложением большого количества импульсных функций, полностью не зависящих друг от друга. Поскольку каждая импульсная и даже квазиимпульсная составляющая функция обладает фурье-образом, простирающимся далеко в область очень больших частот, то вследствие случайного характера распределения моментов появления этих импульсных функций фурье-образу результирующей функции также будет простирается в область очень высоких частот.

Выше был рассмотрен случай белого шума с ограниченным спектром и, следовательно, ограниченной мощностью. Случайный шум такого вида можно представить с помощью функции отсчетов, воспользовавшись теоремой Котельникова (см. главу 5). Если  $n(t)$  — случайный шум со спектром, обрывающимся на частоте  $\omega_0$ , то на интервале времени  $T$  его можно записать в виде

$$n(t) = \sum_{-m_{\max}}^{m_{\max}} n_m u_m(\omega_0 t), \quad m_{\max} = \omega_0 T, \quad (3.7.1)$$

где

$$u_m(\omega_0 t) = \frac{\sin(\omega_0 t - n\pi)}{(\omega_0 t - n\pi)}, \quad (3.7.2)$$

а значения отсчетов  $n_m$  в точках отсчета независимы друг от друга и подчиняются нормальному закону распределения со среднеквадратичным значением

$$\sigma^2 = \overline{n_m^2}, \quad (3.7.3)$$

не зависящим от  $m$ . В частотном представлении фурье-образ случайного шума можно представить в виде

$$N(\omega) = \sum_{-m_{\max}}^{m_{\max}} (a_m + ib_m) \frac{\sin\left(\frac{\omega_0 T}{2} - m\pi\right)}{\left(\frac{\omega_0 T}{2} - m\pi\right)}, \quad (3.7.4)$$

где  $a_m$ ,  $b_m$  — независимые значения спектральных составляющих функций в  $m$ -х точках отсчета.

Аналогично

$$\overline{a_m^2} = \overline{b_m^2} = \frac{\rho^2}{2}. \quad (3.7.5)$$

В идеальном случае белого шума расстояния между точками отсчета  $\Delta t$  и  $\Delta\omega$  уменьшаются, но при этом значения отсчетов в соседних точках будут все же независимыми. Это свойство белого шума соответствует тому, что функция корреляции белого шума равна дельта-функции:

$$R(\tau) = \delta(\tau).$$

Возможны и другие виды случайных шумов, которые здесь рассматриваться не будут.

Под помехой подразумевают более ограниченный класс случайных функций, которые не обладают никакими общими свойствами. Например, при оптической фильтрации изображений возникает задача отобрать буквы *A* от остальных букв или, например, цифру *1* от остальных. Даже в этих двух простейших случаях нельзя подметить никаких общих характеристик. Однако все же без особого ущерба ряд наиболее распространенных задач можно свести к трем случаям:

- спектр помехи близок к белому шуму;
- спектр помехи не перекрывается со спектром полезного сигнала;
- спектр перекрывается частично.

В каждом из этих случаев подход к решению задач подавления будет несколько различным.

Методы подавления шумов и помех можно подразделить на несколько групп. В первую группу входят различные методы модуляции, которые были кратко рассмотрены в главе 2. Эти методы применяются как в радиосвязи, так и в когерентной оптике. Вторая группа охватывает системы с интегральными преобразованиями типа преобразований Фурье или Френеля, а также другие интегрально-кодовые преобразования, допускающие обратные преобразования с восстановлением исходного сигнала. Эта группа методов исследования широко применяется в когерентной оптике и трафаретно-растровой спектроскопии. В третью группу входят методы корреляционного подавления шумов. Задачи этой группы разбиваются на два подкласса: 1) полезный сигнал неизвестен; 2) полезный сигнал известен. Подавление шума проводится с помощью коррелятора. В эту же группу входит метод синхронного детектора, который представляет собой разновидность кросс-коррелятора. Наконец, четвертую группу образуют нелинейные детекторы. Изменение соотношения мощности помехи и полезного сигнала происходит благодаря нелинейному преобразованию исходного сигнала.

### § 3-8. Корреляционные методы подавления помех и шумов

Методом корреляции успешно решается задача обнаружения повторяющихся сигналов на фоне интенсивного случайного шума. Задача хорошо известна радиоспециалистам.

Пусть на повторяющийся сигнал  $s(t)$  накладывается случайный шум  $n(t)$ . Результирующий сигнал равен

$$f(t) = s(t) + n(t). \quad (3.8.1)$$

Функция автокорреляции этого сигнала равна

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{nn}(\tau) + [\varphi_{sn}(\tau) + \varphi_{ns}(\tau)]. \quad (3.8.2)$$

Случайный шум и полезный сигнал не коррелируют, поэтому взаимная корреляция между сигналом  $s(t)$  и шумом  $n(t)$  обращается в нуль. Следовательно,

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{nn}(\tau). \quad (3.8.3)$$

Из рис. 3.10 видно, что автокорреляционная функция обнаруживает наличие повторяющихся сигналов. Однако шум полностью искажает исходный сигнал и не позволяет судить о времени его появления.



Если известна частота следования сигналов, то можно применить кросс-коррелятор. Вводя в коррелятор местный сигнал

$$s_2(t) = s_1(t),$$

получаем нормированную кросс-корреляцию

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [s_1(t) + n(t)] s_2^*(t + \tau) dt = \\ = \varphi_{s_1 s_2}(\tau) + \varphi_{n s_2}(\tau) = \varphi_{s_1 s_2}(\tau), \quad (3.8.4)$$

где  $\varphi_{n s_2}(\tau) = 0$  вследствие независимости местного сигнала  $s_2(t)$  и шума на входе кросс-коррелятора. Когда сигнал представляет собой амплитудно-модулированный сигнал

$$s_1(t) = A [1 + mg(t)] \cos \omega_0 t$$

и такой же сигнал подается во второе плечо кросс-коррелятора:

$$s_2(t) = B [1 + mg(t)] \cos \omega_0 t,$$

или

$$s_2(t) = B \cos \omega_0 t,$$

то такой кросс-коррелятор называется синхронным детектором.

Все кросс-корреляторы могут работать для подавления шумов, если априори известны одна

- или несколько характеристик принимаемого сигнала:
  - значение несущей частоты или частоты повторения импульсов;
  - значение фазы несущей;
  - значение точной модуляционной функции или самого сообщения.

Одна из частных задач заключается в обнаружении точно известного сигнала на фоне шума или посторонних помех.

### § 3-9. Обнаружение сигналов известной формы

Пусть полезный сигнал точно известен и необходимо выделить или обнаружить его на фоне помех. Используя для этого принцип фильтрации, найдем свойства линейного фильтра  $G(\omega)$ , на выходе которого помеха ослаблялась бы максимально возможно. Пусть

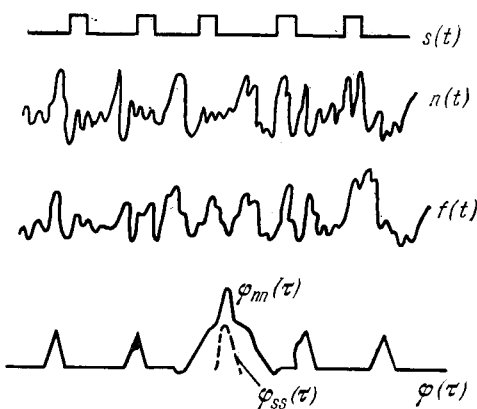


Рис. 3.10. Корреляционный метод обнаружения повторяющегося сигнала  $s(t)$ , на который накладывается шум  $n(t)$ . Исходный сигнал искажен. Ничего нельзя сказать о времени его появления.

на вход фильтра подан сигнал

$$f(t) = m(t) + n(t), \quad (3.9.1)$$

состоящий из полезного сигнала  $m(t)$  и помехи  $n(t)$ . На выходе фильтра  $G(\omega)$  получим

$$\varphi(t) = \mu(t) + \nu(t), \quad (3.9.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu(t) &= m(t) \otimes g(t), \\ \nu(t) &= n(t) \otimes g(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.9.3)$$

а  $g(t)$  — отклик фильтра при подаче на вход импульса  $\delta(t)$ :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.9.4)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}(\omega) &= \hat{\mathfrak{F}}[\mu(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t) e^{-i\omega t} dt = M(\omega) \cdot G(\omega), \\ \mathfrak{N}(\omega) &= \hat{\mathfrak{F}}[\nu(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(t) e^{-i\omega t} dt = N(\omega) \cdot G(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (3.9.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M(\omega) &= \hat{\mathfrak{F}}[m(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-i\omega t} dt, \\ N(\omega) &= \hat{\mathfrak{F}}[n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (3.9.6)$$

Средняя мощность помехи  $n(t)$ , рассматриваемой как случайный шумовой процесс, равна в соответствии с теоремой Винера — Хинчина

$$\overline{n^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega, \quad (3.9.7)$$

где  $S_n(\omega)$  — спектр шума на входе фильтра.

Мощность шумов на входе фильтра равна согласно (3.5.31)

$$\overline{v^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |G(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.9.8)$$

Полезный сигнал на выходе фильтра преобразуется в сигнал

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} M(\omega) G(\omega) d\omega. \quad (3.9.9)$$

Отношение мощности сигнала к мощности шума при прохождении через фильтр изменится и на выходе фильтра будет составлять

$$\rho(t_0) = \frac{|\mu(t_0)|^2}{v^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} M(\omega) G(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |G(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.9.10)$$

Найдем характеристику фильтра  $G(\omega)$  такую, чтобы отношение  $\rho(t_0)$  стало максимальным. Очевидно, что свойства фильтра должны зависеть от формы исследуемого сигнала  $m(t)$ . Применим к выражению  $|\mu(t_0)|^2$  неравенство Шварца:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} G(\omega) M(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 S_n d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega, \quad (3.9.11)$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} G(\omega) M(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |G(\omega)|^2 d\omega} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega = \rho_{\text{макс}}. \quad (3.9.12)$$

Верхний предел  $\rho_{\text{макс}}$  полностью задан свойствами сигнала  $M(\omega)$  и шума  $S_n(\omega)$ . Этот верхний предел достигается, если выбрать фильтр с характеристикой

$$G(\omega) = C e^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega)}{S_n(\omega)}. \quad (3.9.13)$$

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} G(\omega) M(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |G(\omega)|^2 d\omega} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} C e^{-i\omega t_0} \frac{M^*(\omega)}{S_n(\omega)} M(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) C^2 \frac{|M(\omega)|^2}{|S_n(\omega)|^2} d\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} C \frac{|M(\omega)|^2}{|S_n(\omega)|} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} C^2 \frac{|M(\omega)|^2}{|S_n(\omega)|} d\omega} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega. \quad (3.9.14) \end{aligned}$$

Если шум или помеха  $n(t)$  являются действительно случайными процессами, то линейный фильтр, обладающий характеристикой (3.9.13), является оптимальным, или, более точно, абсолютно оптимальным.

Если шум  $n(t)$  обладает свойствами белого шума и спектр шума  $S_n(\omega)$  не зависит от частоты:

$$S_n(\omega) = S_0 = \text{const} \quad (\text{белый шум}), \quad (3.9.15)$$

то

$$G(\omega) = e^{-i\omega t_0} M^*(\omega). \quad (3.9.16)$$

Линейный фильтр, построенный по схеме (3.9.16), называется *согласованным фильтром*. Его действие происходит по принципу коррелятора: в нем осуществляется корреляция поступающего сигнала с сигналом  $m(t)$ , для которого построен данный фильтр. При этом согласованный линейный фильтр выдает на выходе не сам полезный сигнал, а функцию автокорреляции сигнала или кросс-корреляции сигнала и помехи. Действительно, фурье-образ сигнала на выходе согласованного фильтра равен

$$\Phi_{11}(\omega) = M(\omega) M^*(\omega), \quad (3.9.17)$$

если на вход поступает полезный сигнал  $m(t)$ , или же

$$\Phi_{12}(\omega) = N(\omega) M^*(\omega), \quad (3.9.18)$$

если на вход поступает помеха  $n(t)$ . Поэтому с выхода согласованного фильтра поступают сигналы

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11}(t) &= m(t) * m(t) \\ \Phi_{12}(t) &= n(t) * m(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.9.19)$$

или

Следует в заключение подчеркнуть, что отношение  $\rho$  не может быть выше

$$\rho_{\text{макс}} = \frac{1}{S_{n_0}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) M^*(\omega) d\omega = \frac{1}{S_{n_0}} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{m}(t)|^2 dt = \frac{E_0}{S_{n_0}}, \quad (3.9.20)$$

т. е. выше отношения энергии полезного сигнала  $\bar{E}_0$  к энергии помехи  $S_{n_0}$ . Поэтому коэффициент отбора полезного известного сигнала на фоне случайного сигнала типа белого шума можно улучшить тривиальным путем — путем увеличения энергии полезного сигнала.

В случае других типов помех улучшить отношение  $\rho$  можно путем выбора оптимального спектра передаваемого сигнала или несущей частоты. Очевидно, передача должна вестись на участке спектра, где энергия помехи минимальна. Такой прием иногда называют методом гетеродинирования.

Интересно отметить, что отклик согласованного фильтра на импульс  $\delta(t - t_0)$  равен перевернутому симметрично относительно момента времени  $t_0$  сигналу, на который настроен согласованный фильтр:

$$\begin{aligned} k(t) &= \delta(t) \otimes m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t - t_0)] M^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t - t_0)] M(-\omega) d\omega = m(t_0 - t) = m[-(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (3.9.21)$$

В заключение следует отметить, что процесс корреляционной фильтрации сигналов, согласно (3.9.19), является процессом, легко осуществляемым в когерентной оптической системе.

### § 3-10. Функция неопределенности

Иногда вместо согласованного фильтра, описываемого  $M^*(\omega)$ , встречаются фильтры, характеристика которых сдвинута на величину  $\Omega$  по частоте, т. е.

$$M^*(\omega - \Omega), \quad (3.10.1)$$

или, наоборот, такой постоянный сдвиг по частоте испытывает сам сигнал на входе. Если, кроме того, сигнал  $m(t)$  приходит с задержкой на величину  $\tau$ , то в этом случае на выходе согласованного фильтра появляется сигнал

$$\chi(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M^*(\omega) M(\omega - \Omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.10.2)$$

который называется *функцией неопределенности*.

В частном случае  $t = 0$ ,  $\Omega = 0$  функция неопределенности совпадает с полной энергией сигнала  $E_0$ :

$$\chi(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |M(\omega)|^2 d\omega = E_0. \quad (3.10.3)$$

Нормированная функция неопределенности равна

$$\chi_0(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} M^*(\omega) M(\omega - \Omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.10.4)$$

В симметричной форме (3.10.4) запишется так:

$$\begin{aligned}\chi_0(t, \Omega) &= \frac{1}{2\pi E_0} e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} M^*\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) M\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} m\left(t' + \frac{t}{2}\right) m^*\left(t' - \frac{t}{2}\right) e^{i\Omega t'} dt'. \quad (3.10.5)\end{aligned}$$

Функцию неопределенности называют также *обобщенной автокорреляцией*. Действительно, при  $\Omega = 0$  получаем

$$\begin{aligned}\chi_0(t, 0) &= \frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} m\left(t' + \frac{t}{2}\right) m^*\left(t' - \frac{t}{2}\right) dt' = \\ &= \frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} m(t' + t) m^*(t') dt' = \frac{1}{E_0} [m(t) * m(t)], \quad (3.10.6)\end{aligned}$$

т. е. функцию автокорреляции сигнала  $m(t)$ . При  $\Omega \neq 0$  функцию неопределенности можно записать в виде

$$\begin{aligned}\chi_0(t, \Omega) &= \frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} m(t') m^*(t' - t) e^{i\Omega t'} dt' = \\ &= \frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} m(t') m^*(t' + t) e^{i\Omega t'} dt'. \quad (3.10.7)\end{aligned}$$

Функция неопределенности обладает следующим свойством симметрии:

$$\chi(t, \Omega) = \chi^*(-t, -\Omega). \quad (3.10.8)$$

Объем тела неопределенности, т. е. объем, ограниченный функцией  $|\chi(t, \Omega)|^2$ , не зависит от формы сигнала:

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(t, \Omega)|^2 dt d\Omega = 1. \quad (3.10.9)$$

По аналогии с функцией кросс-корреляции можно ввести *перекрестную функцию неопределенности*:

$$\chi_{1,2}(t, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_{-\infty}^{\infty} m_1\left(t' + \frac{t}{2}\right) m_2^*\left(t' - \frac{t}{2}\right) e^{i\Omega t'} dt'. \quad (3.10.10)$$

Эта функция возникает при определении степени дискриминации согласованного фильтра к постороннему сигналу. Так же вводится перекрестная функция неопределенности для другой пары сигналов  $m_3(t)$  и  $m_4(t)$ .

Рассмотрим полный фурье-образ

$$X(t_1, \Omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{1,2}(t, \Omega) \chi_{3,4}^*(t, \Omega) \exp[i(\Omega t_1 - t \Omega_1)] dt d\Omega. \quad (3.10.11)$$

После преобразований получаем

$$X(t_1, \Omega_1) = \chi_{4,2}(t_1, \Omega_1) \chi_{3,1}^*(t_1, \Omega_1). \quad (3.10.12)$$

Если  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m(t)$ , то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(t, \Omega)|^2 \exp[i(\Omega t_1 - t \Omega_1)] dt d\Omega = |\chi(t_1, \Omega_1)|^2. \quad (3.10.13)$$

Таким образом, полное преобразование Фурье переводит функцию  $|\chi(t, \Omega)|^2$  саму в себя.

Непосредственный физический смысл имеют вторые производные функции неопределенности  $\chi(t, \Omega)$  в начале координат. Легко найти, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \Big|_{t=\Omega=0} &= -\frac{1}{2\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |M(\omega)|^2 d\omega = -4\pi^2 \sigma_\omega^2, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Omega^2} \Big|_{t=\Omega=0} &= -\frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |m(t)|^2 dt = -\sigma_t^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.10.14)$$

где  $\sigma_\omega^2$  и  $\sigma_t^2$  — частотные и временные дисперсии сигнала  $m(t)$  соответственно. Это свойство близко к свойству второй производной фурье-образа в начале координат (2.3.43).

Смешанная производная в начале координат равна

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial \Omega} \Big|_{t=\Omega=0} = -\frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{d\varphi(t)}{dt} |m(t)|^2 dt, \quad (3.10.15)$$

где сигнал  $m(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$ . Таким образом, смешанная производная является мерой фазовой модуляции сигнала. Если мгновенная частота

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

равна нулю, то смешанная производная также обращается в нуль.

**Пример.** Функция неопределенности гармонического сигнала, промодулированного прямоугольным импульсом, имеет вид

$$m(t) = e^{i\omega_0 t} \Pi_T(t). \quad (3.10.16)$$

Фурье-образ сигнала равен

$$M(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0) T}{(\omega - \omega_0) T}. \quad (3.10.17)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \chi(t, \Omega) &= \frac{1}{T} \int \frac{\sin\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right) T \sin\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Omega}{2}\right) T}{\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right) \left(\omega - \omega_0 + \frac{\Omega}{2}\right)} e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \begin{cases} \frac{\sin\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \Omega T}{\Omega T} e^{i\omega_0 t}, & |t| < T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (3.10.18) \end{aligned}$$

Модуль  $|\chi(t, \Omega)|$  имеет максимум при  $t = \Omega = 0$ ,  $\chi(0, 0) = 1$ . Сечения функции неопределенности плоскостями  $\Omega = 0$  и  $t = 0$  показаны на рис. 3.11. Горизонтальные сечения функции неопределенности при достаточно высоких уровнях описываются уравнением

$$\frac{|t|^2}{T^2} + \frac{\Omega^2}{6|T|^2} = C^2.$$

**Пример.** Функция неопределенности функции Френеля  $z(t)$  с колоколообразной огибающей имеет вид

$$m(t) = z(t) e^{-t^2/T^2}, \quad (3.10.19)$$

где

$$z(t) = e^{i\omega_0 t^2}. \quad (3.10.20)$$

Имеем

$$\chi(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t' + t) m^*(t') e^{i\Omega t'} dt' =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left(1 + \omega_0^4 T^4\right) \frac{t^2}{T^2} + \left(\omega_0^2 T^2\right) \Omega t + \left(\frac{T}{2}\right)^2 \Omega^2 \right] \right\}, \quad (3.10.21)$$

где  $k = \sqrt{1 + \omega_0^4 T^4}$  — коэффициент сжатия.

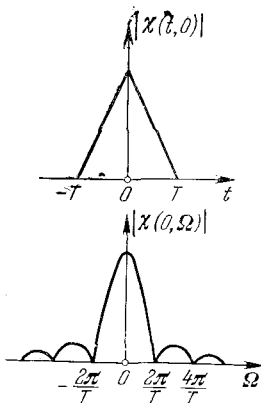


Рис. 3.11. Сечения функции неопределенности  $\chi(t, \Omega)$  плоскостями  $\Omega = 0$  и  $t = 0$ .



Линии равной высоты определяются выражением

$$k^2 \frac{t^2}{T^2} + (\omega_0^2 T^2) \Omega t + \left(\frac{T}{2}\right)^2 \Omega^2 = C^2. \quad (3.10.22)$$

Если ввести безразмерные координаты

$$\xi = \frac{t}{T}, \quad \eta = \frac{\Omega T}{2}, \quad (3.10.23)$$

то уравнение линий равной высоты (3.10.22) примет вид

$$k^2 \xi^2 + 2(\omega_0^2 T^2) \xi \eta + \eta^2 = C^2. \quad (3.10.24)$$

При  $\omega_0^2 = 0$ , т. е. для колоколообразного импульса ( $k = 1$ )

$$m(t) = e^{-t^2/T^2},$$

уравнение линий равной высоты имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 = C^2. \quad (3.10.25)$$

При  $\omega_0^2 \neq 0$  окружность превращается в эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = C^2, \quad (3.10.26)$$

где полуоси  $a$  и  $b$  определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} &\approx 1 + k^2 \approx k^2, \\ \frac{1}{b^2} &\approx \frac{1}{1 + k^2} \approx \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10.27)$$

Одна полуось эллипса сжимается в  $k$  раз, а другая растягивается в  $k$  раз. Площадь эллипса при этом не меняется. Большая ось эллипса наклонена к оси  $\xi$  под углом  $\beta$  (рис. 3.12), где

$$\operatorname{tg} \beta \approx kT^2 \left(1 + \frac{1}{2k^2 T^4}\right) \approx kT^2. \quad (3.10.28)$$

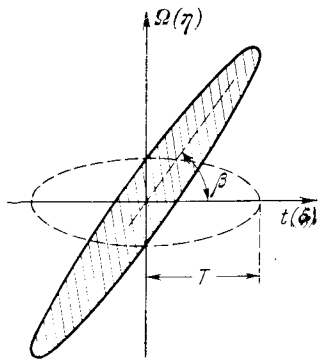


Рис. 3.12. Функция неопределенности функции Френеля с колоколообразной огибающей в координатах  $t$  и  $\Omega$ , выраженных через безразмерные координаты  $\xi$  и  $\eta$ . Приведены линии равной высоты функции неопределенности. Направление оси эллипса определяется параметром  $\omega_0$  функции Френеля  $z(t)$ .

В координатах  $\xi$ ,  $\eta$  уравнение оси эллипса имеет вид:

$$\eta \approx \omega_0^2 T^2 \xi. \quad (3.10.29)$$

Если перейти к исходной системе координат  $t$ ,  $\Omega$ , то

$$\Omega \approx 2\omega_0^2 t, \quad (3.10.30)$$

т. е. направление оси эллипса определяется величиной  $\omega_0$ , характеризующей функцию Френеля  $z(t)$ .

Элементарный сигнал (см. (3.10.19))

$$m_0(t) = e^{-t^2/T^2} e^{it^2/2} \quad (3.10.31)$$

обладает оптимальной информационной неопределенностью: неопределенности по времени  $\Delta t$  и по частоте  $\Delta\Omega$  равны между собой. Это достигается благодаря введению частотной модуляции исходной экспоненты  $e^{it}$ .

### § 3-11. Построение функции по заданной функции автокорреляции

Подобная задача эквивалентна задаче построения функций по заданному спектру мощности. С такой задачей встречаются при проектировании оптимальных фильтров.

Рассмотрим простейший пример. Пусть спектр мощности

$$S_0(\omega) = 1(\omega), \quad (3.11.1)$$

т. е. равномерно распределен по всем частотам. Задача решается следующим образом. Сначала необходимо найти ряд действительных чисел  $\alpha_m$  таких, которые одновременно удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{m=-n}^{+n} \alpha_m^2 &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{m=-n}^{+n} \alpha_m \alpha_{h+m} &= 0, \quad h \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11.2)$$

Подобные числа называют *некоррелированным множеством чисел*. Если с помощью этих чисел построить функцию

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta(t-k), \quad (3.11.3)$$

то автокорреляция этой функции равна

$$R_w(t) = \delta(t), \quad (3.11.4)$$

а спектр мощности (рис. 3.13)

$$S_w(\omega) = 1(\omega).$$

Разумеется, найденная функция  $w(t)$  не является единственной, так как можно построить бесконечную совокупность некоррелированных множеств типа (3.11.2).

Рассмотрим теперь общий случай, когда спектр мощности определяется произвольной положительной функцией  $S(\omega)$ . Ее можно представить как результат действия линейного фильтра,

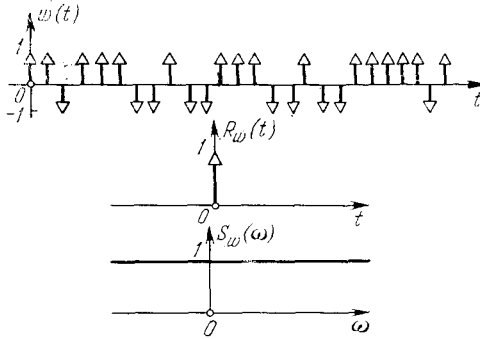


Рис. 3.13. Автокорреляция и спектр мощности некоррелированного множества чисел  $\pm 1, -1$ .

преобразующего равномерный спектр  $S_0(\omega) = 1(\omega)$  в заданный спектр  $S(\omega)$ . Характеристика такого фильтра  $G(\omega)$  должна удовлетворять соотношению

$$|S(\omega)| = |G(\omega)|^2 S_0(\omega) = |G(\omega)|^2. \tag{3.11.5}$$

Для решения такой задачи рассмотрим отклик линейного фильтра  $G(\omega)$  на функцию (3.11.3), обладающую равномерным спектром мощности:

$$f(t) = w(t) \otimes g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k g(t - k). \tag{3.11.6}$$

Спектр мощности на выходе фильтра  $G(\omega)$  равен

$$S_G(\omega) = S_0(\omega) |G(\omega)|^2 = S(\omega),$$

т. е. заданной функции  $S(\omega)$ . Тогда решение имеет вид

$$G(\omega) = \sqrt{S(\omega)} \cdot e^{i\Phi(\omega)}. \tag{3.11.7}$$

**Пример.** Определим функцию  $f(t)$ , автокорреляция которой равна треугольному импульсу:

$$\varphi(\tau) = \Lambda_T(t). \tag{3.11.8}$$

Спектр мощности  $S(\omega)$  равен фурье-образу функции автокорреляции:

$$S(\omega) = \frac{2 \sin^2 \omega T}{\omega^2 T^2}. \tag{3.11.9}$$

Сначала ищем  $G(\omega)$  в виде

$$|G(\omega)| = \sqrt{S(\omega)} = \sqrt{2} \left| \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right| \quad (3.11.10)$$

как, например,

$$G(\omega) = e^{-i\omega T} \sqrt{2} \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \quad (3.11.11)$$

Инверсный фурье-образ такой функции равен (рис. 3.14)

$$g(t) = \Pi_T(t - T). \quad (3.11.12)$$

Искомую функцию  $f(t)$  можно записать в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k g(t - kT),$$

где  $g(t)$  определена выражением (3.11.12) а множество чисел

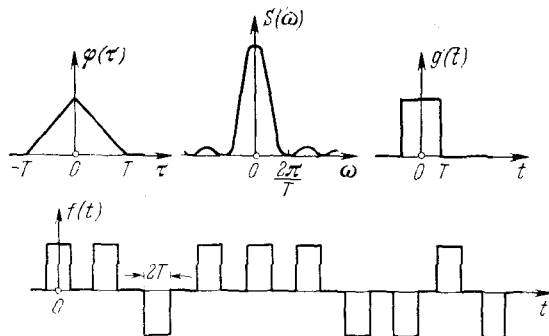


Рис. 3.14. Нахождение неизвестной функции  $f(t)$  по заданной функции автокорреляции. Функция  $g(t)$  — автокорреляция известной функции;  $S(\omega)$  — спектр мощности. Функция  $g(t)$  — частное решение задачи. Функция  $f(t)$  — наиболее общее решение задачи.

$\alpha_k$  — выражением (3.11.2). Искомая функция состоит из последовательности прямоугольных импульсов шириной  $2T$ , чередующихся в соответствии с последовательностью коэффициентов  $\alpha_k$ .

**Пример.** Пусть задан спектр мощности неизвестного сигнала

$$S(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^4}. \quad (3.11.13)$$

Тогда

$$|G(\omega)|^2 = G(\omega) G^*(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^4}. \quad (3.11.14)$$

Если функцию  $(1 + \omega^4)$  разбить на два множителя, комплексно-сопряженных друг другу, то получим

$$1 + \omega^4 = (1 + \sqrt{2}i\omega - \omega^2)(1 + \sqrt{2}i\omega - \omega^2)^*. \quad (3.11.15)$$

Отсюда

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}i\omega - \omega^2}. \quad (3.11.16)$$

Можно было бы взять и

$$G'(\omega) = \frac{1}{1 - \sqrt{2}i\omega - \omega^2},$$

но тогда отклик  $g(t)$  не был бы причинным. В этом можно убедиться с помощью преобразований Гильберта. Воспользовавшись решением задачи § 2.4, па-

ходим  $\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad 2\alpha = \sqrt{2},$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.11.17)$$

и

$$g(t) = \sqrt{2} e^{-t/\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot Y(t). \quad (3.11.18)$$

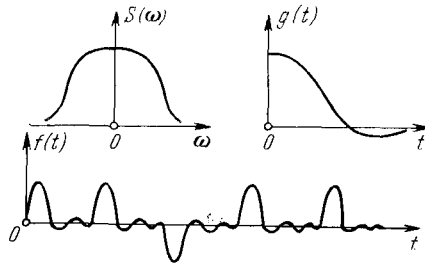


Рис. 3.15. Нахождение неизвестной исходной функции  $f(t)$  по заданной функции спектра мощности  $S(\omega)$ . Функция  $g(t)$  — частное решение задачи. Функция  $f(t)$  — наиболее общее решение задачи.

Окончательно искомую функцию  $f(t)$  можно представить в вид

$$f(t) = \sum_k \alpha_k g(t), \quad (3.11.19)$$

где  $g(t)$  определяется выражением (3.11.18). Функция автокорреляции равна

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|/\sqrt{2}} \cos \left( \frac{|t|}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.11.20)$$

На рис. 3.15 показаны функции  $S(\omega)$ ,  $g(t)$  и  $f(t)$ .

Остается теперь изложить метод построения множества некоррелированных чисел  $\alpha_k$ , который был предложен Винером. Множество строится путем образования цепочек сочетания из элементов  $+1$  и  $-1$ , с постепенным увеличением числа элементов в сочетании и записыванием полученных цифр в общую последовательность. Вначале берем по одному элементу  $+1$  и  $-1$ . Затем

добавляем к этим сочетаниям по второму элементу, чередуя элементы  $+1$  и  $-1$ . Получаем следующее звено цепочки:  $+1, +1$ ;  $+1, -1$ ;  $-1, +1$ ;  $-1, -1$ . Эти сочетания повторяем два раза. К полученным сочетаниям звена из двух элементов добавляем по третьему элементу, чередуя  $+1, -1$ . Возникает следующее звено цепочки:  $+1, +1, +1$ ;  $+1, +1, -1$ ;  $+1, -1, +1$ ;  $+1, -1, -1$ ;  $-1, +1, +1$ ;  $-1, +1, -1$ ;  $-1, -1, +1$ ;  $-1, -1, -1$ . Повторяем это звено из 24 элементов 4 раза.

Аналогично получаем звено сочетаний из 4 элементов, которые повторяем 8 раз, и т. д. В качестве нулевого элемента выбираем  $\alpha_0 = +1$  и, начиная с него, вводим нумерацию элементов. При этом

$$\alpha_{-n} = \alpha_n.$$

Приведем кусок цепочки элементов, примыкающий к нулевому элементу:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \alpha_4 \dots \\ | + | + | - | + | + | + | - | - | + | - | - | + | + | + | - | - | + | - | - | \\ | + | + | + | + | - | + | - | + | + | - | - | - | + | + | - | + | - | - | - | + | \\ | + | + | + | + | - | + | - | + | + | - | - | - | + | + | - | + | - | - | - | + | \\ | - | - | - | + | + | + | \dots \end{array}$$

В теории информации доказывается, что числа  $\alpha_n$  являются некоррелированными и удовлетворяют соотношению (3.11.2).

КОГЕРЕНТНОСТЬ СВЕТА

§ 4-1. Функция взаимной интенсивности

Если отвлечься от нелинейных оптических эффектов, наблюдаемых при очень сильных полях в световой волне, когда они становятся соизмеримыми с внутренними полями излучательной системы, то с достаточной степенью приближения можно считать, что электромагнитное поле обладает свойством *суперпозиции*. Два пучка света, пересекаясь в некоторой области пространства — свободного или заполненного средой, распространяются, не воздействуя друг на друга. Следствием свойства суперпозиции является то, что результирующее поле  $E_0$ , существующее в области взаимного пересечения двух пучков света, равно простой сумме полей в каждом из пучков:

$$E_0 = E_1 + E_2, \quad (4.1.1)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — векторы электрического поля в каждом из пучков света в отсутствие соответствующего другого пучка.

Электрическое поле  $E$  световой волны как функцию координат и времени измерить невозможно. Любой приемник света отзывается только на интенсивность света — суммарную или среднюю — в данной точке или объеме пространства, и поэтому наблюдаемой величиной является

$$I_{\text{набл}} = \int_0^T |E|^2 dt, \quad (4.1.2)$$

где  $T$  — время измерения, или же, иначе,

$$\frac{dI_{\text{набл}}}{dt} = |E|^2. \quad (4.1.3)$$

Если поля  $E_1$  и  $E_2$ , зависящие от координаты  $x$  и времени  $t$ , описываются нетождественными функциями указанных аргументов, то в области пересечения двух пучков света возникает явление *интерференции*, которое состоит в том, что поля двух световых волн складываются либо со взаимным усилением, либо со взаимным ослаблением, в зависимости от  $x$  и  $t$ .

Если же это условие не соблюдено, т. е. функции  $E_1$  и  $E_2$  подобны или же тождественны друг другу:

$$E_2 = A E_1, \quad (4.1.4)$$

где  $A$  — постоянное комплексное число, то

$$\frac{dI}{dt} = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = |\mathbf{E}_1 + A\mathbf{E}_1|^2 = |\mathbf{E}_1|^2 |1 + A|^2 = B |\mathbf{E}_1|^2. \quad (4.1.5)$$

Из этого соотношения видно, что интерференция здесь отсутствует.

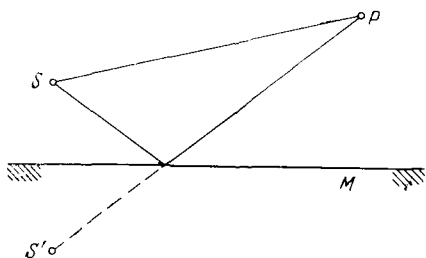


Рис. 4.1. Схема интерференционного эксперимента с использованием интерферометра Ллойда.  $S$  — точечный источник монохроматического света;  $P$  — точка наблюдения;  $S'$  — мнимое изображение источника  $S$  в зеркале  $M$ .

Поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  повсюду складываются с неизменной степенью усиления или ослабления. Так, например, если  $A = 1$ , то

$$\frac{dI}{dt} = 4 |\mathbf{E}_1|^2 = 4 \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.1.6)$$

Явление интерференции проще всего наблюдать в случае, когда свет линейно поляризован, причем одинаково во всех точках оптической системы. Тогда поле  $\mathbf{E}$  можно описать скалярной функцией  $f$ . Поэтому,

если  $f_1 \neq f_2$ , т. е. функции  $f_1$  и  $f_2$  не тождественны друг другу, то

$$\frac{dI}{dt} = |f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 + f_1 f_2^*. \quad (4.1.7)$$

Эффект интерференции создают перекрестные члены. Поскольку

$$\frac{dI_1}{dt} = |f_1|^2, \quad \frac{dI_2}{dt} = |f_2|^2, \quad (4.1.8)$$

то (4.1.7) запишется в виде

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + f_1^* f_2 + f_1 f_2^*, \quad (4.1.9)$$

и аналогичное соотношение для интенсивности:

$$I = I_1 + I_2 + \int_0^T (f_1^* f_2 + f_1 f_2^*) dt. \quad (4.1.10)$$

Таким образом, интенсивность света при интерференции не является аддитивной функцией координат и времени.

Рассмотрим простейший эксперимент по наблюдению интерференции света, осуществляемый с помощью интерферометра Ллойда (рис. 4.1). В точку  $S$  помещен неподвижный источник света, испускающий монохроматический свет длиной волны  $\lambda$ . В точку наблюдения  $P$  луч света может прийти двумя путями:



непосредственно вдоль прямой, соединяющей точку  $S$  с  $P$ , а также отразившись от зеркала  $M$ . Суммарное поле в точке  $P$  равно

$$E_P(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (4.1.11)$$

или

$$E_P(t) = f(t) + f(t - \tau), \quad (4.1.12)$$

где  $f(t)$  — амплитуда волны, создаваемая точечным источником  $S$ , а  $\tau$  — время запаздывания луча, отраженного от зеркала, по сравнению с прямым лучом. Относительное ослабление поля, обусловленное различием длин двух лучей света от точки  $S$  до точки  $P$ , как правило, весьма мало, и им можно пренебречь.

Приемник света в точке  $P$  регистрирует среднюю интенсивность

$$\begin{aligned} I(t, \tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T |E_P(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [|f(t)|^2 + |f(t - \tau)|^2 + f^*(t)f(t - \tau) + f(t)f^*(t - \tau)] dt. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Легко видеть, что интегралы

$$\int_0^T f^*(t)f(t - \tau) dt \quad \text{и} \quad \int_0^T f(t)f^*(t - \tau) dt \quad (4.1.14)$$

имеют структуру, близкую к функции автокорреляции (глава 3). Если предположить, что поле  $f(t)$  является стационарным, т. е. интегралы (4.1.14) зависят только от времени измерения  $T$  и времени запаздывания  $\tau$ , то в пределе, при  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} I(t, \tau) = I(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |E_P(t)|^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t - \tau)|^2 dt + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T |f^*(t)f(t - \tau)| dt = 2R(0) + 2R(\tau), \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

где  $R(\tau)$  — нормированная функция автокорреляции:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f^*(t) f(t - \tau)| dt. \quad (4.1.16)$$

Если излучение точечного источника является строго монохроматическим, то поле  $f(t)$  равно

$$f(t) = a_0 \cos(\varphi_0 - \omega_0 t), \quad (4.1.17)$$

где  $a_0$  и  $\varphi_0$  — действительные числа,  $\omega_0$  — частота излучаемой волны света. Нормированная функция автокорреляции в этом случае равна

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a_0^2 \cos(\varphi_0 - \omega_0 t) \cos[\varphi_0 - \omega_0(t - \tau)] dt = \\ &= \frac{a_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

а интенсивность света (рис. 4.2)

$$I(\tau) = I_0 [1 + \cos \omega_0 \tau]. \quad (4.1.19)$$

Контраст интерференционных полос  $\gamma$  в этом случае равен

$$\gamma = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \quad (4.1.20)$$

В действительности электромагнитные волны, испускаемые атомом, не могут быть строго монохроматическими. Главная из

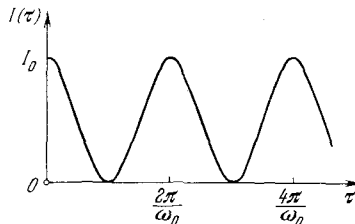


Рис. 4.2. Интенсивность света в точке  $P$  (рис. 4.1) в зависимости от времени запаздывания  $\tau$  для точечного монохроматического источника света.

причин состоит в том, что свет излучается короткими цугами, а в процессе излучения атом движется вдоль изломанной траектории. Эти, а также и другие факторы приводят к возникновению целого спектра частот.

Запишем фурье-образ поля световой волны  $f(t)$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.1.21)$$

а также обратный образ:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.1.22)$$

Интеграл (4.1.22) можно разбить на две части:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.1.23)$$

Если в первом интеграле сделать замену

$$\omega \rightarrow -\omega' \quad (4.1.24)$$

и изменить пределы интегрирования, то

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F(-\omega) e^{-i\omega t} + F(\omega) e^{i\omega t}] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F^*(\omega) e^{-i\omega t} + F(\omega) e^{i\omega t}] dt = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} 2F(\omega) e^{i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Учитывая, что

$$F(\omega) = A(\omega) e^{-i\Phi(\omega)}, \quad (4.1.26)$$

где  $A(\omega)$  и  $\Phi(\omega)$  — действительные функции частот, находим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2A(\omega) \cos[\omega t - \Phi(\omega)] d\omega. \quad (4.1.27)$$

Кроме косинусного фурье-образа можно ввести синусный фурье-образ:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2A(\omega) \sin[\omega t - \Phi(\omega)] d\omega. \quad (4.1.28)$$

Тогда аналитический сигнал  $V(t)$ :

$$V(t) = f(t) + i\chi(t). \quad (4.1.29)$$

Легко доказать, что аналитический сигнал  $V(t)$  содержит только положительные частоты. По определению

$$V(t) = f(t) + i\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2A(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\Phi(\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.1.30)$$

Следовательно, фурье-образ аналитического сигнала  $V(t)$  равен

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} F(\omega') \exp[i(\omega' - \omega)t] d\omega' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega') d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\omega' - \omega)t] dt = 2 \int_0^{\infty} F(\omega') \delta(\omega' - \omega) d\omega'. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Из свойств дельта-функции следует, что

$$V(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (4.1.32)$$

Таким образом, аналитический сигнал содержит только положительные частоты. Это означает, что функция  $\chi(t)$  равна гильбертовскому образу исходной действительной функции  $f(t)$ :

$$\chi(t) = \hat{\mathfrak{H}}[f(t)] = \frac{P}{\pi} \int \frac{f(t') dt'}{t' - t}, \quad (4.1.33)$$

где операторный символ  $\hat{\mathfrak{H}}$  обозначает преобразование Гильберта, или гильбертовский образ, а интеграл берется в смысле главного значения. Итак, аналитический сигнал определяется соотношением

$$V(t) = f(t) + i\chi(t) = f(t) + i\hat{\mathfrak{H}}[f(t)]. \quad (4.1.34)$$

Рассмотрим свойство аналитического сигнала для квазимонохроматического излучения, характеризующегося тем, что ширина спектра частот  $\Delta\omega$  значительно меньше средней частоты  $\omega_0$  ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ). Введя в выражение (4.1.30) среднюю частоту  $\omega_0$ , получим

$$V(t) = \frac{1}{\pi} e^{i\omega_0 t} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{-i\Phi(\omega)} \exp[i(\omega - \omega_0)t] d\omega = a(t) e^{i\omega_0 t}, \quad (4.1.35)$$

где

$$a(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \exp[i(\omega - \omega_0)t] d\omega = A(t) e^{ia(t)}. \quad (4.1.36)$$

Функцию  $a(t)$  можно рассматривать как мгновенную амплитуду поля световой волны, описываемой квазимонохроматическим аналитическим сигналом  $V(t)$  со средней частотой  $\omega_0$ .

Рассмотрим поле в точке  $P$ , возбуждаемое двумя неподвижными точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$ , световые колебания в которых определяются аналитическими сигналами  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$ , где  $t$  — момент времени, когда волны покидают источники. Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — интервалы времени, которые требуются для того, чтобы свет пробежал вдоль отрезков  $S_1P$  и  $S_2P$  соответственно. Для свободного пространства

$$\tau_1 = \frac{S_1P}{c}, \quad \tau_2 = \frac{S_2P}{c}, \quad (4.1.37)$$

где  $c$  — скорость света.

Аналитический сигнал в точке  $P$  в момент времени  $t$  равен

$$V(t) = V_1(t - \tau_1) + V_2(t - \tau_2). \quad (4.1.38)$$

Наблюдаемая интенсивность равна

$$I_P = \overline{V(t) V^*(t)}, \quad (4.1.39)$$

где черта сверху обозначает усреднение по бесконечно большому интервалу времени:

$$\overline{V(t) V^*(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t) V^*(t) dt. \quad (4.1.40)$$

Если ввести

$$\tau = \tau_2 - \tau_1, \quad (4.1.41)$$

то

$$\begin{aligned} I_P &= \overline{V(t) V^*(t)} = \overline{[V_1(t - \tau_1) + V_2(t - \tau_2)][V_1^*(t - \tau_1) + V_2^*(t - \tau_2)]} = \\ &= \overline{V_1(t - \tau_1) V_1^*(t - \tau_1)} + \overline{V_2(t - \tau_2) V_2^*(t - \tau_2)} + \\ &+ \overline{V_1(t - \tau_1) V_2^*(t - \tau_2)} + \overline{V_1^*(t - \tau_1) V_2(t - \tau_2)} = \\ &= \overline{V_1 V_1^*} + \overline{V_2 V_2^*} + \overline{V_1(t + \tau) V_2^*(t)} + \overline{V_1^*(t + \tau) V_2(t)}. \quad (4.1.42) \end{aligned}$$

Теперь можно определить *функцию взаимной интенсивности*  $\Gamma_{12}(\tau)$  колебаний волны от источников  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $P$ :

$$\Gamma_{12}(\tau) = \overline{V_1(t + \tau) V_2^*(t)}. \quad (4.1.43)$$

Нормированная величина

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{V_1 V_1^*} \sqrt{V_2 V_2^*}} = \frac{\overline{V_1(t+\tau) V_2^*(t)}}{\sqrt{V_1 V_1^*} \sqrt{V_2 V_2^*}} \quad (4.1.44)$$

называется *комплексной степенью когерентности* световых колебаний. Если, далее, обозначить

$$I_1 = \overline{V_1 V_1^*}, \quad I_2 = \overline{V_2 V_2^*}, \quad (4.1.45)$$

то (4.1.42) можно записать в виде

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \operatorname{Re}(\gamma_{12}(\tau)). \quad (4.1.46)$$

Это фундаментальное выражение гласит: интенсивность света в точке  $P$ , в которой складываются поля двух произвольных источников света, равна сумме интенсивностей света от каждого источника, включенного в отдельности, сложенной с действительной частью комплексной степени когерентности.

#### § 4-2. Свойства аналитического сигнала и функции взаимной интенсивности

Пусть  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$  — аналитические сигналы, соответствующие действительным функциям  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ .

Рассмотрим функцию корреляции электрических полей  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , прибывающих в точку  $P$  с относительной задержкой  $\tau$ :

$$\varphi_{12}(\tau) = \int f_1(t) f_2(t+\tau) dt = f_1(t) \otimes f_2(-t). \quad (4.2.1)$$

Легко убедиться в том, что

$$\int f_1(t) f_2(t+\tau) dt = \int \chi_1(t) \chi_2(t+\tau) dt, \quad (4.2.2)$$

где  $\chi(t)$  — гильбертовский образ функции  $f(t)$ . Действительно, согласно определению

$$\chi(t) = \hat{\mathfrak{H}}[f(t)] = \frac{P}{\pi} \int \frac{f(t') dt'}{t' - t}, \quad (4.2.3)$$

откуда

$$f(t) = -\hat{\mathfrak{H}}[\chi(t)] = -\hat{\mathfrak{H}}\hat{\mathfrak{H}}[f(t)], \quad (4.2.4)$$

или, символически,

$$\hat{\mathfrak{H}}\hat{\mathfrak{H}} = -1. \quad (4.2.5)$$

Воспользовавшись (4.2.3) и (4.2.4) и вспомнив, что действие линейного оператора на свертку эквивалентно линейному преобразованию одного из сомножителей свертки, получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{H}}\hat{\mathfrak{H}}[f_1(t) \otimes f_2(-t)] &= \hat{\mathfrak{H}}[f_1(t)] \otimes \hat{\mathfrak{H}}[f_2(-t)] = \\ &= \chi_1(t) \otimes \{-\chi_2(-t)\} = -\chi_1(t) \otimes \chi_2(-t), \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

где использовано равенство

$$\hat{\mathfrak{S}} [f(-t)] = -\chi(-t). \quad (4.2.7)$$

Поскольку операция  $\hat{\mathfrak{S}}\hat{\mathfrak{S}}$ , согласно (4.2.5), эквивалентна умножению на  $-1$ , то

$$f_1(t) \otimes f_2(-t) = \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t).$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} f_1(t) \otimes \chi_2(-t) &= \int f_1(t) \chi_2(t+\tau) dt = \\ &= - \int \chi_1(t) f_2(t+\tau) dt = -\chi_1(t) \otimes f_2(-t). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Теперь рассмотрим функцию кросс-корреляции аналитических сигналов  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$ , которую преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int V_1(t) V_2^*(t+\tau) dt &= V_1(t) \otimes V_2^*(-t) = \\ &= [f_1(t) + i\chi_1(t)] \otimes [f_2(-t) + i\chi_2(-t)]^* = f_1(t) \otimes f_2(-t) + \\ &+ \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t) + i\chi_1(t) \otimes f_2(-t) - if_1(t) \otimes \chi_2(-t). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Воспользовавшись (4.2.2) и (4.2.8), находим

$$\begin{aligned} V_1(t) \otimes V_2^*(-t) &= [f_1(t) \otimes f_2(-t) + \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t)] - \\ &- i\hat{\mathfrak{S}}[f_1(t)] \otimes f_2(-t) - i\hat{\mathfrak{S}}[\chi_1(t)] \otimes \chi_2(-t) = f_1(t) \otimes f_2(-t) + \\ &+ \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t) - i\hat{\mathfrak{S}}[f_1(t) \otimes f_2(-t) + \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t)]. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Таким образом, действительная и мнимая части кросс-корреляции  $V_1(t) \otimes V_2^*(-t)$  связаны между собой преобразованием Гильберта:

$$\text{Im} [V_1(t) \otimes V_2^*(-t)] = -\hat{\mathfrak{S}} \{ \text{Re} [V_1(t) \otimes V_2^*(-t)] \}. \quad (4.2.11)$$

Кроме того, на основании (4.2.2) получаем

$$\begin{aligned} \text{Re} [V_1(t) \otimes V_2^*(-t)] &= f_1(t) \otimes f_2(-t) + \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t) = \\ &= 2f_1(t) \otimes f_2(-t). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Применим полученные выше соотношения к случаю  $V_1 = V_2 = V$ . Имеем

$$\frac{1}{2} V(t) \otimes V^*(-t) = f(t) \otimes f(-t) - if(t) \otimes \chi(-t). \quad (4.2.13)$$

При  $\tau = 0$

$$\int V(t) V^*(t) dt = 2 \int f_1(t) f_1(t) dt,$$

а

$$\int f(t) \chi(t) dt = - \int \chi(t) f(t) dt = 0. \quad (4.2.14)$$

Следовательно, функции  $f(t)$  и  $\chi(t)$  взаимно ортогональны.

Используя функцию взаимной интенсивности  $\Gamma_{12}(\tau)$ , запишем найденные выше соотношения в виде

$$\Gamma_{12}(\tau) = \overline{V_1(t+\tau) V_2^*(t)} = 2[\Gamma_{12}^{ff}(\tau) - i\Gamma_{12}^{f\chi}(\tau)], \quad (4.2.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{12}^{ff}(\tau) &= \overline{f_1(t+\tau) f_2(t)}, \\ \Gamma_{12}^{f\chi}(\tau) &= \overline{f_1(t+\tau) \chi_2(t)}, \\ \Gamma_{12}^{f\chi}(0) &= 0, \\ \Gamma_{11}(0) &= 2\Gamma_{11}^{ff}(0) = 2I_1(P). \end{aligned} \right\} \quad (4.2.16)$$

Наконец, действительная и мнимая части функции взаимной интенсивности связаны соотношением Гильберта (4.2.11):

$$\Gamma_{12}^{\chi f}(\tau) = -\Gamma_{12}^{f\chi}(\tau) = \hat{\mathcal{G}}[\Gamma_{12}^{ff}]. \quad (4.2.17)$$

На основании последнего равенства можно утверждать, что функция взаимной интенсивности  $\Gamma_{12}(\tau)$  обладает свойствами аналитического сигнала.

Из определения функции  $\Gamma_{12}(\tau)$  также следует:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{21}(-\tau) &= \Gamma_{12}^*(\tau), \\ \Gamma_{21}(\omega) &= \Gamma_{12}^*(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (4.2.18)$$

где

$$\Gamma_{12}(\omega) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (4.2.19)$$

Таковы свойства аналитического сигнала и функции взаимной интенсивности, которые потребуются нам в дальнейшем.

### § 4-3. Процесс испускания света атомами

Монохроматические колебания световой волны с частотой  $\omega_0$ , согласно определению, описываются экспонентой с постоянными амплитудой и фазой:

$$V(t) = a_0 \exp i[\omega_0 t + \varphi_0]. \quad (4.3.1)$$

Комплексную амплитуду

$$a_0 e^{i\varphi_0} \quad (4.3.2)$$

можно изобразить на плоскости комплексной переменной точкой  $M(a_0 \cos \varphi_0; a_0 \sin \varphi_0)$  (рис. 4.3).

В действительности процесс излучения света атомом не может продолжаться бесконечно долго и обрывается спустя некоторое время  $\tau$  после начала. В идеальном случае колебания, продолжающиеся в течение интервала времени  $\tau$ , являются синусоидальными.



Амплитуду можно изобразить той же точкой  $M$  на комплексной плоскости. Однако фурье-образ цуга волн, испущенных атомом,

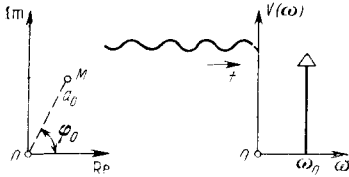


Рис. 4.3. Изображение амплитуды строго монохроматического электромагнитного излучения на комплексной плоскости.  $a_0$  — амплитуда колебаний;  $\varphi_0$  — начальная фаза. Справа показано спектральное распределение излучения — дельта-функция на частоте  $\omega = \omega_0$ .

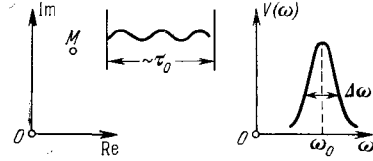


Рис. 4.4. Изображение амплитуды монохроматического электромагнитного излучения конечной длительности  $\tau_0$  на комплексной плоскости.  $V(\omega)$  — спектральное распределение;  $\Delta\omega \sim 1/\tau_0$ .

теперь уже не равен дельта-функции, как в случае бесконечно длинной синусоиды, а занимает конечный интервал частот (рис. 4.4).

Следующим приближением классической картины излучения света атомом является учет затухания. Теперь

$$a(t) = e^{-t/\tau} a_0 e^{i\varphi_0}. \quad (4.3.3)$$

На комплексной плоскости (рис. 4.5) амплитуду  $a(t)$  можно изобразить с помощью точки, движущейся вдоль отрезка  $MO$ . В момент  $t = 0$  амплитуда изображается точкой  $M$ , а при полном затухании — точкой, находящейся в начале координат  $O$ .

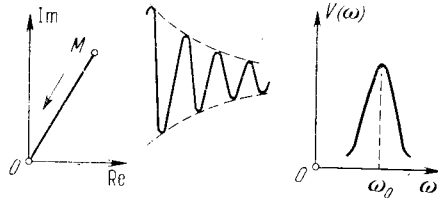


Рис. 4.5. Затухающее монохроматическое излучение изображается на комплексной плоскости движущейся точкой  $M$ ; спектральное распределение  $V(\omega)$  занимает некоторый интервал частот.

Кроме затухания существенным является доплеровский эффект. Если атом движется со скоростью  $v_0$ , то это приводит к изменению наблюдаемой частоты света на величину  $\delta\omega$ , равную

$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{v_0}{c}. \quad (4.3.4)$$

Наблюдаемое излучение атома описывается сигналом

$$V(t) = a_0 \exp i(\omega_0 + \delta\omega)t \quad (4.3.5)$$

или, с учетом затухания,

$$V(t) = e^{-t/\tau} a_0 e^{i\varphi_0} e^{i\delta\omega t} e^{i\omega_0 t}. \quad (4.3.6)$$

Из (4.3.6) видно, что амплитуда сигнала  $V(t)$ , равная

$$a(t) = a_0 e^{-t/\tau} \exp i(\delta\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (4.3.7)$$

изменяется как по величине, так и по фазе. На рис. 4.6 годограф амплитуды изобразится в виде спиралевидной кривой.

В процессе излучения атомы сталкиваются с соседними атомами, направление скорости изменяется случайно как по величине, так и по направлению, и поведение комплексной амплитуды во времени описывается сложной кривой (рис. 4.7).

Длительность  $\tau$  цуга волн, испускаемых атомом, весьма мала, и обычно время экспозиции превышает  $\tau$  на много порядков.

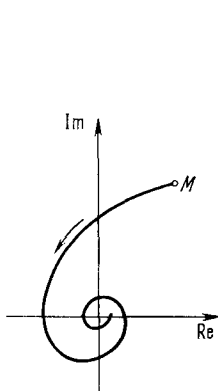


Рис. 4.6. Годограф амплитуды затухающего излучения, испускаемого движущимся атомом. Изменяется как амплитуда колебаний  $a(t)$  — вследствие затухания, так и фаза колебаний  $\varphi(t)$  — вследствие доплеровского эффекта.

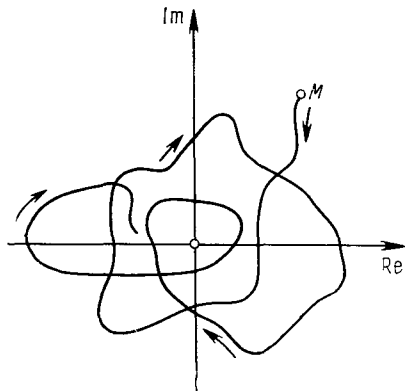


Рис. 4.7. Годограф амплитуды излучения атома, испытывавшего случайные соударения с соседними атомами.

Поэтому в любом опыте детектор регистрирует очень большое количество цугов волн, имеющих случайные фазы и случайно распределенных во времени.

Суммарный сигнал

$$V(t) = V_1(t - t_1) + V_2(t - t_2) + \dots, \quad (4.3.8)$$

где  $t_1, t_2, \dots$  — моменты начала излучения атомов. При этом сигналы  $V_h(t)$  имеют разную форму и продолжительность. Для каждого цуга волн можно записать:

$$V_h(t - t_h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_h(\omega) \exp i\omega(t - t_h) d\omega. \quad (4.3.9)$$

Тогда

$$V(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [V_1(\omega) e^{-i\omega t_1} + V_2(\omega) e^{-i\omega t_2} + \dots] e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.3.10)$$

Вводя среднюю частоту  $\omega_0$  и рассматривая  $V(t)$  как квазимонохроматический сигнал, находим

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} [V_1(\omega) e^{-i\omega t_1} + V_2(\omega) e^{-i\omega t_2} + \dots] e^{i(\omega - \omega_0)t} d\omega = \\ &= e^{i\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)t} d\omega = e^{i\omega_0 t} \cdot a(t), \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

где

$$V(\omega) = V_1(\omega) e^{-i\omega t_1} + V_2(\omega) e^{-i\omega t_2} + \dots \quad (4.3.12)$$

Таким образом, получаем

$$V(t) = a(t) e^{i\omega_0 t}. \quad (4.3.13)$$

Здесь амплитуда или оптический сигнал  $a(t)$  отображает вариации комплексной амплитуды большого числа цугов волн. Так же как и для одного цуга волн конечной длительности (рис. 4.4), амплитуда  $a(t)$  в (4.3.13) изменяется медленно по сравнению с периодом колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Амплитуда  $a(t)$  на комплексной плоскости состоит из большого числа кривых, образующих в совокупности весьма сложную картину. Эта картина усредняется при наблюдении. Поскольку время экспозиции  $T$  обычно весьма велико по сравнению с длительностью высвечивания атома, то среднее значение

$$\overline{a(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a(t) dt = 0, \quad (4.3.14)$$

так как любому значению  $a(t)$  всегда можно подыскать на комплексной плоскости симметричную точку.

Приемник света регистрирует только интенсивность света или квадрат амплитуды  $|a(t)|^2$ . При усреднении

$$\overline{|a(t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |a(t)|^2 dt. \quad (4.3.15)$$

Эксперимент показывает, что когерентность двух пучков света, интерферирующих между собой, определяется длительностью цуга волн, т. е. временем когерентности или же длиной когерентности. Оценим эти величины.

Рассмотрим простейший пример, когда аналитический сигнал представляет собой гармонику конечной продолжительности  $\theta$ :

$$V(t) = \begin{cases} V_0 e^{i\omega_0 t}, & |t| \leq \frac{\theta}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (4.3.16)$$

Ее фурье-образ равен

$$V(\omega) = V_0 \int_{-\theta/2}^{\theta/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = V_0 \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\theta}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\theta}{2}}, \quad (4.3.17)$$

а энергетический спектр (рис. 4.8)

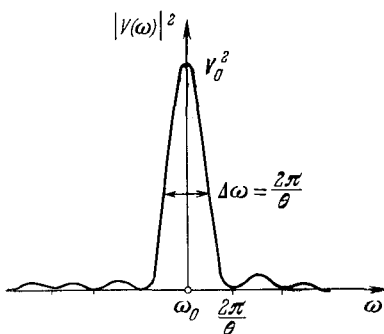


Рис. 4.8. Энергетический спектр излучения, описываемого гармоникой конечной продолжительности.

$$|V(\omega)|^2 = V_0^2 \left| \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\theta}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\theta}{2}} \right|^2. \quad (4.3.18)$$

Полуширина кривой  $|V(\omega)|^2$  равна

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\theta}. \quad (4.3.19)$$

Таким образом, ширина спектра определяет продолжительность цуга  $\theta$ . Интервал времени  $\theta$  называется *временем когерентности*. Далее, если ввести длину  $l$ , равную

$$l = \theta c, \quad (4.3.20)$$

и учесть, что  $\lambda_0 = c/v_0$ ,  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ , то

$$|\Delta\lambda| = c \frac{\Delta\nu}{\nu_0^2} = \Delta\nu \cdot \frac{\lambda_0^2}{c}, \quad (4.3.21)$$

а

$$l = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}. \quad (4.3.22)$$

Длина  $l$  называется *длиной когерентности*. Например, для  $\Delta\lambda = 300 \text{ \AA}$  длина когерентности

$$l = \frac{(0,5)^2}{0,03} = 8 \text{ мкм.}$$

Для наиболее монохроматических тепловых источников длина когерентности составляет около 1 м. С помощью лазера можно достичь длины когерентности в сотни километров.

Для типичного лазерного излучения с шириной линии  $\Delta\lambda = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$ , что соответствует полосе частот  $\Delta\nu = 500 \text{ Мгц}$ , длина когерентности равна  $l = c/\Delta\nu = 3 \cdot 10^{10}/5 \cdot 10^8 = 60 \text{ см}$ , а время когерентности  $\theta = l/c = 60/3 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$ . Так как период колебаний  $T_0 = \lambda/c = 0,5 \cdot 10^{-4}/3 \cdot 10^{10} = 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ сек}$ , то в одном пуге укладывается  $\theta/T_0 = 2 \cdot 10^{-9}/1,7 \cdot 10^{-15} \approx 10^6$  периодов.

#### § 4-4. Временная и пространственная когерентность

Рассмотрим точечный источник  $S$ , который испускает квази-монохроматический пучок волн (рис. 4.9). В точке  $A$  оптическое устройство разбивает падающую волну на две волны, которые распространяются вдоль лучей 1 и 2. Второй луч в точке  $B$  испытывает обратный излом, так что оба луча вновь пересекаются в точке  $P$ . Пусть, как обычно, за время измерения в точку  $P$  приходит много пучков волн со случайными характеристиками: моментами прибытия,

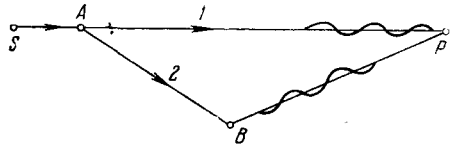


Рис. 4.9. Схема интерференционного эксперимента при конечной длительности пучка волн, испускаемых точечным источником  $S$ .  $A$  — светоделитель;  $B$  — зеркало;  $P$  — точка наблюдения.

амплитудами и фазами. Каждый пучок в точке  $A$  делится на две волны. Предположим, что разность длин лучей  $AP$  и  $ABP$  больше длины пучка. В тот момент, когда пучок, движущийся вдоль луча  $AP$ , прибыл в точку  $P$ , другой пучок, идущий вдоль ломаной  $ABP$ , еще находится где-то между точками  $B$  и  $P$ . Эти два пучка не налагаются друг на друга в точке  $P$ . В точке  $P$  могут накладываться только различные пучки волн, которые по определению не коррелируют друг с другом, так как пучки, испускаемые источником  $S$ , также не коррелируют между собой. Если, как обычно, через  $\tau$  обозначить запаздывание лучей света, идущих по лучу  $ABP$ , относительно лучей света, распространяющихся по лучу  $AP$ , то взаимная когерентность колебаний в точке  $P$  равна автокорреляции аналитического сигнала  $V(t)$ :

$$\Gamma(\tau) = \overline{V(t + \tau)V^*(t)}. \quad (4.4.1)$$

Взаимная когерентность  $\Gamma(\tau)$  достигает максимума при  $\tau = 0$ , и тогда она равна энергии излучения, испускаемого источником  $S$ . С увеличением  $\tau$  взаимная когерентность  $\Gamma(\tau)$  уменьшается, как это видно из рис. 4.10 для случая конечной синусоиды. Это — случай частичной когерентности. В пределе, при  $\tau \gg \theta$ , взаимная когерентность обращается в нуль:

$$\Gamma(\tau) = \overline{V(t + \tau)V^*(t)} = 0 \quad (\tau \gg \theta), \quad (4.4.2)$$

так как колебания  $V(t + \tau)$  и  $V^*(t)$  не имеют никакой связи друг с другом, а на комплексной плоскости амплитуды сигналов

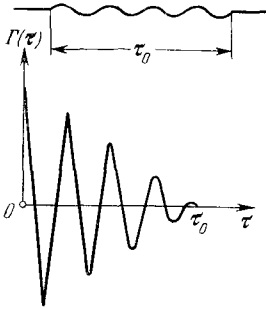


Рис. 4.10. Взаимная когерентность монохроматического излучения конечной продолжительности.

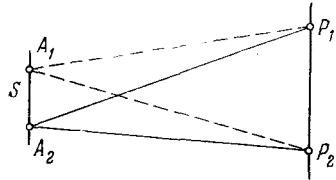


Рис. 4.11. Схема интерференционного эксперимента с протяженным источником  $S$  монохроматического излучения, иллюстрирующая понятие пространственной когерентности между колебаниями в точках  $P_1$  и  $P_2$ .

$a(t)$  и  $a^*(t)$  изображаются точками, симметричными относительно начала координат.

Теперь перейдем к протяженному источнику  $S$  (рис. 4.11), излучение которого строго монохроматическое. Рассмотрим две точки  $P_1$  и  $P_2$  на экране, освещаемом источником  $S$ . Атом  $A_1$  посылает когерентные колебания в точки  $P_1$  и  $P_2$  экрана, и так как эти точки находятся от  $A_1$  на разных расстояниях, то колебания приходят в точки  $P_1$  и  $P_2$  с разностью фаз  $\varphi_1$ . Излучение от атома  $A_2$  приходит в точки  $P_1$  и  $P_2$  с разностью фаз  $\varphi_2$ . Аналогично, все другие атомы источника  $S$  обладают своими разностями фаз. Между значениями  $\varphi_i$  нет никакой корреляции, так как атомы испускают свет независимо.

Если оптическая разность хода  $A_1P_2 - A_1P_1$  меньше длины волны света, то разности фаз  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  всегда малы, а в точки  $P_1$  и  $P_2$  излучение от всех атомов прибывает практически в фазе. Степень когерентности освещения в двух точках  $P_1$  и  $P_2$  равна 1.

Если теперь увеличивать размер источника  $S$ , то разность хода  $A_1P_2 - A_1P_1$  станет произвольно большой по сравнению

с длиной волны. Колебания  $V_1(t)$  в  $P_1$ , возбуждаемые источником  $S$  в момент времени  $t$ , не равны уже колебаниям  $V_2(t)$  в  $P_2$ , возбуждаемым источником  $S$  в тот же момент времени  $t$ .

Колебания в точках  $P_1$  и  $P_2$  характеризуются взаимной когерентностью

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{V_1(t)V_2^*(t)}, \quad (4.4.3)$$

которая называется *пространственной когерентностью*. При безграничном увеличении размеров источника наступит положение, когда  $\Gamma_{12}(0)$  окажется равной нулю и точки  $P_1$  и  $P_2$  станут некогерентными.

Таким образом, временная когерентность измеряется функцией автокорреляции  $\Gamma(\tau)$ , а пространственная когерентность — функцией взаимной когерентности  $\Gamma_{12}(0)$ .

### § 4-5. Временная когерентность

Рассмотрим интерферометр Майкельсона, состоящий из коллимирующих линз  $L_1$  и  $L_2$ , светоделителя  $D$  и двух зеркал  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 4.12). Источник монохроматического света расположен

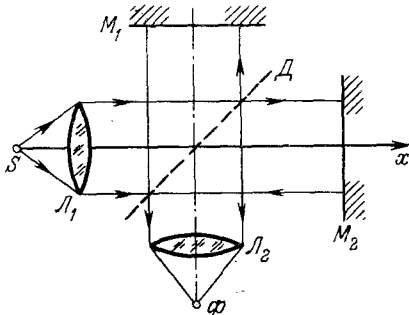


Рис. 4.12. Интерферометр Майкельсона.  $L_1$  и  $L_2$  — коллимирующие линзы;  $D$  — светоделитель;  $M_1$  — неподвижное зеркало;  $M_2$  — зеркало, движущееся вдоль оси  $x$  с небольшой постоянной скоростью;  $\Phi$  — фотоприемник.

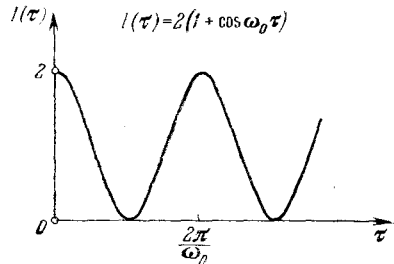


Рис. 4.13. Сигнал интерференции, наблюдаемый в приемнике света  $\Phi$  (рис. 4.12), в зависимости от времени запаздывания  $\tau$  в случае монохроматического источника света.

в точке  $S$ , а фотоэлектрический приемник — в точке  $\Phi$ . Одно из зеркал,  $M_2$ , движется поступательно вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью. Интенсивность, регистрируемая в приемнике света, определяется временем запаздывания  $\tau$  и частотой  $\omega_0$ :

$$I(\tau) = 1 + 1 + 2 \cos \omega_0 \tau = 2 [1 + \cos \omega_0 \tau] \quad (4.5.1)$$

(рис. 4.13). Если  $n$  — показатель преломления среды, то время запаздывания

$$\tau = \frac{n(l_1 - l_2)}{c}, \quad (4.5.2)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме, а  $l_1$  и  $l_2$  — длины лучей в плечах интерферометра Майкельсона.

Пусть теперь спектр излучения источника  $S$  не является монохроматическим, а заполняет все частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega \rightarrow \infty$ . Если излучения на различных частотах статистически некоррелированы, то для каждой частоты  $\omega_i$  приемник зарегистрирует интенсивность

$$I_i(\tau) = \Phi(\omega_i) \Delta\omega \cdot 2(1 + \cos \omega_i \tau). \quad (4.5.3)$$

Суммарная интенсивность, регистрируемая приемником света при неизменной эффективности последнего ко всем длинам волн, равна

$$I(\tau) = 2 \int_0^{\infty} (1 + \cos \omega \tau) \Phi(\omega) d\omega. \quad (4.5.4)$$

В то же время в общем случае согласно (4.1.15)

$$I(\tau) = 2 [R(0) + R(\tau)],$$

где

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |f^*(t) f(t + \tau)| dt$$

— нормированная функция автокорреляции. Из сравнения (4.5.4) и (4.1.15) заключаем, что

$$R(0) = \int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega, \quad (4.5.5)$$

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.5.6)$$

Таким образом, нормированная функция автокорреляции  $R(\tau)$  равна косинусному фурье-образу энергетического спектра  $\Phi(\omega)$  излучения источника.

Рассмотрим частный случай узкого спектра с прямоугольным контуром (рис. 4.14). Здесь регистрируемая интенсивность равна

$$\begin{aligned} I(\tau) &= 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} d\omega + 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega \tau d\omega = \\ &= 4\Delta\omega \left[ 1 + \cos \omega_0 \cdot \tau \left( \frac{\sin \Delta\omega \cdot \tau}{\Delta\omega \cdot \tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Сравнивая выражение (4.5.7) с выражением (4.5.1), относящимся к случаю строго монохроматического излучения, видим, что



синусоида приобрела огибающую функцию, равную функции отсчетов. На рис. 4.15 показан график выражения (4.5.7). Первый

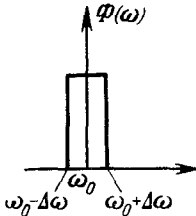


Рис. 4.14. Идеализированный спектр излучения в виде прямоугольного импульса шириной  $2\Delta\omega$ , расположенного вокруг средней частоты  $\omega_0$ .

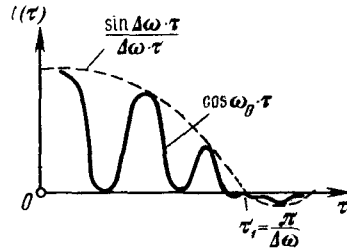


Рис. 4.15. Сигнал интерференции, наблюдаемый в интерферометре Майкельсона (рис. 4.12) для спектра в виде прямоугольного импульса (рис. 4.14), состоит из косинусоиды частоты  $\omega_0$ , промодулированной функцией отсчета, которая определяется шириной спектра  $\Delta\omega$ .

минимум огибающий  $\sin(\Delta\omega \cdot \tau)/\Delta\omega \cdot \tau$  расположен при  $\Delta\omega \cdot \tau_1 = \pi$ . Таким образом, ширина кривой  $\sin(\Delta\omega \cdot \tau)/\Delta\omega \cdot \tau$  находится в обратном соотношении с шириной спектральной линии  $\Delta\omega$ .

#### § 4-6. Интерференция волн различных частот

В предыдущем параграфе предполагалось, что излучения на различных частотах взаимно некоррелированы. Однако этим случаем не исчерпываются все реализуемые возможности, так как можно создать условия, при которых наблюдается интерференция волн различных частот.

Любой эксперимент со светом характеризуется тем, что приемник света регистрирует интенсивность света, равную квадрату модуля сигнала  $V(t)$ :

$$I(t) = V(t) V^*(t). \quad (4.6.1)$$

Чтобы найти фурье-образ функции  $I(t)$ , воспользуемся общим правилом теории интегральных линейных преобразований, согласно которому умножение двух функций эквивалентно свертке соответствующих фурье-образов. Поэтому, если

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{\mathcal{F}}[V(t)], \quad (4.6.2)$$

то фурье-образ интенсивности, или энергетический спектр интенсивности  $I(t)$ , равен

$$\hat{\mathcal{F}}[I(t)] = V(\omega) \otimes V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) V(\omega' - \omega) d\omega. \quad (4.6.3)$$

Рассмотрим простейший пример: источник испускает цуги синусоид продолжительностью  $\theta$  на частоте  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t, & |t| < \frac{\theta}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (4.6.4)$$

Фурье-образ такой волны света равен

$$F(\omega) = \frac{\theta}{2} \left[ \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_1)\theta}{2}}{\frac{(\omega - \omega_1)\theta}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_1)\theta}{2}}{\frac{(\omega + \omega_1)\theta}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_2)\theta}{2}}{\frac{(\omega - \omega_2)\theta}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_2)\theta}{2}}{\frac{(\omega + \omega_2)\theta}{2}} \right]. \quad (4.6.5)$$

Более точно, здесь предполагается, что спектр  $F(\omega)$  состоит из непрерывающихся квазимонохроматических спектральных

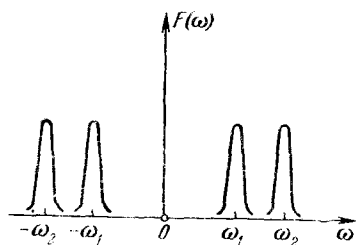


Рис. 4.16. Фурье-образ сигнала, полученного при наложении двух косинусоид с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и продолжительностью  $\theta$ .

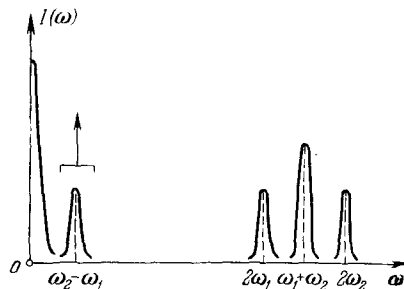


Рис. 4.17. Спектр интенсивности сигнала, регистрируемого в форме зависимости фотона  $I(t)$  от времени, в опыте с наложением двух монохроматических волн разных частот и конечной продолжительности. Низкочастотный пик на разностной частоте  $\omega_2 - \omega_1$  усиливается и регистрируется. Остальные пики на суммарных и удвоенных частотах не могут быть зарегистрированы фотоумножителем.

линий, как это показано на рис. 4.16: всего имеется четыре одинаковых линии, две из них соответствуют положительным частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а две другие — отрицательным частотам  $-\omega_1$  и  $-\omega_2$ .

Найдем энергетический спектр  $I(\omega)$  фототока  $I(t)$ . Для этого вычислим автосвертку функции  $F(\omega)$ . Результат такой операции приведен на рис. 4.17. Спектральное распределение энергии фототока  $I(t)$  состоит из 5 пиков. Один из пиков располагается на нулевой частоте и соответствует постоянной составляющей тока на выходе фотоумножителя. Остальные четыре пика соответствуют колебаниям на частотах  $\omega_2 - \omega_1$ ,  $2\omega_1$ ,  $\omega_1 + \omega_2$  и  $2\omega_2$ . Колебания световых частот  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  и  $\omega_1 + \omega_2$  обнаружить с помощью фотоумножителя нельзя. Только частота  $\omega_2 - \omega_1$  попадает в радиодиапазон, и поэтому ее можно зарегистрировать.

На рис. 4.18 приведена схема эксперимента для наблюдения биения частот, осуществляемого с помощью лазеров. На фотокатод фотоумножителя с помощью зеркал  $M_1$  и  $M_2$  направляется пучок света от лазеров 1 и 2. В экспериментах Джаселя и др. было обнаружено, что частоты биения составляют около 1700 гц, т. е. частоты излучения двух лазеров отличались на очень малую величину. Такая монохроматичность соответствует длине когерентности, равной около 200 км.

Явление биения частот можно наблюдать с помощью одного лазера, используя линии, образующиеся вследствие разных форм продольных колебаний или мод в резонаторе лазера. Рассмотрим лазер с плоскими зеркалами, расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга. Условие резонанса для колебаний в виде плоской волны с однородной фазой и длиной волны  $\lambda_1$  можно записать в виде

$$L = n \frac{\lambda_1}{2}, \quad (4.6.6)$$

где  $n$  — целое число, примерно равное  $10^5 - 10^6$ . Резонансное условие для другой волны  $\lambda_2$ :

$$L = (n \pm 1) \frac{\lambda_2}{2}, \quad (4.6.7)$$

откуда

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{1}{2L}, \quad (4.6.8)$$

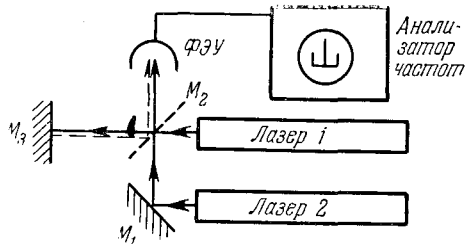


Рис. 4.18. Схема эксперимента для наблюдения «биения частот» двух лазеров.  $M_1$  и  $M_2$  — зеркала;  $M_3$  — светоделитель. Сигнал от ФЭУ поступает на анализатор частот.

или

$$\frac{\Delta\nu}{c} = \frac{1}{2L}. \quad (4.6.9)$$

Для газового лазера  $L \approx 1$  м, а

$$\Delta\nu = 150 \text{ Мгц}. \quad (4.6.10)$$

Схема эксперимента с одним лазером приведена на рис. 4.19. Пучок света от лазера падает на фотоумножитель, сигналы с которого поступают на анализатор частот, и таким образом оказывается возможным зарегистрировать пик на частоте биения  $\omega_2 - \omega_1$ .

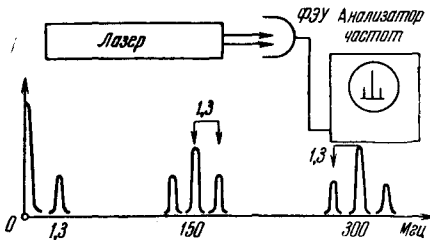


Рис. 4.19. Схема эксперимента для наблюдения «биения частот» между различными модами излучения одного лазера. Свет от лазера направляется в ФЭУ, сигнал с которого поступает на анализатор частот, который анализирует спектр разностных частот между различными модами. Наблюдаемый спектр имеет сложную структуру. Разность частот 150 Мгц вызвана биением двух продольных мод, разность частот 1,3 Мгц — двух условных мод в лазере.

Первый эксперимент по наблюдению явления биений был выполнен на обычной линии ртути 5461 Å, расщепленной на несколько компонент в магнитном поле с помощью эффекта Зеемана. Для того чтобы наблюдать в этом эксперименте биение частот, излучение на которых было полностью некогерентным, необходимо, чтобы время когерентности было намного

больше периода биения, а фотоумножитель мог бы разрешать времена более короткие, чем период биения.

Условие

$$\tau \gg \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \quad (4.6.11)$$

означает, что ширина каждого пика должна быть мала по сравнению с интервалом  $\omega_2 - \omega_1$ , разделяющим пики.

Возникающие при этом частоты биения соответствовали радиосигналам 3-см диапазона, что определило технику наблюдения эффекта биения. На рис. 4.20 показаны зависимости суммарного электрического поля, т. е. свертки двух полей на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также фототока от времени.

Естественно, что в условиях описываемого эксперимента не могло возникать стационарной интерференционной картины, и эффекты интерференции удавалось обнаружить только путем развертки явления во времени. Волны света различных длин волн во всех этих случаях были стационарно взаимно некогерентны. В этом

эксперименте также фактически было доказано, что при наложении двух некогерентных пучков света различных частот с  $n$  и  $a$   $\chi$   $a$   $\chi$  происходит сложение их амплитуд, а затем в фотоэлектрическом устройстве регистрируется модуль суммарной амплитуды, возведенный в квадрат вследствие нелинейной природы приемника света.

Поэтому, хотя интенсивность некогерентного излучения записывается как сумма квадратов амплитуд каждого из пучков света, фактически процесс разыгрывается иначе: сначала происходит суперпозиция амплитуд, а затем детектируется суммарное поле. Стационарная интерференционная картина исчезает только благодаря статистическому усреднению интерференционных эффектов при длительном времени наблюдения.

Чтобы обнаружить интерференцию некогерентных пучков света разных частот, необходимо показания приемника света — значения фототока — развернуть во времени.

Возможно, однако, осуществить условия, при которых разность частот  $\omega_2 - \omega_1$  является определенной функцией координат. В этом случае интерferируют волны, взаимно когерентные между собой, хотя и разных частот. Такой эффект действительно наблюдается, если одно из зеркал интерферометра Майкельсона перемещать с некоторой скоростью, в результате чего возникает эффект Доплера.

Действительно, пусть зеркало  $M_2$  движется со скоростью  $v$ , значительно меньшей скорости света  $c$ . Тогда наблюдаемая частота равна

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right), \quad (4.6.12)$$

где  $\theta_0$  — угол, под которым свет отражается от движущегося зеркала. При падении лучей по нормали  $\theta_0 = 0$  и

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \right). \quad (4.6.13)$$

Поэтому в интерферометре с движущимся зеркалом стационарно интерferируют волны различных частот. Относительное изменение

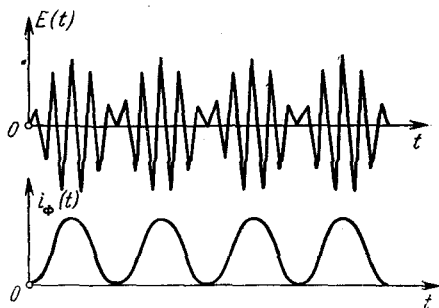


Рис. 4.20. Зависимость суммарного электрического поля  $E(t)$ , имеющая смысл свертки двух сигналов на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также фототока  $i_{ph}(t)$  от времени.

частоты равно

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{2v}{c}. \quad (4.6.14)$$

Если  $x = vt$ , то за интервал времени  $t$  в интерферометре пройдет  $v_0 t$  волн на частоте  $v_0$  и

$$vt = v_0 \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \right) t \quad (4.6.15)$$

волн на частоте  $v$ .

Если

$$\Delta t (v - v_0) = \pm 1, \quad (4.6.16)$$

то за интервал времени  $\Delta t$  совершится одно биение.

При этом

$$v\Delta t - v_0\Delta t = v_0\Delta t + \frac{2v\Delta t}{c} - v_0\Delta t = \frac{2v_0\Delta x}{c} = 2 \frac{\Delta x}{\lambda}, \quad (4.6.17)$$

откуда

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}. \quad (4.6.18)$$

Именно на эту величину смещены полосы интерференционной картины, регистрируемой на неподвижной фотопластинке. Такая же стационарная интерференционная картина в пространстве наблюдается, когда с небольшой пространственной скоростью перемещается зеркало и происходит интерференция волн света различных частот.

Причина такой идентичности интерференционных картин состоит в том, что волны света, отраженные как от неподвижного, так и от подвижного зеркала, когерентны между собой, т. е. выполнено основное условие стационарности:

$$I(t, \tau) \equiv I(\tau).$$

Интенсивность суммарного поля зависит только от времени запаздывания одного луча относительно другого. Линейный эффект Доплера обеспечивает выполнение этого условия: запаздывание  $\tau$  пропорционально смещению зеркал. Релятивистский эффект Доплера, хотя его практически невозможно наблюдать, привел бы к разрушению этой стационарности и к размытию интерференционной картины.

Вернемся к интерференции световых волн разных частот, которая в общем случае не является стационарной в пространстве. Однако если движение интерференционной картины совпа-

дает с движением интерференционного зеркала, то картина стационарности в пространстве сохраняется (эффект стробоскопичности).

Бегущую интерференционную картину можно наблюдать с помощью вращающейся фотографической пластинки. Схема эксперимента показана на рис. 4.21. В основе его лежит опыт Юнга с двумя щелями  $S_1$  и  $S_2$ , освещаемыми щелевым источником  $S_0$ . Излучение источника достаточно монохроматическое. В установку

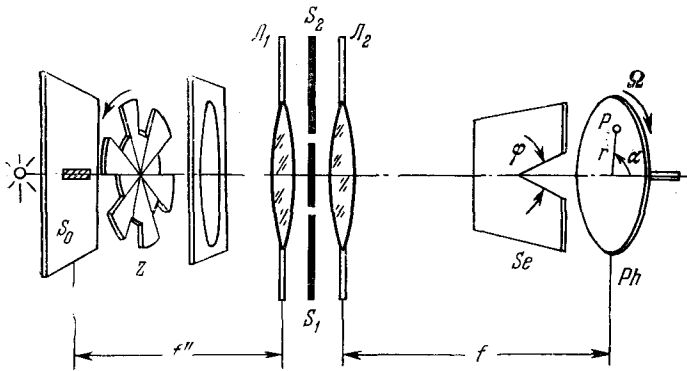


Рис. 4.21. Схема опыта Фр. Фишера для наблюдения бегущей картины от двух щелей Юнга  $S_1$  и  $S_2$ , освещаемых щелевым источником  $S_0$  через прерыватель света  $Z$ . Регистрирующая фотопластинка  $Ph$  вращается за неподвижной секторной диафрагмой  $Se$ .

входит прерыватель света  $Z$ , секторная диафрагма  $Se$  и вращающаяся синхронно с прерывателем фотографическая пластинка  $Ph$ .

Электрическое поле в точке  $P$  на фотопластинке можно выразить с помощью аналитического сигнала

$$V(t) = e^{i\omega_1 \left(t + \frac{\tau}{2}\right)} + e^{i\omega_2 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)}. \quad (4.6.19)$$

Интенсивность  $I(t, \tau)$ , равная

$$I(t, \tau) = V(t)V^*(t) = 2 \left\{ 1 + \cos \left[ (\omega_1 - \omega_2)t + (\omega_1 + \omega_2) \frac{\tau}{2} \right] \right\}, \quad (4.6.20)$$

промодулирована как во времени  $t$ , так и в пространстве  $\tau = \tau(z, d)$ . Интерференционная картина в виде эквидистантных полос, образующихся в плоскости наблюдения, движется со

скоростью

$$\frac{dz}{dt} = f \frac{d\alpha}{dt}, \quad (4.6.21)$$

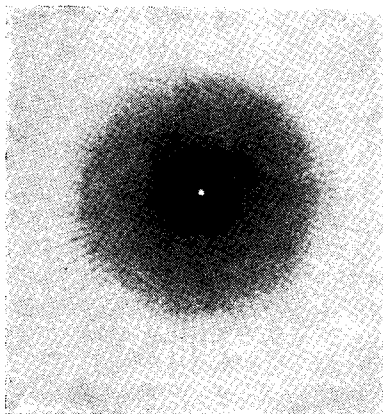
где  $\alpha$  — угол, определяющий положение точки наблюдения  $P$ . При этом

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{c}{d} \frac{d\tau}{dt} = \frac{c}{d} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad (4.6.22)$$

где  $c$  — скорость света, а

$$\frac{dz}{dt} = 2 \frac{fc}{d} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (4.6.23)$$

Если фотопластинку перемещать с такой же скоростью, то на ней зарегистрируется стоячая интерференционная картина. Поскольку величина  $dz/dt$  не известна, то в опыте используется вращающаяся фотопластинка, точки которой имеют разные окружные скорости, линейно связанные с расстоянием  $r$  до оси вращения. Если радиус  $r$ , угловая скорость вращения  $\Omega$  и скорость движения интерференционных полос удовлетворяют соотношению



$$r\Omega = \frac{dz}{dt}, \quad (4.6.24)$$

Рис. 4.22. Фотография интерференционной картины, полученная при скорости вращения 375 об/мин и разности частот  $\sigma = \Delta\omega_0 = 600$  гц.

то на фотопластинке возникнет система радиальных полос. Остальные участки фотопластинки засвечиваются равно-

мерно. Расстояние между интерференционными полосами равно

$$\Delta z = \frac{dz}{dt} \Delta T = \frac{dz}{dt} \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{cf}{d} \frac{2}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (4.6.25)$$

При этом

$$\frac{dz}{dt} = \Delta z \sigma = \frac{\Delta z}{\Delta T}, \quad (4.6.26)$$



где

$$\sigma = \omega_1 - \omega_2. \quad (4.6.27)$$

Таким образом, скорость перемещения интерференционной картины равна расстоянию между полосами, умноженному на разность частот.

Для того чтобы каждый участок фотопластинки освещался равномерно, используется секторная диафрагма. С помощью прерывателя  $Z$  пучок света модулируется по амплитуде, в результате

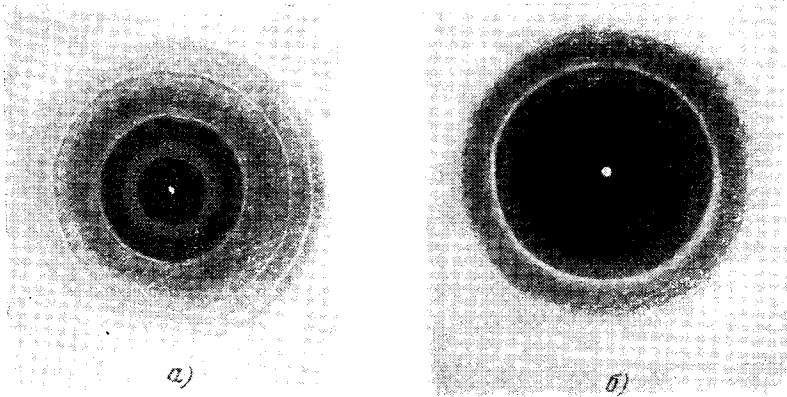


Рис. 4.23. Интерференционные полосы обертонов разностной частоты. а)  $\Delta\omega' = \sigma_0$ ; б)  $\Delta\omega'' = 3\sigma_0$  (см. рис. 4.21 и 4.22).

чего в сигнале  $V(t)$  появляются новые частоты:

$$V_{\text{пер}}(t) = 2f(t) \left[ e^{-i\omega t} + \frac{\exp[-i(\omega - \sigma_0)t] + \exp[-i(\omega + \sigma_0)t]}{2} \right]. \quad (4.6.28)$$

Аналитический сигнал такого вида характеризуется взаимной когерентностью, которая подробно рассматривается в следующем параграфе.

На рис. 4.22 показан интерференционный диск с бегущей интерференционной картиной, полученной при  $\sigma = 600$  гц и 375 об/мин скорости вращения диска.

На рис. 4.23 видны интерференционные полосы на двух радиусах. Полосы на меньшем радиусе обусловлены  $\sigma$ -интерференцией, а на большем —  $3\sigma$ -интерференцией.

**§ 4-7. Обобщение функции взаимной интенсивности  
на случай интерференции света от источников  
двух разных частот**

Как известно, функция взаимной когерентности колебаний света от точечных источников  $S_1$  и  $S_2$ , испускающих свет одного и того же спектрального состава, определяется выражением

$$\Gamma_{12}(\tau) = \overline{V_1(t+\tau) V_2^*(\tau)} = V_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) V_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right). \quad (4.7.1)$$

Если пучок света прерывается с помощью вращающегося диска с частотой прерывания  $\Omega_0$ , то сигнал  $V(t)$  в первом приближении равен

$$V(t) = 2f(t) \left[ e^{-i\omega_0 t} + \frac{\exp[-i(\omega_0 - \Omega_0)t] + \exp[-i(\omega_0 + \Omega_0)t]}{2} \right], \quad (4.7.2)$$

где  $\Omega_0$  — частота прерывания, а  $f(t)$  — исходное поле в падающей волне. В точку  $P$  сигнал от  $S_2$  приходит на  $\tau$  сек позднее, чем сигнал от  $S_1$ . Поэтому

$$V_P(t) = V_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + V_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \quad (4.7.3)$$

где

$$V_1(t) = V_2(t) = V(t). \quad (4.7.4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_P(t) = & 2f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \left[ \exp\left[-i\omega_0\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right] + \right. \\ & \left. + \frac{\exp\left[-i(\omega_0 - \Omega_0)\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right] + \exp\left[-i(\omega_0 + \Omega_0)\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right]}{2} \right] + \\ & + 2f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \left[ \exp\left[-i\omega_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] + \right. \\ & \left. + \frac{\exp\left[-i(\omega_0 - \Omega_0)\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] + \exp\left[-i(\omega_0 + \Omega_0)\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Интенсивность  $I_P(t)$  равна

$$\begin{aligned}
 I_P(t) = V_P(t) V_P^*(t) = & \\
 = \left| f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right|^2 & \left[ 6 + 8 \cos \Omega_0 \left(t + \frac{\tau}{2}\right) + 4 \cos 2\Omega_0 \left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right] + \\
 + \left| f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right|^2 & \left[ 6 + 8 \cos \Omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + 4 \cos 2\Omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] + \\
 + \left| f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right| & [12 \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \\
 + 8 \cos(\omega_0 \tau + \Omega_0 t + \psi) + 8 \cos(-\Omega_0 t + \omega_0 \tau + \psi) + & \\
 + 2 \cos(2\Omega_0 t + \omega_0 \tau + \psi) + 2 \cos(-2\Omega_0 t + \omega_0 \tau + \psi)]. & \quad (4.7.6)
 \end{aligned}$$

Первый член выражения (4.7.6) описывает вклад только от источника  $S_1$ , а второй член — только от источника  $S_2$ . Первое слагаемое в третьем члене соответствует стационарной интерференционной картине: оно не зависит от времени  $t$ . Следующее слагаемое описывает картину интерференции, бегущую влево, так как фаза этого слагаемого имеет постоянное значение:

$$\omega_0 \tau + \Omega_0 t + \psi = \text{const} \quad (4.7.7)$$

при условии

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\Omega_0}{\omega_0}. \quad (4.7.8)$$

Аналогично, первое слагаемое в четвертом члене соответствует интерференционной картине, бегущей вправо. Последние два слагаемых описывают интерференционные картины, разбегающиеся в разные стороны с удвоенными скоростями:

$$\frac{d\tau}{dt} = \pm 2 \frac{\Omega_0}{\omega_0}. \quad (4.7.9)$$

В координатной системе, которая движется со скоростью, равной скорости изменения задержки  $\tau$  во времени  $d\tau/dt$ , наблюдается только одна из компонент интерференционной картины, а все остальные выпадают. Постоянная засветка при этом равна

$$6 \left| f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right|^2 + 6 \left| f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right|^2. \quad (4.7.10)$$

Теперь мы можем обобщить функцию взаимной когерентности на случай бегущей интерференционной картины. Определим обобщенную функцию взаимной когерентности следующим образом:

$$\Gamma_{12}(\Omega, \tau) = V_1(t + \tau) V^*(t) e^{i\Omega t}, \quad (4.7.11)$$

и в качестве обобщенной комплексной степени когерентности введем

$$\gamma_{12}(\Omega, \tau) = \frac{\Gamma_{12}(\Omega, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)} \sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\Omega, \tau)}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}}, \quad (4.7.12)$$

где  $\Omega$  — разность частот сигналов  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$ . Вычислим интерференционные эффекты с помощью обобщенной функции  $\Gamma_{12}(\Omega, \tau)$ . Пренебрегая высокими порядками по  $\Omega_0/\omega_0$ , получим

$$\Gamma_{12}(\Omega, \tau) = \Gamma^{ff}(\tau) e^{-i\omega_0\tau} [6\delta(\Omega) + 4\delta(\Omega - \Omega_0) + 4\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - 2\Omega_0) + \delta(\Omega + 2\Omega_0)]. \quad (4.7.13)$$

При этом

$$\gamma_{12}(\Omega, \tau) = \gamma_{ff}(\tau) \cdot e^{-i\omega_0\tau} \left[ \delta(\Omega) + \frac{2}{3} \delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{2}{3} \delta(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{6} \delta(\Omega - 2\Omega_0) + \frac{1}{6} \delta(\Omega + 2\Omega_0) \right]. \quad (4.7.14)$$

Выражения (4.7.13) и (4.7.14) описывают эффекты, которые были оценены в предыдущем параграфе.

Приведем основные свойства обобщенной функции взаимной когерентности  $\Gamma_{12}(\Omega, \tau)$ :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{12}(0, \tau) &= \Gamma_{12}(\tau), & \gamma_{12}(0, \tau) &= \gamma_{12}(\tau), \\ \Gamma_{12}^*(\Omega, \tau) &= \Gamma_{12}(-\Omega, -\tau). \end{aligned} \right\} \quad (4.7.15)$$

Упомянем также следующее важное соотношение:

$$\overline{V_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) V_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{i\Omega t}} = \overline{V_1\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) V_2^*\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right) e^{-i\omega\tau}}, \quad (4.7.16)$$

где

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.7.17)$$

#### § 4-8. Поперечная и продольная пространственная когерентность

Как было показано выше (§ 4-4), степень когерентности освещения в двух точках  $P_1$  и  $P_2$  экрана, или, иначе, пространственная когерентность излучения, определяется функцией взаимной когерентности:

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{V_1(t) V_2^*(t)}, \quad (4.8.1)$$

или, в более полной записи,

$$\Gamma_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, 0) = \Gamma_{12}(0), \quad (4.8.2)$$

где

$$\Gamma_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(\mathbf{x}_1, t + \tau) V_2^*(\mathbf{x}_2, t) dt. \quad (4.8.3)$$

Рассмотрим протяженный источник  $S$  квазимонохроматического излучения (рис. 4.24) и определим пространственную когерентность в двух точках  $P_1(x, y)$  и  $P_2(0, 0)$ , расположенных в плоскости экрана, который установлен на расстоянии  $R$  от плоскости источника.

Электрическое поле, создаваемое атомом, находящимся в точке  $M_h(\xi)$ , можно описать аналитическим сигналом

$$V_h(t) = a_h(t) e^{i\omega_0 t}. \quad (4.8.4)$$

Колебания в точках  $P_1$  и  $P_2$ , создаваемые атомом  $M_h(\xi)$ , равны соответственно

$$V_{h1}(t) = a_h \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \frac{1}{r_1} \exp \left[ i\omega_0 \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \right], \quad (4.8.5)$$

$$V_{h2}(t) = a_h \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \frac{1}{r_2} \exp \left[ i\omega_0 \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right], \quad (4.8.6)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от точки  $M_h(\xi)$  до точек  $P_1(\mathbf{x})$  и  $P_2(0)$ . Суммарное поле в точках  $P_1$  и  $P_2$ , обусловленное всеми излучателями протяженного источника  $S$ , равно

$$V_1(t) = \sum_h a_h \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \frac{1}{r_1} \exp \left[ i\omega_0 \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \right], \quad (4.8.7)$$

$$V_2(t) = \sum_h a_h \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \frac{1}{r_2} \exp \left[ i\omega_0 \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right]. \quad (4.8.8)$$

Найдем взаимную когерентность колебаний в точках  $P_1$  и  $P_2$ :

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{V_1(t) V_2^*(t)} = \sum_{h, l} \overline{V_{h1}(t) V_{l2}^*(t)}. \quad (4.8.9)$$

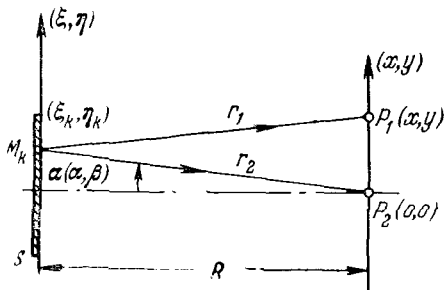


Рис. 4.24. Пространственная поперечная когерентность в точках наблюдения  $P_1$  и  $P_2$  от протяженного источника.

Все перекрестные члены с  $k \neq l$  при усреднении по времени обратятся в нуль вследствие взаимной некогерентности разных атомов источника  $S$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(0) &= \sum_k V_{k1}(t) V_{k2}^*(t) = \\ &= \sum_k a_k \left( t - \frac{r_1}{c} \right) a_k^* \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \frac{\exp \left[ i\omega_0 \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right) \right]}{r_1 r_2}. \end{aligned} \quad (4.8.10)$$

Поскольку оптический сигнал  $a(t)$  изменяется во времени медленно в силу условия монохроматичности излучения источника и поскольку задержка

$$\tau = \frac{r_2 - r_1}{c} \quad (4.8.11)$$

мала, то

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(0) &= \sum_k \frac{\exp \left[ i\omega_0 \frac{r_2 - r_1}{c} \right]}{r_1 r_2} a_k(t) a_k^*(t) = \\ &= \sum_k I_k(t) \frac{\exp \left[ i\omega_0 \frac{r_2 - r_1}{c} \right]}{r_1 r_2}. \end{aligned} \quad (4.8.12)$$

В пределе сумма по  $k$  обращается в интеграл, и получаем

$$\Gamma_{12}(0) = \int_S I(\xi) \frac{\exp [ik_0(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} d\xi, \quad (4.8.13)$$

где  $k_0 = \omega_0/c$  — волновое число. Формула (4.8.13) выражает теорему Ван-Циттерга — Цернике.

Из (4.8.13) следует, что степень комплексной когерентности равна

$$\gamma_{12}(0) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \int_S I(\xi) \frac{\exp [ik_0(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} d\xi, \quad (4.8.14)$$

где

$$I_1 = \int_S \frac{I(\xi)}{r_1^2} d\xi, \quad I_2 = \int_S \frac{I(\xi)}{r_2^2} d\xi \quad (4.8.15)$$

— суммарные интенсивности в точках  $P_1$  и  $P_2$ .

Если размеры источника и приемника света малы по сравнению с расстоянием между ними, то

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + R^2 \quad (4.8.16)$$

и

$$r_1 \simeq R + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2R}, \quad (4.8.17)$$

$$r_2 \simeq R + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R}. \quad (4.8.18)$$

Тогда

$$r_2 - r_1 = -\frac{x^2 + y^2}{2R} + \frac{x\xi + y\eta}{R}. \quad (4.8.19)$$

Вводя углы

$$\alpha = \frac{\xi}{R}, \quad \beta = \frac{\eta}{R} \quad (4.8.20)$$

и обозначая

$$\psi_{12} = k_0 \frac{x^2 + y^2}{2R}, \quad (4.8.21)$$

получаем степень комплексной когерентности

$$\gamma_{12}(0) = \frac{e^{i\psi_{12}}}{\sqrt{I_1 I_2}} \int_S \frac{I(\alpha, \beta)}{R^2} \exp[ik_0(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta, \quad (4.8.22)$$

или, поскольку

$$I_1 \simeq I_2 \simeq \int_S \frac{I(\alpha, \beta)}{R^2} d\alpha d\beta, \quad (4.8.23)$$

окончательное выражение для поперечной когерентности приобретает вид

$$\gamma_{12}(0) = \frac{e^{i\psi_{12}} \int_S I(\alpha, \beta) \exp ik_0(\alpha x + \beta y) d\alpha d\beta}{\int_S I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}. \quad (4.8.24)$$

Соотношение (4.8.24) гласит: комплексная степень когерентности  $\gamma_{12}(0)$  двух точек  $P_1(x)$  и  $P_2(0)$  в плоскости экрана равна фурье-образу нормированного распределения интенсивности по углу  $\alpha(\alpha, \beta)$ .

**Пример.** Если падающее на экран излучение описывается плоской волной на бесконечно большой апертуре

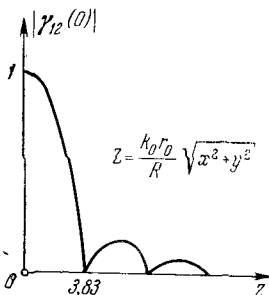
$$I(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0), \quad (4.8.25)$$

распространяющейся в направлении  $\alpha_0$ , то

$$\gamma_{12}(0) = e^{i\psi_{12}}, \quad \text{или} \quad |\gamma_{12}(0)| = 1, \quad (4.8.26)$$

т. е. степень когерентности  $\gamma_{12}(0)$  строго плоского пучка света равна по модулю единице во всех точках экрана.

**Пример.** Рассмотрим некогерентный однородный источник  $S$  в виде круга радиуса  $r_0$  с центром на оптической оси. Фурье-образ круга, как известно (глава 1), равен



$$\frac{2J_1(Z)}{Z}, \quad (4.8.27)$$

где

$$Z = \frac{k_0 r_0}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.8.28)$$

и тогда

$$\gamma_{12}(0) = \left[ \frac{2J_1(Z)}{Z} \right] e^{i\psi_{12}}, \quad (4.8.29)$$

Рис. 4.25. Зависимость поперечной когерентности  $|\gamma_{12}(0)|$  для источников в виде круга радиуса  $r_0$  от расстояния до оптической оси, выраженного через  $Z = \frac{k_0 r_0}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ .

где

$$\psi_{12} = -k_0 \frac{x^2 + y^2}{2R}. \quad (4.8.30)$$

На рис. 4.25 показана зависимость степени поперечной когерентности (4.8.29) от  $Z$ . При  $Z = 0$  поперечная когерентность  $|\gamma_{12}(0)| = 1$  и достигает максимума. С увеличением  $Z$  величина  $|\gamma_{12}(0)|$  уменьшается. Первый минимум расположен при  $Z_1 = 3,83$ ; точки  $P_1$  и  $P_2$  освещены полностью некогерентно. При этом

$$\Delta x = P_1 P_2 = \frac{1,22\lambda_0}{2\alpha_0} = 0,61 \frac{\lambda_0}{\alpha_0}, \quad (4.8.31)$$

где  $\alpha_0 = r_0/R$  — угол, под которым радиус источника виден из точки  $P_2$ . Если принять, что допустимое минимальное значение  $|\gamma_{12}^{\text{доп}}| = 0,88$ , то поперечное расстояние  $P_1 P_2$  не должно превышать

$$\Delta x_{\text{макс}} = P_1 P_2^{\text{доп}} = \frac{0,32\lambda_0}{2\alpha_0} = 0,16 \frac{\lambda_0}{\alpha_0}. \quad (4.8.32)$$

Соотношение (4.8.31) используется в интерферометрах при определении диаметра звезд.



**Пример.** В эксперименте Юнга с двумя отверстиями  $P_1$  и  $P_2$ , освещенными щелевым источником  $S$  (рис. 4.26), поперечная когерентность при равномерной освещенности равна

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\sin 2k\alpha x_0}{2k\alpha x_0}, \quad (4.8.33)$$

где  $2x_0$  — расстояние между отверстиями  $P_1$  и  $P_2$ , а  $2\alpha$  — угол,

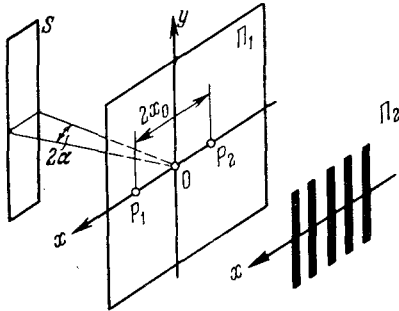


Рис. 4.26. Иллюстрация фундаментального соотношения (4.8.24). Эксперимент Юнга с двумя отверстиями  $P_1$  и  $P_2$ , пропускающими свет от равномерно освещенного источника  $S$ .

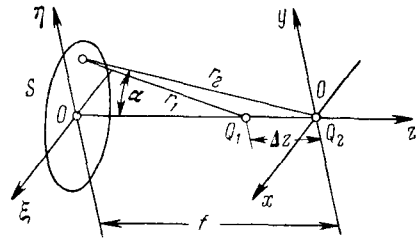


Рис. 4.27. Пространственная продольная когерентность в точках наблюдения  $Q_1$  и  $Q_2$ , расположенных на оптической оси, от протяженного источника.

под которым виден щелевой источник  $S$  из точки  $O$ . Поскольку точки  $P_1$  и  $P_2$  расположены симметрично относительно точки  $O$ , то

$$\psi_{12} = 0 \quad (4.8.34)$$

и  $\gamma_{12}(0)$  является действительной величиной.

Интерференционные полосы, которые наблюдаются в плоскости  $\Pi_2$ , имеют переменную контрастность в зависимости от степени когерентности  $\gamma_{12}(0)$ :

$$\gamma = \frac{2|\gamma_{12}(0)|}{1 + |\gamma_{12}(0)|}. \quad (4.8.35)$$

Рассмотрим теперь взаимную когерентность полей в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ , расположенных на оптической оси (рис. 4.27). Координаты точек равны  $Q_1(0, 0, \Delta z)$ ,  $Q_2(0, 0, 0)$ . Будем считать, что интенсивность плоского источника  $S$  равномерна, а расстояние между плоскостью источника  $\xi$  и плоскостью экрана  $x$  велико по сравнению с размерами источника и величиной  $\Delta z$ .

Угловое распределение излучения из источника  $S$  описывается функцией  $I(\alpha)$ . Степень комплексной когерентности

определяется общим выражением (4.8.14). При этом

$$r_1 - r_2 = Q_1 Q_2 \cos \alpha \simeq \Delta z \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right), \quad (4.8.36)$$

а

$$\exp \left[ ik \Delta z \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] = e^{ik_0 \Delta z} \exp \left[ -i \frac{k_0}{2} \Delta z \alpha^2 \right], \quad (4.8.37)$$

где

$$\alpha = \alpha(\alpha, \beta), \quad \alpha = \xi/f, \quad \beta = \eta/f. \quad (4.8.38)$$

Таким образом, продольная когерентность равна

$$\gamma_{12}(0) = e^{ik_0 \Delta z} \frac{\int_S I(\alpha) \exp \left[ -i \frac{k_0}{2} \Delta z \alpha^2 \right] d\alpha}{\int_S I(\alpha) d\alpha}. \quad (4.8.39)$$

Если источник  $S$  имеет вид круга и распределение интенсивности равномерное, то

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(0) &= e^{ik_0 \Delta z} \frac{\int_0^{\alpha_0} \exp \left[ -ik_0 \Delta z \frac{\alpha^2}{2} \right] \alpha d\alpha}{\int_0^{\alpha_0} \alpha d\alpha} = \\ &= \exp \left[ ik_0 \Delta z \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} \right) \right] \frac{\sin \frac{k_0 \Delta z}{4} \alpha_0^2}{\frac{1}{4} k_0 \Delta z \alpha_0^2}. \end{aligned} \quad (4.8.40)$$

Абсолютное значение  $|\gamma_{12}(0)|$  равно

$$|\gamma_{12}(0)| = \left| \frac{\sin \frac{k_0 \Delta z}{4} \alpha_0^2}{\frac{1}{4} k_0 \Delta z \alpha_0^2} \right|. \quad (4.8.41)$$

Первый минимум функции продольной когерентности (4.8.41) для круга соответствует

$$\Delta z_{\text{мин}} = \frac{4\pi}{k_0 \alpha_0^2} = \frac{2\lambda_0}{\alpha_0^2}. \quad (4.8.42)$$

Из сравнения выражений (4.8.31) и (4.8.42) можно сделать следующие выводы:

— длина поперечной когерентности  $\Delta x$  обратно пропорциональна первой степени угла  $\alpha_0$ ;

— длина продольной когерентности  $\Delta z$  обратно пропорциональна квадрату угла  $\alpha_0$ .

Объем пространства, ограниченный параллелепипедом с размерами граней  $a = 2\Delta x$ ,  $b = 2\Delta y$ ,  $c = 2\Delta z$ , где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , и  $\Delta z$  определяются (4.8.31) и (4.8.42), называется *объемом пространственной когерентности*.

#### § 4-9. Некогерентный протяженный источник, создающий пространственно когерентный свет

Как было показано в предыдущем параграфе, пространственная когерентность некогерентного протяженного источника равна нормированному фурье-образу распределения интенсивности

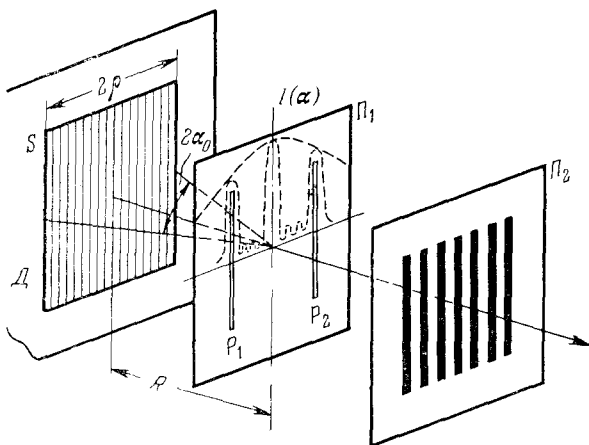


Рис. 4.28. Интерференционный эксперимент с широкой щелью  $S$ , закрытой дифракционной решеткой  $D$ . Если щели  $P_1$  и  $P_2$  расположены на таком расстоянии  $R$  до решетки и отстоят друг от друга на таком расстоянии  $\Delta x$ , что  $d\Delta x = 2\lambda_0 R$ , то на экране  $\Pi_2$  появятся контрастные и яркие интерференционные полосы. При других соотношениях между  $\Delta x$ ,  $R$ ,  $\lambda_0$  и  $d$  контраст полос пропадает.

$I(\alpha)$  по углам  $\alpha$  ( $\alpha$ ,  $\beta$ ). Возьмем с самого начала размеры  $\rho$  протяженного источника  $S$  и расстояние  $\Delta x$  между щелями  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 4.28) такими, чтобы выполнялись соотношения

$$\Delta x \cdot \alpha_0 \gg \lambda_0 \quad \text{или} \quad \Delta x \cdot \frac{\rho}{R} \gg \lambda_0, \quad (4.9.1)$$

т. е. чтобы размеры источника  $\rho$  были во много раз больше размера поперечной когерентности

$$\rho_{\text{когер}} = 0,61 \frac{\lambda_0 R}{\Delta x}. \quad (4.9.2)$$

В этих условиях контрастность картины интерференции лучей, прошедших через щели  $P_1$  и  $P_2$  и попавших на второй экран  $\Pi_2$ , будет равна нулю.

Поместим теперь перед источником дифракционную решетку  $D$ , полосы которой расположены вертикально (см. рис. 4.28). Как

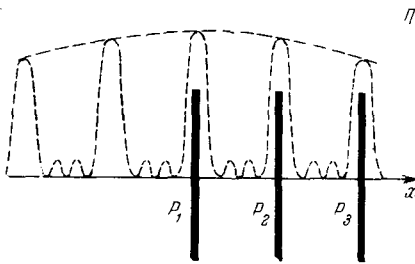


Рис. 4.29. Вариант интерференционного эксперимента (рис. 4.28) с тремя щелями в плоскости  $\Pi_1$  (опыт Церинке — Вессала).

изменится когерентность излучения в  $P_1$  и  $P_2$ ? Распределение пространственной интенсивности равно нормированному фурье-образу распределения интенсивности  $I(\alpha)$  источника  $S$ . Но поскольку перед источником  $S$  помещена дифракционная решетка, то распределение интенсивности  $I(\alpha)$  будет уже иным. Явление дифракции света на решетке приводит к тому что в угловом распределении  $I(\alpha)$  появятся серия пиков: централь-

ное изображение и дифракционные порядки, расстояние между которыми определяется шагом решетки  $d$  и расстоянием  $R$ .

Таким образом,

$$I(\alpha) = a_0 \delta(\alpha) + a_{-1} \delta(\alpha + \epsilon_0) + a_{+1} \delta(\alpha - \epsilon_0) + a_{-2} \delta(\alpha + 2\epsilon_0) + a_2 \delta(\alpha - 2\epsilon_0) + \dots, \quad (4.9.3)$$

где  $\epsilon_0 = (\epsilon_x, \epsilon_y)$ ,  $\epsilon_x = \lambda_0/d$ ,  $\epsilon_y = 0$ ; коэффициенты  $a_{\pm k}$  зависят от профиля решетки. Если размер  $R$  и расстояние между щелями  $\Delta x = P_1 P_2$  выбрать такими, чтобы выполнялись соотношения

$$\epsilon_x = \frac{\lambda_0}{d} = \frac{\Delta x}{2R} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta x}{R} = \frac{2\lambda_0}{d}, \quad (4.9.4)$$

то излучение в щелях  $P_1$  и  $P_2$  будет пространственно когерентным и на втором экране  $\Pi_2$  появятся контрастные интерференционные полосы.

Яркость картины будет весьма высокой, так как на щели  $P_1$  и  $P_2$  направляется свет от значительной части источника.

При других соотношениях между величинами  $\Delta x$ ,  $R$ ,  $\lambda_0$  и  $d$  контрастность полос резко уменьшится, так как точка  $P_1$  выйдет из пика наибольшей пространственной когерентности.

Аналогичное усиление контраста полос Юнга возникает, если цель  $P_1$  попадает на второй пик. Однако когерентность системы быстро разрушается при изменении длины волны  $\lambda_0$ .

Опыт с источником  $S$ , закрытым дифракционной решеткой, можно осуществить также с помощью трех щелей  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , установленных в положениях, соответствующих максимумам кривой пространственной когерентности излучения (рис. 4.29).

### § 4-10. Когерентность и дифракция света

Рассмотрим структуру картины дифракции квазимонохроматического света при различной степени когерентности освещающей волны. Пусть плоская квазимонохроматическая волна освещает длинную щель (рис. 4.30), а цилиндрическая линза  $ЛЦ$  фокусирует плоскую на фронте волны описываются

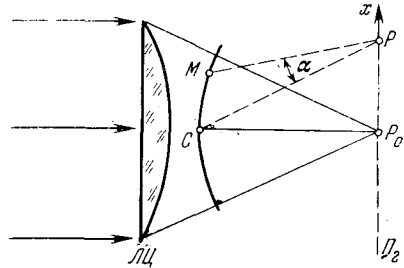


Рис. 4.30. Схема опыта по наблюдению дифракции квазимонохроматического излучения на длинной щели, закрытой цилиндрической линзой  $ЛЦ$ , в зависимости от степени монохроматичности  $\lambda_0/\Delta\lambda$  или длины когерентности  $l_0/\lambda_0$ , выраженной в единицах длины волны света.

волну в точку  $P_0$ . Колебания аналитическим сигналом

$$V(t) = a(t) e^{i\omega_0 t} \tag{4.10.1}$$

Справа от линзы поверхность фронта волны имеет форму цилиндра. Колебания в точке  $P$ , вызванные элементом волнового фронта около точки  $M$ , описываются сигналом

$$V(t + \tau) = a(t + \tau) e^{i\omega_0(t + \tau)} \tag{4.10.2}$$

где

$$\tau = \frac{CP - MP}{c} \tag{4.10.3}$$

Если функция  $f(\alpha)$  изображает распределение амплитуды на волновой поверхности в точке  $M(\alpha)$ , где  $\alpha$  — угол, под которым виден отрезок  $CM$  наблюдателем, находящимся в плоскости  $\Pi_2$ , то амплитуда  $V(x, t)$  в точке  $P$  в момент времени  $t$  равна

$$V(x, t) = \int a(t + \tau) f(\alpha) e^{i\omega_0 t} e^{i\omega_0 \tau} d\alpha, \tag{4.10.4}$$

или, поскольку

$$\tau = \frac{CP - MP}{c} = \frac{\alpha x}{c} \quad (4.10.5)$$

$$V(x, t) = \int a\left(t + \frac{\alpha x}{c}\right) f(\alpha) \exp\left\{i\omega_0\left(t + \frac{\alpha x}{c}\right)\right\} d\alpha = e^{i\omega_0 t} A(x, t), \quad (4.10.6)$$

где

$$A(x, t) = \int a\left(t + \frac{\alpha x}{c}\right) f(\alpha) e^{ih_0 \alpha x} d\alpha. \quad (4.10.7)$$

Интенсивность в точке  $P$  равна

$$I(x) = \overline{A(x, t) A^*(x, t)}. \quad (4.10.8)$$

Вычислим  $AA^*$ :

$$\begin{aligned} A(x, t) A^*(x, t) &= \\ &= \int a\left(t + \frac{\alpha_1 x}{c}\right) f(\alpha_1) e^{ih_0 \alpha_1 x} d\alpha_1 \int a^*\left(t + \frac{\alpha_2 x}{c}\right) f^*(\alpha_2) e^{-ih_0 \alpha_2 x} d\alpha_2. \end{aligned} \quad (4.10.9)$$

Усреднение по времени можно произвести под знаком интеграла. Вводя  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ , находим

$$\overline{a\left(t + \frac{\alpha_1 x}{c}\right) a^*\left(t + \frac{\alpha_2 x}{c}\right)} = \overline{a(t) a^*\left(t - \frac{\alpha x}{c}\right)} = g\left(\frac{\alpha x}{c}\right), \quad (4.10.10)$$

а также

$$f(\alpha_1) f^*(\alpha_2) = f(\alpha_1) f^*(\alpha_1 - \alpha). \quad (4.10.11)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} I(x) &= \iint g\left(\frac{\alpha x}{c}\right) f(\alpha_1) f^*(\alpha_1 - \alpha) e^{ih\alpha x} d\alpha_1 d\alpha = \\ &= \int g\left(\frac{\alpha x}{c}\right) e^{ih\alpha x} d\alpha \int f(\alpha_1) f^*(\alpha_1 - \alpha) d\alpha_1 = \\ &= \int g\left(\frac{\alpha x}{c}\right) e^{ih\alpha x} [f * f^*] d\alpha, \end{aligned} \quad (4.10.12)$$

где

$$f * f^* = \int f(\alpha_1) f^*(\alpha_1 - \alpha) d\alpha_1 \quad (4.10.13)$$

— функция автокорреляции амплитуды распределения света  $f(\alpha)$  в апертуре.

Если свет строго монохроматический, то цуги волн имеют бесконечную длину и

$$g\left(\frac{\alpha x}{c}\right) = 1, \quad (4.10.14)$$

а

$$I(x) = \int (f * f^*) e^{ikh\alpha x} d\alpha. \quad (4.10.15)$$

Соотношение (4.10.15) гласит, что интенсивность в точке  $P$  равна фурье-образу функции автокорреляции углового распределения амплитуды света в апертуре. Фактически здесь осуществляется обратное преобразование Фурье. Для того чтобы ядро имело вид  $e^{-ikh\alpha x'}$ , необходимо направить ось  $x$  в обратную сторону, как это пояснено в главе 7.

Рассмотрим теперь квазимонохроматическое излучение, средняя длина цуга которого равна  $\tau_0$ . Иначе говоря, амплитуда  $a(t)$  равна

$$a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau_0}{2}. \end{cases} \quad (4.10.16)$$

Пусть имеется равномерно освещенная щель, ширина которой равна  $2d$ , так что

$$\alpha_0 = d/R. \quad (4.10.17)$$

Угловое распределение излучения щели описывается амплитудой  $f(\alpha)$ :

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & |\alpha| < \alpha_0, \\ 0, & |\alpha| > \alpha_0, \end{cases} \quad (4.10.18)$$

$$f(\alpha) * f^*(\alpha) = 2\alpha_0 - |\alpha| \approx 1 - \left| \frac{\alpha}{2\alpha_0} \right| \quad \text{при } |\alpha| < 2\alpha_0. \quad (4.10.19)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha x}{c}\right) &= \overline{a(t) a^*\left(t - \frac{\alpha x}{c}\right)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a(t) a^*\left(t - \frac{\alpha x}{c}\right) dt = \\ &= 1 - \left| \frac{\alpha x}{c\tau_0} \right| = 1 - \left| \frac{\alpha x}{l_0} \right|, \quad \left| \frac{\alpha x}{l_0} \right| < 1, \quad (4.10.20) \end{aligned}$$

где  $l_0 = \tau_0 c$  — длина когерентности. Таким образом, распределение интенсивности равно

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int (f * f^*) g\left(\frac{\alpha x}{c}\right) e^{ik_0 \alpha x} d\alpha = \\
 &= \int \left(1 - \left|\frac{\alpha}{2\alpha_0}\right|\right) \left(1 - \left|\frac{\alpha x}{l_0}\right|\right) e^{ik_0 \alpha x} d\alpha \simeq \\
 &\simeq \int_{-2}^0 \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) \left(1 + \xi \frac{\alpha_0 x}{l_0}\right) e^{ik_0 \alpha_0 x \xi} d\xi + \\
 &\quad + \int_0^2 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \left(1 - \xi \frac{\alpha_0 x}{l_0}\right) e^{ik_0 \alpha_0 x \xi} d\xi. \quad (4.10.24)
 \end{aligned}$$

Вводя безразмерную переменную

$$Z = k_0 \alpha_0 x, \quad (4.10.22)$$

находим

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \left(\frac{\sin Z}{Z}\right)^2 + \frac{1}{k_0 l_0} \left(2 \frac{\cos^2 Z}{Z} - \frac{\sin 2Z}{Z^2}\right) = \\
 &= \left(\frac{\sin Z}{Z}\right)^2 + \frac{\Delta\lambda}{\pi \lambda_0} \left(2 \frac{\cos^2 Z}{Z} - \frac{\sin 2Z}{Z^2}\right), \quad (4.10.23)
 \end{aligned}$$

где

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{1}{l_0}. \quad (4.10.24)$$

Если излучение монохроматическое, так что  $\Delta\lambda = 0$ , то

$$I_0(x) = \left(\frac{\sin Z}{Z}\right)^2, \quad (4.10.25)$$

т. е. распределение интенсивности представляет собой хорошо известную картину дифракции света на щели. Если временная когерентность ограничена и  $|\Delta\lambda| > 0$ , то возникает дополнительный член, пропорциональный ширине спектра квазимонохроматического излучения  $\Delta\lambda$ . Этот дополнительный член

$$I_1(x) = \left(\frac{\cos^2 Z}{Z} - \frac{\sin 2Z}{2Z^2}\right) \quad (4.10.26)$$



всегда больше нуля, если только  $Z > \pi/2$ . При этом, как можно видеть из рис. 4.31, первый минимум  $I_0(x)$  попадает на максимум кривой  $I_1(x)$ . Поэтому конечная ширина спектра частот приводит к ослаблению контраста дифракционной картины, образуемой строго монохроматическим излучением.

Уравнение (4.10.12) можно обобщить на двухмерную апертуру, если записать его в следующем виде:

$$I(\mathbf{x}) = \int g\left(\frac{\alpha\mathbf{x}}{c}\right) e^{ik_0\alpha\mathbf{x}} (f * f^*) d\alpha, \tag{4.10.27}$$

где  $\mathbf{x}(x, y)$  — координата точки  $P$ ,  $\alpha = \alpha(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — углы в горизонтальной и вертикальной плоскостях, определяющие положение точки  $M(\alpha)$ .

Воспользовавшись (4.10.27), рассмотрим картину дифракции света от круглого отверстия. При однородном освещении имеем

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & |\alpha| < |\alpha_0|, \\ 0, & |\alpha| > |\alpha_0|. \end{cases} \tag{4.10.28}$$

Учитывая аксиальную симметрию исходной функции  $f(\alpha)$ , легко понять, что автокорреляция

$$f * f^* = \begin{cases} 2\alpha_0^2 \left( \arccos \frac{u}{2} - \frac{u}{4} \sqrt{1 - \frac{u^2}{4}} \right), & |u| < 2, \\ 0, & |u| > 2, \end{cases} \tag{4.10.29}$$

где

$$u^2 = \frac{(\alpha - \alpha')^2}{\alpha_0^2}. \tag{4.10.30}$$

Пользуясь теми же соображениями симметрии, находим  $I(x)$ :

$$I(x) = \int_0^2 u du \int_0^{2\pi} (f * f^*)(u) g\left(\frac{Zu \cos \varphi}{k_0 c}\right) e^{iZu \cos \varphi} d\varphi, \tag{4.10.31}$$

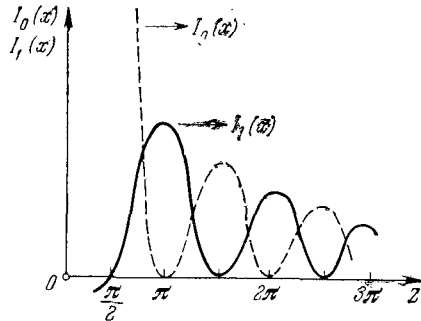


Рис. 4.31. Ахроматическое  $I_0(x)$  и хроматическое  $I_1(x)$  распределения, описывающие картину дифракции квазимонохроматического света на длинной щели (см. рис. 4.30).

где

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= u \cos \varphi, & k_0 \alpha x &= Zu \cos \varphi. \\ \beta - \beta' &= u \sin \varphi, \end{aligned} \quad (4.10.32)$$

Для пучков волн, обладающих длиной когерентности  $l_0$  и продолжительностью  $\tau_0 = l_0/c$ , получим

$$g(\eta) = 1 - \left| \frac{\eta}{\tau_0} \right|, \quad (4.10.33)$$

или

$$g\left(\frac{Zu \cos \varphi}{k_0 c}\right) = 1 - \left| \frac{Zu \cos \varphi}{k_0 l_0} \right|. \quad (4.10.34)$$

Окончательно

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) = I(Z) &= \iint (f * f^*)(u) e^{iZu \cos \varphi} u \, du \, d\varphi - \\ &- \frac{1}{k_0 l_0} \iint (f * f^*)(u) Zu |\cos \varphi| e^{iZu \cos \varphi} u \, du \, d\varphi. \end{aligned} \quad (4.10.35)$$

Сделаем замену переменных

$$u = 2 \cos \theta, \quad (4.10.36)$$

находим

$$I(Z) = f(Z) + \frac{1}{k_0 l_0} h(Z), \quad (4.10.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f(Z) &= \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (2\theta - \sin 2\theta) \cos(2Z \cos \theta \cos \varphi) \times \\ &\quad \times \sin 2\theta \, d\theta \, d\varphi, \\ h(Z) &= \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 2Z \cos \theta \cos \varphi (2\theta - \sin 2\theta) \times \\ &\quad \times \cos(2Z \cos \theta \cos \varphi) \sin 2\theta \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.10.38)$$

Первый интеграл равен

$$f(Z) = \left[ \frac{2I_1(Z)}{Z} \right]^2, \quad (4.10.39)$$

а второй можно представить только графически. Кривая  $f(Z)$  на рис. 4.32 изображает картину дифракции света на круглом отверстии. Это — диск Эри. Кривая  $h(Z)$  при  $Z > 2$  положительна, причем максимум кривой попадает на минимум кривой  $f(Z)$ .

Из рассмотренных примеров картин дифракции квазимонохроматического света видно влияние степени временной когерентности на наблюдаемую картину дифракции. Естественно, что когерентность света влияет также на свойства изображающих систем. Наиболее характерными эффектами являются: оптические выбросы в изображении края экрана (выбросы Гиббса); сдвиг изображения края, полученного в когерентной системе; появление зернистой структуры изображения (авантюриновые пятна) и, наконец, эффект поля зрения.

Причину появления оптических выбросов в изображении края экрана легко можно понять в терминах пространственных частот изображения. Хорошо известно, что чем выше пространственные частоты, содержащиеся в предмете, тем больше угол дифракции соответствующих компонент. Предмет в виде экрана с резким краем содержит интенсивные компоненты высоких пространственных частот, часть которых, присутствующая в изображении, не проходит через апертуру изображающей линзы. Если апертура имеет резкий обрыв, то потеря высоких пространственных частот приводит к оптическим выбросам — эффекту, который аналогичен эффекту Гиббса (см. главу 2).

В некогерентной изображающей системе этот эффект пропадает, так как передаточная функция изображающей системы не имеет резкого обрыва и плавно уменьшается с частотой (см. § 2-19).

В когерентной системе передаточная функция апертуры равна

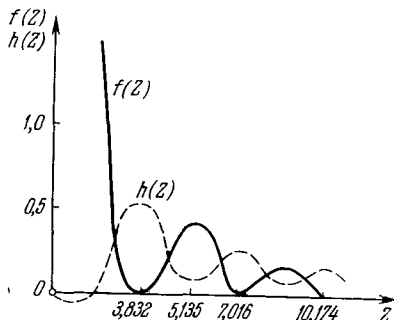


Рис. 4.32. Ахроматическое  $f(Z)$  и хроматическое  $h(Z)$  распределения, описывающие картину дифракции квазимонохроматического света на круглом отверстии радиуса  $\alpha_0 F$  (где  $F$  — фокусное расстояние линзы,  $\alpha_0$  — угловая апертура линзы) в зависимости от параметра  $Z = k_0 \alpha_0 \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$g(x) = \text{sinc} \frac{\pi \omega_0 x}{2}, \quad (4.10.40)$$

где  $\omega_0$  — максимальная пространственная частота, захватываемая отверстием радиуса  $r_0$  на расстоянии  $f$  от предмета (где  $\omega_0 = r_0/\lambda f$ ). Тогда амплитуда на выходной плоскости при единичном

увеличении  $M = 1$  равна свертке:

$$i(x) = f(x) \otimes \operatorname{sinc} \frac{\pi \omega_0 x}{2}, \quad (4.10.41)$$

а при  $M \neq 1$

$$a(x) = \int f(x') \operatorname{sinc} \frac{\pi r_0 (x + Mx')}{(1 + M) \lambda f} dx'. \quad (4.10.42)$$

При некогерентном освещении интенсивность изображения равна

$$I(x) = \int i(x') \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi r_0 (x + Mx')}{(1 + M) \lambda f} dx', \quad (4.10.43)$$

где

$$i(x) = |f(x)|^2. \quad (4.10.44)$$

На рис. 4.33 показаны расчетные кривые распределения интенсивности изображения резкого края экрана в когерентной

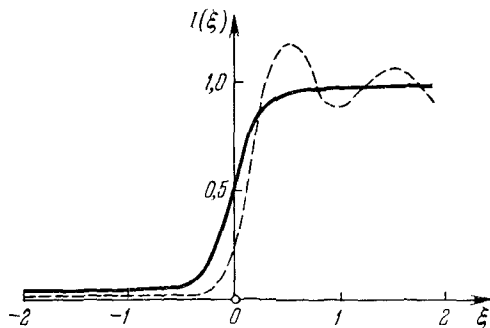


Рис. 4.33. Расчетные кривые распределения интенсивности в изображении резкого края экрана при когерентном (пунктир) и некогерентном (сплошная кривая) равномерном освещении. (Аналог эффекта Гиббса в системе с ограниченной полосой пропускания частот при наличии резкого обрыва частотной характеристики.)

и некогерентной системах при равномерном освещении:

$$\left. \begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si} \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 \quad \text{для когерентного освещения,} \\ I(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(\xi) - \frac{(1 - \cos \xi)}{\xi} \quad \text{для некогерентного освещения,} \end{aligned} \right\} \quad (4.10.45)$$

где

$$\xi = \frac{2\pi a x}{(1 + m) \lambda f}, \quad (4.10.46)$$

а

$$\text{Si}(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (4.10.47)$$

Если принять (рис. 4.34), что край изображения располагается в точке, где интенсивность равна половине максимальной интенсивности, то когерентное изображение сдвинется относительно предмета на величину

$$\Delta = 0,424 \frac{\lambda f}{r_0}, \quad (4.10.48)$$

которая зависит от расстояния

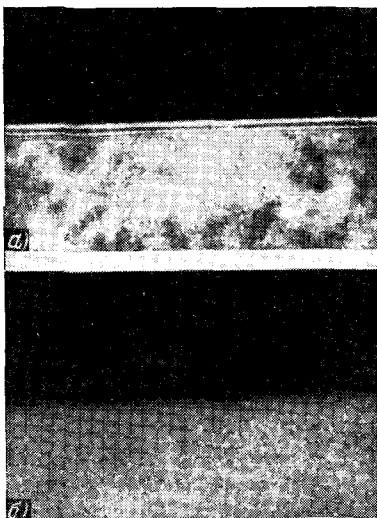


Рис. 4.34. Фотография края экрана при когерентном (а) и некогерентном (б) освещении (см. рис. 4.33).

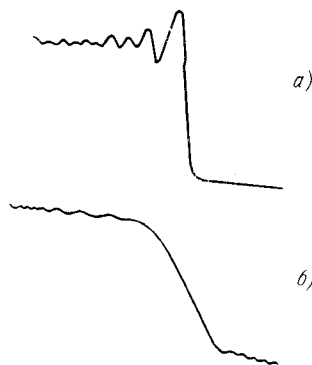


Рис. 4.35. Микроденситограмма фотографии, приведенной на рис. 4.34. а) При когерентном освещении; б) при некогерентном освещении.

$f$  и апертуры линзы  $r_0$ . Подобный эффект необходимо учитывать при измерениях в микроскопе, так как под влиянием линейного увеличения микроскопа этот сдвиг сильно возрастает:

$$\Delta_M = 0,212 (1 + M) \frac{\lambda f}{r_0}, \quad (4.10.49)$$

где  $M$  — коэффициент увеличения системы (рис. 4.35).

Оптические выбросы в когерентном изображении края экрана и сдвиг изображения легко устранить с помощью метода фильтрации пространственных частот, видоизменив структуру предмета так, чтобы она не содержала пространственных частот более высоких, чем наивысшая передаваемая пространственная частота линзы  $\omega_0$ . Другой метод состоит в изменении передаточной функции

линзы с помощью аподизации. Метод сводится к введению в апертуру линзы маски с переменным амплитудным пропусканием, постепенно уменьшающимся на больших радиусах. Это

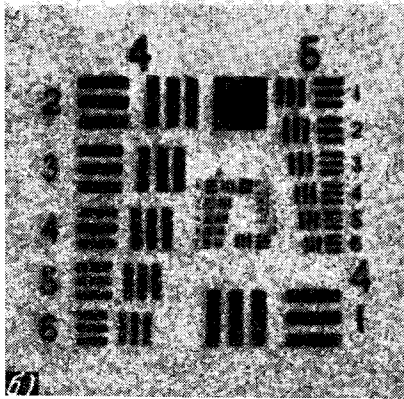
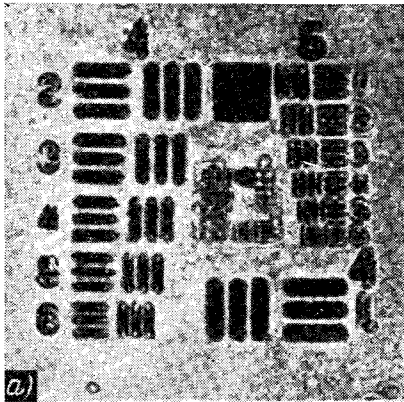


Рис. 4.36. Изображения тест-сигналов при освещении на просвет когерентным светом (а) и некогерентным светом (б).

приводит к тому, что передаточная функция, равная фурье-образу амплитудного пропускания апертуры, становится плавной. Так, например, переход от функции амплитудного пропускания в виде прямоугольного импульса к треугольному импульсу полностью устраняет как оптические выбросы края экрана, так и сдвиг изображения, полученного в когерентной системе (см. § 2-19).

Легко также убедиться в том, что при когерентном освещении разрешающая способность уменьшается, особенно когда наблюдаются детали, имеющие размеры, соизмеримые с предельной пространственной частотой  $\omega_0$ . Потеря разрешения при когерентном освещении по сравнению с некогерентным может достигать значения, равного 2,5—3 (рис. 4.36).

Наиболее интересным эффектом, наблюдаемым при когерентном освещении, является появление зернистой структуры изображения (авантюриновых точек). Зернистая структура не является свойством самого пучка лазера и появляется только в условиях, когда волновой фронт испытывает фазовые искажения при отражении от оптически

неровных предметов. Размер и контрастность авантюриновых точек определяются наивысшей пространственной частотой  $\omega_0$ , пропускаемой изображающей системой.

Структура когерентного изображения грубой поверхности зависит от соотношения размеров эффективной неровности поверхности и дифракционного пятна изображающей системы. Поэтому, если фаза отраженного света постоянна на площади, соизмеримой

с разрешающей площадкой линзы, то изображение отражающей поверхности выглядит как поверхность постоянной фазы. Если же фаза отраженного волнового фронта изменяется в пределах разрешающей площадки, контраст авантюриновых пятен, а также их число уменьшаются.

В терминах теории преобразования оптического сигнала это эквивалентно тому, что интервал корреляции фаз становится малым по сравнению с характерным размером передаточной функции линзы. Поэтому при уменьшении светосилы линзы размер дифракционного пятна увеличивается и соответственно усредняются фазовые вариации.

Если в качестве предмета взять фотографию теста, изготовленную на матовой фотобумаге, и осветить ее лазерным светом, то получится изображение, которое имеет зернистую структуру, но в котором отсутствуют оптические выбросы. Контрольные опыты показали, что исчезновение оптических выбросов не связано с потерей когерентности в пучке. Рассеянный пучок лазера создает контрастную интерференционную картину и поэтому обладает необходимой когерентностью.

Интересные эффекты наблюдаются, если усреднить во времени свет, рассеянный от диффузной поверхности. Для этого достаточно при экспозиции перемещать матовое стекло, на которое падает пучок от лазера. Если время экспозиции достаточно велико, то изображение дифракционной картины Фраунгофера от двух отверстий имеет вид равномерно засвеченного кадра с ярким пятном на оптической оси. При этом изображение, полученное при таком усреднении по времени мгновенных когерентных изображений, тождественно изображению, полученному при некогерентном освещении. Этот эксперимент подтверждает справедливость эргодической гипотезы в оптике.

Раствор молока в воде — наиболее подходящий рассеиватель, создающий эффективное усреднение по времени благодаря броуновскому движению очень мелких частиц. Зернистая структура и оптические выбросы в изображении полностью пропадают (рис. 4.37).

Другой причиной исчезновения зернистости является недостаточная когерентность излучения лазера.

Очевидно, что как только длина когерентности становится меньше размера неровностей рассеивателя, все отмеченные эффекты исчезают.

При когерентном освещении требуется выполнение вполне определенного соотношения между размерами предмета и апертурой изображающей системы. В когерентной изображающей системе размер предмета должен быть меньше размера апертуры. Необходимость появления такого соотношения, отсутствующего в некогерентной системе, наиболее просто можно уяснить на примере

камеры-обскуры. Анализ показывает, что при когерентном освещении такая камера не может разрешить детали, которые меньше дифракционного пятна в плоскости предмета. Но размер этого дифракционного пятна всегда больше, чем размер точечного отверстия. Поэтому когерентную изображающую систему нельзя

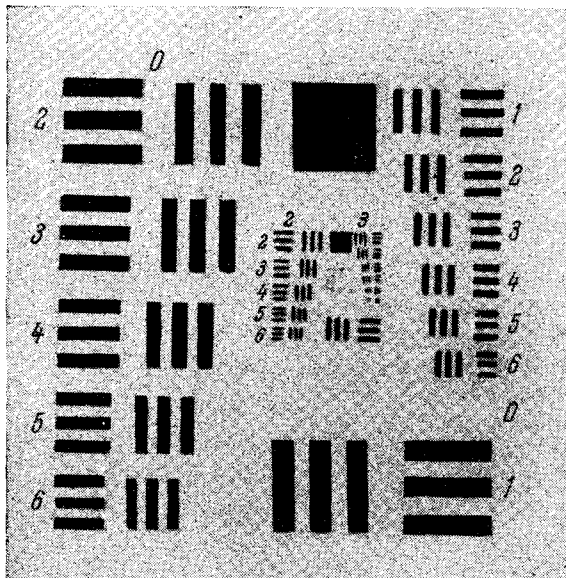


Рис. 4.37. Изображение тест-сигналов, которые были освещены пучком лазера, испытанным случайным рассеянием в растворе молока в воде.

осуществить с помощью камеры-обскуры, так как все, что видит камера-обскура в когерентном пучке, — это дифракционная картина точечного отверстия.

Угловое поле зрения изображающей системы определяется светосилой изображающей системы, а именно:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A}{f} \leq \frac{M}{2(1+M)} \frac{r_0}{f}, \quad (4.10.50)$$

где  $A$  — размер предмета,  $f$  — расстояние между предметом и линзой,  $r_0$  — радиус апертуры.

Рассмотрим оптическую систему, приведенную на рис. 4.38. Протяженный источник  $S$  монохроматического излучения проецируется линзой  $L$  в изображение  $S'$ . Согласно (4.8.32) две



точки в плоскости зрачка  $L$  можно считать когерентными, если расстояние между ними не превышает значения  $0,16 (\lambda_0/2\alpha)$ , где  $2\alpha$  — угол, под которым источник  $S$  виден из центра апертуры. Таким образом, если размер источника достаточно большой и угол  $\alpha$  велик, то все точки в плоскости зрачка являются некогерентными. Когерентность двух точек, расположенных в плоскости изображения  $S'$ , определяется фурье-образом распределения энергии излучения в апертуре и зависит от апертурного угла  $2\theta$ , стягиваемого линзой  $L$ .

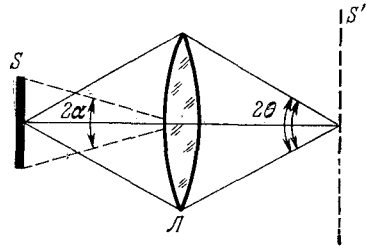


Рис. 4.38. Изображение  $S'$  протяженного источника  $S$  монохроматического излучения в условиях, когда плоскость зрачка  $L$  является некогерентной. Взаимная когерентность точек в плоскости  $S'$  определяется апертурным углом  $2\theta$ .

В общем случае изображение рассматривается с помощью некоторой изображающей системы — глаза или линзы  $L_2$  (рис. 4.39). Если апертура линзы  $L_2$  больше апертуры линзы  $L_1$  ( $\theta_2 > \theta_1$ ), то две точки  $A$  и  $B$ , расположенные в пределах дифракционного пятна линзы  $L_1$ , являются когерентными и при небольшом удалении точки  $A$  от точки  $B$  их можно увидеть раздельно. Но при малом расстоянии  $AB$  точки  $A$  и  $B$  разрешить уже нельзя.

Рассмотрим также случай  $\theta_2 < \theta_1$ , когда апертура линзы  $L_2$  меньше апертуры линзы  $L_1$  (рис. 4.40). Кривая  $1$  на рис. 4.40

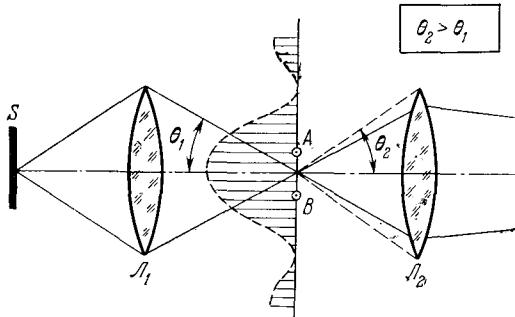


Рис. 4.39. Наблюдение изображения протяженного источника  $S$  оптической системой  $L_2$ , апертура  $\theta_2$  которой больше апертуры  $\theta_1$  изображающей системы  $L_1$ . Точки  $A$  и  $B$  неразрешимы.

изображает дифракционную картину от линзы  $L_1$ , а кривая  $2$  — картину дифракции от линзы  $L_2$ . Пусть две точки  $A$  и  $B$  находятся вне дифракционного пятна линзы  $L_1$  и поэтому некогерентны. Но раздельно они не видны, так как находятся в пределах дифрак-

ционного пятна линзы  $L_2$ . Если точки  $A$  и  $B$  раздвинуть, то они будут видны раздельно, но будут взаимно некогерентны.

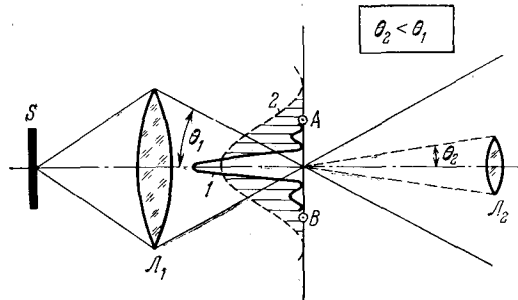


Рис. 4.40. Наблюдение изображения протяженного источника  $S'$  оптической системой  $L_2$ , апертура которой меньше апертуры  $\theta_1$  изображающей системы  $L_1$ . Так же как и в случае  $\theta_2 > \theta_1$ , точки  $A$  и  $B$  разрешимы, если они являются некогерентными для системы наблюдения  $L_2$ .

Таким образом, при наблюдении изображения, образуемого оптической системой, когерентность точек в изображении не зависит от отношения апертур двух оптических систем.

#### § 4-11. Методы определения и измерения когерентности

Временную когерентность можно измерить путем определения контраста видимости полос в интерференционном эксперименте (рис. 4.41).

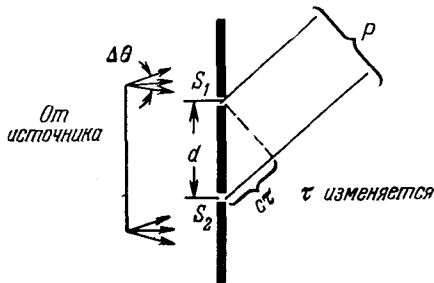


Рис. 4.41. Метод определения временной когерентности излучения, обладающего необходимой острой направленностью  $\Delta\theta < \lambda/d$ , где  $d$  — расстояние между щелями  $S_1$  и  $S_2$ . В опыте изменяется направление лучей, регистрируемых фотоприемником  $P$ , а следовательно, и запаздывание лучей  $\tau$ , идущих от щели  $S_2$ , относительно лучей, идущих от щели  $S_1$ .

Протяженный источник располагается на некотором расстоянии перед экраном с двумя щелями  $S_1$  и  $S_2$ . С помощью диафрагмы вырезается очень малый участок источника, размеры которого  $\delta$  меньше размера когерентной площадки, равной  $\lambda_0 (f/d)$ :

$$\delta < \lambda_0 \frac{f}{d}, \quad (4.11.1)$$

где  $d$  — расстояние между щелями  $S_1$  и  $S_2$ , а  $f$  — расстояние между источником и экраном. В этом случае участки фронта волны света,

достигшие экрана, взаимно пространственно когерентны. В направлении нормали к плоскости экрана произойдет сложение амплитуд света с усилением. При определенных задержках  $\tau$  между

лучами, идущими из щелей  $S_1$  и  $S_2$  (см. (4.1.18)), коэффициент контрастности строго монохроматического света

$$\gamma_{12} = e^{i\omega_0\tau}, \quad (4.11.2)$$

а распределение интенсивности и контраст видимости полос (см. рис. 4.2) равны

$$\left. \begin{aligned} I &= 2I_0(1 + \cos \omega_0\tau), \\ \gamma(\tau) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.11.3)$$

Если же источник испускает немонохроматическое излучение, то распределение интенсивности имеет вид

$$I = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} i_0(\omega') d\omega' + \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} i_0(\omega') \cos(\omega_0 - \omega')\tau d\omega', \quad (4.11.4)$$

или

$$I(\tau) = I_0 + \operatorname{Re} \{i_0(\tau) e^{i\omega_0\tau}\}, \quad (4.11.5)$$

где  $i_0(\tau)$  — обратный фурье-образ спектрального распределения  $i_0(\omega)$ :

$$i_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int i_0(\omega) e^{i\omega_0\tau} d\omega. \quad (4.11.6)$$

Если излучение квазимонохроматическое, т. е.  $i_0(\tau)$  изменяется значительно медленнее  $e^{i\omega_0\tau}$ , то в этом случае

$$\left. \begin{aligned} I_{\max} &= I_0 + \operatorname{Re}[i_0(\tau)], \\ I_{\min} &= I_0 - \operatorname{Re}[i_0(\tau)], \end{aligned} \right\} \quad (4.11.7)$$

а контраст видимости полос

$$\gamma(\tau) = \frac{\operatorname{Re}[i_0(\tau)]}{I_0}. \quad (4.11.8)$$

Таким образом, контрастность интерференционных полос в зависимости от времени запаздывания  $\tau$  определяется фурье-образом спектрального распределения интенсивности  $i_0(\omega)$ . Если функция  $i_0(\omega)$  симметрична относительно средней частоты  $\omega_0$ , то  $\operatorname{Re}[i_0(\tau)] = i_0(\tau)$ . Для прямоугольного контура спектральной линии шириной  $\Delta\omega$  имеем

$$I(\tau) = 1 + \cos \omega_0\tau \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega \cdot \tau}{2}\right)}{\frac{\Delta\omega \cdot \tau}{2}}, \quad (4.11.9)$$

а контраст видимости полос

$$\gamma(\tau) = \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega \cdot \tau}{2}\right)}{\frac{\Delta\omega \cdot \tau}{2}}. \quad (4.11.10)$$

При  $\Delta\omega \cdot \tau/2 = \pi$  или  $\tau_{\text{мин}} = 2\pi/\Delta\omega$  контраст видимости полос  $\gamma(\tau)$  обращается в нуль. Время когерентности излучения принимается равным

$$\tau_{\text{когер}} = \frac{1}{\Delta\nu} = \tau_{\text{мин}}. \quad (4.11.11)$$

Таким образом, наблюдая спад контраста видимости полос в зависимости от времени запаздывания  $\tau$ , можно определить временную когерентность.

Рассмотрим теперь метод измерения пространственной когерентности. Опять вернемся к протяженному пространственно некогерентному квазимонохроматическому источнику (см.

Рис. 4.42. Метод измерения пространственной когерентности излучения в точках  $S_1$  и  $S_2$  от протяженного источника. В опыте измеряется контраст интерференционных полос в зависимости от расстояния  $d$  между щелями  $S_1$  и  $S_2$ .

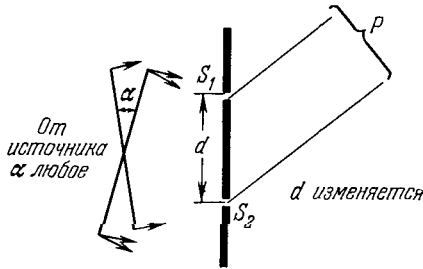


рис. 4.41). Теперь источник открыт в точке, определяемой произвольным углом  $\alpha$  (рис. 4.42). Если  $d$  — расстояние между щелями, то время запаздывания в этом случае равно

$$\tau' = \tau + \frac{d\alpha}{c}, \quad (4.11.12)$$

а сдвиг фазы

$$\Delta\varphi_{\pm} = \omega_0\tau + kd\alpha. \quad (4.11.13)$$

В реальном опыте имеется некоторый раскрыв угла  $\alpha$ , равный  $\Delta\alpha$ , и интенсивность, создаваемая элементом источника вблизи угла  $\alpha$ , равна

$$I(\alpha) = \int_{\alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}} i(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}} i(\alpha) \cos[\omega_0\tau + kd\alpha] d\alpha, \quad (4.11.14)$$

или

$$I(\alpha) = I_0 + \text{Re} [i_0(kd) e^{i\omega_0\tau}], \quad (4.11.15)$$

где

$$i_0(kd) = \int_{-\infty}^{\infty} i_0(\alpha) e^{ik\alpha d} d\alpha. \quad (4.11.16)$$

Контраст наблюдаемых полос в зависимости от расстояния между щелями  $d$ , равный

$$\gamma(d) = \frac{\operatorname{Re}[i_0(kd)]}{I_0}, \quad (4.11.17)$$

определяется фурье-образом углового распределения интенсивности  $i(\alpha)$ . Таким образом, кривая  $\gamma(d)$  при разности хода между лучами, равной нулю ( $\sigma\tau = 0$ ), в зависимости от расстояния между щелями определяет степень пространственной когерентности.

Например, некогерентный точечный источник с равномерным угловым распределением характеризуется  $i_0(kd) = \text{const}$  и контрастность полос равна

$$\gamma(d) = 1. \quad (4.11.18)$$

Источник в виде прямоугольной щели с равномерным угловым распределением создает интенсивность

$$I = 1 + \cos \omega_0\tau \cdot \frac{\sin\left(\pi \Delta\alpha \frac{d}{\lambda}\right)}{\pi \Delta\alpha \frac{d}{\lambda}} \quad (4.11.19)$$

и

$$\gamma(d) = \frac{\sin\left(\pi \Delta\alpha \frac{d}{\lambda}\right)}{\pi \Delta\alpha \frac{d}{\lambda}}. \quad (4.11.20)$$

Когерентность и контрастность полос спадают с увеличением размера источника  $\Delta\alpha$ .

Линейный размер когерентности равен

$$a_0 = \frac{\lambda}{\frac{\Delta\alpha}{2}}. \quad (4.11.21)$$

Аналогично, площадь когерентности

$$A_0 = \frac{\lambda^2}{\Omega}, \quad (4.11.22)$$

где

$$\Omega = \pi (\Delta\alpha)^2 \quad (4.11.23)$$

— телесный угол, под которым виден источник из точки, находящейся в плоскости экрана со щелями.

Временная и пространственная когерентности определяют ширину пучка. Как будет показано ниже, функция взаимной когерентности удовлетворяет волновому уравнению и поэтому в пространстве подобна волне света. Это фундаментальное свойство функции взаимной когерентности означает, что задание функции когерентности для любых пар точек на замкнутой поверхности фактически означает ее задание для любых пар точек в пространстве, ограниченном этой поверхностью.

Приведем соотношение, выражающее это свойство функции взаимной когерентности (доказывается в § 4-14):

$$\Gamma_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \Gamma_{12}(\xi_1, \xi_2, \omega) (1 - ikr_1)(1 + ikr_2) \times \\ \times \cos\theta_1 \cos\theta_2 \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1^2 r_2^2} e^{-i\omega\tau} d\omega d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.11.24)$$

где  $\mathbf{x}$  — координата поля,  $\xi$  — координата источника,  $r_i^2 = (\mathbf{x}_i - \xi_i)^2 + f^2$ ,  $\theta_i$  — угол между радиусом-вектором  $r_i$  и нормалью к плоскости, а

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) = \int_{-\infty}^\infty \Gamma_{12}(\xi_1, \xi_2, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.11.25)$$

Если  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ , а  $\tau = 0$ , то в приближении далекого поля ( $kr_i \gg 1$ ) и квазимонохроматического плоского источника

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{\cos^2\theta}{\lambda_0^2} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} \int \Gamma_{12}(\xi_1, \xi_2, \omega) d\xi_1 d\xi_2 d\omega. \quad (4.11.26)$$

Это — обобщение принципа Гюйгенса.

Для нескольких наиболее характерных случаев имеем:

I. Монохроматический источник:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\xi_1, \xi_2, \tau) &= I_0 e^{-i\omega_0\tau}, \\ \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) &= I_0 \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.11.27)$$

II. Квазимонохроматический пространственно когерентный источник:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\xi_1, \xi_2, \tau) &= I_0 \delta(\tau), \\ \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) &= I_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11.28)$$

III. Квазимонохроматический пространственно некогерентный источник:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\xi_1, \xi_2, \tau) &= I_0 a \delta(\xi_1 - \xi_2), \\ \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) &= I_0 a \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.11.29)$$

Последний случай особенно интересен тем, что позволяет объяснить существенное различие между полностью некогерентным *источником*, описываемым дельтообразной функцией когерентности  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \tau)$  (4.11.29), и полностью некогерентным *полем излучения*. Полностью пространственно некогерентный источник — это физическая реальность, в то время как полностью пространственно некогерентное излучение является нефизической абстракцией. Излучение может быть только частично пространственно некогерентным. Действительно, уже на достаточно близких расстояниях от полностью пространственно некогерентного источника в две различные точки пространства, достаточно близкие друг к другу, приходят волны от нескольких различных некогерентных элементов источника, а это с неизбежностью приводит к появлению в этих двух точках взаимных корреляций полей как по амплитуде, так и по фазе, т. е. появляется пространственная когерентность.

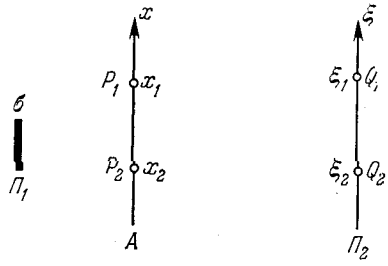


Рис. 4.43. К определению функции взаимной когерентности в плоскости  $\Pi_2$  по заданной функции взаимной когерентности в плоскости  $\Pi_1$ .

После рассмотрения полукачественных методов оценок когерентности — как временной, так и пространственной — перейдем к определению распределения пространственной когерентности  $\Gamma$  через наблюдаемые величины. Непосредственно наблюдаемой величиной является распределение интенсивности света в плоскости наблюдения  $\Pi_2$ , которая освещается постоянным источником квазимонохроматического излучения, расположенным в плоскости  $\Pi_1$  (рис. 4.43). Пусть задана функция  $\Gamma(x_1, x_2)$  взаимной интенсивности в плоскости  $\Pi_1$ . Рассмотрим, как изменяется эта функция в пространстве.

Согласно определению (4.43) функция взаимной интенсивности  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  в плоскости  $\Pi_2$  равна

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \int_{\sigma} u(\xi_1) u^*(\xi_2) ds, \quad (4.11.30)$$

где  $u(\xi)$  — электромагнитное поле в точке  $\xi$ , а интегрирование ведется по источнику  $\sigma$ . Согласно принципу Гюйгенса — Френеля

поле  $u(\xi_1)$  можно выразить через поле  $u(\mathbf{x}_1)$  на некоторой поверхности  $A$ , расположенной между источником  $\Pi_1$  и плоскостью  $\Pi_2$ :

$$u(\xi_1) = \frac{i}{\lambda} \int_A u(\mathbf{x}_1) \frac{e^{ikr_1}}{r_1} d\mathbf{x}_1. \quad (4.11.31)$$

Здесь  $u(\mathbf{x}_1)$  — поле, заданное на некоторой поверхности  $A$ ,  $r_1$  — расстояние между точкой  $\mathbf{x}_1$ , расположенной на поверхности  $A$ , и точкой  $\xi_1$ , находящейся на поверхности  $\Pi_2$ . При этом фактор наклона мал. Тогда

$$u(\xi_1) u^*(\xi_2) = \frac{1}{\lambda^2} \int_A \int_A u(\mathbf{x}_1) u^*(\mathbf{x}_2) \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (4.11.32)$$

Подставляя (4.11.32) в (4.11.30) и изменяя порядок интегрирования находим

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{\lambda^2} \int_A \int_A \int_{\sigma} u(\mathbf{x}_1) u^*(\mathbf{x}_2) dS \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \int_A \int_A \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (4.11.33)$$

Соотношение (4.11.33) связывает пространственную когерентность  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  в плоскости  $A$  с пространственной когерентностью  $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  в плоскости  $\Pi_2$ . Промежуточную плоскость  $A$  удобнее всего расположить в плоскости входной апертуры или диафрагмы оптической системы.

Если точки  $\xi_1$  и  $\xi_2$  совпадают, то получаем распределение интенсивности

$$I(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} \int_A \int_A \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (4.11.34)$$

или, если степень взаимной когерентности равна  $\gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ,

$$I(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} \int_A \int_A \sqrt{I(\mathbf{x}_1)} \sqrt{I(\mathbf{x}_2)} \gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (4.11.35)$$

Предположим, что диафрагм в оптической системе нет и поверхность  $A$  можно совместить с плоским источником  $\sigma$ . Тогда  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  — пространственная когерентность плоского источника.

Для области далекого поля, как обычно имеем

$$r_1 \approx r_2 \approx f,$$

$$r_1 - r_2 = -\frac{1}{f} \mathbf{x}(\xi - \xi'),$$



и интенсивность в области далекого поля равна

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_0^2 f^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} \sqrt{I(\xi) \cdot I(\xi')} \gamma(\xi, \xi') \exp \left[ -ik \frac{\mathbf{x}}{f} (\xi - \xi') \right] d\xi d\xi'. \quad (4.11.36)$$

Пусть степень пространственной когерентности  $\gamma(\xi, \xi')$  зависит только от расстояния между точками  $P(\xi)$  и  $P(\xi')$ :

$$\gamma(\xi, \xi') = \gamma(\xi - \xi'). \quad (4.11.37)$$

Иначе говоря, источник  $\sigma$  является пространственно инвариантным. Тогда

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_0^2 f^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} \sqrt{I(\xi) \cdot I(\xi')} \gamma(\xi - \xi') \exp \left[ -ik \frac{\mathbf{x}}{f} (\xi - \xi') \right] d\xi d\xi'. \quad (4.11.38)$$

Соотношение (4.11.38) дает связь между интенсивностью в плоскости наблюдения  $\mathbf{x}$  и пространственной когерентностью плоского источника. Если источник дает пространственно некогерентное излучение, то

$$\gamma(\xi - \xi') = \delta(\xi - \xi'), \quad (4.11.39)$$

а интенсивность в точке  $\mathbf{x}$  равна

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_0^2 f^2} \int_{\sigma} I(\xi) \exp \left[ -ik \frac{\mathbf{x}\xi}{f} \right] d\xi. \quad (4.11.40)$$

Выражение (4.11.40) описывает распределение интенсивности на экране, освещаемом некогерентным источником. Наша задача состоит в том, чтобы найти  $\gamma(\xi)$ , зная распределение интенсивностей  $I(\mathbf{x})$  и  $I(\xi)$ . Ее можно решить следующим методом. Подвергнем обратному преобразованию Фурье соотношение (4.11.38):

$$J(\mathbf{u}) = \hat{\mathcal{F}}^{-1} [I(\mathbf{x})] = \int_{H_2} I(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{u}\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (4.11.41)$$

Подставив  $I(\mathbf{x})$  из (4.11.38), находим

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} \int_{H_2} e^{i\mathbf{u}\mathbf{x}} \sqrt{I(\xi) I(\xi')} \gamma(\xi - \xi') \times \\ \times \exp \left[ -ik \frac{\mathbf{x}}{f} (\xi - \xi') \right] d\xi d\xi' d\mathbf{x}. \quad (4.11.42)$$

Устремляя пределы интегрирования в бесконечность, находим интеграл по  $\Pi_2$ :

$$\int_{u_2} \exp i \left[ u - \frac{k}{f} (\xi - \xi') \right] x dx \approx \delta \left[ u - \frac{k}{f} (\xi - \xi') \right] = \\ = (2\pi)^2 \left( \frac{f}{k} \right)^2 \delta \left[ u \frac{f}{k} - (\xi - \xi') \right]. \quad (4.11.43)$$

После интегрирования по  $\xi$  окончательно получаем

$$J(u) = \gamma \left( u \frac{f}{k} \right) \int \sqrt{I(\xi) I \left( \xi - u \frac{f}{k} \right)} d\xi. \quad (4.11.44)$$

Если функция  $I(\xi)$  задана на конечной области  $A$ , то интегрирование в (4.11.42) следует вести по области, являющейся общей частью исходной области  $A$  и области  $A_\alpha$ , отличающейся от  $A$  тем, что  $A_\alpha$  смещена на вектор

$$\alpha = u \frac{f}{k} \quad (4.11.45)$$

относительно исходного положения  $A$ . Легко видеть, что если, например, область  $A$  является прямоугольной апертурой с

$$|\xi| < |\xi|_{\max} = a, \quad |\eta| < |\eta|_{\max} = b,$$

то

$$|\alpha|_{\max} = 2a, \quad |\beta|_{\max} = 2b.$$

Таким образом, из (4.11.42) следует, что

$$\gamma(\alpha) = -\frac{J \left( \alpha \frac{k}{f} \right)}{\mathcal{E}(\alpha)}, \quad (4.11.46)$$

где

$$\mathcal{E}(\alpha) = \int \sqrt{I(\xi) I(\xi - \alpha)} d\xi = \sqrt{I} \otimes \sqrt{I} \quad (4.11.47)$$

по области перекрытия.

Проблема измерения степени пространственной когерентности произвольного источника сводится к измерению распределения интенсивности в апертуре  $I(\xi)$  и интенсивности  $I(x)$  далекого поля. Зная эти исходные данные, необходимо их преобразовать. Интенсивность в апертуре  $I(\xi)$  преобразуется в автосвертку  $\mathcal{E}(\alpha)$  корня квадратного из интенсивности, а интенсивность далекого поля  $I(x)$  подвергается преобразованию Фурье.

Если интенсивность в апертуре  $I(\xi)$  постоянна, то автосвертка  $\mathcal{E}(\alpha)$  равняется общей области апертуры  $A$  и ее образа,

перенесенного на вектор  $\alpha$ , т. е.

$$\mathcal{E}(\alpha) = (2a - |\alpha|)(2b - |\beta|), \quad (4.11.48)$$

где  $2a$  и  $2b$  — стороны прямоугольника, ограничивающего одну-родную апертуру.

В этом частном случае

$$\gamma(\alpha) = \frac{J\left(\alpha \frac{k}{f}\right)}{I_0(2a - |\alpha|)(2b - |\beta|)}, \quad (4.11.49)$$

где  $I_0$  — постоянная интенсивность источника. С помощью этого метода удалось измерить пространственную когерентность Не—Не-лазера при различной мощности генерации. Было обнаружено, что степень когерентности излучения лазера при высокой мощности генерации оказывается меньше, чем при низкой мощности.

Рассмотрим далее метод измерения продольной когерентности. Как было показано выше (см. (4.8.39)), степень пространственной продольной когерентности равна

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\int_S I(\alpha) e^{-i \frac{k_0}{2} \Delta z \alpha^2} d\alpha}{\int_S I(\alpha) d\alpha}.$$

Для измерения продольной когерентности рассмотрим оптическую систему, схема которой приведена на рис. 4.44. Линза  $L_1$  образует в плоскости двупреломляющей системы  $B$  изображение некогерентного кругового источника  $S$ . Вторая линза  $L_2$ , расположенная за системой  $B$ , образует изображение линзы  $L_1$  в плоскости  $\Pi$ , где установлен приемник света  $\mathcal{D}$ . Двупреломляющая система  $B$  состоит из двух частей: плоской пластинки  $B_1$  и плоско-вогнутой линзы  $B_2$  (рис. 4.45). Оба элемента ограничены гранями, параллельными оси одноосного кристалла, но при измерении их оси могут располагаться либо параллельно, либо взаимно перпендикулярно. Толщина пластинки  $B_1$  равна минимальной толщине линзы.

В поляризаторе наблюдатель видит кольца с центром в точке, характеризующейся тем, что в этой точке толщины двух оптических элементов равны. В случае, когда оси ориентированы перпендикулярно друг другу, видно темное центральное пятно. При параллельном расположении осей поляризатора пятно становится светлым. Если темное (или светлое) пятно сильно выходит за край изображения источника, то степень когерентности практически равна 1. При изменении расположения осей поляризатора появляется эффект модуляции. Глубина такой модуляции зависит от пространственной когерентности двух точек, расположенных

в глубине на расстоянии друг от друга:

$$\varepsilon = \frac{2(n_o - n_e) f^2}{R}, \quad (4.11.50)$$

где  $f$  — расстояние между линзой  $L_2$  и приемником  $D$ , а  $R$  — радиус кривизны сферической поверхности линзы.

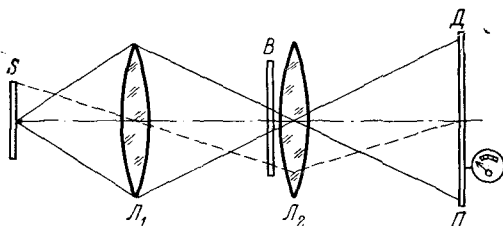


Рис. 4.44. Схема оптической системы для измерения продольной пространственной когерентности. Линза  $L_1$  отображает источник  $S$  на плоскость дупреломляющей системы  $B$ .

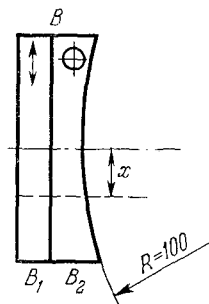


Рис. 4.45. Разрез дупреломляющей системы  $B$ , состоящей из плоской пластинки  $B_1$  и плоско-выгнутой линзы  $B_2$ . Грани пластинки и основания линзы вырезаны параллельно оси одноосного кристалла.

Действительно, разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами равна

$$\varphi(x) = k(n_o - n_e) \frac{x^2}{2R}, \quad (4.11.51)$$

где  $n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в дупреломляющем кристалле.

Пусть сначала поляризаторы параллельны друг другу. Интенсивность равна

$$I(\alpha) = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos k \frac{\varepsilon}{4} \alpha^2 \right], \quad (4.11.52)$$

где  $\alpha = x/f$ .

Система концентрических полос  $I(\alpha)$  регистрируется приемником света  $D$ , захватывающим максимальный угол  $\alpha_0$ . Полная интенсивность для кругового аксиального источника равна

$$I_{\parallel} = \pi \int_0^{\alpha_0} \left( 1 + \cos k \frac{\varepsilon}{4} \alpha^2 \right) \alpha d\alpha, \quad (4.11.53)$$

или

$$I_{\parallel} = \frac{\pi\alpha_0^2}{2} \left( 1 + \frac{\sin\left(k \frac{\varepsilon}{4} \alpha_0^2\right)}{k \frac{\varepsilon}{4} \alpha_0^2} \right). \quad (4.11.54)$$

Как уже было показано (см. (4.8.32)), степень продольной когерентности для рассматриваемого здесь источника равна

$$|\gamma_{12}(0)| = \left| \frac{\sin\left(k \frac{\Delta z}{4} \alpha_0^2\right)}{k \frac{\Delta z}{4} \alpha_0^2} \right|.$$

Из сравнения (4.8.42) и (4.11.54) следует, что для параллельных осей

$$I_{\parallel} = \frac{\pi\alpha_0^2}{2} [1 + \gamma_{12}(0)], \quad (4.11.55)$$

если

$$\Delta z = \varepsilon = \frac{2(n_o - n_e) f^2}{R}. \quad (4.11.56)$$

Для перпендикулярных осей поляризатора

$$I_{\perp} = \pi \int_0^{\alpha_0} \left( 1 - \cos k \frac{\varepsilon}{4} \alpha^2 \right) \alpha d\alpha = \frac{\pi\alpha_0^2}{2} [1 - \gamma_{12}(0)]. \quad (4.11.57)$$

Контрастность темных и светлых полос равна искомой степени продольной когерентности:

$$\frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \gamma_{12}(0). \quad (4.11.58)$$

Изменяя расстояние  $f$ , можно изменять глубину залегания  $\Delta z$  и таким образом установить положение первого минимума кривой  $|\gamma_{12}(0)|$  в зависимости от  $\Delta z$ , а следовательно, определить длину продольной когерентности (рис. 4.46).

Другой, более простой метод оценки величины контраста продольной когерентности основан на наблюдении контраста видимости полос равной толщины. Для этого можно использовать простейшую оптическую схему, приведенную на рис. 4.47. Протяженный источник  $S$  находится в фокусе линзы  $L_1$ . Пучок света расщепляется в светоделителе  $D$ , наклоненном под углом  $45^\circ$  к оси систе-

мы. Отраженный пучок проходит через пластинку  $B$ . Лучи, отразившись от двух поверхностей пластинки  $B$  и пройдя сквозь светоделитель, образуют изображение источника  $S$  в фокальной плоскости линзы  $L_2$ . Пластинка ориентирована так, что осевой луч  $SO_1$  после отражения от светоделителя  $D$  становится нормаль-

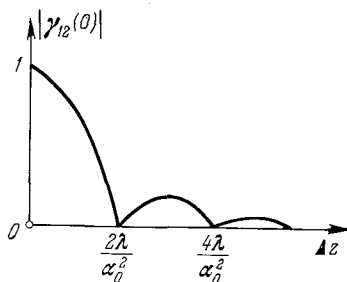


Рис. 4.46. Контрастность темных и светлых полос, наблюдаемых при изменении угла между осями двух поляризаторов, в зависимости от расстояния  $l$  между линзой  $L_2$  и фотоприемником  $D$  или глубины залегания  $\Delta z$ .

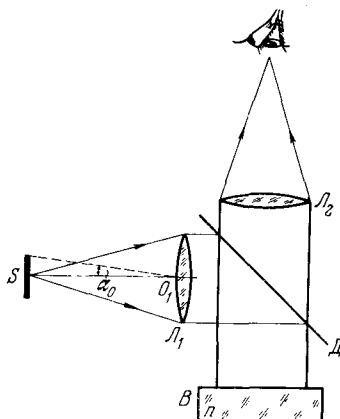


Рис. 4.47. Метод оценки величины продольной пространственной когерентности путем наблюдения контраста полос равной толщины в пластинке  $B$ .

ным к пластинке. Все остальные лучи падают на пластинку  $B$  под малыми углами, т. е. малым является угол  $\alpha_0$ . На рис. 4.48 дана схема прохождения лучей через пластинку  $B$ .

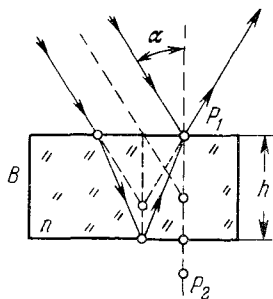


Рис. 4.48. Разрез пластинки  $B$  (см. рис. 4.47) и схема прохождения лучей через нее.

Разность хода параллельных лучей равна

$$\delta = 2nh \cos \alpha + \frac{\lambda}{2}, \quad (4.11.59)$$

где  $n$  — показатель преломления стекла,  $h$  — толщина пластинки, а  $\alpha$  — угол падения. В случае малых углов

$$\delta = 2nh \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{\lambda}{2}. \quad (4.11.60)$$

Интенсивность в точке  $P_1$  равна

$$I(P_1) = I_0 \sin^2 kl \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) = \frac{I_0}{2} \left[ 1 - \cos 2kl \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right], \quad (4.11.61)$$

где  $l = nh$ .

Произведем анализ выражения (4.11.61) для случая однородного кругового источника  $S$ . Полная интенсивность в точке  $P_1$  равна

$$I = \pi \int_0^{\alpha_0} \left[ 1 - \cos 2kl \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right) \right] \alpha d\alpha = \\ = C \left[ 1 - \cos 2kl \cdot \frac{\sin \left( \frac{1}{2} k\alpha_0^2 \frac{h}{n} \right)}{\frac{1}{2} k\alpha_0^2 \frac{h}{n}} \right]. \quad (4.11.62)$$

Контраст видимости полос равной толщины равен

$$|\gamma| = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{\sin \left( \frac{1}{2} k\alpha_0^2 \frac{h}{n} \right)}{\frac{1}{2} k\alpha_0^2 \frac{h}{n}} \right|. \quad (4.11.63)$$

Эквивалентом глубины залегания  $\Delta z$  является величина

$$\Delta z_{\text{эkv}} = \frac{2h}{n}, \quad (4.11.64)$$

т. е. удвоенная оптическая толщина пластинки  $B$ .

Расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$ , показанными на рис. 4.48, равно  $\Delta z$ . Изменяя толщину  $h$  пластинки  $B$ , можно определить длину продольной когерентности. Контраст видимости полос равной толщины заметно ослабнет, если толщина  $\Delta z$  начнет превышать длину продольной когерентности.

#### § 4-12. Соотношения между когерентностью и спектром излучения

Существуют два соотношения. Одно — между временной когерентностью и взаимным спектром мощности. Второе — между пространственной когерентностью и пространственной взаимной спектральной мощностью.

Соотношение между временной когерентностью и взаимным спектром мощности. Фурье-образ временной когерентности  $\Gamma_{12}(\tau)$  равен (см. (4.2.19))

$$\Gamma_{12}(\omega) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Функция  $\Gamma_{12}(\omega)$  равна среднему взаимному спектру мощности:

$$\Gamma_{12}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V_1(\omega, T) V_2^*(\omega, T)}{2T}, \quad (4.12.1)$$

где

$$V(\omega, T) = \int V(t, T) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.12.2)$$

Для эргодических систем усреднение по времени (4.12.1) эквивалентно усреднению по ансамблю:

$$\Gamma_{12}(\omega) = \left[ \frac{V_1(\omega, T) V_2^*(\omega, T)}{2T} \right]_{\text{средн}}. \quad (4.12.3)$$

Таким образом, фурье-образ функции временной когерентности  $\Gamma_{12}(\tau)$  равен среднему взаимному спектру мощности.

**Соотношение между пространственной когерентностью и пространственной взаимной спектральной мощностью.** По определению функция пространственной когерентности равна

$$\Gamma_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \Gamma_{12}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_1(\mathbf{x}_1, t) V_2^*(\mathbf{x}_2, t) dt. \quad (4.12.4)$$

Найдем, используя аналогию с (4.12.1), пространственную взаимную спектральную плотность энергии:

$$S_{12}(\omega_x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{V_1(\omega_x, t) V_2^*(\omega_x, t)}{2L}, \quad (4.12.5)$$

где

$$V(\omega_x, t) = \int V(x, t) e^{-i\omega_x x} dx \quad (4.12.6)$$

— пространственный фурье-образ сигнала  $V(x, t)$ . Усредняя  $S_{12}(\omega_x)$  по времени, получим

$$\overline{S_{12}(\omega_x)}^t = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{V_1(\omega_x, t) V_2^*(\omega_x, t)}{2L} dt. \quad (4.12.7)$$

Подставляя  $V(\omega_x, t)$  из (4.12.6) и изменяя порядок интегрирования, находим

$$\overline{S_{12}(\omega_x)}^t = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_x(x_1 - x_2)}}{2L} \Gamma_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (4.12.8)$$



Если функция пространственной когерентности зависит только от разности  $x_2 - x_1 = \xi$ , то

$$\overline{S_{12}(\omega_x)}^t = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\Gamma_{12}(x_1, \xi)}{2L} e^{i\omega_x \xi} d\xi dx_1. \quad (4.12.9)$$

Подставляя, далее,

$$\Gamma_{12}(x, \omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{12}(x, \xi) e^{-i\omega_x \xi} d\xi \quad (4.12.10)$$

и определяя усредненный по пространству фурье-образ функции когерентности  $\Gamma_{12}(x, \omega_x)$  как

$$\overline{\Gamma_{12}(\omega_x)}^x = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{\Gamma_{12}(x, \omega_x)}{2L} dx, \quad (4.12.11)$$

окончательно получаем

$$\overline{S_{12}(\omega_x)}^t = \overline{\Gamma_{12}(\omega_x)}^x. \quad (4.12.12)$$

Таким образом, среднее по времени от пространственной взаимной спектральной мощности равно среднему по пространству от пространственного фурье-образа функции пространственной когерентности.

В заключение приведем без доказательства следующие три теоремы о предельных формах когерентности.

I. Оптическое поле может иметь  $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$  для всех пар точек пространства и при любых временах задержки  $\tau$  тогда и только тогда, если оно является монохроматическим, т. е.

$$V(t) = A \exp[-i(\omega_0 t + \varphi)], \quad (4.12.13)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — функции, зависящие от пространственных координат и не зависящие от времени.

II. Поле, отличное от нуля, для которого  $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$  для любых пар точек и при любых временах задержки  $\tau$ , не может существовать в свободном пространстве.

Следовательно, если  $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$  для всех пар точек некоторой непрерывной замкнутой поверхности, то поверхность не излучает.

III. Пространственная фильтрация (т. е. изменение оптического сигнала по пространственным координатам) двух точек источника, взаимная когерентность которых равна нулю, не может изменить взаимной когерентности двух точек.

### § 4-13. Волновое уравнение функции взаимной интенсивности

Функция взаимной интенсивности в свободном пространстве подчиняется волновому уравнению. Докажем это.

Рассмотрим стационарное волновое поле в свободном пространстве, описываемое аналитическим сигналом  $V(\mathbf{x}, t)$ . Известно, что скалярная функция, описывающая компоненту электрического поля линейно поляризованной световой волны, подчиняется скалярному волновому уравнению. Но поскольку аналитический сигнал  $V(\mathbf{x}, t)$  включает также мнимую часть, полученную из действительной путем линейного преобразования Гильберта, то таким же свойством должен обладать сам аналитический сигнал, т. е.

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (4.13.1)$$

Докажем, что функция взаимной интенсивности  $\Gamma_{12}(\tau)$  также подчиняется волновому уравнению. Возьмем лапласиан по координате  $x_1$ :

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \overline{\nabla_1^2 V_1(t + \tau) V_2^*(\tau)}. \quad (4.13.2)$$

Из (4.13.1) находим

$$\nabla_1^2 V_1(t + \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V_1(t + \tau)}{\partial t^2}. \quad (4.13.3)$$

Тогда

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \overline{\frac{\partial^2 V_1(t + \tau)}{c^2 \partial t^2} V_2^*(t)}. \quad (4.13.4)$$

Так как  $V_2(t)$  не зависит от  $\tau$ , то

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{\partial^2}{c^2 \partial \tau^2} \overline{[V_1(t + \tau) V_2^*(t)]} = \frac{\partial^2}{c^2 \partial \tau^2} \Gamma_{12}(\tau). \quad (4.13.5)$$

Аналогично находим

$$\nabla_2^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{\partial^2}{c^2 \partial \tau^2} \Gamma_{12}(\tau). \quad (4.13.6)$$

Таким образом,

$$\nabla_i \Gamma_{12}(\tau) = \frac{\partial^2}{c^2 \partial \tau^2} \Gamma_{12}(\tau), \quad \text{где } i = 1, 2. \quad (4.13.7)$$

Два уравнения второго порядка (4.13.7) можно преобразовать в одно уравнение четвертого порядка

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{\partial^4}{c^4 \partial \tau^4} \Gamma_{12}(\tau). \quad (4.13.8)$$

#### § 4-14. Интегральное представление функции $\Gamma_{12}(\tau)$

Для решения волнового уравнения, которому подчиняется функция когерентности  $\Gamma_{12}(\tau)$ , необходимо задать граничные условия для  $\Gamma_{12}(\tau)$  и учесть условие излучения Зоммерфельда на бесконечности, накладываемое на аналитический сигнал  $V(t)$ . При этом условие излучения для  $\Gamma_{12}(\tau)$  следует из выполнения этого условия для  $V_1(t + \tau)$  и  $V_2^*(t)$  в силу определения функции когерентности  $\Gamma_{12}(\tau)$ . Граничные условия для  $\Gamma_{12}(\tau)$  означают, что функция  $\Gamma_{12}(\tau)$  задана для всех пар точек на некоторой ограниченной поверхности  $S$ .

Найдем решение уравнения (4.13.7) с помощью функции Грина. При этом, если сначала взять фурье-образ во времени функции когерентности  $\Gamma_{12}(\tau)$ , то можно будет воспользоваться трехмерными функциями Грина.

Подставив в волновое уравнение (4.13.7) функцию  $\Gamma_{12}(\tau)$  в виде

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^{\infty} \Gamma_{12}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (4.14.1)$$

и изменив порядок дифференцирования и интегрирования, получим

$$\int_0^{\infty} [\nabla_s^2 + k^2(\omega)] \Gamma_{12}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = 0, \quad (4.14.2)$$

где  $k(\omega) = \omega/c$ . Поскольку уравнение (4.14.2) верно для всех  $\tau$ , то

$$[\nabla_s^2 + k^2(\omega)] \Gamma_{12}(\omega) = 0 \quad (s = 1, 2). \quad (4.14.3)$$

Первое уравнение (4.14.3) имеет формальное решение

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\omega) &= \Gamma(\mathbf{x}_1, \xi_2, \omega) = \\ &= - \int_S \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) \frac{\partial G_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1, \omega)}{\partial n_{s_1}} \Big|_{\mathbf{x}'_1 = \xi_1} d\xi_1, \end{aligned} \quad (4.14.4)$$

где функция Грина  $G_1$  удовлетворяет уравнению

$$[\nabla_1^2 + k^2(\omega)] G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1, \omega) = -\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \quad (4.14.5)$$

с граничными условиями

$$G(x_1, x'_1, \omega) \Big|_{x_1=\xi_1} = 0. \quad (4.14.6)$$

Функция  $\Gamma(x_1, \xi_2, \omega)$  определяет граничные условия для решения второго уравнения (4.14.3), а именно:

$$\Gamma(x_1, x_2, \omega) = - \int \Gamma(x_1, \xi_2, \omega) \frac{\partial G_2(x_2, x'_2, \omega)}{\partial n_{s_2}} \Big|_{x_2=\xi_2} d\xi_2, \quad (4.14.7)$$

где  $G_2$  — функция Грина, удовлетворяющая тем же граничным условиям, что и  $G_1$ . Объединяя (4.14.4) и (4.14.7), окончательно находим

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, \omega) = \\ = \int_S \int_S \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) \frac{\partial G_2(x_2, x'_2, \omega)}{\partial n_{s_2}} \Big|_{x_2=\xi_2} \frac{\partial G_1(x_1, x'_1, \omega)}{\partial n_{s_1}} \Big|_{x_1=\xi_1} d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (4.14.8)$$

т. е.  $\Gamma(x_1, x_2, \omega)$  определяется однозначно заданием  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega)$  на поверхности  $S$ .

Соотношение (4.14.4) определяет когерентность между двумя точками, одна из которых расположена на поверхности  $S$ , а другая — в произвольном месте пространства. С его помощью можно найти продольную пространственную когерентность.

При  $x_1 = x_2$  уравнение (4.14.8) определяет спектр мощности излучения в любой внешней точке пространства, который определяется взаимным спектром мощности на поверхности  $S$ , т. е. функцией  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega)$ , которая зависит от двух точек  $\xi_1$  и  $\xi_2$  на этой поверхности.

Условие излучения Зоммерфельда попросту означает, что функция  $V(\omega)$  на бесконечности имеют вид расходящихся волн, т. е.

$$V(\omega) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} f(\theta, \Phi, \omega) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (4.14.9)$$

В случае плоского источника  $S$  конечных размеров функции Грина равны

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{e^{ikr_1}}{4\pi r_1} - \frac{e^{ikr_1''}}{4\pi r_1''}, \\ G_2 &= \frac{e^{-ikr_2}}{4\pi r_2} - \frac{e^{-ikr_2''}}{4\pi r_2''}, \end{aligned} \right\} \quad (4.14.10)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — длины отрезков  $P_1P'_1$  и  $P_2P'_2$ :

$$r = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (4.14.11)$$

а  $r''_1$  и  $r''_2$  — соответствующие расстояния от точек  $P_1$  и  $P_2$  до зеркальных относительно плоскости  $S$  точек  $P'_1$  и  $P'_2$ :

$$r'' = \sqrt{(z + z')^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (4.14.12)$$

Найдем нормальную производную от функции Грина  $G$ :

$$\frac{\partial G_1}{\partial n_{s_1}} = \frac{ikr_1 - 1}{4\pi} \frac{e^{ikr_1}}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial n_{s_1}} + \frac{1 - ikr''_1}{4\pi} \frac{e^{ikr''_1}}{r_1''^2} \frac{\partial r''_1}{\partial n_{s_1}}. \quad (4.14.13)$$

Поскольку

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial n_{s_1}} \Big|_{s_1} &= - \frac{\partial r_1}{\partial z'_1} \Big|_{s_1} = \frac{z_1}{r_1} = \frac{\partial r''_1}{\partial z'_1} \Big|_{s_1}, \\ r_1 \Big|_{s_1} &= r''_1 \Big|_{s_1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.14.14)$$

а  $\cos \theta_1 = z_1/r_1$ , то

$$\frac{\partial G_1}{\partial n_{s_1}} \Big|_{s_1} = -2 \frac{(1 - ikr_1)}{4\pi} \cos \theta_1 \frac{e^{+ikr_1}}{r_1^2} \quad (4.14.15)$$

и

$$\frac{\partial G_2}{\partial n_{s_2}} \Big|_{s_2} = -2 \frac{(1 + ikr_2)}{4\pi} \cos \theta_2 \frac{e^{-ikr_2}}{r_2^2}. \quad (4.14.16)$$

Находим теперь фурье-образ функции когерентности

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_S \int_S \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) (1 - ikr_1) (1 + ikr_2) \times \\ &\quad \times \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{e^{ih(r_1 - r_2)}}{r_1^2 r_2^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.14.17) \end{aligned}$$

и, наконец, ее прообраз

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_S \int_S \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) (1 - ikr_1) (1 + ikr_2) \times \\ &\quad \times \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{e^{ih(r_1 - r_2)}}{r_1^2 r_2^2} e^{-i2\omega\tau} d\xi_1 d\xi_2 d\omega. \quad (4.14.18) \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, находим

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_S \int_S \cos\theta_1 \cos\theta_2 \Omega_{12}(\tau) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.14.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(\tau) &= \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \int_0^\infty \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) \exp\left\{-i\omega\left[\tau - \frac{r_1 - r_2}{c}\right]\right\} d\omega + \\ &+ \frac{r_2 - r_1}{r_1^2 r_2^2 c} \int_0^\infty i\omega \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) \exp\left\{-i\omega\left[\tau - \frac{r_1 - r_2}{c}\right]\right\} d\omega + \\ &+ \frac{r_1 r_2}{r_1^2 r_2^2 c} \int_0^\infty \omega^2 \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) \exp\left\{-i\omega\left[\tau - \frac{r_1 - r_2}{c}\right]\right\} d\omega = \\ &= \left[ \frac{1}{r_1^2 r_2^2} + \frac{r_1 - r_2}{r_1^2 r_2^2 c} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{r_1 r_2}{r_1^2 r_2^2 c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \cdot \Gamma\left(\xi_1, \xi_2, \tau - \frac{r_1 - r_2}{c}\right). \end{aligned} \quad (4.14.20)$$

В (4.14.20) использовано правило дифференцирования (2.3.19). Таким образом, окончательно получаем

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_S \int_S \cos\theta_1 \cos\theta_2 \hat{\Omega} \cdot \Gamma\left(\xi_1, \xi_2, \tau - \frac{r_1 - r_2}{c}\right) d\xi_1 d\xi_2,$$

где оператор

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{r_1^2 r_2^2} + \frac{r_1 - r_2}{r_1^2 r_2^2 c} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{r_1 r_2}{r_1^2 r_2^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \quad (4.14.21)$$

Это соотношение, которое является обобщением уравнения (4.8.14), используется далее в главе 6 при анализе влияния когерентности источника в голографии.

#### § 4-15. Измерение когерентности лазерного пучка

Рассмотрим методы измерения когерентности лазерного пучка, не вдаваясь в сущность явлений, которые определяют когерентность лазерного пучка и непосредственно связаны с работой лазера. Сделаем одно предположение, которое имеет косвенное отношение к этому явлению. А именно предположим, что если лазер возбужден в многомодовом режиме, то каждая мода сохраняет свою характеристику и при их наложении не происходит ослабления когерентности в каждой моде, т. е. независимо от наличия других мод в каждой отдельной моде  $|\Gamma_{12}| = 1$ .

Метод измерения когерентности состоит в регистрации интерференционной картины Юнга от двух щелей (рис. 4.49). Пусть лазер испускает две различные продольные моды на частотах  $\omega_1$

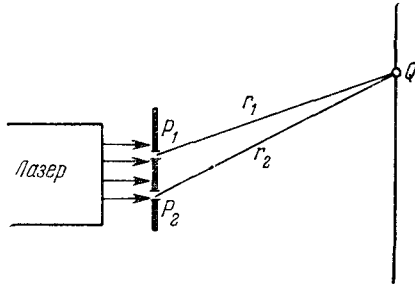


Рис. 4.49. Схема измерения когерентности лазерного пучка путем наблюдения интерференционной картины от двух щелей  $P_1$  и  $P_2$ .

и  $\omega_2$ . Амплитуды волн в точке  $Q$ , возбуждаемых возмущениями от  $P_1$  и  $P_2$ , равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A_{11}(t) \exp i[\varphi_{11}(t) - \omega_1(t)] + \\ &\quad + A_{21}(t) \exp i[\varphi_{21}(t) - \omega_2 t], \\ u_2 &= A_{12}(t) \exp i[\varphi_{12}(t) - \omega_1 t] + \\ &\quad + A_{22}(t) \exp i[\varphi_{22}(t) - \omega_2(t)]. \end{aligned} \right\} (4.15.1)$$

Первый индекс указывает номер моды, а второй индекс — щель, от которой распространяется возмущение. Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_{12}(t)}{A_{11}(t)}, & \alpha_2 &= \frac{A_{22}(t)}{A_{21}(t)}, \\ \delta_1 &= \varphi_{11} - \varphi_{12}, & \delta_2 &= \varphi_{21} - \varphi_{22}, \end{aligned} \right\} (4.15.2)$$

причем  $\alpha_i$  и  $\delta_i$  не зависят от времени. По определению степень когерентности равна

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\overline{V_1(t+\tau) V_2^*(t)}}{\sqrt{\overline{V_1^2}} \sqrt{\overline{V_2^2}}} = \frac{\overline{A_{11} A_{12} e^{i(\delta_1 - \omega_1 \tau)} + A_{21} A_{22} e^{i(\delta_2 - \omega_2 \tau)}}}{\sqrt{A_{11}^2 + A_{21}^2} \sqrt{A_{12}^2 + A_{22}^2}}, \quad (4.15.3)$$

или, иначе,

$$|\gamma_{12}(\tau)|^2 = \frac{A^2 + 2BC \cos[(\omega_2 - \omega_1)\tau + (\delta_2 - \delta_1)]}{A^2 + BC \left( \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_2} \right)}, \quad (4.15.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \alpha_1^2 \overline{A_{11}^2} + \alpha_2^2 \overline{A_{21}^2}, \\ B &= \alpha_1 A_{11}^2, \quad C = \alpha_2 A_{21}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.15.5)$$

Степень пространственной когерентности при  $\tau = 0$  определяется величиной

$$|\gamma_{12}(0)|^2 = \frac{A^2 + 2BC \cos(\delta_2 - \delta_1)}{A^2 + BC \left( \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_2} \right)} \quad (s_1 = s_2). \quad (4.15.6)$$

По условию

$$\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_2} \geq 2,$$

откуда

$$|\gamma_{12}(0)| \leq 1.$$

Рассмотрим два предельных случая.

I. Случай  $|\gamma_{12}(0)| = 1$ . Этот случай возможен, если

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{и} \quad \cos(\delta_2 - \delta_1) = 1, \quad (4.15.7)$$

или, иначе,

$$\frac{\overline{A_{11}}}{A_{21}} = \frac{\overline{A_{12}}}{A_{22}}. \quad (4.15.8)$$

Таким образом, случай  $|\gamma_{12}(0)| = 1$  возможен, если усредненные амплитуды возмущений от двух мод одинаковы для обеих щелей, а разность фаз в двух щелях равна нулю или целому числу  $2\pi$ .

II. Случай  $|\gamma_{12}(0)| = 0$ . Из (4.15.3) следует, что  $|\gamma_{12}(0)| = 0$  при выполнении одного из следующих условий:

- 1)  $\overline{A_{12}} = \overline{A_{21}} = 0$ ;
- 2)  $\overline{A_{11}} = \overline{A_{22}} = 0$ ;
- 3)  $\delta_2 - \delta_1 = \pi$ ,  $\overline{A_{11}A_{12}} = \overline{A_{21}A_{22}}$ .

Первые два условия соответствуют такому опыту, когда каждая щель освещается только одной модой. Таким образом, две разные моды не создают интерференционной картины.

Третье условие требует подробных пояснений. Здесь, как и в первых двух, интерференционной картины за экраном со щелями не возникает. Однако причина исчезновения ее состоит в том, что щели на экране расположены так, что они попадают в точки, где  $|\gamma_{12}(0)| = 0$ . Отсутствие интерференционной картины



здесь вызвано тем, что две системы контрастных интерференционных картин, создаваемые каждой модой в отдельности, при наложении полностью гасят друг друга: пространственный сдвиг между этими двумя системами полос равен половине расстояния между соседними максимумами. Иначе это явление можно объяснить так: щели в экране попадают на пучности суммарного электрического поля, образующегося в пространстве перед экраном при суперпозиции двух мод.

Если отойти от точки, характеризующейся тем, что для нее  $\tau = 0$  ( $s_1 = s_2$ ), в точку, для которой  $s_1 \neq s_2$ , то появляется сигнал биения, обусловленный членом

$$2BC \cos [\tau (\omega_2 - \omega_1) + (\delta_2 - \delta_1)]$$

в уравнении (4.15.4). Измеряя контраст и частоту этого биения, можно найти разность между частотами  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , а также убедиться в том, что  $|\gamma_{12}|$  отлично от нуля.

Наблюдая в таком эксперименте степень когерентности излучения лазера, можно прийти к следующим выводам:

— степень когерентности  $|\gamma_{12}(0)| = 1$ , когда излучение содержит только одну продольную моду или же когда присутствуют несколько аксиальных мод;

— при наложении нескольких продольных мод степень когерентности  $|\gamma_{12}(0)|$  может иметь любое значение от 0 до 1 в зависимости от того, как расположены две щели по сечению пучка. Опыт при наложении двух аксиальных мод был выполнен в условиях, когда лазер испускал две моды  $TEM_{20}$  и  $TEM_{02}$ .

Распределение амплитуды поля по сечению цилиндрического пучка радиуса  $a$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} V^{20}(x, y) &= (4x^2 - a^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}}, \\ V^{02}(x, y) &= (4y^2 - a^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15.9)$$

Зависимость степени когерентности в плоскости, когда одна из щелей находится в начале координат,  $P_2(0, 0)$ , а другая,  $P_1$ , — на оси  $x$  в точке  $(a\xi, 0)$ , определяется расчетным соотношением

$$|\gamma_{12}|_{\text{теор}} = \frac{1 - (4\xi^2 - 1)}{\sqrt{2[1 + (4\xi^2 - 1)]}}. \quad (4.15.10)$$

На рис. 4.50 приведено сравнение экспериментальных данных с теорией.

Пространственную когерентность лазерного пучка можно также определить путем наблюдения картины дифракции методом, основы которого изложены в § 4-11. Задача решается путем измерения распределения интенсивности в апертуре  $I(\xi)$ , а также интен-

сивности  $I(x)$  далекого поля. Затем найденные функции следует преобразовать: интенсивность по апертуре  $I(\xi)$  — в автосвертку  $\mathcal{E}(\alpha)$  величины  $\sqrt{I(\xi)}$ , а интенсивность далекого поля — в свой фурье-образ.

В опыте использовалась прямоугольная апертура со сторонами  $2a$  и  $2b$  при однородном распределении интенсивности:

$$I(\xi) = I_0.$$

В этих условиях автосвертка  $\mathcal{E}(\alpha)$  определяется по (4.11.48), а пространственная когерентность  $\gamma(\alpha)$  — по (4.11.49). Эксперимент проводился с помощью

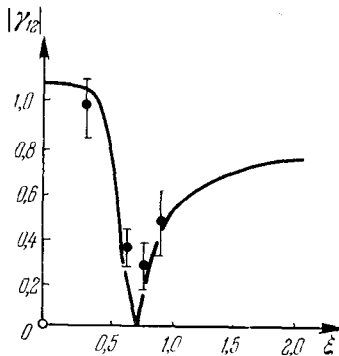


Рис. 4.50. Сравнение теории с экспериментальными данными по зависимости пространственной когерентности волн в условиях, когда лазер излучал одновременно две моды:  $TEM_{20}$  и  $TEM_{02}$ .

He — Ne-лазера, испускающего свет длиной волны  $6328 \text{ \AA}$ . Размер апертуры равнялся  $246 \times 252 \text{ мм}$ . Дифракция далекого поля регистрировалась с помощью фотоэмulsionи на расстоянии  $f = 112 \text{ см}$  от апертуры. Дискретные значения интенсивности находились путем сканирования фотографии микроденситометром с внесением поправки на нелинейность характеристической кривой фотоэмulsionи.

В эксперименте были найдены значения комплексной степени когерентности как по амплитуде, так и по фазе для двух уровней возбуждения лазера. При этом, чем выше уровень возбуждения лазера, тем ниже степень пространственной когерентности. Фаза комплексной степени когерентности растет с повышением уровня возбуждения. Появление фазы вызвано несимметричной частью распределения интенсивности картины далекого поля.

#### § 4-16. Когерентность и матовый экран

Как уже отмечалось в § 4-10, когерентное излучение лазера, падающее на матовый экран, создает картину с зернистой структурой (авантюриновые точки). Это явление можно объяснить, если допустить, что свет при отражении сохраняет пространственную когерентность, несмотря на сильные искажения волнового фронта. Поскольку такие искажения с точки зрения наблюдателя являются случайными, то для анализа этого явления следует воспользоваться методом теории случайных функций.

Пусть диффузный экран расположен в плоскости  $x$ . Аналитический сигнал  $V(x, t)$  описывает возмущение, возникающее при

освещении экрана когерентным пучком лазера, и в общем случае зависит от времени. При переходе от точки к точке в плоскости  $\mathbf{x}$  фаза сигнала  $V(\mathbf{x})$  случайно и резко изменяется от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Однако абсолютное значение  $|V(\mathbf{x})|$  при этом меняется гораздо медленнее, чем его фаза. Поскольку при отражении лазерного пучка от матового экрана не происходит случайных задержек фаз, т. е. процесс рассеяния является упругим, то естественно предположить, что сигнал  $V(\mathbf{x})$  является полностью когерентным в плоскости  $\mathbf{x}$ .

Аналитический сигнал  $V(\xi)$ , описывающий картину дифракции далекого поля, равен

$$V(\xi) = \frac{1}{\lambda f} \int V(\mathbf{x}) e^{-i \frac{k}{f} \mathbf{x} \xi} d\mathbf{x}, \quad (4.16.1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ . Согласно теории Винера — Хинчина интенсивность  $I(\xi)$  равна

$$I(\xi) = |\overline{V(\xi)}|^2 = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \int R(\mathbf{s}) e^{i \frac{k}{f} \mathbf{s} \xi} d\mathbf{s}, \quad (4.16.2)$$

где  $R(\mathbf{s})$  — усредненная автокорреляция аналитического сигнала  $V(\mathbf{x})$ :

$$R(\mathbf{s}) = \int \overline{V(\mathbf{x}) V^*(\mathbf{x} + \mathbf{s})} d\mathbf{x} = \int \sqrt{I(\mathbf{x})} \sqrt{I(\mathbf{x} + \mathbf{s})} \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{x}. \quad (4.16.3)$$

По условию излучение в плоскости  $\mathbf{x}$  пространственно когерентно, и поэтому

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = e^{i2\pi\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{s})}, \quad |\gamma| = 1, \quad (4.16.4)$$

а

$$R(\mathbf{s}) = \int \sqrt{I(\mathbf{x})} \sqrt{I(\mathbf{x} + \mathbf{s})} e^{i2\pi\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{s})} d\mathbf{x}. \quad (4.16.5)$$

Подынтегральное выражение (4.16.2) описывает интерференционную картину, образованную парой точек  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{s}$  в плоскости экрана. При переходе от точки  $\mathbf{s}$  в точку  $\mathbf{s}'$  появляется совершенно новая картина интерференции, с новым шагом и новым направлением полос. Суммарная картина  $I(\xi)$  является результатом наложения таких интерференционных картин со случайными фазами  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , которую наблюдатель воспринимает как картину с зернистой структурой (авантюриновые точки). Определим структурную особенность этой картины.

Докажем, что спектральная плотность мощности авантюриновых точек определяется функцией автокорреляции распределения интенсивности в плоскости матового экрана и пропорциональна площади когерентной фазы.

Спектральная плотность мощности распределения интенсивности  $I(\xi)$  равна

$$P(\omega) = \left| \int I(\xi) e^{-i2\pi\omega\xi} d\xi \right|^2. \quad (4.16.6)$$

Используя определение (4.16.2), запишем соотношение (4.16.6) так:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{s}{\lambda f}\right) &= |R(s)|^2 \iint \sqrt{I(x)} \sqrt{I(x+s)} \sqrt{I(x')} \sqrt{I(x'+s)} \times \\ &\quad \times \exp\{i2\pi[\varphi(x, s) - \varphi(x', s)]\} dx dx' = \\ &= |R(s)|^2 \iint \sqrt{I(x)} \sqrt{I(x+s)} \sqrt{I(x+u)} \sqrt{I(x+u+s)} \times \\ &\quad \times \exp\{i2\pi[\varphi(x, s) - \varphi(x+u, s)]\} dx du. \end{aligned} \quad (4.16.7)$$

Фаза  $\varphi(x, s)$  — быстро меняющаяся функция координат. Рассмотрим ее свойства. Введем переменную площадку интегрирования  $S$ . Тогда фазовая часть функции когерентности, усредненной по плоскости  $x$ , равна

$$p(u) = \frac{1}{S} \int \exp\{i2\pi[\varphi(x, s) - \varphi(x+u, s)]\} dx. \quad (4.16.8)$$

Величина  $p(u)$  обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} |p(u)| &\leq 1, \\ p(-u) &= p^*(u). \end{aligned} \right\} \quad (4.16.9)$$

Если  $\varphi(x) = \varphi(x+u)$  для всех  $x$ , то  $p(u) = 1$ . Также очевидно, что  $p(0) = 1$  и с возрастанием  $|u| > 0$  функция  $p(u)$  быстро спадает практически до нуля.

В этих условиях интегрирование (4.16.7) можно произвести сначала по  $u$ , а затем по  $x$ . Обозначим через  $S_c$  когерентную фазовую площадку, т. е. площадку, на которой фазы  $\varphi$  скоррелированы и  $p \approx 1$ , но вне этой площадки  $p(u)$  быстро спадает к нулю. При этом интенсивность  $I(x)$  на площадке практически постоянна в соответствии с принятыми выше предположениями. Таким образом,  $I(x) \simeq I(x+u)$  и

$$P\left(\frac{s}{\lambda f}\right) = S_c \int I(x) I(x+s) dx, \quad (4.16.10)$$

где

$$S_c = \int p(u) du. \quad (4.16.11)$$

Из (4.16.9) следует, что  $S_c$  — действительная величина:

$$S_c^* = \int p^*(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int p(-\mathbf{u}) d\mathbf{u} = S_c, \quad (4.16.12)$$

а

$$\int I(\mathbf{x}) I(\mathbf{x} + \mathbf{s}) d\mathbf{x} = R_I(\mathbf{s}), \quad (4.16.13)$$

т. е. равен функции автокорреляции интенсивности  $I(\mathbf{x})$ .

Окончательно находим

$$P\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda f}\right) = S_c R_I(\mathbf{s}). \quad (4.16.14)$$

Оценим возможные значения когерентной фазовой площадки  $S_c$ . Очевидно, что спектральная плотность мощности  $P(\omega)$  отлична от нуля только вплоть до пространственных частот  $\omega_{\text{макс}} \sim 1/\lambda$ , так как более высокие частоты вызывают затухающие волны, которые не могут достигнуть ни области далекого поля, ни области дифракции Френеля. Поэтому функция автокорреляции  $R(\mathbf{u})$  световой волны  $V(\mathbf{x})$  не может обратиться в дельта-функцию  $\delta(\mathbf{s})$ , а, как показывают очевидные рассуждения, в первом приближении равна

$$R(\mathbf{u}) = C \frac{J_1\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)}{\lambda_r}, \quad (4.16.15)$$

где  $r = |\mathbf{u}|$ . Сравнивая (4.16.15) с (4.16.3), находим

$$C = \frac{\lambda^2}{\pi} \int I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.16.16)$$

Следовательно,

$$R(\mathbf{u}) = \int I(\mathbf{x}) \frac{\lambda J_1\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)}{\pi r} d\mathbf{x}. \quad (4.16.17)$$

Из (4.16.17) видно, что  $R(\mathbf{u})$  отлично от нуля только при  $r$  меньших, чем длина волны  $\lambda$ , и быстро спадает с увеличением  $r$ . Поэтому минимальный разброс  $R(\mathbf{u})$  равен длине волны света. При этом можно доказать, что

$$S_{c \text{ мин}} = \int p(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \frac{\lambda^2}{\pi}. \quad (4.16.18)$$

Таким образом, площадка когерентной фазы равна по порядку величины  $\lambda^2$ . Реально наблюдаемая площадка когерентности  $S_c$

зависит от деталей процесса микроскопического рассеяния света, но всегда больше, чем  $\lambda^2/\pi$ .

Если пространственная когерентность света является частичной, то взаимная интенсивность

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \overline{V(\mathbf{x}) V^*(\mathbf{x}')} = \sqrt{I(\mathbf{x})} |\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')| e^{i2\pi\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}, \quad (4.16.19)$$

где  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  — комплексная степень пространственной когерентности. Предполагая, что  $|\gamma|$  меняется медленно по сравнению с  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , можно найти, что

$$P\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda f}\right) = S_c R'(\mathbf{s}), \quad (4.16.20)$$

где

$$R'(\mathbf{s}) = \int I(\mathbf{x}) I(\mathbf{x} + \mathbf{s}) |\gamma(\mathbf{x}; \mathbf{x} + \mathbf{s})|^2 d\mathbf{x}. \quad (4.16.21)$$

Для пространственно инвариантной когерентности

$$\gamma(\mathbf{x}; \mathbf{x} + \mathbf{s}) \equiv \gamma(\mathbf{s}),$$

поэтому

$$R'(\mathbf{s}) = |\gamma(\mathbf{s})|^2 R(\mathbf{s}), \quad (4.16.22)$$

откуда

$$P\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda f}\right) = S_c |\gamma(\mathbf{s})|^2 R(\mathbf{s}). \quad (4.16.23)$$

Спектр мощности  $P(\mathbf{s}/\lambda f)$  ослаблен в  $|\gamma|^2$  раз по сравнению с полной пространственной когерентностью поля ( $\gamma = 1$ ) в плоскости  $\mathbf{x}$ .

В случае пространственно некогерентного освещения

$$R\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda f}\right) = 0, \quad (4.16.24)$$

кроме  $\mathbf{s} = 0$ .

Отсюда можно сделать прямой вывод о том, что появление авантюриновых точек непосредственно связано с пространственной когерентностью освещения. Можно утверждать, что если свет диффузно рассеивается в среде, структура которой изменяется во времени, и эти изменения не обладают никакой пространственной корреляцией, то пространственная когерентность рассеянного света разрушается и авантюриновые точки пропадают. Этот вывод подтверждается опытами по рассеянию когерентного света в коллоидных растворах.

Аналогичная картина авантюриновых точек возникает при прохождении когерентного света через волоконные световоды. Если диаметр стеклянной нити-волокна велик по сравнению с длиной волны света, то лучи света при прохождении по нити в результате многократных отражений от ее стенок испытывают случайные

сдвиги фаз. Из выходного торца нити выходят лучи света, обладающие друг относительно друга случайными сдвигами фаз. Все происходит, как при отражении когерентного света от матовой поверхности.

Однако, в отличие от процесса рассеяния света от матового стекла, в случае волоконного световода можно локализовать индивидуальную интерференцию от двух когерентных волн. Для этого достаточно взять два параллельных волокна, расположенных тесно друг к другу. Кроме картины авантюриновых точек, видимых от одного волокна, возникает интерференционная картина, правда, достаточно слабая. Расстояние между соседними интерференционными полосами определяется расстоянием между волокнами на выходном конце и совсем не зависит от положения других частей волокон. Если выходные концы приблизить вплотную друг к другу, то полосы становятся шире, пока, наконец, не сливаются с самыми большими авантюриновыми пятнами.

Когда расстояния между интерференционными полосами станут меньше размера авантюриновых пятен, то две нити световода превратятся в интерферометр. При этом, используя гибкость волокон, можно достигнуть большой оптической разности хода.

Такой интерферометр из двух стеклянных волокон очень удобен при измерении пространственной когерентности света. Для этого достаточно двигать входные торцы нитей и для каждого положения их по полю излучения лазерного пучка измерять контраст получающейся интерференционной картины.

## ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

### § 5-1. Введение

Процессы, наблюдаемые в природе или осуществляемые в лабораторных условиях, обычно описываются совокупностью непрерывных функций, зависящих от пространственных координат и времени.

В простейшем случае однопараметровый процесс можно характеризовать одной функцией времени  $f(t)$  или функцией координат  $f(x)$ .

Функция  $f(t)$ , представленная графически, имеет вид непрерывной кривой. При этом в каждом малом интервале времени  $\Delta t$  функция  $f(t)$  характеризуется бесконечно большой совокупностью данных, задающих соответствие между аргументом  $t$  и функцией  $f(t)$  в этом интервале.

Однако любой эксперимент не может выдать бесконечного числа данных, так как для этого необходимо, чтобы прибор имел бесконечно широкую полосу пропускания частот, а сам эксперимент продолжался бы неограниченно долго. Поэтому описание физического процесса с помощью непрерывных функций, заданных на некотором интервале, представляет собой лишь одну из возможных аппроксимаций, весьма удобную для анализа изучаемого явления с помощью уравнений математической физики. Такая аппроксимация, однако, не отражает информационных особенностей прибора и меры информации, полученной в данном эксперименте, и совершенно непригодна для оценки и предсказания максимального количества информации, которую можно извлечь в данных условиях опыта. В действительности любое устройство, используемое экспериментатором, всегда имеет ограниченный интервал частот в полосе пропускания, а сам процесс наблюдения продолжается конечное время. Поэтому даже в отсутствие шумов результат любого физического опыта описывается строго конечным числом параметров. Иначе говоря, информация, извлекаемая экспериментатором из проведенного опыта, всегда конечна. Теория информации позволяет оценить количество полученной информации.

В данной главе рассматривается информационная структура оптического сигнала, или, иначе, информационные степени свободы, свойственные данной оптической системе. Каждую из этих



степеней свободы можно заполнить до определенного уровня, который определяется как динамическим диапазоном системы, так и уровнем шумов. Детерминированный и случайный сигналы рассматриваются отдельно.

Прежде всего совершим переход от простейшей функциональной аппроксимации явления к такому его описанию, которое позволяет непосредственно определить число независимых степеней свободы оптического сообщения и, зная шумы и динамический диапазон, оценить полный объем информации, извлекаемый в опыте. Здесь с неизбежностью возникает необходимость дискретизации информации, содержащейся в оптическом сигнале. Между оптическим сигналом и радиолокационным сигналом, для которого разрешены основные проблемы теории информации, существуют фундаментальные различия. Во-первых, оптическую несущую невозможно развернуть во времени ввиду очень большой инерционности любого прибора. Во-вторых, при рассмотрении оптических явлений достаточно сложное понятие когерентности света требует более подробного рассмотрения, чем в радиолокации. Наконец, оптический сигнал является двухмерным и допускает реализацию устройств, преобразующих или анализирующих оптический сигнал одновременно по двум координатам.

### § 5-2. Принцип неопределенности

Этот принцип возникает как следствие волновой природы излучения: частота  $\omega = 2\pi\nu$  и время  $t$  являются сопряженными физическими величинами, которые подчиняются соотношению неопределенностей

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \gtrsim 1, \quad (5.2.1)$$

где  $\Delta t$  — неопределенность в определении эпохи  $t$  волнового процесса, а  $\Delta\omega$  — неопределенность в частоте  $\omega$ , измеряемой в течение интервала времени  $\Delta t$ .

Чтобы доказать соотношение (5.2.1), воспользуемся частным случаем теоремы свертки (2.6.16) и применим ее к функции  $df/dt$ , фурье-образ которой согласно (2.3.10) равен  $i\omega \cdot F(\omega)$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} \frac{df^*}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega F(\omega) (-i\omega) F^*(\omega) d\omega \quad (5.2.2)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f' f'^* dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 F(\omega) F^*(\omega) d\omega. \quad (5.2.3)$$

По определению средней квадратичной эпохой  $\bar{t}^2$ , усредненной по интенсивности  $|f(t)|^2$ , называется величина

$$\bar{t}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}, \quad (5.2.4)$$

а среднеквадратичным отклонением от средней эпохи — величина

$$\overline{(t - \bar{t})^2} = \bar{t}^2 - (\bar{t})^2. \quad (5.2.5)$$

Если начало отсчета помещено в точку  $t = \bar{t}$ , то величина

$$\overline{(\Delta t)^2} = \bar{t}^2.$$

Поступая аналогичным образом для частоты  $\omega$ , получим

$$(\Delta t)^2 (\Delta \omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}. \quad (5.2.6)$$

Используя неравенство Шварца

$$4 \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g|^2 dt \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f^* g + f g^*) dt \right|^2 \quad (5.2.7)$$

и формулу интегрирования по частям при бесконечных пределах интегрирования

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t f'(t) dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right|, \quad (5.2.8)$$

находим с учетом (5.2.3)

$$\begin{aligned} (\Delta t)^2 (\Delta \omega)^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) \cdot t f^*(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) f'^*(t) dt}{\left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2} \geq \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} [t f^* f + t f f^*] dt \right|^2}{4 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt \right)^2} = \\ &= \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{d}{dt} (f f^*) dt \right|^2}{4 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right|^2}{4 \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right|^2} = \frac{1}{4}. \quad (5.2.9) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}. \quad (5.2.10)$$

Это — соотношение неопределенностей для радиосигнала. Ниже будет получено соотношение неопределенностей для оптического сигнала, аналогичное (5.2.10). Для простоты рассуждений в следующем параграфе рассматривается радиосигнал.

### § 5-3. Классическое представление сигнала в теории информации

Рассмотрим функцию  $f(t)$  в плоскости сопряженных переменных — частоты  $\omega$  и времени  $t$  (рис. 5.1), которые подчиняются соотношению неопределенностей (5.2.10). Пусть прибор характеризуется постоянной полосой пропускания  $\omega_{\text{макс}}$  сек<sup>-1</sup>, а опыт продолжается  $\tau$  сек. Тогда функцию  $f(t)$  можно задать в координатах  $(\omega, t)$  на области, представляющей собой в простейшем случае прямоугольник со сторонами  $\tau$  и  $\omega_{\text{макс}}$ .

Принцип неопределенности в графическом представлении означает, что на плоскости  $(\omega, t)$  существуют элементарные ячейки, площади которых равны

$$S_{\text{эл}}^0 \sim 1.$$

Форму ячейки можно выбрать любой. Существует несколько систем разбиения на элементарные ячейки всей области на информационной диаграмме. Единственное требование, предъявляемое к любому разбиению, состоит в том, чтобы площадки элементарных ячеек при этом разбиении равнялись единице или, более точно,  $1/2$  и

Обратимся к рис. 5.1. На этой диаграмме, называемой информационной диаграммой, гармоническое колебание изображается горизонтальной линией ( $\omega = \text{const}$ ). Частота  $\omega$  гармонического колебания точно определена, в то время как эпоха совершенно не определена. С другой стороны, дельта-функция имеет резко очерченную эпоху, но она содержит все частоты. Этот сигнал изображается вертикальной линией.

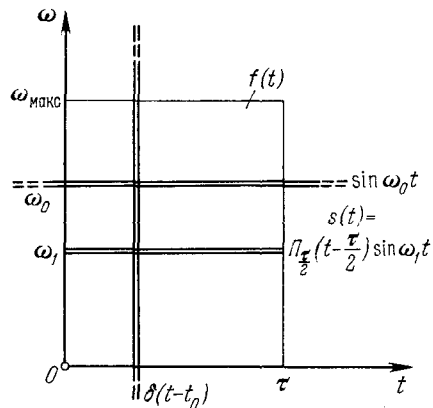


Рис. 5.1. Информационная диаграмма. Плоскость сопряженных переменных  $t$  и  $\omega$ , на которых задана функция  $f(t)$ . Синусоида бесконечной продолжительности задана на горизонтальной линии при  $\omega = \omega_0$ . Дельта-функция  $\delta(t - t_0)$  задана на вертикальной линии при  $t = t_0$ .

Продолжительность опыта ограничена, и поэтому на информационной диаграмме рассматриваются только процессы конечной длительности. Рассмотрим простейший пример — синусоиду  $s(t)$  конечной продолжительности. В силу конечности синусоиды  $s(t)$  ее частоту  $\omega$  нельзя определить абсолютно точно, так как на данную синусоиду отзываются сразу несколько резонаторов. Это — хорошо проверенный экспериментальный факт, отражающий принцип неопределенности. Рассмотрим различные схемы разбиения информационной диаграммы на элементарные ячейки.

**Ячейки Габора.** В качестве элементарной ячейки выбирается квадрат со сторонами  $\Delta t = 1 \text{ сек}$ ,  $\Delta \omega = 1 \text{ сек}^{-1}$ . В этом случае область задания функции  $f(t)$  в координатах  $(\omega, t)$  разбивается

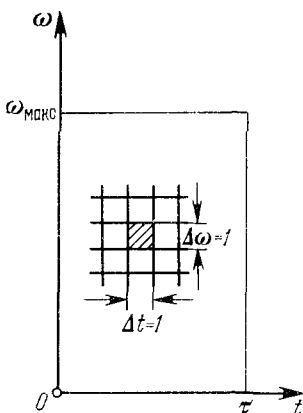


Рис. 5.2. Элементарная ячейка Габора на информационной диаграмме ( $\Delta t = 1$ ,  $\Delta \omega = 1$ ).

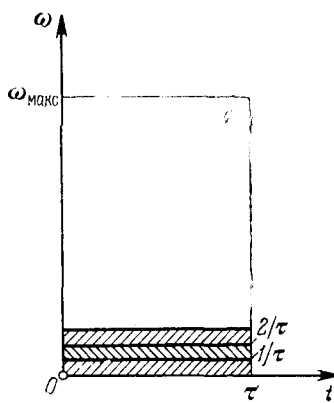


Рис. 5.3. Элементарная ячейка при разложении Фурье имеет вид прямоугольника с основанием  $\tau$  и высотой  $1/\tau$ .

на квадратики с единичными сторонами и в каждой  $i$ -й ячейке задается значение  $f_i$  (рис. 5.2). Число таких ячеек на всем прямоугольнике задания функции  $f(t)$  равно

$$n_{\text{макс}} = \tau \omega_{\text{макс}}. \quad (5.3.1)$$

Если считать, что величины  $f_i$  комплексные, то число независимых параметров  $f_i^{\text{Re}}$ ,  $f_i^{\text{Im}}$ , характеризующих наблюдаемый нами процесс  $f(t)$ , равно

$$2n_{\text{макс}} = 2\tau \omega_{\text{макс}}. \quad (5.3.2)$$

Кроме того, имеется еще один независимый параметр, определяющий уровень отсчета, относительно которого заданы все значения составляющих  $f_i$ . Таким образом, полное число независимых параметров, которое исчерпывающе характеризует явление, регистрируемое прибором с разрешающей способностью  $\omega_{\text{макс}}$  в течение

конечного времени наблюдения  $\tau$ , равно

$$N_{\text{макс}} = 2n_{\text{макс}} + 1 = 2\omega_{\text{макс}}\tau + 1. \tag{5.3.3}$$

*Разложение Фурье.* Элементарную ячейку единичной площадки можно выбрать иначе, если разбить прямоугольник с площадью  $\Sigma = \tau\omega_{\text{макс}}$  на горизонтальные полосы длиной  $\tau$  и шириной  $1/\tau$  (рис. 5.3). При таком разбиении функция  $f(t)$  по-прежнему определяется двумя значениями в каждой элементарной полоске. Легко видеть, что такое представление функции эквивалентно разложению функции  $f(t)$  в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-n_{\text{макс}}}^{n_{\text{макс}}} C_n e^{in\omega_0 t}, \tag{5.3.4}$$

коэффициенты разложения которого

$$C_n = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \tag{5.3.5}$$

Полное число их равно

$$N = 2\omega_{\text{макс}}\tau + 1,$$

т. е. совпадает с числом параметров при разбиении Габора.

*Система отсчетов.* Наконец, в третьем варианте можно выбрать вертикальные полосы. Этот прием называется методом отсчета. Интервал времени  $\tau$  разбивается на  $N$  равных промежутков (рис. 5.4). Отсчетом называется «мгновенное значение»

$$f_m = f\left(\frac{m\tau}{N}\right), \tag{5.3.6}$$

взятое в середине  $m$ -го временного промежутка.

Согласно теореме Котельникова, которая в иностранной литературе называется теоремой отсчетов, функция  $f(t)$  полностью определяется на интервале времени  $0 \leq t \leq \tau$  последовательностью значений  $f_m$  ( $m = 1, 2, \dots, 2\omega_{\text{макс}} \times \tau + 1$ ). Теорема Котельникова имеет некоторое сходство с разложением Фурье. Однако имеется существенное различие, которое заключается в том, что при разложении Фурье исходная функция  $f(t)$  представляется в виде суммы экспоненциальных или гармонических функций, каждая из которых дает вклад при всех значениях  $t$

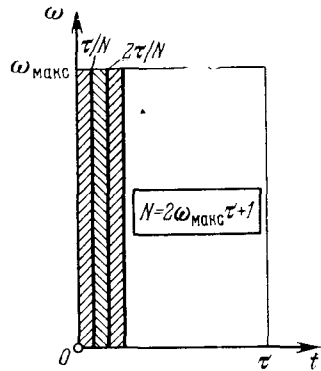


Рис. 5.4. Элементарная ячейка при системе отсчетов имеет вид прямоугольника с основанием  $N$  и высотой  $\omega_{\text{макс}}$ , где  $N$  — число отсчетов.

в то время как в методе отсчетов при аналитическом представлении процесса используется другой класс функций, которые называются функциями отсчета. Функция отсчета характеризуется тем, что она «включает» по очереди в каждом  $m$ -м интервале отсчета только  $m$ -е значение функции, а все остальные «выключает».

### § 5-4. Элементарный сигнал

Рассмотрим сигнал, который занимает минимальную площадку  $\Delta t \cdot \Delta \omega = 1/2$ , т. е. когда неравенство (5.2.10) обращается в равенство. Таким сигналом является гармоническое колебание

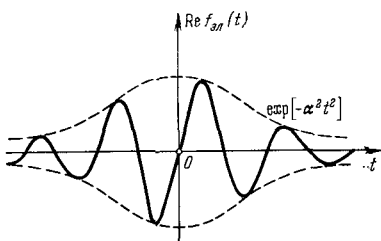


Рис. 5.5. Действительная часть элементарного сигнала, занимающего на информационной диаграмме минимальную площадку.

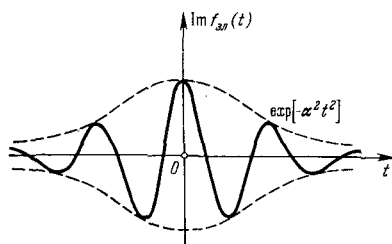


Рис. 5.6. Мнимая часть элементарного сигнала.

с частотой  $\omega_0$ , промодулированное симметрично относительно момента времени  $t_0$  функцией Гаусса (см. рис. 5.5 и рис. 5.6):

$$f_{эл}(t) = e^{-\alpha^2(t-t_0)^2} \exp i[\omega_0 t + \varphi_0], \quad (5.4.1)$$

где  $\alpha$  — параметр, характеризующий длительность сигнала, а  $\varphi_0$  — фаза колебаний. При этом

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}, \quad \Delta \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}. \quad (5.4.2)$$

Фурье-образ элементарного сигнала (5.4.1) равен

$$\Gamma_{эл}(\omega) = \exp \left\{ - \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 (\omega - \omega_0)^2 \right\} \exp \{ i[-t_0(\omega - \omega_0) + \Phi] \}. \quad (5.4.3)$$

Огибающие как самого элементарного сигнала, так и его фурье-образа имеют вид кривых Гаусса, ширины которых  $\Delta t$  и  $\Delta \omega$  связаны соотношением:

$$\Delta t \Delta \omega = 1/2.$$

Благодаря этому свойству элементарный сигнал имеет большое значение при рассмотрении оптимальных соотношений в теории информации и голографии. Импульсный сигнал вида (5.4.1) занимает минимальную площадь на информационной диаграмме. Амплитуду и фазу этого элементарного сигнала можно задать двумя числами, записанными в каждой элементарной ячейке.

Схема разложения сигнала на элементарные сигналы зависит от параметра  $\alpha$ . Частным случаем такого разложения является разложение Фурье, когда  $\alpha \rightarrow 0$  и элементарный сигнал превращается в синусоиду. Разложение с помощью теоремы Котельникова реализуется при  $\alpha \rightarrow \infty$ , когда элементарный сигнал превращается в дельта-функцию.

Наиболее общий метод разложения сигнала  $f(t)$  на элементарные сигналы обладает тем недостатком, что комплексные коэффициенты, или пара двух чисел в каждой элементарной площадке, не являются в общем случае взаимно ортогональными. Поэтому почти всегда пользуются либо разложением Фурье, либо разложением Котельникова.

Прежде чем перейти к изложению свойств разложения с помощью системы отсчетов, рассмотрим общие свойства функций, имеющих ограниченный спектр.

### § 5-5. Детерминированная функция с ограниченным спектром

Пусть функция времени  $f(t)$  имеет ограниченный спектр, т. е. ее фурье-образ  $F(\omega)$  обращается в нуль при  $|\omega| > \omega_{\text{макс}}$ :

$$F(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |\omega| > \omega_{\text{макс}} \equiv \omega_0. \quad (5.5.1)$$

Тогда обратное преобразование Фурье запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.5.2)$$

Разложим в ряд Фурье функцию  $F(\omega)$  на интервале  $(-\omega_0, +\omega_0)$ :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in2\pi \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad -\omega_0 < \omega < +\omega_0, \quad (5.5.3)$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega) e^{i \frac{n\pi\omega}{\omega_0}} d\omega. \quad (5.5.4)$$

Сравнивая (5.5.2) и (5.5.4), находим

$$A_n = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(n \frac{\pi}{\omega_0}\right) \equiv \frac{\pi}{\omega_0} f_n. \quad (5.5.5)$$

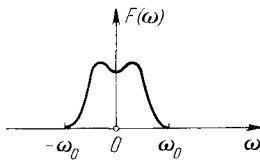
Сумма

$$F_0(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_0} f_n e^{-in\pi \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (5.5.6)$$

представляет собой периодическое повторение функции  $F(\omega)$  (рис. 5.7) и совпадает с  $F(\omega)$  на интервале  $(-\omega_0, +\omega_0)$ . Тогда  $F(\omega)$  можно выразить через  $F_0(\omega)$  с помощью прямоугольного импульса:

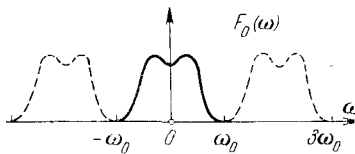
$$F(\omega) = \Pi_{\omega_0}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_0} f_n e^{-in\pi \frac{\omega}{\omega_0}} = \Pi_{\omega_0}(\omega) F_0(\omega). \quad (5.5.7)$$

Если воспользоваться свойством преобразования Фурье (3.3.14), то



$$\Pi_{\omega_0}(\omega) e^{-i \frac{n\pi\omega}{\omega_0}} \xrightarrow{\delta^{-1}} \frac{\omega_0 \sin(\omega_0 t - n\pi)}{\pi \omega_0 t - n\pi}. \quad (5.5.8)$$

Поэтому



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \left( \frac{n\pi}{\omega_0} \right) \frac{\sin(\omega_0 t - n\pi)}{\omega_0 t - n\pi}. \quad (5.5.9)$$

Рис. 5.7. Вспомогательный спектр  $F_0(\omega)$ , полученный из спектра  $F(\omega)$  исходной функции  $f(t)$ , имеющей ограниченный спектр, путем периодического сдвига  $F(\omega)$  на  $\pm k \cdot 2\omega_0$ , где  $k$  — целое число.

Если функция  $f(t)$  задана в конечном интервале времени  $0 \leq t \leq \tau$ , то сумма (5.5.9) содержит конечное число слагаемых.

Таким образом, если функция  $f(t)$  имеет фурье-образ, обращающийся в нуль при частоте выше некоторой частоты  $\omega_0$ , то саму функцию  $f(t)$

можно однозначно представить совокупностью значений этой функции в серии эквидистантных моментов времени, отстоящих друг от друга на величину  $\pi/\omega_0$ .

Эту теорему впервые доказал Котельников применительно к теории информации, хотя аналогичная интерполяционная формула существовала со времен Коши. Котельников дал этому соотношению информационную интерпретацию. Повторно эта теорема была открыта Шенноном. Отсчетом называется «мгновенное значение»

$$f_n = f\left(n \frac{\pi}{\omega_0}\right).$$



Найдем теперь инверсный образ  $f_0(t)$  периодической функции  $F_0(\omega)$ . Из (5.5.5) и соотношения (2.3.14)

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\hat{\delta}} e^{-i\omega t_0}$$

следует, что

$$f_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_0} f_n \delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right). \quad (5.5.10)$$

или

$$f_0(t) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right). \quad (5.5.11)$$

Таким образом,  $f_0(t)$  представляет собой последовательность эквидистантно размещенных импульсов, имеющих огибающую  $\frac{\pi}{\omega_0} f(t)$ . При этом площадь  $\frac{\pi}{\omega_0} f_n$   $n$ -го импульса равна площади прямоугольника, вписанного в кривую  $f(t)$  (рис. 5.8) в соответствующей точке.

Функция отсчетов

$$\frac{\sin(\omega_0 t - n\pi)}{\omega_0 t - n\pi} \equiv u_n(\omega_0 t) \quad (5.5.12)$$

ввиду широкого ее распространения в теории информации, радиолокации и оптике имеет специальное обозначение.  $\Lambda$  именно принято обозначать

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \text{sinc } x \quad (5.5.13)$$

или

$$\frac{\sin x}{x} = \text{sinc } \frac{x}{\pi}. \quad (5.5.14)$$

Функция  $\frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0 x}$  изображена на

рис. 2.3. Если  $\omega_0 t = n\pi = 0$ , т. е. если  $t_n = n\pi/\omega_0$  или, иначе, время  $t$  равно моменту отсчета  $n\pi/\omega_0$ , то функция отсчета (5.5.12) равна 1 и «включает» значение функции в этот момент времени. Если же  $\omega_0 t - n\pi = \pm p\pi$ ,

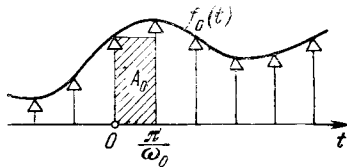
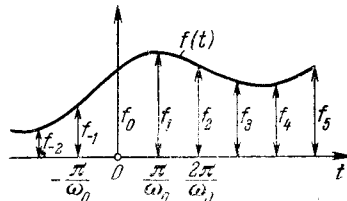


Рис. 5.8. Прообраз  $f_0(t)$  вспомогательного спектра  $F_0(\omega)$  имеет вид последовательности дельта-функций, отстоящих друг от друга на  $\Delta t = \pi/\omega_0$  и имеющих огибающую  $f(t)$  ( $\pi/\omega_0$ ).

где  $p \neq 0$  — целое число, т. е.

$$t_p = \frac{n\pi \pm p\pi}{\omega_0}, \quad (5.5.15)$$

то функция отсчетов равна нулю и все остальные отсчеты  $f_p$  выключаются (рис. 5.9).

Необходимо напомнить, что фурье-образ функции отсчетов (5.5.12) равен прямоугольному импульсу, простирающемуся от  $-\omega_{\text{макс}}$  до  $+\omega_{\text{макс}}$  (см. рис. 2.3).

Смысл теоремы отсчетов Котельникова заключается в том, что для однозначного представления функции с ограниченным

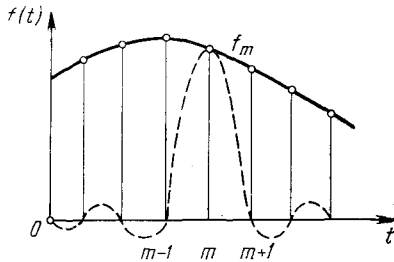


Рис. 5.9. Рисунок, поясняющий включающее действие функции отсчетов.

спектром с помощью эквивалентного набора отсчетов достаточно принять во внимание только максимальную частоту спектра и не требуется вводить никаких дополнительных параметров, характеризующих в деталях фурье-образ сигнала или форму частотного пропускания прибора. Функции, обладающие конечной шириной спектральной полосы, образуют специальный класс. Эти функции не имеют

разрывов, острых углов. Именно в такой класс функций входят кривые, описывающие результаты любого физического опыта.

Может возникнуть вопрос о том, как быть с поведением функций в промежутках между точками отсчета. Возможны ли в промежутках между точками всплески, которые не отражаются совокупностью значений функции в отсчетных точках? Легко убедиться в том, что подобные всплески в функции содержаться не могут. Действительно, если бы подобный всплеск был, то это указывало бы на то, что в спектре функции  $f(t)$  обязательно присутствует частота  $\omega' = \beta/\Delta t \sim \beta\omega_{\text{макс}}$ , где  $\beta > 1$ . Но это находится в противоречии с исходным условием, согласно которому прибор, с выхода которого мы берем функцию  $f(t)$ , не может передать частоты выше чем  $\omega_{\text{макс}}$ . Что касается произвола в выборе начальной точки отсчета  $t_1$ , то этот произвол является несущественным.

Итак, в любом эксперименте можно получить строго конечное число независимых значений исследуемой величины. В то же время предмет, или искомая функция  $f(t)$ , в общем случае имеет бесконечное число параметров. Это означает, что результаты наблюдения, состоящие из конечного набора чисел  $f_n$ , могут наложить только  $N = 2\omega_0\tau + 1$  независимых связей на неизвест-

ную функцию  $f(t)$  и, таким образом, данному опыту может соответствовать бесконечное число исходных предметов, или функций  $f(t)$ . При этом каждому выбранному расположению точек отсчета соответствует определенная система связей. Эти связи несколько изменяется при сдвиге начальной точки отсчета, однако число степеней свободы у функции  $f(t)$  останется прежним, а коридор значений, отведенный для функции  $f(t)$ , деформируется очень слабо.

Бесконечное число предметов или неизвестных функций, соответствующих данному опыту, распределено неравномерно по площади коридора, в который попадают допустимые функции. Плотность распределения этих функций определяется вероятностью соответствующих статистических выборок. Обычно они сгущены в нескольких районах коридора и выбор между ними решается на основе известных принципов статистики.

Все эти рассуждения отвечают случаю, когда у наблюдателя отсутствует какая-либо априорная информация. Однако случай, когда наблюдатель ничего не знает о предмете наблюдения, является гипотетическим и на практике никогда не реализуется. Как правило, в подавляющем большинстве случаев, встречающихся на практике, наблюдатель имеет в своем распоряжении больше априорной информации о предмете, чем он сам осознает или может сформулировать четко. Эта априорная информация, плохо или хорошо используемая, позволяет наблюдателю сделать выбор между областями сгущений, где располагаются возможные искомые предметы. При этом для предметов конечных размеров число возможных решений становится конечным. Поэтому у наблюдателя может возникнуть иллюзия, что ему удастся извлечь из опыта гораздо больше информации, чем ее в действительности содержится. Это деликатное обстоятельство, могущее повлечь бесплодные споры, необходимо хорошо усвоить.

Итак, при измерении некоторой физической величины всегда имеется совокупность «прибор + человек». Когда говорят о максимальном количестве информации, извлекаемой из опыта, то всегда предполагается полностью немыслящий наблюдатель. Голография может служить примером такой «бездумной» системы регистрации информации. В обратном процессе восстановления оптического сигнала ни наблюдатель, ни вычислительная система не участвуют.

### § 5-6. Свойства функции отсчетов

Функция отсчетов  $u_n(\omega_0 t)$  равна 1 в  $n$ -й точке отсчета и обращается в нуль в остальных точках отсчета:

$$u_n(m\pi) = \delta_{nm}. \quad (5.6.1)$$

Система функций отсчета  $u_n(\omega_0 t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) образует полную ортогональную систему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(\omega_0 t) u_m(\omega_0 t) dt = \frac{\pi}{\omega_0} \delta_{nm} \quad (5.6.2)$$

Коэффициенты отсчетов можно выбрать иначе, если использовать соотношение ортогональности (5.6.1):

$$f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) u_n(\omega_0 t) dt. \quad (5.6.3)$$

В равенстве Парсеваля (2.6.19) левую часть для функции с ограниченным спектром можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_n \left| f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \right|^2. \quad (5.6.4)$$

Имеется несколько соотношений, которые связывают функции отсчетов. Например,

$$\left. \begin{aligned} \sum_n \frac{\sin(t - n\pi)}{t - n\pi} &= 1, \\ \sum_n \frac{\sin^2(t - n\pi)}{(t - n\pi)^2} &= 1, \\ \sum_n \frac{\sin(t_1 - n\pi) \sin(t_2 - n\pi)}{(t_1 - n\pi)(t_2 - n\pi)} &= \frac{\sin(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.5)$$

Первое равенство (5.6.5) является результатом применения теоремы отсчета к функции  $f(t) = 1(t)$ . Третье соотношение получается в результате применения теоремы отсчета к одной из переменных функции вида

$$\frac{\sin(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Второе равенство является частным случаем третьего для  $t_1 = t_2$ .

### § 5-7. Детерминированная функция конечной продолжительности

Эквивалентную теорему отсчетов можно сформулировать и для частот. А именно, если функция  $f(t)$  обращается в нуль при  $|t| > \tau$ , т. е. является функцией конечной продолжительности:

$$f(t) = 0, \quad \text{если } |t| > \tau,$$

то ее фурье-образ  $F(\omega)$  однозначно определяется своими значениями  $F(n\pi/\tau)$ , заданными в эквидистантных точках, при расстоянии между соседними точками, равном  $n/\tau$ . Таким образом,

$$F(\omega) = \sum_n F_n \left( \frac{n\pi}{\tau} \right) \frac{\sin(\omega\tau - n\pi)}{\omega\tau - n\pi}. \quad (5.7.1)$$

Точки отсчетов отстоят друг от друга на величину

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{\tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\tau} \right) = \frac{\Omega_{\text{мин}}}{2}, \quad (5.7.2)$$

где

$$\Omega_{\text{мин}} = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (5.7.3)$$

причем отсчеты  $F_n(n\pi/\tau)$  простираются по всей области частот от  $-\infty$  до  $\infty$ . Однако оптическая система обладает конечной полосой пропускания  $\omega_{\text{макс}}$ , и поэтому не все частотные отсчеты могут быть пропущены через апертуру системы.

Для двухмерного случая  $F(\omega)$  запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F(\omega_x, \omega_y) = \\ &= \sum_n \sum_m F \left( \frac{n\pi}{\tau_x}, \frac{m\pi}{\tau_y} \right) \frac{\sin(\omega_x \tau_x - n\pi)}{\omega_x \tau_x - n\pi} \frac{\sin(\omega_y \tau_y - m\pi)}{\omega_y \tau_y - m\pi}. \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

Как (5.7.1), так и (5.7.4) можно свести к степенным рядам. Поэтому спектр частот предмета ограниченной продолжительности или ограниченного углового размера является степенной функцией частоты  $\omega$ . Из этого факта следует фундаментальный вывод. А именно, если предмет  $f(x)$  содержит высшую пространственную частоту  $\omega_0 > \omega_{\text{макс}}$ , то степенной ряд содержит конечное число членов. В таком случае все коэффициенты этого ряда можно определить однозначно путем измерения предмета в конечном числе точек, выбранных таким образом, чтобы система линейных уравнений относительно  $F(n\pi/\tau)$  имела однозначные решения. Полученные значения  $F(n\pi/\tau)$  от  $n = 0$  до  $n = n_{\text{макс}}$  полностью определяют весь предмет, несмотря на то, что апертура оптической системы не пропускает тех пространственных частот, которые вносят существенный вклад в структуру предмета. Таким образом, для предметов конечного углового размера знание спектра пространственных частот в пределах полосы пропускания изображающей системы эквивалентно знанию спектра пространственных частот во всем частотном диапазоне, т. е. знанию всего предмета. Этот метод, который называется методом аналитического

продолжения, не получил широкого распространения по следующей причине.

Известно, что шумы накладывают предел точности измерений, достигаемой на опыте. При этом существует определенное соотношение между допустимым уровнем шумов и достигаемой точностью измерений для случая, когда апертура пропускает все пространственные частоты, подлежащие определению. Однако, чтобы получить информацию о высоких пространственных частотах ограниченного предмета, не захватываемых апертурой, уровень шумов в методе аналитического продолжения должен быть уменьшен настолько сильно, что сама система становится практически неосуществимой. Поэтому экспериментатор этот способ не использует и вынужден идти по другому пути: либо увеличивать эффективную апертуру и использовать светосильную оптику, либо вводить усиление сигнала. Возможен также и другой прием, еще не получивший широкого распространения, но по своим потенциальным возможностям представляющий большое практическое значение. Этот прием состоит в целенаправленном перераспределении информационных степеней свободы оптического сигнала или введении дополнительных степеней свободы с тем, чтобы, где это необходимо, повысить разрешающую способность и при тех же уровнях шумов обнаружить детали или предметы таких малых размеров, которые находятся за пределами разрешающей способности исходной системы.

### § 5-8. Одномерные функции с ограниченным спектром

Функции с ограниченным спектром обладают интересными закономерностями, которые позволяют установить точные ограничения на саму функцию, ее производную или конечные приращения, включая производные всех порядков, а также установить энергетические шумовые соотношения. При этом все мажоритарные оценки определяются только наивысшей пространственной частотой, ограничивающей спектр исходного сигнала, и энергией сигнала. Эти оценки часто используются в тексте.

Сначала получим эти оценки для одномерного случая — радиолокационного сигнала, а затем для двухмерного случая — оптического сигнала.

Кроме детерминированного сигнала, описываемого функцией  $f(t)$  с ограниченным спектром, рассмотрим также случайную функцию, спектр мощности которой  $S(\omega)$  обрывается на частоте  $\omega_0$ .

Наиболее убедительный и наиболее простой метод рассмотрения общих свойств сигналов с ограниченным спектром заключается во введении вспомогательного линейного фильтра, характеризующегося импульсным откликом  $h(t)$  и передаточной функцией

$H(\omega)$  (рис. 5.10), так что отклик фильтра на функцию  $f(t)$  равен

$$g(t) = f(t) \otimes h(t).$$

Промежуточная задача, которая затем позволит очень просто и быстро получить все перечисленные выше мажоритарные оценки,

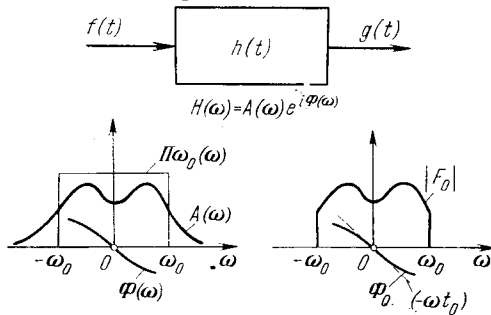


Рис. 5.10. Вспомогательный линейный фильтр с характеристическим откликом  $h(t)$  и с частотно-фазовой характеристикой  $H(\omega)$ .

состоит в том, чтобы установить ограничения на функцию  $g(t)$ , определяемые полной энергией для детерминированного сигнала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{5.8.1}$$

или средней мощностью

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \tag{5.8.2}$$

для случайного сигнала.

Проследим сначала решение промежуточной задачи для детерминированного сигнала  $f(t)$ . Согласно (2.6.8)

$$g(t) = f(t) \otimes h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{5.8.3}$$

Применяя неравенство Шварца к (5.8.3), находим

$$|g(t)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(\omega)|^2 d\omega \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(\omega) e^{i\omega t}|^2 d\omega. \tag{5.8.4}$$

Но поскольку согласно равенству Парсеваля полная энергия равна

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (5.8.5)$$

то  $g(t)$  ограничена:

$$|g(t)|^2 \leq \frac{E}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.8.6)$$

Предположим, что величины  $E$ ,  $\omega_0$  и  $h(t)$  заданы. Найдем такой сигнал  $f_0(t)$ , чтобы отклик  $g(t_0)$  при заданном  $t_0$  был максимальным. Для этого необходимо потребовать соблюдения (5.8.4) со знаком равенства при  $t = t_0$ . Очевидно, что это возможно, если в (5.8.3) соблюдено условие

$$F_0^* = H(\omega) e^{i\omega t_0} \quad (5.8.7)$$

и, таким образом, под интегралом стоит квадрат модуля, т. е. всюду неотрицательная величина. Поскольку  $F(\omega)$  отлично от нуля только в интервале  $(-\omega_0, \omega_0)$ , то (5.8.7) следует записать более точно:

$$F_0(\omega) = CH^*(\omega) e^{-i\omega t} \Pi_{\omega_0}(\omega), \quad (5.8.8)$$

где  $\Pi_{\omega_0}(\omega)$  — прямоугольный импульс (2.4.1). Воспользовавшись соотношениями (2.4.3) и (2.6.8), находим

$$f_0(t) = Ch^*(t - t_0) \otimes \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}. \quad (5.8.9)$$

Если  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , то

$$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \rightarrow \delta(t)$$

и (5.8.9) принимает вид

$$f_0(t) = Ch^*(t - t_0). \quad (5.8.10)$$

Соотношение (5.8.10) соответствует условию построения согласованного фильтра.

Если на вход подан случайный сигнал  $f(t)$  со спектром мощности  $S(\omega)$ , то спектр мощности функции  $g(t)$ , появляющейся на выходе линейного фильтра, равен (см. (3.5.28))

$$S_g(\omega) = S(\omega) |H(\omega)|^2, \quad (5.8.11)$$



а средняя энергия на выходе

$$E = \overline{|g(t)|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega, \quad (5.8.12)$$

где усреднение производится по ансамблю реализаций. Здесь используется свойство эргодичности. Обозначим через  $\omega_m$  то значение  $\omega$ , при котором  $|H(\omega)|$  достигает максимального значения в интервале  $(-\omega_0, \omega_0)$  (см. рис. 5.11), т. е.

$$|H(\omega)| \leq H(\omega_m), \quad |\omega| \leq \omega_0. \quad (5.8.13)$$

Поскольку спектр мощности случайного сигнала не может быть отрицательным, то  $S(\omega) \geq 0$  и средняя мощность равна

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S(\omega) d\omega. \quad (5.8.14)$$

С помощью неравенства Шварца находим

$$|g(t)|^2 \leq P |H(\omega_m)|^2. \quad (5.8.15)$$

Пусть теперь  $P$ ,  $\omega_0$  и  $h(t)$  заданы и требуется найти сигнал  $f_0(t)$  такой, чтобы максимизировать среднюю мощность на выходе  $|g(t)|^2$ . Для этого ищем  $S(\omega)$  такое, чтобы максимизировать (5.8.12) при ограничении (5.8.14). Можно доказать, что оптимальный спектр мощности  $S_0(\omega)$  должен иметь следующий вид:

$$S_0(\omega) = 2\pi P \delta(\omega - \omega_m) \quad (5.8.16)$$

(см. рис. 5.11). Таким образом, функция  $f_0(t)$  является моночастотной с автокорреляцией, равной

$$R(\tau) = P e^{i\omega_m \tau}. \quad (5.8.17)$$

Если  $|H(\omega)|$  не имеет максимума в интервале  $(0, \omega_0)$ , то  $\omega_m$  — произвольное, например,  $\omega_m = 0$  или  $\omega_m = \omega_0$ .

Итак, если на вход системы подается детерминированный сигнал, то максимальное значение отклика на выходе фильтра ограничено среднеквадратичным значением  $|H(\omega)|$  в интервале  $(-\omega_0, \omega_0)$ . Если же на вход системы подается случайный сигнал, то средняя мощность отклика ограничена максимумом  $|H(\omega)|$  в том же интервале.

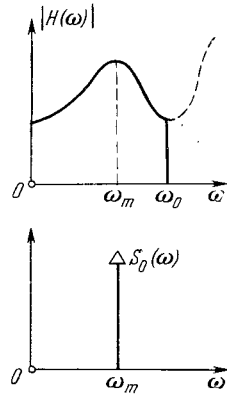


Рис. 5.11. Оптимальный спектр мощности  $S_0(\omega)$  случайного сигнала  $f(t)$ , создающей максимизацию средней мощности на выходе линейного фильтра  $H(\omega)$ .

Рассмотренные выше вспомогательные задачи позволяют теперь найти все мажорирующие оценки самого сигнала и его производных.

Максимальное значение функции  $f(t)$  на входе. Если  $f(t)$  — детерминированный сигнал, то следует взять такой вспомогательный линейный фильтр, который описывается передаточной функцией

$$H(\omega) = 1(\omega). \quad (5.8.18)$$

Тогда сигнал на выходе равен сигналу на входе:  $g(t) = f(t)$ , и (5.8.6) дает

$$f(t) \leq \sqrt{\frac{E\omega_0}{\pi}}. \quad (5.8.19)$$

Следовательно, функция с ограниченным спектром ограничена значением  $\sqrt{E\omega_0/\pi}$ , зависящим от полной энергии сигнала и максимальной частоты  $\omega_0$ . Этот предел достигается функцией  $f(t)$  в точке  $t_0$  только в том случае, если

$$f(t) = f_0(t) = \sqrt{\frac{E\omega_0}{\pi}} \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}. \quad (5.8.20)$$

Ограничение на конечное приращение. Установим теперь ограничение на конечное приращение

$$\Delta(\tau) = f(t + \tau) - f(t) \quad (5.8.21)$$

сигнала  $f(t)$ . В этом случае вспомогательный линейный фильтр должен иметь передаточную функцию

$$H(\omega) = e^{i\omega\tau} - 1. \quad (5.8.22)$$

Рассмотрим детерминированный сигнал. Поскольку

$$|H(\omega)| = 2 \left| \frac{\sin \omega\tau}{2} \right|, \quad (5.8.23)$$

то

$$\int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{4}{\tau} (\omega_0\tau - \sin \omega_0\tau) \quad (5.8.24)$$

и (5.8.6) дает

$$|f(t + \tau) - f(t)| \leq \sqrt{\frac{2E\omega_0}{\pi} \left[ 1 - \frac{\sin \omega_0\tau}{\omega_0\tau} \right]}. \quad (5.8.25)$$

Знак равенства возможен для  $t = t_0$ , если только

$$f(t) = f_0(t) = A \left[ \frac{\sin \omega_0(t - \tau - t_0)}{\pi(t - \tau - t_0)} - \frac{\sin \omega_0(t - t_0)}{\pi(t - t_0)} \right]. \quad (5.8.26)$$

Из (5.8.25) следует также (рис. 5.12)

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \omega_0 \tau \sqrt{\frac{E \omega_0}{3\pi}}. \quad (5.8.27)$$

Рассмотрим теперь случайный сигнал. Среднее значение квадрата приращения согласно (5.8.15) ограничено неравенством

$$\overline{|f(t + \tau) - f(t)|^2} \leq 4P \sin^2 \left( \frac{\omega_m \tau}{2} \right).$$

Если  $\omega_0 \tau < \pi$ , а  $\omega_m = \omega_0$ , то

$$\begin{aligned} |f(t + \tau) - f(t)|^2 &\leq \\ &\leq 4P \sin^2 \frac{\omega_0 \tau}{2} < P \omega_0^2 \tau^2. \end{aligned} \quad (5.8.28)$$

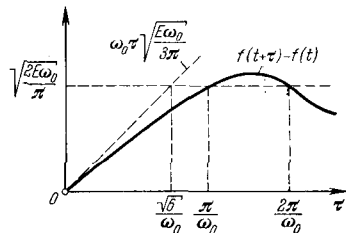


Рис. 5.12. Ограничение на конечное приращение детерминированной функции  $f(t)$  с ограниченной полосой частот  $\omega_0$ .

Ограничения на производные функции  $f(t)$ . Воспользуемся вспомогательным неравенством

$$\left| e^{ix} - \left[ 1 + ix + \dots + \frac{(ix)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}, \quad (5.8.29)$$

справедливым при любом действительном  $x$ , для доказательства основного соотношения. Если функцию

$$g(t) = f(t + \tau) - \left[ f(t) + f'(t)\tau + \dots + f^{(n-1)}(t) \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \right] \quad (5.8.30)$$

взять в качестве погрешности, получающейся при усечении ряда Тейлора, то вспомогательный линейный фильтр должен характеризоваться передаточной функцией

$$H(\omega) = e^{i\omega\tau} - \left[ 1 + i\omega\tau + \dots + \frac{(i\omega\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \right]. \quad (5.8.31)$$

Для детерминированного сигнала, используя (5.8.29), получаем

$$\int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\tau^{2n}}{(n!)^2} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \omega^{2n} d\omega = \frac{2\omega_0(\omega_0\tau)^{2n}}{(2n+1)(n!)^2}, \quad (5.8.32)$$

откуда с помощью соотношения (5.8.6) находим

$$g(t) \leq \frac{(\omega_0 \tau)^n}{n!} \sqrt{\frac{E \omega_0}{\pi (2n + 1)}}. \quad (5.8.33)$$

Частным случаем (5.8.33) является соотношение (5.8.27).

Для случайного сигнала соотношения (5.8.29) и (5.8.15) дают

$$\overline{|g(t)|^2} \leq P \cdot \frac{(\omega_0 \tau)^{2n}}{(n!)^2}. \quad (5.8.34)$$

Производная  $n$ -го порядка

$$g(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

появляется на выходе вспомогательного линейного фильтра, характеризующегося передаточной функцией

$$H(\omega) = (i\omega)^n. \quad (5.8.35)$$

Для детерминированного сигнала имеем

$$\int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{2\omega_0^{2n+1}}{(2n+1)}. \quad (5.8.36)$$

С помощью (5.8.6) находим

$$\left| \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right| \leq \omega_0^n \sqrt{\frac{E \omega_0}{(2n+1)\pi}}. \quad (5.8.37)$$

Если использовать максимальное значение функции (5.8.19):

$$f_{\max} = \sqrt{\frac{E \omega_0}{\pi}},$$

то получаем

$$\left| \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right| \leq \omega_0^n \frac{f_{\max}}{\sqrt{2n+1}}. \quad (5.8.38)$$

Для наиболее часто встречающегося случая  $n = 1$

$$\left| \frac{df(t)}{dt} \right| \leq \frac{\omega_0 f_{\max}}{\sqrt{3}}. \quad (5.8.39)$$

Соотношение (5.8.39) интересно сопоставить с ограничением на производную функцию с ограниченным спектром, устанавливаемым теоремой Бернштейна:

$$\left| \frac{df(t)}{dt} \right| \leq \omega_0 f_{\text{макс}}. \quad (5.8.40)$$

Сравнивая (5.8.39) и (5.8.40), можно сделать вывод о том, что теорема Бернштейна соответствует более слабой оценке максимального значения производной, чем выражение, полученное с помощью вспомогательного линейного фильтра. Еще более сильное расхождение между оценкой по теореме Бернштейна и сделанными здесь оценками возникает за счет множителя  $1/\sqrt{2n+1}$  для производных  $n$ -го порядка.

**Усеченная сумма отсчетов.** Как известно, функцию  $f(t)$  с ограниченным спектром можно представить в виде бесконечного ряда по функциям отсчетов

$$f(t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \frac{\sin \omega_0(\tau-nT)}{\omega_0(\tau-nT)}, \quad \text{где } T = \frac{\pi}{\omega_0}. \quad (5.8.41)$$

Определим погрешность при аппроксимации этой бесконечной суммы конечным числом членов.

Погрешность усечения равна

$$e_N(t+\tau) = f(t+\tau) - \sum_{n=-N}^N f(t+nT) \frac{\sin \omega_0(\tau-nT)}{\omega_0(\tau-nT)}. \quad (5.8.42)$$

Очевидно, что вспомогательный линейный фильтр должен характеризоваться передаточной функцией

$$H(\omega) = e^{i\omega\tau} - \sum_{n=-N}^N e^{inT\omega} \frac{\sin \omega_0(\tau-nT)}{\omega_0(\tau-nT)}. \quad (5.8.43)$$

Для детерминированного сигнала находим

$$|e_N(t+\tau)|^2 \leq \frac{E}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left| e^{i\omega\tau} - \sum_{n=-N}^N e^{inT\omega} \frac{\sin \omega_0(\tau-nT)}{\omega_0(\tau-nT)} \right|^2 d\omega. \quad (5.8.44)$$

Если разложить в ряд Фурье функцию  $e^{i\omega\tau}$  в интервале  $(-\omega_0, \omega_0)$ , то коэффициенты полученного разложения будут равны

$$a_n = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega\tau} e^{-inT\omega} d\omega = \frac{\sin \omega_0(\tau - nT)}{\omega_0(\tau - nT)}. \quad (5.8.45)$$

Сравнивая (5.8.45) с (5.8.44), можно сделать вывод о том, что характеристическая функция  $H(\omega)$  (5.8.43) определяет также ошибку аппроксимации функции  $e^{i\omega\tau}$  усеченным рядом Фурье, а интеграл в (5.8.44) равен среднеквадратичному значению этой ошибки. Используя формулу Парсеваля, находим

$$|e_N(t + \tau)|^2 \leq \frac{E\omega_0}{\pi} \sum_{|n| > N} \frac{\sin^2 \omega_0(\tau - nT)}{\omega_0^2(\tau - nT)^2}. \quad (5.8.46)$$

Таким образом, при аппроксимации детерминированного сигнала  $f(t)$  линейной комбинацией  $2N + 1$  значений  $f(nT)$  наивысшая ошибка аппроксимации принимает максимальное значение, если это разложение определяется коэффициентами, равными

$$\frac{\sin \omega_0(\tau - nT)}{\omega_0(\tau - nT)}.$$

С увеличением числа членов ряда  $N$  передаточная функция  $H(\omega)$  стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$  вместе с ошибкой  $e_N(t)$ :

$$e_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (5.8.47)$$

### § 5-9. Двухмерные функции с ограниченным спектром

Рассмотрим детерминированную функцию  $f(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x, y)$  — координата точки на плоскости, фурье-образ которой равен

$$F(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{u}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (5.9.1)$$

где  $\mathbf{u}(u, v)$  — координата точки на частотной плоскости. Функция  $f(\mathbf{x})$  называется функцией с ограниченным спектром, если ее фурье-образ  $F(\mathbf{u})$  равен нулю повсюду, кроме конечной области  $R$  на плоскости  $\mathbf{u}(u, v)$ :

$$F(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{для } \mathbf{u} \text{ вне } R. \quad (5.9.2)$$

Энергия сигнала, описываемого функцией  $f(\mathbf{x})$ , равна

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_R |F(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{u}. \quad (5.9.3)$$

Найдем максимальный отклик линейной двухмерной системы. Если двухмерная система является инвариантной относительно произвольных сдвигов, то ее можно охарактеризовать точечным разбросом  $h(\mathbf{x})$  или передаточной функцией  $H(\mathbf{u})$ . При этом отклик  $g(\mathbf{x})$  равняется

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_R F(\mathbf{u}) H(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{u}\mathbf{x}} d\mathbf{u}. \quad (5.9.4)$$

Используя двухмерную форму неравенства Шварца, находим

$$|g(\mathbf{x})|^2 \leq \frac{E}{4\pi^2} \int_R |H(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{u}. \quad (5.9.5)$$

Отклик  $g(\mathbf{x})$  достигает своего максимального предела в точке  $\mathbf{x}_0$  только в том случае, если на вход подан сигнал  $f_0(\mathbf{x})$ , фурье-образ которого равен

$$F_0(\mathbf{u}) = \begin{cases} AH^*(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{u}\mathbf{x}_0}, & \text{если } \mathbf{u} \text{ находится в } R, \\ 0, & \text{если } \mathbf{u} \text{ лежит вне } R. \end{cases} \quad (5.9.6)$$

Максимальное значение функции  $f(\mathbf{x})$  на входе. Пусть передаточная функция

$$H(\mathbf{u}) = 1,$$

тогда  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . Если  $\sigma$  — площадь области  $R$ , то из (5.9.5) следует:

$$|f(\mathbf{x})| \leq \frac{\sqrt{E\sigma}}{2\pi}. \quad (5.9.7)$$

Верхний предел достигается в точке  $\mathbf{x}_0$ , если только

$$f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \frac{1}{2\pi} \int_R e^{i\mathbf{u}\mathbf{x}} d\mathbf{u}. \quad (5.9.8)$$

Если область  $R$  имеет вид круга радиуса  $a$ , то

$$f_0(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{E}{\pi}} \frac{J_1[a\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}]}{\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}}, \quad (5.9.9)$$

где  $J_1(\mathbf{x})$  — функция Бесселя первого порядка, а

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \quad (5.9.10)$$

При этом

$$|f(\mathbf{x})| \leq f_0(\mathbf{x}_0) = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{E}{\pi}}. \quad (5.9.11)$$

О г р а н и ч е н и е н а к о н е ч н о е п р и р а щ е н и е.  
Конечному приращению

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}) - f(\mathbf{x}), \quad \text{где } \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\alpha, \beta), \quad (5.9.12)$$

соответствует передаточная функция

$$H(\mathbf{u}) = e^{i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}} - 1. \quad (5.9.13)$$

Поскольку

$$|H(\mathbf{u})| = 2 - 2 \cos(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}),$$

то из (5.9.5) находим

$$|f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}) - f(\mathbf{x})|^2 \leq \frac{E}{2\pi^2} \int_R (1 - \cos \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}) du. \quad (5.9.14)$$

Для области  $R$  в виде круга радиуса  $a$  получаем

$$|f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}) - f(\mathbf{x})|^2 \leq \frac{Ea^2}{2\pi} \left[ 1 - \frac{2J_1(a|\boldsymbol{\alpha}|)}{a|\boldsymbol{\alpha}|} \right], \quad (5.9.15)$$

где  $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

О г р а н и ч е н и е н а п р о и з в о д н ы е. Пусть

$$g(\mathbf{x}) = g(x, y) = \frac{\partial^{k+r} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^r}. \quad (5.9.16)$$

С помощью передаточной функции

$$H(\mathbf{u}) = H(u, v) = (iu)^k (iv)^r \quad (5.9.17)$$

находим

$$\left| \frac{\partial^{k+r} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^r} \right|^2 \leq \frac{E}{4\pi^2} \iint u^{2k} v^{2r} du dv. \quad (5.9.18)$$

Верхний предел достигается в точке  $\mathbf{x}_0$ , если

$$f(x, y) = A \frac{\partial^{k+r} \left( \iint e^{i\mathbf{u}\mathbf{x}} d\mathbf{u} \right)}{\partial x^k \partial y^r}. \quad (5.9.19)$$

С в о й с т в а ф у н к ц и и  $f(x)$  с к р у г о в о й с и м м е т р и е й. Если сигнал  $f(x)$  имеет круговую симметрию, т. е.

$$f(x) = f(r), \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5.9.20)$$

то двухмерный фурье-образ  $F(\mathbf{u})$  также имеет круговую симметрию:

$$F(u, v) = F(w), \quad \text{где } w = \sqrt{u^2 + v^2}; \quad (5.9.21)$$

при этом (см. (2.17.14))

$$F(\omega) = 2\pi \hat{\mathfrak{F}} f(r) = 2\pi \mathfrak{F} f(w)$$



или (см. (2.17.12))

$$F(w) = 2\pi \int r f(r) J_0(wr) dr,$$

где (см. (2.17.13))

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta$$

— функция Бесселя нулевого порядка.

Функция  $f(r)$  называется функцией с ограниченным на круге спектром, если

$$\mathfrak{F}(w) = \hat{\mathfrak{F}} f(r) = 0 \quad \text{для } w \geq a. \quad (5.9.22)$$

Энергия сигнала  $f(r)$  равна

$$E = 2\pi \int_0^{\infty} r |f(r)|^2 dr = 2\pi \int_0^a w |\mathfrak{F}(w)|^2 dw. \quad (5.9.23)$$

Можно доказать, что

$$|f(r)|^2 \leq \frac{E a^2}{4\pi} [J_0^2(ar) + J_1^2(ar)]. \quad (5.9.24)$$

Верхний предел достигается при  $r = r_0$ , если только

$$f(r) = f_0(r) = A a \frac{r_0 J_0(ar) J_1(ar_0) - r J_0(ar_0) J_1(ar)}{r_0^2 - r^2}. \quad (5.9.25)$$

Можно также доказать ограничение на приращение:

$$|f(r+y) - f(r)| \leq \frac{|y| a^2}{\pi} \sqrt{\frac{E}{2\pi}}. \quad (5.9.26)$$

### § 5-10. Теорема отсчетов в оптике

Перейдем теперь к оптике. Рассмотрим когерентную оптическую систему. Картину распределения полей считаем стационарной, а компоненты поля — функциями пространственных координат. В системе не происходит ни деполяризации света, ни вращения плоскости поляризации. Применим эвристически принцип Гюйгенса — Френеля, подробное рассмотрение которого приведено в главе 6. Пусть нам задано распределение электромагнитного поля (электрический вектор) в плоскости входного зрачка  $(x, y)$ . В оговоренных выше условиях можно рассматривать только одну компоненту поля. Ради краткости изложения рассмотрим сначала зависимость поля от одной пространственной координаты  $x$ , а затем сделаем обобщение на двухмерный случай.

Итак, рассмотрим предмет-транспарант, помещенный в когерентную оптическую систему. Функция  $f(x)$  характеризует распределение амплитуды и фазы стационарной световой волны в различных точках системы:

$$f(x) = |f(x)| e^{i \arg f(x)}. \quad (5.10.1)$$

Применим к этой амплитуде теорему отсчетов. Время  $t$  заменяется на пространственную координату  $x$ . Эквивалентом продолжительности опыта  $\tau$  является размер предмета-транспаранта  $2A$ . Что

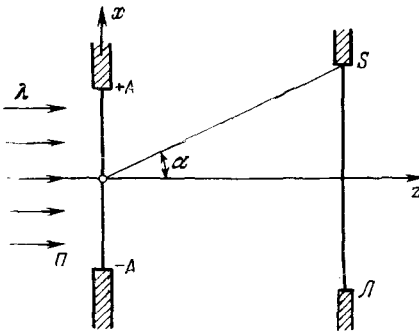


Рис. 5.13. Схема одномерной оптической системы при когерентном освещении. Размер транспаранта  $2A$ . Угловая апертура длинной щели  $S$  равна  $2\alpha$ .

должно быть эквивалентом максимальной частоты прибора  $\omega_0$ ? Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим простейшую оптическую систему (рис. 5.13). Предмет  $\Pi$  в виде неограниченно длинной полоски шириной  $2A$  освещается параллельным когерентным монохроматическим пучком света длиной волны  $\lambda$ . В плоскости  $L$  устанавливаем длинную щель  $S$ , играющую роль входной диафрагмы или входного зрачка. Щель  $S$  стягивает двугранный угол  $2\alpha$ , вершина которого находится в плоскости предмета  $\Pi$ . Оценим предельные про-

странственные частоты, которые эффективно пропускаются через щель  $S$  в оптическую систему наблюдения.

Введем понятие амплитудного пропускания  $t(x)$  предмета  $\Pi$ . Определим его как отношение амплитуды волны непосредственно за предметом  $u_{\text{вых}}(x)$  к амплитуде волны  $u_{\text{вх}}(x)$  перед предметом:

$$t(x) = \frac{u_{\text{вых}}(x)}{u_{\text{вх}}(x)}. \quad (5.10.2)$$

В общем случае амплитудное пропускание  $t(x)$  зависит от угла  $i$  падения световой волны на транспарант. В упрощенном рассмотрении такой зависимостью пренебрегаем и ограничиваемся приближением малых углов  $\alpha, i$ . Рассмотрим простейший предмет, амплитудное пропускание которого описывается гармонической функцией. Пусть предмет только поглощает свет и не создает никаких вариаций в сдвигах фаз волны. Такой чисто поглощающий предмет имеет амплитудное пропускание

$$t(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{a} x \right], \quad (5.10.3)$$

которое является действительной функцией координаты  $x$  (рис. 5.14). На приведенном рисунке функция  $t(x)$  изображена условно в виде профиля таким образом, что чем выше профиль, тем больше значение амплитудного пропускания, которое заключено в пределах

$$0 \leq |t(x)| \leq 1. \quad (5.10.4)$$

Величина  $2\pi/a$  имеет размерность, обратную длине, и называется пространственной частотой:

$$\omega_x = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\nu_x. \quad (5.10.5)$$

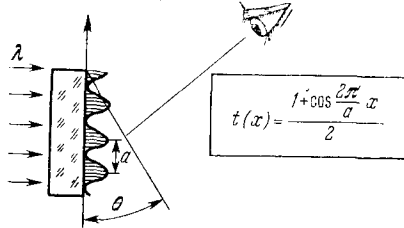


Рис. 5.14. Простейший поглощающий предмет с косинусоидальным амплитудным пропусканием.

Осветим простейший поглощающий предмет (5.10.3) однородной плоской волной

$$u_0(x) = 1(x), \quad (5.10.6)$$

распространяющейся перпендикулярно предмету. После прохождения через поглощающий предмет  $t(x)$  в волне появляются неоднородности

$$u_{\text{вых}}(x) = u_{\text{вх}}(x) \cdot \frac{1}{2} [1 + \cos \omega_x x] = \frac{1}{2} [1 + \cos \omega_x x]. \quad (5.10.7)$$

Что произойдет с волной света при ее распространении вдоль оси  $z$  к щели  $S$ ? Воспользуемся для этого принципом Гюйгенса.

Вблизи плоскости предмета  $\Pi$  мгновенная картина электромагнитного поля характеризуется тем, что геометрическое место постоянных фаз электрического поля имеет вид эквидистантных плоскостей с зазором, равным длине волны  $\lambda$ . После поворота плоскости  $Ox$  на малый угол  $\theta$  фазы в новой плоскости  $Ox'$  будут меняться от точки к точке линейно с координатой  $x'$ . В приближении малых углов расстояние между максимумами (рис. 5.15) равно  $\lambda/\theta$ , а фаза

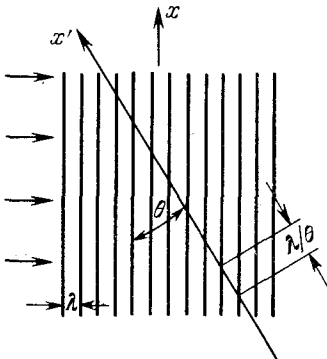


Рис. 5.15. Наблюдение плоского фронта волны под углом  $\theta$  к его волновому вектору.

$$\varphi(x') = \frac{2\pi}{\lambda} \theta x'. \quad (5.10.8)$$

Волна света приобретает дополнительный фазовый множитель  $e^{i\varphi(x)}$ , а поскольку в приближении малых углов  $x' = x/\cos \theta \approx x$ ,

то дополнительная разность фаз в направлении  $\theta$  равна

$$\varphi(x) = \frac{2\pi\theta}{\lambda} x. \quad (5.10.9)$$

Суперпозиция этих волн от всех элементов поверхности предмета  $dx$  даст волну с амплитудой

$$u(\theta) = \int_{-A}^A u_{\text{ВЫХ}}(x) e^{i \frac{2\pi\theta x}{\lambda}} dx, \quad (5.10.10)$$

которую видит наблюдатель, находящийся на очень большом расстоянии от предмета и рассматривающий предмет под углом  $\theta$  к оптической оси.

Суммарная амплитуда света равна

$$u(\theta) = \int_{-A}^A \frac{1}{2} [1 + \cos \omega_x x] e^{i \frac{2\pi\theta}{\lambda} x} dx. \quad (5.10.11)$$

Если в нулевом приближении пределы интегрирования устремить в бесконечность, то

$$u(\theta) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [1 + \cos \omega_x x] e^{i \frac{2\pi\theta}{\lambda} x} dx = F_{\omega} \left( -\frac{2\pi\theta}{\lambda} \right). \quad (5.10.12)$$

Таким образом, амплитуда  $u(\theta)$  равна фурье-образу  $F(\omega)$  функции  $u_{\text{ВЫХ}}(x)$ , или, если воспользоваться (2.6.4) и (2.6.12),

$$\begin{aligned} u(\theta) &\approx \frac{1}{2} 2\pi \delta \left( -\frac{2\pi\theta}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \pi \left[ \delta \left( -\frac{2\pi\theta}{\lambda} - \omega \right) + \delta \left( -\frac{2\pi\theta}{\lambda} + \omega \right) \right] = \\ &= \pi \frac{\lambda}{2\pi} \delta(\theta) + \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \delta \left( \theta - \frac{\omega\lambda}{2\pi} \right) + \delta \left( \theta + \frac{\omega\lambda}{2\pi} \right) \right] = \\ &= \lambda \left[ \delta(\theta) + \frac{1}{2} \delta \left( \theta - \frac{\lambda}{a} \right) + \frac{1}{2} \delta \left( \theta + \frac{\lambda}{a} \right) \right]. \quad (5.10.13) \end{aligned}$$

Структура волны  $u(\theta)$  в (5.10.13) показывает, что плоская волна, пройдя через поглощающий предмет (5.10.3), расщепляется на три составляющие. Кроме волны, распространяющейся вдоль оптической оси, появляются еще две боковые волны. Угол наклона волн

$$\theta = \pm \frac{\lambda}{a}, \quad (5.10.14)$$

если ограничиться приближением малых углов (рис. 5.16).

Вернемся теперь к вопросу о высших пространственных частотах предмета. Из рис. 5.14 видно, что боковые пучки, распространяющиеся под углом  $\theta = \pm\lambda/a$  и несущие информацию о синусоидальной решетке, могут захватываться щелью  $S$ , образующей угловую апертуру  $\alpha$ , только в том случае, если

$$|\theta_{\pm}| \leq \alpha. \quad (5.10.15)$$

Поскольку  $|\theta_{\pm}| = \lambda/a$ , а  $a = 1/\nu_x = 1/2\pi\omega_x$ , то

$$\omega_0 = |\omega_x^{\text{макс}}| = k\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \quad (5.10.16)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число.

Теперь можно в явном виде выразить теорему отсчетов в оптике. Комплексную амплитуду световой волны, захватываемой апертурой конечных размеров, представим в виде суммы конечного числа слагаемых:

$$f(x) = \sum_{n=-\omega_{\text{макс}}}^{\omega_{\text{макс}}} f_n \left( \frac{n\pi}{\omega_0} \right) u_n(\omega_0 x) = \sum_n f_n \left( \frac{n\pi}{k\alpha} \right) u_n(k\alpha x), \quad (5.10.17)$$

где

$$u_n(z) = \frac{\sin(z - n\pi)}{z - n\pi}. \quad (5.10.18)$$

Коэффициенты отсчетов  $f_n$  в общем случае являются комплексными величинами.

Ограничение на высшую пространственную частоту  $\omega_{\text{макс}}$  эквивалентно теореме Аббе о предельной разрешающей способности микроскопа при нормальном освещении. Действительно, интервал отсчета

$$\Delta x = \frac{\pi}{k\alpha} \quad (5.10.19)$$

равен минимальному расстоянию между двумя точками предмета, различаемыми в микроскоп, согласно теореме Аббе. В случае линзы численная апертура  $\alpha$  заменяется на величину

$$\alpha = n \sin \theta, \quad (5.10.20)$$

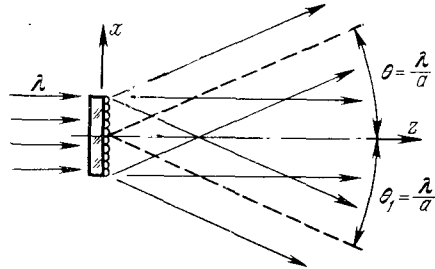


Рис. 5.16. Вторичные пучки, образующиеся при прохождении плоского фронта монохроматического излучения через простейший поглощающий предмет.

где  $\theta$  — угол, образуемый крайним лучом в микроскопе с оптической осью, а  $n$  — показатель преломления вещества линзы. Тогда интервал отсчета равен

$$\Delta x = \frac{\pi}{kn \sin \theta} = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}. \quad (5.10.21)$$

Соотношение (5.10.21) выражает теорему Аббе.

Таким образом, физической причиной, вызывающей ограничение разрешающей способности микроскопа и любой оптической системы, включая голографическую установку, является тот факт, что боковые лучи, несущие информацию о мелких деталях предмета, отклоняются относительно оси настолько, что не попадают в апертуру входного зрачка и соответствующая информация ускользает от наблюдателя.

### § 5.11. Матрица освещения

Применим теорему отсчетов к амплитуде оптического сигнала. Поскольку любой детектор света отзывается только на интенсивность света, то наблюдаемые величины выражаются через квадрат модуля оптического сигнала.

Найдем распределение интенсивности света, освещающего предмет. Пусть точечный источник испускает стационарно квазимонохроматический свет единичной интенсивности. Тогда освещающее поле характеризуется распределением интенсивности вида

$$\begin{aligned} I_0(x) &= a(x) a^*(x) = \\ &= \sum_n \sum_m a\left(\frac{n\pi}{k\alpha}\right) a^*\left(\frac{m\pi}{k\alpha}\right) u_n(k\alpha x) u_m^*(k\alpha x), \end{aligned} \quad (5.11.1)$$

где

$$a(x) = \sum_n a\left(\frac{n\pi}{k\alpha}\right) u_n(k\alpha x) \quad (5.11.2)$$

— оптический сигнал освещающего поля, представленный в виде ряда по функциям отсчетов.

В общем случае следует рассматривать взаимную интенсивность  $J(x_1, x_2; \xi)$  между оптическими сигналами в точках  $x_1$  и  $x_2$ , обусловленными точечным источником, расположенным в точке  $\xi$  предметного пространства. Согласно определению (4.1.43) взаимная интенсивность равна

$$J(x_1, x_2; \xi) = \overline{a(x_1, \xi, t) a^*(x_2, \xi, t)}, \quad (5.11.3)$$

где черта означает усреднение за большой промежуток времени. Поскольку по условию волновое поле не зависит от времени явно, то взаимная интенсивность равна

$$J(x_1, x_2; \xi) = a(x_1, \xi) a^*(x_2, \xi). \quad (5.11.4)$$

Разлагая оптический сигнал  $a(x, \xi)$  в ряд с помощью теоремы отсчетов, находим

$$J(x_1, x_2; \xi) = \sum_n \sum_m a\left(\frac{n\pi}{k\alpha}, \xi\right) a^*\left(\frac{m\pi}{k\alpha}, \xi\right) u_m(k\alpha x_1) u_n^*(k\alpha x_2). \quad (5.11.5)$$

Поскольку рассматриваемый источник монохроматического света является некогерентным по условию, то взаимная интенсивность  $J(x_1, x_2)$ , обусловленная всеми точками источника, получается интегрированием взаимной интенсивности  $J(x_1, x_2; \xi)$  по всем точкам источника:

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) &= \int_{\text{по источнику}} a(x_1, \xi) a^*(x_2, \xi) d\xi = \\ &= \sum_n \sum_m A_{nm} u_m(k\alpha x_1) u_n^*(k\alpha x_2), \end{aligned} \quad (5.11.6)$$

где

$$A_{nm} = \int_{\text{по источнику}} a\left(\frac{n\pi}{k\alpha}, \xi\right) a^*\left(\frac{m\pi}{k\alpha}, \xi\right) d\xi. \quad (5.11.7)$$

Коэффициенты  $A_{nm}$  полностью определяют характер освещения. Матрица  $A = A_{mn}$  называется матрицей освещения.

Если воспользоваться свойством ортогональности функций отсчетов  $u_n(k\alpha x)$ , то можно записать

$$a\left(\frac{n\pi}{k\alpha}\right) = \frac{k\alpha}{\pi} \int_{\text{по предмету}} a(x) u_n(k\alpha x) dx, \quad (5.11.8)$$

и тогда

$$A_{nm} = \left(\frac{k\alpha}{\pi}\right)^2 \iint J(x_1, x_2) u_m(k\alpha x_1) u_n^*(k\alpha x_2) dx_1 dx_2. \quad (5.11.9)$$

Тот факт, что функцию взаимной интенсивности  $J(x_1, x_2)$  можно выразить в виде ряда (5.11.6), является следствием того, что функция  $J(x_1, x_2)$  имеет ограниченный спектр по отношению к обоим переменным:  $x_1$  и  $x_2$ . Соотношения (5.11.6) и (5.11.9) выражают связь между взаимной интенсивностью  $J(x_1, x_2)$  и элементами матрицы освещения  $A_{nm}$ . А именно, функция взаимной интенсивности и матрица освещения  $A_{nm}$  получаются одна из

другой путем суммирования (или интегрирования) по свободным параметрам, причем весовая функция равна произведению функций отсчетов.

Взаимная интенсивность  $J(x_1, x_2)$  и матрица освещения  $A_{nm}$  являются эрмитовскими:

$$J^*(x_1, x_2) = J(x_2, x_1) \quad (5.11.10)$$

и

$$A_{nm}^* = A_{mn}. \quad (5.11.11)$$

Как известно, именно к этому сводится необходимое и достаточное условие того, чтобы величины  $J$  и  $A$  отвечали физическим измеряемым величинам.

Согласно определению (5.11.7) матрица освещения и, в силу ортогональности функций отсчетов, элементы матрицы освещения связаны с взаимной интенсивностью соотношением

$$A_{nm} = J\left(\frac{m\pi}{k\alpha}, \frac{n\pi}{k\alpha}\right). \quad (5.11.12)$$

Таким образом, диагональные элементы матрицы освещения равны интенсивности света, упавшего в  $n$ -й интервал отсчета:

$$A_{nn} = J\left(\frac{n\pi}{k\alpha}, \frac{n\pi}{k\alpha}\right) = I_n, \quad (5.11.13)$$

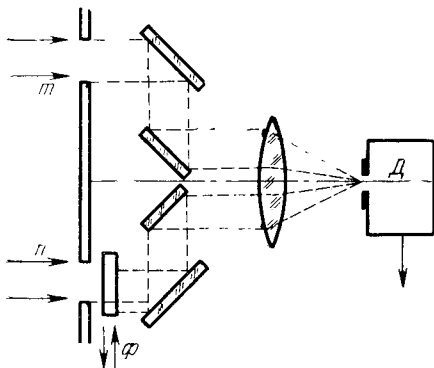


Рис. 5.17. Схема мысленного эксперимента по измерению элементов матрицы освещения.

а недиагональные элементы матрицы освещения равны взаимной интенсивности света

между амплитудами волны в  $m$ -м и  $n$ -м интервалах отсчета.

Из этого вывода следует метод прямого измерения элементов матрицы освещения. Схема такого мысленного эксперимента приведена на рис. 5.17. Измерения выполняются для всех возможных пар  $m$  и  $n$  интервалов отсчета. Для проведения такого опыта необходимо собрать свет, упавший в  $m$ -й и  $n$ -й интервалы отсчетов, в одну точку, не исказив при этом фазовых соотношений. С помощью интерферометра измерения проводятся в следующей последовательности. Сначала измеряется интенсивность света в  $n$ -м интервале отсчетов. Все остальные интервалы отсчетов закрываются маской. В этом опыте находится интенсивность



в  $n$ -м интервале отсчета

$$I_1 = J\left(\frac{n\pi}{k\alpha}, \frac{n\pi}{k\alpha}\right) = A_{nn}. \quad (5.11.14)$$

Затем  $n$ -й интервал отсчета закрывается и открывается  $m$ -й интервал отсчета. Измеряется интенсивность

$$I_2 = J\left(\frac{m\pi}{k\alpha}, \frac{m\pi}{k\alpha}\right) = A_{mm}. \quad (5.11.15)$$

В третьем опыте открыты оба интервала отсчета:  $n$ -й и  $m$ -й. Интенсивность света в интерферометре равна

$$I_3 = A_{nn} + A_{mm} + 2\operatorname{Re} A_{nm}. \quad (5.11.16)$$

В четвертом опыте в один из интервалов отсчета устанавливают плоскую пластинку, оптическая толщина которой равна  $\lambda/4$ , т. е. соответствует сдвигу фазы  $\pi/2$ . Интенсивность света, измеряемая в этом опыте, равна

$$I_4 = A_{nn} + A_{mm} + 2\operatorname{Im} A_{nm}. \quad (5.11.17)$$

Найденные в опыте четыре значения  $I_1, I_2, I_3, I_4$  позволяют определить взаимную интенсивность. Из постановки опыта следует, что

$$|A_{nm}|^2 \leq A_{nn}A_{mm}.$$

Пространственная когерентность  $\Gamma(x_1, x_2)$  равна нормированной взаимной интенсивности:

$$\Gamma(x_1, x_2) = \frac{J(x_1, x_2)}{\sqrt{I(x_1) \cdot I(x_2)}}. \quad (5.11.18)$$

Очевидно, что

$$0 \leq \Gamma \leq 1. \quad (5.11.19)$$

Результаты мысленных экспериментов, рассмотренных выше, показывают, что матрица освещения  $A$  содержит полную информацию о структуре поля, освещающего предмет, включая пространственную когерентность.

Полная интенсивность света, упавшего на предмет, равна

$$I_0 = \int J(x, x) dx = \frac{\pi}{k\alpha} \operatorname{Sp} A, \quad (5.11.20)$$

где  $\operatorname{Sp} A$  — след матрицы  $A$ . Далее находим

$$\iint |J(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \left(\frac{\pi}{k\alpha}\right)^2 \operatorname{Sp}(A^2) \quad (5.11.21)$$

и

$$\iint J(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \left(\frac{\pi}{k\alpha}\right)^2 \sum_n \sum_m A_{nm}. \quad (5.11.22)$$

Получаем зависимость между пространственной когерентностью  $\Gamma$  и свойствами матрицы освещения  $A$ . Как известно, любую матрицу можно диагонализировать с помощью унитарного преобразования  $U$ :

$$A = U\Lambda U^+, \quad (5.11.23)$$

где  $\Lambda = \lambda_n \delta_{nm}$  — диагональная матрица с элементами  $\lambda_n$ , которые определяются системой линейных уравнений

$$\sum_n A_{lm} U_{mn} = \lambda_n U_{ln}. \quad (5.11.24)$$

Взаимная интенсивность при таком преобразовании запишется в каноническом виде:

$$J(x_1, x_2) = \sum_n \lambda_n \psi_n(x_1) \psi_n^*(x_2), \quad (5.11.25)$$

где

$$\psi_n(x) = \sum_m U_{mn}^* u_n(k\alpha x) \quad (5.11.26)$$

— новое представление функций отсчета  $u_n(k\alpha x)$ . При этом обратное преобразование имеет вид

$$u_n(k\alpha x) \equiv \Phi_n(x) = \sum_m U_{nm} \psi_m(x), \quad (5.11.27)$$

откуда

$$U_{nm} = \int \Phi_n(x) \psi_m(x) dx. \quad (5.11.28)$$

Свойство унитарности матрицы  $U$ :

$$\sum_l U_{ml} U_{nl}^* = \delta_{mn}, \quad (5.11.29)$$

следует из ортогональности функций  $\Phi_n(x)$  и  $\psi_n(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} \int \Phi_n(x) \Phi_m^*(x) dx &= \frac{\pi}{k\alpha} \delta_{nm}, \\ \int \psi_n(x) \psi_m^*(x) dx &= \frac{\pi}{k\alpha} \delta_{nm}. \end{aligned} \right\} \quad (5.11.30)$$

Вьясним физический смысл собственных значений  $\lambda_n$  матрицы  $\Lambda$ , а также собственных функций  $\psi_n(x)$  и элементов унитарной матрицы  $U$ .

Рассмотрим сначала простейший случай, когда диагональная матрица  $\Lambda$  имеет только одно собственное значение  $\lambda_0$ , отличное

от нуля, а все остальные — равны нулю. В этом случае взаимная интенсивность

$$J(x_1, x_2) = \lambda_0 \psi_0(x_1) \psi_0^*(x_2), \quad (5.11.31)$$

а интенсивность

$$I_0(x) = J(x, x) = \lambda_0 \psi_0(x) \psi_0^*(x). \quad (5.11.32)$$

Сравнивая выражения (5.11.31) и (5.11.32) с (5.11.4), находим

$$J(x_1, x_2) = a(x_1) a^*(x_2),$$

или

$$a(x) = \sqrt{\lambda_0} \cdot \psi_0(x). \quad (5.11.33)$$

Таким образом, комплексная амплитуда освещающего поля равна  $\psi_0(x) / \sqrt{\lambda_0}$ . Поскольку след матрицы инвариантен относительно унитарных преобразований:

$$\text{Sp} A = \text{Sp} \Lambda = \lambda_0, \quad (5.11.34)$$

то полная интенсивность (5.11.20) равна в этом случае

$$I_0 = \lambda_0 \frac{\pi}{k\alpha}, \quad (5.11.35)$$

а матрица освещения  $A$  факторизуется:

$$A_{nm} = a_n^* a_m^*. \quad (5.11.36)$$

Случай, когда матрица  $\Lambda$  имеет только одно собственное значение, соответствует пространственной когерентности  $\Gamma = 1$ . Действительно, в этом случае

$$J(x_1, x_2) = \lambda_0 \psi_0(x_1) \psi_0^*(x_2) \quad (5.11.37)$$

и

$$\Gamma(x_1, x_2) = \frac{J(x_1, x_2)}{\sqrt{J(x_1, x_1) J(x_2, x_2)}} = \frac{\lambda_0 \psi_0(x_1) \psi_0^*(x_2)}{\lambda_0 \psi_0(x_1) \psi_0^*(x_2)} = 1.$$

Возвращаясь к взаимной интенсивности (5.11.25) при диагональном представлении матрицы освещения, можно заключить, что если волна света, освещающего предмет, обладает частичной когерентностью, то ее можно представить в виде суммы определенного числа пространственно когерентных волн. Эти основные волны возбуждаются статистически независимыми дискретными источниками.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как влияет степень пространственной когерентности освещающей волны света на свойства матрицы освещения  $A$ .

Если поле пространственно когерентное, то

$$A^2 = A \text{ Sp } A. \quad (5.11.38)$$

Чтобы убедиться в этом, запишем (5.11.23) следующим образом:

$$A = A_{lm} = \sum_n \lambda_n U_{ln} U_{mn}^* = \sum_n \lambda_n P_{lm}^{(n)}, \quad (5.11.39)$$

где эрмитовская матрица

$$P^{(n)} = P_{lm}^{(n)} = U_{lm} U_{mn}^* \quad (5.11.40)$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$P^{(n)} P^{(m)} = \delta_{nm} P^{(n)}, \quad (5.11.41)$$

$$\text{Sp } P^{(n)} = 1. \quad (5.11.42)$$

Найдем  $A^2$ , используя свойства матрицы  $P^{(n)}$ :

$$A^2 = (A \cdot A)_{nm} = \sum_l A_{nl} A_{ml}^* = \sum_l \sum_k \lambda_k P_{nl}^{(k)} \sum_i \lambda_i P_{ml}^{(i)} = \sum_n \lambda_n^2 P^{(n)}. \quad (5.11.43)$$

Так как пространственно когерентное поле характеризуется только одним собственным значением  $\lambda_0$ , то из (5.11.39) и (5.11.43) следует (5.11.38).

Если взять след от обеих частей равенства (5.11.38), то получим для пространственно когерентного поля

$$\text{Sp } A^2 = (\text{Sp } A)^2. \quad (5.11.44)$$

Если освещение частично когерентное, то

$$\text{Sp } A^2 < (\text{Sp } A)^2 \quad (5.11.45)$$

и можно доказать, что пространственная когерентность равна

$$\Gamma = \frac{\text{Sp } A^2}{(\text{Sp } A)^2} \leq 1. \quad (5.11.46)$$

Таким образом, установлено соответствие между свойствами освещающего поля и его пространственной когерентностью и инвариантными свойствами матрицы освещения  $A$ .

При когерентном освещении ( $\Gamma = 1$ ) диагонализированная матрица освещения  $\Lambda$  содержит только один диагональный элемент.

При частично когерентном освещении ( $\Gamma < 1$ ) ни один из элементов матрицы  $\Lambda$  не обращается в общем случае в нуль, однако если  $\Gamma$  весьма близко к 1, то в матрице освещения преобладает один элемент, характеризующийся наибольшим собственным значением  $\lambda$ .

В заключение этого параграфа отметим, что понятие взаимной интенсивности можно ввести также в плоскости пространственных частот или фурье-образа. При этом взаимная интенсивность  $M(\omega_1, \omega_2)$  выражается через ту же матрицу освещения  $A_{nm}$ , а отсчеты берутся при разных пространственных частотах. Поскольку компоненты пространственных частот света, упавшего через конечную апертуру  $\alpha$ , ограничены интервалом

$$-\frac{k\alpha}{2\pi} < \omega < \frac{k\alpha}{2\pi},$$

то интегралы заменяются на ряд Фурье. Так, фурье-образ освещающего поля равен

$$F(\omega, \xi) = \sum_n v\left(\frac{n\pi}{k\alpha}, \xi\right) f_n\left(\frac{\pi\omega}{k\alpha}\right), \quad (5.11.47)$$

где

$$f_n\left(\frac{\pi\omega}{k\alpha}\right) = \frac{\pi}{k\alpha} \exp\left(-i2\pi \frac{n\pi\omega}{k\alpha}\right), \quad (5.11.48)$$

а  $v\left(\frac{n\pi}{k\alpha}, \xi\right)$  — амплитуда волны от точечного источника в точке  $\xi$ , отсчитанная в  $n$ -й точке плоскости пространственных частот.

Взаимная интенсивность  $M(\omega_1, \omega_2)$  равна

$$M(\omega_1, \omega_2) = \sum_n \sum_m A_{nm} f_m\left(\frac{\pi\omega_1}{k\alpha}\right) f_n^*\left(\frac{\pi\omega_2}{k\alpha}\right), \quad (5.11.49)$$

где коэффициенты  $A_{nm}$  равны элементам той же матрицы освещения  $A$ . Иначе их можно представить в виде

$$A_{nm} = \left(\frac{k\alpha}{\pi}\right)^2 \iint_{-\frac{k\alpha}{2\pi}}^{\frac{k\alpha}{2\pi}} M(\omega_1, \omega_2) f_m^*\left(\frac{\pi\omega_1}{k\alpha}\right) f_n\left(\frac{\pi\omega_2}{k\alpha}\right) d\omega_1 d\omega_2. \quad (5.11.50)$$

Матрица интенсивности инвариантна относительно преобразования от предметной плоскости к плоскости пространственных частот.

Следует также отметить, что если освещающее поле ограничено размерами  $(-l, l)$ , то взаимную интенсивность также можно представить матрицей освещения, используя при этом ряды Фурье.

### § 5-12. Матрица интенсивности

Что происходит с матрицей освещения после того, как волна света с амплитудой  $a(x)$ , которой соответствует матрица освещения  $A$ , пройдет сквозь полупрозрачный предмет в виде плоского транспаранта? Амплитудное пропускание транспаранта описывается комплексной функцией  $t(x)$ . Предмет-транспарант в общем случае ослабляет интенсивность света и создает неоднородные сдвиги фаз в световой волне. Предположим, что амплитуду волны непосредственно после транспаранта можно представить в виде

$$f(x) = t(x) a(x). \quad (5.12.1)$$

Такая форма записи возможна в случае, когда толщина транспаранта невелика и можно полностью пренебречь процессами дифракции и рассеяния внутри самого транспаранта.

Матрица интенсивности определяет свойства взаимной интенсивности волны после предмета. Определим коэффициенты отсчета по амплитуде. Предположим, что компоненты пространственных частот функций  $t(x)$  и  $a(x)$  ограничены одной и той же пространственной частотой  $\omega_{\text{макс}}$ . В этом предположении амплитуду волны  $f(x)$  можно представить в виде конечной суммы с помощью теоремы отсчета:

$$f(x) = \sum_n f\left(\frac{n\pi}{k\alpha}\right) u_n(k\alpha x) = \sum_n t\left(\frac{n\pi}{k\alpha}\right) a\left(\frac{n\pi}{k\alpha}\right) u_n(k\alpha x). \quad (5.12.2)$$

Интенсивность волны после прохождения через предмет равна

$$\begin{aligned} I(x) &= |f(x)|^2 = \\ &= \sum_n \sum_m t^*\left(\frac{m\pi}{k\alpha}\right) A_{mn} t\left(\frac{n\pi}{k\alpha}\right) u_n(k\alpha x) u_m^*(k\alpha x). \end{aligned} \quad (5.12.3)$$

Таким образом, матрица интенсивности  $F$ , описывающая распределение интенсивности света непосредственно после предмета, получается из матрицы освещения  $A$  путем преобразования ее с помощью матрицы пропускания  $T$ :

$$F = T^* A T. \quad (5.12.4)$$

При этом матрица пропускания  $T$  является диагональной матрицей:

$$T_{nm} = \delta_{nm} t\left(\frac{m\pi}{k\alpha}\right). \quad (5.12.5)$$

Это свойство матрицы пропускания  $T$  сохраняется до тех пор, пока толщина транспаранта мала. Если же его толщина велика, то необходимо учесть процессы рассеяния и дифракции света внутри транспаранта. Волну на выходе предмета уже нельзя получить простым умножением входной амплитуды на амплитудное пропускание  $t(x)$ , и необходимо вводить функцию пропускания  $K(x_1, x_2)$ , зависящую от двух координат. Тогда матрица пропускания перестанет быть диагональной и необходимо учесть недиагональные элементы. Такие сложные предметы здесь не рассматриваются.

Определим число независимых параметров, характеризующих матрицу интенсивности непосредственно за предметом. Пусть матрица освещения и матрица пропускания имеют ранг, равный  $N$ . Если освещение пространственно когерентно, то матрица освещения характеризуется только одним собственным значением  $\lambda_n$ , не равным нулю. Число независимых параметров в этом случае равно  $2N - 1$ . Действительно, каждая из  $N$  комплексных величин матрицы пропускания  $T$  содержит два параметра: модуль и фазу, но абсолютное значение фазы ненаблюдаемо, поэтому число параметров равно  $2N - 1$ .

В простейшем случае частично когерентного освещения, когда отличны от нуля только два собственных значения матрицы освещения, каждый независимый когерентный источник характеризуется  $2N - 1$  параметрами. Однако между этими величинами имеется одно соотношение ортогональности, которое сводится к двум уравнениям, так как ортогональность накладывается на комплексные величины. Поэтому число независимых параметров, характеризующих поле непосредственно за предметом, равно

$$2(2N - 1) - 2 = 4N - 4.$$

В общем случае частично когерентного освещения находим, что если матрица освещения имеет  $r$  собственных значений, отличных от нуля, то число независимых параметров, характеризующих поле, равно

$$r(2N - 1) - 2 \frac{r(r - 1)}{2} = 2Nr - r^2, \quad (5.12.6)$$

так как всего имеется  $r(r - 1)/2$  условий ортогональности.

Если освещение полностью некогерентно, то все  $N$  собственных значений матрицы интенсивности отличны от нуля и число независимых параметров, характеризующих матрицу интенсивности, равно  $N^2$ . Это свойство матрицы интенсивности позволяет объяснить *информационно-оптический парадокс Габора*.

### § 5-13. Матрица изображения и матрица детектора

Рассмотрим распределение интенсивности в плоскости изображения. Оптическая система (рис. 5.18) преобразует предмет  $\Pi$ , расположенный в плоскости  $x$  и освещаемый источником  $S$ , находящимся в плоскости  $\xi$ , в изображение  $\Pi'$  на плоскости  $x'$ .

Освещение предмета  $\Pi$  характеризуется матрицей освещения  $A$ . Предмет в виде тонкого транспаранта описывается матрицей

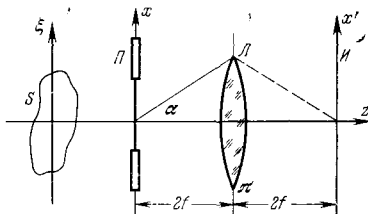


Рис. 5.18. Когерентная оптическая изображающая система с использованием протяженного источника  $S$  и тонкого транспаранта  $\Pi$ .

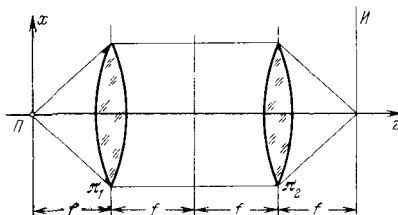


Рис. 5.19. Рисунок, иллюстрирующий применение принципа двойной дифракции к изображающей оптической системе.

пропускания  $T$ . По предположению в линзовой системе отсутствуют aberrации и не происходит поглощения света.

Процесс образования изображения можно рассматривать как последовательность двух процессов дифракции Фраунгофера. Это показано на эквивалентной оптической схеме (рис. 5.19).

Амплитуда волны в задней фокальной плоскости линзы равна фурье-образу амплитуды в плоскости предмета, а амплитуда волны в плоскости изображения в свою очередь является фурье-образом амплитуды волны света в задней фокальной плоскости первой линзы. Единственное ограничение на пространственные частоты волны задается апертурой  $\alpha$ . Поэтому, если линзовая система свободна от каких-либо aberrаций или расфокусировки, то передаточную функцию такой оптической системы можно считать равной 1 в пределах апертуры и нулю — вне апертуры. При освещении предмета частично когерентным светом распределение интенсивности в плоскости изображения определяется в эрмитовой форме с помощью функций отсчетов:

$$I(x) = \sum_n \sum_m C_{mn} u_n(k\alpha x) u_m(k\alpha x), \quad (5.13.1)$$

где  $C_{mn}$  — матрица изображения, которая получается из матрицы интенсивности  $F_{mn}$  с помощью некоторой матрицы преобразования  $\Omega$ :

$$C = \Omega * F \Omega. \quad (5.13.2)$$



Элементы матрицы преобразования  $\Omega$  получаются из рассмотрения соотношений между коэффициентами отсчетов в плоскости предмета и коэффициентами отсчетов в плоскости изображения. По определению имеем

$$f_n = \sum_m f_m \Omega_{mn}, \tag{5.13.3}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{mn} &= \frac{k\alpha}{\pi} \iint u_m(k\alpha x) u(x' - x) u_n(k\alpha x') dx' dx = \\ &= \frac{\pi}{k\alpha} u\left(\pi \frac{n-m}{k\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha} \int U(x) \exp i\pi \frac{(n-m)x}{\alpha} dx. \end{aligned} \tag{5.13.4}$$

Из теории матриц известно, что произвольную эрмитовскую матрицу можно представить в виде произведения диагональной и унитарной матриц:

$$\Omega = T \cdot \Pi = \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \dots \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \Pi_{NN} \end{pmatrix}. \tag{5.13.5}$$

Диагональная матрица описывает процесс поглощения. Унитарная матрица описывает сдвиги фаз. По условию линзы не поглощают и не отражают волны света, и поэтому  $T$  — единичная матрица. Сдвиги фаз описываются абберационной функцией  $V(x)$ , которая следующим соотношением связана с матрицей  $\Pi$ :

$$\left. \begin{aligned} \Pi(x) &= \exp ikV(x), \\ \Pi_{nm} &= \exp ikV_{nm}. \end{aligned} \right\} \tag{5.13.6}$$

или

Используя тот факт, что матрица преобразования  $\Omega$  является унитарной в отсутствие поглощения или отражения в линзах, можно показать, что собственные значения матрицы интенсивности в плоскости предмета не могут измениться при прохождении через непоглощающий и неотражающий зрачок, т. е. в результате унитарного преобразования. Полная интенсивность также останется без изменения. Отсюда можно сделать вывод о том, что матрица изображения  $S$  в оговоренных нами условиях равна матрице интенсивности  $F$ .

Информацию о предмете  $t(x)$  в виде матрицы  $T_{nm}$  можно получить при проведении следующих опытов. Сначала измеряется матрица освещения  $A_{nm}$ . Затем — матрица интенсивности  $F_{nm}$

в плоскости изображения. Поскольку

$$F_{nm} = t^* \left( \frac{m\pi}{k\alpha} \right) A_{nm} t \left( \frac{n\pi}{k\alpha} \right), \quad (5.13.7)$$

то разность фаз между  $m$ -м и  $n$ -м интервалами отсчетов равна разности между фазой  $A_{nm}$ , описывающей освещающую волну, и фазой  $F_{nm}$  волны непосредственно после предмета. Абсолютные значения коэффициентов пропускания связаны соотношением

$$|t_m| \cdot |t_n| = \frac{|F_{nm}|}{|A_{nm}|}. \quad (5.13.8)$$

Решая систему алгебраических уравнений, находим полную информацию о транспаранте — его амплитудно-фазовую характеристику. Особый случай возникает при полностью некогерентном освещении, когда коэффициент пространственной когерентности  $\Gamma = 0$ . Фазовую информацию здесь определить невозможно.

Точность измерений элементов матрицы пропускания  $T_{nm}$  ограничена как шумами, так и некоторыми свойствами детектора. Отметим одно из них: невозможность осуществить точечный детектор интенсивности. Степень рассеяния света в детектирующей среде определяется собственными значениями детектирующей матрицы

$$D_{nm}(x) = u_n(k\alpha x) u_m(k\alpha x), \quad (5.13.9)$$

а именно отношением

$$\gamma = \frac{\sum_n \lambda_n^2}{\left( \sum_n \lambda_n \right)^2}. \quad (5.13.10)$$

Результаты рассмотрения одномерного случая можно непосредственно обобщить на двухмерный.

Если зрачок имеет вид прямоугольника со сторонами  $2A_x$  и  $2A_y$  (рис. 5.20), то амплитуду волны можно разложить в двойной ряд Фурье:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_n \sum_m \alpha_{n,m} \exp \left[ -i\pi \left( \frac{nx}{A_x} + \frac{my}{A_y} \right) \right], \quad (5.13.11)$$

где

$$\alpha_{n,m} = \frac{1}{4A_x A_y} \iint f(x, y) \exp \left[ i\pi \left( \frac{nx}{A_x} + \frac{my}{A_y} \right) \right] dx dy. \quad (5.13.12)$$

Фурье-образ функции  $f(x)$  равен

$$F(\xi) = \sum_n \sum_m f\left(\frac{n}{2A_x}, \frac{m}{2A_y}\right) u_n(2\pi A_x \xi) u_m(2\pi A_y \xi), \quad (5.13.13)$$

где  $u_n$  — функция отсчетов. Так записывается теорема отсчетов для двумерной области. Коэффициенты Фурье  $\alpha_{n,m}$  связаны

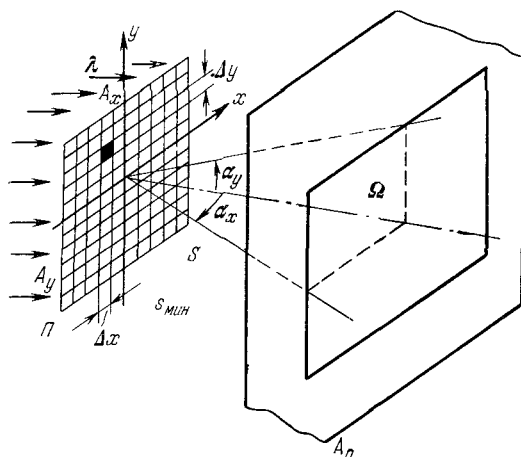


Рис. 5.26. Двухмерный предмет и двухмерный зрачок. Размер минимальной разрешающей площадки предмета  $\Pi$  определяется телесным углом  $\Omega$ , под которым зрачок виден из предметной плоскости.

с коэффициентами отсчетов  $f(n/2A_x, m/2A_y)$  в плоскости дифракции Фраунгофера соотношением

$$\alpha_{n,m} = \frac{1}{4A_x A_y} f\left(\frac{n}{2A_x}, \frac{m}{2A_y}\right). \quad (5.13.14)$$

Площадка отсчета, т. е. минимальный разрешающий элемент предмета  $\Pi$ , равна

$$s_{\text{мин}} = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{\lambda}{2\alpha_x} \frac{\lambda}{2\alpha_y} = \frac{\lambda^2}{\Omega}, \quad (5.13.15)$$

где  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  — углы, стягиваемые параллельными границами зрачка, а  $\Omega = 4\alpha_x \alpha_y$  — телесный угол, под которым виден зрачок. Полное число отсчетов в этом случае равно

$$N = N_x N_y = \left(1 + \frac{2A_x}{\lambda/2\alpha_x}\right) \left(1 + \frac{2A_y}{\lambda/2\alpha_y}\right) \approx \frac{S\Omega}{\lambda^2} \quad (5.13.16)$$

или, если  $N$  велико,

$$N \approx \frac{2A_x}{\lambda/2\alpha_x} \frac{2A_y}{\lambda/2\alpha_y} = \frac{S\Omega}{\lambda^2}, \quad (5.13.16a)$$

где  $S = 4A_x A_y$  — площадь предмета. Элементы матрицы  $F_{nm}$  можно пронумеровать вдоль рядов. Так же как и в одномерном случае, диагонализированная матрица освещения  $A_{nm}$  при пространственно когерентном освещении содержит только один диагональный элемент.

Коэффициенты отсчетов или коэффициенты Фурье для области, имеющей вид прямоугольника, являются независимыми. Однако положение меняется, если перейти к произвольной области: коэффициенты разложения станут взаимно зависимыми. Для того чтобы получить независимые коэффициенты разложения, необходимо использовать каждый раз специальную систему функций разложения, определяемую формой области.

Рассмотрим случай круговой апертуры, часто встречающейся на практике.

Если фурье-образ  $F(r, \theta)$  отличен от нуля только в круге радиуса  $r_0$  на плоскости координат Фурье, то  $F$  можно разложить в ряд

$$F(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} F_{ns} e^{in\theta} J_n \left( \frac{\lambda_{ns} r}{r_0} \right), \quad (5.13.17)$$

где  $\lambda_{ns}$  —  $s$ -нули функции Бесселя  $J_n(x)$  первого рода. Коэффициенты разложения Фурье — Бесселя  $F_{ns}$  равны

$$F_{ns} = \frac{2}{[r_0 J'_n(\lambda_{ns})]^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} F(r, \theta) e^{-in\theta} J_n \left( \frac{\lambda_{ns} r}{r_0} \right) r dr d\theta. \quad (5.13.18)$$

Амплитуда волны  $f(\rho, \varphi)$  следующим образом выражается через фурье-образ  $F(r, \theta)$ :

$$f(\rho, \varphi) = \sum_n \sum_m f_n \left( \frac{\lambda_{ns}}{kr_0} \right) e^{in\varphi} C_{ns}(kr_0\rho), \quad (5.13.19)$$

где

$$C_{ns}(kr_0\rho) = \frac{2\lambda_{ns}}{J'_n(\lambda_{ns})} \frac{J_n(kr_0\rho)}{(kr_0\rho)^2 - \lambda_{ns}^2}, \quad (5.13.20)$$

а коэффициенты отсчетов имеют вид

$$f_n \left( \frac{\lambda_{ns}}{kr_0} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \left( \frac{\lambda_{ns}}{kr_0}, \varphi \right) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (5.13.21)$$

Соотношения (5.13.19) и (5.13.21) выражают теорему отсчетов для круга.

Функции отсчетов на кольце (5.13.20) подчиняются следующему соотношению ортогональности:

$$\int_0^{\infty} C_{ns}(kr_0\rho) C_{nt}(kr_0\rho) \rho d\rho = \frac{2}{[kr_0 J_n(\lambda_{ns})]^2} \delta_{st}. \quad (5.13.22)$$

Функция  $C_{ns}(kr_0\rho)$  равна единице на соответствующем кольце отсчета и обращается в нуль на всех остальных кольцах отсчета. Имеется следующее соотношение между коэффициентами кругового отсчета  $f_n$  и коэффициентами Фурье — Бесселя  $F_{ns}$ :

$$F_{ns} = 2\pi \frac{2}{[kr_0 J_n(\lambda_{ns})]^2} f_n \left( \frac{\lambda_{ns}}{kr_0} \right). \quad (5.13.23)$$

Матрица освещения для двумерного кругового поля вводится следующим образом. Пусть  $\Psi_{m,s}(x, y)$  — функции разложения амплитуды волны в двумерной области. Поскольку взаимная интенсивность  $J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  между двумя точками  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ , где  $\mathbf{x}(x, y)$  — вектор точки  $\mathbf{x}$ , образуется путем усреднения произведения амплитуд по времени, то ее можно выразить через систему ортогональных функций по отношению к обоим переменным  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ . Для простоты предположим, что функции разложения нормированы. Тогда

$$J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{m,s} \sum_{n,t} A_{n,t;m,s} \Psi_{m,s}(\mathbf{x}_1) \Psi_{n,t}^*(\mathbf{x}_2), \quad (5.13.24)$$

а матрица освещения  $A$  определяется своими элементами

$$A_{n,t;m,s} = \iint J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi_{m,s}^*(\mathbf{x}_1) \Psi_{n,t}(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (5.13.25)$$

Взаимная интенсивность для однородного источника с круговой апертурой, которая видна под углом  $2\beta$ , равна

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sqrt{I_1 I_2} e^{i \frac{h\rho}{2}} \frac{2J_1(s\rho)}{s\rho}, \quad (5.13.26)$$

где  $s = kn \sin\beta$ ,  $n$  — показатель преломления среды, а  $\rho$  — расстояние между точками  $\mathbf{r}_1(r_1, \theta_1)$  и  $\mathbf{r}_2(r_2, \theta_2)$ :

$$\rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (5.13.27)$$

Элементы матрицы освещения равны

$$\begin{aligned}
 A_{n,t;m,s} &= \\
 &= \delta_{mn} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \frac{2J_1(s\sqrt{\lambda_{ms}^2 + \lambda_{nt}^2 - 2\lambda_{ms}\lambda_{nt}\cos(\theta_1 - \theta_2)})}{s\sqrt{\lambda_{ms}^2 + \lambda_{nt}^2 - 2\lambda_{ms}\lambda_{nt}\cos(\theta_1 - \theta_2)}} = \\
 &= 4\delta_{mn} \sum_{k=0}^{\infty} (1+m+2k) \frac{J_{l+m+2k}(s\lambda_{ms})}{s\lambda_{ms}} \frac{J_{l+m+2k}(s\lambda_{nt})}{s\lambda_{nt}}. \quad (5.13.28)
 \end{aligned}$$

Это разложение показывает, что матричный элемент  $A_{n,t;m,s}$  можно рассматривать как фактор корреляции между амплитудами волн на двух отсчетных кольцах с радиусами  $\lambda_{ms}$  и  $\lambda_{nt}$ , где  $\lambda_{ms}$  — нуль номера  $s$  функции Бесселя  $J_m(x)$ . За исключением  $m = n$ , матричный элемент равен нулю для кругового симметричного источника света. Другими словами, этот случай полностью аналогичен матрице освещения в одномерном случае. Если же источник не имеет круговой симметрии, то приходится рассматривать матричные элементы, имеющие разные  $n$  и  $m$ .

Мысленный эксперимент по определению недиагональных элементов  $A_{n,t;m,s}$  при  $n \neq m$ ,  $s \neq t$  можно выполнить по следующей схеме. Расщепим пучок света, падающий на плоскость предмета, на две части таким образом, чтобы в каждом пучке были одинаковые амплитуды. Используем фильтры с комплексными коэффициентами пропускания  $\Psi_{m,s}^*$  и  $\Psi_{n,t}^*$ , где  $\Psi_{m,s}$  и  $\Psi_{n,t}$  — функции разложения. Поместим эти фильтры в соответствующих плоскостях, где анализируется матрица освещения. При суперпозиции этих волн возникнет волна с интенсивностью

$$I = A_{m,s;m,s} + A_{n,t;n,t} + 2\operatorname{Re} A_{n,t;m,s}. \quad (5.13.29)$$

Диагональные элементы  $A_{m,s;m,s}$  и  $A_{n,t;n,t}$  можно измерить, если поочередно перекрывать одно из плеч интерферометра. Для того чтобы определить мнимую часть недиагональных элементов, необходимо в одно из плеч ввести прозрачную пластинку, оптическая толщина которой равна четверти длины волны. В таком опыте будет измерена интенсивность

$$I' = A_{m,s;m,s} + A_{n,t;n,t} + 2\operatorname{Im} A_{m,s;n,t}. \quad (5.13.30)$$

В случае кругового симметричного источника света мысленный эксперимент выполняется гораздо проще: устанавливаются две концентрические круговые щели, радиусы которых определяются положением нулей функции Бесселя.

Для того чтобы измерить матрицу освещения в аксиально-несимметричном поле, необходимо использовать фазовые фильтры

с коэффициентами пропускания  $e^{in\theta}$  и  $e^{im\theta}$ , которые размещаются на кольцах отсчета с радиусами  $\lambda_{nt}$  и  $\lambda_{ms}$  соответственно.

Анализ независимых физических измерений в оптике, произведенный на основе понятий теории информации, с неизбежностью приводит к дискретизации объема информации и матричной формулировке задачи и позволяет сделать следующие выводы:

— Полный опыт, т. е. исчерпывающее определение амплитудной и фазовой характеристик транспаранта, возможен только при пространственно когерентном освещении, когда образуется стационарная картина интерференции световых волн, идущих от двух интервалов отсчета.

— При некогерентном освещении фазовая характеристика транспаранта полностью ускользает от наблюдателя.

— Освещение, простейшее с точки зрения теории информации, должно обладать пространственной когерентностью ( $\Gamma = 1$ ).

— Число независимых параметров, исчерпывающе описывающих волну света в зрачке, равно  $N$  при когерентном освещении и  $N^2$  при некогерентном освещении, где  $N$  — полное число отсчетов в предмете:

$$N = N_x N_y = \left(1 + \frac{2A_x}{\lambda/2\alpha_x}\right) \left(1 + \frac{2A_y}{\lambda/2\alpha_y}\right).$$

— Интервал отсчета одномерного предмета определяется угловой апертурой  $\alpha$  и длиной волны света  $\lambda$  и равен  $\Delta x = \pi/k\alpha = \lambda/2\alpha$ . Для двухмерного предмета, имеющего вид прямоугольника, элемент отсчета, эквивалентный интервалу отсчета в одномерном случае, имеет площадь  $S = \lambda^2/\Omega$ , где  $\Omega = 4\alpha_x\alpha_y$ .

### § 5-14. Временные отсчеты

В предыдущем параграфе было установлено, что стационарное поле световой волны полностью определяется числом пространственных отсчетов  $N_{x,y}$ . При этом, если освещение пространственно когерентное, то число независимых параметров равно  $N_{x,y}$ , а при некогерентном освещении оно равно  $N^2$ .

Кроме стационарного квазимонохроматического поля, шириной спектра которого можно пренебречь, необходимо рассмотреть также поле, временные частоты которого имеют конечный интервал  $\Delta\nu$ . Такое поле можно представить  $N_{x,y}$ -функциями времени, где  $N_{x,y}$  — число пространственных отсчетов. При этом число временных степеней свободы равно

$$N_t = 2(1 + \Delta\nu \cdot T), \quad (5.14.1)$$

где  $\Delta\nu$  — ширина полосы временных частот, а  $T$  — время наблюдения. Для строго монохроматического освещения  $\Delta\nu = 0$  и  $N_t^0 = 2$ , т. е. поле определяется двумя величинами: амплитудой и

фазой. Если, далее, учесть два независимых и нигде не перекрывающихся состояния поляризации света, то при когерентном освещении полное число степеней свободы волнового поля равно

$$N_0 = 2N_{x,y} \cdot N_t, \quad (5.14.2)$$

где  $N_{x,y}$  — число пространственных степеней свободы:

$$N_{x,y} = \left(1 + \frac{2A_x}{\lambda/2\alpha_x}\right) \left(1 + \frac{2A_y}{\lambda/2\alpha_y}\right), \quad (5.14.3)$$

а  $N_t$  — число временных степеней свободы (5.14.1).

**Т е о р е м а 1.** *Фундаментальным инвариантом информационной емкости оптической системы является число  $N$  полных степеней свободы оптического поля — пространственных, временных и поляризационных. Никакими методами невозможно получить большую информацию, чем та, которая определяется полным числом информационных степеней свободы.*

**Т е о р е м а 2.** *В пределах полного числа информационных степеней свободы можно взаимно менять соотношения между пространственными, временными и поляризационными степенями свободы, сохраняя при этом полное число  $N_0$ .*

Как следствие теоремы 2 можно:

- увеличивать число пространственных степеней свободы и таким образом повышать пространственную разрешающую способность за счет уменьшения числа временных степеней свободы;
- увеличивать разрешающую способность по предмету при одновременном пропорциональном уменьшении поля предмета;
- получать пространственное разрешение, используя только временные степени свободы;
- увеличивать разрешение в направлении  $x$  при соответствующем пропорциональном ухудшении разрешения в направлении  $y$ ;
- повышать разрешение вдвое путем передачи информации только в одном состоянии поляризации.

Эти методы целенаправленного перераспределения информационных степеней свободы еще не получили широкого распространения, но имеют большое значение для когерентных оптических систем и голографических устройств.

Типичные методы перераспределения информационных степеней свободы рассматриваются в главе 7, посвященной оптическим методам обработки информации.



## ГОЛОГРАФИЯ

## § 6-1. Постановка задачи

Зрительное восприятие окружающих предметов можно разбить условно на несколько последовательно происходящих процессов. Сначала предмет освещается каким-либо источником света. Волна света, отразившись от предмета, уносит в окружающее пространство информацию о предмете. Зрачок глаза вырезает небольшую часть фронта волны, а собирающая линза-хрусталик создает изображение, которое благодаря фотохимическим процессам с помощью нервной системы вызывает в мозгу человека образ предмета. Распространение света от предмета к зрачку является автономным процессом, и это свойство выражается известным принципом Гюйгенса — Френеля, согласно которому волна, отразившись от предмета, больше не зависит от него и распространяется дальше в соответствии с законами дифракции. Любая система хранения или передачи изображения до возникновения голографии характеризовалась тем, что объектом наблюдения являлась не сама волна света, а изображение, получающееся из волнового поля с помощью линзы.

Запись информации о предмете без помощи линзы, составляющей обязательный элемент изображающей системы, до последнего времени практически была невозможна. Принципиальную схему любой оптической изображающей системы можно условно представить так:

*Предмет → Волновое поле, рассеянное предметом → Изображение.*

В голографии, в противоположность этому, изображение предмета, как правило, не образуется.

Непосредственным объектом регистрации и наблюдения в голографии является пространственная структура самой волны света, несущей информацию. Принципиальная схема голографии запишется так:

*I. Предмет → Волновое поле, рассеянное предметом → Голограмма.*

*II. Голограмма → Восстановленная волна света → Изображение в зрачке.*

На стадии I образуется голограмма. Зрительное восприятие предмета достигается на стадии II.

Как уже отмечалось выше, принцип голографии требует, чтобы освещение было когерентным. Более точно, используемая система освещения должна обеспечить возможность получения на фотослое устойчивой и контрастной системы интерференционных полос. В простейшем случае для этого необходимо, чтобы освещение обладало пространственной и временной когерентностью, а элементы установки за время экспозиции не смещались бы на величину, составляющую иногда доли длины волны света. При полной пространственной когерентности число информационных степеней свободы волнового поля предмета уменьшается настолько, что практически становится равным числу степеней свободы предмета или его изображения. Иными словами, объем информации в волновом поле, захватываемом зрачком, и объем информации в изображении, получаемом изображающей системой тех же размеров, являются равноценными. Такая информационная эквивалентность, достигаемая только в пространственно когерентной системе, составляет теоретико-информационное условие осуществления голографии.

Структура волны света трехмерного, двухмерного или плоско-го предмета совершенно одинакова, и поэтому с помощью голограммы можно запечатлеть трехмерные предметы и сцены на определенную глубину. Это утверждение почти всегда вызывает вопрос: как и почему двухмерная информация отображает трехмерную? Ответ можно найти в удивительных свойствах света и вообще любой электромагнитной волны, описываемой системой уравнений Максвелла. Для свободного пространства они запишутся так:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (6.1.1)$$

Чтобы решить эти уравнения, т. е. определить поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в каждой точке пространства, необходимо задать соответствующие граничные условия, которые записываются отдельно для нормальных составляющих полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на некоторой заданной поверхности с нормалью  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \varepsilon_0 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \sigma, \quad (6.1.2)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда, а также для тангенциальных составляющих:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad (6.1.3)$$

где  $\mathbf{K}$  — поверхностная плотность тока.

Систему уравнений Максвелла можно представить также в интегральной форме, и при этом граничные условия войдут в них

неявно:

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= - \frac{d}{dt} \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da, \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da + \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} da, \end{aligned} \right\} \quad (6.1.4)$$

где  $\mathbf{I}$  — вектор плотности тока.

Теоремы существования и единственности, справедливые для системы уравнений Максвелла относительно граничных условий, показывают, что одной паре двумерных функций, определяющих граничные условия на заданной поверхности, соответствует одно вполне определенное распределение полей в пространстве. Задача становится «абсолютно» точной, если граничной поверхностью является замкнутая поверхность, в частности поверхность или плоскость, простирающаяся до бесконечности. В реальных системах граничная поверхность вырезается либо зрачком глаза или оптического прибора, либо размерами голограммы. Для таких ограниченных апертур решение также оказывается однозначным, но в пределах принципа неопределенности, о котором подробно говорилось в главе 5.

С помощью голографии регистрируется как *амплитудная*, так и *фазовая информация*, переносимая волной света. Последнее достигается тем, что голограмма имеет структуру микроскопической интерферограммы. В обычной изображающей системе, содержащей собирающую линзу-объектив, фазовая информация не может быть зарегистрирована. Между тем фазовая информация в волне света соответствует расстояниям от точки предмета до фотоаппарата и поэтому неявно играет роль. Если удалить полностью фазовую информацию, например, установить перед фотообъективом матовое стекло, то на фотопластинке никакого изображения не получится. Фактически проблема регистрации фазовой информации, неразрешимая непосредственно в обычной фотографии, устраняется косвенно системой наводки на фокус. Изображение точки становится резким на негативе потому, что в этих условиях сферическая волна стянулась в точку. Но тогда и сама проблема регистрации фазы пропадает. Однако сделать это можно только для точек, расположенных в одной плоскости. Все остальные точки пространства не будут сфокусированы, и для них проблема регистрации фазы останется в рамках классической фотографии неразрешимой.

Для получения голограммы, информационное содержание которой эквивалентно объему информации, переносимой световым пучком, ограниченным размерами голограммы, необходимо, чтобы источник излучал конечное число узких спектральных линий

с достаточной монохроматичностью и разнесенных достаточно широко по спектру. Требование к степени монохроматичности каждой спектральной линии следует из теоремы отсчетов в оптике. Число интерференционных полос, получающихся неразмазанными по всей площади голограммы, должно быть больше числа отсчетов по предмету для оптимального случая, когда размеры голограммы и предмета одинаковы.

Поскольку число отсчетов вдоль оси  $x$  равно

$$N_x = \frac{4\alpha_x A_x}{\lambda}, \quad (6.1.5)$$

то

$$N_{\text{мин}} = N_x = \frac{4\alpha_x A_x}{\lambda}, \quad (6.1.6)$$

где  $2A_x$  — размер голограммы,  $\alpha_x$  — апертурный угол вдоль оси  $x$ ,  $N_{\text{мин}}$  — минимальное число интерференционных полос, которые должны получаться неразмазанными. Для того чтобы это требование было выполнено, крайние длины волн  $\lambda_{\text{мин}}$  и  $\lambda_{\text{макс}}$  в спектральной линии должны удовлетворять условию

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \gg N_{\text{мин}}, \quad (6.1.7)$$

где  $\Delta\lambda = \lambda_{\text{макс}} - \lambda_{\text{мин}}$ ,  $\lambda_0 = \frac{1}{2} (\lambda_{\text{макс}} + \lambda_{\text{мин}})$ . Из (6.1.6)

и (6.1.7) следует:

$$\Delta\lambda_{\text{доп}} = \frac{\lambda^2}{4\alpha_x A_x}, \quad (6.1.8)$$

или для разброса частот:

$$\Delta\nu_{\text{доп}} = \frac{c}{4\alpha_x A_x}. \quad (6.1.9)$$

Так, например, для предмета размером  $2A = 10$  см, апертуры  $\alpha \sim 10^{-1}$  и  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см находим максимально допустимую ширину линий:

$$\Delta\lambda_{\text{доп}} = \frac{0,25 \cdot 10^{-8}}{20 \cdot 10^{-1}} \simeq 0,12 \text{ \AA}$$

или

$$\Delta\nu_{\text{доп}} = \Delta\lambda \frac{c}{\lambda^2} = 0,12 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{0,25 \cdot 10^{-8}} = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ гц.}$$

§ 6-2. Основная схема голографии

Пусть волна света, рассеянная от какого-то предмета, описывается в плоскости зрачка оптической системы сигналом

$$u(x, y) = a(x, y) e^{i\Phi(x, y)}, \tag{6.2.1}$$

т. е. характеризуется распределением амплитуд

$$a(x, y) = |u(x, y)| \tag{6.2.2}$$

и распределением фаз  $\Phi(x, y)$ . Пусть рассматриваемая оптическая система является строго когерентной по всем параметрам. Пусть также поле световой волны — скалярная функция координат и времени, а в оптической системе не происходит вращения плоскости поляризации света.

Для того чтобы зарегистрировать на фотопластинке, помещенной в плоскости зрачка, амплитуду и фазу световой волны, необходимо создать модуляционную интерференционную картину, которая образуется путем добавления к исходной волне света опорного (или эталонного) пучка, взаимно когерентного с исходной волной. Рассмотрим опорный пучок в виде плоской волны, падающей на плоскость зрачка под углом  $\theta$  (рис. 6.1). Вдоль голограммы фаза меняется линейно с координатой  $x$ :

$$u_0 = a_0 e^{-i\omega_0 x}, \tag{6.2.3}$$

где  $\omega_0 = 2\pi\theta/\lambda$ . Таким образом, суммарная амплитуда в плоскости фотопластинки равна

$$u(x, y) = a_0 e^{-i\omega_0 x} + a(x, y) e^{i\Phi(x, y)}. \tag{6.2.4}$$

Фотопластинка, как квадратичный детектор, откликнется на интенсивность волны, равную

$$I(x, y) = a_0^2 + a^2(x, y) + a_0 a(x, y) [e^{i(\Phi + \omega_0 x)} + e^{-i(\Phi + \omega_0 x)}]. \tag{6.2.5}$$

Выражение (6.2.5) показывает, что благодаря введению опорного пучка возникает интерференционная картина, которая содержит

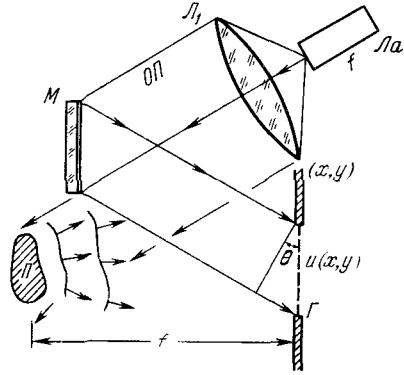


Рис. 6.1. Простейшая схема получения голограммы трехмерного предмета П с использованием наклонного плоского опорного пучка ОП, формируемого с помощью плоского зеркала М. Свет от лазера Ла через коллимирующую систему Л<sub>1</sub> направляется одновременно на зеркало М и предмет П. Голограмма Г регистрируется на фотопластинке, установленной на расстоянии f от предмета П. Опорный пучок падает на фотопластинку под углом  $\theta$ .

фазу  $\Phi(x, y)$ . Поэтому распределение интенсивности (6.2.5) содержит полную информацию — как об амплитуде, так и о фазе рассеянной волны, попавшей в зрачок.

Пусть фотографическая пластинка проэкспонирована и проявлена таким образом, что рабочий диапазон кривой почернения не выходит за пределы линейного участка характеристической кривой фотоэмульсии (рис. 6.2). Коэффициент контрастности  $\gamma$  характеризует соотношение между пропусканием по интенсивности  $T$  и количеством освещения  $I$ , упавшего на фотопластинку при экспонировании:

$$T = I^{-\gamma}. \quad (6.2.6)$$

Если  $\gamma > 0$ , то большей интенсивности при засветке соответствует более плотный негатив и меньшее пропускание  $T$ . Однако если фотоэмульсию проявить с обращением или отпечатать позитив, то  $\gamma < 0$ . Наиболее благоприятным оказывается коэффициент контрастности

$$\gamma_{\text{опт}} = -2. \quad (6.2.7)$$

Тогда

$$T = I^2.$$

Если пленка оптически однородна по толщине и при ее освещении свет не испытывает каких-либо фазовых искажений, то амплитудное пропускание голограммы

$$t(x, y) = \sqrt{T(x, y)} = [I(x, y)]^{-\gamma/2} \quad (6.2.8)$$

или (рис. 6.3)

$$t(x, y) = I(x, y) \quad (\gamma = -2). \quad (6.2.9)$$

Если голограмма образуется двумя опорными плоскими волнами равной интенсивности, то интерференционные полосы расположены по голограмме равномерно. Если волна света имеет только амплитудные неоднородности ( $a \neq 1$ ,  $\Phi = 0$ ), то меняется только интенсивность этих полос, а сами полосы остаются на исходном месте (рис. 6.4). Фазовая модуляция в пучке ( $\Phi \neq 0$ ,  $a = 1$ ) приводит к сдвигу интерференционных полос, что создает их сгущение или разрежение.

Голограмма реального предмета содержит как амплитудную, так и фазовую информацию предметной волны света.

Для того чтобы восстановить волну  $u(x, y)$ , голограмма, проявленная до коэффициента контрастности  $\gamma = -2$ , устанавли-

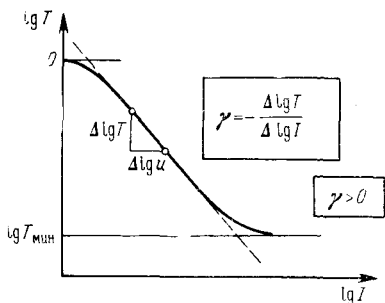


Рис. 6.2. Характеристическая кривая фотографической эмульсии, представленная в удобных для голографии координатах. По оси абсцисс отложен логарифм интенсивности, по оси ординат — логарифм пропускания по интенсивности (оптическая плотность).

вается обратно в зрачок и освещается таким же опорным пучком, что и на стадии получения голограммы. При этом не требуются ни линзы, ни спектральные фильтры. Благодаря процессу дифракции света на интерференционной голограмме происходит восстановление исходной волны света  $u(x, y)$ .

Непосредственно за голограммой появляется волна света (рис. 6.5)

$$u_{\text{вых}}(x, y) = e^{-i\omega_0 x} t(x, y) = e^{-i\omega_0 x} I(x, y) = e^{-i\omega_0 x} [a_0^2 + a^2(x, y)] + a_0 a(x, y) e^{i\Phi(x, y)} + e^{-i2\omega_0 x} a_0 a(x, y) e^{-i\Phi(x, y)}. \quad (6.2.10)$$

Три слагаемых выражения (6.2.10) соответствуют трем волнам, распространяющимся в разных направлениях. Первая составляющая волна сохраняет направление восстанавливающего пучка. Вторая волна распространяется перпендикулярно плоскости голограммы. Третья волна, как это можно видеть из соотношения  $\omega_0 = 2\pi\theta/\lambda$ , распространяется под углом  $(-2\theta)$ .

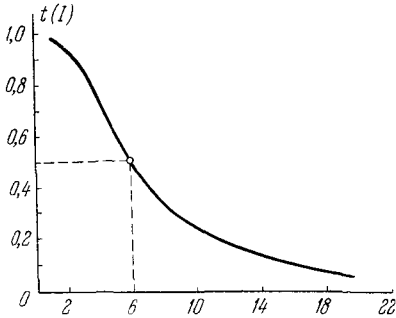


Рис. 6.3. Зависимость амплитудного пропускания фотографической эмульсии  $t(I)$  от количества освещения  $I$  локальной засветки.

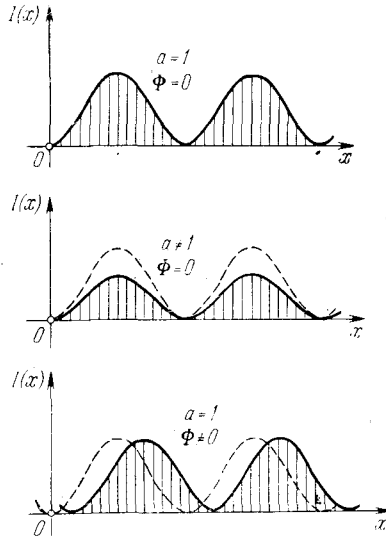


Рис. 6.4. Типичные случаи изменения формы и положения интерференционной картины.

Первая волна только ослабляет пучок света, делает его неоднородным ( $\sim a^2(x, y)$ ).

В направлении, перпендикулярном плоскости голограммы, распространяется исходная волна света с амплитудой  $u(x, y)$ , которая соответствует мнимому изображению.

В направлении  $(-2\theta)$  распространяется комплексно-сопряженная волна  $u^*(x, y)$ . Комплексно-сопряженная волна является точной копией исходной волны  $u(x, y)$ , но распространяется

в направлении, соответствующем обратному ходу лучей при обращении времени.

Таким образом, с помощью голографии регистрируется и восстанавливается волна света  $u(x, y)$ , падающая на зрочок, где

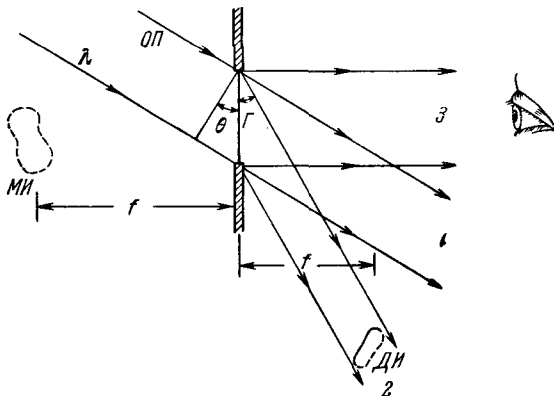


Рис. 6.5. Стадия восстановления изображений объемного предмета при освещении голограммы  $G$  тем же опорным пучком, что и на стадии получения. Мнимое изображение  $MI$ , расположенное на расстоянии  $f$  за голограммой, видно в направлении, нормальном к голограмме (пучок  $\mathcal{E}$ ). Действительное изображение  $DI$  образуется на расстоянии  $f$  перед голограммой теми вторичными лучами, которые образуют с нормалью к голограмме угол  $2\theta$  (пучок  $\mathcal{Z}$ ). Опорный пучок  $OP$  проходит сквозь голограмму  $G$  и не несет информации о предмете (пучок  $\mathcal{A}$ ).

размещена голограмма. При этом как регистрация, так и восстановление происходят полно, без потери фазовой информации, содержащейся в волне света  $u(x, y)$ .

### § 6-3. Процесс проявления фотоэмульсии

Фотоэмульсия, на которой регистрируют голограмму, должна быть проявлена до коэффициента контрастности, равного  $\gamma_{\text{опт}} = -2$ . Однако фактически при получении обычных голограмм, где не требуется строгая линейность по амплитуде, допустимы значительные отступления от такого оптимального режима проявления.

Рассмотрим количественно границы допустимых отклонений от оптимального режима. Пусть на голограмму падает волна света с интенсивностью

$$I(x, y) = |a_0 e^{-i\omega_0 x} + u(x, y)|^2 = a_0^2 + |u|^2 + a_0 u(x, y) e^{i\omega_0 x} + a_0 e^{-i\omega_0 x} u^*(x, y) = a_0^2 \left[ 1 + \left| \frac{u}{a_0} \right|^2 + \frac{u}{a_0} e^{+i\omega_0 x} + \frac{u^*}{a_0} e^{-i\omega_0 x} \right]. \quad (6.3.1)$$

Согласно (6.2.8)

$$t(x, y) = [I(x, y)]^{-\gamma/2}. \quad (6.3.2)$$



Подставив (6.3.1) в (6.3.2), получим

$$t(x, y) = a_0^{-\gamma} \left[ 1 + \left( \frac{u^2}{a_0^2} + \frac{u}{a_0} e^{i\omega_0 x} + \frac{u^*}{a_0} e^{-i\omega_0 x} \right) \right]^{-\gamma/2}. \quad (6.3.3)$$

Проанализируем первое приближение соотношения (6.3.3) при условии, что

$$\left| \frac{u}{a_0} \right| \ll 1, \quad (6.3.4)$$

т. е. амплитуда исходной волны света  $u(x, y)$  меньше амплитуды

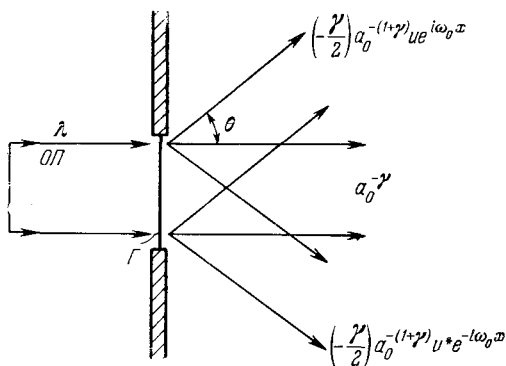


Рис. 6.6. Соотношения между интенсивностью и структурой пучка нулевого порядка и пучков первого порядка для произвольного режима проявления фотоэмульсии, когда интенсивность опорного пучка на стадии получения голограммы превышает интенсивность предметного пучка настолько, что можно ограничиться первым приближением.

опорного пучка. Тогда (рис. 6.6)

$$\begin{aligned} t^I(x, y) &= a_0^{-\gamma} \left[ 1 - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{u^2}{a_0^2} + \frac{u}{a_0} e^{i\omega_0 x} + \frac{u^*}{a_0} e^{-i\omega_0 x} \right) \right] = \\ &= a_0^{-\gamma} - a_0^{-\gamma} \frac{\gamma}{2} \left[ \frac{u^2}{a_0^2} + \frac{u}{a_0} e^{i\omega_0 x} + \frac{u^*}{a_0} e^{-i\omega_0 x} \right] = \\ &= \left[ a_0^{-\gamma} - \frac{\gamma}{2} u^2 a_0^{-(\gamma+2)} \right] - \frac{\gamma}{2} a_0^{-(\gamma+1)} (u e^{i\omega_0 x} + u^* e^{-i\omega_0 x}) = \\ &= a_0^{-\gamma} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2} \frac{u^2}{a_0^2} - \frac{\gamma}{2} a_0^{-1} [u e^{i\omega_0 x} + u^* e^{-i\omega_0 x}] \right\} \approx \\ &\approx a_0^{-\gamma} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2} a_0^{-1} [u e^{i\omega_0 x} + u^* e^{-i\omega_0 x}] \right\}. \quad (6.3.5) \end{aligned}$$

Если амплитуда регистрируемой исходной волны  $u(x, y)$  значительно меньше амплитуды опорной волны  $a_0$ , то, независимо от значения коэффициента контрастности, при восстановлении плоской волной  $1(x, y)$  возникнут боковые пучки  $e^{\pm i\omega_0 x}$ , промодулированные исходной волной  $u(x, y)$  и ее комплексно-сопряженной волной  $u^*(x, y)$ . При этом на структуре восстановленной волны света даже знак коэффициента контрастности  $\gamma$  не сказывается. Если изготовить отпечатки в виде негативных копий голограммы, то это также не скажется на структуре восстановленной волны: изменение знака фазы на  $180^\circ$ , которое при этом возникает, вообще нельзя обнаружить.

Вариации величины  $\gamma$  сказываются на величине интенсивности восстановленной волны. При этом отношение интенсивности нулевого  $I_0$  и бокового  $I_1$  пучков равно

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_0} &= \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 a_0^{-2(\gamma+1)}}{\left[a_0^{-\gamma} - \frac{\gamma}{2} u^2 a_0^{-(\gamma+2)}\right]^2} = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 a_0^{-2(\gamma+1)}}{a_0^{-2\gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{u^2}{a_0^2}\right]^2} \approx \\ &\approx \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \frac{a_0^{-2(\gamma+1)}}{a_0^{-2\gamma}} \approx \frac{\gamma^2}{4a_0^2}. \quad (6.3.6) \end{aligned}$$

Из (6.3.6) видно, что чем больше  $\gamma$  по абсолютной величине, тем больше интенсивность бокового пучка относительно нулевого.

Рассмотрим теперь, при том же условии (6.3.4), второе приближение. Воспользуемся формулой бинома

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2,$$

где

$$n = -\frac{\gamma}{2}, \quad n-1 = -\frac{\gamma+2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} t^{II}(x, y) &= a_0^{-\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{\gamma}{2}\right) \left(\frac{u^2}{a_0^2} + \frac{u}{a_0} e^{i\omega_0 x} + \frac{u^*}{a_0} e^{-i\omega_0 x}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma+2}{2} \left(\frac{u^2}{a_0^2} + \frac{u}{a_0} e^{i\omega_0 x} + \frac{u^*}{a_0} e^{-i\omega_0 x}\right)^2 \right\} = \\ &= a_0^{-\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{\gamma}{2}\right) \frac{u^2}{a_0^2} + \frac{\gamma(\gamma+2)}{8} \left(2 \frac{u^2}{a_0^2} + \frac{u^4}{a_0^4}\right) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (ue^{i\omega_0 x} + u^* e^{-i\omega_0 x}) \left[ -\left(\frac{\gamma}{2}\right) \frac{1}{a_0} + \frac{\gamma(\gamma+2)}{4} \frac{u^2}{a_0^3} \right] + \\
 &+ (uue^{i2\omega_0 x} + u^* u^* e^{-i2\omega_0 x}) \frac{\gamma(\gamma+2)}{8a_0^2}. \quad (6.3.7)
 \end{aligned}$$

В более удобном виде выражение (6.3.7) можно записать так

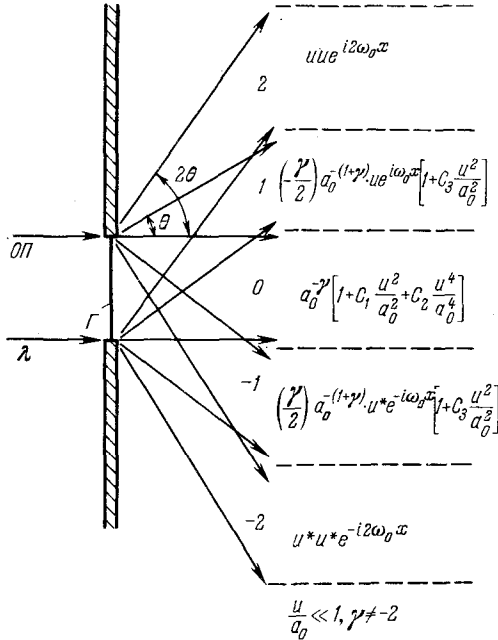


Рис. 6.7. Соотношения между интенсивностью и структурой пучка нулевого порядка и пучков первого и второго порядков дифракции. Режим проявления фотоэмульсии — произвольный. Интенсивность опорного пучка на стадии получения голограммы превышает интенсивность предметного пучка.

(рис. 6.7):

$$\begin{aligned}
 I^H(x, y) = &a_0^{-\gamma} + u^2 a_0^{-(\gamma+2)} \left[ \frac{\gamma(\gamma+2)}{4} - \frac{\gamma}{2} \right] + u^4 a_0^{-(\gamma+4)} \frac{\gamma(\gamma+2)}{8} + \\
 &+ (ue^{i\omega_0 x} + u^* e^{-i\omega_0 x}) \left[ \frac{\gamma(\gamma+2)}{4} u^2 a_0^{-(\gamma+3)} - \left(\frac{\gamma}{2}\right) a_0^{-(\gamma+1)} \right] + \\
 &+ (uue^{i2\omega_0 x} + u^* u^* e^{-i2\omega_0 x}) \frac{\gamma(\gamma+2)}{8} a_0^{-(\gamma+2)}. \quad (6.3.8)
 \end{aligned}$$

Из (6.3.8) видно, что если  $\gamma + 2 \neq 0$ , т. е. имеются отступления от оптимального режима проявления, то возникают волны, распространяющиеся в направлении  $\pm 2\theta_0$ , или высшие дифракционные порядки. Амплитуды этих обертоновых пучков определяются не самой амплитудой волны, а ее более высокими степенями.

Вместе с тем амплитуда боковых пучков первого порядка также зависит от квадрата амплитуды исходной волны  $u(x, y)$ . Наличие такой нелинейности приводит к искажению амплитуды волны, распространяющейся под углом  $\pm\theta_0$ .

Обе эти нелинейности не скажутся сильно, если амплитуду волны  $u(x, y)$  можно представить в виде

$$u(x, y) = 1 + b(x, y), \quad (6.3.9)$$

где  $|b| \leq 1$ , т. е. исходная волна  $u(x, y)$  представляет собой слабую модуляцию некоторого среднего уровня, принятого за единицу. В этом случае

$$u^2(x, y) \approx 1 + 2b(x, y), \quad (6.3.10)$$

а при сложении линейного и квадратичного членов изменится только контраст восстановленного изображения:

$$\begin{aligned} u + u^2 &\approx 1 + b + 1 + 2b = 2 + 3b = 3(1 + b) - 1 \approx \\ &\approx 3u - 1. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Оценим масштабы нелинейных искажений в общем случае. Отношение амплитуды сигнала  $S$  и помехи  $N$  в боковом пучке первого порядка дифракции ( $\pm\theta_0$ ) равно

$$\frac{S_I}{N_I} = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right) a_0^{-(\gamma+1)}}{\frac{\gamma(\gamma+2)}{4} u^2 a_0^{-(\gamma+3)}} = \frac{2a_0^2}{(\gamma+2)u^2}. \quad (6.3.12)$$

Из (6.3.12) видно, что если  $\gamma + 2 = 0$ , то отношение

$$\left(\frac{S_I}{N_I}\right)_{\gamma+2 \rightarrow 0} \rightarrow \infty,$$

т. е. при оптимальном режиме проявления помеха, обусловленная нелинейными эффектами по амплитуде исходной волны, полностью исчезает.

Если  $\gamma + 2 = \Delta\gamma \neq 0$ , т. е. проявление ведется с отступлением от оптимальной контрастности на величину  $\Delta\gamma$ , то

$$\frac{S_I}{N_I} = \frac{2a_0^2}{\Delta\gamma u^2}. \quad (6.3.13)$$

Если, например, взять  $\Delta\gamma \approx 0,1$ , а  $u/a_0 \sim 1/3$ , то

$$\frac{S_I}{N_I} \sim \frac{2 \cdot 9}{0,1} \sim 180.$$

Следовательно, в этом случае линейность по амплитуде в восстановленной волне сохраняется в пределах 0,5%.

Если сделать  $k$  последовательных экспонирований, необходимость которых возникает в опытах по синтезу изображений путем сложения или вычитания амплитуд волн  $u_k$ , то отношение амплитуды сигнала к амплитуде помехи равно

$$\frac{S_k^I}{N_k^I} = \frac{2ka_0^2}{(\gamma + 2) \sum_{m=1}^k |u_m|^2}. \quad (6.3.14)$$

Из (6.3.14) видно, что нелинейности складываются линейно по интенсивности. При этом суммарное почернение фотопластины после всех экспонирований не должно выходить за пределы участка характеристической кривой с постоянным наклоном ( $\gamma = \text{const}$ ).

Отступление от оптимального проявления приводит также к появлению волны второго и даже более высоких порядков дифракции. Отношение амплитуды волны второго порядка  $e^{\pm i2\omega_0 x}$  к амплитуде волны первого порядка  $e^{\pm i\omega_0 x}$  равно

$$\frac{a_{II}}{a_I} = \frac{\gamma(\gamma + 2)}{8} \frac{a_0^{-(\gamma+2)} u^2}{u \frac{\gamma}{2} a_0^{-(\gamma+1)}} = \frac{\gamma + 2}{4} \frac{u}{a_0}. \quad (6.3.15)$$

Из (6.3.15) видно, что если  $\gamma + 2 \ll 1$ , а  $u \ll a_0$ , то амплитуда волны второго порядка существенно меньше амплитуды волны первого порядка.

В случае  $\Delta\gamma \approx 0,1$ ,  $u \sim a_0/3$  для отношения амплитуд получаем

$$\frac{a_{II}}{a_I} \sim \frac{0,1}{4} \frac{1}{3} \sim \frac{1}{120}.$$

Отношение интенсивностей равно

$$\frac{I_{II}}{I_I} \sim 10^{-4}.$$

### § 6-4. Соотношение между предметом и волной света в зрачке

До сих пор исходная волна света  $u(x, y)$ , регистрируемая с помощью голограммы, рассматривалась как нечто заданное. Была рассмотрена только одна проблема: полно, по амплитуде и фазе, зарегистрировать эту волну и затем также полно ее восстановить. Эта проблема решается приведенной выше классической схемой голографии с использованием наклонного опорного пучка при оптимальном режиме проявления фотографической эмульсии.

Теперь разберем вопрос о том, каким образом исходная волна  $u(x, y)$  в плоскости голограммы связана со структурой и свойствами предмета, освещенного предметным пучком света. Для

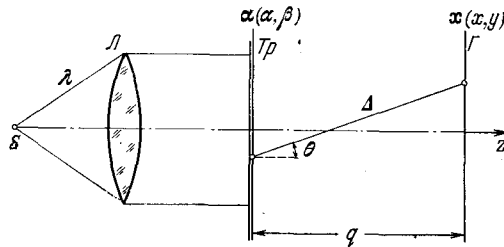


Рис. 6.8. Структура волны света в плоскости голограммы  $\Gamma$ , расположенной на расстоянии  $q$  за транспарантом  $Tr$ , который просвечивается плоской волной монохроматического света.

простоты рассуждений рассмотрим сначала предмет в виде транспаранта и лишь позднее перейдем к произвольному объемному предмету. Пусть транспарант просвечивается плоской волной. В этом случае схема оптической установки имеет вид, представленный на рис. 6.8. Точечный монохроматический источник  $S$  с помощью линзы  $L$  создает плоский пучок, который освещает транспарант, находящийся в плоскости  $\alpha(\alpha, \beta)$ . Амплитудное пропускание транспаранта равно  $t(\alpha)$ . Голограмма регистрируется в плоскости  $x(x, y)$ , которая отстоит от плоскости транспаранта на расстоянии  $q$ . В плоскости  $x$  волна света имеет амплитуду  $u(x)$ .

Для анализа воспользуемся приближением Кирхгофа—Френеля. При единичной освещенности транспаранта амплитуда волны света в плоскости голограммы равна

$$u(x) = \frac{1}{i\lambda q} \int t(\alpha) e^{ih\Delta} d\alpha \quad (d\alpha = d\alpha d\beta), \quad (6.4.1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $\Delta$  — расстояние между точкой  $\alpha(\alpha, \beta)$  на транспаранте и точкой  $x(x, y)$  на голограмме. При этом

$$\Delta^2 = q^2 + (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2. \quad (6.4.2)$$

Фактор наклона

$$\frac{1 + \cos \theta}{2} = 1 - \frac{\theta^2}{4} + \dots$$

принимается равным единице. Это эквивалентно предположению, что размеры транспаранта и голограммы малы по сравнению с расстоянием  $q$  между ними. В этих условиях можно воспользоваться приближением

$$\Delta \simeq q + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})^2}{2q} = q + \frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}{2q}, \quad (6.4.3)$$

которое обычно называется первым приближением. Ему соответствует амплитуда волны света в точке  $\mathbf{x}$  ( $x, y$ ), равная

$$u(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{i\lambda q} \int t(\boldsymbol{\alpha}) e^{i \frac{\pi}{\lambda q} [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})^2]} d\boldsymbol{\alpha}. \quad (6.4.4)$$

Здесь опущен постоянный фазовый множитель  $e^{ikq}$ .

Введем двухмерную функцию Френеля

$$z(\mathbf{x}) = 2\omega_0^2 e^{i\omega_0^2 \mathbf{x}^2}, \quad (6.4.5)$$

где

$$\mathbf{x}^2 = x^2 + y^2.$$

При этом

$$\omega_0^2 = \frac{\pi}{\lambda q}, \quad 2\omega_0^2 = \frac{2\pi}{\lambda q} = \frac{k}{q}. \quad (6.4.6)$$

Тогда выражение (6.4.4) можно записать в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i} t(\mathbf{x}) \otimes z(\mathbf{x}). \quad (6.4.7)$$

Таким образом, амплитуда волны света в плоскости голограммы равна свертке функции амплитудного пропускания предмета-транспаранта с функцией Френеля на плоскости. Это — наиболее общая форма дифракции Френеля.

Общее соотношение (6.4.7) можно представить в других формах. Каждая из них имеет определенный физический смысл и позволяет оценить условия, в которых осуществляются интересные частные случаи. Все это подробно рассматривается ниже.

Напомним, что функция Френеля (6.4.5) имеет фурье-образ

$$Z(\boldsymbol{\omega}) = 2\pi i \exp \left[ -i \frac{\boldsymbol{\omega}^2}{4\omega_0^2} \right], \quad (6.4.8)$$

где

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2. \quad (6.4.9)$$

Воспользуемся теоремой свертки. Тогда

$$t(\mathbf{x}) \otimes z(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int T(\omega) \cdot Z(\omega) e^{i\omega\mathbf{x}} d\omega, \quad (6.4.10)$$

где

$$T(\omega) = \int t(\mathbf{x}) e^{-i\omega\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (6.4.11)$$

— фурье-образ функции амплитудного пропускания  $t(\mathbf{x})$ . Обратное преобразование имеет вид

$$t(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int T(\omega) e^{i\omega\mathbf{x}} d\omega. \quad (6.4.12)$$

Развернув в явном виде операцию свертки  $t \otimes z$ , получим

$$t(\mathbf{x}) \otimes z(\mathbf{x}) = 2\omega_0^2 \int t(\alpha) e^{i\omega_0^2(\mathbf{x}-\alpha)^2} d\alpha, \quad (6.4.13)$$

где

$$(\mathbf{x} - \alpha)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

или

$$\begin{aligned} t(\mathbf{x}) \otimes z(\mathbf{x}) &= e^{i\omega_0^2 x^2} \int t(\alpha) 2\omega_0^2 e^{i\omega_0^2 \alpha^2} \cdot e^{-i2\omega_0^2 \alpha x} d\alpha = \\ &= e^{i\omega_0^2 x^2} \int t(\alpha) z(\alpha) e^{-i(2\omega_0^2 x)\alpha} d\alpha = e^{i\omega_0^2 x^2} [T(2\omega_0^2 \mathbf{x}) \otimes Z(2\omega_0^2 \mathbf{x})], \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

где

$$\mathbf{x}\alpha = x\alpha + y\beta.$$

На последнем этапе выкладок использовалась вторая теорема свертки.

Если учесть, что

$$e^{i\omega_0^2 x^2} = \frac{i}{2\pi} Z^*(2\omega_0^2 \mathbf{x}), \quad (6.4.15)$$

то окончательно получим

$$t(\mathbf{x}) \otimes z(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\pi} Z^*(2\omega_0^2 \mathbf{x}) [T(2\omega_0^2 \mathbf{x}) \otimes Z(2\omega_0^2 \mathbf{x})]. \quad (6.4.16)$$

Итак, существует четыре различных, но эквивалентных выражения, описывающих один и тот же процесс френелевской дифракции света, распространяющегося от плоскости транспаранта к плоскости голограммы.



**Первая форма:**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i} t(\mathbf{x}) \otimes z(\mathbf{x}). \quad (6.4.17)$$

Амплитуда волны света в плоскости голограммы равна свертке функции амплитудного пропускания предмета-транспаранта с функцией Френеля. Процесс дифракции описывается операцией свертки в координатном пространстве, которое иногда называется прямым пространством.

**Вторая форма:**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{i(2\pi)^2} \int T(\omega) Z(\omega) e^{i\omega\mathbf{x}} d\omega. \quad (6.4.18)$$

Амплитуда волны равна обратному фурье-образу произведения, составленного из фурье-образа транспаранта  $T(\omega)$  и фурье-образа функции Френеля  $Z(\omega)$ . Операция умножения осуществляется в частотном пространстве.

**Третья форма:**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} Z^*(2\omega_0^2\mathbf{x}) \int t(\alpha) z(\alpha) e^{-i(2\omega_0^2\mathbf{x})\alpha} d\alpha. \quad (6.4.19)$$

Амплитуда волны  $u(\mathbf{x})$  равна, с точностью до множителя  $Z^*(2\omega_0^2\mathbf{x})$ , фурье-образу произведения, составленного из функции амплитудного пропускания транспаранта и функции Френеля. Операция умножения осуществляется в координатном пространстве.

После преобразования Фурье частотное пространство переходит в координатное пространство, но с измененным масштабом и с измененной размерностью, а именно:

$$\omega = 2\omega_0^2\mathbf{x}. \quad (6.4.20)$$

**Четвертая форма:**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} Z^*(2\omega_0^2\mathbf{x}) [T(2\omega_0^2\mathbf{x}) \otimes Z(2\omega_0^2\mathbf{x})]. \quad (6.4.21)$$

Здесь амплитуда волны  $u(\mathbf{x})$  в плоскости голограммы, с точностью до множителя  $Z^*(2\omega_0^2\mathbf{x})$ , равна свертке фурье-образа функции амплитудного произведения транспаранта  $t(\alpha)$  и фурье-образа функции Френеля. Операция свертки осуществляется в приведенном координатном пространстве (6.4.20).

Вместе взятые, четыре различных по виду альтернативных выражения для  $u(\mathbf{x})$  — амплитуды волны света в плоскости голограммы — позволяют четко разделить несколько различных предельных случаев. Чтобы их проанализировать, введем три

характеристические длины: 1) размер предмета; 2) размер центральной зоны Френеля; 3) размер наиболее мелкой детали предмета. При этом размер центральной зоны Френеля  $l$  равен

$$l = \sqrt{\frac{\lambda q}{\pi \omega_0}} = \frac{1}{\omega_0}. \quad (6.4.22)$$

Действительно, если представить две сферы, радиусы которых отличаются на длину волны света  $\lambda$ , то

$$l^2 = (q + \lambda)^2 - q^2 = 2\lambda q + \lambda^2 \approx 2\lambda q \quad \text{и} \quad l \sim \sqrt{\lambda q}.$$

Размер наиболее мелкой детали предмета  $\delta$  определяется максимальной пространственной частотой  $\Omega_0$ , содержащейся в пространственной структуре предмета вдоль осей  $x$  или  $y$ . При этом

$$\delta = \frac{1}{\Omega_0}. \quad (6.4.23)$$

Рассмотрим следующие основные три случая.

I. Пусть размер предмета значительно меньше размера центральной зоны Френеля, т. е.

$$a \ll l. \quad (6.4.24)$$

Это — область дифракции далекого поля (дифракция Фраунгофера). В этой области  $a/l \ll 1$ , или  $a^2/l^2 \ll 1$ , или, наконец,

$$\omega_0^2 a^2 \ll 1. \quad (6.4.25)$$

Для анализа процесса дифракции в этой области рассмотрим альтернативное выражение (6.4.19). Поскольку размер предмета меньше размера первой зоны Френеля, то функцию Френеля  $z(\alpha)$  можно принять равной значению этой функции в нуле. Тогда при  $|\alpha| \approx 0$

$$z(\alpha) \approx 2\omega_0^2, \quad (6.4.26)$$

а

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4\pi^2} 2\omega_0^2 Z^*(2\omega_0^2 x) \int t(\alpha) e^{-i(2\omega_0^2 x)\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{\omega_0^2}{2\pi^2} Z^*(2\omega_0^2 x) \cdot T(2\omega_0^2 x), \end{aligned} \quad (6.4.27)$$

так как интеграл равен фурье-образу функции амплитудного пропускания транспаранта  $t(\alpha)$  в пространстве  $\omega$ .

Таким образом, в области дифракции далекого поля

$$u(x) = \frac{\omega_0^2}{2\pi^2} Z^*(2\omega_0^2 x) \cdot T(2\omega_0^2 x), \quad (6.4.28)$$

или, если учесть, что

$$Z^*(2\omega_0^2x) = -2\pi i e^{i\omega_0^2x^2}, \quad (6.4.29)$$

то

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} z(x) T(2\omega_0^2x). \quad (6.4.30)$$

В области дифракции далекого поля амплитуда волны, регистрируемой голограммой, равна фурье-образу функции амплитудного пропускания транспаранта  $t(x)$ , умноженному на функцию Френеля  $z(x)$  (см. (6.4.26)).

II. Пусть размер первой зоны Френеля значительно меньше размера наиболее мелкой детали предмета-транспаранта. Дифракционное размывание в этом случае настолько мало, что не обнаруживается даже по самой мелкой детали предмета. Видна только тень от транспаранта. Область

$$l \ll \delta \quad \text{или} \quad \omega_0 \gg \Omega_0 \quad (6.4.31)$$

называется областью геометрической тени. Для аналитического рассмотрения этой области обратимся к выражению (6.4.18). Поскольку  $\omega_0 \gg \Omega_0$ , то

$$\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} \ll 1. \quad (6.4.32)$$

Это означает, что пространственная частота предмета значительно меньше частоты  $\omega_0$ , характеризующей функцию Френеля. Тогда в выражении (6.4.18) множитель  $Z(\omega)$  можно вынести за знак интеграла в виде  $Z(\omega) \approx 2\pi i$ .

Окончательно получим

$$u(x) = \frac{2\pi i}{i(2\pi)^2} \int T(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int T(\omega) e^{i\omega x} d\omega = t(x). \quad (6.4.33)$$

Амплитуда волны в плоскости голограммы просто равна функции амплитудного пропускания предмета  $t(x)$ .

III. Общий случай дифракции Френеля характеризуется неравенством

$$\delta < l < a. \quad (6.4.34)$$

Размер первой зоны Френеля превышает наименьшую деталь предмета, но меньше размера самого предмета.

Рассмотрев три существенно различающиеся между собой основные области дифракции, можно подойти к вопросу о классификации голограмм. Естественно, напрашивается мысль подраз-

делять голограммы в соответствии с областями дифракции, в которых они регистрируются. Однако это можно делать только в частных случаях. В самой общей схеме голографической установки голограмму данного типа можно получить в более чем одной области дифракции. Кроме того, в одной и той же области дифракции можно получить голограммы различных типов. Поэтому выражения «голограмма дифракции Френеля» или «голограмма дифракции Фраунгофера» для классификации голограмм, строго говоря, принять нельзя.

Прежде чем рассмотреть подробно классы голограмм, разберем несколько примеров.

### § 6-5. Голограммы простейших предметов

**Голограмма плоского пучка.** Плоский предметный пучок падает перпендикулярно на фотопластинку (или голограмму). Опорный пучок образуется с помощью призмы *Pr*, отклоняющей часть плоской волны на угол  $\theta$ . Амплитуда волны света в плоскости голограммы в общем случае равна

$$u(x) = u_0 e^{-i\omega x} + u, \quad (6.5.1)$$

где  $u_0$  и  $u$  — действительные числа, а  $\omega = 2\pi\theta/\lambda$ . Амплитудное пропускание голограммы равно

$$t(x) = |u_0|^2 + |u|^2 + u_0 u (e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) = u_0^2 + u^2 + 2u_0 u \cos \omega x. \quad (6.5.2)$$

Поскольку всегда

$$|u_0 - u|^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad u_0^2 + u^2 \geq 2u_0 u,$$

то амплитудное пропускание

$$|t| \geq 0, \quad (6.5.3)$$

причем знак равенства отвечает случаю  $u_0 = u$ .

**Голограмма точечного предмета.** Рассмотрим теперь голограмму простейшего предмета — булавочного отверстия, полученную с помощью плоского опорного пучка. Булавочное отверстие создает расходящуюся сферическую волну

$$u e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)}, \quad (6.5.4)$$

где  $u$  — постоянное действительное число,  $f$  — расстояние от экрана  $\alpha$  до плоскости голограммы  $x$  (рис. 6.9). Амплитуда волны света в плоскости голограммы равна

$$u(x) = u_0 e^{-i\omega x} + u e^{i \frac{\pi}{\lambda f} x^2}, \quad (6.5.5)$$

где  $\omega = 2\pi\theta/\lambda$ ,  $\theta$  — угол падения опорной волны.

Амплитудное пропускание голограммы, проявленной до коэффициента контрастности  $\gamma = -2$ , равно

$$t(x) = (u_0^2 + u^2) + u_0 u e^{i \left[ \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) + \omega x \right]} + u_0 u e^{-i \left[ \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) + \omega x \right]}. \quad (6.5.6)$$

Простота полученного выражения позволяет достаточно наглядно объяснить процесс восстановления. На стадии восстановления голограмма освещается параллельным плоским пучком света (рис. 6.10). За голограммой появляются три пучка. Нулевая компонента — член  $(u_0^2 + u^2)$  в выражении (6.5.6) — представляет собой плоскую волну постоянной амплитуды, распространяющуюся в том же направлении, что и восстанавливающая плоская волна. Распространяясь, эта плоская волна испытывает очень слабую дифракцию, определяемую размером голограммы. Отклоненные боковые пучки — верхний и нижний — образуют мнимое и действительное изображения точки.

Дадим наглядный физический смысл сдвигов фаз, зависящих от координат квадратично, в компонентах

$$e^{i \left[ \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right] + \omega x} \quad \text{и} \quad e^{-i \left[ \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right] + \omega x}$$

выражения (6.5.6). Вспомним, что тонкая сферическая линза создает именно такие сдвиги фаз. Рассеивающая линза создает положительные сдвиги, а собирающая — отрицательные (рис. 6.11). Пучок, отклоненный вверх, испытывает действие не только фиктивной призмы ( $\sim e^{i\omega x}$ ) (рис. 6.12), но также и фиктивной рассеивающей линзы ( $\sim e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)}$ ). Фиктивная призма и фиктивная рассеивающая линза совместно отклоняют плоскую волну вверх и превращают ее при этом в расходящуюся сферическую волну (более точно — параболическую), фокус которой расположен на расстоянии  $f$  перед голограммой, т. е. на расстоянии, равном расстоянию между экраном и голограммой. Наблюдатель увидит мнимое изображение точки, расположенной за голограммой на расстоянии  $f$ . Пучок, отклоненный вниз, испытывает действие фиктивной призмы и фиктивной собирающей линзы. Сходящаяся сферическая волна образует действительное изображение болабочного отверстия на расстоянии  $f$  перед голограммой.

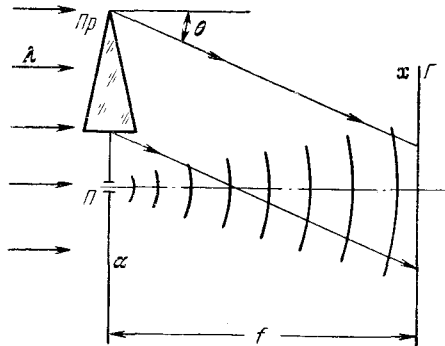


Рис. 6.9. Схема получения голограммы точечного предмета при использовании плоского опорного пучка.

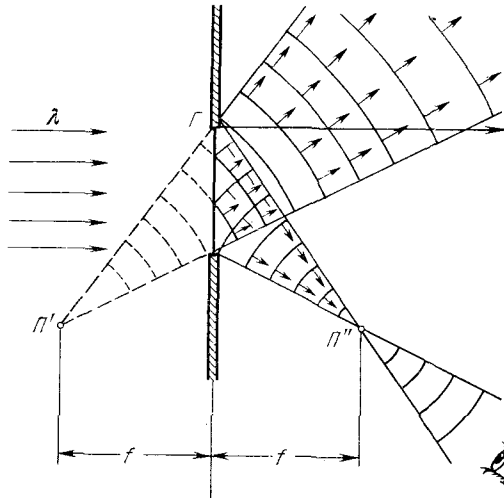


Рис. 6.10. Стадии восстановления изображения при освещении голограммы точечного предмета (рис. 6.9) плоским пучком.  $\Pi'$  — мнимое изображение;  $\Pi''$  — действительное изображение.

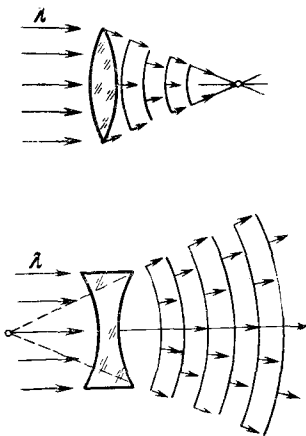


Рис. 6.11. Параболические сдвиги фаз, возникающие во фронте волны плоского пучка света после прохождения через собирающую и рассеивающую линзы. При малой кривизне параболический и сферический фронты волны можно считать взаимно эквивалентными.

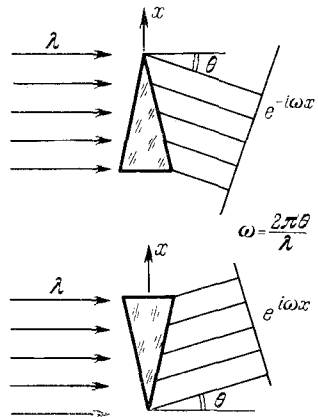


Рис. 6.12. Поворот плоского фронта волны с помощью призмы.

§ 6-6. Голографический микроскоп

Расходящиеся пучки в голографии позволяют получить линейное увеличение размеров восстановленного изображения по сравнению с размерами исходного предмета. Рассмотрим простейший вариант схемы голографического микроскопа, когда расходящийся

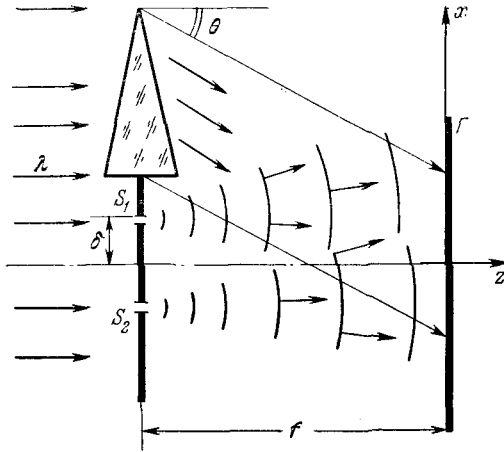


Рис. 6.13. Стадия получения голограммы двух близко расположенных щелей  $S_1$  и  $S_2$  при помощи плоского пучка длиной волны  $\lambda$ .

пучок используется только на стадии восстановления. Пусть предмет состоит из двух узких щелей в непрозрачном экране (рис. 6.13). Расстояние между щелями равно  $2\delta$ . Каждая щель создает свою расходящуюся цилиндрическую волну.

Амплитуда волны света в плоскости голограммы равна

$$u(x) = \underbrace{u_0 e^{-i\omega x}}_{\text{опорный пучок}} + u \left[ \underbrace{e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (x-\delta)^2}}_{\text{верхняя щель}} + \underbrace{e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (x+\delta)^2}}_{\text{нижняя щель}} \right]. \quad (6.6.1)$$

Амплитудное пропускание полученной голограммы равно

$$t(x) = u_0^2 + 4u^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda f} \delta \cdot x + u_0 u e^{i\omega x} \left[ e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (x-\delta)^2} + e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (x+\delta)^2} \right] + u_0 u e^{-i\omega x} \left[ e^{-i \frac{\pi}{\lambda f} (x-\delta)^2} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda f} (x+\delta)^2} \right]. \quad (6.6.2)$$

На стадии восстановления (рис. 6.14) голограмма освещается расходящейся волной от щелевого источника, расположенного перед голограммой на расстоянии  $r$ . Восстанавливающий источник

излучает свет длиной волны  $\lambda'$ , не равной длине волны  $\lambda$  источника, используемого на стадии получения голограммы.

Восстанавливающую волну можно записать в виде

$$v(x) = ae^{i \frac{\pi x^2}{\lambda' p}}. \quad (6.6.3)$$

Амплитуда волны света непосредственно за голограммой состоит

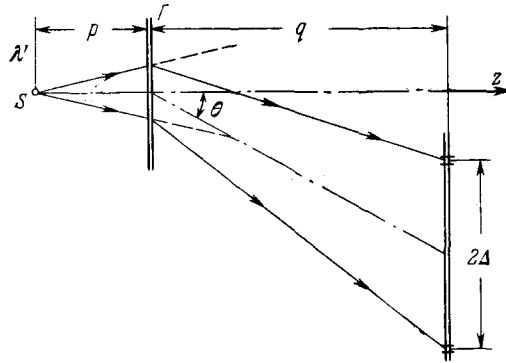


Рис. 6.14. Схема, поясняющая стадию восстановления. Голограмма  $G$ , полученная по схеме рис. 6.13, освещается светом другой длины волны  $\lambda'$ . Точечный источник света  $S$ , расположенный на расстоянии  $p$  перед голограммой, создает расходящийся пучок. На вполне определенном расстоянии  $q$  образуется увеличенное действительное изображение двух щелей.

из четырех слагаемых. Рассмотрим последнее из них:

$$\begin{aligned} u_4(x) &= u_0 u e^{-i\omega x} a e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda' p}} \left[ e^{-i \frac{\pi}{\lambda f} (x-\delta)^2} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda f} (x+\delta)^2} \right] = \\ &= u_0 u a e^{-i\omega x} \left\{ e^{-i\pi \left[ \frac{1}{\lambda f} (x-\delta)^2 - \frac{x^2}{\lambda' p} \right]} + e^{-i\pi \left[ \frac{1}{\lambda f} (x+\delta)^2 - \frac{x^2}{\lambda' p} \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

Преобразуем показатель степени выражения, соответствующего верхней щели:

$$\frac{(x-\delta)^2}{\lambda f} - \frac{x^2}{\lambda' p} = x^2 \left( \frac{1}{\lambda p} - \frac{1}{\lambda' p} \right) - \frac{2x\delta}{\lambda f} + \frac{\delta^2}{\lambda f}. \quad (6.6.5)$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{\lambda f} - \frac{1}{\lambda' p} = \frac{1}{\lambda' q}, \quad (6.6.6)$$

$$\Delta = \delta \frac{\lambda' q}{\lambda f}, \quad (6.6.7)$$



то

$$\frac{x^2 - 2x\Delta}{\lambda'q} + \frac{\delta^2}{\lambda f} + \frac{\Delta^2}{\lambda'q} - \frac{\Delta^2}{\lambda'q} = \frac{(x - \Delta)^2}{\lambda'q} + \frac{\delta^2}{\lambda'f} \left[ 1 - \frac{\lambda'q}{\lambda f} \right]. \quad (6.6.8)$$

Последнее выражение означает, что при освещении голограммы светом длиной волны  $\lambda' \neq \lambda$  (обычно  $\lambda' > \lambda$ ) действительное изображение образуется на расстоянии  $q$  от голограммы — перед голограммой с точки зрения наблюдателя. Расстояние между щелями, играющее роль размера детали предмета, увеличивается в  $M$  раз, где

$$M = \frac{2\Delta}{2\delta} = \frac{\lambda'q}{\lambda f}. \quad (6.6.9)$$

Выражение (6.6.6) иначе можно записать в виде

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{f}, \quad (6.6.10)$$

что соответствует формуле линзы с фокусным расстоянием

$$f' = \frac{\lambda}{\lambda'} f. \quad (6.6.11)$$

Отсюда получаем фундаментальное соотношение

$$\lambda' f' = \lambda f. \quad (6.6.12)$$

Произведение из длины волны света и фокусного расстояния линзы, эквивалентной голограмме, сохраняется при любых изменениях длины волны света.

На рис. 6.14 действительное изображение двух щелей образуется на расстоянии  $q$  за голограммой. Это расстояние не является произвольным и определяется исходными параметрами, характеризующими обе голографические стадии. А именно, если расстояния  $f$  и  $p$  выбраны, а также задано отношение  $\lambda'/\lambda$ , то расстояние  $q$  равно

$$q = \frac{1}{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right) \frac{1}{f} - \frac{1}{p}}, \quad (6.6.13)$$

что эквивалентно соотношению (6.6.10). Из рис. 6.14 видно, что коэффициент линейного увеличения такого простейшего микроскопа равен

$$M = \frac{2\Delta}{2\delta} = \frac{p+q}{p} = 1 + \frac{q}{p}. \quad (6.6.14)$$

Это выражение можно получить из подобия треугольников с общей вершиной в  $S$ . Фиктивная призма, осуществляющая поворот пучка света с изломом верхнего и нижнего луча, не нарушает этого подобия.

Так на примере двух узких щелей можно объяснить основные свойства голографического микроскопа.

### § 6-7. Соотношение между предметом и волной света в зрачке для произвольного освещения

Введем плоскость источника освещения  $\xi$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ), расположенную на расстоянии  $p$  перед предметом-транспарантом  $t(\alpha)$  (рис. 6.15).

В тех же приближениях, что и в случае параллельного освещения, получим выражение для амплитуды волны света в

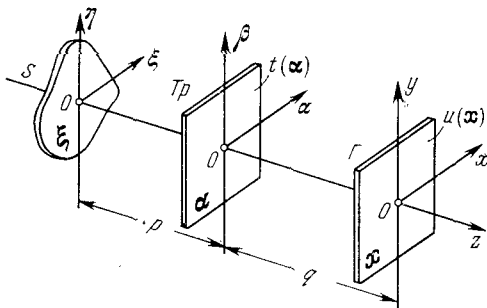


Рис. 6.15. Схема, иллюстрирующая взаимное расположение протяженного источника  $S$ , транспаранта  $Tp$  и голограммы  $G$ .

плоской голограмме при произвольном освещении. Согласно уравнению Кирхгофа — Френеля

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\lambda} e^{i\frac{2\pi(p+q)}{\lambda}} \int \frac{s(\xi)}{p} \int \frac{t(\alpha)}{q} e^{i\frac{\pi}{\lambda p}(\alpha-\xi)^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda q}(\alpha-x)^2} d\alpha d\xi. \quad (6.7.1)$$

Иначе (6.7.1) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\lambda pq} e^{i\psi_0} \{ [s(\mathbf{x}) \otimes e^{i\frac{\pi x^2}{\lambda p}}] \cdot t(\mathbf{x}) \otimes e^{i\frac{\pi x^2}{\lambda q}} \}, \quad (6.7.2)$$

где

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(p+q).$$

Выражение (6.7.2) означает, что амплитуда волны света в плос-

кости голограммы получается в результате трех последовательных операций:

1) свертки функции амплитудного распределения источника освещения  $s(\xi)$  с функцией Френеля, определяемой расстоянием  $p$  и длиной волны  $\lambda$ ;

2) умножения полученного результата на функцию амплитудного пропускания транспаранта  $t(\alpha)$ ;

3) опять свертки результата после двух операций с функцией Френеля, определяемой расстоянием  $q$  и длиной волны  $\lambda$ .

Наибольший интерес, естественно, представляет точечный источник освещения единичной амплитуды. В этом случае

$$s(\xi) = \delta(\xi - x_0), \quad (6.7.3)$$

где  $x_0$  — точка на плоскости голограммы, являющаяся проекцией точечного источника  $S$  на плоскость голограммы. Тогда

$$\begin{aligned} s(\mathbf{x}) \otimes e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda p}} &= \int s(\xi) e^{i \frac{\pi}{\lambda p} (\xi - \alpha)^2} d\xi = \\ &= \int \delta(\xi - x_0) e^{i \frac{\pi}{\lambda p} (\xi - \alpha)^2} d\xi = e^{i \frac{\pi}{\lambda p} (x_0 - \alpha)^2}. \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

Амплитуда волны света  $u(\mathbf{x})$  в плоскости голограммы при точечном освещении равна

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\psi_0}}{i\lambda pq} \left\{ \left[ e^{i \frac{\pi}{\lambda p} (x - x_0)^2} \cdot t(\mathbf{x}) \right] \otimes e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda q}} \right\}. \quad (6.7.5)$$

В частном случае, когда источник расположен на оси  $z$ ,

$$s(\xi) = \delta(\xi), \quad (6.7.6)$$

а амплитуда волны  $u(\mathbf{x})$  равна

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\psi_0}}{i\lambda pq} \left\{ \left[ e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda p}} \cdot t(\mathbf{x}) \right] \otimes e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda q}} \right\}. \quad (6.7.7)$$

В развернутом виде соотношение (6.7.5) можно записать так:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\psi_0}}{i\lambda pq} \int t(\alpha) e^{i \frac{\pi}{\lambda q} (\alpha - x)^2} \cdot e^{i \frac{\pi}{\lambda p} (\alpha - x_0)^2} d\alpha. \quad (6.7.8)$$

Преобразуем теперь показатель экспоненты:

$$\begin{aligned} i \frac{\pi}{\lambda q} \left\{ (\alpha - x)^2 + \frac{q}{p} (\alpha - \alpha_0)^2 \right\} &= \\ &= \frac{i\pi}{\lambda q} \left\{ \frac{p+q}{p} \left\{ \alpha - \frac{\left( x + \frac{q}{p} x_0 \right)}{\left( \frac{p+q}{p} \right)} \right\}^2 + \frac{q}{p+q} (x - x_0)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{x + \frac{q}{p} x_0}{\left(\frac{p+q}{p}\right)} = \frac{x + mx_0}{M}, \\ \frac{\pi(p+q)}{\lambda pq} &= \frac{\pi}{\lambda q} \frac{p+q}{p} = \omega_0^2 \frac{p+q}{p} = \omega_0^2 M = B^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.7.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{p}{q}, \\ M &= 1 + \frac{q}{p} = 1 + m, \\ B &= \omega_0 \sqrt{M}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.11)$$

Окончательно получим

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i(p+q)} e^{i \frac{2\pi(p+q)}{\lambda}} e^{i \frac{\pi(x-x_0)^2}{\lambda(p+q)}} \int t(\alpha) 2B^2 e^{iB^2(\alpha-q)^2} d\alpha, \quad (6.7.12)$$

или

$$u(x) = \varepsilon(x) [t(\rho) \otimes z_B(\rho)], \quad (6.7.13)$$

где

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i(p+q)} e^{i \frac{2\pi(p+q)}{\lambda}} e^{i \frac{\pi}{\lambda} \frac{(x-x_0)^2}{(p+q)}}, \quad (6.7.14)$$

$$z_B(\rho) = 2B^2 e^{iB^2 \rho^2}. \quad (6.7.15)$$

В частном случае  $\rho \rightarrow \infty$  (параллельное освещение), когда  $M \rightarrow 1$ ,  $B \rightarrow \omega_0$ ,  $x_0 = 0$ , формула (6.7.13) переходит в формулу, полученную выше для параллельного освещения.

В § 6-4 были выведены три области дифракции при параллельном освещении. Легко видеть, что все сказанное выше о различных областях дифракции при параллельном освещении полностью верно и для точечного источника освещения (расходящиеся лучи). Переход от случая  $p \rightarrow \infty$  к конечному  $p$  должен сопровождаться переходом:

$$\left. \begin{aligned} \text{от } \omega_0 &\quad \text{к } B = \omega_0 \sqrt{M}, \\ \text{от } M = 1 &\quad \text{к } M = 1 + \frac{q}{p}, \\ \text{от } x &\quad \text{к } \rho = \frac{x + mx_0}{M}, \\ \text{от } z(x) &\quad \text{к } z_B(\rho). \end{aligned} \right\} \quad (6.7.16)$$

Приведем обратное соотношение между амплитудой света  $u(\mathbf{x})$  и амплитудным пропусканием  $t(\mathbf{x})$ . Осуществив свертку левой и правой частей (6.7.13) с функцией  $z_B^*(\rho)$ , получим

$$u(\mathbf{x}) \otimes z_B^*(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}) t(\rho) \otimes z_B(\rho) \otimes z_B^*(\rho) = \\ = \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot t(\rho) \otimes \delta(\rho) = \varepsilon(\mathbf{x}) t(\mathbf{x}). \quad (6.7.17)$$

Отсюда

$$t(\rho) = \frac{u(\mathbf{x}) \otimes z_B^*(\rho)}{\varepsilon(\mathbf{x})}. \quad (6.7.18)$$

### § 6-8. Теория голографической установки наиболее общего вида

Рассмотрим голографическую установку в самом общем случае, когда расходящиеся пучки используются как на стадии получения голограммы, так и на стадии восстановления. А именно пусть первая стадия — получение голограммы — осуществляется по схеме, приведенной на рис. 6.16. Освещающий источник  $S_{\Pi}$  расположен на оси  $z$  на расстоянии  $p_1$  перед предметом  $\Pi$ . Опорный источник  $S_{\text{оп}}$  расположен в точке, проекция которой на плоскость  $x$  имеет координату  $x_c$ . Расстояние между опорным источником и плоскостью предмета равно  $p_c$ . Голограмма располагается в плоскости  $x$ , на расстоянии  $q_1$  за предметом.

На стадии восстановления увеличенного изображения источник  $S_B$  расположен на расстоянии  $p_2$  перед голограммой. Восстановленное изображение образуется в плоскости  $I$  на расстоянии  $q_2$  за голограммой.

Плоский предмет-транспарант  $t(\alpha)$  освещается монохроматическим светом длиной волны  $\lambda_1$ . Линейное геометрически-тенивое увеличение на первой стадии равно

$$M_1 = 1 + \frac{q_1}{p_1}. \quad (6.8.4)$$

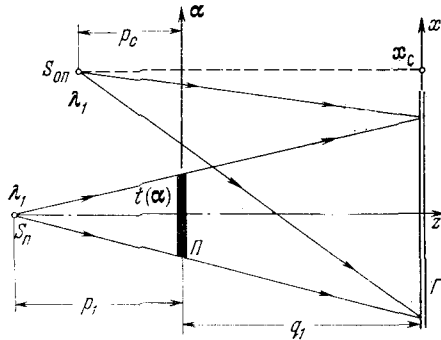


Рис. 6.16. Схема голографической установки наиболее общего вида. Стадия получения голограммы. Точечный источник опорного пучка расположен в точке  $S_{\text{оп}}$  с проекцией  $x_c$  на плоскость  $x$  и на расстоянии  $p_c$  перед плоскостью предмета. Точечный источник предметного пучка расположен в точке  $S_{\Pi}$  на оптической оси ( $x_{\Pi} = 0$ ) на расстоянии  $p_1$  перед предметом  $\Pi$ . Расстояние между предметом и голограммой равно  $q_1$ . Длина волны света  $\lambda_1$ .

Восстановление производится светом длиной волны  $\lambda_2$ . Восстанавливающий источник создает линейное геометрически-теневое увеличение

$$M_2 = 1 + \frac{q_2}{p_2}. \quad (6.8.2)$$

Воспользовавшись приближением Кирхгофа — Френеля, детально рассмотренным выше (§ 6-4), найдем выражение для амплитудного пропускания полученной голограммы.

В отсутствие предмета-транспаранта амплитуда волны света в плоскости голограммы равна

$$u_0(\mathbf{x}) = \varepsilon_c(\mathbf{x}) + \varepsilon_0(\mathbf{x}), \quad (6.8.3)$$

где функции

$$\varepsilon_c(\mathbf{x}) = A_c \exp \left[ i \frac{\pi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^2}{\lambda_1(p_c + q_1)} \right] \quad (6.8.4)$$

и

$$\varepsilon_0(\mathbf{x}) = A_0 e^{i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda_1(p_1 + q_1)}} \quad (6.8.5)$$

равны амплитудам двух расходящихся волн, образуемых источниками  $S_{оп}$  и  $S_{п}$  соответственно.

Если в предметный пучок  $S_{п}$  поместить транспарант  $t(\boldsymbol{\alpha})$ , то амплитуда волны света в плоскости голограммы будет равна

$$u(\mathbf{x}) = \varepsilon_c(\mathbf{x}) + \varepsilon_0(\mathbf{x}) \tau(\boldsymbol{\rho}), \quad (6.8.6)$$

где

$$\tau(\boldsymbol{\rho}) = t(\boldsymbol{\rho}) \otimes z_B(\boldsymbol{\rho}), \quad (6.8.7)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{x}}{M_1}, \quad B^2 = \omega_0^2 M_1, \quad \omega_0^2 = \frac{\pi}{\lambda_1 q_1}. \quad (6.8.8)$$

Если голограмму увеличить фотографически, то необходимо учесть также коэффициент фотографического увеличения  $L$ . Тогда

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{x}}{M_1 L}. \quad (6.8.9)$$

Однако в дальнейшем везде полагаем  $L = 1$ .

Амплитудное пропускание голограммы равно

$$t(\mathbf{x}) = |\varepsilon_c(\mathbf{x})|^2 + |\varepsilon_0(\mathbf{x})\tau(\boldsymbol{\rho})|^2 + t_v(\mathbf{x}) + t_R(\mathbf{x}), \quad (6.8.10)$$

где

$$t_v = t_R^* = C e^{i\Omega \mathbf{x}} \tau(\boldsymbol{\rho}) e^{-i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda_1 \bar{r}_1}}, \quad (6.8.11)$$

$$\Omega = \frac{2\pi \mathbf{x}_c}{\lambda_1(p_c + q_1)}, \quad (6.8.12)$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_c + q_1} - \frac{1}{p_1 + q_1}, \quad (6.8.13)$$

$$C = A_0 A_C^* \exp \left[ -i \frac{\pi x_c^2}{\lambda_1 (p_c + q_1)} \right]. \quad (6.8.14)$$

Воспользовавшись инвариантностью произведения  $\lambda f$ , можно ввести фокусное расстояние фиктивной линзы  $f_2$ , соответствующее стадии восстановления в лучах света с длиной волны  $\lambda_2$ . А именно, если

$$\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2, \quad (6.8.15)$$

то

$$\frac{1}{f_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[ \frac{1}{p_c + q_1} - \frac{1}{p_1 + q_1} \right]. \quad (6.8.16)$$

Вместо функции (6.8.7) удобно ввести функцию

$$\psi(\mathbf{x}) = \tau(\rho) e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}} = \tau \left( \frac{\mathbf{x}}{M_1} \right) e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}}, \quad (6.8.17)$$

которая называется сферическим френелевским образом амплитудного пропускания транспаранта  $t(\alpha)$  или, проще, сферическим френелевским образом предмета.

Введем величину  $f_r$ , которая определяет фокусное расстояние фиктивной линзы на стадии восстановления по схеме Габора:

$$\frac{1}{f_r} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}. \quad (6.8.18)$$

Рассмотрим голографическую установку Габора, когда предметный и опорный пучки являются совмещенными, т. е. образуются одним и тем же точечным источником. Такая схема называется схемой с неразделенными предметным и опорным пучками и характеризуется тем, что

$$p_1 = p_c, \quad x_c = 0. \quad (6.8.19)$$

Для такой системы  $\Omega = 0$  и, кроме того,

$$\frac{1}{f_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[ \frac{1}{p_c + q_1} - \frac{1}{p_1 + q_1} \right] \xrightarrow{p_1 \rightarrow p_c} 0, \quad \frac{1}{f_1} \xrightarrow{p_1 \rightarrow p_c} 0. \quad (6.8.20)$$

Обращение в нуль величин  $1/f_1$  и  $1/f_2$  при  $p_1 = p_c$  означает, что первая ступень эквивалентна параллельному освещению на стадии получения голограммы (этот случай был рассмотрен на примере предмета, состоящего из двух щелей). Таким образом,

в голографической системе Габора первая стадия не создает в голограмме никакой фиктивной фокусирующей линзы.

Совсем иначе выглядит случай

$$p_1 \neq p_c, \quad x_c \neq 0, \quad (6.8.21)$$

когда предметный и опорный источники разделены не только продольно, но и поперечно. Такая схема называется голографической системой Лейта. Рассмотрим несколько подробнее ее характеристики. Коэффициент линейного увеличения этой системы равен

$$M_\Gamma = M_1 \cdot M_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{q_2}{q_1}. \quad (6.8.22)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{f_\Gamma} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 + \frac{q_2}{p_1}}{q_2} = \frac{M_2}{q_2} = \frac{M_\Gamma}{M_1 q_2} = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{q_2}{q_1}}{M_1 q_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_1 q_1}, \quad (6.8.23)$$

получаем основную формулу

$$\frac{1}{f_\Gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_1 q_1}, \quad (6.8.24)$$

определяющую фокусное расстояние голограммы Габора.

В случае голограммы Лейта с разделенными пучками в системе образуется фиктивная линза с фокусным расстоянием  $f_2$ . Поэтому геометрическое фокусное расстояние  $f_\Gamma$ , характеризующее процесс восстановления по схеме Лейта, определяется выражением

$$\frac{1}{f_\Gamma} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}. \quad (6.8.25)$$

Это — наиболее общее выражение, которое при  $1/f_2 = 0$  переходит в формулу Габора (6.8.18). При этом  $f_2$  в общем случае определяется так:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[ \frac{1}{p_c + q_1} - \frac{1}{p_1 + q_1} \right] = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{(p_1 - p_c)}{(p_c + q_1)(p_1 + q_1)}. \quad (6.8.26)$$

Тогда окончательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_\Gamma} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[ \frac{p_1}{(p_1 + q_1)q_1} - \frac{(p_1 - p_c)}{(p_c + q_1)(p_1 + q_1)} \right] = \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{q_1 \left( 1 + \frac{q_1}{p_c} \right)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{q_1 M_c}, \end{aligned} \quad (6.8.27)$$



где

$$M_c = 1 + \frac{q_1}{p_c}. \quad (6.8.28)$$

Соотношение (6.8.27) иначе можно записать в виде

$$\frac{1}{f_x} = \frac{1}{f_r} \frac{M_1}{M_r} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_c q_1}. \quad (6.8.29)$$

Наконец, получим выражения для коэффициента линейного увеличения  $M$  и расстояния  $q_2$ , на котором получается четкое восстановленное изображение, через независимые исходные параметры. Исключая  $q_2$  из выражений

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{\lambda_2 q_2}{\lambda_1 q_1}, \\ \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_1 q_1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.8.30)$$

находим для голограммы Габора

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} \mp \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_2 p_2} = \frac{1}{1 + \frac{p_1}{q_1}} \mp \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_2 p_2} \quad (6.8.31)$$

и аналогично для голограммы Лейта

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_c} \mp \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_2 q_2} = \frac{1}{1 + \frac{p_c}{q_1}} \mp \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_2 p_2}. \quad (6.8.32)$$

Последнее выражение означает, что коэффициент линейного увеличения  $M$  в схеме Лейта не зависит от положения источника предметного пучка  $p_1$ .

Формула для коэффициента линейного увеличения в виде

$$M = \frac{\lambda_2 q_2}{\lambda_1 q_1} \quad (6.8.33)$$

также применима к случаю разделенных пучков, поскольку появление функции

$$e^{-i\pi \frac{x^2}{\lambda f}}$$

приводит к изменению фокусного расстояния голограммы, а следовательно, неявным образом, к изменению расстояния  $q_2$ , определяющего положение плоскости, где образуется четкое восстановленное изображение.

Расстояние  $q_2$  определяется формулой

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{q_1}{p_1}\right) q_1} - \frac{1}{p_2} \right]. \quad (6.8.34)$$

Тот факт, что в случае разделенных пучков (схема Лейта) коэффициент линейного увеличения (6.8.1) не влияет на коэффициент полного линейного увеличения  $M$ , означает, что голографическая установка Лейта может работать при диффузном освещении.

### § 6-9. Альтернативные представления сферического френелевского образа и его фурье-образа

По аналогии с четырьмя альтернативными представлениями амплитуды волны света  $u(\mathbf{x})$  в плоскости голограммы при освещении предмета  $t(\boldsymbol{\alpha})$  плоской волной, можно ввести альтернативные выражения для функции  $\psi(\mathbf{x})$  и ее фурье-образа  $\Psi(\boldsymbol{\omega})$ .

В исходном — первом — представлении имеем

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}} [t(\boldsymbol{\rho}) \otimes z_B(\boldsymbol{\rho})]. \quad (6.9.1)$$

Второе представление следует из теоремы свертки:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}} \int T(\boldsymbol{\omega}_0) Z(\boldsymbol{\omega}_0) e^{i\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{q}} d\boldsymbol{\omega}_0. \quad (6.9.2)$$

Третье представление можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\pi} e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}} Z^*(2B^2 \boldsymbol{\rho}) [T(2B^2 \boldsymbol{\rho}) \otimes Z(2B^2 \boldsymbol{\rho})]. \quad (6.9.3)$$

И, наконец, четвертое представление имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\pi} e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}} Z^*(2B^2 \boldsymbol{\rho}) \int t(\boldsymbol{\alpha}) z_B(\boldsymbol{\alpha}) e^{-i(2B^2 \mathbf{q}) \boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha}. \quad (6.9.4)$$

Если функцию  $Z^*$  представить в явном виде:

$$Z^*(2B^2 \boldsymbol{\rho}) = \frac{2\pi}{i} e^{iB^2 \mathbf{q}^2} = \frac{2\pi}{i} e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda_1 q_1 M_1}}, \quad (6.9.5)$$

то третье и четвертое представления запишутся более компактно. Для этого необходимо объединить оба экспоненциальных

множителя:

$$e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}} e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_1 q_1 M_1}} = e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda_2} \left[ -\frac{1}{f_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 q_1 M_1} \right]}, \quad (6.9.6)$$

и учесть, что

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{q_1 M_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_r} - \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_n}.$$

Тогда

$$\Psi(\mathbf{x}) = e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_n}} [T(2B^2 \rho) \otimes Z(2B^2 \rho)], \quad (6.9.7)$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = e^{i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_n}} \int t(\mathbf{a}) z_B(\mathbf{a}) e^{-i(2B^2 \rho) \mathbf{a}} d\mathbf{a}. \quad (6.9.8)$$

Из приведенных выше выражений видно, что фокусирующие свойства голограммы полностью описываются фиктивной линзой с фокусным расстоянием  $f_2$  или  $f_n$ .

Введем теперь три характеристические длины:

- размер предмета  $a$ ;
- размер центральной зоны Френеля в плоскости голограммы

$$l = \frac{1}{B} = \sqrt{\frac{\lambda_1 q_1}{\pi M_1}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 f_1}{\pi}}, \quad (6.9.9)$$

где

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1};$$

— размер наименьшей детали предмета  $\delta$ , связанной с максимальной пространственной частотой  $\Omega_0$  соотношением  $\delta = 1/\Omega_0$ .

Рассмотрим три основные области:

- 1) область геометрической тени, где  $l < \delta$ ;
- 2) область дифракции далекого поля, где  $l > a$ ;
- 3) область дифракции Френеля, где  $\delta < l < a$ .

В области геометрической тени аргумент функции  $Z(\omega_\rho)$  в представлении (6.9.2) можно положить равным нулю:  $\omega_\rho \approx 0$ . Тогда значение  $Z(0)$  выносится за знак интеграла. Сферический френелевский образ в области геометрической тени

$$\Psi_{\text{ГТ}}(\mathbf{x}) = 2\pi i t(\rho) e^{-i \frac{\pi x^2}{\lambda_2 f_2}}, \quad (6.9.10)$$

а его фурье-образ

$$\Psi_{\text{ГТ}}(\omega) = \pi M_1^2 \lambda_2 f_2 e^{i \frac{\lambda_2 f_2 \omega^2}{2\pi}} \int T(M_1 \omega') e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} (\omega'^2 - 2\omega \omega')} d\omega'. \quad (6.9.11)$$

В области дифракции далекого поля за знак интеграла можно вынести  $z_B(0)$  (при  $\rho \approx 0$ ). Тогда получим сферический

френелевский образ

$$\Psi_{\text{дп}}(\mathbf{x}) = e^{i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda_2 f_2}} T(2B^2 \rho) \quad (6.9.12)$$

и его фурье-образ

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{дп}}(\omega) &= \\ &= iM_1 \frac{\lambda_1 q_1}{2} \lambda_2 f_2 e^{-i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} \omega^2} \int t\left(-\frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} \omega'\right) e^{-i \frac{\lambda_2 f_2}{2\pi} (\omega'^2 - 2\omega\omega')} d\omega' \end{aligned} \quad (6.9.13)$$

Поясним схему преобразования выражений при нахождении фурье-образа сферического френелевского образа  $\Psi(\omega)$ . Поскольку  $\psi(\mathbf{x})$  имеет структуру

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}) [\overline{\psi_2(\mathbf{x})} \otimes \psi_3(\mathbf{x})], \quad (6.9.14)$$

то при переходе к фурье-образу  $\Psi(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[\psi(\mathbf{x})]$  операция свертки превратится в умножение, а умножение — в свертку. Тогда

$$\Psi(\omega) = \Psi_1(\omega) \otimes [\Psi_2(\omega) \cdot \Psi_3(\omega)], \quad (6.9.15)$$

где

$$\Psi_i(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[\psi_i(\mathbf{x})], \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.9.16)$$

В принятых здесь обозначениях

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_2 f_2}{2\pi} z_1^*(\mathbf{x}) \left[ t\left(\frac{\mathbf{x}}{M_1}\right) \otimes z_B\left(\frac{\mathbf{x}}{M_1}\right) \right]. \quad (6.9.17)$$

Используя свойства преобразований Фурье и Френеля, находим

$$t\left(\frac{\mathbf{x}}{M_1}\right) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} M_1 T(M_1 \omega), \quad (6.9.18)$$

$$z_1(\mathbf{x}) \rightarrow Z_1(\omega), \quad \text{где} \quad \omega_1^2 = \frac{\pi}{\lambda_2 f_2} \quad (6.9.19)$$

$$z_B\left(\frac{\mathbf{x}}{M_1}\right) \rightarrow M_1 Z_B(M_1 \omega) = 2\pi i M_1 e^{-i \frac{\lambda_1 q_1 M_1 \omega^2}{4\pi}}, \quad (6.9.20)$$

$$z_1^*(\mathbf{x}) \rightarrow (-2\pi i) e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} \omega^2}, \quad (6.9.21)$$

$$e^{-i\omega_1^2 \mathbf{x}^2} \equiv e^{-i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda_2 f_2}} = \frac{1}{2\omega_1^2} z_1^*(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_2 f_2}{2\pi} z_1^*(\mathbf{x}). \quad (6.9.22)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \frac{\lambda_2 f_2}{2\pi} \int (-2\pi i) e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} (\omega - \omega')^2} \cdot 2\pi i M_1 e^{-i \frac{\lambda_1 q_1}{4\pi} M_1 \omega'^2} d\omega' = \\ &= \pi \lambda_2 f_2 M_1^2 e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} \omega^2} \int T(M_1 \omega') e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} \left[ \left(1 - \frac{\lambda_1 q_1 M_1}{\lambda_2 f_2}\right) \omega'^2 - 2\omega\omega' \right]} d\omega'. \end{aligned} \quad (6.9.23)$$

Поскольку

$$\frac{\lambda_1 q_1 M_1}{\lambda_2 f_2} = \frac{1}{f_2} \frac{\lambda_1 q_1 M_1}{\lambda_2} = \frac{f_\Gamma}{f_2},$$

то окончательно

$$\Psi(\omega) = \pi \lambda_2 f_2 M_1^2 e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} \omega^2} \int T(M_1 \omega') e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} \left[ \left(1 - \frac{f_\Gamma}{f_2}\right) \omega'^2 - 2\omega\omega' \right]} d\omega'. \quad (6.9.24)$$

Фурье-образ сферического френелевского образа предмета  $t(\alpha)$  выражается через фурье-образ транспаранта  $T(\omega)$ .

Приведенное выражение позволяет найти представления (6.9.1) и (6.9.2). Для представлений (6.9.3) и (6.9.4) получится другая форма. Пусть

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= e^{i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda_2 f_\Pi}} \left[ T\left(2B^2 \frac{\mathbf{x}}{M_1}\right) \otimes Z_B\left(2B^2 \frac{\mathbf{x}}{M_1}\right) \right] = \\ &= e^{i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda_2 f_\Pi}} \left[ T\left(\frac{2\pi \mathbf{x}}{\lambda_1 q_1}\right) \otimes Z_B\left(\frac{2\pi \mathbf{x}}{\lambda_1 q_1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.9.25)$$

Если ввести согласно общему правилу функцию

$$z_2(\mathbf{x}) = 2\omega_2^2 e^{i\omega_2^2 \mathbf{x}^2}, \quad (6.9.26)$$

где

$$\omega_2^2 = \frac{\pi}{\lambda_2 f_\Pi}, \quad (6.9.27)$$

то

$$z_2(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} (2\pi i) Z(\omega) = 2\pi i e^{-i \frac{\omega^2}{4\omega_2^2}}, \quad (6.9.28)$$

или

$$i\omega_2^2 \mathbf{x}^2 = \frac{z_2(\mathbf{x})}{2\omega_2^2} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} i\pi \lambda_2 f_\Pi e^{-i \frac{\lambda_2 f_\Pi}{4\pi} \omega^2}. \quad (6.9.29)$$

Опираясь, далее, на свойство обратимости преобразования Фурье, находим

$$T(ax) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \frac{1}{|a|} t\left(-\frac{\omega}{a}\right), \quad (6.9.30)$$

где

$$a = \frac{2\pi}{\lambda_1 q_1}. \quad (6.9.31)$$

Тогда

$$T(2B^2 \rho) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} t\left(-\frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} \omega\right). \quad (6.9.32)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} Z_B(ax) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} \frac{1}{|a|} z_B\left(-\frac{\omega}{a}\right) = \\ = \frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} 2M_1 \frac{\pi}{\lambda_1 q_1} e^{i \frac{M_1 \pi}{\lambda_1 q_1} \frac{\lambda_1^2 q_1^2}{4\pi^2} \omega^2} = M_1 \cdot e^{i \frac{\lambda_1 q_1 M_1}{4\pi} \omega^2}. \end{aligned} \quad (6.9.33)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) = i\pi \lambda_2 f_{\Pi} e^{-i \frac{\lambda_2 f_{\Pi}}{4\pi} \omega^2} \frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} M_1 \times \\ \times \int t\left(-\frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} \omega'\right) e^{-i \frac{\lambda_2 f_{\Pi}}{4\pi} \left[\left(1 - \frac{\lambda_1 q_1 M_1}{\lambda_2 f_{\Pi}}\right) \omega'^2 - 2\omega'\omega\right]} d\omega'. \end{aligned} \quad (6.9.34)$$

Аналогично находим

$$\frac{\lambda_1 q_1 M_1}{\lambda_2 f_{\Pi}} = \frac{f_{\Gamma}}{f_{\Pi}}. \quad (6.9.35)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) = \frac{iM}{2} \lambda_2 f_{\Pi} \lambda_1 q_1 e^{-i \frac{\lambda_2 f_{\Pi}}{4\pi} \omega^2} \times \\ \times \int t\left(-\frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} \omega'\right) e^{-i \frac{\lambda_2 f_{\Pi}}{4\pi} \left[\left(1 - \frac{f_{\Gamma}}{f_{\Pi}}\right) \omega'^2 - 2\omega'\omega\right]} d\omega'. \end{aligned} \quad (6.9.36)$$

Это соответствует представлениям (6.9.3) и (6.9.4).

Интересно отметить, что выражение  $\Psi(\omega)$  для области геометрической тени получается из общего выражения (6.9.24) в приближении

$$f_r \ll f_2, \quad (6.9.37)$$

а для области дифракции далекого поля — в приближении

$$f_r \ll f_d. \quad (6.9.38)$$

### § 6-10. Строгая классификация голограмм

Строгая классификация голограмм основана на анализе структуры сферического френелевского образа  $\psi(x)$  и его фурье-образа  $\Psi(\omega)$ . Точный вид функций  $\psi(x)$  и  $\Psi(\omega)$  задается условиями эксперимента.

В случае голографической установки с расходящимися пучками структуры  $\psi(x)$  и  $\Psi(\omega)$  определяются следующими факторами:

— относительным расположением предмета и двух источников света — опорного и предметного;

— областью дифракции, в которой регистрируется голограмма.

Выше были приведены соотношения, которые определяют как общую голограмму Френеля, так и тенеграмму, а также голограмму Фраунгофера, или голограмму в области дифракции далекого поля.

В самом общем случае голограммы можно разбить на четыре класса:

1. Голограмма Френеля.
2. Тенеграмма.
3. Голограмма квази-Фурье.
4. Голограмма Фурье.

Каждому классу голограмм соответствует определенная форма функции  $\psi(x)$  — сферического френелевского образа. Структура функции  $\psi(x)$  и ее фурье-образ  $\Psi(\omega)$  для каждого из четырех классов голограмм приведена в табл. 6.1.

Для того чтобы выразить в явном виде условия получения каждого типа голограмм, необходимо проанализировать стадию получения голограмм в каждой из трех областей дифракции (см. выше).

Для каждой области дифракции можно ввести некоторую характеристическую длину, которую следует сравнивать с деталями предмета, и таким образом отождествить тип получаемой голограммы и другие основные характеристики голографической установки.

1. Голограмма регистрируется в области дифракции Френеля ( $\delta < l < a$ ). Пусть предмет, содержащий пространственные частоты не выше  $\Omega_0 = 1/\delta$ , ограничен размером  $a$ . Рассмотрим

Таблица 6.1

Тип голограммы	Структура $\psi(x)$	Структура $\Psi(\omega)$
Голограмма Френеля	$t(\alpha x) \otimes e^{i\pi\beta x^2}$	$T\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) e^{-i\pi\frac{\omega^2}{\alpha}}$
Тенеграмма	$t(\alpha x)$	$T\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Голограмма квази-Фурье	$T(\alpha x) \otimes e^{i\pi\beta x^2}$	$t\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) e^{-i\pi\frac{\omega^2}{\beta}}$
Голограмма Фурье	$T(\alpha x)$	$t\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

одно из альтернативных выражений функции  $\Psi(\omega)$  для области дифракции Френеля, а именно выражение (6.9.24). Пренебрегая в подынтегральном показателе членами, квадратичными по  $\omega'$ , получим

$$\Psi(\omega) \sim t\left(-\frac{\lambda_2 f_2}{M_1 2\pi} \omega\right) e^{i\frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} \omega^2}. \quad (6.10.1)$$

Если же воспользоваться выражением (6.9.36) и пренебречь квадратичными членами, то

$$\Psi(\omega) \sim T\left(\frac{\lambda_2 f_{\Pi}}{\lambda_1 q_1} \omega\right) e^{-i\frac{\lambda_2 f_{\Pi}}{4\pi} \omega^2}, \quad (6.10.2)$$

или, поскольку (см. (6.8.29))

$$\frac{\lambda_2 f_{\Pi}}{\lambda_1 q_1} = M_c,$$

то

$$\Psi(\omega) \sim T(M_c \omega) e^{-i\frac{\lambda_2 f_{\Pi} \omega^2}{4\pi}}. \quad (6.10.3)$$

Выражения (6.10.1) и (6.10.3) сравним с выражениями, помещенными в табл. 6.1. Видно, что выражению (6.10.1) соответствует голограмма квази-Фурье, выражению (6.10.3) соответствует голограмма Френеля.

Оценим теперь условия, при которых можно отбросить квадратичные члены экспоненты.



Легко видеть, что в случае (6.10.1), т. е. голограммы квази-Фурье, для этого необходимо, чтобы

$$\frac{\lambda_2 f_{\text{л}}}{M_1^2} \left( 1 - \frac{f_{\text{г}}}{f_2} \right) \Omega_0^2 \ll 1. \quad (6.10.4)$$

В случае (6.10.3), т. е. голограммы Френеля, для этого требуется, чтобы

$$\lambda_2 f_{\text{л}} \left( 1 - \frac{f_{\text{г}}}{f_{\text{л}}} \right) \frac{a^2}{(\lambda_1 q_1)^2} \ll 1. \quad (6.10.5)$$

Легко доказать, что

$$\frac{\lambda_2}{M_1^2} (f_2 - f_{\text{г}}) \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 q_1)^2} (f_{\text{л}} - f_{\text{г}}) = 1. \quad (6.10.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_2}{M_1^2} (f_2 - f_{\text{г}}) \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 q_1)^2} (f_{\text{л}} - f_{\text{г}}) = \\ & = \left( \frac{1}{f_{\text{г}}} \right)^2 (f_2 - f_{\text{г}}) (f_{\text{л}} - f_{\text{г}}) = \frac{f_2}{f_{\text{л}}} \left( \frac{f_{\text{л}}}{f_{\text{г}}} - 1 \right) = \frac{f_2}{f_{\text{г}}} - \frac{f_2}{f_{\text{л}}} = 1, \end{aligned} \quad (6.10.7)$$

где использовались соотношения (6.8.24) и (6.8.25).

Из (6.8.25) следует:

$$\frac{f_2}{f_{\text{г}}} - \frac{f_2}{f_{\text{л}}} = 1. \quad (6.10.8)$$

Отсюда видно, что коэффициенты

$$\frac{\lambda_2 f_2}{M_1^2} \left( 1 - \frac{f_{\text{г}}}{f_2} \right) \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_2 f_{\text{л}}}{(\lambda_1 q_1)^2} \left( 1 - \frac{f_{\text{г}}}{f_{\text{л}}} \right) \quad (6.10.9)$$

имеют не только дополняющие размерности, но и обратны друг другу. Воспользовавшись этим свойством, можно ввести характеристическую длину  $l_{\Phi}$ :

$$l_{\Phi}^2 = \frac{\lambda_2 (f_2 - f_{\text{г}})}{M_1^2} = \frac{(\lambda_1 q_1)^2}{\lambda_2 (f_{\text{л}} - f_{\text{г}})}. \quad (6.10.10)$$

Используя (6.8.24) и (6.8.29), легко также показать, что

$$l_{\Phi}^2 = \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_2 (f_{\text{л}} - f_{\text{г}})} = \frac{\lambda_1 q_1}{\frac{\lambda_2 f_{\text{л}}}{\lambda_1 q_1} - \frac{\lambda_2 f_{\text{г}}}{\lambda_1 q_1}} = \frac{\lambda_1 q_1}{M_c - M_1}. \quad (6.10.11)$$

Таким образом, характеристическая длина френелевской области дифракции равна

$$l_{\phi} = \sqrt{\frac{\lambda_1 q_1}{M_c - M_1}}. \quad (6.10.12)$$

Условия (6.10.4) и (6.10.5) можно записать теперь в виде

$$l_{\phi} \ll \delta, \quad (6.10.13)$$

$$l_{\phi} \ll a. \quad (6.10.14)$$

Характеристическая длина френелевской области дифракции  $l_{\phi}$  определяет возможные типы голограмм, реализуемых в области дифракции Френеля, а именно:

если  $l_{\phi} < \delta$ , то регистрируется голограмма квази — Фурье;

если  $l_{\phi} > a$ , то регистрируется голограмма Френеля;

если  $\delta < l_{\phi} < a$ , то имеет место общий случай голограммы.

Здесь везде предполагается, что

$$\delta < l < a.$$

**II. Голограмма регистрируется в области геометрической тени ( $l < \delta$ ).** Рассмотрим функцию  $\Psi(\omega)$ , полученную выше (см. (6.9.11)) для области геометрической тени:

$$\Psi_{\text{ГТ}}(\omega) \sim e^{i \frac{\lambda_2 f_2 \omega^2}{2\pi}} \int T(M_1 \omega') e^{i \frac{\lambda_2 f_2}{4\pi} [\omega'^2 - 2\omega' \omega]} d\omega'.$$

В подынтегральной экспоненте можно отбросить квадратичные члены по  $\omega'^2$ , если только

$$\frac{\lambda_2 f_2}{M_1^2} \Omega_1^2 \ll 1. \quad (6.10.15)$$

Введем характеристическую длину  $l_{\text{ГТ}}$  для области геометрической тени. Преобразуем

$$\frac{\lambda_2 f_2}{M_1^2}.$$

Воспользовавшись выражениями (6.8.24), (6.8.25) и (6.8.29), будем иметь

$$M_c = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{f_{\Pi}}{q_1},$$

$$\frac{1}{f_{\Gamma}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_1 q_1},$$

$$\frac{1}{f_{\text{л}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_c q_1},$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{\Gamma}} - \frac{1}{f_{\text{л}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_1 q_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{M_c q_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 q_1} \frac{M_c - M_1}{M_1 M_c}.$$

Но так как по (6.9.9)

$$l^2 = \frac{\lambda_1 q_1}{\pi M_1},$$

то

$$\frac{\lambda_2 f_2}{M_1^2} = \frac{\lambda_2}{M_1^2} \frac{\lambda_1 q_1 M_1 M_c}{(M_c - M_1)} = \frac{\lambda_1 q_1}{M_1} \frac{M_c}{M_c - M_1} = l^2 \frac{M_c}{M_c - M_1}. \quad (6.10.16)$$

Окончательно:

$$l_{\Gamma\Gamma} = l \sqrt{\frac{M_c}{M_c - M_1}}. \quad (6.10.17)$$

Поэтому, если только

$$l_{\Gamma\Gamma}^2 \Omega_0^2 \ll 1, \quad (6.10.18)$$

то

$$\Psi_{\Gamma\Gamma}(\omega) \sim e^{i \frac{\lambda_2 f_2 \omega^2}{2\pi}} t(\rho). \quad (6.10.19)$$

Обращаясь к табл. 6.2, видим, что это — голограмма квази-Фурье.

Рассмотрим теперь функцию  $\psi(\mathbf{x})$  в области геометрической тени:

$$\psi(\mathbf{x}) \sim t(\rho) e^{-i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda_2 f_2}} = t(\rho) e^{-i \frac{\pi M_1^2 \Omega^2}{\lambda_2 f_2}}. \quad (6.10.20)$$

Фазой в этом выражении или, что равноценно, кривизной сферической волны можно пренебречь, если только

$$M_1^2 \frac{\pi}{\lambda_2 f_2} a^2 \ll 1. \quad (6.10.21)$$

Но

$$\frac{\lambda_2 f_2}{M_1^2} = l_{\Gamma\Gamma}.$$

Поэтому условие (6.10.21) можно записать в виде

$$\left( \frac{a^2}{l_{\Gamma\Gamma}^2} \right) \ll 1. \quad (6.10.22)$$

Таблица 6.2

Область дифракции **)	Характеристическая длина для данной области дифракции **)	Условия реализации				
		голограмма общего вида	голограмма Френеля	тенеграмма	голограмма квази-Фурье	голограмма Фурье
Дифракция Френеля, $\delta < l < a$	$l_{\Phi} = l\sqrt{M_1/(M_c - M_1)}$	$\delta < l_{\Phi}$ $l_{\Phi} < a$	$a < l_{\Phi}$	—	$l_{\Phi} < \delta$	—
Область геометрической тени, $l < \delta$	$l_{\Gamma T} = l\sqrt{M_c/(M_c - M_1)}$	$\delta < l_{\Gamma T}$ $l_{\Gamma T} < a$	—	$a < l_{\Gamma T}$	$l_{\Gamma T} < \delta$	—
Дифракция далекого поля, $l > a$	$l_{\Delta T} = l\sqrt{M_1/M_c}$	$\delta < l_{\Delta T}$ $l_{\Delta T} < a$	$a < l_{\Delta T}$	—	—	$l_{\Delta T} < \delta$

\*) Общие характеристические длины: размер центральной зоны Френеля  $l = \sqrt{\lambda_1 q_1 / M_1}$ ; размер предмета  $a$ ; размер наименьшей детали предмета  $\delta$ .

\*\*\*) Фундаментальное соотношение между характеристическими длинами:  $l_{\Delta T} l_{\Gamma T} = l \cdot l_{\Phi}$ .

Тогда в этих условиях

$$\psi(\mathbf{x}) \sim t(\rho), \quad (6.10.23)$$

т. е. регистрируется тенеграмма.

Итак, характеристическая длина  $l_{\Gamma T}$  в области геометрической тени подразделяет голограммы на разные типы в соответствии с неравенствами:

$l_{\Gamma T} < \delta$  — регистрируется голограмма квази-Фурье,

$l_{\Gamma T} > a$  — регистрируется тенеграмма,

$\delta < l_{\Gamma T} < a$  — имеет место общий случай.

При этом везде предполагается, что  $l < \delta$ .

III. Голограмма, регистрируемая в области дифракции далекого поля ( $l > a$ ). Анализ, аналогичный предыдущим случаям, показывает, что в области дифракции далекого поля

$$\Psi_{\Delta T}(\omega) \sim e^{-i \frac{\lambda_2 f_{\Delta T} \omega^2}{4\pi}} \int t\left(-\frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} \omega'\right) e^{-i \frac{\lambda_2 f_{\Delta T}}{4\pi} (\omega'^2 - 2\omega\omega')} d\omega'. \quad (6.10.24)$$

Если

$$\frac{M_c^2}{\lambda_2 f_{\Delta T}} a^2 \ll 1, \quad (6.10.25)$$

то

$$\Psi_{\text{дп}}(\omega) \sim T(M_c \omega) e^{-i \frac{\lambda_2 f_{\text{л}} \omega^2}{4\pi}}. \quad (6.10.26)$$

Выражение (6.10.26) соответствует голограмме Френеля.

Если же

$$\frac{(\lambda_1 q_1)^2}{\lambda_2 f_{\text{л}}} \Omega_0^2 \ll 1 \quad (6.10.27)$$

то

$$\Psi_{\text{дп}}(\omega) \sim i \left( -\frac{\lambda_1 q_1}{2\pi} \omega \right), \quad (6.10.28)$$

что соответствует голограмме Фурье.

Характеристической длиной в области дифракции далекого поля служит величина

$$l_{\text{дп}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 q_1}{M_c}}. \quad (6.10.29)$$

Действительно,

$$l_{\text{дп}}^2 = \frac{(\lambda_1 q_1)^2}{\lambda_2 f_{\text{л}}} = \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_2 f_{\text{л}}} \lambda_1 q_1 = \frac{\lambda_1 q_1}{M_c}, \quad (6.10.30)$$

так как (см. (6.8.29))

$$M_c = \frac{\lambda_2 f_{\text{л}}}{\lambda_1 q_1}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{l_{\text{дп}}^2} = \frac{M_c^2}{\lambda_2 f_{\text{л}}} = \frac{M_c}{\lambda_2 f_{\text{л}}} M_c = \frac{M_c}{\lambda_1 q_1}. \quad (6.10.31)$$

Таким образом,

если  $l_{\text{дп}} < 1/\Omega_0$ , то регистрируется голограмма Фурье;

если  $l_{\text{дп}} > a$ , то регистрируется голограмма Френеля;

если же  $\delta < l_{\text{дп}} < a$ , то имеет место голограмма общего вида.

При этом здесь везде предполагается, что

$$l > a.$$

### § 6.11. Наиболее характерные схемы получения различных типов голограмм

Приведем наиболее типичные схемы оптических установок, в которых регистрируются определенные типы голограмм.

**Микроскоп с голограммой Френеля.** В этой голографической установке (рис. 6.17) оба источника лежат в одной плоскости ( $p_c = p_1$ ), параллельной плоскости предмета. Голограмма регистрируется в области дифракции Френеля. Схема с зеркалом

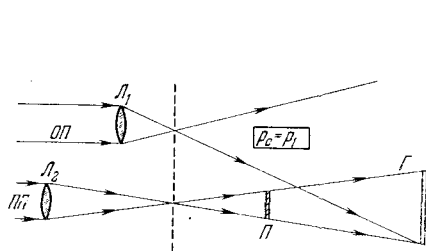


Рис. 6.17. Схема получения голограммы Френеля с использованием линз. Точечные источники опорного и предметного пучков расположены в одной плоскости ( $p_c = p_1$ ), параллельной плоскости предмета П. Голограмма Г регистрируется в области дифракции Френеля.

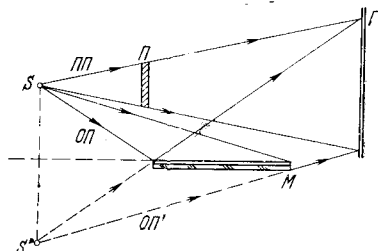


Рис. 6.18. Схема получения голограммы Френеля с использованием зеркала Ллойда М, формирующего опорный пучок  $OP'$ .

Ллойда, приведенная на рис. 6.18, может быть использована либо для рентгеновских лучей, либо для ультрафиолетового микроскопа, так как в ней отсутствуют линзы.

Схема микроскопа Габора с общим пучком является частным случаем микроскопа с голограммой Френеля, если

$$l_{\phi} > a \quad (6.11.4)$$

или

$$l_{\text{дп}} > a. \quad (6.11.2)$$

**Микроскоп, регистрирующий тенеграмму.** Геометрическая тенеграмма регистрируется с помощью одного точечного источника и включает как частный случай контактную печать, но отличается от контактной печати тем, что на тенеграмму без потерь переносится фазовая информация.

**Микроскоп с голограммой квази-Фурье.** В этой конструкции микроскопа опорный источник помещается в плоскости предмета ( $p_c = 0$ ), а голограмма регистрируется в области дифракции Френеля ( $l_{\phi} < \delta$ ). Схема установки без использования линз показана на рис. 6.19. Именно такого рода устройства предлагались для системы голографического рентгеновского микроскопа. На рис. 6.20 приведена схема установки с использованием линз.

**Микроскоп с голограммой Фурье.** Опорный источник помещается в плоскости предмета, а голограмма регистрируется в области дифракции далекого поля.

В лучах видимого света условия дифракции далекого поля удобнее всего осуществить путем использования освещения, лучи

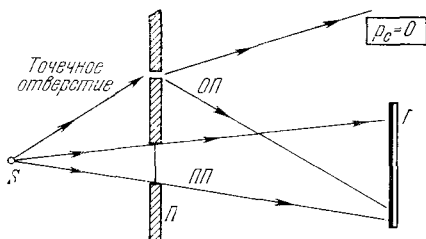


Рис. 6.19. Схема получения голограммы квази-Фурье без использования линз. Опорный точечный источник располагается в плоскости предмета  $\Pi$  ( $p_c = 0$ ). Голограмма  $\Gamma$  регистрируется в области дифракции Фраунгофера (далекого поля).

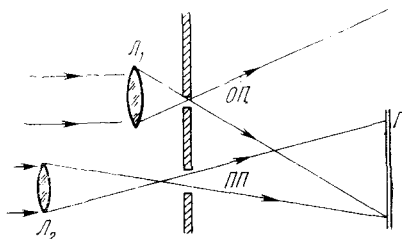


Рис. 6.20. Схема получения голограммы квази-Фурье с использованием линз.

которого сходятся в точку, расположенную в плоскости голограммы, что соответствует условиям

$$l > a \quad \text{при} \quad p_1 = -q_1. \quad (6.11.3)$$

На рис. 6.21 дана схема получения голограммы Фурье с использованием линз. Приведенная выше схема (рис. 6.19) с точечным

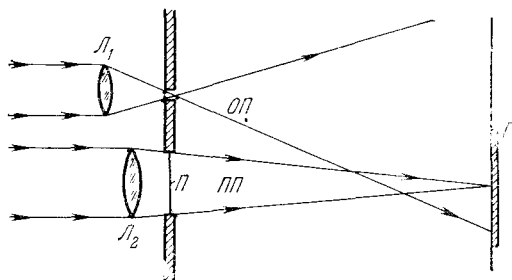


Рис. 6.21. Схема получения голограммы Фурье. Голограмма регистрируется в области дифракции далекого поля, что достигается использованием сходящегося предметного пучка ПП. Точка схождения расположена в плоскости голограммы ( $p_1 = -q_1$ ). Опорный точечный источник располагается в плоскости предмета  $\Pi$ .

отверстием также годится для получения голограммы, но только в области дифракции далекого поля. В лучах видимого света условия дифракции далекого поля лучше всего осуществляются с помощью сходящегося освещения.

Ввиду большого распространения, которое приобрела голограмма Фурье как в различных разделах голографии, так и в

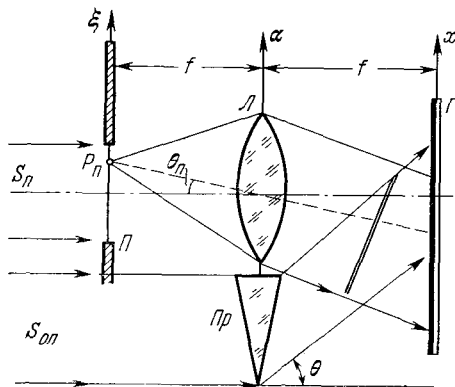


Рис. 6.22. Схема получения голограммы Фурье с помощью линзы Л, осуществляющей преобразование Фурье, и плоского опорного пучка, создаваемого призмой Пр. Предмет П освещается плоским пучком.

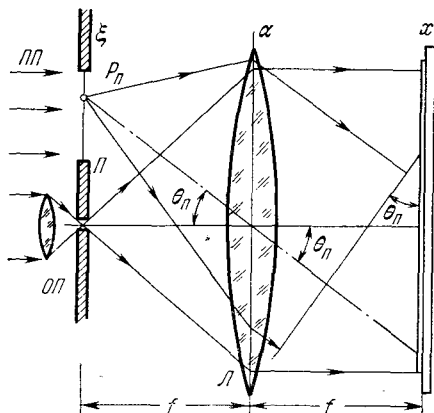


Рис. 6.23. Видоизмененная схема получения голограммы Фурье (см. рис. 6.22). Опорный точечный источник ОП расположен в плоскости предмета П. Линза Л выполняет одновременно две функции: 1) осуществляет преобразование Фурье; 2) преобразует расходящуюся волну от точечного опорного источника в плоскую опорную волну.

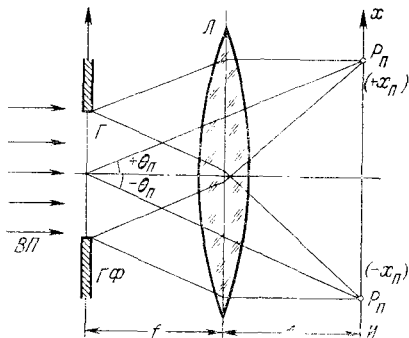


Рис. 6.24. Стадия восстановления изображения с помощью голограммы Фурье ГФ при освещении ее плоским пучком. Линза Л осуществляет обратное преобразование Фурье и фокусирует освещающий пучок в небольшое пятно, расположенное на оптической оси.



системах оптической обработки информации при когерентном освещении, приведем еще несколько возможных схем получения голограммы Фурье.

Голограмму Фурье можно получить с помощью параллельного освещения (рис. 6.22). Для осуществления преобразования Фурье используется собирающая линза, фокусное расстояние которой равно половине расстояния между предметом и голограммой.

Каждая точка предмета образует плоскую волну, которая при интерференции с плоской опорной волной образует свою интерференционную картину.

Схему, приведенную на рис. 6.22, можно несколько видоизменить, если ввести точечный опорный источник (рис. 6.23). Через линзу  $L$  проходят как предметный, так и опорный пучки. На рис. 6.24 показана стадия восстановления изображения от голограммы Фурье. При освещении голограммы плоской восстанавливающей волной образуется система плоских волн, каждая из которых преобразуется линзой в точку на плоскости изображения. Пространство направлений преобразуется в пространство координат с помощью линзы  $L$ .

### § 6-12. Поглощающая и рельефно-фазовая голограммы

В § 6-2 при рассмотрении свойств голограммы на стадии восстановления была сделана оговорка — предположение, что после проявления голограмма приобретает плоский рельеф и показатель преломления проявленной фотоэмульсии является постоянным. В этих условиях голограмма на стадии восстановления создает только амплитудную модуляцию света. На основании этого амплитудное пропускание голограммы при оптимальном режиме проявления можно было представить в виде

$$t(x, y) = I(x, y) \quad (\gamma = -2). \quad (6.12.1)$$

Амплитудное пропускание голограммы пропорционально интенсивности света, упавшего на голограмму на стадии ее получения.

Однако такое предположение не реализуется в действительности. Как показывает повседневный опыт фотографирования, любой негатив имеет видимый рельеф, а это с неизбежностью вызывает на стадии восстановления фазовую модуляцию. Для наиболее тонких и самых высокоразрешающих эмульсий, как, например, спектроскопических фотопластинок «Кодак» типа 649F, плотность почернения, равная 1, создает рельеф эмульсионного слоя, высота которого относительно неосвещенных частей составляет около 0,8  $\mu\text{м}$ , т. е. больше длины волны видимого света.

Рассмотрим, как сказывается рельеф эмульсионного слоя на стадии восстановления. Предположим сначала, что в голограмме имеется только фазовая модуляция. Чтобы достигнуть этого,

проявленную голограмму отбеливают, т. е. растворяют металлическое серебро, которое выделилось при проявлении. Голограмма становится прозрачной, но на ней остается рельеф. Как показывают измерения, толщина рельефа отбеленной голограммы, а также сдвиги фаз волны света изменяются пропорционально интенсивности света в данной точке на голограмме.

Пусть коэффициент  $\beta$  (коэффициент  $\beta$  называется индексом модуляции, см. § 2-25) описывает зависимость между сдвигом фазы  $\Delta\varphi$  и интенсивностью  $I(\mathbf{x})$ :

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) = \beta I(\mathbf{x}). \quad (6.12.2)$$

Тогда пропускание голограммы равно

$$t(\mathbf{x}) = e^{i\beta I(\mathbf{x})}. \quad (6.12.3)$$

Если проявление проводилось при оптимальном режиме, то

$$I(\mathbf{x}) = [a_0^2 + u^2(\mathbf{x})] + a_0 u(\mathbf{x}) \cos[\omega_0 \mathbf{x} - \Phi(\mathbf{x})], \quad (6.12.4)$$

где  $a_0$  — интенсивность опорной волны,  $u = u(\mathbf{x}) e^{i\Phi(\mathbf{x})}$  — предметная волна,  $\omega_0$  определяет угол падения опорной волны.

Как было отмечено ранее (§ 2-25), фазовая модуляция является в общем случае нелинейным процессом. Поэтому даже в том случае, когда голограмма проявлена до оптимальной контрастности  $\gamma = -2$  и регистрация проводится в пределах постоянного значения контрастности, на стадии восстановления появятся более высокие дифракционные порядки, а само восстановленное изображение исказится вследствие нелинейных эффектов, которые называют интермодуляционными шумами.

Найдем условия, при которых эти шумы малы, а более высокие порядки дифракции практически отсутствуют. Подставив (6.12.4) в (6.12.3), получим

$$t(\mathbf{x}) = e^{i\beta[a_0^2 + u^2(\mathbf{x})]} \cdot e^{i\beta a_0 u(\mathbf{x}) \cos[\omega_0 \mathbf{x} - \Phi(\mathbf{x})]}. \quad (6.12.5)$$

Чтобы разложить это выражение в ряд по некоторому малому параметру, воспользуемся следующими соотношениями из теории функций Бесселя:

$$e^{i\alpha \cos \varphi} = J_0(\alpha) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\alpha) \cos 2n\varphi + \\ + i \left[ 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(\alpha) \cos(2n+1)\varphi \right], \quad (6.12.6)$$

где

$$J_p(\alpha) = \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^p}{0!p!} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p+6}}{3!(p+3)!} + \dots \quad (6.12.7)$$

Например,

$$\left. \begin{aligned} J_0(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{64} - \dots, \\ J_1(\alpha) &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{16} + \frac{\alpha^5}{384} - \dots, \\ J_2(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^4}{96} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.12.8)$$

Тогда, ограничиваясь учетом нулевого, первого и второго дифракционных пучков на стадии восстановления, находим

$$t(\mathbf{x}) \simeq \left[ 1 + i\beta(a_0^2 + u^2) - \frac{1}{2}\beta^2(a_0^2 + u^2)^2 \right] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{(\beta a_0 u)^2}{4} \left( 1 + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) + i(\beta u_0 a) \cos \varphi \right], \quad (6.12.9)$$

где

$$\varphi = \omega_0 \mathbf{x} - \Phi(\mathbf{x}). \quad (6.12.10)$$

После преобразований получаем

$$t(\mathbf{x}) \simeq 1 + i\beta(a_0^2 + u^2(\mathbf{x})) + \beta^2 \left[ -\frac{(a_0^2 + u^2)^2}{2} - \frac{u^2 a_0^2}{4} \right] + \\ + i\beta^3 \left[ -\frac{(a_0^2 + u^2) a_0^2 u^2}{4} \right] + i\beta u a_0 \cos \varphi \left[ 1 - \beta^2 \frac{(a_0^2 + u^2)^2}{2} \right] + \\ + \beta^2 \cos 2\varphi \left[ -\frac{u^2 a_0^2}{8} - i\beta \frac{u^2 a_0^2}{8} (a_0^2 + u^2) \right]. \quad (6.12.11)$$

Ограничиваясь наиболее часто встречающимся случаем  $a_0 > u(\mathbf{x})$  и пренебрегая  $u^2$  по сравнению с  $a_0^2$ , находим

$$t(\mathbf{x}) \simeq \left[ 1 - \beta^2 \frac{a_0^4}{2} \right] + i\beta a_0^2 \left[ 1 - \beta^2 \frac{a_0^2 u^2}{4} \right] + \\ + i\beta u a_0 \cos \varphi \left[ 1 - \beta^2 \frac{a_0^4 + 2u^2 a_0^2}{2} \right] + \\ + \beta^2 \frac{u^2 a_0^2}{8} \cos 2\varphi [-1 - i\beta(a_0^2 + u^2)]. \quad (6.12.12)$$

Таким образом, в первом приближении интенсивность нулевого пучка равна (при условии  $\beta a_0^2 < 1$ )

$$I_0 = \left(1 - \beta^2 \frac{a_0^4}{2}\right)^2 + \left(\beta a_0^2 - \beta^2 \frac{a_0^4 u^2}{4}\right)^2 \approx 1 + \frac{1}{4} \beta^4 a_0^8. \quad (6.12.13)$$

Интенсивность пучка первого порядка

$$I_I = \beta^2 u^2 a_0^2 (1 - \beta^2 a_0^4 - \beta^2 2u^2 a_0^2) \cos \varphi, \quad (6.12.14)$$

и, наконец, интенсивность пучка второго порядка

$$I_{II} = \beta^4 \frac{u^4 a_0^4}{64} [1 + \beta^2 (a_0^4 + a_0^2 u^2)] \cos 2\varphi. \quad (6.12.15)$$

Из (6.12.14) видно, что эффект интермодуляции приводит к небольшому среднему ослаблению интенсивности пучка первого порядка ( $\sim \beta^2 a_0^4$ ) и к появлению ложного изображения ( $\sim \beta^2 a_0^2 u^2$ ). Отношение средней интенсивности ложного изображения (фона) к интенсивности истинного изображения равно

$$\frac{I_{I \text{ фон}}}{I_{I \text{ истин}}} = 2 (\beta a_0^2)^2 \left(\frac{u}{a_0}\right)^2. \quad (6.12.16)$$

Интенсивность пучка второго порядка относительно пучка первого порядка равна

$$\frac{I_{II}}{I_I} = \frac{\beta^4 u^4 a_0^4 (1 + \beta^2 a_0^4)}{64 \beta^2 u^2 a_0^2 (1 - \beta^2 a_0^4)} \approx \frac{1}{64} (\beta a_0^2)^2 \left(\frac{u}{a_0}\right)^2. \quad (6.12.17)$$

Опыт с рельефно-фазовыми голограммами показывает, что интермодуляционные эффекты полностью исчезают, если

$$\Delta \varphi_{\text{макс}} = 0,2 \text{ рад} = \beta I(\mathbf{x}) \approx \beta a_0^2. \quad (6.12.18)$$

В этих условиях интенсивность пучка первого порядка равна

$$I_{I \text{ истин}} = (\beta a_0^2)^2 \left(\frac{u}{a_0}\right)^2 \sim \frac{1}{25} \left(\frac{u}{a_0}\right)^2. \quad (6.12.19)$$

Относительная интенсивность фона в пучке первого порядка

$$\frac{I_{I \text{ фон}}}{I_{I \text{ истин}}} \sim \frac{2}{25} \left(\frac{u}{a_0}\right)^2, \quad (6.12.20)$$

а относительная интенсивность пучка второго порядка

$$\frac{I_{II}}{I_I} \sim \frac{1}{64} \frac{1}{25} \left(\frac{u}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{1600} \left(\frac{u}{a_0}\right)^2. \quad (6.12.21)$$

Таким образом, проведенный анализ показывает, что самым опасным интермодуляционным эффектом является нелинейное искажение восстановленного изображения (6.12.16). При  $\beta a_0^2 \sim 1$  нелинейные искажения становятся очень большими. Условие (6.12.18) на допустимый сдвиг фазы волны света,  $\Delta h_{\text{макс}} = 0,2 \text{ рад}$ , соответствует высоте рельефа

$$\Delta h_{\text{макс}} = \frac{\lambda}{10\pi} \sim \frac{\lambda}{30}, \quad (6.12.22)$$

что для видимого света составляет всего около 250 Å.

Выше везде предполагалось, что сдвиг фазы пропорционален высоте рельефа. Это осуществляется при отражении света от рельефной зеркальной поверхности отбеленной голограммы. Если же голограмму просвечивать насквозь, то возникнут дополнительные искажения, связанные с небольшими, но существенными изменениями показателя преломления в отбеленной голограмме.

Отбеленная голограмма, вызывающая только пространственную фазовую модуляцию световой волны, называется *рельефно-фазовой голограммой*.

Если фазовая модуляция голограммы оказывается нежелательной, голограмму помещают в кювету из оптического стекла, заполненную прозрачной жидкостью, показатель преломления которой весьма близок к показателю преломления фотоэмульсии.

### § 6-13. Амплитудный синтез изображений

С помощью голографической установки можно выполнять операции сложения и вычитания комплексных амплитуд, соответствующих двум разным предметам. При этом операция осуществляется путем накопления (сложения) в скрытом фотоизображении интенсивностей двух интерференционных картин. Удобнее всего амплитудный синтез осуществлять с помощью голограммы Фурье. Схема синтезирующего устройства показана на рис. 6.25.

Интенсивность интерференционной картины равна

$$I(x) = |T(x) + e^{i\omega_0 x}|^2 = 1 + |T(x)|^2 + T(x)e^{-i\omega_0 x} + T^*(x)e^{i\omega_0 x}, \quad (6.13.1)$$

где  $T(x)$  — фурье-образ предмета  $t(\xi)$ .

Перед линзой, формирующей точечный опорный пучок, помещается плоская фазовая пластинка с меняющейся оптической толщиной. Для первого предмета с амплитудным пропусканием  $t_1(\xi)$  фаза устанавливается равной нулю:  $\phi_1 = 0$ . Интенсивность интерференционной картины в этом случае равна

$$I_1(x) = 1 + |T_1(x)|^2 + T_1(x)e^{-i\omega_0 x} + T_1^*(x)e^{i\omega_0 x}. \quad (6.13.2)$$

Во время второго экспонирования той же фотопластинки устанавливается предмет с амплитудным пропусканием  $t_2(\xi)$ . Это экспонирование осуществляется при фазе  $\varphi_2 = \pi$ . Интенсивность второго экспонирования равна

$$I_2(x) = 1 + |T_2(x)|^2 + T_2(x) e^{-i(\omega_0 x + \pi)} + T_2^*(x) e^{i(\omega_0 x + \pi)}. \quad (6.13.3)$$

Суммарная интенсивность после двух экспонирований равна

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = 2 + |T_1(x)|^2 + |T_2(x)|^2 + (T_1 - T_2) e^{-i\omega_0 x} + (T_1 + T_2) e^{i\omega_0 x}. \quad (6.13.4)$$

Отсюда видно, что боковые пучки соответствуют предмету, описываемому волной с амплитудой  $t_1\xi - t_2\xi$ , т. е. равной разности амплитуд  $t_1$  и  $t_2$ .

Таким образом, с помощью фотоэмульсии, обладающей свойством аддитивности по интенсивности, удастся на основе голографического принципа осуществлять операции сложения

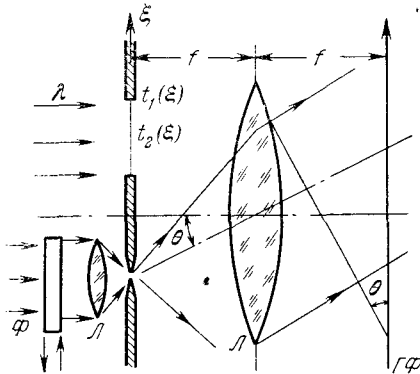


Рис. 6.25. Схема устройства, в котором осуществляется амплитудный синтез изображений. Производятся два экспонирования одной и той же фотопластинки путем регистрации голограммы Фурье. При первом экспонировании устанавливается транспарант с амплитудным пропусканием  $t_1(\xi)$ , а фазовая пластинка  $\Phi$  убирается из опорного пучка. При втором экспонировании той же длительности голографируется транспарант с амплитудным пропусканием  $t_2(\xi)$ . Фазовая пластинка  $\Phi$  ( $\Delta\varphi = \pi$ ) устанавливается в опорный пучок.

и вычитания амплитуд, соответствующих двум предметам. Точнее, удастся осуществлять сложение и вычитание амплитудных пропусканий двух предметов  $t_1(x)$  и  $t_2(x)$ .

Результирующая интенсивность восстановленного изображения равна

$$I_- = |t_1 - t_2|^2 = |t_1|^2 + |t_2|^2 - (t_1^* t_2 + t_1 t_2^*). \quad (6.13.5)$$

Из этого выражения видно, что метод амплитудного синтеза позволяет наблюдать интерференционную картину двух потоков света, освещавших голограмму в разные моменты времени, иначе говоря, двух пучков света, не перекрывающихся во времени.

#### § 6-14. Корреляционная компенсация протяженности опорного источника

Для получения голограммы Фурье обычно используется точечный опорный источник. Реализация его на практике приводит иногда к ослаблению интенсивности пучка, что создает существенные экспериментальные трудности. Вместе с тем влияние

протяженности опорного источника можно устранить, если использовать протяженные опорные источники определенной конфигурации.

Рассмотрим голографическую систему компенсации протяженности опорного источника (рис. 6.26). Пусть  $t(\xi)$  — амплитудное пропускание предмета-транспаранта,  $t_0(\xi - a)$  — амплитудное пропускание протяженного источника расходящихся волн, расположенного в той же плоскости на расстоянии  $a$  от предмета транспаранта. В плоскости Фурье интенсивность интерференционной картины равна

$$I(x) = |T(x) + T_0(x) e^{i\omega_0 x}|^2 = |T(x)|^2 + |T_0(x)|^2 + T^*(x) T_0(x) e^{i\omega_0 x} + T(x) T_0^*(x) e^{-i\omega_0 x}, \quad (6.14.1)$$

где  $T(x)$  и  $T_0(x)$  — фурье-образы предмета и опорного источника соответственно, а  $\omega_0 = 2\pi a/\lambda f$ .

Если осветить голограмму (6.14.1) точечным источником  $t = \delta(\xi)$ , то амплитуда волны непосредственно за голограммой будет равна

$$u(x) = \hat{\delta}[\delta(x)] I(x) = |T(x)|^2 + |T_0(x)|^2 + T^*(x) T_0(x) e^{i\omega_0 x} + T(x) T_0^*(x) e^{-i\omega_0 x}. \quad (6.14.2)$$

В направлении  $+a$  и  $-a$  боковые пучки имеют амплитуды

$$T^* \cdot T_0 \quad \text{и} \quad T \cdot T_0^*, \quad (6.14.3)$$

что соответствует операциям кросс-корреляции  $t$  и  $t_0$ :

$$t^* * t_0 \quad \text{и} \quad t * t_0^*. \quad (6.14.4)$$

Исходные амплитуды  $t$  и  $t^*$  искажаются, точность процесса восстановления волны нарушается.

Поступим иначе. Будем освещать голограмму протяженным источником  $t_s$  определенной пространственной структуры. Непосредственно за голограммой амплитуда в этом случае будет равна

$$u(x) = I(x) \cdot \hat{\delta}[t_s] = T_s(x) [|T(x)|^2 + |T_0(x)|^2] + T_s(x) \cdot T^*(x) \cdot T_0(x) e^{i\omega_0 x} + T_s(x) \cdot T(x) \cdot T_0^*(x) e^{-i\omega_0 x}. \quad (6.14.5)$$

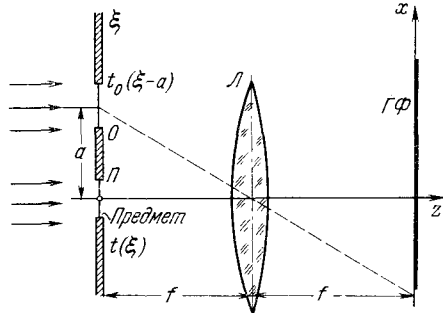


Рис. 6.26. Схема получения голограммы Фурье с использованием протяженного источника. Линза  $L$  осуществляет преобразование Фурье как предметного, так и опорного транспарантов.

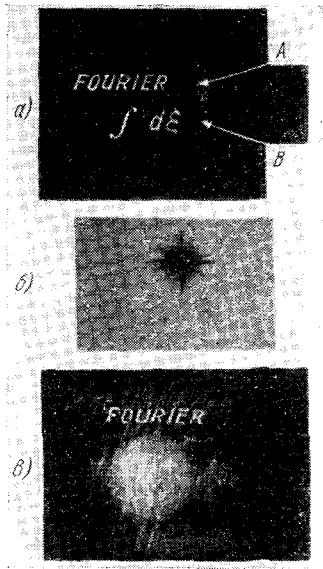


Рис. 6.27. Пример голографии Фурье с протяженным опорным источником. а) Вид транспаранта, состоящего из: А — предмета (слово FOURIER) и В — опорного транспаранта  $\int d\xi$ ; б) вид голограммы Фурье транспаранта (а), полученной по схеме, приведенной на рис. 6.26; в) восстановленное изображение: вверху — несколько размытое изображение слова FOURIER, соответствующее корреляционной компоненте  $(t_s * t_0^* \otimes t$ ; в центре — изображение прямого пучка, соответствующее компоненте  $t_s \otimes [(t * t^*) + (t_0 * t_0^*)]$ ; внизу — размытое пятно, обусловленное сверточной компонентой  $(t_s * t_0) * t^*$ . Для того чтобы сверточная компонента образовывала удовлетворительное изображение, необходимо, чтобы опорный транспарант обладал симметрией относительно поворота на угол  $180^\circ$  в плоскости транспаранта.

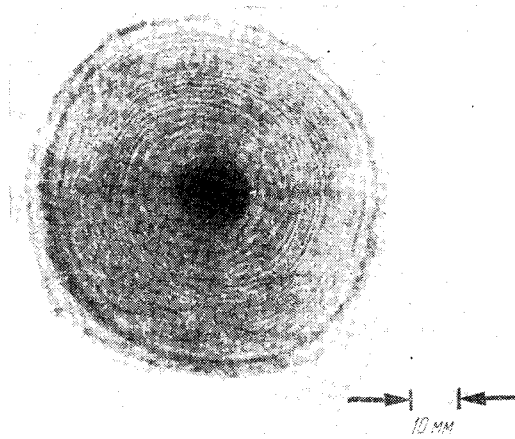


Рис. 6.28 Вид голограммы, полученной с помощью опорного транспаранта, имеющего вид зонной картины Френселя.



Боковые пучки будут характеризоваться амплитудами

$$T_s T^* T_0 \quad \text{и} \quad T_s T T_0^*, \quad (6.14.6)$$

Фурье-образы которых равны соответственно

$$(t_s \otimes t_0) * t^* \quad \text{и} \quad (t_s * t_0^*) \otimes t. \quad (6.14.7)$$

Легко видеть, что исходные амплитуды  $t$  или  $t^*$  можно получить без каких-либо искажений, если выполнить одно из условий:

$$t_s \otimes t_0 = \delta(x) \quad \text{или} \quad t_s * t_0^* = \delta(x). \quad (6.14.8)$$

Для того чтобы условия (6.14.8) выполнялись, необходимо, чтобы функции  $t_s$  и  $t_0$  имели бесконечно широкий спектр пространственных частот. На рис. 6.27 показаны изображения, восстановленные с помощью этого метода компенсации протяженности опорного источника.

Типичным примером протяженных источников  $t_0$  и  $t_s$  являются зонные картины Френеля (см. § 2-26, рис. 6.28 и рис. 6.29).

Возможна также и апостериорная компенсация протяженности опорных источников, которые в этом методе могут иметь практически любую структуру. Изложение этого метода приведено в главе 7, посвященной оптическим методам обработки информации.

### § 6-15. Обоснование метода компенсации протяженности источника

Рассмотрим вновь рис. 6.26. В плоскости голограммы интенсивность интерференционной картины:

$$I(x) = |T_0(x)|^2 + |T(x)|^2 + T_0(x) T^*(x) e^{i\omega_0 x} + T(x) T_0^* e^{-i\omega_0 x}. \quad (6.15.1)$$

Амплитудное пропускание голограммы для произвольного режима проявления фотозульшии описывается некоторой функцией  $h$  интенсивности  $I(x)$ :

$$h = h(I). \quad (6.15.2)$$

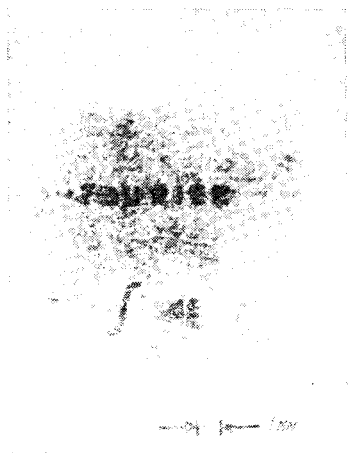


Рис. 6.29. Восстановленное изображение, полученное при освещении голограммы рис. 6.28 опорным транспарантом, имеющим вид той же зонной картины, которая использовалась на стадии получения голограммы. Поскольку автовертка зонной картины Френеля аппроксимируется дельта-функцией, изображение получилось достаточно резким. Фон, образующийся при этом, вызван тем, что зонная картина Френеля имеет конечное число колец и является знаковым образом функции Френеля.

Выберем некоторую среднюю интенсивность  $I_0$  и разложим функцию  $h(I)$  в степенной ряд:

$$h(I) = h(I_0) + h'(I_0)(I - I_0) + \frac{h''(I_0)}{2!}(I - I_0)^2 + \dots \quad (6.15.3)$$

Подставив (6.15.3) в (6.15.1), получим

$$h(I) = h_0 + h_1 e^{-i\omega_0 x} + h_{-1} e^{i\omega_0 x} + h_2 e^{-i2\omega_0 x} + \dots + h_n e^{-in\omega_0 x}. \quad (6.15.4)$$

Комплексный коэффициент, описывающий боковой пучок первого порядка, имеет вид

$$h_1 = h'(I_0) T_s T_0^* + \frac{h''(I_0)}{2!} 2 T_s T_0^* (T_0 T_0^* + T_s T_s^* - I_0) + \dots \quad (6.15.5)$$

Найдем условие, при котором боковой пучок первого порядка  $h_1$  преобладает. Обозначим

$$I - I_0 = A + [B^* e^{i\omega_0 x} + B e^{-i\omega_0 x}], \quad (6.15.6)$$

где

$$A = |T_0|^2 + |T_s|^2 - I_0, \quad (6.15.7)$$

$$B = T_s T_0^*. \quad (6.15.8)$$

Будем рассматривать произвольную степень  $(I - I_0)^n$  как бином. В явном виде:

$$(I - I_0)^n = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-\beta)! \beta!} A^{n-\alpha} (B^*)^{\alpha-\beta} B^{\beta} e^{-i\omega_0 x(2\beta-\alpha)}. \quad (6.15.9)$$

Для бокового пучка первого порядка

$$2\beta - \alpha = 1, \quad (6.15.10)$$

или

$$\beta = \frac{1+\alpha}{2}, \quad \text{где } \alpha - \text{нечетное}. \quad (6.15.11)$$

Тогда для волны первого порядка

$$[(I - I_0)^n]_I = \sum_{\substack{\alpha \\ \text{нечет}}} \frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{i}{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)! \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)!} A^{n-\alpha} (B^*)^{\frac{1-\alpha}{2}} B^{\frac{1+\alpha}{2}}. \quad (6.15.12)$$

Найдем теперь фурье-образ типичного слагаемого этой суммы:

$$\hat{\mathfrak{F}}[A(A^{n-\alpha-1}(B^*)^{\frac{1-\alpha}{2}}B^{\frac{1+\alpha}{2}})] = \hat{\mathfrak{F}}[A] \otimes \hat{\mathfrak{F}}[A^{n-\alpha-1}(B^*)^{\frac{1-\alpha}{2}}B^{\frac{1+\alpha}{2}}], \quad (6.15.13)$$

где

$$\hat{\mathfrak{F}}[A] = \hat{\mathfrak{F}}[T_0 T_0^* + T_s T_s^* - I_0]. \quad (6.15.14)$$

Теперь предположим, что

$$\hat{\mathfrak{F}}[T_0 T_0^*] \approx \delta \quad (6.15.15)$$

и

$$\hat{\mathfrak{F}}_1[T_s T_s^*] \approx \delta. \quad (6.15.16)$$

Принимая во внимание, что

$$\hat{\mathfrak{F}}[T_0 T_0^*] = t_0 * t_0^*, \quad (6.15.17)$$

$$\hat{\mathfrak{F}}[T_s T_s^*] = t_s * t_s^*, \quad (6.15.18)$$

а также учитывая, что

$$\hat{\mathfrak{F}}[I_0] = \delta, \quad (6.15.19)$$

так как  $I_0 = \text{const}$ , окончательно получим

$$\hat{\mathfrak{F}}[A] \approx \delta. \quad (6.15.20)$$

Учитывая, что

$$\delta \otimes g = g, \quad (6.15.21)$$

и повторяя несколько раз процедуру уменьшения степени  $A$ , получаем окончательно выражение для

$$\hat{\mathfrak{F}}[(B^* B)^{\frac{1-\alpha}{2}}].$$

Аналогичным итерационным приемом получаем

$$\hat{\mathfrak{F}}[B] = \hat{\mathfrak{F}}[T_s T_s^*] = t_s * t_s^*. \quad (6.15.22)$$

Сравнивая (6.15.23) с (6.15.5), обнаруживаем, что оба выражения тождественны друг другу. Отсюда следует вывод о том, что члены более высокого порядка в (6.15.5) пренебрежимо малы при условии, если равенство (6.15.15) выполняется достаточно хорошо. В этих условиях

$$h_1 \approx k(I_0) T_s T_s^*. \quad (6.15.23)$$

Теперь остается найти восстановленное изображение. Если длина волны восстанавливающего света  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  и при восстановлении используется линза с фокусным расстоянием  $f_2 \neq f_1$ , то,

используя известные свойства преобразования Фурье, можно доказать, что на стадии восстановления получается изображение предмета, увеличенное в  $M$  раз, где

$$M = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{f_2}{f_1}. \quad (6.15.24)$$

### § 6-16. Голограмма фазовых предметов

Фазовые предметы, т. е. предметы, которые не ослабляют интенсивности света, а изменяют пространственное распределение фаз волны, освещающей предмет, невозможно обнаружить при обычных способах наблюдения. С фазовыми предметами встречаются в микроскопии, в акустике, а также исследование аэродинамических потоков.

Голография позволяет зарегистрировать и восстановить любую световую волну, в том числе волну, испытавшую только пространственно-фазовую модуляцию. Эксперименты доказали, что фазовые предметы эффективно регистрируются с помощью голограммы. В одном из опытов в качестве фазового предмета использовалась фотопластинка, на которой было сфотографировано слово «phase», а затем после проявления фотопластинка была отбелена: все металлическое серебро перешло в соль, и негатив стал совершенно прозрачным. Как уже отмечалось, отбеленная фотоэмульсия приобретает рельеф, высота которого пропорциональна интенсивности света.

Голограмма такого фазового предмета была получена с помощью голографического устройства, в котором регистрируется голограмма Фурье. При этом преобразование Фурье производилось без помощи линз. При безлинзовой голографии Фурье фазовая информация о предмете не испытывает никаких возмущений в стекле линз, а это очень существенно для опыта, в котором регистрируется голограмма чисто фазового предмета.

Если сфотографировать действительное восстановленное изображение фазового предмета, то ничего, кроме случайных помех, не получится. Для того чтобы обнаружить фазовый предмет, необходимо превратить фазовый контраст в контраст интенсивности. Это осуществляется методами пространственной фильтрации световой волны, восстановленной с помощью голограммы.

Рассмотрим различные методы визуализации фазовых предметов. Схема устройства для наблюдения фазового предмета, восстановленного с помощью голограммы Фурье, приведена на рис. 6.30. Действительное изображение, формирующееся на расстоянии  $f_1$  от голограммы, проектируется на плоскость экрана изображения  $I$  с помощью собирающей линзы  $L$ .

Визуализацию фазового контраста можно осуществить с помощью следующих фазово-контрастных приемов:

- путем использования фазовой пластинки толщиной в четверть длины волны;
- путем дефокусировки восстановленного изображения;
- путем использования ножа Фуко;
- методом преобразования Гильберта;

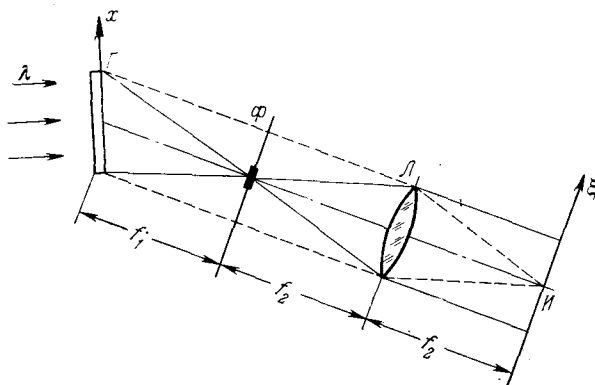


Рис. 6.30. Стадия восстановления фазового предмета, зарегистрированного с помощью голограммы Фурье. Изображение формируется в плоскости  $\Phi$ , расположенной на расстоянии  $f_1$  за голограммой  $G$ .

— путем получения голограммы с голограммы на низкой пространственной несущей, так что вторичная голограмма похожа на интерферограмму, полосы которой видны невооруженным глазом.

**Использование фазовой пластинки.** Поместим предмет, характеризующийся функцией пропускания

$$t(x) = e^{i\Phi(x)}, \quad (6.16.1)$$

в плоскость  $\Pi$  системы превращения фазового контраста в контраст интенсивности (рис. 6.31). Линзы  $L_1$  и  $L_2$  создают изображение предмета в плоскость изображения  $\Pi$ . Фотопластинка, помещенная в эту плоскость, регистрирует интенсивность

$$I(x) = |t(x)|^2 = 1(x), \quad (6.16.2)$$

т. е. равномерно засветится. Для того чтобы получить контраст интенсивности, предмет  $t(x)$  подвергают преобразованию Фурье с помощью линзы  $L_1$ . Тогда в плоскости  $\Phi$  отобразится пространственный спектр предмета. В центре этой плоскости на нулевой пространственной частоте устанавливается фазовая пластинка, толщина которой

$$d = \frac{\lambda}{4(n-1)} \quad (6.16.3)$$

соответствует сдвигу фазы  $\Delta\varphi = \pi/2$  ( $n$  — показатель преломления вещества пластинки). Предположим, что предмет создает

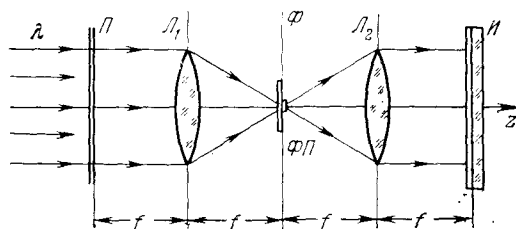


Рис. 6.31. Визуализация фазового предмета  $\Pi$  с помощью фазовой пластинки. Линзы  $L_1$  и  $L_2$  осуществляют два следующих друг за другом преобразования Фурье. В центре плоскости пространственных частот  $\Phi$  располагается фазовая пластинка  $\Phi\Pi$ , создающая оптическое запаздывание волны света на  $\Delta\varphi = \pi/2$ . В плоскости  $I$  фазовый контраст преобразуется в контраст интенсивности.

лишь малые фазовые сдвиги, так что

$$t(x) \approx 1 + i\Phi(x). \quad (6.16.4)$$

Тогда в плоскости Фурье

$$T(\omega) = \delta(\omega) + i\hat{\mathcal{F}}[\Phi(x)]. \quad (6.16.5)$$

Составляющая  $\delta(\omega)$  на нулевой частоте в результате прохождения через фазовую пластинку оказывается равной

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(\omega) = -i\delta(\omega). \quad (6.16.6)$$

Поэтому на выходе фильтра амплитуда волны будет равна

$$T_\Phi(\omega) \approx -i\delta(\omega) + i\hat{\mathcal{F}}[\Phi(x)]. \quad (6.16.7)$$

При обратном преобразовании Фурье в плоскости  $I$  возникнет отфильтрованное изображение

$$t_\Phi(x) = -i + i\Phi(x) = -i[1 - \Phi(x)], \quad (6.16.8)$$

а фотопластинка (рис. 6.32) воспримет распределение интенсивности

$$I_\Phi(x) = |t_\Phi(x)|^2 = |1 - \Phi(x)|^2 \approx 1 - 2\Phi(x). \quad (6.16.9)$$

Рис. 6.32. Изображение фазового предмета, полученное путем визуализации восстановленного фазового изображения методом фазового изображения методом фазовой пластинки толщиной в четверть длины волны.

Отфильтрованное изображение имеет контраст интенсивности, пропорциональный фазовому контрасту  $2\Phi(x)$ . Контраст интенсивности можно повысить еще более, если для нулевой

частоты осуществлять не только сдвиг фазы  $\Delta\varphi = \pi/2$ , но и ослабление (поглощение). Тогда нулевая частота  $\delta(\omega)$  оказывается равной

$$\alpha e^{-i\frac{\pi}{2}} \delta(\omega), \quad \text{где } \alpha \ll 1. \quad (6.16.10)$$

Отфильтрованный спектр имеет вид

$$T_\Phi(\omega) \approx -i\alpha\delta(\omega) + i\mathcal{F}[\Phi(x)], \quad (6.16.11)$$

а отфильтрованное изображение —

$$t_\Phi(x) = -i\alpha + i\Phi(x) = -i\alpha \left[ 1 - \frac{\Phi(x)}{\alpha} \right]. \quad (6.16.12)$$

Контраст интенсивности в этом случае равен  $2\frac{\Phi(x)}{\alpha}$ , т. е. в  $1/\alpha$  раз выше, чем в случае прозрачной фазовой пластинки.

Этот способ, однако, обладает следующим недостатком: дифракция на линзе  $\mathcal{L}_1$  конечных размеров приводит к тому, что вместо  $\delta$ -функции нулевая частота дает распределение вида  $\sin x/x$  (для одномерного случая) или  $J_1(r)/r$  (для двумерного), имеющее конечные размеры и перекрывающее низкие частоты пространственной структуры фазового предмета  $\Pi$ . Возникает дилемма: с одной стороны, размер фазово-поглощающей пластинки следует увеличить, чтобы захватить полностью нулевую частоту; с другой стороны, фазовая пластинка слишком больших размеров поглотит низкие частоты, что вызовет появление низкочастотных выбросов. В ряде случаев такие искажения предметов могут оказаться крайне нежелательными.

**Дефокусировка восстановленного изображения.** При дефокусировке контраст интенсивности возникает благодаря тому, что обратное преобразование Фурье не осуществляется полностью. Любые отступления восстановленного изображения от исходного предмета создают контраст интенсивности.

Амплитуда волны в плоскости изображения  $\Pi$ , установленной за линзой  $\mathcal{L}_2$  на расстоянии  $f_2 \neq f_1$ , равна

$$t_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int T(\omega) e^{i\omega x} e^{ib\omega^2} d\omega, \quad (6.16.13)$$

где

$$b = \frac{\lambda f_1}{4\pi} \left( 1 - \frac{f_2}{f_1} \right). \quad (6.16.14)$$

Рассмотрим, как выглядит восстановленный предмет в случае слабой дефокусировки, когда  $b$  мало и приближенно можно

положить

$$e^{ib\omega^2} \simeq 1 + ib\omega^2 \quad (b\omega_0^2 \ll 1), \quad (6.16.15)$$

где  $\omega_0$  — максимальная пространственная частота, содержащаяся в предметной функции  $\Phi(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} t_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int T(\omega) e^{i\omega x} [1 + ib\omega^2] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int T(\omega) e^{i\omega x} d\omega + \frac{ib}{2\pi} \int T(\omega) \omega^2 e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned} \quad (6.16.16)$$

Из свойств преобразования Фурье (глава 2) следует, что

$$\int T(\omega) \omega^2 e^{i\omega x} d\omega = -\frac{d^2 t(x)}{dx^2}. \quad (6.16.17)$$

Таким образом, дефокусированное восстановленное изображение имеет вид

$$t_1(x) = t(x) - ib \frac{d^2 t(x)}{dx^2}. \quad (6.16.18)$$

Поскольку

$$t(x) = e^{i\Phi(x)},$$

то

$$\frac{d^2 t(x)}{dx^2} = e^{i\Phi(x)} [i\Phi''(x) - [\Phi'(x)]^2]. \quad (6.16.19)$$

Искаженная амплитуда равна

$$t_1(x) = t(x) \{1 - ib\Phi''(x) + b[\Phi'(x)]^2\}. \quad (6.16.20)$$

Искаженная интенсивность

$$I_1(x) = |t_1(x)|^2 \approx 1 + b[\Phi'(x)]^2. \quad (6.16.21)$$

Выражение (6.16.21) показывает, что при слабой дефокусировке происходит визуализация квадрата первой производной функции фазовой неоднородности  $\Phi(x)$ . Контраст зависит от знака коэффициента  $b$ . При приближении плоскости наблюдения к линзе  $L_2$  возникает «темный» контраст, а при удалении от нее — «светлый» контраст (рис. 6.33).

Визуализация фазового предмета путем дефокусировки также сопряжена с искажениями исходного фазового контраста.



**Использование ножа Фука.** Нож Фуко преобразует фазовый контраст в контраст интенсивности следующим образом (рис. 6.34).



Рис. 6.33. Изображение фазового предмета, полученное путем визуализации восстановленного фазового изображения методом небольшой дефокусировки. а) Плоскость наблюдения  $\xi$  выбрана на расстоянии  $\frac{3}{4} f_2$  от линзы  $L_2$ ; б) плоскость наблюдения  $\xi$  выбрана на расстоянии  $\frac{5}{4} f_2$  от линзы  $L_2$ . Видно, что при приближении плоскости  $\xi$  к линзе  $L_2$  наблюдается «темный» контраст, а при удалении плоскости  $\xi$  от линзы  $L_2$  наблюдается «светлый» контраст.

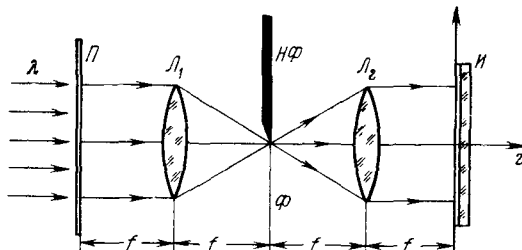


Рис. 6.34. Визуализация фазового предмета  $\Pi$  с помощью ножа Фуко, помещенного в плоскость  $\Phi$  пространственных частот. Нож Фуко  $HF$  срезает половину спектра пространственных частот.

Пусть

$$t(x) \approx 1 + i\Phi(x). \tag{6.16.22}$$

Фурье-образ функции  $\Phi(x)$  равен

$$\Xi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) e^{-i\omega x} dx. \tag{6.16.23}$$

Обратное преобразование Фурье запишется в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \tag{6.16.24}$$

Нож Фуко, установленный в плоскости Фурье, срезает половину спектра пространственных частот. Подобная операция эквивалентна умножению фурье-образа  $\Xi(\omega)$  на функцию Хэвисайда  $Y(\omega)$ . При обратном преобразовании Фурье, осуществляемом линзой  $L_2$ , в плоскости изображения появится искаженная функция

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Xi(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(\omega) Y(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (6.16.25)$$

Используя теорему свертки, находим

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) \otimes U(x), \quad (6.16.26)$$

где  $U(x)$  — фурье-образ функции Хэвисайда  $Y(\omega)$ :

$$U(x) = \frac{1}{2} \left[ \delta(\omega) + \frac{1}{\pi i} P \frac{1}{x} \right]. \quad (6.16.27)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \Phi(x) \otimes \left[ \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{2\pi i} P \frac{1}{x} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \Phi(x) - \frac{i}{2\pi} \left[ P \frac{1}{x} \otimes \Phi(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.16.28)$$

Пренебрегая, как всегда, квадратичными членами, находим амплитуду искаженного изображения

$$t_1(x) = 1 + i\Phi_1(x) = 1 + \frac{i}{2} \Phi(x) - \frac{1}{2\pi} \left( \Phi(x) \otimes P \frac{1}{x} \right) \quad (6.16.29)$$

и его интенсивность

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \left[ 1 - \frac{1}{2\pi} \left( \Phi(x) \otimes P \frac{1}{x} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} \Phi(x) \right]^2 \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \Phi(x) \otimes P \frac{1}{x} \right]. \end{aligned} \quad (6.16.30)$$

В качестве примера рассмотрим синусоидальную фазовую решетку

$$\Phi(x) = \alpha \sin \omega_0 x, \quad \alpha \ll 1, \quad (6.16.31)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/a$ ,  $a$  — шаг решетки. Свертка

$$\Phi(x) \otimes P \frac{1}{x} = \alpha \left( P \frac{1}{x} \otimes \sin \omega_0 x \right) = \alpha \cos \omega_0 x, \quad (6.16.32)$$

а интенсивность

$$I_1(x) \approx 1 - \frac{1}{\pi} \alpha \cos \omega_0 x \simeq 1 - \frac{\alpha}{\pi} \sin \left( \omega_0 x + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.16.33)$$

Из (6.16.33) видно, что нож Фуко при визуализации сдвигает в пространстве фазовую синусоидальную решетку по фазе на  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Отфильтрованное изображение приобретает перекося в сторону, противоположную кромке ножа Фуко, и имеет низкий контраст (рис. 6.35).

Метод преобразования Гильберта, основанный на преобразовании Гильберта, свободен от недостатков всех рассмотренных выше приемов превращения фазового контраста в контраст интенсивности. В схеме, использующей этот метод, удастся подвергнуть одной общей операции как дифракционную часть фурье-образа, сосредоточенную около нулевой пространственной частоты, так и сам сигнал. В результате этого пропадают: низкочастотные выбросы, возникающие в случае фазовой пластинки; перекося, свойственные использованию ножа Фуко; прямое искажение сигнала в методе дефокусировки. Кроме того, благодаря использованию всего света яркость визуализированного изображения оказывается практически неослабленной.

Подвергнем исходную функцию  $t(x)$  преобразованию Гильберта. Согласно определению гильбертовский образ равен (см. (2.20.1))

$$\chi(x) = \frac{P}{\pi} \int \frac{t(x') dx'}{x' - x} = \frac{1}{\pi} \left( f(x) \otimes P \frac{1}{x} \right),$$

где интегрирование ведется в смысле главного значения. Поскольку фурье-образ функции  $1/\pi x$ , являющейся множителем операции свертки, равен  $i \operatorname{sgn} \omega$ :

$$\hat{\mathfrak{F}} \left[ \frac{1}{\pi x} \right] = i \operatorname{sgn} \omega, \quad (6.16.34)$$



Рис. 6.35. Изображение фазового предмета, полученное путем визуализации восстановленного фазового изображения с помощью ножа Фуко. Отчетливо виден перекося изображения, характерный для этого метода.

то преобразование Гильберта можно осуществить путем установления в плоскости Фурье частотного фильтра с характеристикой

$$G(\omega) = i \operatorname{sgn} \omega = i \begin{cases} 1, & \omega > 0, \\ -1, & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.16.35)$$

Из (6.16.35) видно, что преобразование Гильберта осуществляется с помощью фазовой пластинки, создающей сдвиг на  $\Delta\varphi = \pi$  в одной половине плоскости Фурье.

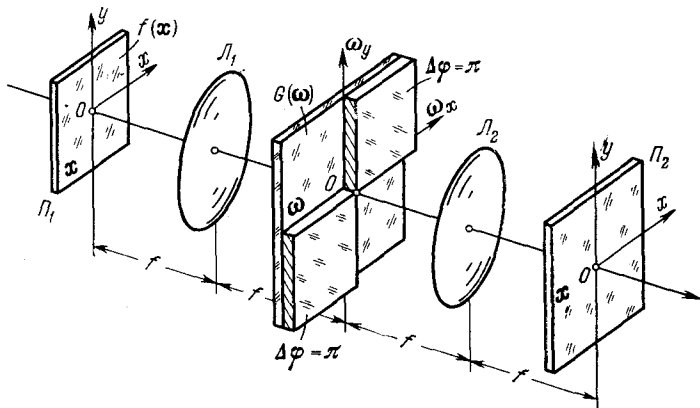


Рис. 6.36. Схема визуализации фазовых предметов с помощью преобразования Гильберта. Для осуществления преобразования Гильберта используют две плоские фазовые пластинки с  $\Delta\varphi = \pi$ , которые покрывают четные (или соответственно нечетные) квадранты плоскости пространственных частот  $\omega$ . Линза  $L_1$  осуществляет прямое преобразование Фурье, а линза  $L_2$  — обратное преобразование Фурье. В плоскости  $\Pi_2$  наблюдается изображение фазового предмета.

Для двумерной функции  $f(x)$  фазовая пластинка должна покрывать четные (или соответственно нечетные) квадранты плоскости  $\omega$  (рис. 6.36).

Продemonстрируем принцип действия этого метода на примере фазовой синусоидальной решетки

$$f(x) = e^{ia \cos \omega_0 x}. \quad (6.16.36)$$

Гильбертовский образ функции  $f(x)$  равен

$$\chi(x) = \frac{P}{\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{ia \cos \omega_0 x'}}{x' - a} ax' = -ia \sin \omega_0 x + \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x - A}{x + A} \right|, \quad (6.16.37)$$

где  $2A$  — апертура линзы (для двумерного случая  $2A = D$ , где  $D$  — диаметр линзы). Второе слагаемое сказывается только на

краях поля изображения, когда  $x$  приближается к  $A$ . В центральной области изображения вторым слагаемым можно пренебречь. Тогда

$$\chi(x) \approx -ia \sin \omega_0 x \quad (x < A), \quad (6.16.38)$$

а преобразованная интенсивность

$$I_1(x) = a^2 \sin^2 \omega_0 x = \frac{a^2}{2} (1 - \cos 2\omega_0 x). \quad (6.16.39)$$

Из (6.16.39) видно, что перекоса поля изображения, как в случае метода ножа Фуко, не возникает. Это различие является следствием того, что в методе преобразования Гильберта отсутствует (практически только в центральном поле изображения) постоянное слагаемое в амплитуде преобразованного изображения, в то время как в методе Фуко имеется большое постоянное смещение (см. (6.16.33)). Это приводит к ослаблению контраста, а также к возникновению несимметрий, т. е., по существу, к нелинейным искажениям, для объектов, которые обладают симметрией относительно точки  $x = 0$ .

Метод преобразования Гильберта характерен еще и тем, что полные интенсивности исходного и преобразованного изображения одинаковы. Это следует из соотношения (2.20.13), согласно которому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) \chi^*(x) dx. \quad (6.16.40)$$

Метод преобразования Гильберта применим как к большим, так и к малым сдвигам фаз невидимого фазового предмета (рис. 6.37).

**Метод получения голограммы с голограммы.** Еще один метод визуализации фазовых предметов, зарегистрированных с помощью голограммы, заключается в получении голограммы с голограммы. Такая вторичная голограмма является, по существу, интерферограммой, полосы на которой видны невооруженным глазом. Последнее достигается выбором малого угла между опорным и предметным пучками. При этом предметный пучок восстанавливается первой голограммой. Нарушение регулярной структуры интерференционных полос отображает ту фазовую информацию, которую воспроизвел при восстановлении боковой пучок (рис. 6.38).

Голография фазовых предметов при проекционном освещении осуществляется без каких-либо принципиальных трудностей и поэтому уже получила широкое распространение. Однако для случая фазовых трехмерных объектов, простирающихся на большую глубину, когда возникает необходимость наблюдения восстановленного изображения в широком диапазоне углов видимости,

возникают существенные трудности. Во-первых, для наблюдения эффекта объемности трехмерных фазовых объектов приходится

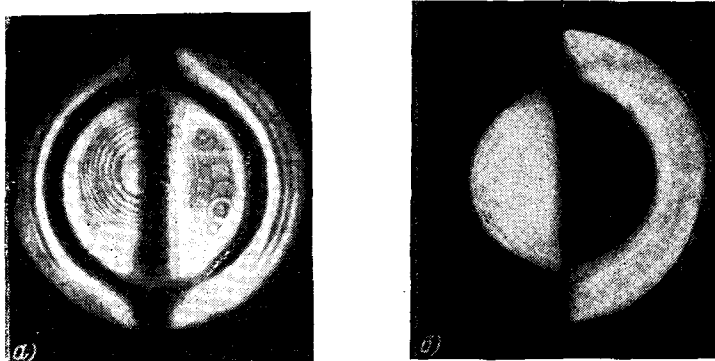


Рис. 6.37. Изображение фазовых aberrаций четвертого порядка линзы. а) Aberrации визуализированы путем использования одномерного фильтра Гильберта в плоскости пространственных частот; б) aberrации визуализированы с помощью ножа Фуко. Видны явные преимущества пространственного фильтра Гильберта как по разрешающей способности, так и по контрасту

переходить от параллельного пучка к диффузному освещению. Обычно это достигается с помощью рассеивающего экрана, не

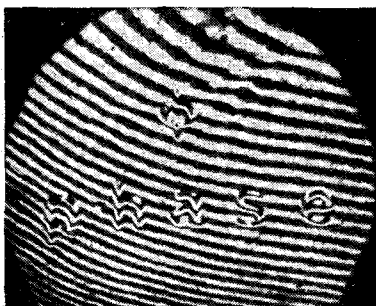


Рис. 6.38. Визуализация фазовых предметов, зарегистрированных с помощью голограммы, путем изготовления второй голограммы с низкой пространственной несущей.

разрушающего пространственную когерентность пучка. Каждый элементарный пучок света, падающий на фотопластинку, характеризуется четырьмя параметрами: координатами точки  $x$ ,  $y$  и углами падения  $\alpha$ ,  $\beta$ . Впечатление о фазовом трехмерном объекте передается совокупностью нескольких плоских изображений, т. е. двухмерных образов. Схема получения плоских проекций, показанная на рис. 6.39, позволяет реализовать следующие четыре возможности диафрагмирования пучка на стадии восстановления:

1) Небольшая круглая диафрагма, помещаемая в плоскость  $D$ , отбирает параллельный пучок лучей.

Двухмерный образ зависит от координат  $x$  и  $y$ .

2) Небольшая круглая диафрагма, устанавливаемая в плоскости  $E$ , отбирает конический пучок света с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ .

3) Вертикальная щель в плоскости  $D$  и горизонтальная щель в плоскости  $E$ , отбирают тетрагональный пучок с параметрами  $x$  и  $\alpha$ .

4) Горизонтальная щель в плоскости  $D$  и вертикальная щель в плоскости  $E$  дают тетрагональный пучок, характеризующийся параметрами  $y$  и  $\beta$ .

Наиболее интересной является возможность 1) с параллельным пучком лучей, когда при фиксированных углах наблюдения ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) оптическая длина зависит от положения точки на плоскости изображения. В случае возможности 2) оптическая длина в заданной точке ( $x$ ,  $y$ ) плоского воспроизведения зависит от углов наблюдения ( $\alpha$ ,  $\beta$ ).

Размер диафрагмы в случае 1) следует выбирать на основе компромисса между двумя нежелательными крайними случаями. Если диафрагму выбрать слишком малой, то авантюриновые пятна в восстановленном изображении станут настолько большими, что наблюдения будут невозможны. Размер авантюриновых пятен, как известно, равен  $\lambda/\alpha_0$ , где  $\alpha_0$  — светосила диафрагмы (отношение диаметра отверстия диафрагмы к фокусному расстоянию коллимирующей линзы). Если фазовый объект таков, что лучи отклоняются на характерный средний угол  $\theta_0$ , то очевидно, что светосила диафрагмы  $\alpha_0$  не должна быть меньше угла  $\theta_0$ . Опыт показывает, что это условие необходимо выполнять с большим запасом. А именно, рекомендуемые значения  $\alpha_0$  должны быть примерно в 6 раз больше среднего угла  $\theta_0$ , т. е. в 3 раза больше, чем это требуется в теньевых приборах. Уменьшение пространственной когерентности, как известно, ослабляет эффект авантюриновых точек.

Однако степень пространственной когерентности задается углом  $\theta_0$  отклонения лучей в фазовом объекте и не может быть сделана произвольно малой (см. § 6-25).

С другой стороны, если диафрагма очень велика, то вариации оптического пути в зависимости от углов  $\alpha$  и  $\beta$  могут оказаться значительными, что также недопустимо, так как это приводит к размытию интерференционных полос на вторичной голограмме. Ограничение на  $\alpha_0$  сверху определяется зависимостью оптического пути  $L$  от  $\alpha$ , а именно:

$$\alpha_0 \frac{\partial L}{\partial \alpha} < \frac{\lambda}{2}. \quad (6.16.41)$$

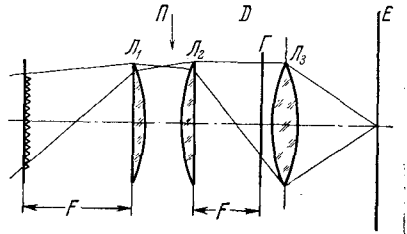


Рис. 6.39. Схема получения плоских проекций трехмерного фазового предмета.

Поскольку, согласно предыдущему условию,  $\alpha_0 \approx \theta_0$ , где

$$\theta \sim \frac{\partial L}{\partial y}, \quad (6.16.42)$$

то

$$\frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial \alpha} < \frac{\lambda}{2}, \quad (6.16.43)$$

или

$$\theta \frac{\partial L}{\partial \alpha} < \frac{\lambda}{2}. \quad (6.16.44)$$

Условие (6.16.43) также следует из анализа второй возможности диафрагмирования пучка: диафрагма, помещенная в предметной плоскости  $E$ , выделяет конический пучок света. Четкие интерференционные полосы на вторичной голограмме получаются только в том случае, когда вариации оптического пути в отверстии диафрагмы диаметром  $d$  меньше  $\lambda/2$ , т. е. если

$$d \frac{\partial L}{\partial y} < \frac{\lambda}{2}. \quad (6.16.45)$$

Однако для того, чтобы эффект авантюриновых точек был мал, необходимо, чтобы

$$d' > \frac{\partial L}{\partial \alpha}. \quad (6.16.46)$$

Отсюда опять получается условие (6.16.43).

Ограничение (6.16.43) оказывается весьма неприятным. Действительно, при выполнении этого условия допустимое изменение угла наблюдения в пределах апертуры диафрагмы в случае 1) с параллельным пучком лучей оказывается таким, что сдвиг интерференционных полос становится меньшим половины полосы. Эту трудность можно частично устранить, если ввести дискретные изменения угла наблюдения. Вместо рассеивающей пластинки, которая создает авантюриновые точки, в этом случае используется совокупность параллельных, но по-разному ориентированных пучков, различающихся дискретными угловыми интервалами. Пучки создаются системой точечных источников в фокальной плоскости коллимирующей линзы. Угловой интервал между соседними пучками должен быть не меньше  $2\theta$ , т. е. не меньше минимального углового разделения, соответствующего минимальной апертуре диафрагмы в голографической установке с рассеивающим экраном (см. рис. 6.37). Однако ограничение на  $\partial L/\partial \alpha$  теперь уже отсутствует. Количество информации, регистрируемое



такой системой, возрастает в  $N$  раз, где  $N$  — число пучков, а разрешающая способность по изображению увеличивается в  $\sqrt{N}$  раз. Кроме интерференционных полос такое устройство при восстановлении позволяет получать обычные фотографии, которые воспроизводятся в обычных теневых приборах.

### § 6-17. Информационная емкость фотоэмульсии и ее использование в голографии

Прежде всего рассмотрим пространственную структуру изображений, восстанавливаемых в обычной голографии с параллельными пучками. В простейшем случае амплитуда волны непосредственно за голограммой равна

$$u_{\text{вых}}(x) = 1(x) \cdot I(x) = [a_0^2 + u^2(x)] + a_0 u(x) e^{-i[\omega_0 x - \Phi(x)]} + a_0 u(x) e^{i[\omega_0 x - \Phi(x)]}, \quad (6.17.1)$$

где

$$u = u(x) e^{i\Phi(x)}.$$

Проанализируем пространственную структуру этого волнового поля. Для этого найдем его фурье-образ:

$$\hat{\mathfrak{F}}[u_{\text{вых}}(x)] = a_0^2 \delta(\omega) + \hat{\mathfrak{F}}[u(x)] \otimes \hat{\mathfrak{F}}[u(x)] + a_0 \hat{\mathfrak{F}}[u]_{\omega=-\omega_0} + a_0 \hat{\mathfrak{F}}[u]_{\omega=+\omega_0}. \quad (6.17.2)$$

Предположим для простоты, что спектр амплитуды  $u(x)$  имеет вид прямоугольного импульса (рис. 6.40):

$$\hat{\mathfrak{F}}[u(x)] = \Pi_{\Omega_0}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\Omega_0}, & |\omega| \leq \Omega_0, \\ 0, & |\omega| > \Omega_0. \end{cases} \quad (6.17.3)$$

Свертка

$$\hat{\mathfrak{F}}[u(x)] \otimes \hat{\mathfrak{F}}[u(x)] = \Lambda_{2\Omega_0}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\Omega_0} \left(1 - \frac{|\omega|}{2\Omega_0}\right), & |\omega| \leq 2\Omega_0, \\ 0, & |\omega| > 2\Omega_0, \end{cases} \quad (6.17.4)$$

равна треугольному импульсу (рис. 6.41). Таким образом, фурье-образ функции  $u_{\text{вых}}(x)$  имеет следующую структуру. Дельта-функция на нулевой частоте ( $\omega = 0$ ) соответствует среднему уровню засветки, создаваемой опорным пучком на стадии получения голограммы и прямым опорным пучком на стадии восстановления. Автосвертка спектра амплитуды расположена около

нулевой пространственной частоты и простирается в нашем частном случае от  $-2\Omega_0$  до  $+2\Omega_0$ .

Можно, однако, показать, что если под  $\Omega_0$  понимать максимальную пространственную частоту оптического сигнала  $u(x)$ , то в самом общем случае автосвертка  $\hat{F}\{u(x)\} \otimes \hat{F}\{u(x)\}$  также заполнит интервал пространственных частот от  $-2\Omega_0$  до  $+2\Omega_0$ .

Далее, слева и справа от нулевой частоты на частотах  $-\omega_0$  и  $+\omega_0$  сосредоточены спектры регистрируемого сигнала  $u(x)$ ,

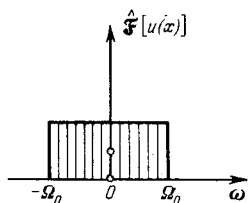


Рис. 6.40. Вид спектра исходной амплитуды волны  $u(x)$  в плоскости голограммы.

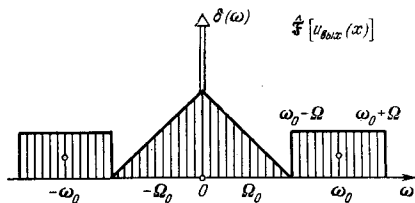


Рис. 6.41. Фурье-образ функции  $u_{\text{вых}}(x)$ , возникающей при освещении голограммы плоской волной.

занимающие интервалы пространственных частот от  $(-\omega_0 - \Omega_0)$  до  $(-\omega_0 + \Omega_0)$  и от  $(\omega_0 - \Omega_0)$  до  $(\omega_0 + \Omega_0)$ .

Так выглядит пространственная структура восстановленной волны непосредственно за голограммой. Центральный пучок и побочная автосвертка не несут полезной информации. Восстанавливаемые оптические сигналы  $u(x)e^{i\Phi(x)}$  и  $u(x)e^{-i\Phi(x)}$  наклонены под углами  $+\theta_0$  и  $-\theta_0$  соответственно.

Выбор угла  $\theta_0$  и соответственно несущей пространственной частоты голограммы  $\omega_0$  можно оптимизировать. Это особенно важно, так как высокие значения пространственной несущей  $\omega_0$  требуют высоко разрешающих эмульсий, обладающих, как известно, низкой чувствительностью. На первый взгляд может показаться, что частота  $\omega_0$  должна лишь немного превышать  $\Omega_0$ , наивысшую пространственную частоту оптического сигнала. Однако это не так, что видно из полного спектра амплитуды волны непосредственно за голограммой. Действительно, из рис. 6.41 видно, что прямой пучок, изображаемый  $\delta$ -функцией, окружен вредной составляющей спектра. Этот спектр, простирающийся от  $-2\Omega_0$  до  $+2\Omega_0$ , возник вследствие того, что фотографическая эмульсия является квадратичным детектором, а любые нелинейные искажения всегда расширяют исходный спектр. Поэтому минимальная пространственная частота  $\omega_{\text{мин}}$  должна равняться утроенному значению  $\Omega_0$ :

$$\omega_{\text{мин}} = 3\Omega_0. \quad (6.17.5)$$

Фотоэмульсия, не являющаяся точечным детектором, характеризуется пространственным импульсным откликом  $s(x)$ , т. е. откликом на дельта-функцию  $\delta(x)$ . Поэтому фактически реги-

стрируемое фотоэмульсией распределение света  $I'(x)$  имеет вид

$$I'(x) = \int s(\xi) I(x - \xi) d\xi = s(x) \otimes I(x). \quad (6.17.6)$$

Сверточное соотношение (6.17.6) означает, что фурье-образы импульсного отклика  $s(x)$  и интенсивности  $I(x)$  можно перемножать. Таким образом,

$$\hat{\mathcal{F}}[I'(x)] = \hat{\mathcal{F}}[s(x)] \cdot \hat{\mathcal{F}}[I(x)] = S(\omega) \cdot \hat{\mathcal{F}}[I(x)]. \quad (6.17.7)$$

Аналогичное соотношение можно написать для амплитуды волны света непосредственно за голограммой:

$$\hat{\mathcal{F}}[u_{\text{вых}}(x)] = S(\omega) \cdot \hat{\mathcal{F}}[I(x)]. \quad (6.17.8)$$

Разрешающая способность эмульсии, определяемая функцией рассеяния  $s(x)$  или передаточной функцией  $S(\omega)$ , должна быть такой, чтобы передать без искажения наивысшую пространственную частоту в  $I(x)$ . Легко видеть, что наивысшая пространственная частота в  $I(x)$ , равная

$$\omega_{\text{макс}} = \omega_0 + \Omega_0, \quad (6.17.9)$$

должна быть ниже частоты обрыва передаточной функции  $S(\omega)$ . Однако, прежде чем сделать окончательный выбор материала, пригодного для правильного воспроизведения исходного оптического сигнала с помощью голограммы, необходимо учесть одновременно два фактора: размер поля зрения и предельное разрешение по предмету. Только их произведение задает объем информации, который необходимо вобрать с помощью голограммы. Для голограммы также необходимо учитывать два фактора: размер голограммы, а также пространственное разрешение. Ивариантом голограммы, характеризующим ее информационную емкость, является полное число интерференционных линий, вмещающихся в голограмму и хорошо разрешаемых используемым детектором.

Свойства передаточной функции  $S(\omega)$  по-разному сказываются на предельном разрешении голограмм разных типов. Например, для голограммы Френеля передаточная функция ограничивает число колец Френеля, которые может зарегистрировать фотопластинка с ограниченной разрешающей способностью. Это косвенно уменьшает эффективный размер голограммы: если разрешающая способность недостаточна, то часть интерференционных колец смажется и работать эффективно будет лишь часть всей голограммы. А это приведет к размытию дифракционного пятна, или к ухудшению разрешающей способности по предмету.

В случае голографии Фурье передаточная функция умножается не на фурье-образ интенсивности, как в случае голограммы Френеля, а непосредственно на распределение интенсивности,

так как голограмма Фурье регистрируется в плоскости пространственных частот. Здесь обрыв передаточной функции  $S(\omega)$  на некоторой частоте проявляется в ограничении поля зрения по предмету: с уменьшением частоты обрыва передаточной функции периферические части изображения предмета ухудшаются и затем полностью размываются.

Так выражается общее правило о сохранении произведения размера предмета на ширину пространственных частот.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению вопроса о разрешающей способности фотоэмульсии для каждого из четырех основных типов голограмм. Найдем выражения для несущей частоты  $\omega_0$ , необходимой для разделения изображений на стадии восстановления, а также для требуемой минимальной разрешающей способности фотоэмульсии.

Будем исходить из следующих выражений для фурье-образа сферического френелевского образа исходного предмета-транспаранта  $t(x)$ , информация о котором регистрируется голографически:

Для голограммы Френеля:

$$\Psi(\omega) \sim T\left(M_c \frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-i \frac{\lambda_2 f_1 \omega^2}{4\pi}}. \quad (6.17.10)$$

Для тенеграммы:

$$\Psi(\omega) \sim T\left(M_1 \frac{\omega}{2\pi}\right). \quad (6.17.11)$$

Для голограммы квази-Фурье:

$$\Psi(\omega) \sim t\left(-\frac{\lambda_2 f_2}{M_1} \frac{\omega}{2\pi}\right) e^{i \frac{\lambda_2 f_2 \omega^2}{4\pi}}. \quad (6.17.12)$$

Для голограммы Фурье:

$$\Psi(\omega) \sim t\left(-\lambda_1 q_1 \frac{\omega}{2\pi}\right). \quad (6.17.13)$$

Несущая частота  $\omega_0$  выбирается исходя из условия разделения восстановленных изображений от нулевого пучка, который имеет, кроме дельта-функции, также автосвертку сигнала. В случае голограммы Френеля и тенеграммы несущая частота голограммы зависит от максимальной пространственной частоты предмета-транспаранта. В случае голограмм квази-Фурье и Фурье несущая частота  $\omega_0$  определяется размером предмета.

Минимальное значение разрешающей способности  $\nu_0$  линий/мм, требуемое для восстановления предмета размером  $a_0$  и

максимальной пространственной частоты  $\Omega_0$ , равно

$$\nu_0 = \omega_0 + \Omega_0. \quad (6.17.14)$$

Результаты анализа приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Тип голограммы	Несущая частота	Требуемая разрешающая способность фотоэмульсии $\nu_0$ , линий/мм
Голограмма Френеля	$3 \frac{\Omega_0}{M_c}$	$\omega_0 + \frac{\Omega_0}{M_c} = 4 \frac{\Omega_0}{M_c}$
Тенеграмма	—	$\frac{\omega_0}{M_1}$
Голограмма квази-Фурье	$3 \frac{a_0}{\lambda_1 q_1} \left  1 - \frac{M_1}{M_c} \right $	$\omega_0 + \frac{a_0}{\lambda_1 q_1} \left  1 - \frac{M_1}{M_c} \right  = 4 \frac{a_0}{\lambda_1 q_1} \left  1 - \frac{M_1}{M_c} \right $
Голограмма Фурье	$3 \left( \frac{a_0}{\lambda_1 q_1} \right)$	$\omega_0 + \frac{a_0}{\lambda_1 q_1} = 4 \frac{a_0}{\lambda_1 q_1}$

Данные, приведенные в табл. 6.3, позволяют сделать следующие выводы:

— В случае голограммы Френеля и тенеграммы конечная разрешающая способность пленки кладет предел пространственному разрешению восстанавливаемого изображения.

— В случае голограммы квази-Фурье и голограммы Фурье конечная разрешающая способность пленки ограничивает размеры предмета или поле зрения.

— В случае голограммы общего вида фотографическая эмульсия ограничивает как пространственное разрешение, так и размер предмета.

### § 6-18. Некоторые особенности амплитудного синтеза изображений с помощью голографии

На одной голограмме можно зарегистрировать несколько предметов. Наложение их можно осуществить двумя существенно отличающимися методами. В одном из них все предметы голографируют за одну экспозицию. Это — когерентное, или одновременное, наложение. Возможен также и другой метод, при котором наложение осуществляется несколькими разделенными во времени экспозициями. При этом в каждой экспозиции голографируют только один предмет. Предметы поочередно располагают в разных местах, чтобы не происходило их совпадений в пространстве на стадии восстановления.

Метод амплитудного сложения или вычитания предметов лучше всего осуществляется в голограмме Фурье. В § 6-6 был описан пример вычитания амплитуд предметов, зарегистрированных в последовательных экспозициях, причем во второй экспозиции в опорном пучке вводился сдвиг фазы на  $\pi$ , благодаря чему достигалась операция вычитания, а не сложения.

Проанализируем особенности метода амплитудного синтеза при последовательных экспонированиях, сравнив его с одновременной регистрацией.

При многократной экспозиции голограммы на ней суммируются частичные интенсивности, так что полная интенсивность равна

$$I(x) = \sum_i I_i(x) = \sum_i |a_0 + u_i|^2, \quad (6.18.1)$$

где  $a_0$  — амплитуда опорного пучка,  $u_i$  — предметная волна. В развернутом виде (6.18.1) запишется так:

$$\begin{aligned} I &= \sum_i I_i(x) = \sum_i (a_0^* + u_i^*)(a_0 + u_i) = \\ &= \sum_i |a_0|^2 + \sum_i |u_i|^2 + A_0 \sum_i u_i^* + A_0^* \sum_i u_i, \end{aligned} \quad (6.18.2)$$

где

$$A_0 = \sum_i a_0.$$

Из (6.18.2) видно, что при восстановлении за голограммой появляется волна  $\sum_i u_i$ , которая представляет собой сумму амплитуд волн отдельных предметов  $u_i$ , а также ее комплексно-сопряженная волна  $\sum_i u_i^*$ .

При одновременной регистрации всех предметов распределение интенсивности, регистрируемое голограммой, равно

$$\begin{aligned} I &= (A_0 + \sum_i u_i)(A_0^* + \sum_i u_i^*) = \\ &= \sum_i |u_i|^2 + |A_0|^2 + A_0 \sum_i u_i^* + A_0^* \sum_i u_i + \sum_{j,h} u_j u_h^* + \sum_{j,h} u_j^* u_h. \end{aligned} \quad (6.18.3)$$

Сравнивая (6.18.3) и (6.18.2), можно сделать вывод о том, что при одновременной регистрации всех предметов голограмма содержит также дополнительные перекрестные произведения ( $u_j u_h^* + u_j^* u_h$ ), которые отсутствуют при последовательной экспозиции. Эти кросс-корреляционные члены являются причиной появления фантомных изображений, свойства которых подробно рассматриваются в § 6-27.

Из сравнения (6.18.2) и (6.18.3) также видно, что в случае последовательных экспозиций член смещения

$$\sum_i |a_0|^2 + \sum_i |u_i|^2 \quad (6.18.4)$$

занимает значительно меньше пространственных частот вокруг нулевой пространственной частоты, чем член смещения

$$\sum_i |u_i|^2 + |A_0|^2 + \sum_{j,k} u_j u_k^* + \sum_{j,k} u_j^* u_k \quad (6.18.5)$$

в случае одновременной экспозиции (последний занимает пространственные частоты не только вблизи нулевой частоты, но также и вдали от нее).

На рис. 6.42 показано для сравнения восстановленное изображение, полученное синтезированной голограммой (вверху)

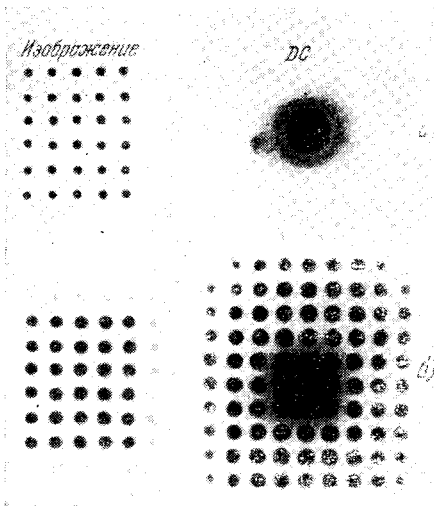


Рис. 6.42. Сравнение восстановленных изображений при различных методах голографирования точек. а) Изображение получено от синтезированной голограммы при последовательных экспозициях; б) изображение получено от голограммы, когда все точки экспонировались одновременно.

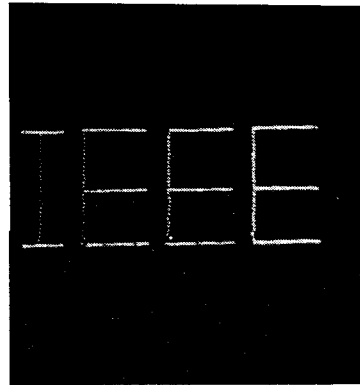


Рис. 6.43. Вид слова IEEE, полученного путем наложения на одной фотопластинке 450 голограмм Фурье от каждой яркой точки, являющейся отдельной компонентой данного слова.

и обычной голограммой (внизу). Синтезированная голограмма получена при последовательных экспозициях друг за другом 30 точек, передвигаемых в пределах прямоугольника. Обычная голограмма была получена при одновременной экспозиции всех 30 точек, размещенных в тех же местах.

Важным следствием того удивительного факта, что синтезированная голограмма обладает меньшим и более узким фоном вблизи нулевых пространственных частот, является то, что предмет можно располагать ближе к опорному пучку. Таким образом, несущую пространственную частоту можно взять равной не  $3 \frac{a_0}{\lambda_1 q_1}$  (как это приведено в табл. 6.3), где  $a_0$  — размер предмета, а  $q_1$  — расстояние от предмета до голограммы, а просто  $a_0/\lambda_1 q_1$  или всего лишь несколько больше  $a_0/\lambda_1 q_1$ . Для синтезированной голограммы пригодны фотоэмульсии с разрешающей способностью в 2—3 раза худшей, чем при одновременной регистрации. Эксперимент по синтезу слова IEEE (рис. 6.43), состоящего из 450 компонент, производился по схеме голографии Фурье путем запрограммированного движения системы из микроскопического объектива и точечного отверстия формирующей точки  $P_n$ . Отношение  $|a_0|^2/|u_i|^2$  равнялось примерно 5;  $q_1 = 65$  см; размер голограммы составлял  $2$  см  $\times$   $4,8$  см.

Аналогичным методом была получена синтезированная голограмма трехмерного предмета, состоящего более чем из 1000 точек.

### § 6-19. Искусственная голограмма.

Обычная голограмма получается при регистрации интерференционной картины, возникающей при наложении предметного и опорного пучков. Для точечного предмета голограмма имеет вид либо зонной картины Френеля — Габора (в случае плоского опорного пучка — голограмма Френеля), либо интерференционных полос (в случае точечного опорного источника, удаленного от голограммы на такое же расстояние, как и сам точечный предмет, — голограмма Фурье). Эти простейшие голограммы можно рассматривать как «строительные кирпичи» голограммы произвольного предмета, который можно свести к конечному числу элементов разрешения, и, таким образом, представить любую голограмму состоящей из конечного числа элементарных голограмм. Если излучение, распространяющееся от отдельных точек предмета, взаимно пространственно когерентно, то на голограмме регистрируется интенсивность суммарной амплитуды. Это — случай одновременного, или когерентного, наложения оптических сигналов. Если же излучение от отдельных точек предмета пространственно некогерентно, например, эти точки последовательно во времени появляются в каждой из серии экспозиций, то происходит наложение «строительных кирпичей», или элементарных голограмм. Это — синтез изображений путем последовательного накопления элементарных голограмм в скрытом изображении на одной голограмме. В опытах, описанных в предыдущем параграфе, элементарные голограммы получались с помощью



лазерного пучка, как это обычно осуществляется в голографии.

Однако элементарные голограммы не обязательно переносить на общую голограмму непосредственно в явном виде. Нет необходимости воспроизводить их многократно в эксперименте. Можно устранить и сам эксперимент, если каждую элементарную голограмму рассматривать как эталон, представленный в виде аналитического выражения. Поэтому наложение элементарных голограмм можно производить расчетно, без помощи лазера. Таким приемом создаются искусственные голограммы.

При этом, как и в случае обычной голограммы, синтез искусственных голограмм можно производить либо в форме одновременного синтеза, либо в форме последовательного синтеза. Кроме того, в расчетную голограмму можно вносить исправления, устраняя на ней нежелательные компоненты. Поэтому искусственная голограмма имеет, как правило, пространственную структуру, которую обычная голограмма иметь не может. Иначе говоря, в самом процессе изготовления искусственной голограммы можно совершать различные операции фильтрации ее пространственной структуры.

Наиболее сложный и трудный метод изготовления искусственных голограмм состоит в воспроизведении голограммы такой, какой она получается в лазерном пучке, с полутонами. Такую голограмму рисуют сначала крупно, а затем уменьшают фотографически.

Поскольку оптические устройства и сама фотографическая эмульсия обладают конечной разрешающей способностью, то в исходной крупномасштабной голограмме можно ввести дискретные ячейки, а вместо непрерывных градаций полутонов использовать только конечное число различающихся уровней интенсивности.

С помощью электронно-вычислительных машин удается осуществить быстрый синтез и нанесение искусственных голограмм, состоящих из 300 000 разрешающих ячеек при 16 градациях уровня интенсивности. Для нанесения крупномасштабных искусственных голограмм используются специальные рисовальные устройства, которые являются неотъемлемой частью некоторых электронно-вычислительных машин или многокапальных анализаторов.

Недавно опробован также метод отображения искусственной голограммы на экране катодно-лучевой трубки с последующим фотографированием в уменьшенном размере.

Существуют также более простые методы изготовления искусственных голограмм, обладающие высоким быстродействием. Этими методами изготавливаются прежде всего бинарные искусственные голограммы, т. е. такие голограммы, на которых ячейка либо полностью поглощает свет, либо полностью пропускает.

Рассмотрим основные эффекты, возникающие при переходе от полутонного изображения к бинарному, на примере элементарной голограммы в виде зонной картины Френеля — Габора. Как известно, интенсивность света в такой элементарной голограмме имеет вид

$$I(\mathbf{x}) = |1 + \alpha e^{i \frac{k\mathbf{x}^2}{2q}}|^2 = 2 \left[ 1 + \alpha \cos \frac{k\mathbf{x}^2}{2q} \right], \quad (6.19.1)$$

где  $\mathbf{x}^2 = x^2 + y^2$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $q$  — расстояние от точки до плоскости голограммы вдоль оси  $z$ . Интерференционная картина, которая описывается косинусоидой  $\cos(k\mathbf{x}^2/2q)$ , может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим геометрическое место точек, которое подчиняется условию

$$k \frac{\mathbf{x}^2}{2q} = \frac{\pi}{2} (2n + 1), \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.19.2)$$

Очевидно, что эти точки изображают границу раздела, где интерференционная косинусоида меняет знак. Если на темном экране прорезать узкие полоски вдоль этих границ раздела, то получится бинарный образ зонной картины Френеля — Габора. Возможен и другой метод получения бинарной картины. Это знакомый образ зонной картины Френеля — Габора, который определяется выражением:

$$f_{\text{зн}}(x) = \text{sgn} \left[ \cos \frac{k\mathbf{x}^2}{2q} \right] = \begin{cases} 1, & \cos \frac{k\mathbf{x}^2}{2q} > 0, \\ -1, & \cos \frac{k\mathbf{x}^2}{2q} < 0. \end{cases} \quad (6.19.3)$$

Можно рассматривать также его униполярный вариант:

$$f_{\text{зн}}^{\oplus}(x) = 1 + \text{sgn} \left( \cos \frac{k\mathbf{x}^2}{2q} \right). \quad (6.19.4)$$

Все приведенные здесь бинарные образы получаются из исходной картины Френеля — Габора с помощью нелинейных преобразований. Поэтому на стадии восстановления при освещении такой голограммы возникнут боковые пучки высших порядков, а также появятся другие нелинейные искажения. Это также следует из явных выражений. Знаковый образ зонной картины Френеля — Габора разлагается в ряд

$$f_{\text{зн}}(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left( \cos \frac{k\mathbf{x}^2}{2q} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} \cos(2l-1) \frac{k\mathbf{x}^2}{2q}}{(2l-1)}. \quad (6.19.5)$$

Бинарная картина Френеля описывается выражением

$$f_{\text{бин}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\pi\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n} \cos\left(n \frac{kx^2}{2q}\right), \quad (6.19.6)$$

где  $2\varepsilon$  — относительная ширина граничной полосы в радианах пространственной частоты.

Интенсивности восстановленных изображений в первом порядке дифракции каждой из рассмотренных элементарных голограмм (зонной картины Френеля — Габора, знакового образа картины Френеля — Габора или просто зонной пластинки Френеля, а также бинарного образа картины Френеля — Габора) находятся в соотношении

$$I_{\text{Ф-Г}} : I_{\text{ЗН}} : I_{\text{Бин}} = 1 : \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 : \left(\frac{8}{\pi^2}\varepsilon\right)^2. \quad (6.19.7)$$

Относительная ширина  $2\varepsilon$  граничной полосы является параметром, определяющим структуру бинарной картины. Очевидно, что при  $\varepsilon = \pi/2$  бинарная картина совпадает со знаковым образом.

Следующий упрощенный шаг при нанесении искусственных голограмм состоит в замене граничной кривой цепочкой точек, отстоящих друг от друга на интервал, задаваемый программой вычисления бинарного образа произвольного предмета на электронно-вычислительной машине.

Операция вычисления бинарной дискретной искусственной голограммы сводится к определению знака функции

$$f(\mathbf{x}) = \sum_k \alpha_k \cos \frac{k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})^2}{2q_k(\mathbf{x})}, \quad (6.19.8)$$

где  $q_k$  — расстояние точки  $\mathbf{x}_k$  до плоскости голограммы. Там, где функция  $f(\mathbf{x})$  меняет знак на обратный, наносится прокол в экране искусственной голограммы или рисуется точка на белом фоне. Так была изготовлена искусственная голограмма предмета в виде тетраэдра. Нанесение точек на искусственной голограмме производит автомат. Затем голограмма фотографируется с уменьшением до необходимого размера.

Стадия восстановления осуществляется с помощью гелий-неонового лазера. На рис. 6.44 показана искусственная голограмма, а на рис. 6.45 — восстановленное изображение тетраэдра. На рис. 6.46 показана искусственная голограмма двух не существующих реально треков заряженных частиц, а на рис. 6.47 — восстановленные изображения при полном (а) и частичном (б) просвечивании уменьшенной искусственной голограммы.

Таким же методом изготавливают не только бинарную голограмму Френеля, но также и бинарную голограмму Фурье.

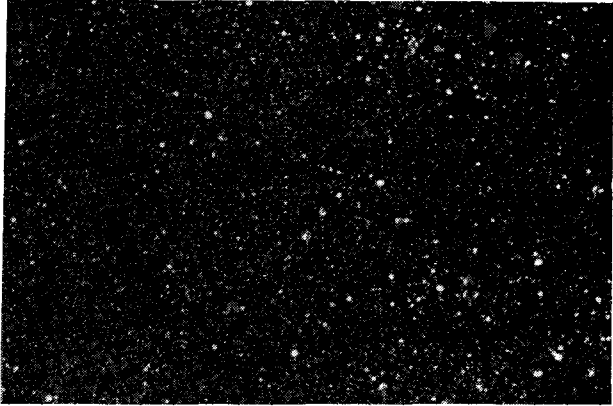


Рис. 6.44. Вид искусственной голограммы, выполненной по методу нанесения нулей функции  $f(x, y)$ , которая описывает интерференционную картину.

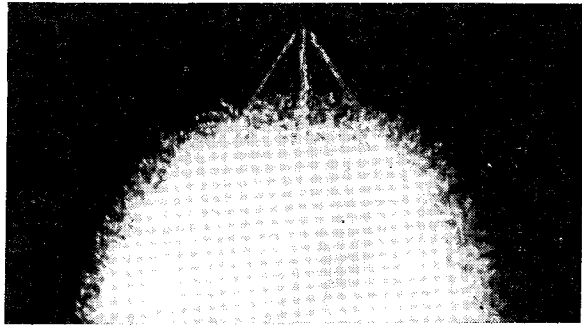


Рис. 6.45. Изображение тетраэдра в пространстве, полученное с помощью голограммы рис. 6.44.

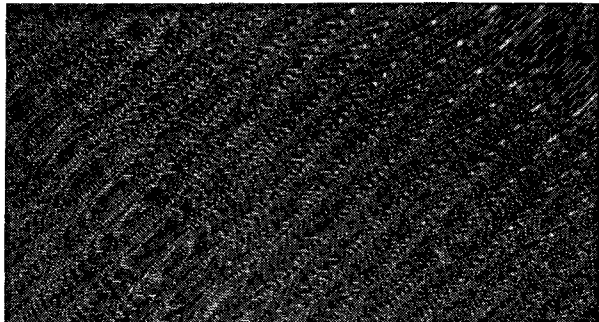


Рис. 6.46. Искусственная голограмма «треков частиц», состоящих из цепочки ярких точек.

В этом случае задача формулируется следующим образом (рис. 6.48). С помощью искусственной голограммы, помещенной в плоскость пространственных частот Фурье  $\omega$ , требуется получить в плоскости изображения  $x$  заданное распределение  $f(x)$ .

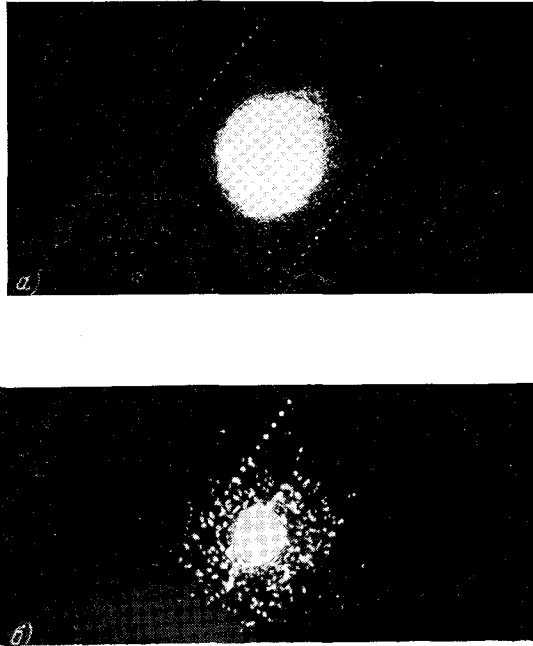


Рис. 6.47. Восстановленные изображения треков в пространстве, которые получены с помощью искусственной голограммы (рис. 6.46), уменьшенной фотографически до размера  $4,5 \times 3,0$  мм. а) Полное изображение; б) изображение верхнего трека, полученное при просвечивании небольшой части голограммы с помощью узкого пучка лазера. Фокусное расстояние  $f \approx 250$  мм.

Собирающая линза  $L_2$  осуществляет преобразование Фурье. Поэтому в плоскости частот  $\omega$  отображается функция

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f(x)] = \int f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (6.19.9)$$

где  $\omega = x/\lambda f$ .

Найдем уравнение, которому должна удовлетворять голограмма  $H(\omega)$ . Исходим из того, что при освещении голограммы  $H(\omega)$  плоской наклонной волной

$$a(\omega; x_0) = e^{i2\pi x_0 \omega x} \quad (6.19.10)$$

непосредственно за голограммой появится волна с амплитудой

$$H(\omega) \cdot a(\omega; x_0). \quad (6.19.11)$$

Очевидно, что эту волну следует приравнять фурье-образу заданного распределения  $f(\mathbf{x})$ :

$$F(\omega) = H(\omega) \cdot a(\omega; \mathbf{x}_0). \quad (6.19.12)$$

Это уравнение определяет свойства искомой голограммы Фурье

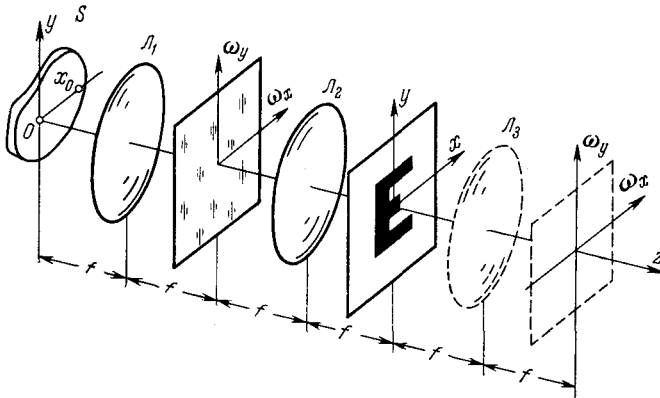


Рис. 6.48. Рисунок, поясняющий расположение искусственной голограммы, изображения и линз  $L_1, L_2, L_3$ , осуществляющих преобразование Фурье.

$H(\omega)$ . Учтем теперь дискретный характер информации, содержащейся в заданном предмете  $f(\mathbf{x})$ . Во-первых, предмет  $f(\mathbf{x})$  имеет конечную протяженность:

$$|x|_{\text{макс}} = A_x; |y|_{\text{макс}} = A_y; A_x = A_y = A. \quad (6.19.13)$$

Во-вторых, оптическая система обладает конечным разрешением:

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{\omega_{\text{макс}}}. \quad (6.19.14)$$

Эти факторы определяют размер голограммы ( $\sim \omega_{\text{макс}}$ ) и размер ячейки ( $\sim A$ ). Число разрешаемых элементов в голограмме  $N_{\Gamma}^2$  должно быть больше или равно числу разрешаемых элементов в изображении  $N_{\Pi}^2$ . Таким образом,

$$N_{\Pi}^2 = \frac{2A_x}{\Delta x} \frac{2A_y}{\Delta y} = \left( \frac{2A}{\Delta x} \right)^2 = (2A \omega_{\text{макс}})^2, \quad (6.19.15)$$

$$N_{\Gamma}^2 = \left( \frac{2\omega_{\text{макс}}}{\delta\omega} \right)^2, \quad (6.19.16)$$

откуда

$$\left( \frac{2\omega_{\text{макс}}}{\delta\omega} \right)^2 \geq \left( \frac{2A}{\Delta x} \right)^2 = (2A \omega_{\text{макс}})^2, \quad (6.19.17)$$

или

$$\delta\omega \leq \frac{1}{A}. \quad (6.19.18)$$

Воспользовавшись теоремой отсчетов для функции  $f(x)$ , отличной от нуля только в квадрате размером  $(2A)^2$ , представим ее фурье-образ в виде следующего ряда:

$$F(\omega) = \sum_n \sum_m F\left(\frac{n}{2A}, \frac{m}{2A}\right) \text{sinc}(\omega_x 2A - n) \text{sinc}(\omega_y 2A - m), \quad (6.19.19)$$

где

$$\text{sinc } \alpha = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha}.$$

Функция  $F(\omega)$  полностью определяется совокупностью комплексных чисел  $F(n/2A, m/2A)$ . Квадратный элемент-ячейка в плоскости частот  $\omega$  имеет размеры

$$\delta\omega = \frac{1}{A},$$

что соответствует равенству числа разрешаемых элементов в изображении и голограмме. Для того чтобы отобразить комплексные числа  $F(n/2A, m/2A)$  в каждой ячейке, необходимо ввести два действительных параметра. Существует много различных способов введения в ячейку двух действительных параметров, в каждом из которых размер, вид и положение одной или нескольких фигур в ячейке характеризуют эти два параметра.

Хорошо зарекомендовала себя ячейка в виде прямоугольного окна с меняющейся высотой  $W\delta\omega$ , фиксированной шириной  $c\delta\omega$  и меняющимся положением  $P\delta\omega$  (рис. 6.49). При этом

$$\left. \begin{aligned} |\omega_x - (n + P_{nm})\delta\omega| &\leq \frac{c}{2}\delta\omega, \\ |\omega_y - m\delta\omega| &\leq W_{nm}\frac{\delta\omega}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19.20)$$

Соотношения (6.19.20) означают, что относительная высота окна равна  $W$ , относительная ширина  $c$ , а  $P_{nm}$  характеризует относительный сдвиг центра окна. Высота окна определяется амплитудой волны в ячейке  $(n, m)$ . Относительный сдвиг определяется фазой волны в ячейке  $(n, m)$ . Относительная ширина  $c$  — свободный параметр, который определяет яркость изображения. В силу

требования принципа Бабине относительное значение  $c$  должно подчиняться соотношению

$$c = 1 - c, \quad (6.19.24)$$

откуда

$$c = \frac{1}{2}. \quad (6.19.22)$$

Еще один параметр — наклон плоской волны, освещающей голограмму  $H(\omega)$ , — выбирается

ради упрощения расчетов таким, чтобы

$$x_0 \delta \omega = M, \quad (6.19.23)$$

где  $M$  — целое число. Поскольку яркость изображения зависит от  $M$ , как  $(1/\pi M)^2$ , то наиболее желательно выбирать  $M = 1$ .

Строгое рассмотрение процесса дифракции плоской волны на бинарной голограмме Фурье позволяет установить оправданность ряда приближений, которые приходится вводить на стадии расчета искусственной голограммы.

Процедура изготовления искусственной бинарной голограммы Фурье сводится

Рис. 6.49. Один из возможных методов введения в элементарную ячейку искусственной голограммы двух действительных параметров. Элементарная ячейка имеет вид прямоугольного окна, высота и расположение которого относительно оси квадрата характеризуют эти два действительных параметра. Ширина прямоугольного окна является параметром, который определяет яркость восстановленного изображения.

к следующим операциям. Сначала выбирается элемент разрешения по предмету  $\Delta x$ , удовлетворяющий требованию к качеству восстановленного изображения. Тем самым определяется размер голограммы  $D_r$ , где

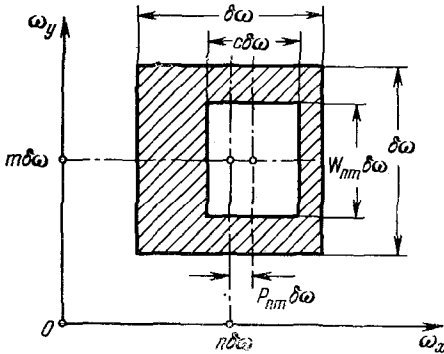
$$D_r = \omega_{\text{макс}} \lambda f. \quad (6.19.24)$$

В качестве входных данных для электронно-вычислительной машины используется матрица комплексных амплитуд

$$f(n \Delta x, m \Delta x) = f_{nm}, \quad (6.19.25)$$

состоящая из  $N^2$  комплексных чисел, где  $N = 2A/\Delta x$  равно числу разрешаемых элементов вдоль оси  $x$ . Затем находится функция

$$v_{nm} = \frac{f_{nm}}{\text{sinc}[c \Delta x (x_0 + n \Delta x)]} = \frac{f_{nm}}{\text{sinc}\left[c \left(M + \frac{n}{N}\right)\right]}. \quad (6.19.26)$$





Поскольку такие качества изображения, как однородность по полю и его яркость, зависят от  $c$  и  $M$ , то далее с учетом этих требований находят их допустимые значения.

Если  $M = 1$ ,  $c = 1/2$ , то  $W_{\text{макс}} = 1$  и высокая яркость получается в центре изображения, а на краю она спадает до нуля.

Если  $M = 2$ ,  $c = 1/4$ , то  $W_{\text{макс}} = 2/\pi$  и качество изображения улучшается, но его яркость уменьшается в 20 раз.

Машинное преобразование Фурье

$$v_{nm} \rightarrow V_{jk}(j\delta\omega, k\delta\omega) = |V_{jk}| e^{i \frac{\varphi_{jk}}{2\pi}} \quad (6.19.27)$$

на электронно-вычислительной машине экономнее всего производить с помощью алгоритма Кули и Тьюки, который дает выигрыш в затрачиваемом рабочем времени машины в  $(4 \log_2 N)/N^2$  раз по сравнению с обычной программой преобразования Фурье. Анализ и схема программирования с помощью алгоритма Кули и Тьюки здесь не рассматриваются.

Рисующее устройство, с помощью которого наносится искусственная бинарная голограмма, характеризуется следующими параметрами. Движение пера осуществляется ступенчато. Число ступенек в одной ячейке равно 15. Амплитуда наносится с усреднением в 7%, а фаза — через интервал в  $24^\circ$ . Для очень малых амплитуд ( $< 0,05$ ) вводится дискриминация снизу. Дискриминация сверху иногда вводится для того, чтобы уменьшить число пустых ячеек (рис. 6.50, 6.51).

Необычным приемом выравнивания заполнения ячеек является процедура умножения исходной функции  $f(x)$  на экспоненту со случайными фазами. Это приводит к очень равномерному распределению яркости ячеек по голограмме (рис. 6.52). Обычно ячейка на голограмме имеет размер 4 мм. При фотографировании искусственной голограммы на пленку 649F ее размеры уменьшаются в 100 или 400 раз. Для повышения яркости изображений применяется отбеливание искусственной голограммы, благодаря чему яркость изображений иногда повышается в 6 раз (рис. 6.53).

Эксперименты с искусственными бинарными голограммами показали ряд преимуществ такого типа голограмм. Во-первых, ослабляется эффект шумов, обусловленных зернистостью. Это согласуется с тем фактом, что шум от зернистости эмульсии проявляется сильнее всего при средних уровнях засветки и в меньшей степени при нулевой или максимальной засветке. Во-вторых, бинарная голограмма дает более яркие (в  $(4/\pi)^2$  раза) изображения в первом порядке дифракции, чем обычная голограмма при полной модуляции по синусоидальной дифракционной решетке. В-третьих, с помощью бинарной голограммы легче вводить случайные фазы, и при этом без потери освещенности. В обычной голограмме матовое стекло часто оказывается неоптимальным.

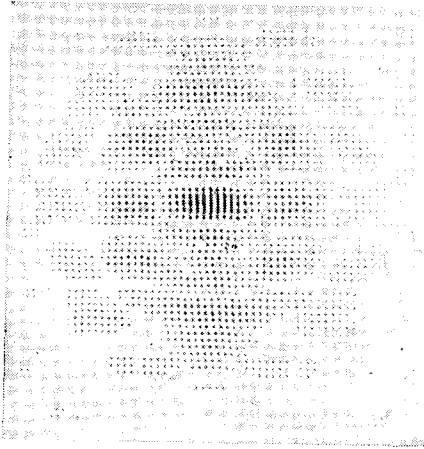


Рис. 6.50. Искусственная голограмма Фурье трех букв ICO. Видно, что наиболее яркие ячейки сосредоточены вблизи оптической оси.

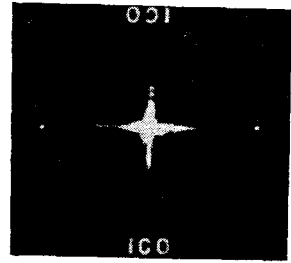


Рис. 6.51. Восстановленное изображение трех букв ICO. В центре — прямой пучок. Сверху и снизу — лучи первого дифракционного порядка. Слева и справа — яркие точки, обусловленные решетчатой структурой искусственной голограммы в направлении, перпендикулярном основной несущей. Кроме того, в каждом квадрате видны слабые изображения букв ICO, появление которых вызвано интермодуляцией.

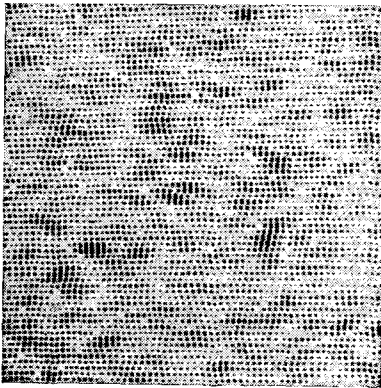


Рис. 6.52. Искусственная голограмма Фурье трех букв ICO, перед которой установлено фиктивное матовое стекло, создающее случайные сдвиги фаз. Для того чтобы ввести эффект матового стекла, исходную функцию  $f(x)$  умножают на экспоненциальный фазовый множитель со случайными значениями фаз. Эта процедура приводит к равномерному распределению яркости ячеек и к большей яркости восстановленного изображения.

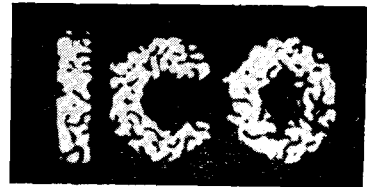


Рис. 6.53. Увеличенное восстановленное изображение трех букв ICO, полученное с помощью искусственной голограммы рис. 6.52. Ясно выступает типичная для матового стекла нерегулярная структура поля изображения.

Бинарные голограммы легко копировать. Синтез голограммы размером  $64 \times 64$  ячеек занимает 10 минут работы электронно-вычислительной машины типа IBM 7094.

Наконец, отметим еще одно весьма важное достоинство искусственной голограммы. Как было показано выше (§ 6-17), в пространственной структуре обычной голограммы присутствует вредная автокорреляция спектров  $F(\omega) \times F(\omega)$ , располагающаяся вокруг нулевой пространственной частоты, заполняя участок частот от  $-2\Omega_0$  до  $+2\Omega_0$ , где  $2\Omega_0$  — ширина спектра исходного оптического сигнала  $f(x)$ . В голограмме, изготавливаемой искусственно, вредный эффект автокорреляционного спектра можно устранить полностью. Для этого поступают следующим образом. Вместо фурье-образа  $F(\omega)$  сигнала  $f(x)$  вводят четную функцию

$$S(\omega) = F(\omega_x + \omega_0, \omega_y) + F(-\omega_x - \omega_0, \omega_y), \quad (6.19.28)$$

слагаемые которой разнесены по частоте на величину  $\omega_0$  и зеркально повернутые вокруг нулевой частоты. Обратный образ функции  $S(\omega)$  равен

$$s(x) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}[S(\omega)] = f(x)e^{-i\omega_0 x} + f^*(x)e^{i\omega_0 x}. \quad (6.19.29)$$

Разбивая функцию  $f(x)$  на действительную и мнимую части:

$$f(x) = a(x) + ib(x), \quad (6.19.30)$$

получаем

$$s(x) = 2[a(x)\cos\omega_0 x + b(x)\sin\omega_0 x]. \quad (6.19.31)$$

Функция  $s(x)$  действительная и четная. Добавляя к ней постоянное смещение  $s_0$ , можно получить новую функцию  $s(x) + s_0$ , которая принимает только положительные значения. Если эту функцию зарегистрировать на фотопластинке так, чтобы амплитудное пропускание было линейно связано с этой функцией, то полученная фотография будет содержать полную информацию о сигнале  $f(x)$  и ее можно назвать голограммой.

Пространственная структура голограммы имеет вид, показанный на рис. 6.54. Сигнальные боковые пучки занимают свое обычное положение вокруг частот  $-\omega_0$  и  $+\omega_0$ . Член смещения изображается  $\delta$ -функцией на нулевой частоте. Автокорреляционный спектр полностью отсутствует, что связано с тем, что при изготовлении искусственной голограммы были устранены нелинейные операции.

Сдвиг по частоте  $\omega_0$ , который определяет картину поля  $s(x)$ , вычисляемого на электронно-вычислительной машине, можно выбрать лишь несколько больше величины  $\Omega_0$  — наивысшей пространственной частоты в исходном оптическом сигнале  $f(x)$ . Как следствие этого для регистрации такой голограммы требуется фотоэмульсия с меньшей разрешающей способностью.

Оптический аналог того алгоритма, который используется при расчете такого типа искусственных голограмм, приведен

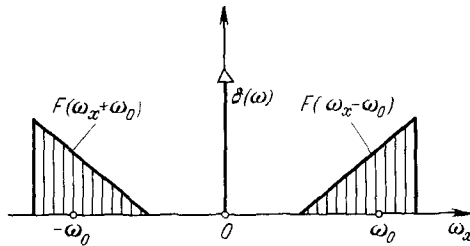


Рис. 6.54. Симметризованный и разнесенный в обе стороны фурье-образ исходного сигнала  $f(x)$ . Производный сигнал  $s(x)$  является действительным. С помощью такой процедуры устраняется вредная автокорреляция спектров  $F(\omega) \otimes F(\omega)$ , заполняющая область частот вокруг нулевой частоты. После устранения этой автокорреляции несущая частота голограммы должна лишь немного превышать максимальную пространственную частоту исходного сигнала  $f(x)$ .

на рис. 6.55. Четная функция  $S(\omega)$  вводится в переднюю фокальную плоскость линзы  $L$  и освещается параллельной волной когерентного света. В плоскости  $x$  отображается исходное поле  $s(x)$ .

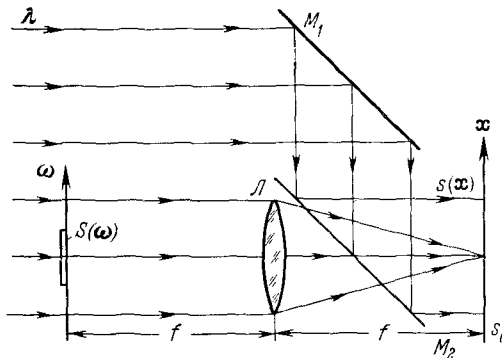


Рис. 6.55. Оптический аналог алгоритма, используемого при вычислении искусственной голограммы методом подавления вредной автокорреляции спектров исходного сигнала. Симметризованный спектр  $S(\omega)$  помещается в переднюю фокальную плоскость линзы  $L$  и освещается параллельным пучком света. В плоскости  $x$  отображается поле  $s(x)$ . Член смещения  $s_0$  создается плоской волной, получаемой с помощью зеркал  $M_1$  и  $M_2$ .

Член смещения  $s_0$  образуется плоской волной, создаваемой с помощью двух вспомогательных зеркал  $M_1$  и  $M_2$  и распространяющейся вдоль оси. В реальной голограмме регистрируется интенсивность света, т. е. квадрат модуля амплитуды. В данном же случае амплитуда  $[s(x) + s_0]$  является положительной величиной, и поэтому процессы возведения в степень и извлечения корня взаимно обратимы. В нашей задаче амплитудное пропускание голограммы, изготовленной искусственно, зависит линейно от

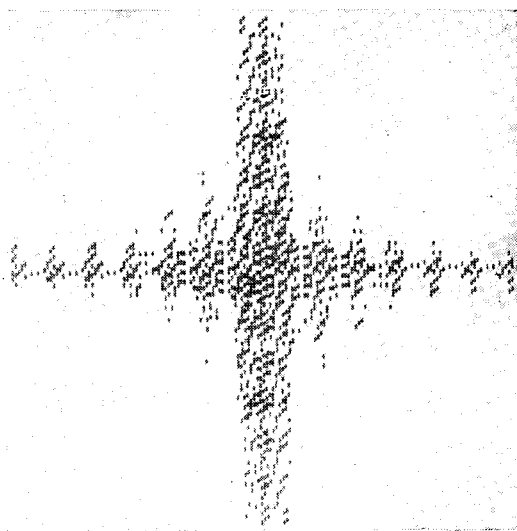


Рис. 6.56. Вид искусственной голограммы букв Т и Г, полученной методом подавления вредной автокорреляции спектров  $F(\omega) \otimes F(\omega)$ .

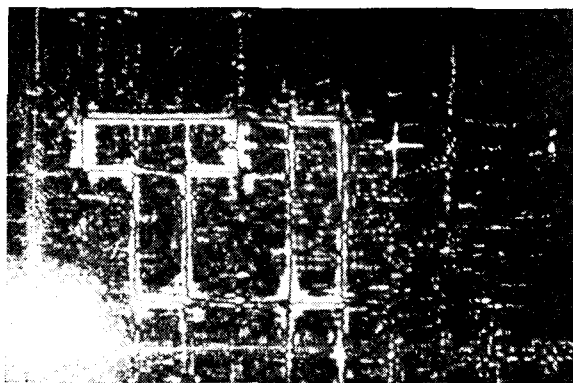


Рис. 6.57. Один из квадрантов восстановленного изображения, состоящего из букв Т и Г. При восстановлении буквы испытывают пространственное дифференцирование. Причиной этого является то, что в искусственной бинарной голограмме низкие пространственные частоты подавлены вследствие эффекта насыщения яркости ячеек голограммы, окна которых имеют одинаковую ширину и высоту по всей голограмме.

амплитуды упавшего света. Поэтому в программу вычисления искусственной голограммы вводится «режим проявления» фотоэмульсии до контрастности, равной  $\gamma = 1$ . Напомним, что в обычной голограмме амплитудное пропускание пропорционально интенсивности света, что достигается режимом проявления до контрастности, равной  $\gamma = -2$ .

На рис. 6.56 показана искусственная голограмма, а на рис. 6.57 — один из квадрантов восстановленного изображения, состоящего из двух букв: Т и I. Восстановленные буквы испытали пространственное дифференцирование: в бинарной голограмме низкие пространственные частоты обычно ослабляются из-за дискриминации сверху, если не принимать специальных мер для устранения этого эффекта.

### § 6-20. Когерентность в голографии

Выше везде предполагалось, что излучение, в поле которого получается голограмма, является полностью когерентным в пространстве и во времени. В реальных условиях это предположение не может быть строго выполнено, так как излучение всегда когерентно только частично, что приводит к ухудшению качества голограммы и восстановленных изображений. В общем случае влияние когерентности на качество изображений оценить очень трудно. Однако можно ограничиться рассмотрением лишь простейших случаев и затем попытаться распространить полученные выводы на общий случай.

Рассмотрим схему голографии Габора, когда на голограмме регистрируется далекое поле отдельных небольших предметов, расположенных в апертуре больших линейных размеров (рис. 6.58). Голограмма устанавливается в плоскости  $x$  на расстоянии  $q$  от предметной плоскости  $\xi$ .

Найдем поле в плоскости голограммы, считая излучение полностью пространственно когерентным, а затем вычислим это поле в случае частичной когерентности.

Оптический сигнал в плоскости  $x$  связан с оптическим сигналом в плоскости  $\xi$  интегральным соотношением

$$f(x) = \int f(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n} d\xi. \quad (6.20.1)$$

Функция Грина  $G$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\xi - x) \quad (6.20.2)$$

и граничному условию  $G(\xi) = 0$ . Для плоской границы функция Грина равна

$$G(x, \xi) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'}, \quad (6.20.3)$$

где

$$r^2 = q^2 + (x - \xi)^2, \quad r'^2 = q^2 + (x' - \xi)^2.$$

Штрихованные величины задают точки на плоскости, расположенной зеркально, т. е. при  $z = -q$ .

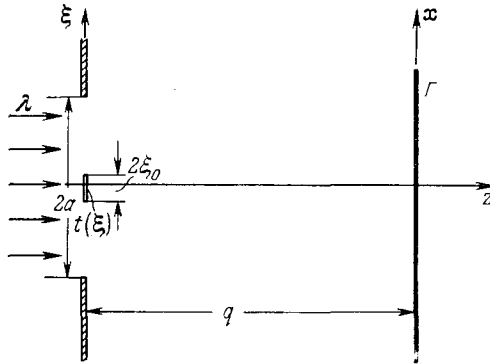


Рис. 6.58. Схема получения голограммы Габора небольшого предмета. Голограмма расположена на таком расстоянии  $q$ , что одновременно выполняются условия дифракции дальнего поля для небольшого предмета  $t(\xi)$  и дифракции ближнего поля для размера апертуры.

Рассмотрим для простоты небольшой непрозрачный предмет на фоне открытой апертуры. Амплитудное пропускание предмета равно

$$t(\xi) = 1 - d(\xi). \tag{6.20.4}$$

При освещении его плоской волной амплитуда

$$t(\xi) = 1(\xi) t(\xi) = 1 - d(\xi). \tag{6.20.5}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (1 - ikr) \frac{\cos\theta}{r^2} e^{ikr} [1 - d(\xi)] d\xi = \\ &= \int (1 - ikr) \frac{\cos\theta}{r^2} e^{ikr} d\xi - \int d(\xi) \frac{(1 - ikr) \cos\theta}{r^2} e^{ikr} d\xi, \end{aligned} \tag{6.20.6}$$

где интегрирование ведется по апертуре, выбранной для простоты в виде круга радиуса  $a$ .

Предположим, что плоскость  $x$  находится от плоскости  $\xi$  на таком расстоянии  $q$ , а размер предмета  $d(\xi)$  таков, что одновременно выполняется как условие для области ближнего поля (для апертуры  $a$ )

$$q \ll \frac{a^2}{\lambda}, \tag{6.20.7}$$

так и приближение для области далекого поля (для размера предмета)

$$q \gg \frac{\xi_{\text{макс}}^2}{\lambda} \quad \text{или} \quad \frac{k \xi_{\text{макс}}^2}{q} \ll 1. \quad (6.20.8)$$

Тогда, считая  $kr \gg 1$  и  $\cos \theta \approx 1$ , первый интеграл (6.20.6) с учетом свойств преобразования Френеля ( $a \rightarrow \infty$ ) можно привести к виду:

$$I_1(\mathbf{x}) = e^{ikhq}. \quad (6.20.9)$$

Прямой пучок в условиях ближнего поля не дифрагирует совсем. Плоская волна без искажений переносится от плоскости  $\xi$  к плоскости  $x$ . Второй интеграл равен

$$I_2(\mathbf{x}) = \frac{ik}{r} \int d(\xi) e^{ikr} d\xi. \quad (6.20.10)$$

Используя условия далекого поля (6.20.8) и разлагая  $r$  в ряд

$$r \approx q + \frac{(\xi - x)^2}{2q},$$

находим

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= e^{ikhq} + \frac{ik}{q} \int d(\xi) e^{ikhq} e^{i \frac{h(\xi-x)^2}{2q}} d\xi = \\ &= e^{ikhq} \left[ 1 + \frac{ik}{q} e^{i \frac{hx^2}{2q}} \int d(\xi) e^{i \frac{h\xi x}{q}} d\xi \right] = \\ &= e^{ikhq} \left[ 1 + \frac{ik}{q} e^{i \frac{hx^2}{2q}} \cdot D\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) \right], \end{aligned} \quad (6.20.11)$$

где

$$D\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) = \int d(\xi) e^{-i \frac{h\xi x}{q}} d\xi \quad (6.20.12)$$

— фурье-образ  $d(\xi)$ .

Интенсивность в плоскости голограммы равна

$$I(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})|^2 = 1 - \frac{2k}{q} \sin \frac{kx^2}{2q} \cdot D\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) + \frac{k^2}{q^2} \left| D\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) \right|^2. \quad (6.20.13)$$

Для одномерного предмета — длинной тонкой нити диаметром  $2b$  — имеем

$$I(x) = 1 - \frac{2kb^2}{q} \sin \frac{kx^2}{2q} \cdot \frac{\sin \frac{kbx}{q}}{\left(\frac{kbx}{q}\right)} + \frac{k^2 a^4}{q^2} \left[ \frac{\sin \frac{kbx}{q}}{\left(\frac{kbx}{q}\right)} \right]^2. \quad (6.20.14)$$



Перейдем теперь к общему случаю частичной когерентности. Исходим опять из схемы получения голограммы Габора (см. рис. 6.58). Согласно (4.14.8) функция взаимной когерентности  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau)$  в плоскости  $\mathbf{x}$  выражается через функцию взаимной когерентности  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \tau)$  в плоскости  $\xi$  с помощью следующего соотношения:

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \omega) = \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega) \frac{\partial G_1(\xi_1, \mathbf{x}_1, \omega)}{\partial n} \frac{\partial G_2(\xi_2, \mathbf{x}_2, \omega)}{\partial n} d\xi_1 d\xi_2, \quad (6.20.15)$$

где  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \omega)$  (и соответственно  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \omega)$ ) — временной фурье-образ  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau)$ :

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \omega) = \int \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.20.16)$$

Функция Грина  $G_1$  удовлетворяет уравнению

$$[\nabla^2 + k^2(\omega)] G_1(\xi_1, \mathbf{x}_1) = -\delta(\xi_1 - \mathbf{x}_1) \quad (6.20.17)$$

и граничному условию

$$G_1(\xi_1, \mathbf{x}_1) = 0.$$

При этом  $G_2 = G_1^*$  с заменой индекса 1 на индекс 2. Если предмет в плоскости  $\xi$  освещается плоской квазимонохроматической волной, то

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, 0) = \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) t(\xi_1) t^*(\xi_2) \frac{\partial G_1(\xi_1, \mathbf{x}_1)}{\partial n} \frac{\partial G_2(\xi_2, \mathbf{x}_2)}{\partial n} d\xi_1 d\xi_2. \quad (6.20.18)$$

Подставляя функцию амплитудного пропускания  $t(\xi)$  из (6.20.4), находим

$$t(\xi_1) t^*(\xi_2) = 1 + d(\xi_1) d^*(\xi_2) - [d^*(\xi_2) + d(\xi_1)]. \quad (6.20.19)$$

Интенсивность света в плоскости голограммы  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$  можно разбить на три слагаемых в соответствии с (6.20.19):

$$I(\mathbf{x}) = I_1(\mathbf{x}) + I_2(\mathbf{x}) - I_3(\mathbf{x}). \quad (6.20.20)$$

Нормальные производные функции Грина в данной задаче имеют вид (см. главу 4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1(\xi_1, \mathbf{x}_1)}{\partial n} &= \frac{z}{2\pi r_1^3} (1 - ikr_1) e^{ikr_1}, \\ \frac{\partial G_2(\xi_2, \mathbf{x}_2)}{\partial n} &= \frac{z}{2\pi r_2^3} (1 + ikr_2) e^{-ikr_2}, \\ r_j &= |\xi_j - \mathbf{x}| = \sqrt{(\xi_j - x)^2 + q^2}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (6.20.21)$$

Проанализируем сначала пространственную структуру третьего слагаемого  $I_3(\mathbf{x})$ , описывающего интерференционную картину в голограмме. Подставив (6.20.21) в (6.20.18) и разлагая  $r_j$  в ряд

$$r_j \approx q + \frac{(\xi_j - \mathbf{x})^2}{2q} \quad (6.20.22)$$

для соответствующих членов  $d(\xi_j)$  в (6.20.19), находим

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{x}) &\approx \\ &\approx \frac{ik}{2\pi q^2} e^{-ikq} \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) (1 - ikr_1) d^*(\xi_2) e^{-i \frac{h}{2q} |\xi_2 - \mathbf{x}|^2} \frac{e^{ikr_1}}{r_1^3} d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{ik}{2\pi q^2} e^{ikq} \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) (1 + ikr_2) d(\xi_1) e^{i \frac{h}{2q} |\xi_1 - \mathbf{x}|^2} \frac{e^{-ikr_2}}{r_2^3} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (6.20.23)$$

Используя, как и выше, приближения далекого поля (6.20.8) и считая при этом, что в пределах небольшого предмета  $d(\xi)$  освещение когерентно, преобразуем (6.20.23):

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{x}) &\approx \\ &\approx \frac{ik}{2\pi q^2} \left\{ e^{-ikq} e^{-i \frac{h\mathbf{x}^2}{2q}} D^* \left( -\frac{\mathbf{x}}{\lambda q} \right) \int \frac{\Gamma(\xi_1, \langle \xi_2 \rangle, 0) (1 - ikr_1) e^{ikr_1}}{r_1^3} d\xi_1 - \right. \\ &- \left. e^{ikq} e^{i \frac{h\mathbf{x}^2}{2q}} D \left( \frac{\mathbf{x}}{\lambda q} \right) \int \frac{\Gamma(\langle \xi_1 \rangle, \xi_2, 0) (1 + ikr_2) e^{-ikr_2}}{r_2^3} d\xi_2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.20.24)$$

Для действительных и симметричных функций  $d(\xi)$  выражение (6.20.24) упрощается:

$$I_3(\mathbf{x}) \approx \frac{2k}{2\pi q^2} D \left( \frac{\mathbf{x}}{\lambda q} \right) \text{Im} \left\{ e^{-ikq} e^{-i \frac{h\mathbf{x}^2}{2q}} \int \frac{\Gamma(\xi, \langle \xi \rangle) (1 - ikr) e^{ikr}}{r^3} d\xi \right\}, \quad (6.20.25)$$

где

$$\Gamma(\xi, \langle \xi \rangle, 0) = \Gamma^*(\langle \xi \rangle, \xi, 0).$$

Переходя к пределу полностью когерентного излучения  $\Gamma(\xi, \langle \xi \rangle, 0) = 1$  и используя известные приближения, находим

$$I_3 \text{ когер. предел } (\mathbf{x}) \sim \frac{k}{\pi q} D \left( \frac{\mathbf{x}}{\lambda q} \right) \sin \frac{h\mathbf{x}^2}{2q}. \quad (6.20.26)$$

Преобразуем далее первый и второй интегралы  $I_1(\mathbf{x})$  и  $I_2(\mathbf{x})$ :

$$I_1(\mathbf{x}) = \left( \frac{q}{2\pi} \right)^2 \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) (1 - ikr_1) \frac{e^{ikr_1}}{r_1^3} (1 + ikr_2) \frac{e^{-ikr_2}}{r_2^3} d\xi_1 d\xi_2. \quad (6.20.27)$$

Выражение  $I_1(\mathbf{x})$  при полностью когерентном освещении равно

$$I_{1 \text{ когер. предел}}(\mathbf{x}) = 1. \quad (6.20.28)$$

Аналогично находим

$$I_2(\mathbf{x}) \sim \frac{k^2}{4\pi^2 q^2} \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) d(\xi_1) d^*(\xi_2) e^{-i \frac{k(\xi_1 - \xi_2)\mathbf{x}}{2q}} d\xi_1 d\xi_2. \quad (6.20.29)$$

Если поле  $\Gamma(\xi_1, \xi_2, 0)$  пространственно стационарно, т. е.

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) = \Gamma(\xi_1 - \xi_2, 0), \quad (6.20.30)$$

то

$$I_2(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{2} \int \Gamma(\mathbf{p}_1) e^{-i \frac{h\mathbf{p}_1\mathbf{x}}{q}} \left[ \int d\left(\frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}\right) d^*\left(\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{2}\right) d\mathbf{p}_2 \right] d\mathbf{p}_1, \quad (6.20.31)$$

где

$$\mathbf{p}_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad \mathbf{p}_2 = \xi_1 + \xi_2.$$

Окончательно находим

$$I_2(\mathbf{x}) \sim \frac{k^2}{4\pi^2 q^2} X\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) \otimes T\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right), \quad (6.20.32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) &= D\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) D^*\left(-\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right), \\ X\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) &= \int \Gamma(\mathbf{p}) e^{-i \frac{h\mathbf{p}\mathbf{x}}{q}} d\mathbf{p}. \end{aligned} \right\} \quad (6.20.33)$$

Выражение  $I_2(\mathbf{x})$  в пределе при  $\Gamma = 1$  имеет вид

$$I_{2 \text{ когер. предел}}(\mathbf{x}) \sim \frac{k^2}{4\pi^2 q^2} \left| D\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) \right|^2. \quad (6.20.34)$$

Окончательное выражение для распределения интенсивности в плоскости голограммы в общем случае частичной пространственной когерентности имеет вид

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) \sim & \frac{q^2}{4\pi^2} \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) (1 - ikr_1) \frac{e^{ikr_1}}{r_1^3} (1 + ikr_2) \frac{e^{-ikr_2}}{r_2^3} d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \frac{k^2}{4\pi^2 q^2} X\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) \otimes T\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) - \frac{2k}{(2\pi)^2 q} \times \\ & \times D\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda q}\right) \text{Im} \left[ e^{-ikq} e^{-ik \frac{\mathbf{x}^2}{2q}} \int \Gamma(\xi, \xi, 0) (1 - ikr) \frac{e^{ikr}}{r^3} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (6.20.35)$$

В пределе при полностью когерентном освещении ( $\Gamma = 1$ ) распределение интенсивности в плоскости голограммы совпадает с (6.20.13).

Определим теперь влияние частичной пространственной когерентности на четкость восстановленных изображений. Для этого рассмотрим интеграл  $I_3(\mathbf{x})$ , определяющий контраст интерференционных полос на голограмме. Ввиду трудности решения задачи в общем случае разберем лишь один частный случай, когда

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) = 2b \operatorname{sinc} \frac{kb(\xi_1 - \xi_2)}{q}, \quad (6.20.36)$$

где  $2b$  — размер ширины щели пространственно некогерентного источника, используемого для освещения предмета. Эксперименты показывают, что по мере уменьшения пространственной когерентности в плоскости  $\xi$  число контрастных интерференционных полос на голограмме уменьшается. Это эквивалентно тому, что одновременно с ослаблением пространственной когерентности уменьшается эффективный размер голограммы. Но, как известно, уменьшение эффективного размера голограммы приводит к ухудшению разрешения в восстановленном изображении до значения

$$\Delta\xi = \Delta\xi_0 \frac{A_{\xi_0}}{A_{\xi}}, \quad (6.20.37)$$

где  $\Delta\xi_0 = \lambda q / 2A_{\xi_0}$  — разрешающая способность голограммы размером  $2A_{\xi_0}$  при полностью когерентном освещении, а  $\Delta\xi$  — разрешающая способность в восстановленном изображении, когда контрастные полосы имеются только на длине  $2A_{\xi} < 2A_{\xi_0}$  вдоль оси  $\xi$ .

Перейдем теперь к оценкам влияния временной когерентности на разрешение в восстановленном изображении. Для квазимонохроматического освещения временную когерентность можно представить в виде

$$\Gamma_{12}(\tau) \approx \Gamma_{12}(0) e^{-i\omega_0\tau}, \quad (6.20.38)$$

где  $\omega_0$  — частота световой волны. Взаимный спектр мощности равен

$$\Gamma_{12}(\omega) = \int \Gamma_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \Gamma_{12}(0) f(\omega) \equiv \Gamma_{12} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau, \quad (6.20.39)$$

где  $\tau_1 = 1/(\omega_0 - \Delta\omega)$ ,  $\tau_2 = 1/(\omega_0 + \Delta\omega)$ , а ширина спектра  $\Delta\omega \ll c/\Delta l$  ( $\Delta l$  — оптическая разность хода двух интерференционных лучей).

Подставив  $\Gamma_{12}(\omega)$  в (6.20.15), получаем интегральное соотношение, описывающее распределение функции взаимной

ИНТЕНСИВНОСТИ:

$$\Gamma(x_1, x_2, 0) = f(\omega) \int \Gamma(\xi_1, \xi_2, 0) \frac{\partial G_1}{\partial n} \frac{\partial G_2}{\partial n} d\xi_1 d\xi_2. \quad (6.20.40)$$

Интенсивность  $I(\omega, x)$  света частотной компоненты  $\omega$  в случае пространственно когерентного освещения согласно (6.20.13) равна

$$\begin{aligned} I(\omega, x) &= 1 - \frac{k}{\pi q} D\left(\frac{x}{\lambda q}\right) \sin \frac{kx^2}{2q} + \frac{k^2}{4\pi^2 q^2} \left| D\left(\frac{x}{\lambda q}\right) \right|^2 = \\ &= 1 - \frac{\omega}{\pi qc} D\left(\frac{x}{\lambda q}\right) \sin \frac{\omega x^2}{2cq} + \left(\frac{\omega}{2\pi qc}\right)^2 \left| D\left(\frac{x}{\lambda q}\right) \right|^2. \end{aligned} \quad (6.20.41)$$

Естественно предположить, что  $D(x/\lambda q)$  очень мало меняется в узком интервале частот  $\Delta\omega$ . Тогда, пренебрегая  $|D|^2$ , находим

$$I(x) = \int I(\omega, x) d\omega \approx \int f(\omega) \left[ 1 - \frac{\omega}{\pi qc} D \sin \frac{\omega x^2}{2cq} \right] d\omega. \quad (6.20.42)$$

В первом приближении функцию  $f(\omega)$  можно аппроксимировать прямоугольным импульсом шириной  $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$  и высотой  $(1/4\pi)\Delta\omega$  около  $\omega = \omega_0$ . Тогда окончательно

$$\begin{aligned} I_{\text{ин}}(x) \simeq 1 - \frac{2}{cq\alpha\Delta\nu} \{ \cos(\alpha\nu_0) [\sin(\alpha\Delta\nu) - \alpha\Delta\nu \cos(\alpha\Delta\nu)] + \\ + \alpha\nu_0 \sin(\alpha\nu_0) \sin(\alpha\Delta\nu) \} D\left(\frac{x}{\lambda q}\right), \end{aligned} \quad (6.20.43)$$

где  $\alpha = \pi x^2/cq$ . Если

$$\alpha\Delta\nu < \frac{\pi}{18} \quad \text{или} \quad x^2 < \frac{q\Delta l}{18}, \quad (6.20.44)$$

где  $\Delta l = c/\Delta\nu$  — длина когерентного излучения, то

$$I_{\text{ин}}(x) \simeq 1 - \frac{k}{\pi q} \sin \frac{kx^2}{2q} \cdot D\left(\frac{x}{\lambda q}\right), \quad (6.20.45)$$

что совпадает с предельным выражением (6.20.13).

Условие (6.20.44) определяет те максимальные размеры голограммы, при которых интерференционные полосы сохраняют высокий контраст.

На схеме (рис. 6.59) поясняется геометрический смысл длины когерентности  $\Delta l$  и максимального размера голограммы  $x_{\text{макс}}$ .

Так как

$$q^2 + x_{\text{макс}}^2 = (q + \Delta l)^2,$$

то

$$x_{\text{макс}} \simeq \sqrt{2q \Delta l}. \quad (6.20.46)$$

Несколько другие соотношения возникают при анализе временной когерентности в голограмме Лейта. Здесь разрешение по восстановленному изображению равно:

в поперечном направлении

$$\Delta \xi = 2A \frac{\Delta \omega}{\omega_0}, \quad (6.20.47)$$

в продольном направлении

$$\Delta z \sim \theta^{-1} A \frac{\Delta \omega}{\omega_0},$$

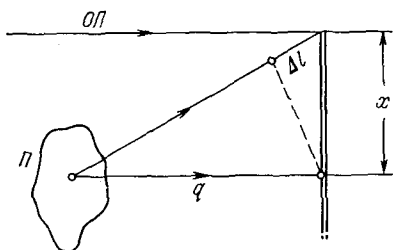


Рис. 6.59. Геометрическая интерпретация длины когерентности.

где  $2A$  — размер голограммы или предмета, а  $\theta$  — угол между опорным и предметным пучками в голографии Лейта.

К числу наиболее удивительных эффектов, наблюдаемых в голографии, следует отнести возможность использования диффузного освещения, когда перед транспарантом имеется молочное или матовое стекло или же сам предмет, подлежащий голографированию, рассеивает свет диффузно. Голограмма, получаемая в этих условиях, обладает интересными свойствами. Любая ее часть способна восстановить целиком весь предмет — с соответствующим ослаблением разрешающей способности из-за уменьшения размеров голограммы. При диффузном освещении динамический диапазон фотоэмульсии используется полнее и локальные дефекты на голограмме не сказываются на качестве восстановленного изображения.

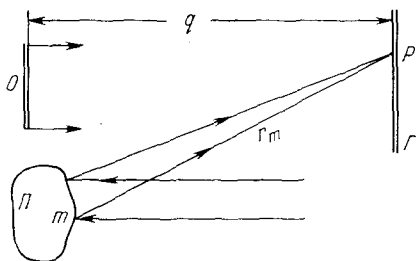


Рис. 6.60. Схема получения голограммы при диффузном освещении.

Неподвижное матовое стекло создает стационарные во времени случайные амплитудные и фазовые вариации световой волны, регистрируемые на голограмме.

На рис. 6.60 показана схема получения голограммы при диффузном освещении. Чтобы произвести анализ, разобьем предмет

$\Pi$  на множество очень малых элементов. Поле в точке  $P$  на плоскости голограммы описывается амплитудой

$$f_P(t) = f_0(t) + \sum_m f_m(t), \quad (6.20.48)$$

а интенсивность, усредненная за время экспозиции  $T$  в точке  $P$ , равна

$$I_P = |f_P(t)|^2 = \sum_m \overline{f_m(t) - f_m^*(t)} + \sum_m \sum_{n \neq m} \overline{f_n(t) f_m^*(t)} + \\ + |f_0(t)|^2 + \sum_m \overline{[f_m(t) f_0^*(t) + f_m^*(t) f_0(t)]} \quad (6.20.49)$$

(черта сверху обозначает усреднение по времени). Обозначим через  $A_m(t) e^{i\varphi_m}$  поле в точке  $m$ , а через  $A_0(t)$  — поле в точке  $R$ , лежащей напротив точки  $P$  в плоскости  $\xi$ . Амплитуды  $A_m$  и  $A_0$  — комплексные. Тогда

$$\left. \begin{aligned} f_m(t) &= A_m \left( t - \frac{r_m}{c} \right) e^{i[\omega t - r_m k + \varphi_m]}, \\ f_0(t) &= A_0 \left( t - \frac{q}{c} \right) e^{-i k q}. \end{aligned} \right\} \quad (6.20.50)$$

Взаимная когерентность полей  $f_m(t)$  и  $f_0(t)$  в точке  $P$  равна

$$\Gamma(m, P) = \overline{f_m(t) f_0^*(t)}, \quad (6.20.51)$$

а нормированная степень когерентности

$$\gamma(m, P) = \frac{\overline{f_m(t) f_0^*(t)}}{\sqrt{I_m(t) I_0(t)}}, \quad (6.20.52)$$

где

$$I_m(t) = |f_m(t)|^2, \quad I_0(t) = |f_0(t)|^2.$$

По условию опыта естественно предположить, что  $f_m(t)$  и  $f_0(t)$  не зависят от времени. Тогда

$$\overline{f_m(t) f_0^*(t)} = A_m A_0 e^{i\theta_m}$$

и интенсивность в точке  $P$  согласно (6.20.49) определяется выражением

$$I_P = I_0 + I_m + \\ + |f_0| \left\{ \sum_m |f_m| |\gamma(m, P)| [e^{i(\omega \tau_m + \theta_m + \varphi_n)} + e^{-i(\omega \tau_m + \theta_m + \varphi_m)}] \right\}, \quad (6.20.53)$$

где  $\tau_m = (q - r_m)/c$ . Из (6.20.53) видно, что голограмма, регистрирующая интенсивность  $I_P$ , восстановит исходное поле

$$f_{\Pi} = \sum_m f_m(t) = \sum_m A_m e^{i(\varphi_m - k r_m)}$$

только в том случае, если каждая из фаз  $\theta_m$  не зависит от  $P$ . Здесь это просто означает, что на стадии восстановления следует использовать плоскую когерентную волну. В противном случае появится дефокусировка  $m$ -й волны, восстанавливающей элемент  $m$ .

Четкость изображения от плоской восстанавливающей волны не зависит при этом от степени пространственной когерентности

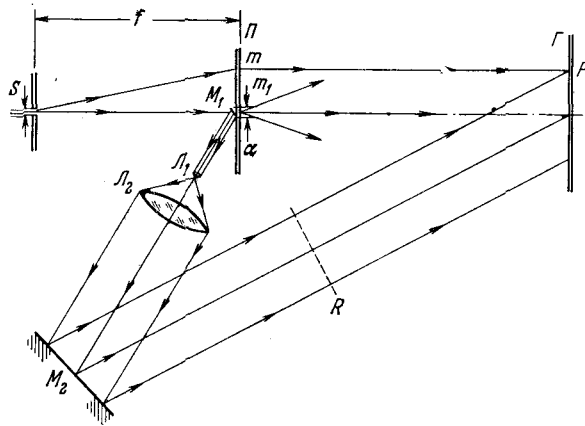


Рис. 6.61. Схема регистрации картины пространственной когерентности в пучке света, освещающего предмет-транспарант П. Голограмма Г восстанавливает предмет П. Яркость любой точки восстановленного изображения отображает степень пространственной когерентности в освещающем пучке относительно центральной точки  $m_1$ .

по предмету. Зависимость  $|\gamma(m, P)|$  от  $m$  проявляется только в том, что восстановленное изображение имеет яркость, спадающую к краям.

Все сказанное выше относилось к плоской опорной волне, используемой на стадии получения голограммы. Однако голограмму диффузного предмета можно получить при любом когерентном фронте опорной волны. При этом качественные восстановленные изображения можно получить при условии, что фронт восстанавливающей волны точно копирует фронт опорной волны на стадии получения голограммы.

Приведем в заключение метод регистрации картины пространственной когерентности с помощью голограммы (рис. 6.61). На приведенной схеме некогерентный источник  $S$  освещает предмет  $\Pi$ . Задача состоит в том, чтобы зарегистрировать пространственную когерентность излучения, достигающего предмета  $\Pi$ . Очень маленькое зеркало  $M_1$  устанавливается в центре предмета  $\Pi$ . С помощью линз  $L_1$  и  $L_2$  формируется плоский опорный пучок, падающий на голограмму  $\Gamma$ . В такой схеме образования опорного пучка степень пространственной когерентности весьма



близка к единице. Поэтому  $\theta_m$ , а также  $|\gamma(m, P)|$  не зависят от точки  $P$ . Иначе говоря, голограмма, которая получается по схеме рис. 6.61, восстанавливает качественное изображение. Единственная особенность, которая наблюдается в восстановленном изображении, состоит в изменении степени пространственной когерентности в плоскости предмета  $\Pi$ . Кроме того, уменьшение яркости точки  $m$ , пропорциональное  $|\gamma(m, P)|^2$ , дает отображение степени когерентности между опорным пучком (точка  $m_1$  на оси пучка) и светом, идущим от источника  $S$ .

Пусть предмет  $\Pi$  — молочное стекло либо любой другой предмет, диффузно рассеивающий свет. Размер зеркала в центре предмета  $\Pi$  выбирается таким, чтобы

$$d < \frac{\lambda f}{S}, \quad (6.20.54)$$

где  $S$  — ширина некогерентного источника,  $f$  — расстояние от источника до предмета. Если оптический путь от точки  $m_1$  до плоскости  $R$  значительно меньше длины когерентности света, то опорный пучок и свет от точки  $m_1$  имеют высокую временную когерентность. Тогда

$$|\gamma(m, P, \tau)| \approx |\gamma(m, P, 0)| \approx |\gamma(m, m_1, 0)|. \quad (6.20.55)$$

Таким образом, видимая яркость любой точки  $m_1$  на стадии восстановления отображает пространственную когерентность  $\gamma(m, m_1)$ .

### § 6-21. Голограмма интенсивности при некогерентном освещении

Требование к высокой пространственной и временной когерентности освещения, используемого в голографии, является фундаментальным для получения качественных голограмм, т. е. для полной регистрации волны света, достигшей голограммы, без потери амплитуды и фазы. Однако голограмму можно получить и при полной пространственной некогерентности света. Правда, при этом голограмма способна восстановить только распределение интенсивности по предмету, с безвозвратной потерей информации о фазах. Это положение применимо не только к предметам, освещаемым пространственно некогерентной волной света, но также и к самосветящимся предметам.

В основе голографии при пространственно некогерентном освещении лежит свойство голограммы последовательно накапливать интерференционные картины от нескольких предметов в серии последовательных экспозиций каждого отдельного предмета. Это свойство голограммы позволяет рассматривать некогерентно освещенный предмет как совокупность большого числа

элементов, способных образовать свою собственную интерференционную картину. В скрытом изображении голограммы происходит сложение интенсивностей. Подобная схема разбиения предмета на систему пространственно некогерентных элементов и накопления в голограмме интенсивностей совсем не требует наличия пространственной когерентности, и, как будет видно из дальнейшего, наличие пространственной когерентности между элементами мешает осуществлению подобной схемы голографии.

Для того чтобы получить интерференционную картину от каждого элемента предмета в отдельности, волну света, рассеиваемую

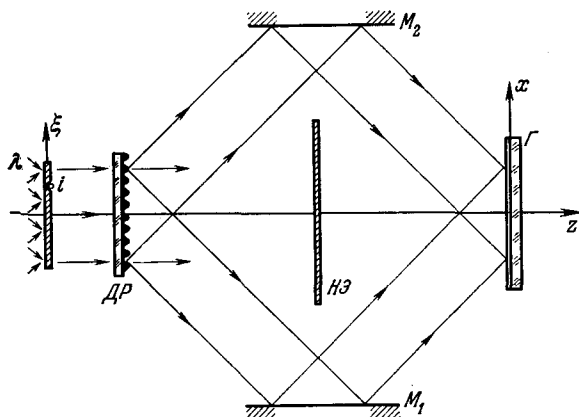


Рис. 6.62. Схема получения голограммы Фурье при пространственно некогерентном освещении. Дифракционная решетка ДР создает две волны первого порядка, которые, отразившись от зеркал  $M_1$  и  $M_2$ , интерферируют в плоскости голограммы Г. Прямой лучом задерживается непрозрачным экраном НЭ.

каждым элементом, расщепляют на две пространственно когерентные волны, которые затем создают контрастную интерференционную картину. Единственным условием хорошей четкости интерференционной картины является высокая монохроматичность. А именно, разность оптических путей двух расщепленных лучей должна быть меньше длины когерентности.

Наилучшей системой расщепления волны света от предмета является система, в которой в качестве светоделиителя используется дифракционная решетка. На рис. 6.62 приведена схема получения голограммы при пространственно некогерентном освещении. Предмет освещается монохроматической пространственно некогерентной волной света. Два дифракционных пучка, возникающие при прохождении рассеянной волны через дифракционную решетку с синусоидальным профилем, направляются зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  в плоскость голограммы Г. Две волны света являются взаимно пространственно когерентными, так как они

образовались совместно при дифракции пучков света в одном и том же месте дифракционной решетки. Вторая волна получается из первой путем зеркального поворота на угол  $180^\circ$  и сдвига в плоскости дифракционной решетки. Поэтому, если одна из этих волн имеет распределение интенсивности  $I(\xi)$ , то вторая  $I(-\xi)$  (рис. 6.63).

Рассмотрим каждый элемент предмета, описываемый приближенно дельта-функцией  $\delta(\xi - \xi_i)$ . Фурье-образ волны от этого элемента равен для одного пучка

$$T_{+i}(\omega) = \int \delta(\xi - \xi_i) e^{-i2\pi\xi} d\xi = e^{-i\omega\xi_i}, \quad (6.21.1)$$

где  $\omega = (2\pi/\lambda f) \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y)$ ,  $\omega = \omega(\omega_x, \omega_y)$ ,  $f$  — полный путь волны от решетки до голограммы. Зеркальная волна дает фурье-образ

$$T_{-i}(\omega) = e^{i\omega\xi_i}. \quad (6.21.2)$$

При суперпозиции этих двух полей возникает волна с амплитудой

$$u_i(\omega) = e^{i\omega\xi_i} + e^{-i\omega\xi_i} = 2 \cos \omega\xi_i = 2 \cos \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{x}\xi_i. \quad (6.21.3)$$

Интенсивность света в плоскости голограммы от одного элемента равна

$$I_i(\mathbf{x}) = |u_i(\mathbf{x})|^2 = 4 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{x}\xi_i = 1 + \cos 2 \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{x}\xi_i. \quad (6.21.4)$$

Суммарная интенсивность от всех элементов

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= \int I(\xi) \left( 1 + \cos 2 \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{x}\xi \right) d\xi = \\ &= \int I(\xi) d\xi + \int I(\xi) \cos \left( 2 \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{x}\xi \right) d\xi. \end{aligned} \quad (6.21.5)$$

Второе слагаемое представляет собой косинусный фурье-образ распределения интенсивности  $I(\xi)$  предмета.

Освещение голограммы на стадии восстановления должно быть пространственно когерентным. Если освещающая волна плоская, то в фокальной плоскости линзы, осуществляющей обратное преобразование Фурье, образуются два изображения  $I(\xi)$  с круговой симметрией друг относительно друга.

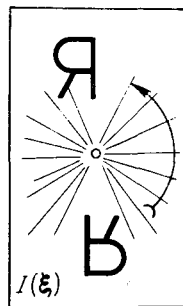


Рис. 6.63. Два изображения получают-ся одно из другого путем поворота на угол  $180^\circ$  в плоскости предмета.

Если освещение в системе, показанной на рис. 6.62, сделать пространственно когерентным, то в плоскости голограммы отобразятся амплитуды, равные фурье-образу амплитуды предмета  $t(\xi)$ , с теми же свойствами круговой симметрии:

$$\left. \begin{aligned} T_+(\omega) &= \int t(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = T(\omega), \\ T_-(\omega) &= \int t(-\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = T(-\omega). \end{aligned} \right\} \quad (6.21.6)$$

Интенсивность света, регистрируемая голограммой, равна

$$I(\omega) = |T(\omega) + e^{ia\xi} T(-\omega)|^2 = |T(\omega)|^2 + |T(-\omega)|^2 + e^{iax} T^*(\omega) T(-\omega) + e^{-iax} T(\omega) T^*(-\omega), \quad (6.21.7)$$

где  $a$  — расстояние между расщепленными предметами  $I(\xi)$  и  $I(-\xi)$  в плоскости  $\xi$ .

На стадии восстановления в боковом пучке появится не амплитуда  $t(\xi)$ , а свертка  $t(\xi) \otimes t(-\xi)$ , соответствующая произведению  $T^*(\omega) T(-\omega)$  в частотной плоскости.

Схема получения голограммы пространственно когерентных предметов приведена на рис. 6.64. Предмет  $P$  в виде транспаранта буквы  $R$  освещается сверху монохроматическим светом от лазера. С помощью светоделительной решетки и двух зеркал  $M_1$  и  $M_2$  формируются два изображения предмета  $I(\xi)$  и  $I(-\xi)$ . На фотопленке, установленной на большом расстоянии от зеркал, отображается фурье-образ распределения интенсивности.

Пространственная частота равнялась 1180 штрихов/мм. Пространственная некогерентность луча света лазера достигалась путем быстрого перемещения изображения пучка на рассеивателе, установленном в плоскости предмета. В контрольном эксперименте диффузор был неподвижен. Пространственная когерентность освещения в этом случае не нарушалась, в результате чего восстановленное изображение имело вид свертки  $I(\xi) \otimes I(\xi)$  (рис. 6.65), т. е. было полностью искажено.

В опытах, описанных выше, исходный предмет расщеплялся в плоскости самого предмета, т. е. в поперечном направлении, и голограмма, регистрируемая в далеком поле, представляла собой голограмму Фурье. Кроме поперечного, возможно также и продольное расщепление предмета, что приводит к голограмме Френеля. Для получения продольного когерентного расщепления лучше всего, по-видимому, использовать трехзвенный интерферометр Харихарана и Сена с треугольным ходом лучей. Основным элементом такого интерферометра является двухлинзовая афокальная система, схема которой приведена на рис. 6.66. В плоскости  $A$  расположен транспарант с амплитудным пропусканием  $t(\xi)$ . При отображении такого предмета на плоскость  $B$  осуществляется двойное преобразование Фурье. В общем случае  $f_1 \neq f_2$ ,

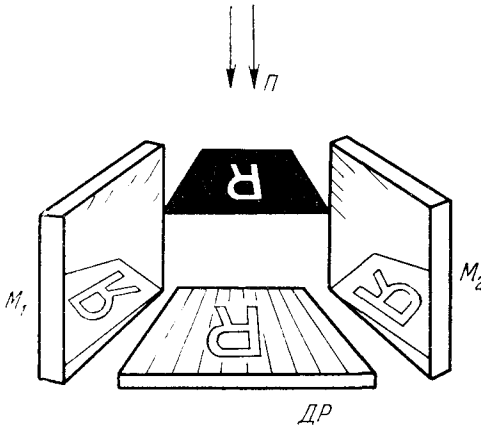


Рис. 6.64. Реальная схема получения голограммы Фурье (рис. 6.62), представленная в пространстве. Пучок пространственно некогерентного света падает на экран  $\Gamma$ . Внизу установлена дифракционная решетка  $ДР$ . Зеркала  $M_1$  и  $M_2$  направляют отраженные дифракционные пучки первого порядка на голограмму. Вид со стороны голограммы.

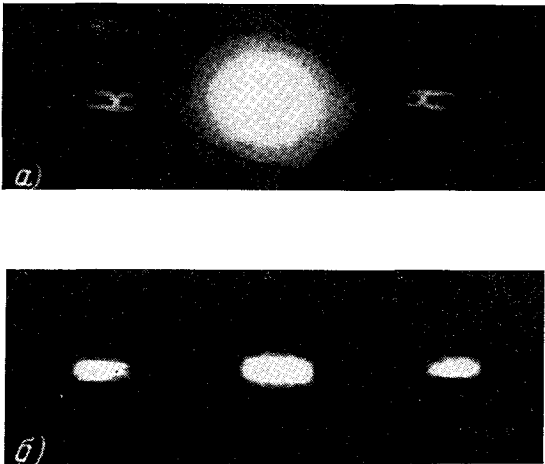


Рис. 6.65. При освещении голограммы  $\Gamma$  когерентным пучком лазера образуются (а) два изображения буквы  $R$ , характеризующиеся симметрией поворота на угол  $180^\circ$  (центральное пятно — след прямого пучка). Если использовать пространственно когерентное освещение, то изображения сильно искажаются (б) — имеют структуру свертки исходных предметов  $I(\xi) \otimes I(\xi)$ .

поэтому в плоскости  $B$  амплитуда равна

$$t(x) = \int t(\xi) \delta \left[ \xi + \frac{f_1}{f_2} x \right] d\xi = t \left( -\frac{f_1}{f_2} x \right) = t \left( \frac{x}{m} \right), \quad (6.21.8)$$

где

$$m = -\frac{f_2}{f_1}. \quad (6.21.9)$$

Благодаря тому, что оптические пути между любыми парами точек  $\xi$  и  $x$  равны, при таком отображении не возникают дополнительные фазовые множители. Отдельная собирающая линза,

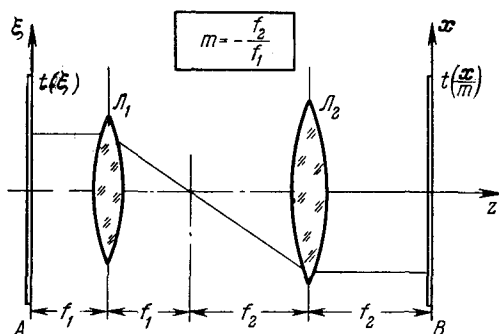


Рис. 6.66. Афокальная система, состоящая из двух линз  $L_1$  и  $L_2$  с разными фокусными расстояниями  $f_1$  и  $f_2$ .

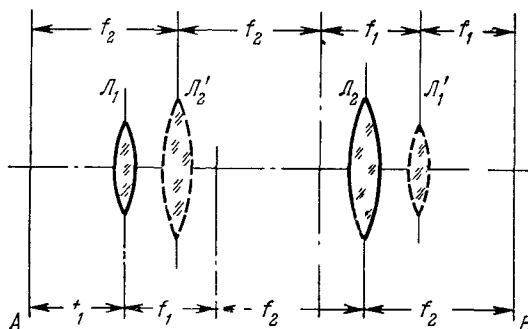


Рис. 6.67. Сдвоенная афокальная система, позволяющая осуществлять продольное расщепление исходного транспаранта.

как известно, вводит квадратичные сдвиги фаз. Здесь же используются две линзы, расположенные афокально. Отрицательный знак  $m$  соответствует пространственной инверсии при отображении.

Теперь рассмотрим более сложную систему. Пусть в том же пространстве, вдоль той же оптической оси, которая определяет расположение первой афокальной системы, расположена вторая афокальная система, состоящая из тех же линз  $L_1$  и  $L_2$ , но установленных в обратном порядке (рис. 6.67). В этом случае отображение транспаранта  $t(\xi)$ , расположенного в плоскости  $A$ , может происходить двумя путями. Во-первых, в линзовой системе  $L_1 + L_2$  путем отображения с увеличением, равным  $-f_2/f_1$ . Во-вторых, в линзовой системе  $L_1' + L_2'$  с увеличением, равным  $-f_1/f_2$ .

Двойная афокальная система реализуется с помощью интерферометра с треугольным ходом лучей, показанного на рис. 6.68. Плоскость  $A$  располагается в таком месте, чтобы расстояние до линз равнялось соответствующему фокусному расстоянию. Плоскость  $B$  выбирается из аналогичного условия, но при распространении лучей  $A \rightarrow B$  в направлении, обратном тому, которое было в первом случае. Пусть увеличение  $A \rightarrow B$  равно  $-f_2/f_1$  при ходе лучей по часовой стрелке, и равно  $-f_1/f_2$  при ходе лучей против часовой стрелки.

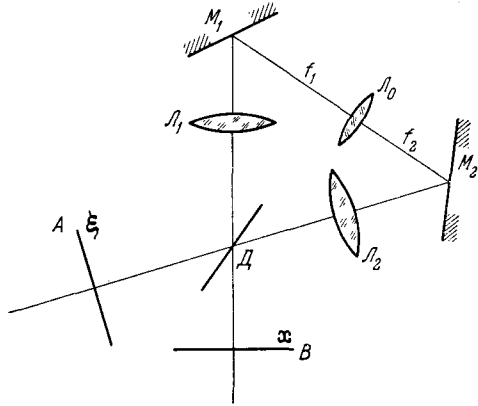


Рис. 6.68. Схема реализации двойной афокальной системы с помощью интерферометра Харихарана и Сена с треугольным ходом лучей. Лучи света, идущие от предмета  $A$ , расщепляются в светоделителе  $D$  на лучи, идущие по часовой стрелке, и лучи, распространяющиеся против часовой стрелки.

Амплитуда света от предмета  $t_0(\xi) = \delta(\xi - x_0)$ , т. е. точки, расположенной в плоскости  $\xi$ , равна в плоскости  $x$

$$t_0(x) \sim e^{ikr} = e^{iq(x, x_0)}, \tag{6.21.10}$$

где  $r^2 = q_0^2 + (x - x_0)^2$ ,  $q$  — расстояние между плоскостями  $\xi$  и  $x$ . Вводя  $r_0^2 = q_0^2 + x_0^2 + y_0^2$ , можно записать:

$$r = r_0 - \frac{xx_0}{r_0} + \frac{x^2}{2r} - \dots \tag{6.21.11}$$

Таким образом,

$$\varphi(x, x_0) = k \left( r_0 - \frac{xx_0}{r} + \frac{x^2}{2r} - \dots \right). \tag{6.21.12}$$

Если в системе происходит два афокальных преобразования с увеличениями  $1/\alpha$  и  $1/\beta$  соответственно, то разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$ , определяющая структуру интерференционной картины, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(\alpha x) - \varphi(\beta x) = -(\alpha - \beta) \frac{x x_0}{r_0} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) x^2}{2r_0} - \dots \quad (6.21.13)$$

Если сделать подстановку

$$x_1 = \frac{x}{\alpha + \beta}, \quad r_{10} = \frac{r_0}{\alpha + \beta}, \quad q_1 = \frac{q_0}{\alpha + \beta} \quad (6.21.14)$$

и наложить условия

$$\alpha - \beta = 1, \quad (6.21.15)$$

то

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= -\frac{x_1 x}{r_{10}} + \frac{x^2}{2r_{10}} - \dots \approx r_1(x) - r_{10}, \\ r_{10}^2 &= x_1^2 + q_1^2. \end{aligned} \quad (6.21.16)$$

Интерференционная часть суммарной интенсивности двух точек описывается  $\cos k(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Сравнивая (6.21.16) с (6.21.14), можно заметить, что фаза  $\varphi_1 - \varphi_2$  соответствует некоторому точечному предмету, расположенному в точке  $(x_1, q_1)$ , и что эта фаза дает действительную функцию, которая при регистрации с помощью фотопластинки не гасится. Регистрируемая картина с фазой (6.21.16) под знаком косинуса имеет вид зонной картины Френеля — Габора, т. е. голограммы точечного предмета.

Поскольку в двойной афокальной системе, реализуемой с помощью интерферометра с треугольным ходом лучей,

$$\alpha = -\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{m}, \quad \beta = -\frac{f_2}{f_1} = m,$$

то условие (6.21.15) дает

$$\frac{1}{m} - m = 1, \quad \text{или} \quad m = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (6.21.17)$$

Знак «+» берется в случае двух собирающих линз, а знак «-» берется, если одна линза собирающая, а вторая — рассеивающая. Подбирая пропускание  $T$  и отражение  $R$  светоделителя из



условия получения максимального контраста:

$$R^2 = \frac{m^2}{\left(m + \frac{1}{m}\right)^2}, \quad T^2 = \frac{1}{m^2} \frac{1}{\left(m + \frac{1}{m}\right)^2}, \quad (6.21.18)$$

находим распределение интенсивности:

$$I_0 = |f|^2 = \frac{1}{\left(m + \frac{1}{m}\right)^2} [1 + \cos kr_1]. \quad (6.21.19)$$

Произвольный предмет, состоящий из многих элементов-точек и освещаемый пространственно некогерентным светом, создает распределение интенсивности

$$I = \frac{1}{\left(m + \frac{1}{m}\right)^2} \sum_{i=0}^N a_i^2 [1 + \cos kr_{i1}]. \quad (6.21.20)$$

На рис. 6.69 показан вид голограммы, полученной при пространственно некогерентном освещении двух точек. На голограмме видна муаровая картина — следствие небольшого сдвига двух картин Френеля друг относительно друга в направлении, перпендикулярном муаровым полосам.

С помощью интерферометра с треугольным ходом лучей можно получать некогерентные голограммы трехмерных и даже цветных предметов.

Метод получения некогерентных голограмм путем расщепления волны света, распространяющейся от предмета, на две взаимно когерентные волны обладает очень существенным недостатком. А именно, контраст получаемой таким методом некогерентной голограммы очень быстро падает по мере усложнения предмета. Чтобы проиллюстрировать эту особенность некогерентной голограммы, сравним пространственные структуры когерентной и некогерентной голограмм. В когерентной голограмме регистрируется интенсивность

$$I_{\text{когер}} = |a_0 + \sum_i^N u_i|^2 = a_0^2 + \sum_i^N |u_i|^2 + 2a_0 \sum_i^N a_i \cos \varphi_i, \quad (6.21.21)$$

где

$$u_i = a_i e^{i\varphi_i}.$$

В некогерентной голограмме регистрируется интенсивность

$$I_{\text{некогер}} = \sum_i^N |u_i|^2 (1 + \cos kr_i). \quad (6.21.22)$$

Обычно  $a_0^2 \sim \sum_i a_i^2$ , и поэтому

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{когер}} &\sim 1 + \sum_i^N \left( \frac{a_i}{a_0} \right)^2 \cos \varphi_i, \\ I_{\text{некогер}} &\sim 1 + \sum_i^N \left( \frac{a_i}{a_0} \right) \cos kr_i. \end{aligned} \right\} \quad (6.21.23)$$

Определим теперь среднеквадратичные отклонения нормированных интенсивностей, определяющих контраст интерференционной

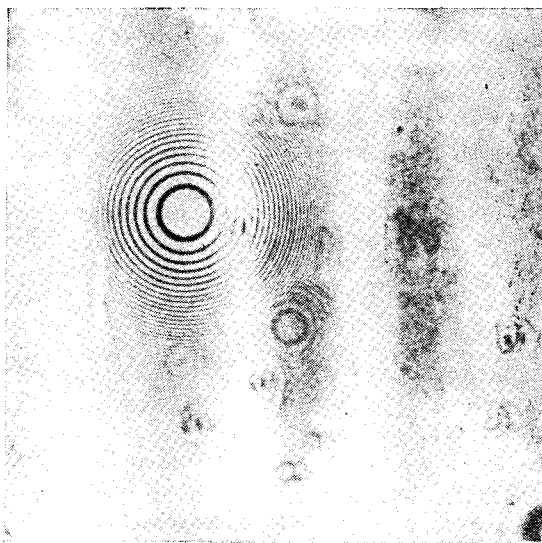


Рис. 6.69. Вид голограммы, полученной с помощью афокальной системы с треугольным ходом лучей при пространственно некогерентном освещении двух точечных предметов.

картины. В когерентной голограмме

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\sum_i^N \left[ \left( \frac{a_i}{a_0} \right) \cos kr_i \right]^2} = \sqrt{\sum_i^N \sum_j^N \frac{a_i a_j}{a_0^2} \cos kr_i \cos kr_j} = \\ &= \sqrt{\sum_i^N \left( \frac{a_i}{a_0} \right)^2 \cos^2 kr_i + \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{a_i a_j}{a_0^2} \cos kr_i \cos kr_j}. \end{aligned}$$

Если  $a_i = a$ , то

$$\overline{\sum_i \left(\frac{a_i}{a_0}\right)^2 \cos^2 kr_i} = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{2} N \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad (6.21.24)$$

так как  $a_0^2 \sim \sum_i a_i^2$ . Вторая сумма  $\sum_i \sum_{j (i \neq j)} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Таким образом, в когерентной голограмме контраст равен

$$\sigma_{\text{когер}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6.21.25)$$

Для некогерентной голограммы контраст определяется выражением

$$\sigma_{\text{некогер}}^2 = \overline{\sum_i \left(\frac{a_i}{a_0}\right)^4 \cos^2 \varphi_i} = \frac{1}{2} N \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 = \frac{1}{2N},$$

и, таким образом,

$$\sigma_{\text{некогер}} \sim \frac{1}{\sqrt{2N}}. \quad (6.21.26)$$

Из (6.21.26) и (6.21.25) видно, что контраст интерференционных полос в некогерентной голограмме значительно меньше, чем в когерентной, и уменьшается с увеличением числа точек в предмете. На практике удается получить некогерентные голограммы предмета с числом точек-элементов, ограниченным значением всего лишь нескольких сотен.

Для преодоления этого недостатка некогерентной голограммы предложено несколько вариантов исходной схемы получения голограммы. В одном из предложенных методов вся голограмма разбивается на несколько подголограмм, расположенных рядом. Каждая подголограмма регистрирует ограниченное число точек предмета. Число этих точек, как было показано выше, не зависит от размера голограммы, а определяется допустимым ослаблением контраста с ростом числа интерференционных картин, налагающихся друг на друга. В описываемом методе получения некогерентной голограммы информация о предмете на голограмме регистрируется уже локализованно.

В проведенных пробных опытах голограмма разбивалась на подголограммы в виде горизонтальных линий, для чего использовалась комбинация из сферической и цилиндрической линз. При этом горизонтальные участки предмета отображались на голограмме по обычной схеме получения изображения, но так, что в пределах каждой линии отображался фурье-образ предмета.

На стадии восстановления также использовались сферическая и цилиндрическая линзы. Преобразование Фурье осуществлялось в одном направлении, а изображение — в другом.

Для того чтобы добиться повышенного контраста в голограмме, фотоэмульсию следует проявлять до высокого контраста. Однако при этом уменьшается динамический диапазон. Оптимальное значение  $\gamma$  оказалось равным  $\gamma \approx 1$ .

Трудности получения некогерентной голограммы возникают не только от большого числа точек в предмете, но также и от

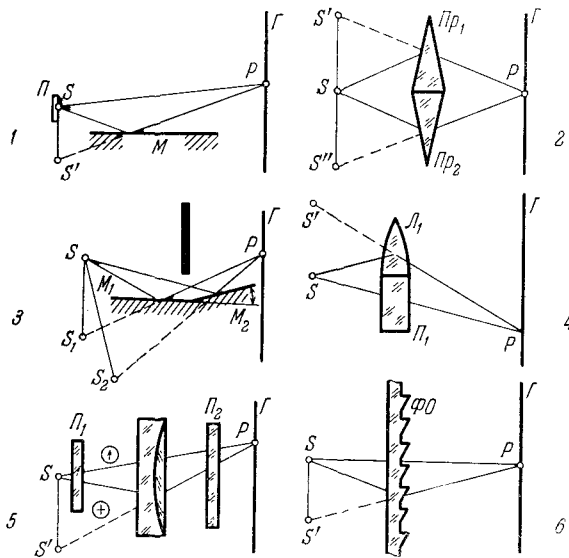


Рис. 6.70. Методы расщепления предметного пучка при пространственно некогерентном освещении. 1 — зеркало Ллойда; 2 — бипризма Френеля; 3 — зеркало Френеля; 4 — билинза Бийе; 5 — линза двойного лучепреломления; 6 — фазовая пластинка Френеля (френелевская оптика).

взаимного расположения этих точек. Весьма желательно иметь предмет с дискретным спектром пространственных частот. Здесь можно использовать метод полиграфического раstra, с помощью которого на газетном листе печатается полутоновое изображение. Однако в таком модифицированном методе получения некогерентной голограммы нельзя восстановить изображение трехмерных предметов.

В заключение перечислим возможные методы расщепления предметного пучка при получении некогерентной голограммы. В литературе описаны следующие системы (рис. 6.70):

- зеркало Френеля;
- бипризма Френеля

- зеркало Ллойда;
- билинза Бийе;
- линза двойного лучепреломления;
- фазовая пластинка Френеля;
- ахроматическая линза из двух стекол;
- интерферометр Маха — Цендера с дополнительным отражением в одной из ветвей (с использованием крышеобразной призмы в одной ветви и пентапризмы — во второй);

— призма Костера,

а также уже рассмотренные выше:

- дифракционная решетка с двумя зеркалами;
- интерферометр Харихарана и Сена с треугольным ходом лучей.

### § 6-22. Трафаретная голограмма

Своеобразным приемом получения некогерентных голограмм является замена светоделиителя на готовый трафарет голограммы — зонную пластинку Френеля, которая располагается между предметом и фотопластинкой. В такой системе каждая точка предмета отбрасывает тень в виде зонной пластинки и эти тени накладываются друг на друга от всех точек предмета. Тень от трафарета Френеля может быть образована даже немонахроматическим источником света. Поэтому трафаретная голограмма может быть получена от любого небесного светила в любом широком участке спектра, в том числе в рентгеновских лучах. Для трафаретной голограммы не требуется абсолютно никакой оптики. Единственная деталь — трафарет в виде зонной пластинки Френеля, который проектируется каждой точкой предмета в виде тени (рис. 6.74). Для того чтобы при таком проектировании не возникло дифракционного размытия тени трафарета, длина волны света  $\lambda$ , расстояние от предмета до фотопластинки  $q$ , а также ширина наружной зоны-трафарета  $\delta$  должны подчиняться следующему соотношению:

$$\lambda q < \delta^2. \quad (6.22.1)$$

Таким образом, все зоны, включая последнюю, должны быть достаточно «грубыми» для излучения с длиной волны  $\lambda$ .

Если учесть, что  $n$ -я зона имеет радиус

$$\rho_n = \rho_0 \sqrt{n}, \quad (6.22.2)$$

то

$$\delta = \frac{\rho_0}{2\sqrt{n}} = \frac{D}{4n} \quad (6.22.3)$$

и

$$\lambda q \ll \frac{\rho_0^2}{4n} = \frac{D^2}{16n^2}, \quad (6.22.4)$$

где  $D$  — диаметр трафарета. Здесь также предполагается, что расстояние от предмета до трафаретной камеры значительно больше  $q$ , и поэтому можно пренебречь геометрическим увеличением,

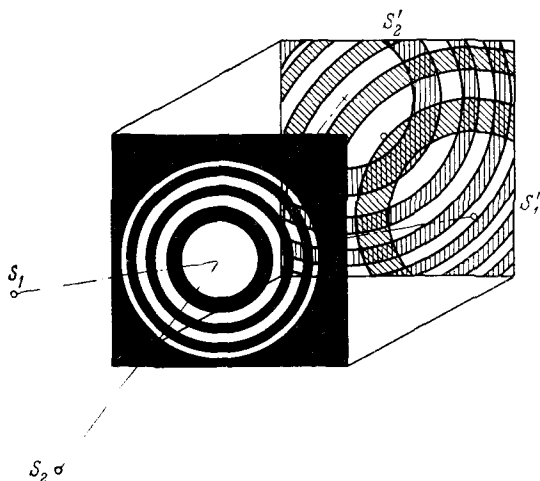


Рис. 6.71. Схема получения трафаретной голограммы в белом свете.

возникающим при центральной проекции плоского транспаранта на фотопластинку.

Светосила трафаретной камеры равна

$$\alpha = \frac{D}{q}. \quad (6.22.5)$$

Угловое разрешение фотографической камеры, обладающей дифракционным пределом разрешения, равно

$$\Delta\theta_{\text{опт}} \sim \frac{\lambda}{D}, \quad (6.22.6)$$

а угловое разрешение трафаретной системы составляет

$$\Delta\theta_{\text{траф}} \sim 2 \frac{\delta}{q}. \quad (6.22.7)$$

Следовательно, коэффициент «заглубления»  $\beta$  углового разрешения трафаретной камеры

$$\beta = \frac{\Delta\theta_{\text{траф}}}{\Delta\theta_{\text{опт}}} \sim \frac{2\delta D}{q\lambda} \gg 2\delta D \frac{16n^2}{D^2} = 8n \quad (\text{для } n \gg 1). \quad (6.22.8)$$

Так, например, если число зон в трафарете  $n \sim 50$ , то в геометрии, подчиняющейся соотношению (6.22.4), угловое разрешение ухудшится не менее чем в  $\beta \gg 400$  раз. Для типичной трафаретной камеры с размерами  $D = 10$  см и  $q = 1$  см,  $\rho_0 = 0,15$  см угловое разрешение трафаретной системы  $\Delta\theta_{\text{траф}} \sim 0,01/1 \approx \approx 0,5^\circ = 30'$ , а угловое разрешение фотографической камеры  $\Delta\theta_{\text{опт}} \sim 0,02'$ , т. е.  $\beta \sim 1500$ .

Прямая зависимость  $\beta$  от числа зон Френеля  $n$  обусловлена тем, что по мере увеличения  $n$  уменьшается размер внешней зоны (положительный эффект), но одновременно с этим расстояние  $q$  должно быть уменьшено (нежелательный эффект), что расширяет угол между крайними лучами, еще способными различить два источника света. В то же время трафаретная камера дает значительный выигрыш в яркости по сравнению с камерой-обскурой при эквивалентном разрешении. А именно, коэффициент выигрыша в яркости равен

$$\kappa = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi \delta^2}{4}} = \frac{D^2}{\delta^2} = \frac{(4n\delta)^2}{(\delta)^2} = 16n^2. \quad (6.22.9)$$

Этот выигрыш очень трудно реализовать для полутонных предметов из-за ослабления контраста при наложении на одной голограмме нескольких теней от трафарета Френеля. Однако даже частичное использование этого преимущества трафаретной камеры перед камерой-обскурой расширяет область применения трафаретных систем. Оптические трафаретные камеры, описанные в литературе, являлись оптическим аналогом рентгеновского телескопа. Трафаретная камера, в отличие от камеры-обскуры и обычной фотокамеры, позволяет регистрировать расположение светящихся точек по глубине.

### § 6.23. Ахроматическая голография

В главе 1 было показано, что степень монохроматичности источника света, используемого в голографии, должна превышать число интерференционных полос, уместяющихся на голограмме:

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} > N. \quad (6.23.1)$$

При этом степень размытия интерференционных поверхностей при нарушении условия (6.23.1) зависит от их расположения относительно экваториальной плоскости.

Если ограничиться рассмотрением области, расположенной вокруг экваториальной плоскости, то при расстояниях  $q$ , значительно превышающих длину отрезка  $SS' = d$  ( $q \gg d$ ), шаг интерференционных полос  $a$  равен

$$a(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda q}{d}, \quad (6.23.2)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{q},$$

т. е. прямо пропорционален длине волны  $\lambda$  и обратно пропорционален длине отрезка  $SS' = d$ . С изменением длины волны света  $\lambda$

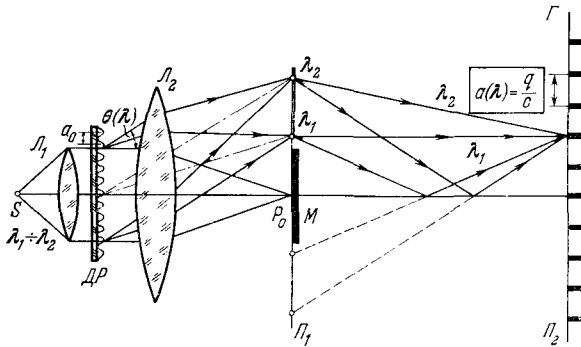


Рис. 6.72. Схема получения ахроматических интерференционных полос. Дифракционная решетка  $DP$  и линза  $L_2$  отображают в плоскости  $\Pi_1$  спектр излучения источника света  $S$ . В приближении малых углов каждая светящаяся точка экрана ( $\lambda_1 \div \lambda_2$ ) создает на голограмме  $\Gamma$  в плоскости  $\Pi_2$  ахроматическую систему интерференционных полос.

изменится и шаг интерференционной картины. Такое хроматическое размазывание интерференционной картины можно погасить, если точки  $S$  с разными длинами волн расположить определенным образом вдоль отрезка  $SS'$ . Легко видеть, что если

$$d = d(\lambda) = \text{const } \lambda, \quad (6.23.3)$$

то шаг интерференционной картины во всем диапазоне длин волн, в пределах которого соблюдается соотношение (6.23.3), не зависит от длины волны:

$$a(\lambda) = \frac{\lambda \cdot q}{\text{const} \cdot \lambda} = \frac{q}{\text{const}}. \quad (6.23.4)$$

Такую систему интерференционных полос называют ахроматической.

В реальном эксперименте ахроматическую систему можно осуществить с помощью спектрографа с дифракционной решеткой (рис. 6.72).



В отсутствие дифракционной решетки источник монохроматического света  $S$  проектируется системой из двух линз  $L_1$  и  $L_2$  в точку  $P_0$ . Если же в пучок света поместить дифракционную решетку, то лучи каждой длины волны света отклонятся в первом дифракционном порядке на угол

$$\theta(\lambda) = \frac{\lambda}{a_0}, \quad (6.23.5)$$

где  $a_0$  — шаг решетки. Спектр излучения точечного источника  $S(\lambda)$ , изображаемый линзой  $L_2$  в плоскости  $P_1$ , представляет собой совокупность точек, расстояние каждой из которых до точки  $P_0$ , равно

$$SP_0 = l \cdot \theta(\lambda) = \frac{l}{a_0} \lambda, \quad (6.23.6)$$

прямо пропорционально длине волны света. Такое свойство системы полностью соответствует требованию (6.23.3). Поместив зеркало  $M$ , увидим на экране контрастную интерференционную картину ахроматических полос.

Как показали исследования А. Ломана, интерференционные полосы, получаемые путем расщепления исходного пучка света на две или несколько взаимно пространственно когерентных частей с помощью дифракционных решеток, оказываются контрастными даже тогда, когда размеры источника света  $S$  существенно превышают размеры, определяемые требованием Юнга в обычной хроматической системе.

Дальнейшее развитие ахроматических систем с использованием дифракционных решеток привело в последнее время к созданию голографии с ахроматическими полосами. Эксперименты показали, что при использовании излучения в весьма широком участке спектра ( $\sim 100 \text{ \AA}$ ), допускаемом ахроматическими системами получения интерференционной картины, а также при значительно больших размерах источника освещения выигрыш в использовании потока света достигал значения  $4,5 \cdot 10^4$ .

На рис. 6.73 изображена ахроматическая система Лейта. Источник света  $S$  создает с помощью линзы  $L_1$  коллимированный пучок. Линза  $L_2$  отображает дифракционную решетку  $DP$ , расположенную в плоскости  $P_1$ , на плоскость  $P_4$ . В плоскости  $P_2$ , где линза  $L_2$  фокусирует дифракционные параллельные пучки в систему точек, устанавливается экран, который закрывает все дифракционные порядки, кроме двух. Пропущенные дифракционные порядки затем образуют изображение решетки в плоскости  $P_4$ . Один из дифракционных пучков используется как предметный пучок, другой является опорным.

Интерференционные полосы, образующиеся в плоскости  $P_4$ , можно рассматривать как результат интерференции двух пучков, возникших в плоскости  $P_2$ . Шаг интерференционных полос равен шагу используемой дифракционной решетки. Вместе с тем контрастность интерференционных полос, полученных в такой системе, не ограничена степенью монохроматичности света. Таким образом, хотя используемая схема является голографией Лейта

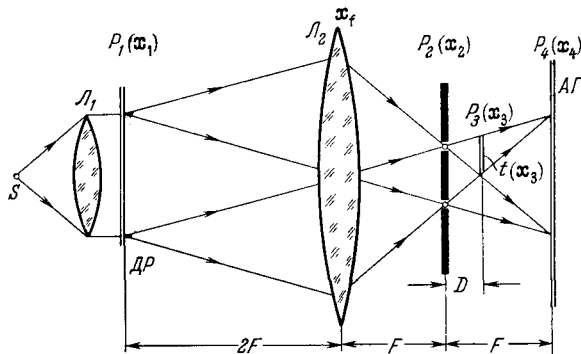


Рис. 6.73. Схема ахроматической голографии Лейта. Ахроматическая изображающая линза  $L_2$  создает в плоскости  $AG$  изображение полос поглощающей дифракционной решетки  $DP$ . Экран  $P_2$ , расположенный в плоскости пространственных частот, имеет два отверстия, через которые проходят только два дифракционных пучка. В одном из этих пучков в плоскости  $P_3$  устанавливается транспарант  $t(x_3)$ , голограмма которого получается в плоскости  $P_4$ .

с разделенными в пространстве источниками предметного и опорного пучков, требования к временной когерентности здесь гораздо более мягкие, чем в обычной схеме Лейта. Более того, требования к когерентности определяются условиями реализации схемы Габора с неразделенными пучками.

Благодаря использованию ахроматической голографии число контрастных полос возрастает от 50 до 8000.

Дифракционные решетки, использованные в этой установке, представляли собой отбеленные рельефно-фазовые решетки. Эффективность использования света в таких решетках равнялась примерно 50%, что сравнимо с эффективностью, получаемой в интерферометре Маха — Цендера.

Пусть квазимонохроматическая волна  $V(t)$  ( $\Delta\omega \ll \omega$ ) освещает дифракционную решетку, характеризующуюся амплитудным пропусканием

$$t(x_1) = A_0 + A_1 \cos \omega_x x_1, \quad (6.23.7)$$

где  $\omega_x = 2\pi/a$ ,  $a$  — шаг решетки. Спектр источника определяется функцией

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.23.8)$$

Поле в плоскости линзы  $L_2$ , на расстоянии  $2F$  от решетки, равно

$$f_1(\mathbf{x}_0) = \frac{i}{\lambda 2F} [(A_0 + A_1 \cos \omega_x x_1) * e^{-i \frac{k(\omega)}{4F} x_1^2}] V(\omega) =$$

$$= \frac{i}{4\pi \lambda F} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V(\omega) (A_0 + A_1 \cos \omega_x x_1) e^{-i \frac{\pi}{2\lambda F} (x_0 - x_1)^2} dx_1 d\omega. \quad (6.23.9)$$

Поле в плоскости  $\mathbf{x}_2$  равно

$$f_2(\mathbf{x}_2) = \frac{i}{\lambda F} [f_1(\mathbf{x}_0) \cdot e^{i \frac{\pi x_0^2}{\lambda F}}] * e^{-i \frac{\pi x_0^2}{\lambda F}} =$$

$$= \frac{i}{\lambda F} \int_{-\infty}^\infty f_1(\mathbf{x}_0) e^{i \frac{\pi x_0^2}{\lambda F}} e^{-i \frac{\pi}{\lambda F} (x_2 - x_0)^2} dx_0 =$$

$$= C_1 \int_{-\infty}^\infty V(\omega) e^{i \frac{\pi x_2^2}{\lambda F}} \int e^{-i \frac{2\pi}{\lambda F} x_2 x_1} [A_0 + A_1 \cos \omega_x x_1] e^{i\omega t} dx_1 d\omega. \quad (6.23.10)$$

После интегрирования по  $x_1$  получаем

$$f_2(\mathbf{x}_2) = C_2 \int_{-\infty}^\infty V(\omega) e^{i \frac{\pi x_2^2}{\lambda F}} \left[ A_0 \delta\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda F}\right) + \frac{A_1}{2} \delta\left(\alpha + \frac{2\pi x_2}{\lambda F}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{A_1}{2} \delta\left(\alpha - \frac{2\pi x_2}{\lambda F}\right) \right] e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.23.11)$$

В силу (6.23.7) в  $f_2(\mathbf{x}_2)$  содержатся только нулевой (0) и два первых (+1, -1) дифракционных порядка. Возможны три основных варианта использования этих пучков:

- 1) в качестве сигнального пучка используется нулевой дифракционный; в качестве опорного пучка — первый дифракционный;
- 2) в качестве сигнального пучка используется первый дифракционный; в качестве опорного пучка — нулевой дифракционный;
- 3) в качестве сигнального пучка используется плюс первый дифракционный; в качестве опорного пучка — минус первый дифракционный.

Опорный пучок, достигающий плоскости  $\mathbf{x}_4$ , имеет амплитуду

$$r(\mathbf{x}_4) = C_3 \int V(\omega) e^{i \frac{\lambda F}{4\pi} \alpha_1^2 - i \frac{\pi}{\lambda F} [(\mathbf{x}_4 - \frac{\lambda F}{2\pi} \alpha_1)^2 + y^2]} e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.23.12)$$

Предметный пучок в плоскости  $x_3$  имеет амплитуду

$$s(x_3) = C_4 \int V(\omega) e^{i \frac{\lambda F}{4\pi} \alpha_2^2} e^{-i \frac{\pi}{\lambda D} [(x_3 - \frac{\lambda F}{2\pi} \alpha_2)^2 + y_3^2]} e^{i\omega t} d\omega = \\ = C_4 \int V(\omega) e^{i[k_1 - k_3(x_3 - k_2)^2 - k_3 y_3^2]} e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.23.13)$$

где

$$k_1 = \frac{\lambda F}{4\pi} \alpha_2^2, \quad k_2 = \frac{\lambda F}{4\pi} \alpha_2, \quad k_3 = \frac{\pi}{\lambda D}, \quad (6.23.14)$$

а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  могут принимать значения 0,  $+\alpha$  или  $-\alpha$  в зависимости от того, какие дифракционные порядки используются для предметного или опорного пучка.

Рассмотрим простейший предмет, установленный в плоскости  $x_3$ , который характеризуется амплитудным пропусканием

$$t(x_3) = e^{i\Omega_0 x_3}, \quad \Omega_0 = \text{const}, \quad (6.23.15)$$

т. е. представляет собой призму, поворачивающую волну на угол

$$\theta = \Omega_0 \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Сигнальный пучок на выходе транспаранта  $t(x_3)$  равен

$$f_3(x_3) = t(x_3) s(x_3) = C_4 \int V(\omega) e^{i[k_1 - k_3(x_3 - k_2)^2 + \Omega_0 x_3 - k_3 y_3^2]} e^{i\omega t} d\omega = \\ = C_4 \int V(\omega) e^{i \left\{ k_1 - k_3 \left[ x_3 - \left( k_2 + \frac{\Omega_0}{2k_3} \right) \right]^2 - k_3 y_3^2 + k_2 \Omega_0 + \frac{\Omega_0^2}{4k_3} \right\}} e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.23.16)$$

Амплитуда  $f_3(x_3)$  описывает мнимый источник, помещенный в точку

$$x_2 = k_2 + \frac{\Omega_0}{2k_3} \quad (6.23.17)$$

и имеющий фазу

$$\theta = k_1 + k_2 \Omega_0 + \frac{\Omega_0^2}{4k_3}. \quad (6.23.18)$$

Реальный источник находился бы при этом в точке  $x_2 = k_2$ .

Сигнальный пучок в плоскости  $x_4$  равен

$$s_0(x_4) = C_4 \int V(\omega) e^{i \left[ k_1 + k_2 \Omega_0 + \frac{\Omega_0^2}{4k_3} \right]} e^{-i \frac{\pi}{\lambda F} \left[ x_1 - \left( k_2 + \frac{\Omega_0}{2k_3} \right) \right]^2} e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.23.19)$$

Интенсивность, регистрируемая в плоскости голограммы, равна

$$I(x_4) = |s_0(x_4) + r(x_4)|^2 = (|C_3|^2 + |C_4|^2) \int \Phi(\omega) d\omega + \\ + |2C_3C_4| \int \Phi(\omega) \cos \left\{ k_1 + k_2\Omega_0 + \frac{\Omega_0^2}{4k_3} - \frac{\pi}{\lambda F} \left[ x_4 - \left( k_2 + \frac{\Omega_0}{2k_3} \right) \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda F}{4\pi} \alpha_1^2 + \frac{\pi}{\lambda F} \left( x_4 - \frac{\lambda F}{2\pi} \alpha_1 \right)^2 \right\} d\omega, \quad (6.23.20)$$

где  $\Phi(\omega)$  определяется соотношением

$$V^*(\omega') V(\omega) = \Phi(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

В более удобной форме (6.23.20) можно представить так:

$$I(x_4) = B_0 \int \Phi(\omega) \left\{ b_0 + b_1 \cos \left[ \left( \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{D\Omega_0}{F} \right) x_4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda\Omega_0}{2\pi} \left( 1 - \frac{D}{F} \right) \left( \alpha_2 F + \frac{\Omega_0 D}{2} \right) \right] \right\} d\omega, \quad (6.23.21)$$

где  $B_0, b_0, b_1$  — действительные числа.

Основная особенность распределения интенсивности  $I(x_4)$  в плоскости  $x_4$  состоит в том, что

1) значение пространственной частоты интерференционной картины, регистрируемой на голограмме, не зависит от длины волны света  $\lambda$ :

$$\omega_x = \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{D}{F} \Omega_0, \quad (6.23.22)$$

и определяется выбором пучков, положением предмета  $D$  и пространственной частотой предмета  $\Omega_0$ ;

2) фаза пространственной картины интерференции зависит от длины волны света линейно:

$$\varphi = \lambda \frac{\Omega_0}{2\pi} \left( 1 - \frac{D}{F} \right) \left( \alpha_2 F + \frac{\Omega_0 D}{2} \right). \quad (6.23.23)$$

Использование голограммы будет практически полным, если максимальная вариация фазы при изменении длины волны света от  $\lambda - \Delta\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$  не превысит  $\varphi_{\text{макс}} = \pi/2$ .

Исходя из этого требования, можно найти допустимую ширину спектра излучения:

$$\Delta\lambda_{\text{доп}} = \frac{2\pi^2}{D\Omega_0^2 \left(1 - \frac{D}{F}\right) \left(1 + \frac{2\alpha_2 F}{\Omega_0 D}\right)}. \quad (6.23.24)$$

Результаты анализа сведены в табл. 6.4, где даны допустимые значения ширины спектра и значения пространственной несущей.

Таблица 6.4

Опорный пучок	Сигнальный пучок	Пространственная несущая ( $\alpha_2 - \alpha_1$ )	$\Delta\lambda_{\text{доп}}$	Примечание
0	0	0	$\frac{2\pi^2}{D\Omega_0^2 \left(1 - \frac{D}{F}\right)}$	Схема Габора Схема Лейта
1	0	$-\alpha$		
0	1	$\alpha$	$\frac{2\pi^2}{D\Omega_0^2 \left(1 - \frac{D}{F}\right) \left(1 + 2\alpha \frac{F}{\Omega_0 D}\right)}$	Схема Лейта Схема Лейта
-1	1	$2\alpha$		
1	1	0		Схема Габора

Из таблицы 6.4 видно, что одни и те же допустимые спектры излучения  $\Delta\lambda_{\text{доп}}$  отвечают одновременно как схеме Габора, так и схеме Лейта. Иначе говоря, введение пространственной несущей в ахроматической голографии не требует повышения временной когерентности, как это имеет место в обычной хроматической голографии. Рамкой обведен наиболее благоприятный вариант: в качестве сигнального пучка используется нулевой порядок; в качестве опорного пучка — первый порядок. Здесь сигнал переносится пучком, который не имеет дисперсии. Поскольку всегда

$$\left| 1 + 2 \frac{\alpha F}{\Omega_0 D} \right| \geq 1,$$

так как в противном случае не происходит полного пространственного разделения восстановленных изображений, то преимущества этого случая подкрепляются еще одним фактором:

$$\Delta\lambda_{\text{доп}}^{(1,2)} > \Delta\lambda_{\text{доп}}^{(3,4,5)}. \quad (6.23.25)$$

Оценим эффективный выигрыш от расширения спектра излучения в ахроматической голографии по сравнению с обычной

голографией Лейта. Как известно,

$$\Omega_0 \text{ макс} = \frac{\omega_0}{3}, \quad (6.23.26)$$

где  $\omega_0$  — частота пространственной несущей. Тогда

$$\Delta\lambda_{\text{мин}} = \frac{2\pi^2 \cdot 9}{D\omega_0^2 \left(1 - \frac{D}{F}\right)}. \quad (6.23.27)$$

Пренебрегая величиной  $D/F$  по сравнению с 1, грубо оцениваем:

$$\Delta\lambda_{\text{мин}} \sim \frac{18\pi^2}{D\omega_0^2} \sim \frac{18\pi^2 a^2}{D}, \quad (6.23.28)$$

где  $a = 1/\omega_0$  — шаг интерференционной картины.

В то же время для обычной голограммы Лейта

$$\Delta\lambda_{\text{мин}}^{\text{л}} \sim \lambda \frac{a}{L},$$

где  $L$  — размер голограммы. Окончательно получаем

$$\frac{\Delta\lambda_{\text{мин}}^{\text{ахром}}}{\Delta\lambda_{\text{мин}}^{\text{л}}} = \frac{18\pi^2 a^2}{D} \frac{L}{\lambda a} \sim 200 \frac{a}{\lambda} \frac{L}{D} > 500 \frac{a}{\lambda}. \quad (6.23.29)$$

Таким образом, при одной и той же максимальной пространственной частоте  $\Omega_0$  в предмете спектр излучения в ахроматической схеме примерно в  $10^3$  раз шире, чем это требуется в обычной голографии Лейта. Экспериментально наблюдался выигрыш в 300 раз. Такими свойствами обладает ахроматическая система на стадии получения голограммы. На стадии восстановления применяется обычная система с лазерным пучком и соответствующими требованиями к когерентности освещения.

Однако возможны ахроматические системы и на стадии восстановления. Рассмотрим один из вариантов, позволяющий получить восстановленные изображения от плоской голограммы в лучах широкого спектра излучения. При освещении обычной голограммы точечным источником света, испускающим широкий спектр излучения, восстановленные изображения размазываются в соответствии со свойством обычной дифракционной решетки разлагать спектр на его составляющие компоненты. Такую дисперсию можно погасить, если использовать дифракционную решетку, имеющую тот же шаг, что и плоская голограмма. Схема опыта представлена на рис. 6.74. Дифракционная решетка помещается в дифракционный пучок первого порядка, образующий мнимое изображение от голограммы, освещенной точечным источником дуговой циркониевой лампы. Плоскости дифракционной

решетки и голограммы параллельны, а штрихи решетки и интерференционные полосы голограммы перпендикулярны чертежу.

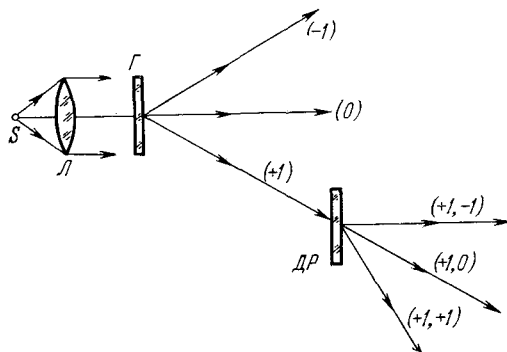


Рис. 6.74. Схема компенсации полихроматического эффекта источника  $S$ , свет от которого используется для освещения голограммы  $G$ . Дифракционная решетка  $DR$ , согласованная с голограммой по ориентации и шагу полос пространственной несущей, устанавливается в пучок света первого дифракционного порядка. Вдоль нулевого направления  $(+1, -1)$  наблюдается скомпенсированное изображение.

Дифрагированная от решетки волна первого порядка ( $\alpha_d = -\alpha_r$ , т. е. происходит дифракция противоположного направления) испытывает, по существу, двойную дифракцию и поэтому является компенсированной по дисперсии волной, образующей четкое мнимое изображение.

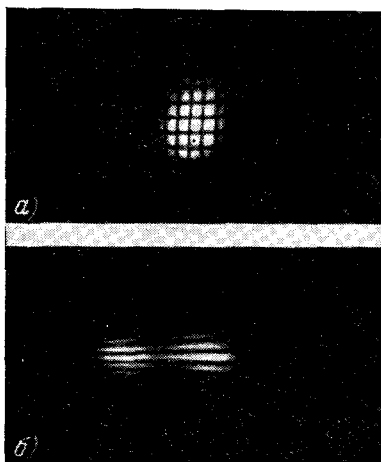


Рис. 6.75. Вид изображения скомпенсированного, по методу рис. 6.74 (а), и изображения, восстановленного в лучах белого света без компенсации (б).

Аналогичная компенсация достигается и для действительного изображения. На рис. 6.75, а показана черно-белая фотография типичного мнимого изображения, восстановленного с помощью компенсирующей дифракционной решетки. Для сравнения на рис. 6.75, б показано то же изображение, восстановленное в лучах белого света без компенсации. Каждая горизонтальная линия имеет радужный переход цветов, в то время как по вертикали изменение цвета отсутствует. Компенсированное восстановленное изображение видно почти как

черно-белое, если не считать небольшого окрашивания вдоль всех четырех краев.



Дифракционные решетки, используемые для компенсации дисперсии голограммы при восстановлении в лучах белого света, должны обладать определенными характеристиками в распределении света по дифракционным порядкам. Лучше всего для этой цели использовать отражательные решетки.

### § 6-24. Объемная голограмма

Голограмма может быть как плоской, так и объемной. И чем больше объем голограммы, тем лучше реализуются все ее свойства. Для того чтобы фотоэмульсию или любую регистрирующую среду можно было рассматривать как объемную голограмму, необходимо, чтобы расстояние между интерференционными полосами было значительно меньше толщины детектора. Объемная голограмма, в отличие

от плоской или тонкослойной, восстанавливает только одно изображение — действительное или мнимое, в зависимости от того, с какой стороны освещает ее пучок когерентного света на стадии восстановления. Это положение следует рассматривать как основной критерий, с помощью которого можно классифицировать голограммы на плоские и объемные.

История объемной голографии восходит к опытам Липпмана по созданию цветной фотографии методом отражения от системы интерференционных поверхностей, образованных в объеме лучами различных длин волн. Интерференционная картина в опытах Липпмана возникает при наложении прямой и отраженной волн света (рис. 6.76) от ртутного зеркала, непосредственно соприкасающегося с фотоэмульсией.

Распределение интенсивности в стоячей интерференционной картине  $I(z)$  в зависимости от толщины  $z$  связано с распределением интенсивности падающего излучения по длинам волн  $I(\lambda)$  с помощью преобразования Фурье.

При освещении проявленной фотоэмульсии свет интерферирует на слоях этой пространственной структуры. При интерференции осуществляется обратное преобразование Фурье, вследствие чего спектральный состав излучения, отраженного от

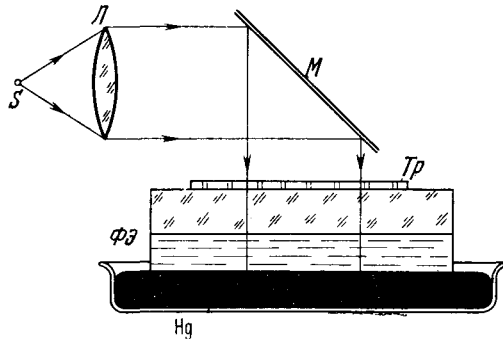


Рис. 6.76. Схема эксперимента Липпмана по наблюдению интерференционной картины прямой и отраженной волн света. Регистрирующая фотоэмульсия ФЭ находится в контакте с ртутным зеркалом. Прозрачный Тр расположен над стеклом.

Липпмановской пластинки, совпадает со спектральным составом излучения, упавшего на фотопластинку при ее экспозиции.

Интерференционный метод Липпмана для целей голографии впервые использовал Ю. Н. Денисюк, который назвал свой метод волновой фотографией. Этот термин, однако, не получил распространения, и его не использует даже сам изобретатель. Везде используется термин «объемная голограмма» или «голограмма Липпмана — Денисюка». В отличие от обычной схемы получения голограммы, предмет в волновой фотографии Денисюка освещается сквозь голограмму, без использования разработанной позднее схемы с разделенными пучками.

Рассмотрим упрощенную схему работы объемной голограммы. Пусть два плоских монохроматических пучка, перпендикулярных друг другу, освещают светочувствительный объем. Точки этой интерференционной картины с максимальной интенсивностью образуют систему параллельных плоскостей с расстояниями между ними

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda. \quad (6.24.1)$$

Плоская волна, распространяющаяся в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}_1$ , имеет амплитуду

$$u_1(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}_1\mathbf{r}}, \quad (6.24.2)$$

где  $\mathbf{r}(x, y, z)$  — радиус-вектор точки наблюдения. Второй плоский пучок имеет амплитуду

$$u_2(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}_2\mathbf{r}}. \quad (6.24.3)$$

По предположению обе волны имеют одну и ту же частоту. Поэтому возникшая интерференционная картина является неподвижной в пространстве. Суммарная амплитуда равна

$$u(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r}), \quad (6.24.4)$$

а интенсивность

$$I(\mathbf{r}) = |u(\mathbf{r})|^2 = 2 + e^{i\mathbf{k}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)\mathbf{r}}. \quad (6.24.5)$$

Если после проявления осветить объемную голограмму пучком  $u_1(\mathbf{r})$ , то возникает волна

$$u_0(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) \cdot I(\mathbf{r}) = 2e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}_1\mathbf{r}} + e^{i\mathbf{k}(2\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)\mathbf{r}} + e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}_2\mathbf{r}}. \quad (6.24.6)$$

Здесь первое слагаемое — волна, прошедшая сквозь объемную голограмму, второе слагаемое — волна, распространяющаяся в направлении

$$\mathbf{n} = 2\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2. \quad (6.24.7)$$

Третье слагаемое описывает волну  $u_2(\mathbf{r})$ , освещавшую светочувствительный блок одновременно с волной  $u_1(\mathbf{r})$  на стадии получения голограммы.

Поскольку векторы  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  и  $\mathbf{n}$  являются единичными векторами, то вектор  $\mathbf{n}$ , определяемый выражением (6.24.7), существовать не может. Таким образом, на стадии восстановления имеются пучки только прямой  $u_1(\mathbf{r})$  и восстановленный  $u_2(\mathbf{r}) = e^{ikh_2 r}$ , соответствующий мнимому изображению.

Если на стадии восстановления использовать освещающую волну  $u'_1$ , распространяющуюся в сторону, противоположную волне  $\underline{u}_1$ , так что

$$u'_1(\mathbf{r}) = e^{-ikh_1 r}, \quad (6.24.8)$$

то при просвечивании объемной голограммы такой «обратной» волной возникает поле

$$\begin{aligned} u'_0(\mathbf{r}) &= e^{-ikh_1 r} [2 + e^{ik(n_1 - n_2)r} + e^{-ik(n_1 - n_2)r}] = \\ &= 2e^{-ikh_1 r} + e^{-ikh_2 r} + e^{-ik(2n_1 - n_2)r}. \end{aligned} \quad (6.24.9)$$

Восстановленная волна, описываемая вторым слагаемым, противоположна волне  $e^{ikh_2 r}$ , восстанавливаемой прямым пучком  $e^{ikh_1 r}$ .

Аналогично можно описать интерференцию плоской и расходящейся из начала координат волн. Здесь

$$u_2(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6.24.10)$$

Суммарная волна

$$u(\mathbf{r}) = e^{ikh_1 r} + \frac{e^{ikr}}{r}$$

образует картину интенсивности

$$I(\mathbf{r}) = |u(\mathbf{r})|^2 = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r} [e^{ih(nr-r)} + e^{-ih(nr-r)}]. \quad (6.24.11)$$

При восстановлении плоской волны  $u_1$  получаем амплитуду на выходе:

$$u_0(\mathbf{r}) = e^{ikh_1 r} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r} e^{ik(2nr-r)} + \frac{1}{r} e^{ikr}. \quad (6.24.12)$$

Третье слагаемое представляет восстановленную волну, расходящуюся из начала координат. Волны с единичным вектором распространения, равным

$$\mathbf{n}' = 2\mathbf{n} - \frac{\mathbf{r}}{r},$$

существовать не могут.

Аналогично, при освещении голограммы волной  $u'_1$  получим

$$u'_0(\mathbf{r}) = e^{-ikh_0 r} \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r} e^{-ikr} + e^{-ih(2nr-r)}. \quad (6.24.13)$$

Второе слагаемое описывает волну, сходящуюся в начало координат, т. е. волну, образующую действительное изображение.

Объемную голограмму можно освещать на стадии восстановления белым светом. Отбор необходимой монохроматической волны света, восстанавливающей изображение в лучах той же длины волны, что и на стадии получения голограммы, происходит при многократной интерференции лучей всех длин волн в многочисленных слоях почернения, составляющих объемную голограмму. При этом степень монохроматичности света, отобранного объемной голограммой как монохроматором, определяется полным числом интерференционных полос, уместившихся в объемной голограмме.

Напомним, что максимальное число интерференционных полос, имеющих достаточно высокий контраст в объемной голограмме, равно

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

т. е. степени монохроматичности света.

При освещении объемной голограммы белым светом на стадии восстановления спектральный состав волны определяется распределением интенсивности

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \pi N z}{\pi z} \right)^2, \quad (6.24.14)$$

где  $z = \lambda_{\text{осв}}/\lambda_{\text{отр}}$ ;  $\lambda_{\text{осв}}$  — длина волны на стадии получения голограммы,  $\lambda_{\text{отр}}$  — длина волны при освещении голограммы лучами белого света. Максимальная интенсивность, равная

$$N^2 I_0, \quad (6.24.15)$$

достигается при  $z = l$ , где  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Ширина спектральных линий для разных  $l$  определяется соотношением

$$\frac{N^2 I_0}{2} = I_0 \left[ \frac{\sin \pi N \frac{\Delta z}{2}}{\sin \pi \frac{\Delta z}{2}} \right]^2, \quad (6.24.16)$$

откуда

$$\Delta z = \frac{2}{\sqrt{2N}}, \quad \text{или} \quad \Delta \lambda_{\text{отр}} \sim \frac{\lambda_{\text{отр}}}{N}. \quad (6.24.17)$$

При полном использовании толщины эмульсии

$$N = \frac{2nt_0}{\lambda}, \quad \Delta\lambda_{\text{отр}} = \frac{\lambda_{\text{осв}} \cdot \lambda_{\text{отр}}}{2nt_0}, \quad (6.24.18)$$

а с учетом усадки эмульсии в  $k$  раз

$$t = \frac{t_0}{k}. \quad (6.24.19)$$

На рис. 6.77 приведены кривые зависимости между  $\Delta\lambda$  и толщиной эмульсии.

Рассмотрим теперь более подробно свойства объемной голограммы. Для упрощения выкладок предположим, что векторы

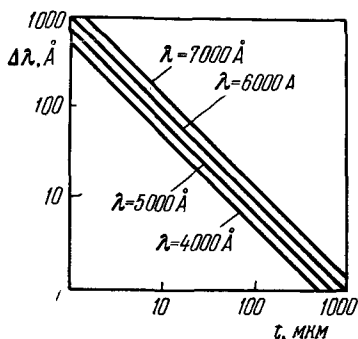


Рис. 6.77. Кривые зависимости между шириной спектра излучения, отбираемого с помощью объемной голограммы, и размером голограммы в направлении, перпендикулярном интерференционным плоскостям.

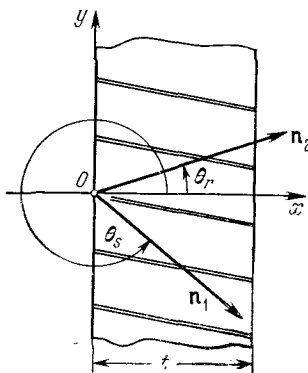


Рис. 6.78. Структура объемной голограммы в наиболее общем случае. Единичный вектор  $\mathbf{n}_1$  определяет плоскую волну, являющуюся одной из компонент предметного пучка. Единичный вектор  $\mathbf{n}_2$  характеризует плоскую опорную волну. Толщина эмульсии равна  $t$ .

$\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  расположены в плоскости  $xOy$  и характеризуются компонентами (рис. 6.78)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \mathbf{n}_s (\cos \theta_s, \sin \theta_s, 0), \\ \mathbf{n}_2 &= \mathbf{n}_r (\cos \theta_r, \sin \theta_r, 0). \end{aligned} \right\} \quad (6.24.20)$$

Распределение интенсивности в объеме голограммы, освещаемой двумя плоскими волнами  $u_s$  и  $u_r$ , равно

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s) = |u_s + u_r|^2 = (2 + 2 \cos \Phi), \quad (6.24.21)$$

где

$$\Phi = k(\mathbf{n}_r - \mathbf{n}_s) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}. \quad (6.24.22)$$

На стадии восстановления объемная голограмма освещается считывающей волной

$$u_i = e^{ik'n_i r} = e^{ik_i r}, \quad (6.24.23)$$

единичный вектор который  $n_i$  ( $\cos \theta_i$ ,  $\sin \theta_i$ , 0) имеет произвольную ориентацию, но расположен в плоскости  $xOy$ . При этом длина волны  $\lambda'$  считывающего пучка отличается в общем случае от длины волны  $\lambda$  пучков света на стадии получения голограммы (рис. 6.79). Вторичное поле в точке  $P(x_s)$ , расположенной вне эмульсии, определяется амплитудой, которая в приближении Кирхгофа равна

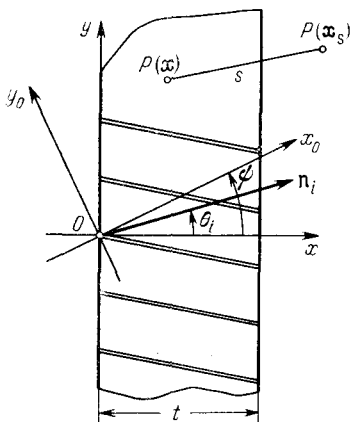


Рис. 6.79. Рисунок, поясняющий метод вычисления вторичной волны в точке  $P(x_s)$  на стадии восстановления при освещении объемной голограммы считывающей волной, характеризующейся единичным вектором распределения  $n_i$ .

$$u_d = Q \int_V (2 + 2 \cos \Phi) e^{i(k'n_i r + k's)} dr, \quad (6.24.24)$$

где интегрирование ведется по всем точкам  $P(x)$ , расположенным в эмульсии,  $Q$  — константа,  $s$  — расстояние между точками  $P(x)$  и  $P(x_s)$ . Ограничимся, как всегда, пучками, образующими дифракционные волны первого порядка:

$$u_{d\pm}^I = Q \int e^{i[\pm \Phi + k'n_i r + k's]} dr. \quad (6.24.25)$$

Знак «+» относится к действительному изображению, а знак «-» — к мнимому. Направление дифрагированной волны определяется углом  $\psi$ . Введем новую координатную систему  $x_0 O y_0$ , ось  $Ox_0$  которой направлена по лучу  $\psi$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos \psi - y_0 \sin \psi, \\ y &= x_0 \sin \psi + y_0 \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.24.26)$$

Не теряя общности, можно подсчитать амплитуду восстановленных плоских волн только в одной точке, например, на оси  $Ox_0$ . Тогда

$$u_{d\pm}^I = Q \int_0^{t/\cos \psi} \exp i \left\{ \pm \Phi + \Phi_i + k' \left( \frac{d}{\cos \psi} - x_0 \right) \right\} dx_0, \quad (6.24.27)$$

где  $\Phi_i = k'n_i r = kr$ ,  $k' \neq k$ ,  $d$  — расстояние вдоль оси  $Ox_0$  между точками  $P(x)$  и  $P(x_s)$ ,  $t$  — толщина эмульсии. Подставив явные

выражения для фаз, получим

$$u_{d\pm}^I = C_1 F \int_0^{t/\cos\psi} \exp i \left\{ k' x_0 [\pm z \cos(\psi - \theta_r) \mp z \cos(\psi - \theta_s) + \right. \\ \left. + \cos(\psi - \theta_i) - 1] + \frac{k'd}{\cos\psi} \right\} dx_0, \quad (6.24.28)$$

где  $z = \lambda'/\lambda$ , а множитель

$$F = \exp iky_0 [\mp z \sin(\psi - \theta_r) \pm z \sin(\psi - \theta_s) - \sin(\psi - \theta_i)]$$

не зависит от  $x_0$ . После интегрирования находим

$$u_{d\pm}^I = C_2 F \frac{1}{\cos\psi} \operatorname{sinc} \left\{ \frac{k't}{2\cos\psi} [\pm z \cos(\psi - \theta_r) \mp z \cos(\psi - \theta_s) + \right. \\ \left. + \cos(\psi - \theta_i) - 1] \right\} = C_2 \frac{F}{\cos\psi} \operatorname{sinc} \left\{ \frac{kt}{2\cos\psi} [\pm \cos(\psi - \theta_r) \mp \right. \\ \left. \mp \cos(\psi - \theta_s) + \frac{1}{z} \cos(\psi - \theta_i) - \frac{1}{z}] \right\}. \quad (6.24.29)$$

Определим угол  $\psi$ , под которым дифракционная волна  $u_d^I$  имеет максимальную интенсивность. Обозначив через  $\alpha$  аргумент функции  $\operatorname{sinc}$ , получаем

$$\frac{kt}{2\cos\psi} \left[ \pm \cos(\psi - \theta_r) \mp \cos(\psi - \theta_s) + \frac{1}{z} \cos(\psi - \theta_i) - \frac{1}{z} \right] = \alpha, \\ \frac{1}{e^{i\psi} + e^{-i\psi}} \left\{ e^{i\psi} \left[ \pm e^{-i\theta_r} \mp e^{-i\theta_s} + \frac{1}{z} e^{-i\theta_i} - \frac{1}{z} e^{-i\psi} \right] + \right. \\ \left. + e^{-i\psi} \left[ \pm e^{i\theta_r} \mp e^{i\theta_s} + \frac{1}{z} e^{i\theta_i} - \frac{1}{z} e^{i\psi} \right] \right\} = \frac{2\alpha}{kt},$$

или

$$\frac{e^{i\psi} A^* + e^{-i\psi} A}{e^{i\psi} + e^{-i\psi}} = \frac{2\alpha}{kt}, \quad (6.24.30)$$

где

$$A = \pm e^{i\theta_r} \mp e^{i\theta_s} + \frac{1}{z} e^{i\theta_i} - \frac{1}{z} e^{i\psi}. \quad (6.24.31)$$

Выражение (6.24.30) можно преобразовать следующим образом:

$$(A + A^*) + i \operatorname{tg} \psi (A^* - A) = \frac{4\alpha}{kt},$$

откуда  $A = A^*$ ,  $\psi \neq 0$ , т. е.  $A$  действительно и при этом

$$A = \frac{2\alpha}{kt}.$$

Функция  $\text{sinc}$  принимает максимальное значение при  $\alpha = 0$ . Поэтому

$$\pm e^{i\theta_r} \mp e^{i\theta_s} + \frac{1}{z} e^{i\theta_i} - \frac{1}{z} e^{i\psi} = 0, \quad (6.24.32)$$

или

$$\pm \mathbf{k}_r \mp \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_\psi = 0. \quad (6.24.33)$$

При этом автоматически выполняется уравнение дифракционной решетки

$$\sin \theta_i - \sin \psi = \pm \frac{\lambda'}{\lambda} (\sin \theta_s - \sin \theta_r), \quad (6.24.34)$$

которое представляет собой проекцию векторного равенства (6.24.33) на мнимую ось. Таким образом, условие максимальной интенсивности дифрагированной волны сводится к тому, чтобы векторы  $\pm \mathbf{k}_r$ ,  $\mp \mathbf{k}_s$ ,  $+\mathbf{k}_i$ ,  $-\mathbf{k}_\psi$  в сумме образовывали замкнутый многоугольник. Если  $z = 1$ , т. е.  $\lambda = \lambda'$ , то все четыре вектора имеют одинаковую длину, т. е. образуют параллелограмм, и мы вновь приходим к выводу, полученному выше: вектор плоской волны на стадии восстановления должен совпадать с одним из векторов на стадии получения голограммы. Однако равенство (6.24.33) охватывает также некоторые случаи, которые ускользнули от нас ранее. А именно, всего имеется шесть конфигураций векторов  $\mathbf{k}_r$ ,  $\mathbf{k}_s$ ,  $\mathbf{k}_i$ ,  $\mathbf{k}_\psi$ , которые удовлетворяют равенству (6.24.33). Для мнимого изображения — нижние знаки — имеются следующие три решения:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{M-1} & \theta_i = \theta_r, \quad \psi = \theta_s; \\ \text{M-2} & \theta_i = \theta_s + \pi, \quad \psi = \theta_r + \pi; \\ \text{M-3} & \theta_s = \theta_r, \quad \psi = \theta_i, \end{array} \right\} \quad (6.24.35)$$

и для действительного — верхние знаки — также три решения:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Д-1} & \theta_i = \theta_s, \quad \psi = \theta_r; \\ \text{Д-2} & \theta_i = \theta_r + \pi, \quad \psi = \theta_s + \pi; \\ \text{Д-3} & \theta_s = \theta_r, \quad \psi = \theta_i. \end{array} \right\} \quad (6.24.36)$$

В конфигурации М-1 считывающая волна направлена параллельно опорному пучку, а восстановленная волна — параллельно предметной волне, и при этом наблюдается обычное мнимое изображение. Это прямая конфигурация. В конфигурации М-2 голо-



грамма повертывается так, что свет проходит через голограмму в направлении, обратном направлению световой волны на стадии получения. Получающееся при этом мнимое изображение оказывается искаженным. Эти искажения возникают потому, что условие  $\theta_i = \theta_s$  не может одновременно удовлетворяться для всех плоских волн, образующих предметную волну на стадии получения, а только для небольшой части всех компонент. Поэтому при восстановлении наблюдатель сможет увидеть только часть всего изображения, причем при изменении ориентации голограммы появляются каждый раз различные фрагменты всего изображения. Аналогичные дефекты наблюдаются в конфигурации D-1, когда восстанавливается действительное изображение. Неискаженное действительное изображение наблюдается в конфигурации D-2, т. е. когда голограмма освещается светом, идущим в направлении, противоположном тому, когда образуется неискаженное мнимое изображение:  $\theta_i = \theta_r + \pi$ ,  $\psi = \theta_s + \pi$ .

Конфигурации M-3 и D-3 соответствуют случаю, когда угол между сигнальной плоской и опорной волнами равен нулю.

Если считывающий пучок направлен так, что дифракционная волна имеет максимальную интенсивность, то условия Брэгга — Вульфа выполняются для поверхностей в слое эмульсии, соответствующих постоянной фазе интерференционной картины, в частности для поверхностей максимального почернения. Эти поверхности удовлетворяют следующему соотношению:

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{\cos \theta_r - \cos \theta_i}{\sin \theta_r - \sin \theta_s}, \quad (6.24.37)$$

где  $\theta_B$  — угол Брэгга. Условие Брэгга в данном случае имеет вид

$$\psi = \theta_i - 2\theta_B. \quad (6.24.38)$$

Используя (6.24.33), соотношение (6.24.37) можно преобразовать:

$$\theta_i + \psi = \theta_s + \theta_r. \quad (6.24.39)$$

Это условие выполняется для всех шести конфигураций (6.24.35) и (6.24.36).

Условие замкнутости многоугольника, построенного из волновых векторов  $\mathbf{k}$ , проявляется в жестких ограничениях на ориентацию голограммы на стадии восстановления. Выход за допустимые границы ослабляет интенсивность восстановленного изображения. Если  $\alpha = \pi$ , то интенсивность становится нулевой — первый минимум. При этом допустимый угол  $\Delta\theta_i$  (рис. 6.80) определяется с учетом того, что изменение угла падения  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \Delta\theta_i$  вызывает также изменение угла, под которым выходит дифрагировавшая волна:  $\psi \rightarrow \psi + \Delta\psi$ . Уравнения (6.24.34)

и (6.24.31) для  $z = 1$  и конфигурации М-1 ( $\theta_i = \theta_r$ ,  $\psi = \theta_s$ ) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\theta_r + \Delta\theta_i) - \sin(\theta_s + \Delta\psi) &= -\sin\theta_s + \sin\theta_r, \\ -\cos(\theta_s - \theta_r + \Delta\psi) + \cos\Delta\psi + \\ &+ \cos(\theta_s - \theta_r + \Delta\psi - \Delta\theta_i) - 1 = \\ &= \frac{\lambda}{2t} \cos(\theta_s + \Delta\psi). \end{aligned} \right\} \quad (6.24.40)$$

Изменение угла падения считывающей волны на  $\Delta\theta_i$  вызывает отклонение дифрагированной волны на угол  $\Delta\psi$ . Конец вектора  $-\mathbf{k}_\psi$  смещается горизонтально на вектор  $\mathbf{d}$ , который направлен перпендикулярно мнимой оси — в силу условия (6.24.32). Из (6.24.33) следует, что

$$|\mathbf{d}| = \frac{2\alpha}{t}. \quad (6.24.41)$$

Проекция вектора  $\mathbf{d}$  на повернутый вектор  $-\mathbf{k}_{\psi+\Delta\psi}$  равна действительной части уравнения (6.24.33), которая определяет аргумент функции  $\text{sinc}$  в уравнении (6.24.29), а следовательно, интенсивность дифрагированной волны. На рис. 6.81 показан пример зависимости от  $\theta_r$  тех значений  $\Delta\theta_i$ , которые ослабляют интенсивность до нуля (первый минимум

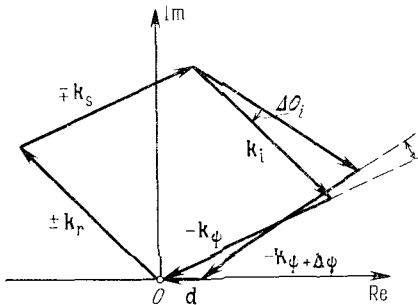


Рис. 6.80. Допустимые отклонения волнового вектора  $\mathbf{k}_i$  считывающей волны на угол  $\Delta\theta_i$  от оптимального значения и вызванные этими отклонениями изменения направления волнового вектора  $\mathbf{k}_\psi$  вторичной волны на угол  $\Delta\psi$ .

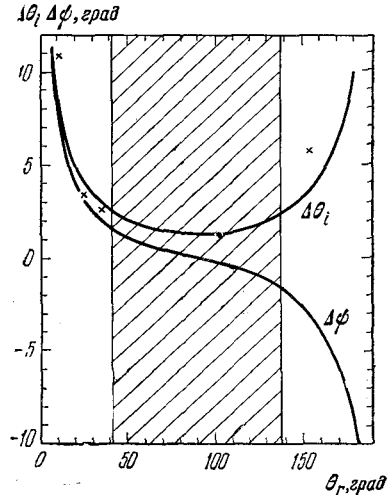


Рис. 6.81. Зависимость  $\Delta\theta_i$  и  $\Delta\psi$  от угла падения опорного пучка  $\theta_r$ .

функции  $\text{sinc}$ ), для  $\theta_s = 0$ ,  $t = 15,5 \text{ мкм}$ ,  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ . Там же дана зависимость  $\Delta\psi$  от  $\theta_r$ . Экспериментальные данные согласуются

с расчетами. Заштрихованная область находится за пределами угла Брюстера. Из приведенных на рис. 6.81 кривых можно сделать вывод о том, что чувствительность к ориентации голограммы пропадает в случае, когда угол между опорным и предметным пучками либо мал, либо близок к  $180^\circ$ , т. е. опорный пучок почти противоположен сигнальному пучку. Наибольшая чувствительность к изменению ориентации голограммы наблюдается в условиях, когда опорный и сигнальный пучки образуют угол, близкий к  $90^\circ$ . Таким образом,

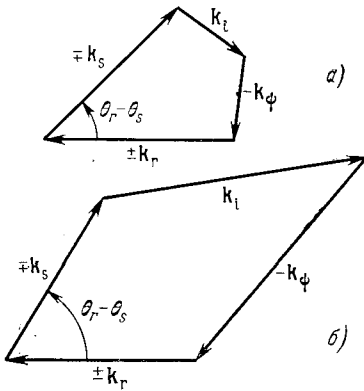


Рис. 6.82. Два возможных случая освещения объемной голограммы на стадии восстановления пучком света длиной волны  $\lambda'$ , отличной от длины волны света, использованной на стадии получения голограммы. а)  $\lambda' > \lambda$ ; б)  $\lambda' < \lambda$ .

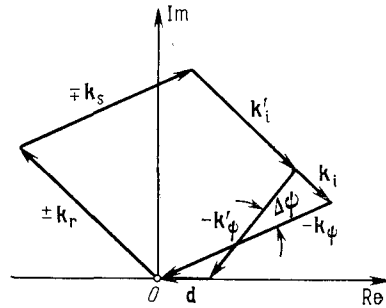


Рис. 6.83. Вид многоугольника волновых векторов, соответствующего изменению длины волны света на  $\Delta\lambda$  при переходе от стадии получения голограммы к стадии восстановления ( $\lambda' > \lambda$ ).

здесь нет монотонной зависимости между допустимым углом  $\Delta\theta_i$  и расстоянием между соседними поверхностями максимального поочернения.

При считывании голограммы светом длиной волны  $\lambda' \neq \lambda$  также наблюдается ослабление восстановленного изображения. Здесь следует рассмотреть два случая: 1)  $\lambda' > \lambda$  и 2)  $\lambda' < \lambda$  (рис. 6.82).

Если  $\lambda' > \lambda$ , то угол между падающей и дифрагированной волнами становится больше исходного, пока не достигает значения, равного  $180^\circ$ . При еще больших длинах волн многоугольник перестает быть замкнутым и восстановленное изображение полностью исчезает. Если  $\lambda' < \lambda$ , то подобного ограничения не существует (см. рис. 6.82). При очень короткой длине волны света на стадии восстановления считывающая и дифрагированные волны образуют между собой очень малый угол.

Используя уравнения (6.24.29) и (6.24.34), оценим допустимое изменение длины волны  $\Delta\lambda$  (рис. 6.83), соответствующее  $\alpha = \pi$ ,

для конфигурации М-1. Здесь

$$\sin \theta_r - \sin (\theta_s + \Delta \psi) = -z (\sin \theta_s - \sin \theta_r), \quad (6.24.42)$$

$$\begin{aligned} -\cos (\theta_r - \theta_s - \Delta \psi) + \cos \Delta \psi + \frac{1}{z} \cos (\theta_r - \theta_s - \Delta \psi) = \\ = -\frac{1}{z} = \frac{2\alpha}{k' t} \cos (\theta_s + \Delta \psi). \end{aligned} \quad (6.24.43)$$

Если при считывании используется свет большей длины волны, чем на стадии получения голограммы, то векторы  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_\psi$  становятся короче и угол дифракции изменяется на  $\Delta \psi$ . При этом конец вектора  $-\mathbf{k}_\psi$  перемещается горизонтально, что следует из уравнения (6.24.34), а разность  $d$  равна  $2\alpha/t$ . Проекция этого вектора на вектор  $\mathbf{k}_{\psi+\Delta\psi}$  равна правой части соотношения (6.24.43).

На рис. 6.84 приведен пример зависимости от  $\theta_r$  допустимых значений  $\Delta \lambda$  и  $\Delta \psi$  для пленки толщиной 15,5 мкм,  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  в конфигурации М-1.

На основе вышесказанного можно указать три категории объемных голограмм в зависимости от угла  $(\theta_r - \theta_s)$  между опорным и предметным пучками:

1) Если угол  $\theta_r - \theta_s$  мал ( $\leq 10^\circ$ ), то чувствительность голограммы к изменению длины волны и ориентациям мала и фактически объемную голограмму можно рассматривать как эффективную плоскую голограмму.

2) Если угол  $\theta_r - \theta_s$  заключен в пределах от  $10^\circ$  до  $120^\circ$ , то чувствительность к ориентации голограммы наибольшая и требуется точная установка голограммы относительно считывающего пучка. В такой объемной голограмме можно накопить много изображений, зарегистрированных с различными ориентациями опорного пучка. Это — путь к голографическому кино и библиотеке интерференционных картин. Чувствительность к длине волны достаточно высокая, и можно подавать длины волн, отстоящие от рабочего значения на несколько сот ангстрем.

3) Если угол  $\theta_r - \theta_s$  близок к  $180^\circ$ , то предметный и опорный пучки почти антипараллельны друг другу. Поверхности наиболь-

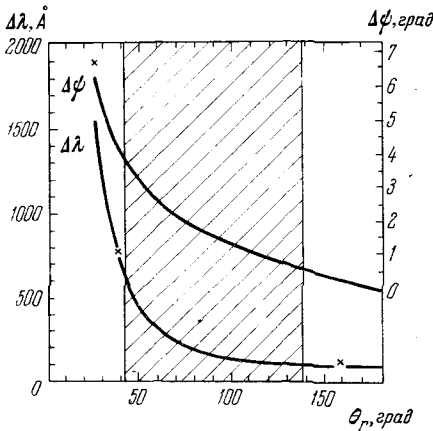


Рис. 6.84. Зависимости  $\Delta \lambda$  и  $\Delta \psi$  от угла падения  $\theta_r$  опорной волны.

шего почернения располагаются обычно параллельно поверхности эмульсии. Такая категория голограмм имеет наибольшую чувствительность к длине волны, составляющую около  $80 \text{ \AA}$  при толщине эмульсии  $15,5 \text{ мкм}$ . Объемные голограммы этой категории можно освещать белым светом. Голограмма функционирует как интерференционный фильтр. Однако чувствительность к ориентации здесь слабая, так что вращением голограммы невозможно погасить восстановленные изображения. При изменении ориентации цвет восстановленного изображения изменяется.

### § 6-25. Голограмма векторного поля (двухполяризационная голограмма)

Термин «голография» является синонимом выражения «полная запись» волны света. Это означает, что в голограмме регистрируются амплитуда и фаза волны света. Однако рассмотренные выше разные виды голограмм не являются действительно полными регистраторами, поскольку обычные голограммы регистрируют только две скалярные функции — амплитуду и фазу одной компоненты поляризации световой волны. Но электрическое поле является вектором, и в системе могут происходить изменения состояния поляризации этого векторного поля. Поэтому для исчерпывающего описания световой волны необходимо регистрировать обе компоненты поляризации. В силу поперечности световых электромагнитных волн независимыми являются две проекции электрического вектора, а третья определяется однозначно первыми двумя компонентами, если только в плоскости голограммы отсутствуют электрические заряды.

Рассмотрим метод получения голограммы одновременно двух состояний поляризации света стационарного поля (рис. 6.85). Голограмма  $\Gamma$  освещается светом, прошедшим через предмет-транспарант, характеризующийся двумя функциями амплитудного пропускания:  $t_\sigma(x)$  и  $t_\pi(x)$ , где индексы  $\sigma$  и  $\pi$  обозначают две взаимно ортогональные компоненты поляризации. Для получения голограммы векторного поля требуется два опорных пучка с разными компонентами поляризации  $\sigma$  и  $\pi$ . Формирующие призмы, пропускающие только одну компоненту поляризации,  $\sigma$  или  $\pi$ , отклоняют опорные пучки во взаимно перпендикулярных

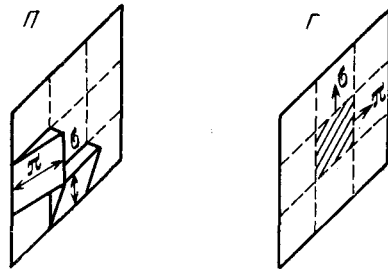


Рис. 6.85. Стадия получения голограммы одновременно двух состояний поляризации света.

плоскостях, так что интерференционные полосы располагаются также перпендикулярно друг другу. В наиболее простом случае предмет состоит из двух неперекрывающихся частей с разной поляризацией:  $\sigma$  и  $\pi$ . На стадии восстановления голограмма освещается через те же две призмы и поляризаторы, формирующие опорные пучки взаимно ортогональных поляризаций (рис. 6.86). Мнимое изображение без искажения соответствует исходной волне

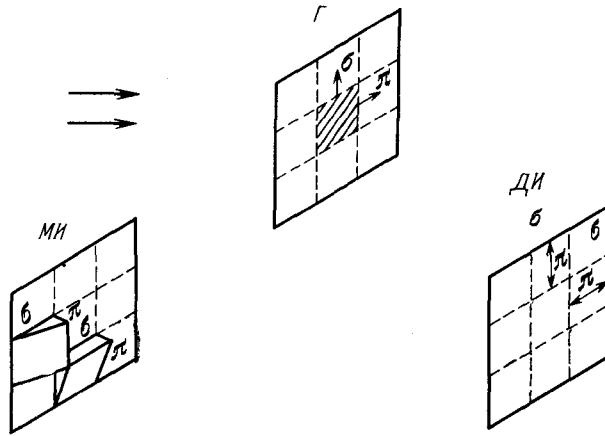


Рис. 6.86. Стадия восстановления с помощью голограммы, в которой записаны интерференционные картины от волн двух состояний поляризации.

света от предмета. В действительном изображении компоненты  $\sigma$  и  $\pi$  взаимно заменены. Кроме того, как в мнимом, так и в действительном изображении появляются дополнительные линейно поляризованные фантомные изображения, так как каждая из двух голограмм-компонент создает на стадии восстановления дифракционные пучки для обеих компонент поляризации. Фантомные изображения разнесены в пространстве в сопряженной плоскости и поэтому не накладываются на истинные изображения.

### § 6-26. Фантомные изображения

Главные преимущества голографического метода перед фотографическим возникают благодаря тому, что голограмма по своей структуре является интерферограммой и информация о предметной волне или ее фурье-образе регистрируется путем интерференционного сравнения с опорной волной, взаимно когерентной с предметной волной. При записи информации в интерференционной форме процесс поиска необходимой информации, содержащейся в интерференционных картинах, можно производить одновременно по всему объему памяти, независимо от того, имеет ли блок

памяти вид плоской или объемной голограммы. Иначе говоря, операция поиска производится по программе одновременного действия. Кроме того, интерференционная форма записи информации оказывается более устойчивой, чем поэлементная или картотечная запись. Потеря части искомого предмета либо износ или разрушение какой-либо части блока памяти не препятствует проведению поиска по всему объему информации, записанной в голограмме.

К числу необычных особенностей голограмм, как плоских, так и объемных, относятся фантомные изображения, когда голограмма восстанавливает недостающие части предмета, предъявляемого к поиску лишь частью предмета.

Рассмотрим здесь это необычное явление. Предположим, что предмет или, соответственно, амплитуду предметного пучка можно разбить на две части — фрагмент и остаток:

$$u = u_f + u_r. \quad (6.26.1)$$

Тогда интенсивность света в объеме голограммы, а также ее амплитудное пропускание равны

$$t = |u_f + u_r|^2 = |u_f|^2 + |u_r|^2 + u_f^* u_r + u_f u_r^*. \quad (6.26.2)$$

Отметим, что опорный пучок здесь отсутствует явно. Интерференционная картина образуется между выделенными нами двумя частями предметного пучка — фрагментом и остатком. При освещении такой голограммы только волной фрагмента  $u_f$  на выходе голограммы появится волна с амплитудой

$$u_t = u_f \cdot t = u_f [|u_f|^2 + |u_r|^2] + |u_f|^2 u_r + u_f \cdot u_f \cdot u_r^*. \quad (6.26.3)$$

При использовании диффузного освещения интенсивности волн  $|u_f|^2$  и  $|u_r|^2$  можно считать постоянными. Из (6.26.3) видно, что, кроме основной волны от фрагмента  $u_f$  (первое слагаемое), из голограммы выходит волна остатка (второе слагаемое), но с несколько уменьшенной интенсивностью — фантомное изображение. Третье слагаемое вызывает равномерный фон. Действительно, это слагаемое можно записать в виде

$$u_f \cdot u_f \cdot u_r^* = a_f^2 a_r e^{i(2\varphi - \rho)}, \quad (6.26.4)$$

где  $\varphi(\mathbf{x})$  — фаза фрагмента при диффузном освещении. Как правило, эта функция является случайно и быстро меняющейся функцией координат, и ее удвоенное значение  $2\varphi$  приводит к полному искажению волнового фронта. В результате этого волна, описываемая третьим слагаемым, полностью рассеивается во всех направлениях и создает практически равномерный фон. Возможны, однако, такие условия, при которых фоновая волна, описываемая третьим слагаемым, не перекрывается с волной фрагмента и фантомным изображением. Для этого, в частности, достаточно, чтобы остаток являлся внешней частью всего предмета, т. е. находился на краю предмета.

### § 6-27. Многоцветные изображения

Используя технику наложения нескольких интерференционных картин в скрытом изображении на одной голограмме, можно зарегистрировать и восстановить цветные изображения. Предмет освещается несколькими лазерами, создающими пучки света нескольких длин волн. При этом как длины волн такого полихроматического освещения, так и интенсивности компонент выбираются из условия наилучшей передачи цветного изображения.

Рассмотрим методы получения полихроматических голограмм и их свойства. Пусть предметный и опорный полихроматические пучки состоят из  $n$  компонент взаимно некогерентного света, так что на фотопластинке все бегущие интерференционные картины дают в сумме нулевую интенсивность. Тогда суммарная интенсивность равна

$$I = \sum_{i=1}^n (|u_i|^2 + |a_i|^2 + u_i^* a_i + u_i a_i^*), \quad (6.27.1)$$

где предметная волна

$$u = \sum_{i=1}^n u_i, \quad (6.27.2)$$

а опорная волна

$$a = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (6.27.3)$$

При освещении голограммы на стадии восстановления тем же полихроматическим пучком, что и на стадии получения голограммы, появится волна света на выходе голограммы:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^n (|u_i|^2 + |a_i|^2 + u_i^* a_i + u_i a_i^*). \quad (6.27.4)$$

Рассмотрим две дифракционные волны первого порядка:

$$w_M^I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* u_i c_j, \quad (6.27.5)$$

которая создает мнимое изображение, и

$$w_D^I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i u_i^* c_j, \quad (6.27.6)$$

которая образует действительное изображение.

Всего образуется  $n^2$  мнимых изображений и  $n^2$  действительных изображений. Компоненты дифракционных волн с  $i = j$  создают истинные изображения, состоящие из  $n$  цветовых компонент, точно совпадающих в пространстве. Остальные  $n^2 - n$  изображений с  $i \neq j$  являются фантомными и расположены в пространстве в стороне от истинного изображения. Эти фантомные изображения составляют существенное затруднение процесса



восстановления полихроматической волны света. Для того чтобы фантомные изображения были достаточно разнесены друг от друга и не происходило наложения их на истинное изображение, длины волн должны отстоять друг от друга тем дальше, чем больше поле зрения, или угловой размер предмета. Однако для более эффективного устранения нежелательного эффекта фантомных изображений можно воспользоваться объемной голограммой.

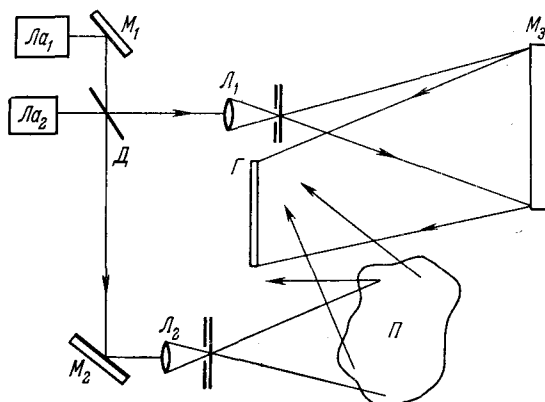


Рис. 6.87. Схема получения голограммы предмета, освещенного светом двух длин волн.

т. е. голограммой, толщина которой превышает расстояние между поверхностями наибольшего почернения. Как известно, в объемной голограмме наблюдается сильная зависимость интенсивности восстановленных изображений от длины волны света, используемой на стадии восстановления. Максимальная интенсивность дифракционного изображения наблюдается, если длина волны света, расстояние между поверхностями почернения и ориентация голограммы удовлетворяют соотношению Брэгга — Вульфа. Выше было найдено, что наивысшая чувствительность к изменению длины волны света наблюдается при углах между опорным и предметным пучками, близких к  $180^\circ$ . Вместе с тем необходимо учесть, что интенсивность дифракционных волн не является монотонной функцией угла. А именно, эта зависимость описывается функцией  $\sin \theta/\theta$ . Поэтому для выбранного угла между предметным и опорным пучками необходимо так подобрать длины волн  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), чтобы фантомные изображения возникали в направлениях, соответствующих минимумам функции  $\sin \theta/\theta$ .

В проведенных экспериментах использовались два источника света: аргоновый лазер  $La_1$ , дающий две спектральные компоненты на длинах волн  $4880$  и  $5145 \text{ \AA}$ , и гелий-неоновый лазер  $La_2$  с длиной волны  $6328 \text{ \AA}$  (рис. 6.87). Пучки раздваивались в светоделителе

$D$  и с помощью зеркал  $M_1$  и  $M_2$  и формирующих линз  $L_1$  и  $L_2$  образовывали полихроматический опорный и предметный пучки. Предметный пучок образовывал в слое фотоэмульсии угол  $\theta_s = -30^\circ$ , а опорный  $-\theta_r = +30^\circ$ . Этим углам отвечали внешние углы, равные  $-50^\circ$  и  $+50^\circ$  соответственно.

Вследствие близости двух спектральных компонент аргонового лазера наиболее опасными являются фантомные изображения от взаимодействия именно этих двух компонент. Первый минимум интенсивности дифракционной волны соответствует  $\alpha = \pi$ . С помощью уравнений (6.24.42) и (6.24.43) для  $z = 4880/5145 \simeq 0,95$  и  $k' = 2\pi(n/\lambda')$ , где  $n = 1,52$  — показатель преломления фотоэмульсии, а  $\lambda' = 4880 \text{ \AA}$ , находим  $\Delta\psi = -3,4^\circ$  и  $t = 11 \text{ мкм}$ . Максимум второй интенсивности дифрагированной волны при  $\alpha = 3\pi/2$  наблюдается при толщинах эмульсии  $t = 16,5 \text{ мкм}$ . Толщина эмульсии в экспериментах колебалась от 12 до 15 мкм, т. е. располагалась между первым минимумом и вторым максимумом дифрагированной волны, и поэтому в эксперименте полного гашения зеленого и синего фантомных изображений не происходило. Тем не менее при  $t = 15 \text{ мкм}$  интенсивность фантомных изображений ослаблялась на 13,3 дб.

В силу взаимной некогерентности всех спектральных компонент полихроматического освещения и полного размазывания за время экспозиции всех бегущих интерференционных картин, голограмму неподвижного многоцветного предмета можно получить путем синтеза отдельных одноцветных голограмм, т. е. путем использования на стадии получения голограммы только одной спектральной компоненты, и последовательного освещения синтезированной голограммы всеми спектральными компонентами.

Идея метода вытекает из свойства объемной голограммы, дифракция на которой подчиняется соотношению Брэгга — Вульфа

$$2d \sin \theta = \lambda, \quad (6.27.7)$$

где  $d$  — расстояние между соседними поверхностями почернения,  $\theta$  — угол падения, а  $\lambda$  — длина волны света. На стадии получения голограммы предметный пучок  $\theta_s$  и опорный пучок  $\theta_r$  располагаются симметрично относительно поверхностей почернения:

$$\theta = \theta_r = -\theta_s. \quad (6.27.8)$$

На стадии восстановления

$$\theta = \theta_c, \quad \text{а} \quad \lambda = \lambda_c. \quad (6.27.9)$$

В эксперименте на стадии получения использовалось монохроматическое освещение с  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ . Всего было сделано три последовательных экспозиции трех различных предметов, причем каждая компонента голограммы располагалась под разными угла-

ми регистрации  $\theta$ , согласованными с длинами волн, которые можно было использовать на стадии восстановления. Так, например, внутренние углы равнялись  $\theta_1 = 27,8^\circ$  и  $\theta_2 = 35^\circ$ . При восстановлении использовались спектральные компоненты  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  и  $\lambda = 5145 \text{ \AA}$ .

Эксперимент по синтезу одного многоцветного предмета по вышеуказанной схеме осуществить очень трудно, главным образом из-за невозможности точного пространственного наложения восстановленных изображений разных цветов, а также вследствие появления фантомных изображений.

Соотношение Брэгга — Вульфа (6.27.7) является частным случаем более общего соотношения между углом падения  $\theta_r$  опорного пучка и средним углом падения  $\theta_s$  предметного пучка:

$$d (\sin \theta_r - \sin \theta_s) = \lambda. \quad (6.27.10)$$

В экспериментах по синтезу многоцветной голограммы необходимо, чтобы угол  $(\theta_r - \theta_s)/2$ , определяющий расположение поверхностей почернения, был бы постоянным, так чтобы ориентации всех систем поверхностей почернения были взаимно параллельными. При получении синтезированной цветной голограммы угол падения  $\theta_r$  изменяется так, чтобы каждая ориентация удовлетворяла условию Брэгга — Вульфа для определенной длины волны света на стадии восстановления. Но одновременно с изменением  $\theta_r$  необходимо изменять  $\theta_s$ , а это приводит к различию в фокусных расстояниях голограмм, т. е. к разным расстояниям от предмета до голограммы на стадии восстановления. Кроме того, предмет приобретает разные ориентации по отношению к голограмме, а предметная волна состоит из совокупности плоских волн. Все это делает эту задачу весьма трудной.

### § 6-28. Аберрации в голографии

Плоская голограмма обладает очень важным свойством — создавать большие коэффициенты увеличения линейных размеров предметов. Для этого используются сильно расходящиеся пучки света, а также волновой эффект увеличения, возникающий при увеличении длины волны света на стадии восстановления. Однако при этом появляются аберрации, которые искажают вид предмета и ухудшают разрешающую способность системы.

В этом параграфе кратко рассматриваются аберрации, обусловленные самой голограммой и наблюдаемые, как правило, в голографическом микроскопе. Детальный анализ аберраций и рассмотрение полной теории голографического микроскопа выходят за рамки данной книги и представляют самостоятельную тему.

Аберрации, обусловленные голограммой, появляются всякий раз, когда увеличение или уменьшение линейных размеров предмета не равно единице.

Рассмотрим плоский предмет, расположенный в плоскости  $x_1$ , и плоскую голограмму в плоскости  $x_2$  (рис. 6.88). Предмет освещается плоской волной света ( $ПП$ ). Расстояние между точкой

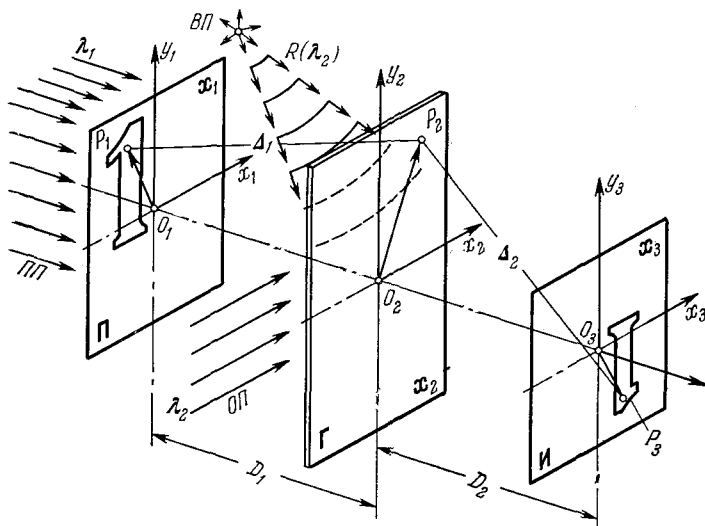


Рис. 6.88. Рисунок, поясняющий появление аберраций в голографическом микроскопе.

$P_1(x_1)$  и точкой  $P_2(x_2)$  равно  $\Delta_1$ . Амплитуда поля в плоскости голограммы равна

$$u(x_2) = \int e^{i\omega_1 x_1} t(x_1) \frac{1}{\Delta_1} e^{ik_1 \Delta_1} dx_1, \quad (6.28.1)$$

где  $t(x_1)$  — амплитудное пропускание предмета-транспаранта,  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ , а  $\omega_1(\omega_{x_1}, \omega_{y_1})$  определяет ориентацию освещающей волны. Если на стадии восстановления голограмму освещать расходящейся волной света ( $ВП$ ), то амплитуда поля в плоскости  $x_3$ , где образуется действительное изображение, будет равна

$$u(x_3) = \int e^{i(\omega_2 x_2 + \frac{k_2}{2R} x_2^2)} u^*(x_2) e^{ik_2 \Delta_2} dx_2, \quad (6.28.2)$$

где  $R$  — расстояние от центра голограммы до точечного источника,  $\Delta_2$  — расстояние между точкой  $P_2(x_2)$  в плоскости голограммы и точкой  $P_3(x_3)$  в плоскости восстановленного действительного изображения,  $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ .

Расстояния  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  при этом равны

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= D_1 \sqrt{1 + \frac{1}{D_1^2} (x_2 - x_1)^2}, \\ \Delta_2 &= D_2 \sqrt{1 + \frac{1}{D_2^2} (x_3 - x_2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.28.3)$$

Квадратный корень обычно разлагают в ряд и ограничиваются первыми двумя членами. Это — основа операционного метода. Для нашего рассмотрения нужно учесть три слагаемых:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= D_1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2D_1} - \frac{[(x_2 - x_1)^2]^2}{8D_1^3} + \dots, \\ \Delta_2 &= D_2 + \frac{(x_3 - x_2)^2}{2D_2} - \frac{[(x_3 - x_2)^2]^2}{8D_2^3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.28.4)$$

Дополнительно учитываемые нами члены, создающие нелинейные по координатам  $x_2$  и  $x_3$  эффекты, вызывают появление аберрации восстановленных изображений. Величины аберраций определяются показателем экспоненты, зависящим от  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , а именно величиной

$$\Sigma = k_2 \Delta_2 - k_1 \Delta_1. \quad (6.28.5)$$

Громоздкие выкладки приводят к следующему выражению для этой величины:

$$\begin{aligned} \Sigma = & -\frac{1}{8} \left( \frac{k_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} \right) (x_2)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{Mk_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} \right) (x_2)^2 (x_1 x_2) - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{M^2 k_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} \right) (x_1 x_2)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{M^2 k_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} \right) (x_2)^2 (x_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{M^3 k_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} \right) (x_1)^2 (x_1 x_2). \end{aligned} \quad (6.28.6)$$

При получении выражения (6.28.6) использовано соотношение

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{D_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{D_1}, \quad (6.28.7)$$

определяющее положение плоскости  $x_3$ , где располагается восстановленное действительное изображение, а также выражение для коэффициента увеличения

$$M = \frac{D_2 \lambda_2}{D_1 \lambda_1}. \quad (6.28.8)$$

Кроме того, в выражении (6.28.6) опущены все члены, которые не зависят от  $x_2$ , а также члены, линейные по  $\sqrt{(x_1)^2}$  и  $\sqrt{(x_2)^2}$ .

Первое слагаемое в (6.28.6) определяет сферическую абберацию, второе — кóму, третье — астигматизм, четвертое — кривизну поля, а пятое — дисторсию. Таким образом, абберации, вызываемые голограммой, аналогичны основным пяти видам аббераций, известных из теории линз.

Выражение (6.28.6) написано в координатах предмета  $x_1$  и голограммы  $x_2$ . Но его можно записать в координатах голограммы  $x_2$  и изображения  $x_3$ .

Укажем теперь условия, при выполнении которых абберации исчезают.

Сферическая абберация отсутствует, если

$$\frac{k_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1. \quad (6.28.9)$$

Кóма исчезает при

$$\frac{Mk_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = M.$$

Поскольку

$$M = \frac{D_2 \lambda_2}{D_1 \lambda_1},$$

то окончательно

$$D_1 = D_2. \quad (6.28.10)$$

Астигматизм и кривизна поля будут отсутствовать, если

$$\frac{M^2 k_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} = 0, \quad \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = M^2$$

или

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{D_2}{D_1}. \quad (6.28.11)$$

Дисторсия исчезает при

$$\frac{M^3 k_2}{D_2^3} - \frac{k_1}{D_1^3} = 0, \quad \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = M^3$$

или

$$\lambda_1 = \lambda_2. \quad (6.28.12)$$

Из выражений (6.28.9)—(6.28.12) видно, что если коэффициент увеличения  $M \neq 1$ , то одновременно погасить все абберации

невозможно. Однако одновременно можно исправить астигматизм и кривизну поля. Если  $D_1 = D_2$ , то пропадает кома. Если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то отсутствует дисторсия.

В заключение приведем зависимости величин аберраций от размера голограмм. Если  $A$  — линейные размеры голограммы, то сферическая аберрация растет, как  $A^4$ ; кома изменяется, как  $A^3$ ; астигматизм и кривизна поля пропорциональны  $A^2$ , а дисторсия —  $A$ . Таким образом, сферическая аберрация при прочих равных условиях является наиболее сильной, и именно ее важно научиться исправлять.

В главе 7 рассматривается метод апостериорной компенсации сферической аберрации линзы и голограммы. Такая апостериорная компенсация сферической аберрации возможна потому, что сферическая аберрация не зависит от координат предмета или изображения, а зависит только от координат точки на голограмме. Иначе говоря, для сферической аберрации выполняется требование инвариантности от координат предмета, т. е. пространственная инвариантность. В этих условиях линейный фильтр оказывается действительным. Если, кроме того, выбрать  $D_1 = D_2$ , чтобы погасить кому, то оставшийся эффект сферической аберрации будет равен

$$\Delta_{\text{сфер}} = -\frac{1}{8} \frac{(k_2 - k_1) (x_2^2)^2}{D_1^3}. \quad (6.28.13)$$

Следует отметить, что выражение (6.28.2) для амплитуды поля в плоскости изображения при использовании на стадии восстановления точечного источника света получено в предположении, что фронт волны этого пучка параболический, а не сферический, каким он является в действительности. Такое приближение сопряжено с наличием дополнительных аберраций, которые приобретает восстановленное изображение и которые обусловлены освещением, а не самой голограммой. Аберрации, связанные со сферическим фронтом освещающей волны, могут быть полностью исправлены. Более того, сферический фронт волны от точечного источника можно предварительно преобразовать в параболический, так что одновременно с устранением аберраций источника будет исправлена сферическая аберрация самой голограммы.

### § 6-29. Обобщенная голограмма и принцип опорного предмета

Если фотопластинку осветить когерентной волной света, описываемой оптическим сигналом

$$u(x) = a(x) e^{i\Phi(x)}, \quad (6.29.1)$$

где  $a(x)$  — амплитуда, а  $\Phi(x)$  — фаза, то фотопластинка зарегистрирует картину распределения интенсивности

$$I(x) = |u(x)|^2 = u^*(x)u(x) = a^2(x), \quad (6.29.2)$$

в которой фазовая информация  $\Phi(x)$  будет полностью утеряна.

Голография как метод полной и обратимой регистрации волны света  $u(x)$  с сохранением фазовой информации базируется на идее о введении дополнительного, опорного пучка, чаще всего в виде плоской или сферической волны (ОП на рис. 6.88). С помощью такого опорного пучка фазовая информация регистрируется обратимо, так что волну света  $u(x)$  можно восстановить путем освещения голограммы тем же опорным пучком. Класс волновых фронтов, с помощью которых можно получить полноценную голограмму, можно существенно расширить, если принять во внимание, что пространственная структура источника опорного пучка должна обладать только определенными свойствами симметрии и содержать в себе достаточно высокие пространственные частоты. Автосвертка или автокорреляция такого опорного источника имеет вид двухмерной дельта-функции либо фигуры с одним настолько резким максимумом, то ее можно аппроксимировать дельта-функцией.

Такое расширение класса опорного пучка можно продолжить еще дальше и, как предложил Дж. Строук, ввести понятие опорного предмета, которое является более широким, чем понятие опорного пучка. Однако в отличие от обычной схемы голографии, когда восстановленное изображение возникает как бы автоматически, схема голографии с опорным предметом требует, чтобы при восстановлении использовался дополнительный фильтр, изменяющий пространственную структуру волны света непосредственно за голограммой. Эта схема голографии, при которой регистрируется обобщенная голограмма, весьма близко подводит к решению проблеме создания рентгеновского голографического микроскопа и вообще заслуживает большого внимания в различных разделах когерентной оптики, голографии, рентгеноструктурного анализа, интроскопии любых длин волн, а также в акустике.

Вернемся еще раз к свойствам обычной фотографической эмульсии или любого другого детектора света, который дает отклик только на интенсивность света, т. е. в отношении оптического сигнала является квадратичным детектором. Непосредственно зарегистрировать фазы оптического сигнала в этом случае невозможно.

Разобьем предмет, распределение интенсивности оптического сигнала от которого мы регистрируем, на две части. Пусть при этом одна часть оптического сигнала,  $u_A(x)$ , создается неизвестной частью предмета, а другая,  $u_0(x)$ , — остатком предмета, который известен или может быть определен с помощью теории либо



с помощью дополнительного эксперимента. Итак, пусть

$$u(x) = u_A(x) + u_0(x) = a_A(x) e^{i\Phi_A(x)} + a_0(x) e^{i\Phi_0(x)}. \quad (6.29.3)$$

Тогда распределение интенсивности

$$I(x) = |u_A|^2 + |u_0|^2 + u_A^* u_0 + u_A u_0^* \quad (6.29.4)$$

содержит интерференционную картину, описываемую третьим и четвертым слагаемыми, которая в скрытом виде содержит полную информацию о неизвестной части предмета, в том числе фазу  $\Phi_A(x)$ . Необходимо извлечь эту информацию о волне  $u_A(x)$  в чистом виде. Для того чтобы восстановить искомую волну  $u_A(x)$ , воспользуемся фундаментальным свойством голографического метода — возможностью проведения апостериорной обработки информации, записанной голографически, с целью исправления пространственной структуры амплитудного пропускания голограммы, в которой зарегистрирована интенсивность  $I(x)$ . Для этого воспользуемся методами пространственной фильтрации, подробно изложенными в главе 7.

Эта апостериорная операция сводится к делению амплитудного пропускания голограммы (6.29.4) на оптический сигнал  $u_0^*$ . Однако такую операцию непосредственно выполнить невозможно, и поэтому операцию деления на  $u_0^*$  необходимо свести к двум операциям умножения:

$$\frac{1}{u_0^*} = \frac{u_0}{u_0 u_0^*} = \frac{u_0}{|u_0|^2} = u_0 |u_0|^{-2} = u_0 \cdot I_0^{-1}, \quad (6.29.5)$$

которые осуществляются следующим образом.

1. Сначала изготавливают пространственный голографический фильтр, осуществляющий умножение на  $u_0$ . Для этого либо выполняют отдельный опыт с изготовлением обычной голограммы от реального предмета, дающего волну  $u_0$ , либо изготавливают искусственную голограмму — путем вычисления волны  $u_0$  по известному опорному предмету  $P_0$ . При использовании плоского опорного пучка в реальном или мысленном опыте интенсивность, регистрируемая на вспомогательной голограмме, равна

$$I_1(x) = |e^{i\omega_0 x} + u_0(x)|^2 = 1 + |u_0|^2 + u_0^* e^{i\omega_0 x} + u_0 e^{-i\omega_0 x}. \quad (6.29.6)$$

При надлежащем проявлении голограммы ее амплитудное пропускание описывается этим же выражением:

$$t_1(x) = I_1(x). \quad (6.29.7)$$

Последнее слагаемое (6.29.6), создающее на стадии восстановления пучок, распространяющийся под углом  $\theta_0 = -\omega_0 \lambda / 2\pi$ , обеспечивает при просвечивании вспомогательной голограммы операцию умножения на  $u_0$ .

2. Фильтр для проведения операции умножения на  $|u_0|^{-2} = 1/I_0(x)$  изготавливается также в отдельном опыте путем регистрации распределения интенсивности  $I_0(x)$  от предмета  $\Pi_0$  на фотопластинке с последующим проявлением ее до контрастности  $\gamma = +2$ . Амплитудное пропускание такого фильтра равно

$$t_2 = \frac{1}{I_0(x)}. \quad (6.29.8)$$

Сложив вместе оба фильтра, получаем фильтр, амплитудное пропускание которого в направлении  $\theta_0$  равно

$$t(x) = t_1(x) t_2(x) = \frac{u_0(x)}{|u_0(x)|^2}. \quad (6.29.9)$$

Запишем теперь полностью амплитуду света на выходе голограммы (6.29.4), который распространяется в направлении  $\theta_0$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= I(x) t(x) = \\ &= [|u_A|^2 + |u_0|^2 + u_0^* u_A + u_0 u_A^*] \frac{1 + |u_0|^2 + u_0^* e^{i\omega_0 x} + u_0 e^{-i\omega_0 x}}{|u_0|^2} = \\ &= \dots + e^{-i\omega_0 x} \frac{u_0}{|u_0|^2} [|u_0|^2 + |u_A|^2 + u_0^* u_A + u_0 u_A^*] = \\ &= \dots + e^{-i\omega_0 x} \left\{ u_A + u_0 + \frac{u_0 u_0}{|u_0|^2} u_A^* + u_0 \frac{|u_A|^2}{|u_0|^2} \right\}. \quad (6.29.10) \end{aligned}$$

Первое слагаемое описывает искомую волну  $u_A$ , второе — волну остатка  $u_0$ . Третье слагаемое эквивалентно действительному изображению  $u_A^*$ , которое искажено дополнительным множителем. Этот множитель характеризуется удвоенным значением фазы, что в случае диффузного освещения приводит к сильному размазыванию волны  $u_A^*$ . Последнее слагаемое представляет собой также волну  $u_0$ , искаженную только по амплитуде. Эта волна накладывается на волну  $u_0$ , описываемую вторым слагаемым.

Для того чтобы волна  $u_A^*$  отделялась в пространстве от волны  $u_A$ , достаточно, чтобы опорный предмет  $u_0$  располагался в стороне от предмета наблюдения  $u_A$  или же на другой глубине. Тогда компонента  $u_A^*$  ( $u_0 u_0 / |u_0|^2$ ) будет располагаться по другую сторону и на сопряженной глубине по отношению к опорному предмету  $u_0$ .

Описанный здесь голографический принцип опорного предмета можно, по-видимому, использовать для исследования и визуализации молекул протеина на основе метода замещения некоторых

атомов молекулы протеина на тяжелые атомы — железа или других элементов. При этом повеые атомы могут служить теми опорными предметами, знание волны от которых позволяет в принципе осуществить пространственную фильтрацию картин Паттерсона и затем в лучах видимого света получить объемное изображение молекулы протеина. Пока неизвестно, какие технические проблемы могут задержать во времени решение этой фундаментальной проблемы современного естествознания.

### § 6-30. Стробоскопическая голограмма

В предыдущих параграфах везде предполагалось, что опорный и предметный пучки света, образующие интерференционную картину на голограмме, являются взаимно когерентными как во времени, так и в пространстве. При этом когерентность во времени создает неподвижность в пространстве интерференционной картины. В главе 4 было рассмотрено также обобщенное понятие когерентности, когда два пучка пространственно когерентного света различных длин волн образуют бегущую интерференционную картину. Ее удалось запечатлеть в опытах Ф. Фишера с помощью стробоскопа. Аналогичный метод стробоскопирования можно применить к получению голограммы от бегущей интерференционной картины. При этом разность длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  двух пучков света, образующих при суперпозиции бегущую интерференционную картину, не обязательно должна быть постоянной во времени, так как описываемая ниже система Ю. Денисюка и Д. Стаселько получения стробоскопической голограммы является следящей.

Итак, пусть опорный и предметный пучки света имеют различные временные частоты и описываются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} U_0(\mathbf{x}, t) &= a_0(\mathbf{x}) e^{ikh_0 L_0(\mathbf{x})} e^{i\omega_0 t}, \\ U_s(\mathbf{x}, t) &= a_s(\mathbf{x}) e^{ikh_s L_s(\mathbf{x})} e^{i\omega_s t}, \end{aligned} \right\} \quad (6.30.1)$$

где функции  $L_0(\mathbf{x})$  и  $L_s(\mathbf{x})$  имеют смысл эффективных геометрических факторов, определяемых длинами трасс оптических лучей, распространяющихся от источника света к предмету и от предмета к точке наблюдения  $\mathbf{x}$ . Функцию  $L(\mathbf{x})$  обычно называют *эйконом*. При этом пространственная функция

$$u_s(\mathbf{x}) = a_s(\mathbf{x}) e^{ikh_s L_s(\mathbf{x})} \quad (6.30.2)$$

является тем оптическим сигналом, который желательно запечатлеть с помощью стробоскопической голограммы. Функцию  $u_s(\mathbf{x})$  можно назвать оптическим сигналом потому, что по предположению  $\Delta k \ll k$ , а возможные вариации фазы временного множителя  $e^{i(\omega t + \varphi)}$  малы и происходят настолько медленно,

что могут быть полностью опущены. Распределение интенсивности равно

$$I(\mathbf{x}, t) = |U_0(\mathbf{x}, t) + U_s(\mathbf{x}, t)|^2 = \\ = a_0^2(\mathbf{x}) + a_s^2(\mathbf{x}) + 2a_0(\mathbf{x})a_s^2(\mathbf{x}) \times \\ \times \cos[(\omega_0 - \omega_s)t + k_0L_0(\mathbf{x}) - k_sL_s(\mathbf{x})]. \quad (6.30.3)$$

При непрерывном освещении фотопластины бегущая интерференционная картина усредняется:

$$I(\mathbf{x}) = \overline{I(\mathbf{x}, t)} = a_0^2(\mathbf{x}) + a_s^2(\mathbf{x}), \quad (6.30.4)$$

и информация о фазах оптического сигнала  $u_s(\mathbf{x})$  полностью ускользает от экспериментатора. Однако если освещать фотопластинку стробоскопически, то бегущую интерференционную картину можно запечатлеть. Для этого перед фотопластинкой помещают безынерционный оптический затвор, коэффициент пропускания которого пропорционален интенсивности света в некоторой точке  $\mathbf{x}_0$  на фотопластинке, расположенной вне оптического затвора. В этом случае распределение интенсивности равно

$$I(\mathbf{x}, t)I(\mathbf{x}_0, t) = \{a_0^2(\mathbf{x}) + a_s^2(\mathbf{x}) + 2a_0(\mathbf{x})a_s(\mathbf{x}) \times \\ \times \cos[(\omega_0 - \omega_s)t + k_0L_0(\mathbf{x}) - k_sL_s(\mathbf{x})]\} \{a_0^2(\mathbf{x}_0) + a_s^2(\mathbf{x}_0) + \\ + 2a_0(\mathbf{x}_0)a_s(\mathbf{x}_0) \cos[(\omega_0 - \omega_s)t + k_0L_0(\mathbf{x}_0) - k_sL_s(\mathbf{x}_0)]\} = \\ = C_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + C_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cos[(\omega_0 - \omega_s)t + \varphi_1(\mathbf{x}_0)] + \\ + C_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cos[(\omega_0 - \omega_s)t + \varphi_1(\mathbf{x})] + \\ + C_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cos[2(\omega_0 - \omega_s)t + \varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] + \\ + C_5(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cos\{k_0[L_0(\mathbf{x}) - L_0(\mathbf{x}_0)] - k_s[L_s(\mathbf{x}) - L_s(\mathbf{x}_0)]\}, \quad (6.30.5)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \varphi_1, \varphi_2$  — коэффициенты, зависящие от координат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_0$ . Последнее, пятое слагаемое описывает стационарную интерференционную картину. Если волновые числа  $k_0$  и  $k_s$  изменяются за время экспозиции, то это вызывает дополнительное размазывание интерференционной картины и ослабление контраста голограммы. При этом, чем дальше отстоят друг от друга точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_0$ , тем сильнее сказывается такое размазывание. Для того чтобы сохранить контраст, необходимо, чтобы изменения волновых векторов  $\Delta k_0$  и  $\Delta k_s$  за время экспозиции удовлетворяли неравенству

$$\Delta k_0[L_0(\mathbf{x}_{\text{макс}}) - L_0(\mathbf{x}_0)] - \Delta k_s[L_s(\mathbf{x}_{\text{макс}}) - L_s(\mathbf{x}_0)] \leq \frac{\pi}{2}. \quad (6.30.6)$$

Поскольку время экспозиции во много раз превышает период стробоскопирования  $T = 2\pi/(\omega_0 - \omega_s)$ , то первые четыре слагае-

мых создают равномерный фон и амплитудное пропускание стробоскопической голограммы равно

$$t(\mathbf{x}) = \\ = t_0(\mathbf{x}) + C_0 a_s(\mathbf{x}) \cos \{k_0 [L_0(\mathbf{x}) - L_0(\mathbf{x}_0)] - k_s [L_s(\mathbf{x}) - L_s(\mathbf{x}_0)]\}. \quad (6.30.7)$$

Если на стадии восстановления голограмму (6.30.7) осветить тем же опорным пучком, то за голограммой возникнет волна света, описываемая выражением

$$u = U_0 t = t_0 a_0 e^{i k_0 L_0(\mathbf{x})} e^{i \omega_0 t} + \\ + C_0 a_0(\mathbf{x}) a_s(\mathbf{x}) e^{i [k_0 L_0(\mathbf{x}) - k_s L_s(\mathbf{x}_0)]} e^{i k_s L_s(\mathbf{x})} e^{i \omega_0 t} + \\ + C_0 a_0(\mathbf{x}) a_s(\mathbf{x}) e^{i [k_s L_s(\mathbf{x}_0) - k_0 L_0(\mathbf{x}_0)]} e^{-i [k_s L_s(\mathbf{x}) - k_0 \cdot 2L_0(\mathbf{x})]} e^{i \omega_0 t}. \quad (6.30.8)$$

Второе и третье слагаемые в (6.30.8) описывают мнимое и действительное восстановленные изображения. Структура выражения для мнимого изображения отличается от обычного выражения константой, зависящей от  $\mathbf{x}_0$ , а также тем, что пространственная структура восстановленной волны света определяется соответствующей пространственной частью предметной волны, а временная зависимость совпадает с временной частью опорного пучка. Вводя новый геометрический фактор

$$L'_s(\mathbf{x}) = \frac{k_s}{k_0} L_s(\mathbf{x}) \quad (6.30.9)$$

и объединяя все константы, запишем волну, образующую мнимое изображение, следующим образом:

$$u_{\text{м}}^{\text{I}} = A a_s(\mathbf{x}) e^{i k_s L'_s(\mathbf{x})} e^{i \omega_0 t}. \quad (6.30.10)$$

Изменение геометрического фактора (6.30.9) приводит к смещению восстановленного изображения и к изменению его размеров по сравнению с исходным предметом. Эти факторы пренебрежимо малы, если  $\lambda_s - \lambda_0 \ll \lambda_0$ .

Естественно предположить, что метод стробоскопической голограммы применим в условиях опыта, когда различие в длинах предметной и опорной волн вызывается доплеровским смещением при рассеянии света от движущегося предмета либо нестабильностью спектрального состава излучения из лазера, а также различием длин волн двух лазеров. Как известно, подобные эффекты вызывают эффекты биеения, частоты которых равны примерно 100 Мгц, и поэтому они могут быть зарегистрированы с помощью известных в настоящее время электронно-оптических устройств.

## ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

### § 7-1. Возрастающая роль оптики в кибернетике

В настоящее время вычислительная техника выдвигает все возрастающие требования к кибернетическим системам. Это — высокие скорости обработки, большая емкость памяти, предельно высокая надежность и, наконец, низкая стоимость оборудования и минимальный расход энергии.

На примере эволюции вычислительной техники можно проследить основные этапы развития методов кибернетики. Первое поколение вычислительных машин было создано на электронных лампах. Машины второго поколения строились на основе полупроводниковых элементов. Сейчас начинают появляться вычислительные машины третьего поколения, в которых используются электронные приборы новых классов: тонкие магнитные пленки, туннельные диоды и сверхминиатюрные микромодульные или интегральные схемы. Ожидается, что машины четвертого поколения будут в основном оптические или гибридные, состоящие как из оптических элементов, так и из элементов бионического вида.

Основное достоинство оптических элементов и узлов состоит в том, что они позволяют вести с очень высокой скоростью одновременную обработку информации по всей области задания функции, а также решают проблему гармонического сочетания высокой скорости обработки и большого объема памяти.

Не останавливаясь на истории развития оптических средств кибернетики и не рассматривая всех аспектов развития оптических и электрооптических методов обработки информации, с необходимостью следует констатировать, что голографический метод обработки информации с использованием интерференционной системы записи исходных данных привлекает в настоящее время наибольшее внимание.

Достаточно упомянуть, что с помощью интерференционной системы хранения информации принципиально возможно создать очень высокую плотность записи информации, которая приближается к значениям  $10^{11}$ — $10^{12}$  двоичных единиц, или бит, в одном кубическом сантиметре, а также изготовить ассоциативные запоминающие устройства при тех же уровнях плотности записи. С помощью голографии осуществляется наиболее эффективное и предельно устойчивое кодирование информации, что позволяет создавать кибернетические системы с высокой надежностью.

Кроме того, оптические системы, способные перерабатывать информацию, представленную в двухмерном или трехмерном виде, наиболее полно отвечают последним запросам техники, физики и космонавтики, для которых подавляющая часть информации имеет двухмерную или многомерную структуру.

Наконец, оптические методы записи информации потребляют очень малую энергию. Так, например, для регистрации с помощью чувствительной фотоэмульсии информации объемом в  $10^{16}$  бит требуется примерно один джоуль работы.

В данной главе рассматриваются только чисто оптические методы обработки информации, примыкающие к голографии, а именно системы при когерентном освещении.

Некогерентные методы обработки информации, а также волоконная оптика с пассивными и активными элементами, частично перекрывающаяся с когерентной оптикой, выходят за рамки данной книги.

### § 7-2. Преобразование Фурье в когерентной оптической системе

Оптическая система, показанная на рис. 7.1, осуществляет преобразование Фурье двухмерных сигналов, заданных в плоскости  $P_1$ . Точечный источник монохроматического света  $S$  преобразуется коллимирующей линзой  $L_1$  в параллельный пучок, который освещает фотопластинку, характеризующуюся амплитудным пропусканием  $f(x)$ . Сферическая линза  $L_2$  устанавливается на расстоянии, равном фокусному расстоянию  $F$ , как от входной плоскости  $P_1$ , так и от плоскости пространственных частот  $P_2$ . Амплитуда света в плоскости  $P_2$  равна фурье-образу функции  $F(\omega)$ . Для того чтобы это доказать, рассмотрим

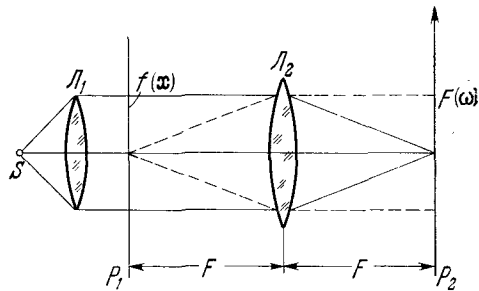


Рис. 7.1. Схема оптической когерентной системы, осуществляющей преобразование Фурье двухмерной комплекснозначной функции  $f(x)$ .

рис. 7.2, где изображены собирающая линза  $L_2$  с фокусным расстоянием  $F$  и три плоскости  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ . Плоскости  $P_1$  и  $P_2$  расположены в переднем оптическом пространстве, а  $P_3$  — в заднем оптическом пространстве. Транспарант с амплитудным пропусканием  $f(x_1)$  установлен в плоскости  $P_1$ . Для того чтобы найти оптический сигнал в плоскости  $P_3$ , вычислим оптические длины лучей, распространяющихся от плоскости  $x_1$  к плоскости  $x_3$ .

В общем случае

$$f(\mathbf{x}_3) = \frac{1}{i\lambda} \int \frac{1 + \cos\theta}{2} \frac{1}{d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)} f(\mathbf{x}_1) e^{-i \frac{2\pi\Delta}{\lambda}} d\mathbf{x}_1, \quad (7.2.1)$$

где  $\Delta$  — расстояние между точками  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_3$ ;  $d$  — коэффициент, учитывающий ослабление поля из-за удаленности между

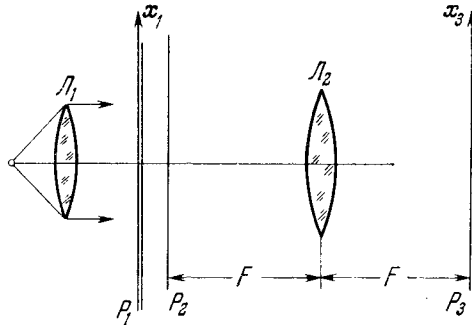


Рис. 7.2. Схема оптической системы при произвольном расположении линзы  $L_2$  относительно предметной плоскости  $P_1$  и плоскости пространственных частот  $P_3$ .

плоскостями  $P_1$  и  $P_3$  (этот коэффициент мы опускаем, так как относительное изменение  $d$  весьма мало),  $(1 + \cos\theta)/2$  — фактор наклона, который для малых углов  $\theta$  полагается равным 1.

Тогда получаем

$$f(\mathbf{x}_3) = \frac{1}{i\lambda(G + F)} \times \int f(\mathbf{x}_1) e^{-i \frac{2\pi\Delta}{\lambda}} d\mathbf{x}_1. \quad (7.2.2)$$

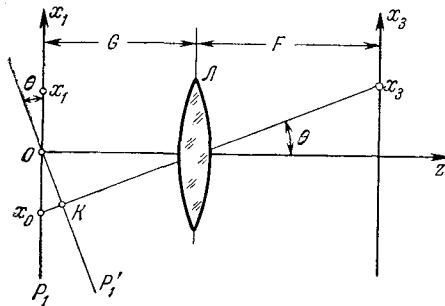


Рис. 7.3. Анализ преобразующего свойства собирающей линзы  $L$  в когерентной оптической системе.

Для того чтобы вычислить расстояние  $\Delta = \Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, F, G)$ , обратимся к рис. 7.3. Плоская волна  $P'_1$ , образуемая с плоскостью  $P_1$  угол  $\theta$ , фокусируется линзой  $L$  в точку с координатами

$$x_3 = F \sin \theta, \quad y_3 = 0.$$

Это значит, что оптическая длина пути между точкой  $x_3$  и любой точкой плоскости  $P'_1$  равна постоянной величине

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \sqrt{G^2 - x_0^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{F^2 + x_3^2} \simeq G + F + \left(1 - \frac{G}{F}\right) \frac{x_3^2}{2F}, \quad (7.2.3)$$



если только  $\theta$  мало. При этом

$$\frac{x_0}{G} = \frac{x_3}{F}. \quad (7.2.4)$$

Расстояние от плоскости  $P_1$  до точки  $x_3$  отличается от  $\rho$  на величину

$$-x_1 \sin \theta = \frac{x_1 \cdot x_3}{F}. \quad (7.2.5)$$

Поэтому расстояние между точками  $x_1$  и  $x_3$  равно

$$\Delta_x = G + F + \left(1 - \frac{G}{F}\right) \frac{x_3^2}{2F} - \frac{x_1 x_3}{F}. \quad (7.2.6)$$

Переходя к двумерному случаю, получаем

$$\Delta = \text{const} + \left(1 - \frac{G}{F}\right) \frac{x_3^2}{2F} - \frac{x_1 x_3}{F}. \quad (7.2.7)$$

Оптический сигнал в плоскости  $P_3$  равен

$$f(\mathbf{x}_3) = e^{i\beta(\omega)} \int f(\mathbf{x}_1) e^{-i\omega \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (7.2.8)$$

где

$$\omega = -\frac{2\pi x_3}{\lambda F}, \quad (7.2.9)$$

$$\beta = \left(1 - \frac{G}{F}\right) \frac{x_3^2}{2F} = \left(1 - \frac{G}{F}\right) \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{F}{2} \omega^2. \quad (7.2.10)$$

Если  $G = F$ , так что плоскость  $P_1$  совпадает с плоскостью  $P_2$ , т. е. оптическая система имеет вид, показанный на рис. 7.1, то эта система действительно осуществляет преобразование Фурье, так как при  $G = F$

$$f(\mathbf{x}_3)_{G=F} = F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f(\mathbf{x}_1)]. \quad (7.2.11)$$

В общем же случае соотношение между оптическими сигналами в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$  имеет вид

$$f(\mathbf{x}_3) = \hat{\mathcal{F}}[f(\mathbf{x}_1)] e^{i\beta(\mathbf{x}_3)}. \quad (7.2.12)$$

Согласно определению прямое преобразование Фурье осуществляется с помощью ядра  $\exp(-i\omega \mathbf{x})$ , а обратное — с помощью ядра  $\exp(i\omega \mathbf{x})$ . Поэтому, для того чтобы не нарушать принятого ранее определения преобразования Фурье, необходимо направлять координатные оси в последующих плоскостях по определенному

правилу. На рис. 7.4 показан стандартный выбор координатных осей для случая, когда световая волна распространяется слева направо. Переход от плоскости  $x$  к плоскости  $\omega$  сопровождается изменением направления осей в соответствии с выражением (7.2.9). Координатные оси в плоскости  $\omega$  и в плоскости  $x$  параллельны

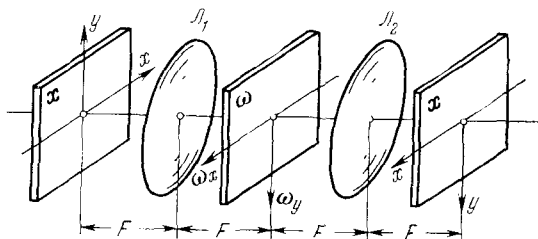


Рис. 7.4. Стандартный выбор направления координатных осей в чередующейся последовательности плоскостей, оптические сигналы в которых являются прямыми или обратными фурье-образами, при условии, что волна света распространяется слева направо.

друг другу. Далее, на следующем этапе, нужно опять изменить направление осей и т. д. При этом каждый раз линза располагается от плоскости на расстоянии, равном ее фокусному расстоянию.

Используя свойство когерентной оптической системы осуществлять при определенной геометрии операцию преобразования

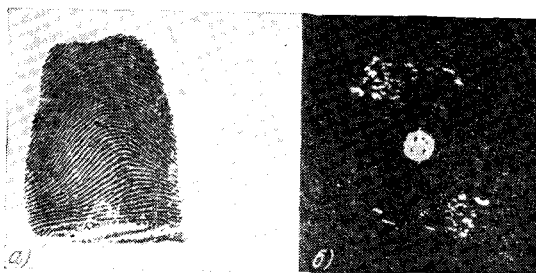


Рис. 7.5. Дактилоскопический снимок (а) и его фурье-образ (б).

Фурье комплексного оптического сигнала  $f(x)$ , можно воспроизвести и зарегистрировать двухмерные спектры любых двухмерных функций. На рис. 7.5 для иллюстрации приведен дактилоскопический снимок и его двухмерный фурье-образ.

Примером сигналов, регистрируемых и анализируемых методом преобразования Фурье, могут служить сейсмограммы колебаний почвы. Задача фурье-анализа здесь заключается в том, чтобы найти спектр мощности по сейсмограмме, нанесенной на оптический транспарант. На выходе анализатора наблюдают спектраль-

ные изменения интенсивности сигнала — в данном случае колебаний почвы — в зависимости от времени или других параметров. В настоящее время построены системы, основанные на преобразовании данных в оптический сигнал с последующим анализом и фильтрацией пространственного спектра.

Одной из задач подобной фильтрации является подавление *постоянного смещения*. Для этого в центре плоскости пространственных частот ( $\omega_x = \omega_y = 0$ ) устанавливается непрозрачная маска. Частичная фильтрация постоянного смещения приводит к увеличению контраста в отфильтрованном изображении.

Если фильтр, установленный в плоскости Фурье, имеет переменное пропускание, которое обратно пропорционально степени ослабления спектра исходного сигнала, то такой фильтр восстанавливает исходное частотное содержание сигнала и позволяет получить четкие края деталей размытого изображения.

Узкая щель в плоскости Фурье на вполне определенной пространственной частоте выделяет периодический сигнал данной частоты на фоне посторонних гармоник. Наоборот, непрозрачная маска в этом месте удаляет соответствующую гармонику, содержащуюся в исходном сигнале.

В многокаскадных системах можно осуществить операцию корреляции. При этом голографический коррелятор, схема работы которого приводится в § 7-5, осуществляет эту операцию более эффективно, так как голографический фильтр содержит полную информацию об исходном сигнале, включая также фазовую информацию.

### § 7-3. Оптический линейный фильтр

Итак, оптическое устройство, состоящее из собирающей линзы и транспаранта с нанесенными на него исходными данными, при определенных условиях и при когерентном освещении выполняет функцию двумерного линейного фильтра. В простейшем случае эти условия заключаются в том, чтобы апертура линзы была достаточно велика, а оптические aberrации пренебрежимо малы. Тогда для малых апертурных углов, стягиваемых рамкой транспаранта, такая оптическая система ведет себя как *линейный фильтр*. Действительно, оптические сигналы в такой системе подчиняются принципу суперпозиции, т. е. преобразования

$$\begin{matrix} \hat{\delta} & \hat{\delta} \\ f_1 \rightarrow F_1, & f_2 \rightarrow F_2 \end{matrix} \quad (7.3.1)$$

влекут за собой преобразование

$$\hat{\delta} \\ \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \rightarrow \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2, \quad (7.3.2)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — произвольные постоянные комплексные числа. Кроме того, характер преобразования оптического сигнала не зависит от координаты  $x_1$ . Последнее свойство реализовать в оптике гораздо труднее, чем в технике связи. Вопрос о пространственной инвариантности преобразований, осуществляемых в линейной оптической системе, рассматривается в § 7-17.

Двухмерный оптический фильтр изображен схематически на рис. 7.6. Сигнал  $f(x)$ , заданный в плоскости  $P_1$ , превращается с помощью линзы  $L_1$  в фурье-образ  $F(\omega)$ , отображаемый в плоскости  $P_2$ , где размещен сам фильтр. Отфильтрованный сигнал

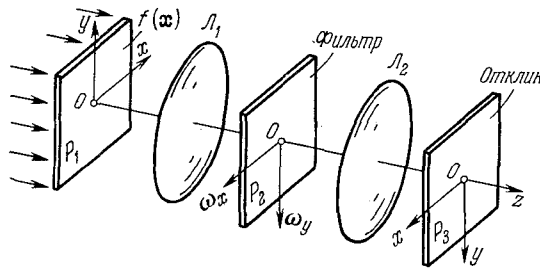


Рис. 7.6. Оптическая схема с двухмерным оптическим линейным фильтром. Процесс фильтрации, как всегда, осуществляется в плоскости пространственных частот  $\omega$ . Отклик является инверсным фурье-образом отфильтрованного спектра.

после обратного преобразования Фурье, осуществляемого с помощью линзы  $L_2$ , воспроизводится в плоскости  $P_3$ . Эту схему можно превратить в многоканальное устройство для преобразования одномерных оптических сигналов, если сферическую линзу заменить на цилиндрическую, расположив ее между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$ . В этом случае оптический сигнал в плоскости  $P_2$  описывается функцией

$$F(x, \omega_y) = \int f(x, y) e^{-i\omega_y y} dy, \quad (7.3.3)$$

где параметр  $x$  служит индексом данного канала.

Сигнал в каждом из каналов преобразуется в фильтре, установленном в плоскости  $P_2$ , либо по единой программе, либо расчлененно, по программам, меняющимся от канала к каналу.

#### § 7-4. Принцип пространственной фильтрации изображения

Изложенные выше схемы оптического фильтра в когерентной оптической системе следует рассматривать как реализацию общего принципа — *принципа пространственной фильтрации изображения* (Маршалль и Крос, а также О'Нейлл и Катрона). Принцип фильтрации пространственных частот оптическими средствами

возник на основе глубокого анализа процесса образования изображения, который в когерентной оптической системе можно представить как процесс двойной дифракции Фраунгофера. При помощи метода, основанного на таких представлениях, была решена задача исправления дефектов изображения. Это повлекло за собой широкое распространение в оптике методов теории связи. Идея о двойной дифракции оказалась весьма плодотворной, и после того, как принцип оптической фильтрации был сформулирован и реализован в экспериментах, его сразу же удалось применить для решения некоторых задач подавления шумов и выделения оптических сигналов на фоне помех. Будучи перенесенными в оптику, идеи о фильтрации сигнала, заимствованные из теории связи, приобрели ранее неизвестные достоинства. Главное из них состоит в простоте и быстродействии устройств, предназначенных для решения задач фильтрации.

Однако принцип оптической фильтрации претерпел длительную эволюцию и принял законченную форму только после изобретения и широкого развития голографии. Используя для регистрации оптического сигнала голограмму, удалось преодолеть ограничения, вытекающие из квадратичных свойств любого приемника света, и не только зарегистрировать биполярные значения оптического сигнала, но и полностью сохранить информацию о фазах. Иначе говоря, принцип оптической фильтрации в сочетании с голографией позволяет сейчас регистрировать, преобразовывать и обрабатывать любой комплекснозначный стационарный оптический сигнал.

### § 7-5. Оптический коррелятор

Поясим на примере, каким образом принцип пространственной фильтрации с использованием голографического метода регистрации оптического сигнала воплощается в действующем устройстве.

Разберем наиболее распространенную кибернетическую проблему — проблему обнаружения сигнала на фоне *аддитивных шумов*.

В главе 3 были рассмотрены основные соотношения между случайными сигналами и основные свойства шумов. Фундаментальная теорема этой теории определяет условия, при которых достигается максимальное отношение известного сигнала к шуму. Если полезный сигнал известной формы обозначить через  $s(x)$ , а аддитивные шумы или помеху — через  $n(x)$ , то оптический сигнал на входном транспаранте когерентной оптической системы представится в виде суммы

$$f(x) = s(x) + n(x). \quad (7.5.1)$$

Согласно упомянутой теореме максимальное отношение интенсивности сигнала к шуму

$$\frac{|s|_{\text{ср}}^2}{|n|_{\text{ср}}^2} \quad (7.5.2)$$

получается, если фурье-образ  $F(\omega)$  исходного сигнала  $f(x)$  пропустить через оптимальный фильтр, характеризующийся амплитудным пропусканием

$$T_{\text{опт}}(\omega) \sim \frac{S^*(\omega)}{N(\omega)}, \quad (7.5.3)$$

где  $S^*(\omega)$  — комплексно-сопряженный фурье-образ полезного сигнала  $s(x)$ . Если ограничиться рассмотрением простейших случаев, когда  $N(\omega) \approx N_0$ , т. е. случаем белого шума, фурье-образ которого постоянен, то соотношение (7.5.3) означает, что

$$T_{\text{опт}}(\omega) = S^*(\omega). \quad (7.5.4)$$

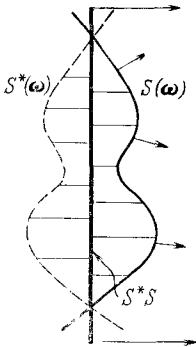


Рис. 7.7. Рисунок, поясняющий сложение фронта волны фурье-образа  $S(\omega)$  исходного сигнала  $s(x)$  с фронтом волны  $S^*(\omega)$ , создаваемым согласованным фильтром при освещении последнего плоской волной. Сигнал  $S^*S$  является квазиплоской волной, которая в плоскости отклоня создает пятно небольшого размера — корреляционный пик.

В этом случае оптимальный фильтр является согласованным комплексно-сопряженным фильтром. Из характера структуры этого фильтра видно, что он пропускает только те пространственные частоты, которые содержатся в полезном сигнале  $s(x)$ . Комплексное сопряжение требуется для того, чтобы после фильтрации полезный сигнал преобразовывался в положительный действительный оптический сигнал. В первом приближении после фильтрации образуется квазиплоская волна: опережение фазы в исходной волне компенсируется таким же запаздыванием фазы, создаваемым в фильтре (рис. 7.7). Схему фильтрации можно условно представить с помощью рис. 7.8. Амплитуда квазиплоской волны, возникающей на выходе фильтра, не будет постоянной. С помощью

собирающей линзы  $L_2$  квазиплоская волна сфокусируется в небольшое пятно на плоскости  $P_2$ . Размеры его будут тем больше приближаться к дифракционному пятну, чем большей однородностью обладает амплитуда этой волны на выходе фильтра.

Рассмотрим теперь процедуру изготовления комплексно-сопряженного фильтра  $S^*(\omega)$  (рис. 7.9). Для этого достаточно получить голограмму фурье-образа полезного сигнала  $s(x)$ . Полезный

сигнал наносится на транспарант, который устанавливается в плоскости  $P_1$ . С помощью собирающей линзы в плоскости  $P_2$  воспроизводится фурье-образ сигнала  $s(x)$ :

$$S(\omega) = \mathfrak{F}[s(x)] = \int s(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (7.5.5)$$

Чтобы получить голограмму, иначе говоря, осуществить полную

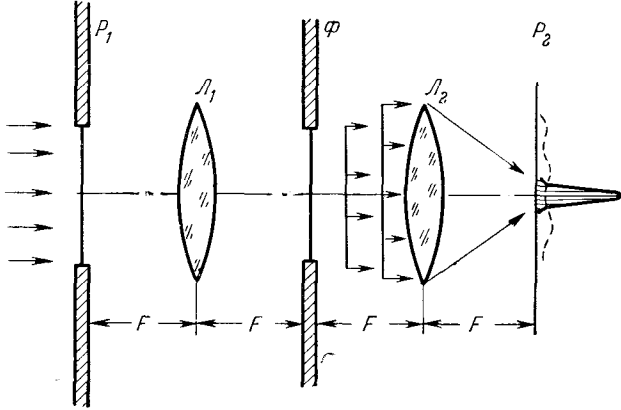


Рис. 7.8. Условная схема фильтрации в оптическом корреляторе. [Образующаяся на выходе фильтра  $\Phi$  квазиплоская волна преобразуется линзой  $L_2$  в корреляционный пик на плоскости  $P_2$ . Пунктиром обозначена размытая картина, возникающая при попадании на фильтр  $\Phi$  любой другой волны, отличной от волны света  $S(\omega)$ ].

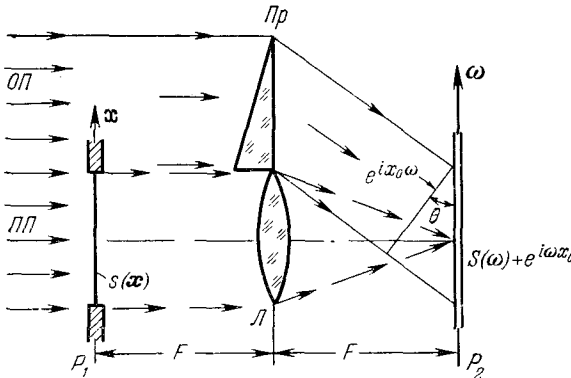


Рис. 7.9. Стадия приготовления комплексно-сопряженного фильтра с помощью линзовой голографии Фурье. Искомый сигнал  $s(x)$  устанавливается в виде транспаранта в предметной плоскости  $P_1$ . Линза  $L$  осуществляет преобразование Фурье. Призма  $Pr$  формирует наклонный опорный пучок.

запись этого фурье-образа, на плоскость  $P_2$  направляется наклонный опорный пучок от общего источника когерентного излучения. Проэкспонированная фотопластинка зарегистрирует интенсивность

интерференционной картины

$$I(\omega) = |S(\omega) + e^{i\omega x_0}|^2 = 1 + |S|^2 + S^* e^{i\omega x_0} + S e^{-i\omega x_0}. \quad (7.5.6)$$

Процедурой проявления фотопластины, в результате которой получается голограмма, фактически заканчивается стадия изготовления комплексно-сопряженного фильтра. Далее эту голограмму

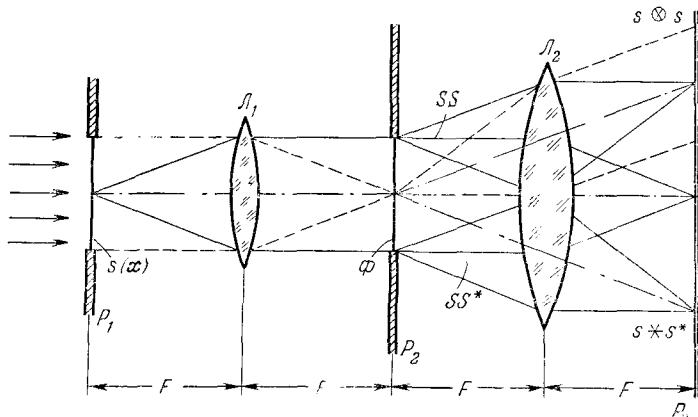


Рис. 7.10. Стадия фильтрации через голографический согласованный фильтр. В плоскости  $P_1$  устанавливается транспарант анализируемого сигнала. Линза  $L_1$  осуществляет преобразование Фурье. В плоскости  $P_2$  устанавливается голографический согласованный фильтр  $\Phi$ , изготовленный согласно схеме рис. 7.9. Линза  $L_2$  осуществляет обратное преобразование Фурье. Амплитуда боковых вторичных пучков равна  $SS$  в верхнем пучке и  $SS^*$  в нижнем пучке. В плоскости  $P_3$  отображаются сигналы  $s \otimes s$  в верхнем кадре и  $s * s^*$  в нижнем кадре.

можно использовать для целей ослабления шумов и подавления посторонних сигналов.

Пропустим теперь через этот фильтр-голограмму фурье-образ входного сигнала  $f(x)$ , т. е.  $F(\omega)$  (рис. 7.10). На выходе фильтра возникнет сигнал с амплитудой

$$R(\omega) = F(\omega) I(\omega) = F[1 + |S|^2] + FS^* e^{i\omega x_0} + FS e^{-i\omega x_0}. \quad (7.5.7)$$

Этот сигнал расщепляется на три пучка. Основной пучок, изображаемый первым членом,

$$F[1 + |S|^2], \quad (7.5.8)$$

распространяется в направлении оптической оси и близок к фурье-образу сигнала  $f(x)$ . Второй пучок, описываемый членом

$$FS^* e^{i\omega x_0}, \quad (7.5.9)$$

идет в том направлении, в каком шел опорный пучок на стадии приготовления фильтра. Третий член

$$FS e^{-i\omega x_0} \quad (7.5.10)$$

описывает пучок, отклоняющийся относительно оси в противоположном направлении. Сигнал, передаваемый нижним боковым



пучком

$$FS^* = (S + N) S^* = |S|^2 + NS^*, \quad (7.5.11)$$

состоит из двух слагаемых. В результате преобразования Фурье, осуществляемого с помощью линзы  $L_2$  из плоскости Фурье, где производилось фильтрование, в плоскость координат, где наблюдается выходной сигнал, функция  $|S|^2$  превратится в сигнал  $s * s^*$ , т. е. в сигнал автокорреляции функции  $s(x)$ . Этот сигнал появится в центре нижнего бокового изображения.

Первое слагаемое сигнала, передаваемое<sup>1</sup> верхним боковым пучком

$$FS = (S + N) S = SS + NS, \quad (7.5.12)$$

превратится в сигнал автосвертки  $s \otimes s$ .

Сигналы вида  $NS$  и  $NS^*$  будут распространяться вместе с сигналами  $SS$  и  $SS^*$  соответственно. Однако вследствие случайной

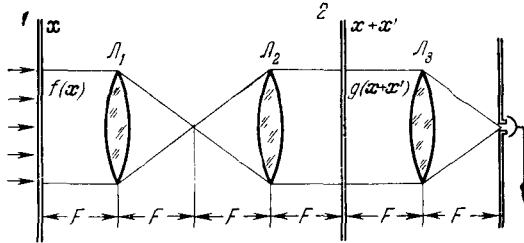


Рис. 7.11. Схема оптического коррелятора с регистрацией в плоскости отклика интенсивности функции неоднозначности. При установке детектора на оптической оси последний регистрирует квадрат функции кросс-корреляции сигналов, введенных в плоскостях 1 и 2.

природы шума и определенного рассогласования в фильтре, изготовленном для обнаружения только полезного сигнала  $s(x)$ , значения свертки  $n \otimes s$  и кросс-корреляции  $n * s^*$  будут малы. Действительно, на выходе фильтра фронты сигналов  $NS$  и  $NS^*$  не будут плоскими, так как для этого требуется полное согласование (рис. 7.7) распределений фаз сигнала и фильтра. Поэтому в общем случае на выходе фильтра появится волна с произвольным профилем фронта. Сигналы  $NS$  и  $NS^*$  образуют в плоскости  $P_3$  ослабленные размазанные пятна, обладающие вследствие случайного соотношения фаз лишь небольшой плотностью энергии.

Другая схема оптического коррелятора при когерентном освещении приведена на рис. 7.11. Оба сигнала  $f(x)$  и  $g(x)$  записываются на двух пленках. Для осуществления операции кросс-корреляции одна из пленок с эталонным сигналом  $g(x)$  протягивается с постоянной скоростью во втором предметном пространстве, куда проектируется сигнал  $f(x)$ . Такое устройство представляет собой *умножающее оптическое устройство* с интегрирующим приемником. Поэтому, если щель приемника расположена

в точке  $\xi'$ , то фотодетектор зарегистрирует квадрат функции неоднозначности:

$$A(\xi) = \int f(x)g(x+x')e^{i\frac{1}{\lambda f}\xi x} dx. \quad (7.5.13)$$

Если установить щель приемника на оптической оси, то  $\xi = 0$  и детектор зарегистрирует значение квадрата функции кросс-корреляции:

$$A(\xi = 0) = \int f(x)g(x+x') dx. \quad (7.5.14)$$

### § 7-6. Свертка и корреляция в когерентной оптической системе

Рисунок 7.10, поясняющий принцип действия комплексно-сопряженного фильтра, изображает, по существу, схему, с помощью которой осуществляют произвольные операции свертки и корреляции в когерентной оптической системе. Рассмотрим теперь влияние на эти операции сдвигов, поворотов и изменения масштаба исходного сигнала при неподвижном голографическом фильтре.

Воспользуемся теоремой сдвига в теории преобразования Фурье. Пусть входной сигнал  $s(x)$  смещен относительно оси системы, где он был расположен на стадии приготовления комплексно-сопряженного фильтра, на расстояние  $x_1$ . Тогда входной сигнал равен

$$s(x_1) = s(x + x_1). \quad (7.6.1)$$

Его фурье-образ равен

$$S_1(\omega) = \int s(x + x_1)e^{-i\omega x} dx = e^{i\omega x_1} S(\omega) \quad (7.6.2)$$

и отличается от фурье-образа  $S(\omega)$  исходного, несмещенного сигнала множителем  $e^{i\omega x_1}$ , который, как известно, приводит только к дополнительному наклону каждого из боковых пучков.

В результате фильтрации на выходе получим сигнал

$$S_1(\omega) S^*(\omega) e^{i\omega x_0} = SS^* e^{i(x_0 + x_1)\omega}. \quad (7.6.3)$$

Соотношение (7.6.3) показывает, что если сигнал  $SS^*$  образует волну, распространяющуюся под углом  $x_0$ , то волна сигнала  $S_1 S^*$  направлена под углом  $x_0 + x_1$ . Поворот оси распространения сигнала, т. е. изменение самой несущей, в плоскости фурье-координат вызывает смещение точки, вокруг которой располагается отфильтрованный сигнал. Поскольку по условию  $x_1$  всегда меньше  $x_0$  и сигнал не может выйти из предметного кадра, так как в противном случае он попадает в опорный пучок, то в плоскости координат  $P_3$  в кадре боковых изображений появятся яркие пятна

сигналов  $s_1 * s^*$  и  $s_1 \otimes s$  в тех же самых местах, где был расположен смещенный сигнал  $s_1$ .

Таким образом, поступательное движение исходного сигнала  $s(x)$  в предметной плоскости  $P_1$  приводит к такому же — если геометрическое увеличение системы  $M$  равно 1 — поступательному движению сигналов свертки  $s \otimes s$  или корреляции  $s * s^*$  в пределах кадра на предметной плоскости  $P_2$ .

Что произойдет с сигналом на выходе, если входной сигнал  $s(x)$  повернут на угол  $\varphi$  в предметной плоскости  $P_1$ ? Влияние поворота фильтра на сигнал автокорреляций рассмотрим на примере предмета в виде прямоугольника, характеризующегося геометрическим фактором

$$\varepsilon = \frac{a}{b}, \quad (7.6.4)$$

где  $a$  и  $b$  — ширина и высота прямоугольника. Исходная функция  $s(x)$  равна 1 в пределах прямоугольника и нулю вне его. При повороте фильтра на угол  $\varphi$  восстановленное изображение  $f(x)$  также повернется на угол  $\varphi$ . Легко видеть, что амплитуда сигнала автокорреляции определяется площадью перекрытия двух изображений прямоугольника — исходного и повернутого. Вводя обозначение  $\varphi_0$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = \varepsilon = \frac{a}{b}, \quad (7.6.5)$$

можно показать, что после поворота на угол  $\varphi$  амплитуда сигнала автокорреляции станет равной

$$s_0 * s_\varphi = \begin{cases} \left[ 1 + \frac{\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon}{2 \cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \right] \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ \frac{\varepsilon}{\sin \varphi}, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (7.6.6)$$

При  $\varphi = 0$  амплитуда  $s_0 * s_0 = 1$ ; при  $\varphi = \pi/2$  получим  $s_0 * s_{\pi/2} = \varepsilon$ , а при  $\varphi = \varphi_0$  будем иметь  $s_0 * s_{\varphi_0} \approx 1/2$ , если  $\varphi_0$  мало.

Таким образом, сигнал автокорреляции при повороте монотонно уменьшается и в минимуме равен  $\varepsilon = a/b$ , т. е. уменьшается в  $a/b$  раз по сравнению с исходным значением.

Если изменить масштаб сигнала  $s(x)$ , т. е. взять увеличенный в  $\beta$  раз сигнал при одной и той же полной интенсивности:

$$s_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} s\left(\frac{x}{\beta}\right),$$

то спектр этого нового сигнала

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \int s\left(\frac{x}{\beta}\right) e^{-i\omega x} dx = \int s(x') e^{-i\beta\omega x'} dx' = \\ &= \int s(x') e^{-i\omega x'} e^{-i(\beta-1)\omega x'} dx' \end{aligned}$$

растянется в  $1/\beta$  раз вдоль координат  $\omega_x$  и  $\omega_y$ . Тогда на выходе комплексно-сопряженного фильтра во второй предметной плоскости появится сигнал

$$\int s(x) s(x' - x) e^{-i(\beta-1)\omega x} dx,$$

равный функции неопределенности сигнала  $s(x)$  при частоте

$$\Omega = (\beta - 1) \omega.$$

Как известно (см. главу 3), функция неопределенности достигает абсолютного максимума при  $\Omega = 0$ . Таким образом, если частота  $\Omega$  отличается от нуля, то это приводит к ослаблению амплитуды сигнала в выходной плоскости.

Итак, поступательное перемещение сигнала в первой предметной плоскости  $P_1$  приводит к такому же поступательному перемещению сигнала свертки  $s \otimes s$  или корреляции  $s * s^*$  во второй предметной плоскости  $P_2$ . Изменение масштаба сигнала при неизменной полной интенсивности приводит к его ослаблению. Аналогичным образом операция фильтрации чувствительна к повороту исходного сигнала. Функции свертки и автокорреляции при этом уменьшаются по мере возрастания угла поворота. В зависимости от класса пространственной симметрии исходного сигнала эта зависимость может быть либо монотонной, либо содержать вторичные максимумы.

## § 7-7. Распознавание образов

Первый эксперимент, подтверждающий выводы теории и иллюстрирующий реальные возможности принципа пространственной фильтрации изображения с помощью голографического согласованного фильтра, был выполнен Ван-дер-Люгтом.

Была решена задача обнаружения известной геометрической фигуры — маленького прямоугольника — среди набора других геометрических форм (рис. 7.12). Сначала изготавливается голографический фильтр для маленького прямоугольника. Вследствие симметрии фурье-образ прямоугольника является действительным. Затем фильтр помещается в плоскость Фурье, а исходный транспарант с набором фигур устанавливается в предметную плоскость. Любое из боковых изображений имеет вид, показанный на рис. 7.13.

Это либо автокорреляция, либо автосвертка маленького прямоугольника. Видно, что комплексно-сопряженный фильтр производит отбор трех прямоугольников одновременно, независимо от положения в кадре.

На следующих рисунках (рис. 7.14 и 7.15) показан результат выборки сигнала  $L$  среди того же набора геометрических фигур. Фигура  $L$  имеет комплексный фурье-образ. На рис. 7.16 показана достоверность, с которой запечатлен фильтр фигуры  $L$ . Показано восстановленное изображение фигуры  $L$ , полученное с помощью комплексно-сопряженного фильтра путем освещения его плоской волной. Это фактически стадия восстановления для голографии Фурье с помощью линз. Боковые изображения на выходе фильтра (рис. 7.14 и рис. 7.15) отличаются между собой. На рис. 7.14 показан сигнал автокорреляции фигуры  $L$ , а на рис. 7.15 — сигнал автосвертки. Сигнал автокорреляции является симметричным, а сигнал автосвертки подобными свойствами симметрии не обладает.

Остальные фигуры  $L$ , имеющие другую ориентацию, не дают сколько-нибудь заметного сигнала на выходе. Однако вращение фильтра приводит к последовательному проявлению сигналов свертки и корреляции, когда соответствующая фигура  $L$  оказывается параллельной той фигуре, которая зарегистрирована в фильтре.

Приведенные примеры относятся к случаю, когда спектр шума можно считать однородным. Если же в реальных задачах это условие не выполняется, то комплексно-сопряженный фильтр должен быть составлен согласно общему выражению (7.5.3).

Все операции в когерентной оптической системе при интерференционной регистрации информации выполняются по программе вычислительных машин одновременного действия. При этом операции ведутся над функциями, заданными в двух измерениях. Оптический коррелятор может послужить исходным элементом вычислительных машин четвертого поколения, в которых основная операция будет сводиться к быстрому переключению из одного блока в другой большого числа картин, несущих информацию. Интерференционная система записи информации наилучшим образом подходит для осуществления быстрой передачи информационных картин, а интегральный характер обработки интерференционной формы записи информации обеспечивает при этом необходимую надежность всех операций.

В настоящее время быстродействие оптических аналого-вычислительных машин определяется временем преобразования оптических сигналов во входном и выходном блоках, где электрические и другие сигналы превращаются в оптические и обратно. Однако благодаря программе одновременного действия и использованию пучков когерентного света при передаче информации уже первые

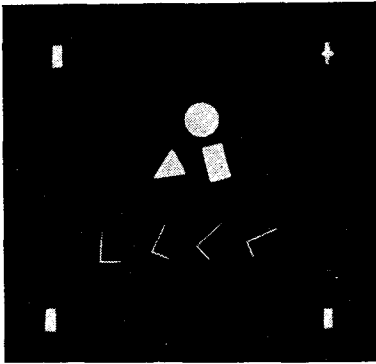


Рис. 7.12. Набор фигур, среди которых необходимо обнаружить заданную фигуру, помещается в плоскости  $P_1$  (рис. 7.10).

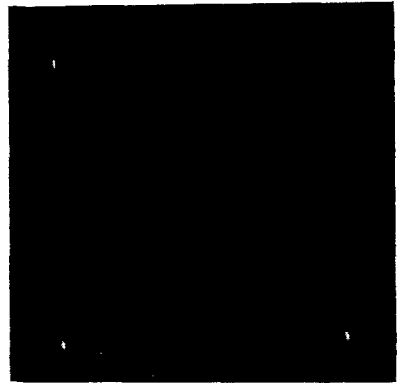


Рис. 7.13. Вид бокового изображения  $f * s^*$  или  $f \otimes s$  в плоскости отклика  $P_3$  (рис. 7.10). Голографический комплексно-сопряженный фильтр, настроенный на маленький прямоугольник, дал в плоскости отклика пятна только в местах расположения искомым прямоугольников в плоскости  $P_1$ .

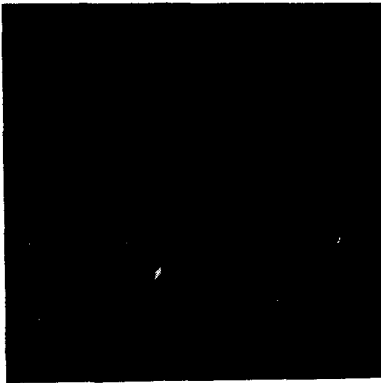


Рис. 7.14. Вид верхнего бокового изображения  $f * s^*$  (кросс-корреляция в плоскости отклика  $P_3$  при использовании голографического комплексно-сопряженного фильтра, настроенного на фигуру  $L$ ). Фигура  $L$  не является центрально-симметричной фигурой и поэтому имеет комплексный фурье-образ. Пятна кросс-корреляции дала только та фигура  $L$  из набора фигур рис. 7.12, ориентация которой на плоскости  $P_1$  совпадает с ориентацией фигуры  $L$  на стадии получения голографического фильтра.



Рис. 7.15. Вид нижнего бокового изображения  $f \otimes s$  (свертка в плоскости отклика  $P_3$  при использовании голографического комплексно-сопряженного фильтра, настроенного на фигуру  $L$ ).

модели оптических корреляторов смогли весьма быстро решать наиболее деликатные кибернетические задачи, типа распознавания образов при наличии шумов. Информация в оптический коррелятор обычно вводится в виде фотографии на диапозитивах-транспарантах или текста на микрофильмах, т. е. преобразование информации из одной формы записи в другую производится вне

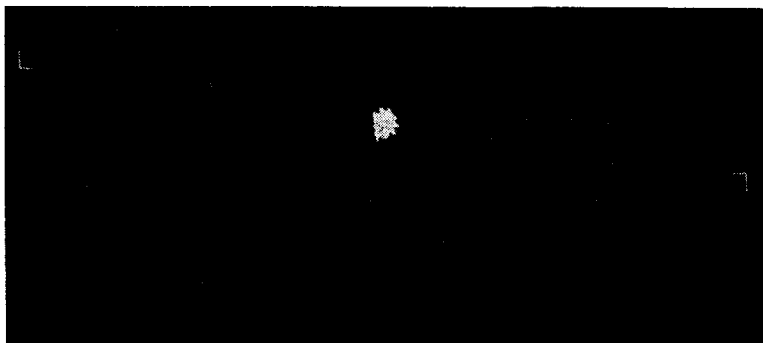


Рис. 7.16. Картина, наблюдаемая в плоскости  $P_3$  при освещении голографического комплексно-сопряженного фильтра, настроенного на фигуру  $L$ , плоской волной света. В боковых кадрах — верхнем и нижнем — видны восстановленные фигуры  $L$ .

оптической машины. Это позволяет ввести понятие быстродействия блока оптического коррелятора. Так, например, операция умножения вектора, имеющего  $10^4$  компонент, на квадратную матрицу с  $10^4 \cdot 10^4$  элементов отнимает около миллисекунды, т. е. осуществляется со скоростью  $10^{11}$ — $10^{12}$  операций в секунду. Это примерно в  $10^5$ — $10^6$  раз выше скорости быстродействия современных электронно-вычислительных машин.

### § 7-8. Бинарный согласованный фильтр

Если входной оптический сигнал имеет достаточно равномерный по пространственным частотам фурье-образ, то сопряженному фильтру можно придать бинарную структуру. *Бинарный согласованный фильтр* рассчитывается на электронно-вычислительной машине, что дает большие преимущества в тех случаях, когда исходные сигналы представлены аналитически, а не в виде транспаранта. Однако переход к бинарной форме сопровождается ухудшением соотношения между сигналом и шумом на выходе фильтра. Рассмотрим свойства бинарного согласованного фильтра.

Пусть фурье-образ искомого сигнала равен

$$F(\omega) = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}. \quad (7.8.1)$$

Модуляция опорного пучка функцией  $F(\omega)$  приводит к высокочастотному сигналу

$$F(\omega) e^{i x_0 \omega} = A(\omega) e^{i[\Phi(\omega) + x_0 \omega]}, \quad (7.8.2)$$

распространяющемуся в боковом пучке. Бинарный фильтр — это фильтр, пропускание которого принимает только два значения:  $T_1 = 0$  и  $T_2 = 1$  — и который состоит из черных и белых линий или полосок. Его амплитудное пропускание равно

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{A(\omega) \cos[\omega x_0 + \Phi(\omega)]}{|A(\omega) \cos[\omega x_0 + \Phi(\omega)]|}. \quad (7.8.3)$$

Транспарант с таким амплитудным пропусканием получается с помощью нелинейной операции над функцией

$$G(\omega) = \operatorname{Re}[F(\omega) e^{i \omega x_0}] = A(\omega) \cos[\omega x_0 + \Phi(\omega)], \quad (7.8.4)$$

в результате чего появляется набор обертонов  $\omega$ . Функция  $T$  записывается в виде бесконечной суммы:

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} C(0, m) \cos[m \omega x_0 + m \Phi(\omega)]. \quad (7.8.5)$$

Здесь

$$C(0, m) = \frac{\varepsilon_m}{2\Gamma\left(1 - \frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}, \quad (7.8.6)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция, а

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7.8.7)$$

Окончательно

$$T = \frac{1}{2} + \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{2(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m\pi} \cos[m \omega x_0 + m \Phi(\omega)]. \quad (7.8.8)$$

Если такой бинарный согласованный фильтр  $T$  использовать в оптическом корреляторе, то, кроме нулевого и двух боковых дифракционных порядков, образуется большое количество обертонов. Из (7.8.8) видно, что размер изображения  $m$ -го порядка примерно в  $m$  раз больше ширины изображения первого порядка.

Обычные требования к опорному пучку ( $x_0 > a$ , где  $a$  — размер изображения первого порядка) исключают возможность наложения изображения  $m$ -го порядка на изображение первого порядка.



Бинарный фильтр несколько ухудшает отношение сигнала к шуму на выходе. Анализ показывает, что для некоторых наиболее распространенных сигналов, обладающих спадающим спектром пространственных частот, это отношение уменьшается примерно в 1,3 раза.

### § 7-9. Основные элементы оптической когерентной системы

Переход от простого оптического коррелятора к системам, позволяющим осуществлять многокаскадную, или многоэшелонную, обработку информации, требует усовершенствования самого метода анализа процессов, происходящих в такой сложной оптической системе. Применение обычной формулы Кирхгофа — Френеля сопряжено с очень громоздкими выражениями и не позволяет сделать обобщающих выводов о свойствах многокаскадной системы. Такие обобщения можно получить, если ввести алгоритм оптического каскада и с его помощью проанализировать логику многокаскадных систем и методы синтеза любой сложной многокаскадной оптической системы.

Разумеется, метод рассмотрения должен быть основан на учете только первого приближения, дающего соотношение Фурье между оптическими сигналами в двух сопряженных плоскостях: координатной плоскости и плоскости пространственных частот. Эффекты оптической абберации, а также поправки, возникающие при учете высших порядков, при этом не рассматриваются. Здесь имеет место точная аналогия с теорией линейных цепей в радиотехнике, где электронная лампа рассматривается как чисто линейный элемент. Основными элементами когерентной оптической системы являются:

- модулирующая среда — транспарант;
- собирающая линза;
- свободное пространство;
- квадратичный приемник света.

Назначение транспаранта-диапозитива, помещенного в пучок света, заключается в том, чтобы промодулировать волну света. В общем случае модулирующую среду можно описать функцией

$$A(x) = |A(x)| \exp i\Phi(x), \quad (7.9.1)$$

содержащей как амплитудную  $|A(x)|$ , так и фазовую модуляцию  $\Phi(x)$ . Непосредственно на выходе модулирующего транспаранта, освещаемого волной света

$$f(x) = |f(x)| \exp i\theta(x), \quad (7.9.2)$$

возникает волна света с амплитудой

$$g(x) = f(x) \cdot A(x) = |A(x)| \cdot |f(x)| \exp i[\Phi(x) + \theta(x)]. \quad (7.9.3)$$

На рис. 7.17 показан оптический модулятор и его эквивалентная схема.

Симметричная тонкая сферическая линза описывается функцией пропускания

$$e^{-i \frac{kx^2}{2F}}, \quad (7.9.4)$$

где  $F$  — фокусное расстояние линзы, а  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число.

Цилиндрическая линза описывается функцией пропускания

$$e^{-i \frac{kx^2}{2F}} \quad \text{или} \quad e^{-i \frac{ky^2}{2F}} \quad (7.9.5)$$

в зависимости от ориентации линзы. Фокусное расстояние цилиндрической линзы во втором измерении принимается равным бесконечности.

В оптическую систему входят также и конические линзы либо линзы с меняющимся фокусным расстоянием как в одном, так

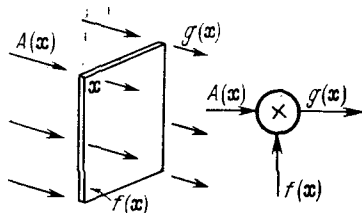


Рис. 7.17. Оптический модулятор плоской волны и его эквивалентная схема. Знак  $\times$  обозначает операцию умножения.

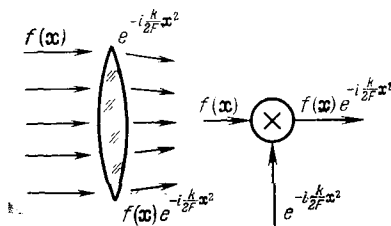


Рис. 7.18. Собирающая линза, создающая параболическое искривление фронта плоской волны, и ее эквивалентная схема.

и в двух измерениях. Конические линзы описываются функцией

$$e^{-i \frac{kx^2}{F(y)}}. \quad (7.9.6)$$

На рис. 7.18 показано действие линзы как модулятора и ее эквивалентная схема.

Свободное пространство описывается на основе известных соотношений между предметом и волной света в зрачке. Действительно, пусть в плоскости  $P_1$  (рис. 7.19) задано распределение амплитуды света  $f(x)$ , а на расстоянии  $D$  от плоскости  $P_1$  расположена плоскость  $P_2$ , в которой распределение амплитуды света описывается функцией  $g(u)$ , где  $u(u, v)$  — точка с координатами  $u, v$  в плоскости  $P_2$ . Как известно (см. (7.9.3)),

$$g(x) = \frac{C}{D} f(x) * e^{i \frac{kx^2}{2D}}, \quad (7.9.7)$$

где  $C$  — постоянное число, не зависящее ни от  $x$ , ни от  $u$ .

На рис. 7.19 действие свободного пространства при распространении волны света на расстояние  $D$  от плоскости  $P_1$

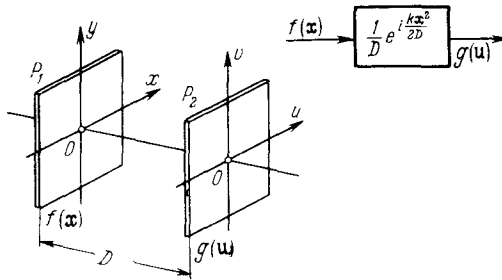


Рис. 7.19. Действие свободного пространства, характеризующегося френелевской функцией распределения, для функции экрана  $f(x)$  и его эквивалентная схема. Символ в виде прямоугольника, в который помещено френелевское ядро, означает операцию свертки.

к плоскости  $P_2$  изображается иначе — с помощью прямоугольника, в котором записывается ядро свертки.

Наконец, на выходе оптической системы используется приемник света, например фотоэмульсия. Как и любой другой приемник света, фотоэмульсия регистрирует только интенсивность света. В общем случае характеристическая кривая фотоприемника является нелинейной, но на ограниченном участке ее можно считать логарифмически линейной. Параметр, характеризующий логарифмическую зависимость между почернением или пропусканием света и полной световой энергией, называется коэффициентом контрастности  $\Gamma$ .

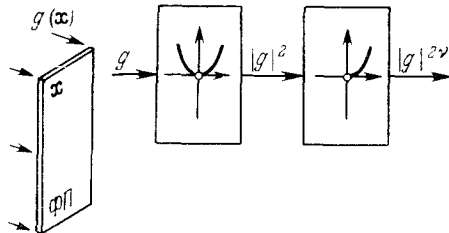


Рис. 7.20. Фотопленка как приемник света и его эквивалентная схема. Фотопленка ФП регистрирует квадрат оптического сигнала  $g(x)$ , возведенный в некоторую степень  $v$ .

На рис. 7.20 показано действие фотопленки как приемника света и его эквивалентная схема.

### § 7-10. Обобщенная функция Френеля

Анализируя изложенные выше эквивалентные схемы основных элементов оптической системы, можно сделать следующие выводы. Сферическая линза эквивалентна каскаду с коэффициентом усиления, меняющимся от точки к точке:

$$x = e^{-i \frac{kx^2}{2F}}, \tag{7.10.1}$$

а свободное пространство является своеобразным линейным фильтром, характеризующимся импульсным откликом

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{D} e^{i \frac{h\mathbf{x}^2}{2f}}. \quad (7.10.2)$$

Функции  $\kappa(\mathbf{x})$  и  $g(\mathbf{x})$  имеют близкую структуру, и их можно объединить. Характеристические параметры, определяющие свойства каскада  $\kappa(\mathbf{x})$  или линейного фильтра  $g(\mathbf{x})$ , входят в знаменатель аргумента экспоненты. Для удобства записи целесообразно ввести обратные величины: обратное фокусное расстояние

$$f = \frac{1}{F} \quad (7.10.3)$$

для линзы и обратное расстояние

$$d = \frac{1}{D} \quad (7.10.4)$$

для свободного пространства. Эти величины аналогичны электрической проводимости электрической цепи, которая равна величине, обратной сопротивлению цепи. Параметры  $f$  и  $d$  называют *диоптрийными параметрами*.

Все вышесказанное оправдывает введение единой *обобщенной функции Френеля*

$$\mathfrak{z}(\mathbf{x}; f) \equiv e^{i \frac{hf}{2} \mathbf{x}^2}, \quad (7.10.5)$$

с помощью которой можно выразить как импульсный отклик линейного фильтра, являющегося эквивалентом свободного пространства глубиной  $D$  и описываемого функцией

$$g(\mathbf{x}) = d \cdot \mathfrak{z}(\mathbf{x}; d), \quad (7.10.6)$$

так и коэффициент усиления линзы с фокусным расстоянием  $F = 1/f$ , который равен

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; f), \quad (7.10.7)$$

где  $d = 1/D$ .

Цилиндрическая линза описывается функциями

$$\mathfrak{z}^*(x; f) \quad \text{или} \quad \mathfrak{z}^*(y; f). \quad (7.10.8)$$

Обобщенная функция Френеля обладает свойствами, которые аналогичны соответствующим свойствам преобразований Фурье и Френеля.

**Свойство симметрии:**

$$\mathfrak{z}(\mathbf{x}; f) = \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; -f), \quad (7.10.9)$$

т. е. обобщенная функция Френеля асимметрична вдоль оптической оси:

$$\mathfrak{z}(-\mathbf{x}; f) = \mathfrak{z}(\mathbf{x}; f), \quad (7.10.10)$$

и симметрична вдоль осей, нормальных к оптической оси.

**Умножение функции Френеля:**

$$\mathfrak{z}(\mathbf{x}; f_1) \mathfrak{z}(\mathbf{x}; f_2) = \mathfrak{z}(\mathbf{x}; f_1 + f_2), \quad (7.10.11)$$

$$\mathfrak{z}(\mathbf{x}; f_1) \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; f_2) = \mathfrak{z}(\mathbf{x}; f_1 - f_2), \quad (7.10.12)$$

т. е. при умножении двух обобщенных функций Френеля складываются или вычитаются их диоптрийные параметры.

**Изменение масштаба координат:**

$$\mathfrak{z}(c\mathbf{x}; f) = \mathfrak{z}(\mathbf{x}; c^2f). \quad (7.10.13)$$

**Комбинация цилиндрической и сферической линз:**

$$\mathfrak{z}^*(x; f_1) \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; f_2) = \mathfrak{z}^*(y; f_2) \mathfrak{z}^*(x; f_1 + f_2), \quad (7.10.14)$$

$$\mathfrak{z}^*(y; f_1) \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; f_2) = \mathfrak{z}^*(x; f_2) \mathfrak{z}^*(y; f_1 + f_2), \quad (7.10.15)$$

т. е. диоптрийные силы линз складываются вдоль соответствующих координат независимо.

**Сдвиг обобщенной функции Френеля:**

$$\mathfrak{z}(\mathbf{x} - \mathbf{u}; f) = \mathfrak{z}(\mathbf{x}; f) \mathfrak{z}(\mathbf{u}; f) e^{-ihf\mathbf{u}\mathbf{x}}. \quad (7.10.16)$$

Это правило используется при вычислении сверток.

**Свойство многоканальной системы:**

$$\mathfrak{z}(\mathbf{x}; f) = \mathfrak{z}(x; f) \mathfrak{z}(y; f), \quad (7.10.17)$$

т. е. переменные  $x$  и  $y$  разделяются.

**Предельные соотношения:**

$$\lim_{d \rightarrow 0} \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; d) = 1, \quad (7.10.18)$$

т. е. линза с бесконечно большим фокусным расстоянием никак не влияет на распределение света и эквивалентна плоскопараллельной пластинке из стекла.

Аналогично

$$\lim_{d \rightarrow \infty} d \cdot \mathfrak{z}(\mathbf{x}; d) = \delta(\mathbf{x}) \quad (7.10.19)$$

— бесконечно мелкое свободное пространство осуществляет преобразование Дирака, т. е. не вызывает никакого дифракционного размытия оптического сигнала.

## § 7-11. Оптический каскад

Наиболее общей и в то же время простейшей оптической системой является система, содержащая в себе модулирующую среду, свободное пространство, собирающую сферическую линзу и затем вновь опять свободное пространство. На рис. 7.21 показана такая оптическая система и ее эквивалентная схема.

Модулирующая среда освещается волной монохроматического когерентного света единичной амплитуды со сферическим фронтом произвольного радиуса  $D_1 = 1/d_1$ . Расстояние между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$  составляет  $D_2 = 1/d_2$ , а между плоскостями  $P_2$

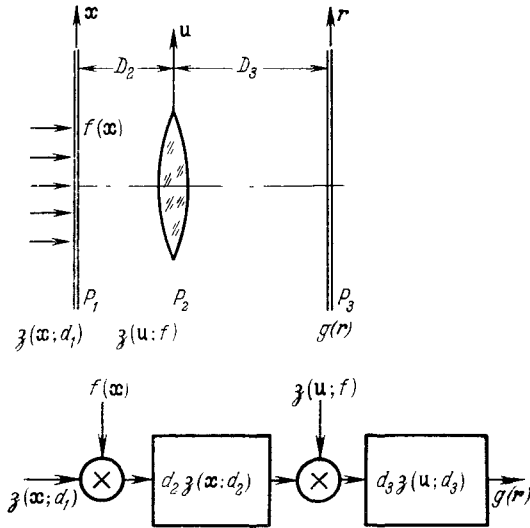


Рис. 7.21. Оптический каскад, состоящий из модулирующей среды (в плоскости  $P_1$ ), свободного пространства (глубиной  $D_2$ ), собирающей сферической линзы (с фокусным расстоянием  $f$ ), еще свободного пространства (глубиной  $D_3$ ), и его эквивалентная схема.

и  $P_3$  равно  $D_3 = 1/d_3$ . Следуя эквивалентной схеме этой простейшей оптической системы, которая называется *оптическим каскадом*, можно записать амплитуду на его выходе, т. е. в плоскости  $P_3$ , имеющей координаты  $r(r, s)$ :

$$g(r) = \int_{P_2} d_3 \delta(u - r; d_3) \cdot \underbrace{\delta^*(u; f)}_{\text{линза}} du \int_{P_1} \underbrace{\delta(x; d_1) f(x) \cdot d_2}_{\text{модуляция}} \delta(x - u; d_2) dx. \quad (7.11.1)$$

свертка (второе свободное пространство)
свертка (первое свободное пространство)

Используя свойство (7.10.16), получим

$$g(r) = d_2 d_3 \int_{P_2} \int_{P_1} \delta(x; d_1) f(x) \delta(x; d_2) \delta(u; d_2) e^{-ikd_2 ux} \times \delta^*(u; f) \delta(u; d_3) \delta(r; d_3) e^{-ikd_3 ur} dx du. \quad (7.11.2)$$

Далее, на основании свойства (7.10.2) находим

$$g(r) = d_2 d_3 \delta(r; d_3) \int_{P_2} \int_{P_1} \delta(x; d_1 + d_2) f(x) \delta(u; d_2 - f + d_3) \times e^{-ik(d_2 ux + d_3 ur)} dx du. \quad (7.11.3)$$

Интегрирование по  $u$  выполняется с помощью соотношения

$$k(x) = \int \mathfrak{z}(u; f_1) e^{-ihf_2ux} du = \frac{C}{f_1} \mathfrak{z}^* \left( x; \frac{f_2^2}{f_1} \right), \quad (7.11.4)$$

которое вытекает из свойств фурье-образа функции Френеля, рассмотренных в главе 2. При этом здесь обозначено

$$f_1 = d_2 - f + d_3. \quad (7.11.5)$$

Окончательно получаем уравнение оптического каскада:

$$g(r) = \frac{d_2 d_3}{d_2 - f + d_3} \mathfrak{z}(r; d_3) \int_{P_1} \mathfrak{z}(x; d_1 + d_2) f(x) \times \\ \times \mathfrak{z}^* \left( x + \frac{d_3}{d_2} r; \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3} \right) dx. \quad (7.11.6)$$

Это уравнение определяет распределение амплитуды света на выходе оптического каскада через параметры  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $f$  и  $d_3$ , характеризующие его элементы. Повторно применяя это уравнение, можно проанализировать многокаскадные оптические устройства. В зависимости от параметров оптического каскада интегральная связь между амплитудой оптического сигнала на выходе  $g(r)$  и амплитудой оптического сигнала на входе  $f(x)$  может принимать различные формы. Основными из них являются соотношение преобразования Фурье и соотношение образования изображения.

### § 7-12. Условие образования изображения

Если оптический каскад выполняет роль изображающей системы, то, как это следует из свойства (5.10.19),

$$\frac{d_2^2}{d_2 + d_3 - f} \mathfrak{z}^* \left( x + \frac{d_3}{d_2} r; \frac{d_2^2}{d_2 + d_3 - f} \right) \rightarrow \delta \left( x + \frac{d_3}{d_2} r \right). \quad (7.12.1)$$

Этот предел достигается при условии  $d_2 + d_3 - f = 0$ , т. е.

$$d_2 + d_3 = f. \quad (7.12.2)$$

Оптический сигнал  $g(r)$  на выходе каскада имеет вид

$$g(r) = \mathfrak{z}(r; d_3) \int \mathfrak{z}(x; d_1 + d_2) f(x) \delta \left( x + \frac{d_3}{d_2} r \right) dx = \\ = \mathfrak{z}(r; d_3) f \left( -\frac{d_3}{d_2} r \right) \mathfrak{z} \left( -\frac{d_3}{d_2} r; d_1 + d_2 \right) = \\ = f \left( -\frac{d_3}{d_2} r \right) \mathfrak{z} \left( r; d_3 + \frac{(d_1 + d_2) d_3^2}{d_2^2} \right) C \left( \frac{d_3}{d_2} \right), \quad (7.12.3)$$

где  $C$  — комплексное число, зависящее от отношения  $d_3/d_2$ . Выражение (7.12.3) показывает, что оптический сигнал  $g(\mathbf{r})$  равен исходному сигналу  $f(\mathbf{x})$ , претерпевшему инверсию и изменение масштаба. Если ввести коэффициент линейного увеличения системы  $M$ , то

$$M = \frac{d_2}{d_3}. \quad (7.12.4)$$

Функция  $f\left(-\frac{d_3}{d_2}\mathbf{r}\right)$  умножается на обобщенную функцию Френеля, которая эквивалентна точечному освещающему источнику, расположенному на расстоянии

$$D_4 = \frac{1}{d_3 + \frac{(d_1 + d_2)d_3^2}{d_2^2}} \quad (7.12.5)$$

слева от транспаранта. В общем случае  $D_4$  может быть отрицательным, когда используется сходящаяся сферическая волна.

Изображающее условие (7.12.2) можно записать через глубины свободных промежутков и фокусное расстояние линзы:

$$\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} = \frac{1}{F}. \quad (7.12.6)$$

Это — основное уравнение линзы для двух взаимно изображающих точек, расположенных на расстояниях  $D_2$  перед линзой и  $D_3$  позади нее.

### § 7-13. Условие получения фурье-образа

Пусть теперь оптический каскад осуществляет операцию преобразования Фурье: оптический сигнал на выходе  $g(\mathbf{r})$  является фурье-образом исходного сигнала  $f(\mathbf{x})$ . Чтобы найти соотношение между параметрами в этом случае, преобразуем подынтегральное выражение (7.11.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta\left(\mathbf{x}; d_1 + d_2\right) \delta^*\left(\mathbf{x} + \frac{d_3}{d_2}\mathbf{r}; \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3}\right) &= \delta\left(\mathbf{x}; d_1 + d_2\right) \times \\ \times \delta^*\left(\mathbf{x}; \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3}\right) \delta^*\left(\frac{d_3}{d_2}\mathbf{r}; \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3}\right) e^{-ik\mathbf{xr}} \frac{d_3}{d_2} \cdot \frac{d_3^2}{d_2 - f + d_3} &= \\ = \delta\left(\mathbf{x}; d_1 + d_2 - \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3}\right) e^{-ik\mathbf{xr}} \frac{d_2 d_3}{d_2 - f + d_3} \times \\ \times \delta^*\left(\mathbf{r}; \frac{d_3^2}{d_2^2} \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3}\right). \end{aligned} \quad (7.13.1)$$



Тогда

$$g(\mathbf{r}) = \int_{P_1} f(\mathbf{x}) \delta \left( \mathbf{x}; d_1 + d_2 - \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3} \right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}\mathbf{r}} \frac{d_2 d_3}{d_2 - f + d_3} d\mathbf{x}, \quad (7.13.2)$$

где

$$d_4 = d_3 - \frac{d_3^2}{d_2 - f + d_3}. \quad (7.13.3)$$

Для того чтобы выражение (7.13.2) определяло фурье-образ функции  $f(\mathbf{x})$ , необходимо, чтобы функция

$$\delta \left( \mathbf{x}; d_1 + d_2 - \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3} \right)$$

обращалась в единицу, что эквивалентно требованию

$$d_1 + d_2 - \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3} = 0 \quad (7.13.4)$$

(см. (7.10.18)).

Проанализируем некоторые частные случаи соотношения (7.13.4). Пусть, например,  $d_1 = 0$ , т. е. входной транспарант  $P_1$  освещается плоской волной ( $D_1 = \infty$ ). Тогда вместо (7.13.4) получаем

$$d_2 - \frac{d_2^2}{d_2 + d_3 - f} = 0,$$

или

$$d_2 \left[ 1 - \frac{d_2}{d_2 + d_3 - f} \right] = 0.$$

Поскольку  $d_2 \neq 0$ , то

$$1 - \frac{d_2}{d_2 + d_3 - f} = 0,$$

или

$$d_3 = f. \quad (7.13.5)$$

Таким образом, величина  $d_2 = 1/D_2$  может быть произвольной. Соотношение (7.13.5) означает, что фурье-образ функции  $f(\mathbf{x})$  воспроизводится в задней фокальной плоскости линзы. При этом

$d_4 = f - f^2/d_2$ , а

$$g(\mathbf{r}) = \mathfrak{z}\left(\mathbf{r}; f - \frac{f^2}{d_2}\right) \int_{P_1} f(\mathbf{x}) e^{-ihf\mathbf{x}\mathbf{r}} d\mathbf{x}. \quad (7.13.6)$$

Чтобы получить точное преобразование Фурье, необходимо выбрать параметры так, чтобы

$$\mathfrak{z}\left(\mathbf{r}; f - \frac{f^2}{d_2}\right) = 1. \quad (7.13.7)$$

Это требование реализуется при условии

$$f - \frac{f^2}{d_2} = 0, \quad (7.13.8)$$

или  $d_2 = f$ .

Условие (7.13.8) означает, что исходный оптический сигнал  $f(\mathbf{x})$  необходимо поместить в переднюю фокальную плоскость. Это — стандартная схема преобразования Фурье. Соотношение (7.13.4) позволяет также легко найти другие значения параметров, при которых осуществляется преобразование Фурье.

### § 7-14. Изменение масштаба фурье-образа

Если  $d_1 \neq 0$ , т. е. транспарант освещается расходящейся (или сходящейся) волной, то параметр  $d_2$  влияет на масштаб фурье-образа, а сам фурье-образ появляется в плоскости, не совпадающей с задней фокальной плоскостью линзы. Отсюда можно сделать вывод о том, что непараллельное освещение приводит к изменению масштаба фурье-образа.

Рассмотрим это свойство более подробно. На рис. 7.22 дана схема, в которой транспарант  $f(\mathbf{u})$  освещается сходящимся пучком света и собирающая линза расположена перед транспарантом, а не позади его, как это было в схеме оптического каскада (рис. 7.21). Воспользовавшись эквивалентной схемой такого каскада, вычислим сигнал на выходе:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= \int_{P_2} l_2 \mathfrak{z}(\mathbf{u} - \mathbf{r}; l_1) du f(\mathbf{u}) \int \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; f) l_1 \mathfrak{z}(\mathbf{x} - \mathbf{u}; l_1) d\mathbf{x} = \\ &= l_1 l_2 \mathfrak{z}(\mathbf{r}; l_2) \int_{P_1} \int_{P_2} \mathfrak{z}^*(\mathbf{x}; f) \mathfrak{z}(\mathbf{x}; l_1) \mathfrak{z}(\mathbf{u}, l_1) f(\mathbf{u}) \times \\ &\quad \times e^{-ihl_1 \mathbf{u}\mathbf{x}} \mathfrak{z}(\mathbf{u}; l_2) e^{-ihl_2 \mathbf{u}\mathbf{r}} du d\mathbf{x} = \\ &= \mathfrak{z}(\mathbf{r}; l_2) \int_{P_2} \mathfrak{z}^*\left(\mathbf{u}; -l_1 - l_2 + \frac{l_1^2}{l_1 - f}\right) f(\mathbf{u}) e^{-ihl_2 \mathbf{u}\mathbf{r}} du, \end{aligned}$$

так как

$$\int \mathfrak{z}(\mathbf{x}; l_1 - f) e^{-i k l_1 u \mathbf{x}} d\mathbf{x} = C_1 \mathfrak{z}^* \left( \mathbf{u}; \frac{l_1^2}{l_1 - f} \right). \quad (7.14.1)$$

Сигналы  $g(\mathbf{r})$  и  $f(\mathbf{u})$  связаны соотношением Фурье, если подынте-

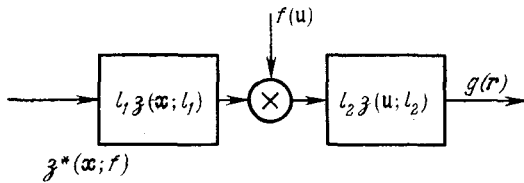
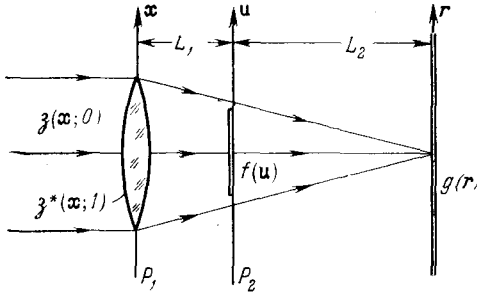


Рис. 7.22. Оптический каскад, в котором преобразование фурье-сигнала  $f(\mathbf{u})$ , помещенного в плоскость  $P_2$ , осуществляется с помощью собирающей линзы  $P_1$ , расположенной перед транспарантом, и его эквивалентная схема.

гральная функция  $\mathfrak{z}$  равна единице. Это возможно при условии

$$\frac{l_1^2}{l_1 - f} = l_1 + l_2,$$

или

$$f = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}, \quad (7.14.2)$$

что эквивалентно

$$F = L_1 + L_2. \quad (7.14.3)$$

Последнее соотношение выполняется автоматически в данном оптическом каскаде, и поэтому

$$g(\mathbf{r}) = \mathfrak{z}(\mathbf{r}; l_2) \int_{P_2} f(\mathbf{u}) e^{-i k l_2 u \mathbf{r}} d\mathbf{u}. \quad (7.14.4)$$

Следует подчеркнуть, что параметром преобразования Фурье в такой схеме служит  $l_2 = 1/L_2$ , а не  $f = 1/F$ . Изменяя  $L_2$ , можно изменять масштаб фурье-образа сигнала  $f(\mathbf{u})$ .

Итак, оптический каскад может выполнять как роль изображающей системы, так и операцию преобразования Фурье. Однако, в соответствии с общим принципом двойной дифракции Фраунгофера, согласно которому изображение в оптической системе образуется в результате двух последовательных преобразований Фурье, в любом оптическом каскаде, настроенном как изображающая система, где-то будет воспроизводиться фурье-образ исходного сигнала.

Дуальные свойства оптического каскада, содержащего одновременно сигнал изображения и сигнал фурье-образа исходного оптического сигнала, используются в многоканальных системах: оптический каскад вдоль одной координаты работает как изображающая система, а вдоль другой — как преобразователь Фурье. Достигается это с помощью цилиндрической оптики.

### § 7-15. Многокаскадная оптическая система

В ряде задач оптической обработки информации возникает необходимость многоэтапной или многокаскадной обработки исходных данных. В каждом каскаде в общем случае выполняются операции, которые можно описать в виде свертки исходного сигнала с какой-то функцией  $h$ , т. е.

$$g(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{u}) h(\mathbf{r} - \mathbf{u}) d\mathbf{u} = f * h. \quad (7.15.1)$$

В фурье-пространстве этой операции отвечает операция умножения:

$$G(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) \cdot H(\mathbf{p}), \quad (7.15.2)$$

где  $\mathbf{p}(p, q)$  — координаты в плоскости пространственных частот.

Наиболее простая схема реализации процесса (7.15.1) — это голографический метод получения фильтра-транспаранта  $H(\mathbf{p})$ . Такую схему называют голографическим коррелятором.

Рассмотрим схему коррелятора, представленную на рис. 7.23. Сигнал в плоскости  $P_2$  равен согласно (7.14.4)

$$F(\mathbf{u}) = \int_{P_2} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{h}l_2 \mathbf{u} \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (7.15.3)$$

В плоскости  $P_2$  устанавливается фильтр  $H(\mathbf{u})$ , являющийся фурье-образом функции  $h(\mathbf{x})$ . Сигнал за фильтром  $H(\mathbf{u})$  равен  $F(\mathbf{u}) \cdot H(\mathbf{u})$ . На этом первый каскад завершает свою работу. Далее идет второй каскад, оптический сигнал на выходе которого равен

$$g(\mathbf{r}) = \int_{P_2} \left( \mathbf{r}; l_4 - \frac{l_4^2}{l_3 + l_4 - f_2} \right) \int_{P_2} \left( \mathbf{u}; l_2 + l_3 - \frac{l_3^2}{l_3 + l_4 - f_2} \right) \times \\ \times F(\mathbf{u}) H(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{h} \frac{l_3 l_4}{l_3 + l_4 - f_2} \mathbf{u} \mathbf{r}} d\mathbf{u}. \quad (7.15.4)$$

Для того чтобы функция  $g(\mathbf{r})$  являлась фурье-образом сигнала  $F(\mathbf{u}) \cdot H(\mathbf{u})$ , необходимо, чтобы

$$l_2 + l_3 - \frac{l_3^2}{l_3 + l_4 - f_2} = 0, \tag{7.15.5}$$

или

$$\frac{1}{L_2 + L_3} + \frac{1}{L_4} = \frac{1}{F_2}. \tag{7.15.6}$$

Легко понять, что уравнение (7.15.6) выражает условие изображения плоскости  $P_1$  на плоскости  $P_3$ , а следовательно, на выходе

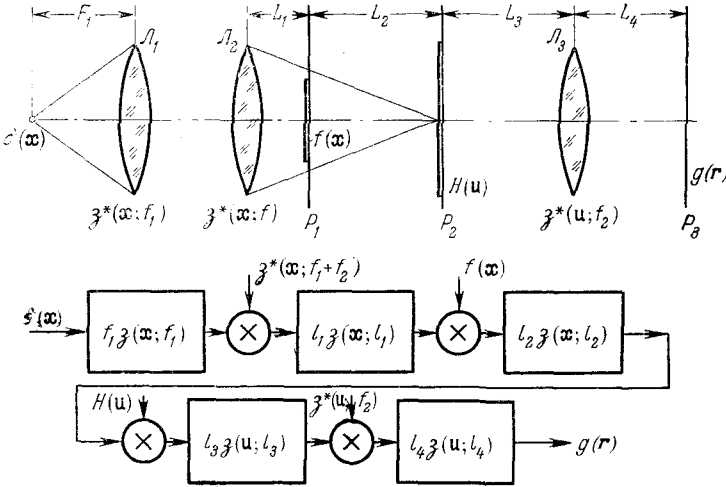


Рис. 7.23. Голографический коррелятор, основанный на использовании голографического сопряженного фильтра, и его эквивалентная схема.

появится сигнал, равный свертке функций  $f$  и  $h$ :  $g(\mathbf{r}) = f * h$ , или, если учесть изменение масштаба,

$$g(\mathbf{r}) = z(\mathbf{r}; l_5) \int f(x) \cdot h \left[ \frac{l_2}{Ml_0} (\mathbf{r} - Mx) \right] dx, \tag{7.15.7}$$

где

$$l_5 = l_4 - \frac{l_4^2}{l_3 + l_4 - f_2}.$$

Здесь  $l_0$  — то значение  $l_2$ , при котором проводилось изготовление фильтра, так что если  $l_2 = l_0$ , то функция  $f(x)$  представлена в исходном масштабе.

## § 7-16. Многоканальные системы

Перейдем к рассмотрению многоканальной системы, в которой каждый канал представляет одномерную систему. Схема многоканального фильтра спектров сигналов дана на рис. 7.24. В каскад входят две линзы — одна цилиндрическая, другая сферическая.

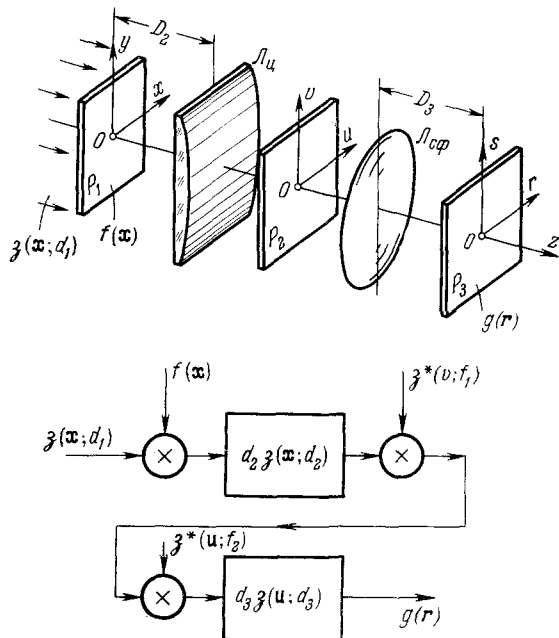


Рис. 7.24. Многоканальный оптический фильтр спектра сигналов и это эквивалентная схема.

Сигнал на выходе каскада равен

$$g(\mathbf{r}) = \int_{P_1} \int_{P_2} f(\mathbf{x}) \zeta(\mathbf{x}; d_1 + d_2) \zeta(v; d_2 - f_1 + d_3 - f_2) \times \\ \times \zeta(u; d_2 - f_2 + d_3) e^{-ikd_2 u x} \cdot e^{-ihd_3 u r} du d\mathbf{x}. \quad (7.16.1)$$

Выполняя интегрирование по  $u$  ( $u, v$ ), находим обычными приемами

$$g(\mathbf{r}) = \int \zeta(\mathbf{r}; d_3) \int f(\mathbf{x}) \zeta(\mathbf{x}; d_1 + d_2) \zeta^* \left( x + \frac{d_3}{d_2} r; \frac{d_2^2}{d_2 - f_2 + d_3} \right) \times \\ \times \zeta^* \left( y + \frac{d_3}{d_2} s; \frac{d_2^2}{d_2 - f_2 + d_3 - f_1} \right) d\mathbf{x}. \quad (7.16.2)$$

Пусть необходимо выполнить преобразование Фурье вдоль координаты  $x$  и изображающую операцию вдоль координаты  $y$ .

Для получения изображения вдоль  $y$  необходимо, чтобы

$$\frac{d_2^2}{d_2 - f_2 + d_3 - f_1} \delta^* \left[ y + \frac{d_3}{d_2} s; \frac{d_2^2}{d_2 - f_2 + d_3 - f_1} \right] = \delta \left( y + \frac{d_3}{d_2} s \right), \quad (7.16.3)$$

откуда

$$d_2 + d_3 = f_1 + f_2,$$

или

$$\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} = \frac{F_1 + F_2}{F_1 F_2}. \quad (7.16.4)$$

Выражение (7.16.4) означает, что две линзы  $L_{\Pi}$  и  $L_{\text{сф}}$  действуют как одна линза и что в направлении координаты  $y$  выполняются условия изображения.

Проведя теперь интегрирование по  $y$  и воспользовавшись соотношением (7.10.17), получим

$$g(\mathbf{r}) = \delta(r; d_3) \delta \left( \frac{d_3}{d_2} s; d_1 + d_2 \right) \times \\ \times \int f \left( x; -\frac{d_3}{d_2} s \right) \delta(x; d_1 + d_2) \delta^* \left( x + \frac{d_3}{d_2} r; \frac{d_2^2}{d_2 - f_2 + d_3} \right) dx. \quad (7.16.5)$$

Потребуем теперь, чтобы каскад осуществлял преобразование Фурье в направлении координаты  $x$ . Выполнив обычное преобразование, находим

$$g(\mathbf{r}) = \delta(r; d_3) \delta \left[ s; d_3 + (d_1 + d_2) \frac{d_3^2}{d_2^2} \right] \times \\ \times \int f \left( x; -\frac{d_3}{d_2} s \right) \delta \left[ x; d_1 + d_2 - \frac{d_2^2}{d_2 + d_3 - f} \right] \times \\ \times \exp \left( -ik \frac{d_2 d_3}{d_2 + d_3 - f_2} xr \right) dx. \quad (7.16.6)$$

Для осуществления преобразования Фурье подынтегральная функция  $\delta$  должна обратиться в единицу, что отвечает условию

$$d_1 + d_2 - \frac{d_2^2}{d_2 + d_3 - f_2} = 0. \quad (7.17.6)$$

Анализ (7.16.7) совпадает с анализом (7.13.4). Так же как и ранее, в случае  $d_1 = 0$  условие (7.16.7) удовлетворяется для всех  $d_2$ , и тогда  $d_3 = f_2$ . Однако теперь выбор  $d_2$  ограничен, так как, кроме (7.16.7), величина  $d_2$  подчинена также условию (7.16.4). Если  $d_3 = f_2$ , то условие (7.16.4) означает также  $d_3 = f_1$ . Поэтому транспарант с сигналом  $f(x)$  должен устанавливаться в плоскости, расположенной на расстоянии  $f_1$  от цилиндрической линзы.

Если оба условия выполнены, то

$$g(\mathbf{r}) =$$

$$= \delta(r; d_3) \delta\left(s; f_2 + \frac{f_2^2}{f_1}\right) \int f\left(x; -\frac{d_3}{d_2}s\right) \exp[-ikf_2xr] dx. \quad (7.16.8)$$

### § 7-17. Пространственная инвариантность оптического линейного фильтра

Как уже отмечалось выше, оптическую систему можно рассматривать как линейный фильтр, если одновременно

1) выполняется принцип суперпозиции сигнала;

2) имеет место пространственная инвариантность импульсного отклика фильтра по всей апертуре, или изопланатичность системы.

Рассмотрим сначала влияние конечной апертуры. Вместо выражения

$$k_0(\mathbf{u}) = \frac{C}{f_1} \delta^*\left(\mathbf{u}; \frac{f_2^2}{f_1}\right)$$

следует воспользоваться функцией (см. (7.11.4))

$$k_A(\mathbf{u}) = \int_{\text{по апертуре}} \delta(\mathbf{x}; f_1) \exp[-ikf_2\mathbf{u}\mathbf{x}] dx, \quad (7.17.1)$$

которая в случае круглой апертуры радиуса  $A$  равна

$$k_A(\rho, \theta) = \int_0^A \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{ikf_1 R^2}{2}\right] \exp[-ikf_2 R \rho \cos(\Phi - \theta)] R dR d\Phi, \quad (7.17.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos\Phi, & y &= R \sin\Phi, \\ u &= \rho \cos\theta, & v &= \rho \sin\theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.17.3)$$

Выполнив интегрирование по  $\Phi$ , находим

$$k_A(\rho) = 2\pi \int_0^A J_0(kf_2 \rho R) \exp\left(\frac{ikf_1}{2} R^2\right) R dR. \quad (7.17.4)$$



Рассмотрим влияние конечной апертуры на изображающую систему, когда выполнено условие

$$d_2 + d_3 - f = 0$$

или

$$f_1 = d_2 - f + d_3 = 0.$$

Интегрирование по  $R$  дает

$$k_A(\rho) = 2\pi \int_0^A J_0(kf_2\rho R) R dR = \pi A^2 \left[ \frac{2J_1(kAf_2\rho)}{kAf_2\rho} \right]. \quad (7.17.5)$$

Поэтому изображение на выходе описывается функцией

$$g_A(\rho, \theta) = k_A(\rho) * [\delta(\rho; d_1 + d_2) \cdot f(\rho, \theta)], \quad (7.17.6)$$

которая зависит от размера апертуры  $A$ .

Каким требованиям должны удовлетворять размеры апертур линз оптической многокаскадной системы, чтобы имела место изопланатичность? Поясним это на примере простой одномерной линзовой системы. Пусть транспарант  $f(x)$  помещен в плоскости  $P_1$  на расстоянии  $D_2$  перед линзой  $L_1$ , имеющей фокусное расстояние  $F_1$  и апертуру радиуса  $A_1$ . Линза  $L_2$ , имеющая фокусное расстояние  $F_2$  и апертуру радиуса  $A_2$ , устанавливается вблизи плоскости  $P_3$ , в которой отображается фурье-образ функции  $f(x)$ . Возьмем две точки на плоскости  $P_1$ : одну на оптической оси, а другую на некотором расстоянии от нее. Для простоты предположим, что

$$D_2 = D_3 = F_1. \quad (7.17.7)$$

Точка, расположенная на оптической оси, образует в плоскости  $P_3$  плоскую волну, которая беспрепятственно пройдет во вторую линзу  $L_2$ . Внеосевая точка образует наклонную плоскую волну. В общем случае только часть этой волны пройдет через апертуру второй линзы. Из-за этого изображения выбранных нами двух точек будут различными. Поэтому рассматриваемая здесь изображающая оптическая система свойством пространственной инвариантности не обладает.

Теперь рассмотрим влияние пространственной неинвариантности на процесс преобразования Фурье. Опять ограничимся рассмотрением одного измерения. Для линзы с апертурой конечного радиуса  $A$  функция

$$k_A(u) = k_0(u) \cdot k_1(u), \quad (7.17.8)$$

где

$$k_0(u) = \frac{C}{\sqrt{f_1}} \delta^* \left( u; \frac{f_2^2}{f_1} \right), \quad (7.17.9)$$

а

$$k_1(u) = \int_{-\sqrt{\frac{h}{\pi f_1}}(f_1 A + f_2 u)}^{\sqrt{\frac{h}{\pi f_1}}(f_1 A - f_2 u)} \exp\left(i \frac{\pi}{2} t^2\right) dt. \quad (7.17.10)$$

Функция  $k_1(u)$ , связанная с конечными размерами апертуры, равна интегралу Френеля. Эта функция имеет наибольшую производную при

$$|u| = \frac{f_1}{f_2} A \quad (7.17.11)$$

и может быть аппроксимирована прямоугольным импульсом

$$k_1(u) \simeq Y(f_2 u + f_1 A) - Y(f_2 u - f_1 A). \quad (7.17.12)$$

Подставив приближенное выражение для функции  $k_1(u)$  в (7.17.8), вычислим выходной сигнал оптического каскада, выполняющего преобразование Фурье:

$$g(r) = \int \int \int (x; d_3) \int \int (x; d_1 + d_2) f(x) \int \int \left[ x + \frac{d_3}{d_2} r; \frac{d_2^2}{d_2 - f + d_3} \right] \times \\ \times \left\{ Y \left[ d_2 \left( x + \frac{d_3}{d_2} r \right) + (d_2 - f + d_3) A \right] - \right. \\ \left. - Y \left[ d_2 \left( x + \frac{d_3}{d_2} r \right) - (d_2 - f + d_3) A \right] \right\} dx. \quad (7.17.13)$$

Если  $d_1 = 0$ , то

$$g(r) = \int \int \int \left( r; f - \frac{f^2}{d_2} \right) \int_{P_1} f(x) \exp(-ikfxr) \times \\ \times \left[ Y \left( x + \frac{d_3}{d_2} r + A \right) - Y \left( x + \frac{d_3}{d_2} r - A \right) \right] dx. \quad (7.17.14)$$

Выражение (7.17.14) показывает, что для того, чтобы оптический каскад обладал пространственно инвариантным откликом, необходимо согласовать размеры апертур двух линз. Так, если исходная функция  $f(x)$  отлична от нуля только при  $|x| \leq x_0$ , то необходимо выполнить условие

$$\frac{d_2}{A_2} > \frac{d_3}{A_1 - x_0}, \quad (7.17.15)$$

или

$$D_2 A_2 < D_3 (A_1 - x_0). \tag{7.17.16}$$

Наиболее удобной схемой оптического каскада для целей преобразования Фурье является система, приведенная на рис. 7.22. Транспарант с функцией  $f(x)$  помещается в непосредственной близости справа от линзы, осуществляющей преобразование Фурье. В такой схеме достигается пространственная инвариантность операции.

**§ 7-18. Подавление шумов путем пространственного дифференцирования оптических сигналов**

В задаче распознавания образов иногда возникает ситуация, когда корреляция между исходным образом и шумом оказывается весьма близкой к автокорреляции самого исходного образа. И если при этом интенсивность шума достаточно велика, то средняя интенсивность автокорреляции исходного сигнала оказывается значительно выше средней интенсивности кросс-корреляции сигнала с шумом.

Такая ситуация возникает, например, в задаче распознавания букв алфавита, если буква-помеха занимает большую площадь, чем искомая буква, и интенсивность отклика фильтра на помеху превышает интенсивность отклика на искомый образ.

Поясним возможную неблагоприятную ситуацию на примере двух букв I и E (рис. 7.25). Буква I является искомой функцией  $s(x)$ , а буква E — помехой  $n(x)$ . Распределение амплитуды света в транспарантах имеет вид двух ступенек единичной высоты, которые возвышаются на площадках с контурами, показанными на рис. 7.25. Амплитудное распределение вдоль оси  $x$  имеет вид прямоугольных импульсов, ширина которых зависит от буквы.

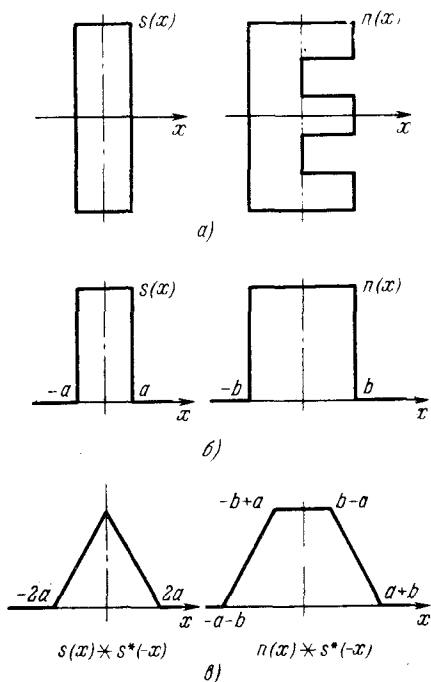


Рис. 7.25. К задаче распознавания образа буквы I. а) Искомая функция (буква I) и шум (буква E); б) сечение «пьедесталов» букв I и E плоскостью, проходящей через ось  $x$ ; функция  $s(x)$  является искомой, функция  $n(x)$  — шум; в) результат операции свертки функций  $s(x)$  и  $n(x)$  с искомой функцией  $s(x)$ . Яркость свертки шума больше яркости свертки искомого сигнала, что не позволяет провести отбор искомой буквы.

Сигнальная корреляция

$$s(x) * s^*(-x) \quad (7.18.1)$$

имеет вид треугольного импульса, а шумовая кросс-корреляция

$$n(x) * s^*(-x) \quad (7.18.2)$$

имеет вид трапеции с теми же склонами, что и треугольный импульс. Поэтому отклик согласованного фильтра имеет для шума ббольшую энергию, чем для искомого сигнала.

Решение этой, казалось, безнадежной задачи было достигнуто путем замены корреляционного сравнения сигналов на корреляционное сравнение их пространственных производных. Пространственное дифференцирование легко осуществляется с помощью общего принципа пространственной фильтрации изображений в когерентной оптической системе.

Как известно, операции дифференцирования вдоль одной координаты  $x$  в предельной плоскости соответствует операция умножения на  $i\omega_x$  в плоскости Фурье. Для того чтобы такую операцию осуществить, исходный сигнал  $f(x)$  подвергается, как обычно, преобразованию Фурье с помощью линзы (рис. 7.6). В плоскости пространственных частот вводится дополнительный фильтр, амплитудное пропускание которого зависит от частоты  $u$  в виде

$$H(u) = u^{2n}, \quad (7.18.3)$$

где  $n$  — порядок производной, а  $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = |u|$ . Такой фильтр преобразует исходную функцию в ее градиент. На выходе фильтра амплитуда сигнала равна

$$H(u) \cdot F(u) = F(u) \cdot u^{2n}. \quad (7.18.4)$$

Обратное преобразование Фурье осуществляется с помощью линзы  $L_3$ , и на плоскости  $P_3$  отображается сигнал, равный пространственной производной  $n$ -го порядка от исходного сигнала  $f(x)$ . При этом сигнальная автокорреляция, отображаемая одним из боковых пучков оптического коррелятора при  $n = 1$ , равна

$$(\nabla s) * (\nabla s^*) = \int \nabla s(x) \cdot \nabla s^*(x' - x) dx, \quad (7.18.5)$$

где

$$\nabla s = \text{grad } s \equiv \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial s}{\partial y} \mathbf{e}_y, \quad (7.18.6)$$

а  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  — единичные орты вдоль соответствующих координатных осей. Шумовая кросс-корреляция имеет вид

$$(\nabla n) * (\nabla s^*) = \int \nabla n(x) \cdot \nabla s^*(x' - x) dx. \quad (7.18.7)$$

Для вторых пространственных производных ( $n = 2$ ) получаем соответственно сигнальную автокорреляцию

$$(\Delta s) * (\Delta s^*) = \int \Delta s(x) \cdot \Delta s^*(x' - x) dx. \quad (7.18.8)$$

Такое устройство позволяет выполнить дифференцирование любого порядка, включая дробное дифференцирование ( $n = 1/2$ ,  $n = 3/2$ ,  $n = 5/2$ ,  $n = \pi/2$  и т. д.). Каждому виду шумов отвечает свой оптимальный порядок пространственного дифференцирования.

На рис. 7.26 показан эффект пространственного дифференцирования в примере двух букв: I (искомая) и E (шум). В результате дифференцирования прямоугольного импульса возникают две дельта-функции противоположного знака. Сигнальная часть (7.18.5) имеет вид трех дельта-функций, при этом средний пик в два раза больше боковых (по амплитуде). На выходе квадратичного детектора появятся три всплеска с интенсивностями 1; 4; 1 соответственно. Прямоугольный импульс шума  $n(x)$  в результате дифференцирования также превращается в две дельта-функции противоположных знаков, но отстоящих друг от друга на расстоянии большем, чем в случае сигнала  $s(x)$ . Шумовая кросс-корреляция (7.18.7) состоит из четырех дельта-функций, которые на выходе квадратичного детектора создают четыре пика с интенсивностями 1; 1; 1; 1. В таких условиях легко провести дискриминацию шума и пропустить только сигнал, так как отношение интенсивностей сигнального и шумового откликов равно 4/1.

На рис. 7.27 показано решение задачи выбора равномерно освещенного круга определенной размера. Искомый круг показан стрелкой. На нижней части рис. 7.27, представляющей собой изображение отклика фильтра в одном из боковых пучков, видна яркая точка, указывающая месторасположение круга заданного размера. Соотношение между интенсивностями сигнального и шумового откликов фильтра равно 26 дб.

На рис. 7.28 приведен пример распознавания двух отпечатков пальцев, очень близких по своему рисунку.

На рис. 7.29 показан пример отбора букв «е» в тексте путем пространственного дифференцирования. Из рисунка видно, что отношение сигнала к шуму получается вполне удовлетворительным.

Таким образом, своеобразное «оконтуривание» исходного сигнала и шума существенно облегчает проблему распознавания.

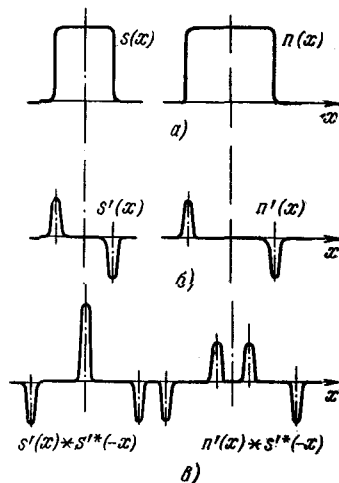


Рис. 7.26. Эффект дифференцирования сигналов  $s(x)$  и  $n(x)$  по пространственной координате. а) Исходный сигнал  $s(x)$  и шум  $n(x)$ ; б) первая производная исходного сигнала  $s'(x)$  и шума  $n'(x)$ ; в) результат операции свертки производной искомого сигнала  $s'(x)$ ; яркость пятна  $s'(x) * s'^*(-x)$  в 4 раза выше яркости пятна  $n'(x) * s'^*(-x)$ .

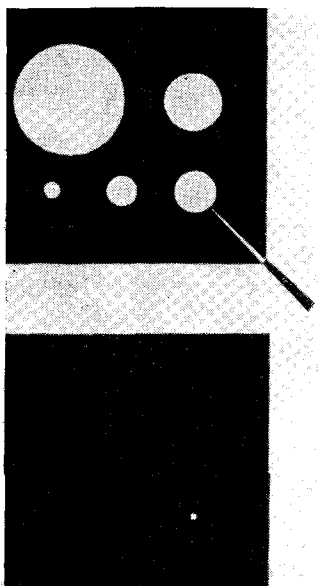


Рис. 7.27. К задаче выбора равномерно освещенного круга определенного размера. *Вверху*: изображение набора кругов различного размера, из которого необходимо отобрать круг заданного размера (показан стрелкой). Используется предварительная операция дифференцирования заданных сигналов по пространственной координате. *Внизу*: результат фильтрации. Изображение отклика, в кадре которого видна яркая точка на том месте, где расположен искомый круг.

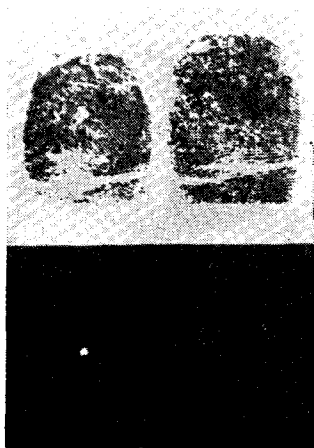


Рис. 7.28. Распознавание двух близких дактилоскопических изображений. *Вверху*: исходные изображения. *Внизу*: пятно в кадре на плоскости отклика, указывающее преступника.

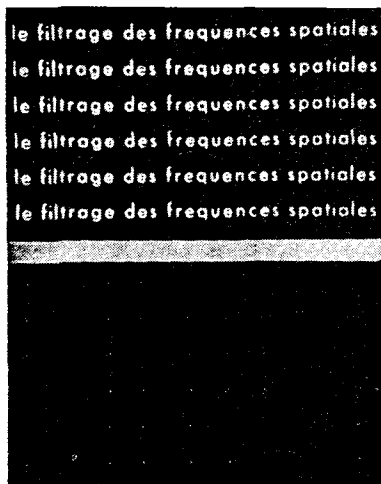


Рис. 7.29. Выбор букв «е» в тексте, выполненный с помощью пространственного дифференцирования. *Вверху*: — текст. *Внизу* — изображение ¼ кадра в плоскости отклика.

Эксперименты показали, что соотношение сигнальной и шумовой частей зависит от качества оптики, используемой в подобных

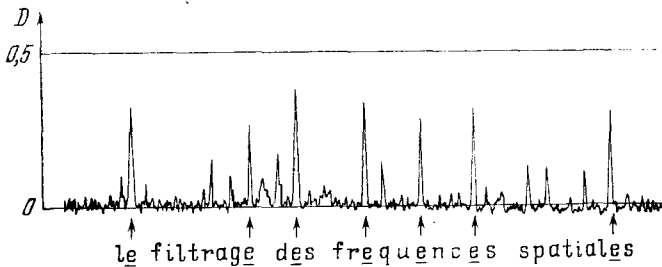


Рис. 7.30. Микроденситограмма сигнала в плоскости отклика. По оси ординат — оптическая плотность  $D$ . Внизу расположен текст, подвергнутый анализу. Максимумы расположены в месте расположения букв «е» в тексте.

устройствах. На рис. 7.30 показана микроденситограмма отклика, приведенного на рис. 7.29, который был получен в системе,

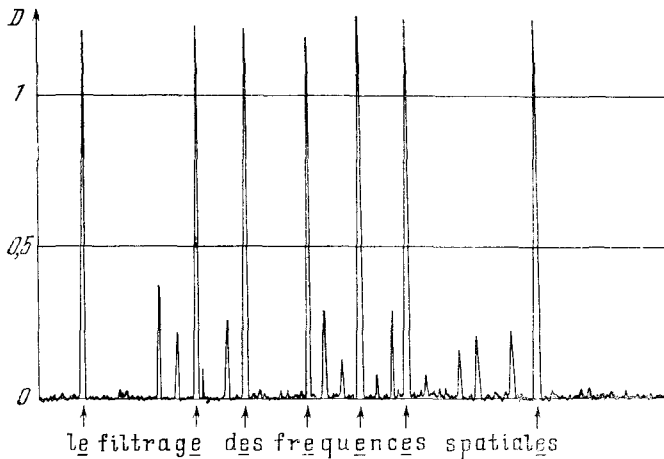


Рис. 7.31. Микроденситограмма сигнала в плоскости отклика оптической системы, aberrации, в которой были устранены. Из сравнения двух денситограмм (см. рис. 7.30) видно, что коэффициент отбора улучшился примерно в 4 раза.

обладающей оптическими aberrациями. На рис. 7.31 приведена микроденситограмма, полученная в системе, оптические aberrации в которой были устранены. Соотношение между оптическими плотностями сигнального и шумового откликов возросло почти в 4 раза.

### § 7-19. Допустимые сдвиги фильтра

До сих пор предполагалось, что согласованный фильтр установлен в строго заданное положение как по глубине, так и относительно оптической оси и правильно ориентирован относительно осей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ . В реальных устройствах возможны смещения по трем пространственным координатам, что ухудшает работу всего устройства. Этому эффекту подвержены системы, где происходит либо быстрая смена большого числа фильтров, либо их вращение.

Оценим допустимые поступательные поперечные и продольные сдвиги фильтра. На рис. 7.32 дана типичная схема оптической

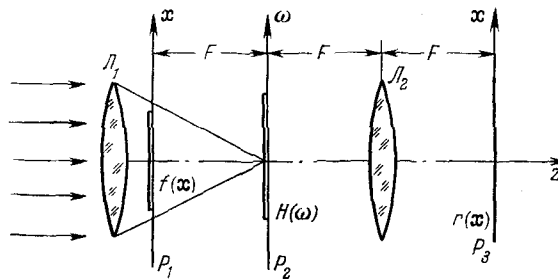


Рис. 7.32. Схема оптической фильтрации с помощью голографического фильтра  $H(\omega)$ .

фильтрации с помощью голографического фильтра. Фильтр  $H(\omega)$  искомого сигнала  $S(x)$  устанавливается в плоскости  $P_2$ . Линза  $L_2$  отображает отклик  $r(x)$ , являющийся фурье-образом сигнала

$$R(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega). \quad (7.19)$$

В общем случае согласованный фильтр имеет амплитудное пропускание

$$H(\omega) = CS^*(\omega) \frac{1}{|N(\omega)|^2}, \quad (7.19.2)$$

где  $S(\omega)$  — фурье-образ искомого сигнала  $s(x)$ ,  $|N(\omega)|$  — спектральная плотность шума  $n(x)$ , а  $\xi = (\lambda F/2\pi)\omega$ ,  $F$  — расстояние между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$ .

Рассмотрим для сокращения выкладок только одномерный случай. Если фильтр  $H(\omega)$  сместить вдоль координаты  $\omega_x$  в плоскости  $\omega(\omega_x, \omega_y)$  на величину  $\Delta\omega_x$ , то отклик системы станет равным функции неопределенности

$$r(x, \Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) H(\omega + \Delta\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (7.19.3)$$



состоящей из сигнальной части

$$r_s(x, \Delta\omega) = \frac{C}{2\pi} \int \frac{S(\omega) S^*(\omega + \Delta\omega)}{|N(\omega + \Delta\omega)|^2} e^{i\omega x} d\omega \quad (7.19.4)$$

и шумовой части

$$r_n(x, \Delta\omega) = \frac{C}{2\pi} \int \frac{N(\omega) S^*(\omega + \Delta\omega)}{|N(\omega + \Delta\omega)|^2} e^{i\omega x} d\omega. \quad (7.19.5)$$

Рассмотрим сначала случай, когда спектр шума однородный и равен  $N_0^2$ . Воспользовавшись теоремой свертки, найдем сигнальную часть отклика:

$$r_s(x, \Delta\omega) = \frac{C}{N_0^2} \int s(u) s^*(u+x) e^{-i\Delta\omega(u+x)} du. \quad (7.19.6)$$

Для того чтобы оценить эффект смещения согласованного фильтра на величину  $\Delta\omega$ , найдем среднеквадратичный шум:

$$\begin{aligned} \overline{|r_n(\Delta\omega)|^2} &= \frac{C^2}{(2\pi)^2} \int \frac{|N(\omega)|^2 |S(\omega + \Delta\omega)|^2}{|N(\omega + \Delta\omega)|^4} d\omega = \\ &= \frac{C^2}{(2\pi)^2 N_0^2} \int |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{C^2}{2\pi N_0^2} \int |s(u)|^2 du. \end{aligned} \quad (7.19.7)$$

Параметр, характеризующий качество системы, равен отношению интенсивности сигнальной части к среднеквадратичному шуму:

$$Q = \frac{|r_s|^2}{|r_n|^2} = \frac{|\int |s(u)|^2 e^{-i\Delta\omega u} du|^2}{|\int |s(u)|^2 du|^2}. \quad (7.19.8)$$

Значение сигнальной части отклика не зависит в общем случае от  $x$ , и поэтому без потери общности здесь взято значение  $x = 0$ .

Проанализируем зависимость параметра  $Q$  от сдвига  $\Delta\omega$  в наиболее неблагоприятном случае, а именно когда сигнал  $s(x)$  занимает всю апертуру линзы  $L_1$ , т. е. имеет вид

$$s(u) = \Pi_A(u). \quad (7.19.9)$$

Фурье-образ такого сигнала, равный

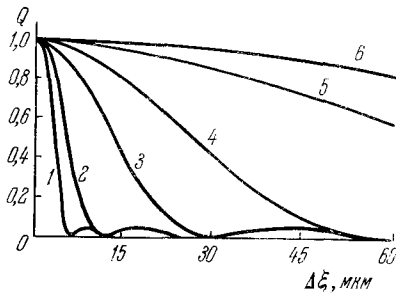
$$S(\omega) = \text{sinc} \frac{\omega A}{\pi}, \quad (7.19.10)$$

занимает наиболее узкую полосу в плоскости пространственных частот, а поэтому и эффект смещения такого фильтра скажется

сильнее всего. Параметр системы равен

$$Q_{\min} = \left| \int_{-A}^A \left( \frac{1}{2A} \right)^2 e^{-i\Delta\omega u} du \right|^2 = \frac{1}{4A^2} \text{sinc}^2(A\Delta\omega). \quad (7.19.11)$$

На рис. 7.33 приведены характерные зависимости параметра  $Q$  от  $\Delta\xi = (\lambda F/2\pi) \Delta\omega$  для  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  при различных угловых апертурах системы  $\alpha = A/F$ . Для  $\alpha = 10^{-2}$  смещение  $\Delta\xi = 26 \text{ мкм}$  вызывает уменьшение  $Q$  на 3 дб.



- |                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\frac{A}{F} = 100 (10^{-3})$ | 4. $\frac{A}{F} = 10 (10^{-3})$ |
| 2. $\frac{A}{F} = 50 (10^{-3})$  | 5. $\frac{A}{F} = 4 (10^{-3})$  |
| 3. $\frac{A}{F} = 20 (10^{-3})$  | 6. $\frac{A}{F} = 2 (10^{-3})$  |

Рис. 7.33. Зависимость параметра  $Q$  от величины  $\Delta\xi$  для  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  при различных угловых апертурах системы.

Эти результаты относятся к случаю, когда шум имеет равномерное спектральное распределение. В общем же случае шум  $N(\omega)$  сильно зависит от частоты  $\omega$  и допустимые сдвиги  $\Delta\xi$  оказываются гораздо меньшими, чем в случае, когда спектр шума однороден. Однако шум  $N(\omega)$  почти не зависит от номера кадра и его можно заменить некоторой усредненной характеристикой. Это обстоятельство позволяет разделить в пространстве сам согласованный фильтр, используя для этого две частотные плоскости. В первой частотной плоскости помещается фильтр, амплитудное пропускание которого равно

$$H_1(\omega) = \frac{C_1}{|N(\omega)|}. \quad (7.19.12)$$

На выходе первого фильтра сигнальная часть отклика имеет фурье-образ

$$S_1(\omega) = \frac{S(\omega)}{|N(\omega)|}, \quad (7.19.13)$$

а шумовая часть

$$N_1(\omega) = \frac{N(\omega)}{|N(\omega)|} = e^{i\nu(\omega)} \quad (7.19.14)$$

становится однородной по частоте.

Во второй частотной плоскости устанавливается второй фильтр, амплитудное пропускание которого согласовано с искаженным спектром частично отфильтрованного сигнала, т. е.

$$H_2(\omega) = C_2 S^*(\omega) \frac{1}{|N(\omega)|}. \quad (7.19.15)$$

Каскад из двух частотных фильтров эквивалентен обычному согласованному фильтру с амплитудным пропусканием

$$H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) = C_2 \frac{S^*(\omega)}{|N(\omega)|^2}. \quad (7.19.16)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, что достигается при таком разделении фильтра на две частотные плоскости (рис. 7.34).

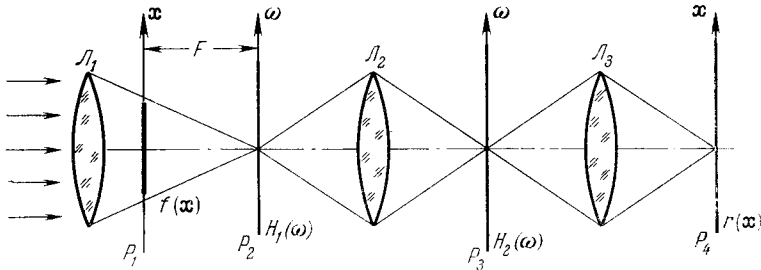


Рис. 7.34. Схема оптического коррелятора, основанного на использовании голографического фильтра, разнесенного на две частотные плоскости  $P_2$  и  $P_3$ . Допустимые смещения второго, подвижного фильтра  $H_2(\omega)$  становятся существенно большими.

Если первый фильтр установлен строго правильно, а второй — со смещением  $\Delta\omega$ , то сигнальная часть на выходе всей системы равна

$$r_s(x, \Delta\omega) = \frac{C}{2\pi} \int \frac{S(\omega) S^*(\omega + \Delta\omega)}{|N(\omega) N(\omega + \Delta\omega)|} e^{i\omega x} d\omega, \quad (7.19.17)$$

а среднеквадратичный шум

$$\overline{|r_n|^2} = \frac{C^2}{(2\pi)^2} \int \frac{|N(\omega)|^2 |S(\omega + \Delta\omega)|^2}{|N(\omega)|^2 |N(\omega + \Delta\omega)|^2} d\omega = \frac{C^2}{(2\pi)^2} \int \left| \frac{S(\omega)}{N(\omega)} \right|^2 d\omega \quad (7.19.18)$$

не зависит от  $\Delta\omega$  и его можно подсчитать при  $\Delta\omega = 0$ . Благодаря этому допустимое смещение второго фильтра  $H_2(\omega)$  оказывается близким к тем допустимым значениям, которые были найдены выше для равномерного спектра шумов  $N(\omega) = N_0$ . К числу недостатков системы с двумя частотными фильтрами следует

относит то обстоятельство, что эта система не позволяет производить изменения масштаба изображения.

Можно показать, что для типичных условий, когда угловая апертура мала ( $A/F \sim 10^{-2}$ ), протяжный механизм хорошего кинопроектора может обеспечить необходимую точность установки фильтра в сочетании с быстрой сменой фильтров.

Если  $m(t)$  — случайные поперечные смещения кадра в проекторе, то амплитудное пропускание изменяет во времени сигнальную часть отклика:

$$\begin{aligned} r_s[x, m(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) S^*(\omega + m(t)) e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \int s(u) s^*(u+x) e^{-i(u+x)m(t)} du, \end{aligned} \quad (7.19.19)$$

интенсивность которой при  $x = 0$  равна

$$|r_s[m(t)]|^2 = \left| \int |s(u)|^2 e^{-ium(t)} du \right|^2. \quad (7.19.20)$$

Отклик квадратичного детектора равен

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |r_s[m(t)]|^2 dt. \quad (7.19.21)$$

Предположив, что процесс случайных перемещений пленки является эргодическим, вычислим характеристическую функцию  $M_m(u)$  плотности вероятности  $P(m)$  случайного движения:

$$M_m(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T e^{ium(t)} dt = \int e^{-ium} P(m) dm. \quad (7.19.22)$$

Меняя порядок интегрирования в (7.19.21) и (7.19.20), находим

$$P(m) = \frac{\left| \int |s(u)|^2 M_m(u) du \right|^2}{\left| \int |s(u)|^2 du \right|^2}. \quad (7.19.23)$$

Если предположить, далее, что распределение  $P(m)$  характеризуется среднеквадратичным сдвигом  $\sigma$  и имеет вид

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (7.19.24)$$

то

$$M_m(u) = \frac{1}{2} e^{-2\pi \frac{\sigma^2 u^2}{\lambda^2 F^2}}, \quad (7.19.25)$$

а параметр

$$Q = \frac{\lambda^2 F^2}{8\pi 4A^2 \sigma^2} \operatorname{erf}^2 \left( \sqrt{2\pi} \frac{2A\sigma}{\lambda F} \right), \quad (7.19.26)$$

где

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (7.19.27)$$

Кривая  $Q = Q(A\sigma/F)$  приведена на рис. 7.35. Для  $A/F = 2,5 \cdot 10^{-3}$  и  $\sigma = 20$  мкм величина  $Q$  отлична от 1 только на 3 дб, что вполне допустимо.

Рассмотрим, наконец, продольные сдвиги, которые приводят к тому, что фильтр оказывается расположенным не в плоскости

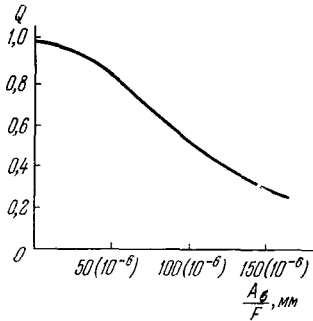


Рис. 7.35. Зависимость параметра  $Q$  от среднеквадратичного сдвига  $\sigma$  фильтра в кадре при разных угловых апертурах системы.

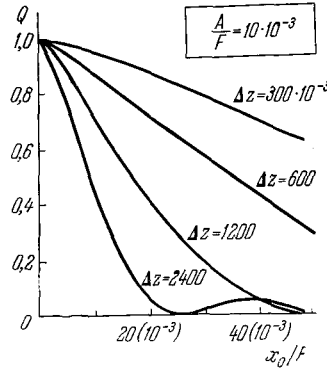


Рис. 7.36. Зависимость параметра  $Q$  от продольного сдвига при нескольких угловых апертурах системы.

картины Фурье, а лишь в плоскостях квази-Фурье. Для малых апертур продольные сдвиги дают небольшую потерю качества системы. Действительно, пусть  $2A$  — размер апертуры в плоскости  $P_1$  и пусть сигнал расположен на расстоянии  $x_0$  от оптической оси, а фильтр смещен вдоль оптической оси на величину  $\Delta z$ . Поскольку центр фурье-образа в частотной плоскости расположен на оптической оси, то при сдвиге фильтра на величину  $\Delta z$  спектр сместится относительно оси на величину

$$\Delta \xi = x_0 \frac{\Delta z}{F} \quad (7.19.28)$$

или

$$\Delta\omega = \left( \frac{2\pi x_0}{\lambda F^2} \right) \Delta z. \quad (7.19.29)$$

Подставив  $\Delta\omega$  в уравнение (7.19.8) для  $Q$ , находим зависимость  $Q$  от  $\Delta z$ . На рис. 7.36 показана эта зависимость для нескольких значений  $\Delta z$ . При  $A/F \sim 10^{-2}$  уменьшение  $Q$  на 3 дб наступает при  $\Delta z = 400$  мкм. Таким образом, неконтролируемые продольные смещения при малых апертурах гораздо менее опасны, чем поперечные.

### § 7-20. Некоторые схемы оптических устройств, используемых для изготовления согласованных фильтров

Рассмотрим типичные схемы интерферометров, используемых для получения согласованных фильтров.

**Интерферометр Маха — Цендера.** На рис. 7.37 приведена схема модифицированного интерферометра Маха — Цендера. В качестве точечного источника монохроматического света обычно

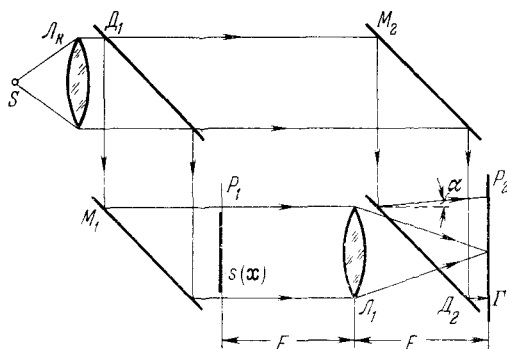


Рис. 7.37. Схема интерферометра Маха — Цендера, используемого для изготовления голографического согласованного фильтра. Транспарант с исходным сигналом  $s(x)$  помещается в передней фокальной плоскости линзы  $L_1$ , осуществляющей преобразование Фурье. Поворот полупрозрачного зеркала  $D_2$  определяет угол  $\alpha$  и несущую пространственную частоту на голограмме  $\Gamma$ .

используется ртутная лампа (спектральная линия 5461 Å), излучение которой выделяется тепловым фильтром и интерференционным монохроматором. Пучок коллимируется линзой  $L_K$  и затем раздваивается в светоделителе  $D_1$ . В нижний пучок, направляемый зеркалом  $M_1$ , в плоскости  $P_1$  помещается транспарант с сигналом  $s(x)$ . Линза  $L_1$  отображает в плоскости  $P_2$  фурье-образ  $S(\omega)$  этого сигнала. Верхний, опорный пучок направляется на плоскость  $P_2$  с помощью зеркала  $M_2$  и второго светоделителя  $D_2$ .

Опорный пучок наклонен под углом  $\alpha$  к сигнальному или предметному пучку, что позволяет получить голографический пространственный фильтр на фотопластинке, регистрирующей интенсивность

$$I(\omega) = |e^{i\omega x_0} + S(\omega)|^2. \quad (7.20.1)$$

Интерферометр Маха — Цендера обладает следующими недостатками. Сигнал  $s(x)$  должен быть установлен строго в плоскости  $P_1$ . В противном случае на голограмме регистрируется не фурье-образ, а квази-Фурье, т. е. фурье-образ, умноженный на функции Френеля. Интерференция функции Френеля с наклонным опорным пучком создает в фильтре смещенную относительно оси картину Френеля — Габора.

Другой недостаток интерферометра Маха — Цендера состоит в том, что при его нормальной работе оба пучка почти параллельны. Поскольку для регистрации сигнала  $s(x)$  больших размеров требуются большие углы между опорным и предметным пучками, то в интерферометре Маха — Цендера необходимо иметь очень большие апертуры.

**Интерферометр Рэлея.** Линза  $L_k$  (рис. 7.38) коллимирует монохроматический свет от точечного источника. Линза  $L_0$  фокусирует часть пучка в точку  $P_0$  на плоскости  $P_1$ , отстоящую от центра сигнала  $s(x)$ , который также установлен в плоскости  $P_1$ , на расстоянии  $x_0$ . Линза  $L_1$  осуществляет преобразование Фурье точечного источника  $P_0$  и сигнала  $s(x)$ . В плоскости  $P_2$  фотопластинка регистрирует интенсивность (7.20.1). В таком устройстве не важно, находится ли плоскость  $P_1$  в фокальной плоскости линзы  $L_1$  или нет, так как при преобразовании линзой  $L_1$  одинаковые функции Френеля приобретают как сигнал  $s(x)$ , так и точечный источник  $P_0$ . Это — как бы промежуточный случай между голограммой Фурье без линз и линзовой голограммой Фурье. Плоскость  $P_1$  удобнее всего размещать непосредственно перед линзой  $L_1$  либо, как указывалось выше, справа от линзы  $L_1$ .

Недостатком интерферометра Рэлея является то, что при больших углах между опорным и предметным пучками расстояния между  $s(x)$  и  $P_0$  растут, линза  $L_1$  используется только в своей периферической части, где разрешение минимально, а aberrации максимальны.

Сочетание элементов этих двух систем реализуется в специальном интерферометре, описываемом ниже.

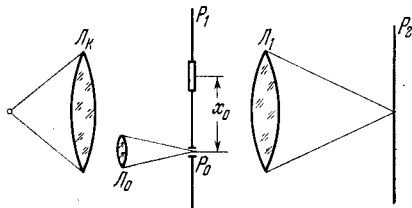


Рис. 7.38. Схема интерферометра Рэлея. Транспарант с исходным сигналом помещается в плоскости  $P_1$  на расстоянии  $x_0$  от точечного опорного источника  $P_0$ .

**Интерферометр Ван-дер-Люгта.** На рис. 7.39 приведена схема этого интерферометра. Коллимированный пучок расщепляется в светоделителе  $D_1$ . Прямой пучок проходит через линзу  $L_1$ , которая отображает на плоскости  $P_2$  фурье-образ сигнала  $s(x)$ , установленного в виде транспаранта в плоскости  $P_1$ . Нижний опорный пучок фокусируется линзой  $L_0$  в точку на плоскости  $P_3$ ,

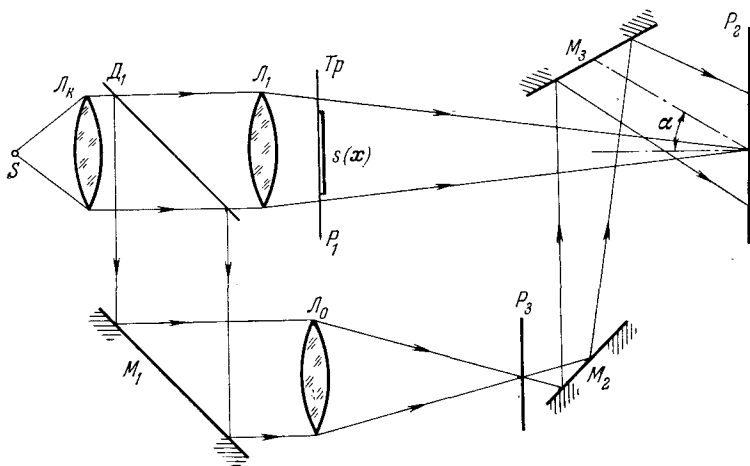


Рис. 7.39. Схема интерферометра Ван-дер-Люгта. Транспарант  $Tr$  с исходным сигналом помещается в сходящийся предметный пучок. Система, состоящая из линзы  $L_0$ , экрана с точечным отверстием  $P_3$ , зеркал  $M_1$  и  $M_2$ , позволяет формировать опорный пучок, который образует с предметным пучком угол  $\alpha$ , не ограниченный апертурой преобразующей линзы.

где установлена диафрагма с булавочным отверстием, чтобы поглотить шумы и паразитные отражения от светоделителя. С помощью двух зеркал  $M_2$  и  $M_3$  опорный пучок попадает на плоскость  $P_2$ , образуя с предметным пучком большой угол  $\alpha$ .

Такое устройство обладает рядом достоинств. Во-первых, все линзы имеют малые апертурные углы и полностью используют свет, идущий вблизи оси. Это ослабляет эффекты аббераций. Во-вторых, угол между опорным и предметным пучками легко сделать очень большим без необходимости увеличивать апертуру линз.

В заключение рассмотрим еще одну схему оптического коррелятора. Схема этого оптического коррелятора имеет вид, представленный на рис. 7.40. Точечный источник монохроматического света коллимируется линзой  $L_K$ , проходит через линзу  $L_1$  и освещает транспарант  $P_1$  сходящимся пучком света. В задней фокальной плоскости  $P_2$  линза  $L_1$  отображает фурье-образ транспаранта, масштаб которого зависит от расстояния  $L$  между транспарантом и плоскостью  $P_2$ . Голографический пространственный фильтр



помещается в плоскости  $P_2$ . Один прямой и два боковых пучка, создаваемые фильтром, преобразуются далее линзой  $L_2$  в обратные

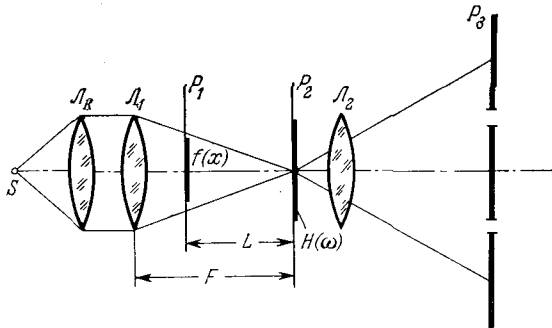


Рис. 7.40. Типичная схема оптического коррелятора, позволяющая изменять масштаб фурье-образа сигнала  $f(x)$ , который устанавливается в плоскости  $P_1$ . В плоскости  $P_3$  отображаются отклики, являющиеся сверткой или корреляцией входного и закодированного сигналов.

фурье-образы, которые наблюдаются в плоскости  $P_3$ . Для изменения масштаба транспарант  $P_1$ , линза  $L_2$  и плоскость  $P_3$  перемещаются вдоль оптической оси.

### § 7-21. Библиотека согласованных фильтров

На одной и той же фотопластинке можно записать несколько голографических фильтров и таким образом ускорить процесс корреляционной обработки. Такой метод пригоден для решения задач, не связанных с поиском сигналов произвольных ориентаций.

Оценим факторы, определяющие емкость библиотеки согласованных фильтров. Обратимся еще раз к пространственной структуре голограммы согласованного фильтра. Как уже отмечалось в главе 6, размер предмета и большое угловое поле предмета могут быть переданы голограммой, зарегистрированной в фотоэмульсии с высокой разрешающей способностью, а требуемое разрешение по предмету может быть достигнуто при больших размерах голографического фильтра. Соответствующие параметры определяют величину несущей частоты голограммы.

Пусть голографический фильтр регистрирует интенсивность

$$I(\omega) = |e^{i\omega x_0} + S(\omega)|^2 = 1 + |S(\omega)|^2 + S^* e^{i\omega x_0} + S e^{-i\omega x_0}. \quad (7.21.1)$$

При освещении его сигналом  $F(\omega)$  амплитуда волны на выходе равна

$$R(\omega) = F(\omega) + F(\omega)|S(\omega)|^2 + F(\omega)S^*(\omega)e^{i\omega x_0} + F(\omega) \cdot S(\omega)e^{-i\omega x_0}, \quad (7.21.2)$$

а отклик на выходной плоскости имеет вид

$$r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \otimes s(\mathbf{x}) \otimes s^*(-\mathbf{x}) + \\ + f(\mathbf{x}) \otimes s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}) \otimes s^*(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0). \quad (7.21.3)$$

Для того чтобы эти четыре слагаемых не перекрывались друг с другом, необходимо вектор  $\mathbf{x}_0$  выбрать достаточно большим. Найдем минимальное значение  $x_0$ . Пусть размер сигнала  $f(\mathbf{x})$

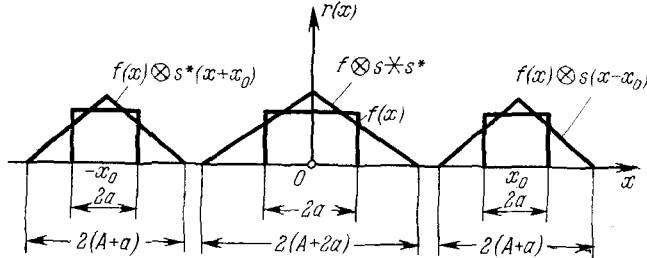


Рис. 7.41. Пространственная структура сигнала на выходе голографического согласованного фильтра. Исходный сигнал  $s(x)$  занимает пространственные частоты шириной  $2a$ . Входной сигнал  $f(x)$  занимает в спектре полосу шириной  $2A$ .

равен  $2A$ , а сигнала  $s(x)$  равен  $2a$ . В результате свертки  $f(x) \otimes s(x)$  размер сигнала возрастает до величины  $2(A+a)$ . Размер центрального пучка определяется максимальным размером первого или второго слагаемого в (7.21.3). Размер первого слагаемого равен  $2A$ , а размер второго равен  $2A + 2a + 2a = 2(A+2a)$ . Отсюда следует, что расстояние  $x_0$  должно удовлетворять неравенству (рис. 7.41)

$$|x_0| \geq A + 2a + A + a = 2A + 3a,$$

т. е.

$$|x_0| \geq 2 \left( A + \frac{3}{2} a \right). \quad (7.21.4)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

I. Пусть  $a \ll A$ . В этом случае размер искомого предмета  $s(x)$  значительно меньше размера всего сообщения  $f(x)$ , т. е. ширины кадра. Тогда

$$|x_0|_{\text{I}} \geq 2A, \quad (7.21.5)$$

т. е. несущая частота определяется в основном размером кадра.

II. Пусть  $a \approx A$ , т. е. размер искомого предмета  $s(x)$  равен размеру всего кадра. Этот случай реализуется в многоканальных системах, когда сообщение зависит только от одной координаты и занимает весь кадр. Здесь

$$|x_0|_{\text{II}} \geq 5A, \quad (7.21.6)$$

т. е. существенно выше, чем в первом случае.

III. Несущую частоту фильтра можно несколько уменьшить, значительно увеличив интенсивность опорного пучка по сравнению с предметным. Тогда

$$r(x) \simeq f(x) + f(x) \otimes [s(x - x_0) + s^*(x + x_0)], \quad (7.21.7)$$

т. е. ширина центрального пика равна  $2A$ . Выбор  $x_0$  подчиняется условию

$$|x_0|_{III} \geq (2A + a). \quad (7.12.8)$$

Если  $a \approx A$ , то

$$|x_0|_{III} \geq 3A, \quad (7.12.9)$$

т. е. достигается выигрыш в 1,67 раза по сравнению со случаем II, где интенсивности опорного и предметного пучков были примерно одинаковыми.

Переходя к двумерной области, нужно приписать сообщению  $s(x)$  два размера:  $2a_x$  вдоль оси  $x$  и  $2a_y$  вдоль оси  $y$ . Тогда при переходе от фильтра  $S_i(\omega)$  к фильтру  $S_{i+k}(\omega)$  необходимо изменить вектор  $x_0$ , задающий несущую пространственную частоту и ориентацию интерференционных полос соответствующей голограммы согласованного фильтра. Пространственная структура отклика  $r(x)$  будет в этом случае состоять из неперекрывающихся областей, соответствующих откликам  $r_i(x)$  каждого из фильтров  $S_i(\omega)$ . Минимальные пространственные частоты, определяемые вектором  $x_0(j, k)$ , должны выбираться исходя из очевидных требований

$$\left. \begin{aligned} |x_0(j, k+1) - x_0(j, k)| &\geq 2A_x + a_x(j, k+1) + a_x(j, k), \\ |y_0(j+1, k) - y_0(j, k)| &\geq 2A_y + a_y(j+1, k) + a_y(j, k), \end{aligned} \right\} \quad (7.21.10)$$

где  $2A_x, 2A_y$  — размеры входного кадра вдоль осей  $x$  и  $y$ ,  $2a_x(j, k), 2a_y(j, k)$  — размеры  $(j, k)$ -го сигнала вдоль осей  $x$  и  $y$ .

### § 7-22. Емкость библиотеки согласованных фильтров

Сколько согласованных фильтров можно накопить на одной голограмме? Для того чтобы оценить это число, необходимо иметь исходные данные об интенсивности паразитных боковых пучков, возникающих в условиях, когда на голограмме полностью отсутствует какая-либо преднамеренно созданная интерференционная микроструктура. По аналогии с радиосистемами эти эффекты принято называть шумами.

Решим сначала задачу, полностью пренебрегая эффектами шумов. Пусть  $\xi_{\max}$  — максимальная пространственная частота, эффективно регистрируемая фотоэмульсией. Если размер искомого сообщений  $s_i(x)$  занимает лишь небольшую часть кадра ( $a \ll A$ ,

см. случай I в § 7-21), то минимальное расстояние между соседними площадками равно

$$\Delta x_0 \sim 2A_x, \quad \Delta y_0 \sim 2A_y.$$

Этим площадкам в силу принципа неопределенности соответствуют элементарные шаги по пространственной частоте

$$\frac{2\pi}{\lambda F} \Delta \xi_x = \Delta \omega_x \sim \frac{1}{2A_x} \quad \text{и} \quad \Delta \omega_y \sim \frac{1}{2A_y} = \frac{2\pi}{\lambda F} \Delta \xi_y.$$

Тогда полное число фильтров, уместяющихся на голограмме, равно по порядку величины

$$N_0 \sim n_x n_y \sim \left( \frac{\xi_{\text{макс}}}{\Delta \xi} \right)^2 = \frac{8\pi^2}{(\lambda F)^2} (\xi_{\text{макс}} A)^2. \quad (7.22.1)$$

Однако размер сообщения  $s_i(x)$ , занимающего небольшую часть кадра, нельзя сделать произвольно малым, так как при чрезмерном его уменьшении возникнут настолько высокие пространственные частоты, что они не попадут на голограмму, имеющую размеры  $2\Phi$ . Отсюда возникает определенная связь между размером сообщения  $2a$ , размером кадра  $2A$  и максимальной пространственной частотой  $\omega_0$ , содержащейся в том исходном сообщении  $s_i(x)$ , размеры которого равны полному кадру. Пусть  $m$  — коэффициент уменьшения, характеризующий соотношение между  $a$  и  $A$ :

$$m = \frac{A}{a}. \quad (7.22.2)$$

Наивысшая пространственная частота при уменьшении сообщения до размеров  $2a$  возрастает до  $m\omega_0$ . Коэффициент уменьшения определяется угловой апертурой, стягиваемой голограммой. При этом

$$\lambda m \omega_0 \leq \frac{\Phi}{F}, \quad (7.22.3)$$

$a$  — минимальная ширина, требуемая для записи таких сигналов, равна

$$\Delta \omega_x = \Delta \omega_y = \omega_0 \frac{A}{\Phi}. \quad (7.22.4)$$

Тогда число фильтров, которое можно записать на одной голограмме, равно

$$N_I \sim n_x n_y = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\xi_{\text{макс}}}{\Delta \omega} \right)^2, \quad (7.22.5)$$

где множитель  $1/2$  учитывает тот факт, что любая область  $s_i$  имеет своего двойника, расположенного симметрично относительно опорного пучка. Таким образом,

$$N_0 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\xi_{\text{макс}} \Phi}{\omega_0 A} \right) = \frac{\pi \xi_{\text{макс}}^2}{2} \left( \frac{\Phi^2}{\omega_0^2 A^2} \right). \quad (7.22.6)$$

Произведение  $\xi_{\text{макс}} \Phi$  называется произведением максимальной пространственной частоты на размер голограммы вдоль одной из координатных осей. Произведение максимальной частоты на размер голограммы для одного фильтра равно  $\omega_0^2 A^2$ . Поэтому соотношение (7.22.6) можно интерпретировать так. Для того чтобы определить число независимых сообщений, которые может передать канал, характеризующийся определенным значением произведения максимальной частоты на размер сигнала, необходимо разделить произведение, составленное из частоты и размера канала на произведение из частоты и размера отдельного сообщения.

Оптические системы характеризуются очень высоким значением этого произведения, достигающим значения около  $10^{12}$ , которое на несколько порядков величин превышает параметры электронных систем.

До сих пор предполагалось, что размер сообщения во входной плоскости пренебрежимо мал по сравнению с размером кадра или линзы, осуществляющей преобразование Фурье. Это имеет место в системах, когда во входной плоскости устанавливается только одно сообщение и накопление фильтров происходит путем последовательного экспонирования. При этом пространственная частота и ориентация получающейся интерференционной картины изменяются от одного экспонирования к другому. Как уже отмечалось выше, кросс-корреляционные площадки полностью разделяются, если выбрать определенный шаг по двум углам, задающим взаимное расположение предметного и опорного пучков. Однако такой прием совершенно непрактичен, когда стоит задача записать предельно максимальное число фильтров. Кроме того, такой прием неудовлетворителен еще и потому, что не учитывает шумов фотоэмulsionи.

Здесь необходимо использовать метод получения сложного фильтра путем регистрации при одном экспонировании сразу нескольких сообщений. Эти  $M$  сообщений занимают теперь некоторый участок плоскости  $P_1$  диаметром  $2\Phi_0$  (где  $\Phi_0 < \Phi_1$ ), что меняет оптимальный коэффициент уменьшения исходных сообщений. Теперь

$$m \leq (\Phi - \Phi_0) \frac{1}{F \lambda \omega_0}. \quad (7.22.7)$$

Количество сообщений  $M$ , уместяющихся одновременно на круге площадью  $\pi\Phi_0^2$ , равно

$$M = \frac{\pi\Phi_0^2}{\left(\frac{A}{m}\right)^2}. \quad (7.22.8)$$

Решая систему (7.22.7) и (7.22.8) совместно, находим

$$m \leq \frac{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - 4F\lambda\omega_0 A} \sqrt{\frac{M}{\pi}}}{f\lambda\omega_0}. \quad (7.22.9)$$

Значение  $M_{\text{макс}}$  находим из условия сохранения положительного знака выражения под корнем, а именно:

$$\sqrt{M_{\text{макс}}} = \frac{\sqrt{\pi} \Phi^2}{4F\lambda\omega_0 A}. \quad (7.22.10)$$

Далее находим

$$\Delta\xi = \frac{A}{\lambda F} = \frac{A\omega_0}{\Phi} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{M}{M_{\text{макс}}}}}}}. \quad (7.22.11)$$

Полное число фильтров  $N$  равно

$$N = \frac{\pi\xi_{\text{макс}}^2 \Phi^2}{8A^2\omega_0^2} \left[ 2 + 2\sqrt{1 - \sqrt{\frac{M}{M_{\text{макс}}}} - \sqrt{\frac{M}{M_{\text{макс}}}}} \right]. \quad (7.22.12)$$

Если  $M = 1$  и в кадре при экспонировании устанавливается только одно сообщение, то

$$N \approx \frac{\pi\xi_{\text{макс}}^2 \Phi^2}{2A^2\omega_0^2} = N_0,$$

т. е. получаем соотношение (7.22.6). Если же  $M = M_{\text{макс}}$  и во входной плоскости установлено максимально возможное число сообщений, то

$$N = \frac{N_0}{4}.$$

Таковы оценки, относящиеся к условиям, когда шумами фотоэмульсии можно полностью пренебречь. В реальных же условиях интенсивность отдельного сообщения, перенесенного в плоскость голограммы, должна превышать уровень шума. Ограничение

на число сообщений теперь уже определяется динамическим диапазоном фотоэмульсии. Сумма средних интенсивностей отдельных интерференционных картин ограничивается той интенсивностью, которая приводит к полному почернению фотоэмульсии.

При записи фурье-образов отдельных сообщений очень выгодно использовать прием, который состоит в предварительном выравнивании спектра пространственных частот и уменьшении низких и нулевой частот фурье-образа. Процедура, очень близкая к этому приему, осуществляется в методе дифференцирования сигналов, когда в частотной плоскости устанавливается дополнительный фильтр, пропускающий высокие пространственные частоты и задерживающий низкие частоты, а также нулевую пространственную частоту, вызывающую среднюю засветку. В общем случае выравнивающий фильтр не обязательно должен иметь поглощение, описываемое, например, степенной зависимостью, а должен быть подобран исходя из фактического соотношения низких и высоких пространственных частот.

Определим теперь емкость голографического фильтра с учетом шумов. Интенсивность, регистрируемая на голограмме, равна

$$I(x) = |Be^{-i\omega x} + \sum_k g_k(x)|^2 = \\ = B^2 + \sum_i \sum_k g_i g_k^* + Be^{-i\omega x} \sum_k g_k^* + Be^{i\omega x} \sum_k g_k. \quad (7.22.13)$$

Важна только средняя интенсивность, равная

$$I_0 = B^2 + \sum_k |g_k|^2 = B^2 + n |\bar{g}|^2, \quad (7.22.14)$$

где для упрощения рассмотрения принимается

$$\frac{1}{n} \sum_k |g_k|^2 = |\bar{g}|^2 \approx [|\bar{g}|]^2. \quad (7.22.15)$$

Если ввести вспомогательную величину

$$K = B |\bar{g}|, \quad (7.22.16)$$

которая зависит от заданного отношения сигнала к шуму, то

$$I_0 = B^2 + n \left( \frac{K}{B} \right)^2.$$

Минимизируем среднюю интенсивность:

$$\frac{\partial I_0}{\partial B} = 2B - 2n \frac{K^2}{B^3} = 0,$$

$$B^2 = K \sqrt{n}, \quad (7.22.17)$$

откуда

$$\overline{|g|} = \frac{K}{B} = \sqrt{\frac{K}{\sqrt{n}}},$$

$$I_{0 \text{ мин}} = 2K\sqrt{n}. \quad (7.22.18)$$

Определим амплитуду сигнала и шума в выходной плоскости на стадии распознавания. Найдем сначала амплитудное пропускание фотопластинки. Пусть

$$t(x) = \begin{cases} 1 - bI(x), & I(x) \leq \frac{1}{b}, \\ 0, & I(x) > \frac{1}{b}. \end{cases} \quad (7.22.19)$$

Величина  $b$  определяет динамический диапазон фотоэмульсии.

Переменная составляющая амплитудного пропускания, создающая один из боковых пучков на стадии распознавания, запишется в виде

$$t^I(x) = -b \sum_k g_k^* B e^{i\omega x}. \quad (7.22.20)$$

Освещающий фильтр волной  $u(x)$  и рассматривая корреляцию волны  $u$  с одним из сообщений  $g_k$ , получим амплитуду этой компоненты

$$[u(x) t^I(x)]_k = -bu(x) g_k^* B e^{i\omega x}, \quad (7.22.21)$$

распределение интенсивности

$$I_k = |u(x)|^2 b^2 B^2 |g_k|^2$$

и полную интенсивность

$$E_0 = \sum_k I_k = \int |u(x)|^2 b^2 B^2 |g_k|^2 dx \approx$$

$$\approx b^2 \overline{|g|^2} B^2 \int |u|^2 dx = b^2 |g|^2 B^2 E_u, \quad (7.22.22)$$

где  $E_u$  — полная интенсивность волны  $u(x)$ .

Интенсивность  $I_{\text{кор}}$  в корреляционном пятне можно определить из полной интенсивности и площади корреляционного пятна, равной  $a^2$ . Имеем

$$I_{\text{кор}} \approx F_1 b^2 g^2 B^2 \frac{E_u}{a^2}, \quad (7.22.23)$$

где  $F_1$  — формфактор, учитывающий тот факт, что распределение интенсивности на площадке  $a^2$  неравномерное. Соответствующая амплитуда корреляционного сигнала равна

$$S = \sqrt{F_1} b |g| B \frac{\sqrt{E_u}}{a}. \quad (7.22.24)$$



Подсчитаем теперь амплитуду шума. Полная интенсивность шума равна

$$I_{\text{ш}} = R_0 (\Delta\xi)^2 \frac{I_u}{A^2}, \quad (7.22.25)$$

где  $R_0$  — константа, характеризующая свойства среды и равная доле дающей световой энергии, рассеянной под углом, падающей на единицу площади элементарной площадки  $(\Delta\xi)^2$  в плоскости пространственных частот. Для  $\Delta\xi = A/F\lambda$  интенсивность шума равна

$$I_{\text{ш}} = R_0 I_u \frac{1}{\lambda^2 F^2}, \quad (7.22.26)$$

а амплитуда

$$N \sim \frac{\sqrt{R_0 I_u}}{\lambda F}. \quad (7.22.27)$$

Отношение интенсивностей сигнальной и шумовой частей равно отношению соответствующих амплитуд:

$$\kappa = \frac{|S|^2}{2|S||N|} = \frac{|S|}{2|N|} \quad (|S| \gg |N|). \quad (7.22.28)$$

Используя (7.22.24) и (7.22.27), находим отношение интенсивностей сигнала и шума:

$$\kappa = \sqrt{F_1} \cdot b \cdot |g| \cdot B\lambda F \frac{1}{2\sqrt{R_0 a}}, \quad (7.22.29)$$

а также константу  $K$ :

$$K = \frac{2\kappa \sqrt{R_0} \Delta\xi}{\sqrt{F_1} b}. \quad (7.22.30)$$

Минимальное значение постоянной составляющей амплитудного пропускания голограммы равно

$$t_{0\text{ мин}} = 1 - 2bK\sqrt{n} = 1 - 4\kappa \cdot \Delta\xi \frac{\sqrt{R_0 n}}{\sqrt{F_1}}. \quad (7.22.31)$$

а полное число фильтров

$$N = \frac{(t_{0\text{ мин}} - 1)^2 F_1}{16\kappa^2 (\Delta\xi)^2 R_0}. \quad (7.22.32)$$

Таково выражение для числа фильтров, которые можно накопить на одной голограмме при заданном отношении интенсивностей сигнала и шума  $\kappa$ .

Оставаясь в пределах линейной области идеализированной характеристической кривой фотоэмульсии, следует принять  $t_{0 \text{ мин}} \simeq 0,5$ . Для случая  $p$  экспонирований полное число фильтров уменьшается в  $p$  раз:

$$N = \frac{1}{p} \frac{(t_{0 \text{ мин}} - 1)^2 F_1}{16\kappa^2 (\Delta\xi) R_0}. \quad (7.22.33)$$

Ширина площадки  $\Delta\xi$  зависит от числа фильтров  $M$ , одновременно регистрируемых за одно экспонирование. Однако поскольку эта зависимость достаточно слабая, то ширину площадки  $\Delta\xi$  можно взять при  $M = M_{\text{макс}}$ . Тогда полная емкость голограммы будет равна

$$N = \frac{1}{p} \frac{(t_{0 \text{ мин}} - 1)^2 F_1 \Phi^2}{256\kappa^2 R_0 A^2 v_0^2}. \quad (7.22.34)$$

Отметим, что  $N$  уменьшается обратно пропорционально квадрату отношения интенсивности сигнала к шуму на выходе  $\kappa$ . В качестве примера рассмотрим систему, характеризующуюся следующими параметрами:  $F = 48 \text{ см}$ ;  $\Phi = 6 \text{ см}$ ;  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ;  $a = 0,3 \text{ см}$ ;  $v_0 = 10 \text{ л/мм}$ ;  $\xi_{\text{макс}} = 800 \text{ л/мм}$ ;  $\kappa = 100$  (заданное отношение сигнала к шуму), что соответствует точности измерений около 1%.

Для системы, свободной от шумов, согласно уравнению (7.22.12) полное число фильтров при  $M = 1$  равно  $N = 10^6$ , а при  $M = M_{\text{макс}}$  оно равно  $N = 2,5 \cdot 10^6$ . При этом  $M_{\text{макс}} = 1910$ . При наличии шумов для  $R_0 = 6 \cdot 10^{-9}$  эмпирическая константа  $F_1 = 36$ , а максимальное число фильтров при одновременной регистрации всех фильтров ( $M = M_{\text{макс}}$ ) равно  $N = 2340$ . Таким образом, наличие шумов снижает емкость на три порядка.

### § 7-23. Некогерентные системы оптической обработки информации

На рис. 7.42 приведена схема некогерентного оптического коррелятора. Исходные функции  $f(\mathbf{x})$  и  $h(\mathbf{x})$  вводятся в систему в виде транспарантов с соответствующим пропусканием по интенсивности, т. е. в виде сигналов интенсивности. В плоскости  $P_1$  расположен протяженный источник диффузного немонахроматического света. Транспарант  $f(\mathbf{x})$  устанавливается в плоскости  $P_2$ , а транспарант  $h(\mathbf{x})$  — в плоскости  $P_3$ . Луч света, вышедший из точки  $\mathbf{x}_1$  на плоскости  $P_1$ , проходит через точку  $\mathbf{x}_2$  на плоскости  $P_2$  и ослабляется в  $f(\mathbf{x}_2)$  раз. Этот луч далее проходит через транспарант  $h(\mathbf{x})$  в точке  $(-\mathbf{x}_3)$  и ослабляется дополнительно в  $h(-\mathbf{x}_3)$  раз. Линзы  $L_1$  и  $L_2$  установлены на расстоянии  $F$  от плоскости  $P_1$  и  $P_4$  соответственно. Расстояние между плоскостями

$P_2$  и  $P_3$  равно  $q$ . Используя подобие треугольников

$$\frac{x_4}{f} = \frac{x_2 + x_3}{q}, \quad \frac{y_4}{f} = \frac{y_2 + y_3}{q}, \quad (7.23.1)$$

определим интенсивность света в точке  $x_4$  на плоскости  $P_4$ . Эта

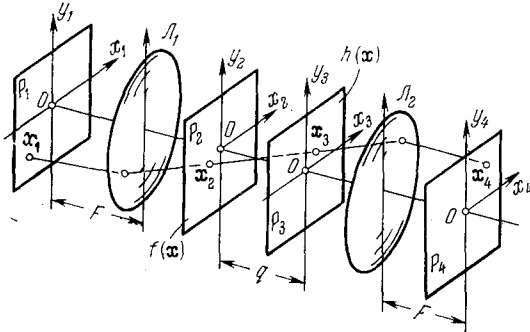


Рис. 7.42. Схема оптического коррелятора при некогерентном освещении. Исходные функции  $f(x)$  и  $h(x)$  вводятся в систему в виде сигналов интенсивности. Используется протяженный источник диффузного немонахроматического света.

интенсивность равна сумме интенсивностей всех параллельных лучей:

$$r(x_4) = \int f(x_2) h\left(-x_2 + x_4 \frac{q}{f}\right) dx_2, \quad (7.23.2)$$

или, в более удобной записи,

$$r(x) = \int f(x - u) h(u) du = f \otimes h. \quad (7.23.3)$$

Таким образом, сигнал интенсивности, возникающий в плоскости  $P_4$ , равен свертке двух функций  $f$  и  $h$ . Для получения сигнала кросс-корреляции второй транспарант следует повернуть на  $180^\circ$  в плоскости транспаранта, так что

$$h(x) = s(-x). \quad (7.23.4)$$

Тогда распределение интенсивности на выходе будет равно

$$r(x) = \int f(u) s(x + u) du. \quad (7.23.5)$$

Если

$$f(x) = s(x), \quad h(x) = s(-x), \quad (7.23.6)$$

то на выходной плоскости отображается сигнал автокорреляции.

На рис. 7.43 показана другая схема оптического коррелятора при некогерентном освещении. Функция корреляции отображается в фокальной плоскости линзы  $L_1$ . При этом масштабы исходных сигналов интенсивности должны отличаться в  $f/q$  раз, если  $q$  — расстояние между плоскостями, где установлены транспаранты с исходными функциями  $f(x)$  и  $h(x)$ .

С помощью простых геометрических построений можно показать, что изображение в плоскости  $P_4$  описывается сигналом интенсивности

$$f_1(x) = f(x) \int h(x+x') g(x') dx', \quad (7.23.7)$$

если линза  $L_2$  осуществляет отображение функции  $f(x)$  из плоскости  $P_1$  на плоскость  $P_4$ . Здесь  $g(x')$  — сигнал интенсивности,

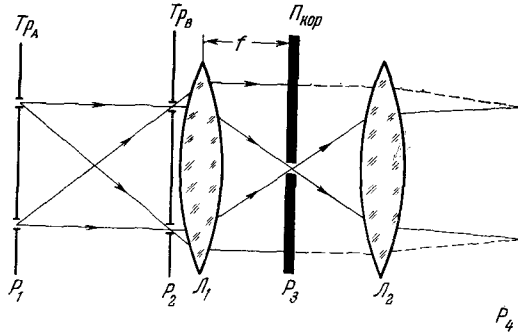


Рис. 7.43. Схема еще одного оптического коррелятора при некогерентном освещении. Параллельные лучи света фокусируются линзой  $L_1$  в одну точку, расположенную в плоскости  $P_{кор}$ . Лучам разного наклона отвечает различный сдвиг между транспарантами  $TP_A$  и  $TP_B$ . Установленный в плоскости  $P_{кор}$  непрозрачный экран с малым отверстием осуществляет отбор желаемой компоненты двухмерной функции корреляции или ее сканирование. Линза  $L_2$  осуществляет обратное преобразование Фурье. В отсутствие непрозрачного экрана в плоскости  $P_{кор}$  линза  $L_2$  отображает в плоскости  $P_4$  функцию  $TP_A$ .

создаваемый транспарантом в плоскости  $P_3$  и имеющий смысл функции пространственного фильтра. Если, например,

$$g_0(x) = \delta(x - x_0), \quad (7.23.8)$$

т. е. фильтр представляет собой малую диафрагму, помещенную на плоскости  $P_3$  в точку  $x_0$ , то

$$f_1(x) = f(x) h(x + x_0). \quad (7.23.9)$$

Подобные схемы оптических корреляторов при некогерентном освещении могут быть использованы для решения задач пространственной фильтрации. Однако всем этим системам свойственны принципиальные недостатки. Все они основаны на геометрической оптике, и при больших расстояниях  $q$  (рис. 7.42) возникает плохое пространственное разрешение из-за дифракции света.

Существенный недостаток корреляторов, использующих некогерентное некогерентное освещение, состоит в том, что исходные функции должны быть униполярными.

Другой недостаток некогерентных корреляторов — зависимость сигнала корреляции от положения исходных сигналов — может быть устранен, так что система становится пригодной для

решения задачи распознавания образов. В одном из вариантов это достигается путем преобразования сигнала, при когерентном освещении, из предметной плоскости в плоскость пространственных частот и последующей фильтрации с помощью некогерентной маски. Корреляционное сравнение двух функций  $f_n(x)$  и  $f_m(x)$  описывается матрицей

$$K_{nm} = f(0) = \int_{x=0} f_n(x') f_m(x + x') dx' = \int f_n f_m dx. \quad (7.23.10)$$

В плоскость пространственных частот вводится матрица

$$B_{nm}(x=0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{x=0} F_n(\omega) F_m^*(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (7.23.11)$$

Из теоремы Парсеваля следует, что

$$K_{nm} = B_{nm}, \quad (7.23.12)$$

т. е. обе эти операции совершенно равноценны. Принцип действия схем, приведенных на рис. 7.44, сводится к следующему. В случае

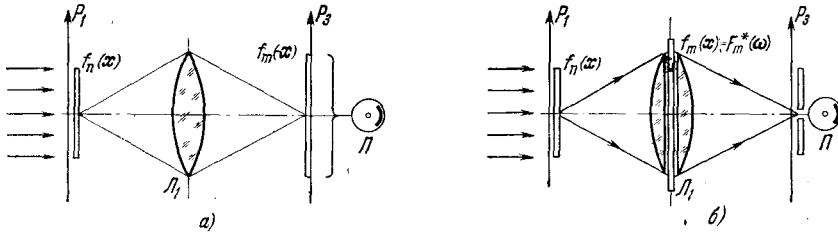


Рис. 7.44. Оптические системы корреляционного сравнения двух функций. а) Функции  $f_n(x)$  и  $f_m(-x)$  заданы в виде транспарантов в плоскостях  $P_1$  и  $P_3$  с соответствующими пропусканиями по интенсивности. Изображающая линза  $L_1$  проектирует функцию  $f_n(x)$  из плоскости  $P_1$  на плоскость  $P_3$ . Фотоприемник  $\Pi$  суммирует полную интенсивность света. б) Функция  $f_n(x)$  отображается на входном транспаранте в плоскости  $P_1$ . Изображающая линза  $L_1$  обладает передаточной функцией, равной согласованному фильтру второй функции  $f_m(x)$ , т. е.  $F_m^*(\omega)$ . Фотоприемник  $\Pi$  регистрирует только нулевую пространственную частоту, т. е. среднее значение. В силу теоремы Парсеваля обе системы дают один и тот же результат.

рис. 7.44, а первая из сравниваемых функций,  $f_n(x)$ , устанавливается в плоскости  $P_1$ , а вторая функция,  $f_m(-x)$ , — в плоскости  $P_3$ . Линза  $L_1$  выполняет функции изображающей системы и проектирует функцию  $f_n(x)$  из плоскости  $P_1$  на плоскость  $P_3$ , где представлена функция  $f_m(-x)$ . Освещение некогерентное. Фотоприемник  $\Pi$  суммирует полную интенсивность света, и его отклик равен  $K_{nm}$ .

В случае согласованного фильтра (рис. 7.44, б) сигнал  $f_n(x)$  изображается в плоскости  $P_3$  с помощью линзы  $L_1$ , имеющей передаточную функцию, совпадающую с согласованным филь-

тром  $F_m^*(\omega)$ . В пространстве  $P_2 \div P_3$  линза  $L_1$  совершает обратное преобразование Фурье произведения  $F_n(\omega)$  на  $F_m^*(\omega)$ . В плоскости  $P_3$  устанавливается точечная диафрагма, пропускающая в фотоприемник только среднее значение, т. е. нулевую пространственную частоту.

Для того чтобы достигнуть инвариантности отклика относительно поступательного перемещения сигнала во входной плоскости, используется предварительный каскад с когерентным освещением (рис. 7.45). Исходный сигнал с амплитудным пропусканием

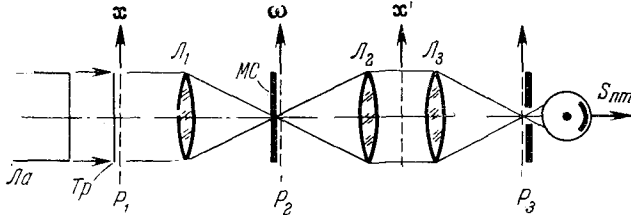


Рис. 7.45. Схема предварительного каскада с использованием когерентного освещения. Транспарант  $Tr$  с исходным сигналом в виде амплитудного пропускания  $u_n(x_0)$  освещается коллимированным пучком лазера  $La$ . Линза  $L_1$  осуществляет преобразование Фурье. Оптический сигнал  $U_n(\omega)$  в плоскости  $\omega$  создает сигнал интенсивности, не зависящий от возможных поступательных перемещений исходного оптического сигнала  $u_n(x_0)$  в плоскости  $P_1$ . После быстро вращающегося матового стекла  $MS$  следует некогерентная система преобразования.

$u_n(x_0)$  освещается параллельным пучком от лазера. Линза  $L_1$  осуществляет преобразование Фурье, и оптический сигнал  $u_n(x_0)$  преобразуется в оптический сигнал  $U_n\left(\frac{x}{\lambda f}\right)$ , причем

$$U_n\left(\frac{x}{\lambda f}\right) = \int u_n(x_0) e^{-i \frac{2\pi x x_0}{\lambda f}} dx_0. \quad (7.23.13)$$

Функция  $U_n\left(\frac{x}{\lambda f}\right)$  обладает тем свойством, что сигнал интенсивности, который получается в плоскости  $x$ , не зависит от возможных поступательных перемещений исходного оптического сигнала  $u_n(x_0)$  на плоскости  $P_1$ . Для того чтобы фазовый множитель, сохраняющийся в когерентной системе вплоть до плоскости  $x$ , не мог проявиться, когерентную систему преобразуют в некогерентную. Это достигается с помощью матового стекла  $MS$ , которое быстро вращается в плоскости  $x$ . Некогерентный согласованный фильтр, устанавливаемый в плоскости  $\xi$ , характеризуется функцией зрачка  $p_m(\xi)$ , которой отвечает передаточная функция

$$T_m(v) = \int p_m\left(x' + \frac{\lambda f v}{2}\right) p_m^*\left(x' - \frac{\lambda f v}{2}\right) dx'. \quad (7.23.14)$$

Задача нахождения функции зрачка по заданной передаточной функции  $T_m(\nu)$  не проста. Однако одно из решений этой обратной задачи можно найти следующим образом. Сигнал интенсивности в плоскости  $x'$

$$J_n(x) = \left| U_m \left( \frac{x}{\lambda f} \right) \right|^2, \quad (7.23.15)$$

равный квадрату функции  $U_m$ , превращается в его фурье-образ

$$J_n^*(\nu) = \int J_n(x) e^{i2\pi\nu x} dx, \quad (7.23.16)$$

который можно преобразовать:

$$J_n^*(\nu) = \int u_m \left( x_0 + \Delta x + \frac{\lambda f \nu}{2} \right) u_m^* \left( x_0 + \Delta x - \frac{\lambda f \nu}{2} \right) dx_0, \quad (7.23.17)$$

где  $\Delta x$  — произвольный сдвиг. Сравнивая (7.23.14) и (7.23.17), находим одно из решений:

$$p_m(x') = u_m(x' + \Delta x), \quad (7.23.18)$$

где  $\Delta x$  произвольно.

Таким образом, функция зрачка  $p_m(x')$  определяется тем амплитудным пропусканием, каким обладает система исходных

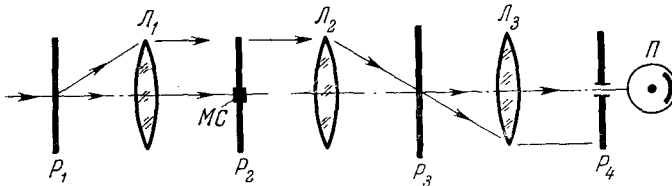


Рис. 7.46. Схема, поясняющая ход лучей при двойной дифракции света в некогерентной системе обработки.

образов  $u_m(x_0)$ . При этом поместить их можно в произвольном месте  $\Delta x$  в плоскости фильтра.

Проще всего изготовить маску зрачка  $p_m(x')$  для бинарных образов, когда функция пропускания  $u_n(x)$  имеет вид прозрачного выреза на темном фоне.

Подобная гибридная система согласованной фильтрации при некогерентном освещении и когерентном каскаде на входе может решать задачу распознавания образов, если только нормированные коэффициенты  $K_{nm} \leq 1$ , где  $K_{nm} = S_{nm}^*/S_{nn}$ .

Для того чтобы повысить коэффициент отбора, в систему в плоскости матового стекла  $MC$  вводится поглощающий экран очень маленького размера (рис. 7.46), который блокирует прямой свет, не испытавший двойной дифракции. На рис. 7.47 показаны изображения, получаемые в выходной плоскости установки без экрана

и с экраном в виде круговой диафрагмы диаметром 1 мм, а также в виде букв А и В.

Сопоставляя характеристики когерентных и некогерентных систем, можно сделать вывод о явных преимуществах когерентных систем. Основное из них заключается в том, что, вводя высокочастотную пространственную несущую и используя голографический принцип, можно осуществить корреляционное сравнение любых сигналов, описываемых в общем случае комплекснозначными функциями. В противоположность этому некогерентные системы могут обрабатывать только униполярные сигналы.

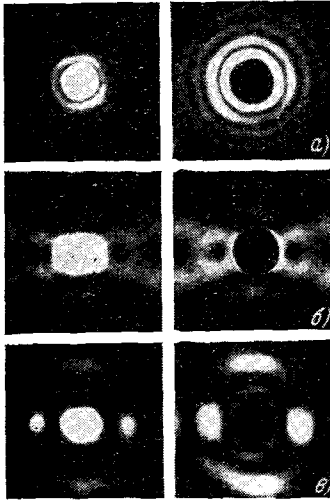


Рис. 7.47. Влияние поглощающего экрана, установленного в центре плоскости  $P_2$ , на коэффициент отбора. Экран поглощает нулевые пространственные частоты. Слева показаны пространственные спектры. Справа — те же спектры позади поглощающего экрана. а) Круговая диафрагма диаметром 1 мм; б) буква А; в) буква В.

переход от фурье-образа  $U(\omega)$  к фурье-образу  $V(\omega)$ . Пространственный фильтр-транслятор характеризуется амплитудным пропусканием

$$T(\omega) = \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, \quad (7.24.1)$$

так что при освещении его волной  $U(\omega)$  от предмета  $u(x)$  на выходе появляется волна

$$U(\omega) T(\omega) = U(\omega) \cdot \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = V(\omega), \quad (7.24.2)$$

равная фурье-образу функции  $v(x)$ . Операция деления (7.24.1) осуществляется путем сведения ее к двум операциям умножения:

### § 7.24. Двухмерный транслятор

Достоинства голографического фильтра наиболее ярко проявляются в системах фильтрации методом дифференцирования исходных сигналов, уже разобранных выше, а также в устройствах, выполняющих функцию трансляций. При этом в отличие от известных логических трансляторов, реализуемых с помощью электронно-вычислительных машин, голографическая трансляция осуществляется одновременно в двух измерениях.

Рассмотрим задачу трансляции предмета  $u(x)$  в предмет  $v(x)$ . Операция ведется в плоскости пространственных частот  $\omega$ , где совершается



либо по схеме

$$T(\omega) = \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \frac{VU^*}{|U|^2} \simeq VU^* \quad (|U|^2 \approx \text{const}), \quad (7.24.3)$$

либо по схеме

$$T(\omega) = VU^* = \frac{|U|^2 \cdot V}{U^*} \quad (|U|^2 \approx \text{const}). \quad (7.24.4)$$

При этом предполагается, что спектр пространственной мощности  $|U|^2$  мало меняется с частотой.

Эксперименты с двухмерным транслятором были выполнены как с обычными, так и с искусственными голограммами. При этом в расчетах искусственной голограммы-транслятора спектр пространственной мощности  $|U|^2$  мог быть произвольным.

Единственная трудность при вычислении и затем нанесении

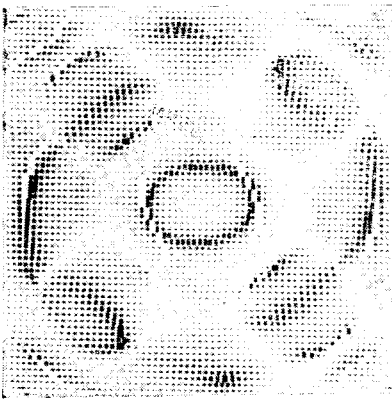


Рис. 7.48. Вид искусственной голограммы — двухмерного транслятора.

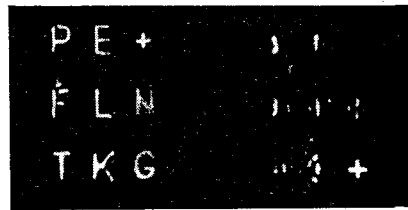


Рис. 7.49. Матрица различных букв латинского алфавита (слева) и результат действия двухмерного транслятора (рис. 7.48) на эту матрицу (справа). Отчетливо виден знак +, в который была переведена буква G.

искусственной голограммы-транслятора возникает для тех ячеек, где  $|U|$  очень мала или равна нулю. В программах, выполненных в реальных экспериментах, вводится обрезание, выравнивающее значение  $|T|$ , когда оно превышает 10. Такая операция обрезания касается не более 5% всех ячеек голограммы, распределенных по голограмме достаточно случайно. В описываемом здесь примере голографический двухмерный транслятор осуществлял операцию переключения буквы G в знак +.

Искусственная голограмма-транслятор состояла из  $64 \cdot 64$  ячеек. Амплитуда  $T(\omega)$  изображалась высотой окна в ячейке, а фаза — путем сдвига окна из его центрального положения.

На рис. 7.48 показана искусственная голограмма-транслятор, а на рис. 7.49 — результаты ее действия — переключения буквы

Г в знак +. Двухмерный транслятор, изготовленный на обычной голограмме, состоит фактически из двух фильтров. Сначала изготавливается обычный негатив, на который наносится интенсивность света в плоскости Фурье первого предмета, т. е.  $|U|^2$ .

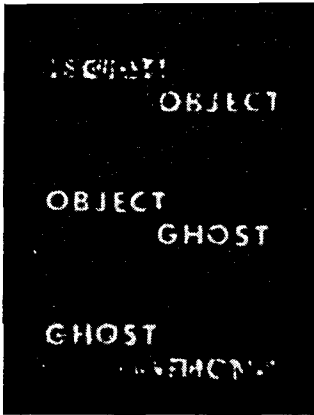


Рис. 7.50. Результат действия двухмерного транслятора, состоящего из голограммы Фурье и компенсирующего негатива. На фотографии приведены результаты действия двухмерного транслятора, настроенного на переход ОБЪЕКТ → GHOST. В центре — изображения, направляемые на голографический транслятор. Внизу — первый порядок дифракции, соответствующий волне  $v(x)$ . Слово ОБЪЕКТ трансформировалось в слово GHOST. Слово GHOST перешло в «фон». Вверху — первый порядок дифракции, соответствующий волне  $u(x)$ , искаженной множителем  $|V/U|^2$ . Видно, что здесь произошла обратная трансформация GHOST → ОБЪЕКТ, результат которой вполне приемлем для случая бинарных предметов.

В амплитудном пропускании (7.24.6) содержится также слабое

$$\dots + \frac{UV^*}{|U|^2} e^{-i\omega x_0} = \dots + \left(\frac{V}{U}\right)^* e^{-i\omega x_0} = \dots + \frac{U}{V} \frac{|V|^2}{|U|^2} e^{-i\omega x_0}, \quad (7.24.7)$$

соответствующее волне, которая распространяется в направлении  $-x_0$ . Поэтому при освещении голограммы (7.24.6) волной  $V(x)$  от второго предмета на выходе ее в направлении  $-x_0$  появится

После проявления до контрастности  $\gamma = +2$  получается транспарант, пропускание которого по амплитуде равно  $|U|^2$ . Затем получают голограмму волны, состоящей из фурье-образов первого  $u(x)$  и второго  $v(x)$  предметов, разнесенных друг от друга на расстояние  $x_0$ . Амплитудное пропускание этой голограммы равно

$$|U + Ve^{i\omega x_0}|^2 = \dots + U^* V e^{i\omega x_0} + \dots \quad (7.24.5)$$

Амплитудное пропускание системы из двух фильтров, негативного и голограммного, равно

$$\dots + \frac{U^* V}{|U|^2} e^{i\omega x_0} = \dots + \frac{V}{U} e^{i\omega x_0}. \quad (7.24.6)$$

Голограмма-транслятор (7.24.6) обладает желаемыми свойствами и при освещении его волной  $U$  от первого предмета создает волну от второго предмета  $V$ , которая распространяется в направлении  $x_0$ . Чтобы получить ответ  $v(x)$ , необходимо совершить обратное преобразование Фурье.

волна от первого предмета

$$U \frac{|V|^2}{|U|^2} e^{-i\omega x_0}, \quad (7.24.8)$$

искаженная множителем  $|V/U|^2$ . Этот множитель влияет только на распределение интенсивности и не деформирует сам волновой фронт (рис. 7.50).

Таким образом, голографический транслятор, изготовленный для осуществления прямой трансляции предмета  $u(x)$  в предмет  $v(x)$ , приближенно осуществляет также обратную трансляцию предмета  $v(x)$  в предмет  $u(x)$ .

### § 7-25. Временной голографический фильтр

До сих пор голограмма рассматривалась как пространственный фильтр, способный восстанавливать исходные предметы, отфильтровывать нежелательные пространственные структуры и выполнять двухмерную трансляцию.

Голограмму можно получить также и в поле бегущей интерференционной картины, если использовать принцип синхронного линейного детектирования. Обратное, голограмма сама может выполнять функцию *временного фильтра*, пропуская или задерживая соответствующие временные компоненты излучения, — как на стадии получения голограммы, выбирая только стоячую интерференционную картину, так и на стадии восстановления, выполняя здесь функцию временного фильтра при когерентном или некогерентном освещении.

Рассмотрим стадию получения голограммы в поле монохроматического излучения при продолжительности экспонирования, равной  $T$  сек. Предположим, что опорный пучок не зависит от времени:

$$u_0 = u(x), \quad (7.25.1)$$

а оптический сигнал предметного пучка зависит от времени явно:

$$u_{II} = u(x, t). \quad (7.25.2)$$

Суммарная интенсивность равна

$$I(x) = I_0(x) + \int_{-T/2}^{T/2} |u(x, t)|^2 dt + \\ + u_0(x) \int_{-T/2}^{T/2} u^*(x, t) dt + u_0^*(x) \int_{-T/2}^{T/2} u(x, t) dt. \quad (7.25.3)$$

Вводя прямоугольный импульс длительностью  $T$ :

$$\Pi_{T/2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (7.25.4)$$

запишем последнее слагаемое в (7.25.3) так:

$$\begin{aligned} u_0^*(\mathbf{x}) \int_{-T/2}^{T/2} u(\mathbf{x}, t) dt &= u_0^*(\mathbf{x}) T \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{T/2}(t) u(\mathbf{x}, t) dt = \\ &= u_0^*(\mathbf{x}) T \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(T\nu) \cdot U_t(\mathbf{x}, \nu) d\nu, \end{aligned} \quad (7.25.5)$$

где

$$U_t(\mathbf{x}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{x}, t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (7.25.6)$$

— временной фурье-образ  $u(\mathbf{x}, t)$ . Таким образом, эффект включения на время продолжительностью  $T$  эквивалентен линейной фильтрации с временной передаточной функцией

$$H_t(\nu) = \text{sinc } T\nu = \frac{\sin \pi T\nu}{\pi T\nu}. \quad (7.25.7)$$

Это означает, что если оптическая частота излучения предметного пучка отличается по всей голограмме от оптической частоты опорного пучка на  $\nu$ , то амплитуда соответствующих изображений будет подавлена на голограмме в  $\text{sinc } T\nu$  раз.

Механическое колебание предметов, которые регистрируются с помощью голограммы, также приводит к подавлению амплитуд соответствующих точек предмета. Пусть, например, точка  $\mathbf{x}_0$  плоского предмета колеблется с частотой  $\omega = 2\pi\nu$  в направлении оси  $z$ , нормально к плоскости предмета, с амплитудой  $A(\mathbf{x}_0)$  и распределением фаз  $\Phi(\mathbf{x}_0)$ . Колебания точки предмета создают фазовые модуляции волны света. Фазовая модуляция определяется выражением

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{2\pi}{\lambda} A_{\perp}(\mathbf{x}_0) \cos[\omega t + \Phi(\mathbf{x}_0)], \quad (7.25.8)$$

где

$$A_{\perp}(\omega) = A(\mathbf{x}_0) (\cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

Здесь  $\theta_1$  — угол между вектором смещения точки  $\mathbf{x}_0$  и вектором, соединяющим точку  $\mathbf{x}_0$  с точкой  $\mathbf{x}$ ,  $\theta_2$  — угол между вектором смещения точки  $\mathbf{x}_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  в точке  $\mathbf{x}_0$ . В таких

условиях предметный пучок имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{i\Phi(\mathbf{x}, t)}. \tag{7.25.9}$$

Его временной фурье-образ  $U_t(\mathbf{x}, \nu)$ , как обычно, можно представить в виде ряда по функциям Бесселя:

$$U_t(\mathbf{x}, \nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k[A_{\perp}(x_0)] \delta\left(\nu - k \frac{\omega}{2\pi}\right). \tag{7.25.10}$$

Если длительность экспозиции значительно больше периода колебаний, т. е.  $T \gg 2\pi/\omega$ , то временная передаточная функция  $\text{sinc } T\nu$  пропустит только несущую частоту  $k = 0$ . Если вариации глубины модуляции, обусловленные  $\cos \theta_1$ , практически не зависят от  $\mathbf{x}$ , т. е. угол, стягиваемый голограммой в точке  $x_0$ , мал, то амплитуда изображения  $x_0$  будет подавлена множителем

$$J_0 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) m(x_0) \right].$$

Колебания точки  $x_0$  не обязательно должны быть линейными и синусоидальными. Достаточно, чтобы они происходили с постоянной основной частотой.

Свойства голограммы выполнять функцию временного фильтра оказывается плодотворными при наблюдении колеблющихся и вращающихся тел. Однако сдвиг каждой точки вращения предмета за время экспонирования не должен превышать размера разрешающего элемента по предмету. В этих условиях пространственная когерентность при экспонировании не нарушится, а скажется только эффект доплеровского смещения, который можно анализировать экспериментально с помощью голограммы. Пусть на рис. 7.51  $P_1$  — рассматриваемая точка предмета, а  $P_2$  — точка на голограмме. Если  $\psi$  — угол между вектором  $P_1P_2$  и вектором скорости точки  $P_1$ , то доплеровское смещение, наблюдаемое в точке  $P_2$ , равно

$$\nu_d = \frac{2\rho\Omega \cos \psi}{\lambda}, \tag{7.25.11}$$

где  $\rho$  — расстояние от точки  $P_1$  до оси вращения тела,  $\Omega$  — угловая скорость вращения.

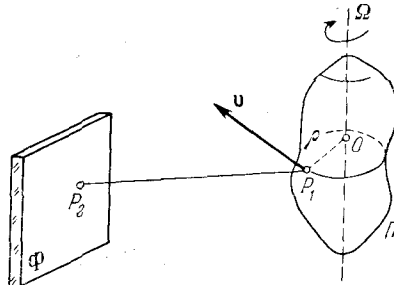


Рис. 7.51. Эффект доплеровского смещения частоты точки  $P_1$  предмета  $\Pi$ , вращающегося при голографировании вокруг оси  $О$ .

В этом случае амплитуда восстановленного изображения уменьшается в

$$\text{sinc } T_{v_d} = \text{sinc} \left( 2T\rho \frac{\Omega \cos \psi}{\lambda} \right) \quad (7.25.12)$$

раз. Если преднамеренно сместить оптическую частоту опорной волны на  $\Delta v$ , то четко восстановятся только те точки предмета, радиальная скорость которых заключена в интервале

$$a) \quad \frac{\lambda}{2} \left( \Delta v - \frac{1}{T} \right) < v_R < \frac{\lambda}{2} \left( \Delta v + \frac{1}{T} \right). \quad (7.25.13)$$

В реальном опыте можно ввести  $N$  опорных источников с различными оптическими частотами, но взаимно когерентными между собой. При подходящем пространственном разнесении опорных источников голограмма восстановит  $N$  различных изображений, каждое из которых отображают различные значения скоростей точек предмета.

### § 7-26. Корреляционное сравнение двух сигналов

Кроме корреляционного сравнения двух сигналов с помощью согласованного голографического фильтра, корреляционное сравнение двух сигналов можно осуществить также, одновременно поместив их в предметную плоскость так, чтобы они были разнесены друг от друга и не перекрывались. Этот метод корреляционного сравнения двух сигналов весьма близок к схеме получения обобщенной голограммы, при которой опорный пучок явно не исполь-

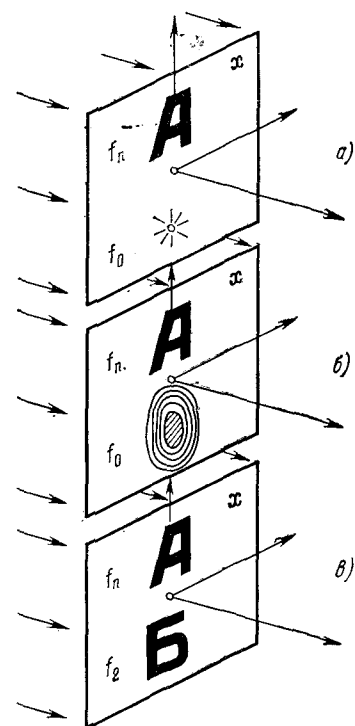


Рис. 7.52. Основные вехи эволюции корреляционного сравнения двух оптических сигналов. а) Сравнение сигнала  $f_n$  с точечным опорным источником  $f_0$ ; б) сравнение сигнала  $f_n$  с протяженным опорным источником  $f_0$ , автовертка или автокорреляция которого равна двумерной дельта-функции; в) сравнение сигнала  $f_n$  с сигналом  $f_2$ . Понятие опорного сигнала потеряло смысл. Обобщенная схема голографии.

зуется. Основные вехи эволюции этого метода иллюстрируются на рис. 7.52. За исходную схему принята схема получения голограммы Фурье с использованием точечного опорного источ-

ника. Далее источник превращается в протяженный. Наиболее типичная его форма — зонная картина Френеля. Переход к обобщенной схеме совершается при замене опорного пучка на опорный предмет. Здесь сигналы  $f(x)$  и  $g(x)$  становятся равноправными, и различие между опорным пучком и опорным предметом исчезает.

Рассмотрим метод корреляционного сравнения сигналов без помощи согласованного фильтра. Пусть исходный сигнал  $f(x)$  смещен от центра предметного кадра на вектор  $\mathbf{a}$ , а  $g(x)$  — на вектор  $\mathbf{c}$ . Для простоты предположим, что преобразование Фурье осуществляется линзой  $L$  с фокусным расстоянием  $f_1$ . Пусть

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathfrak{F}} \\ f(x) \rightarrow F(\omega) = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}, \\ \hat{\mathfrak{F}} \\ g(x) \rightarrow G(\omega) = B(\omega) e^{i\theta(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.26.1)$$

Распределение интенсивности в частотной плоскости  $\omega$  описывается функцией

$$\begin{aligned} I(\omega) &= |A e^{i\Phi} \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{a}\omega} + B e^{i\theta} \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{c}\omega}|^2 = \\ &= (A^2 + B^2) + AB [e^{i(\Phi - \theta + \alpha - \beta)} + e^{-i(\Phi - \theta + \alpha - \beta)}], \end{aligned} \quad (7.26.2)$$

где

$$\alpha - \beta = K(\mathbf{a} - \mathbf{c})\omega, \quad K = \frac{2\pi}{\lambda f_1}. \quad (7.26.3)$$

Обобщенная голограмма  $I(\omega)$  содержит информацию о корреляции функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Функцию кросс-корреляции наблюдают при просвечивании голограммы (7.26.2) плоским пучком когерентного света. При обратном преобразовании Фурье на выходной плоскости  $\mathbf{r}$  появляется сигнал

$$J(\mathbf{r}) = \hat{\mathfrak{F}}^{-1} [I(\omega)]. \quad (7.26.4)$$

Функцию  $J(\mathbf{r})$  удобно разбить на три слагаемых:

$$\left. \begin{aligned} J_1(\mathbf{r}) &= \hat{\mathfrak{F}}^{-1} [A^2 + B^2], \\ J_2(\mathbf{r}) &= \hat{\mathfrak{F}}^{-1} [AB e^{i(\Phi - \theta)}], \\ J_3(\mathbf{r}) &= \hat{\mathfrak{F}}^{-1} [AB e^{-i(\Phi - \theta)}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.26.5)$$

Введя вектор  $\mathbf{m}$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \beta &= C\mathbf{m}\omega = K(\mathbf{a} - \mathbf{c})\omega, \\ C &= \frac{2\pi}{\lambda_2 f_2}, \quad \mathbf{m} = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \frac{\lambda_2 f_2}{\lambda_1 f_1}, \end{aligned} \right\} \quad (7.26.6)$$

получим

$$J(\mathbf{r}) = J_1(\mathbf{r}) + J_2(\mathbf{r} + \mathbf{m}) + J_3(\mathbf{r} - \mathbf{m}). \quad (7.26.7)$$

Все три компоненты  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  оказываются разделенными на плоскости  $\mathbf{r}$ . Из (7.26.5) следует, что боковые компоненты  $J_2$  и  $J_3$  имеют смысл функций корреляции:

$$\left. \begin{aligned} J_2(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{x}) * g^*(\mathbf{x}), \\ J_3(\mathbf{r}) &= f^*(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (7.26.8)$$

Рассмотрим свойства сигналов  $J_2$  и  $J_3$  для некоторых частных случаев. Пусть, например, сигналы  $f(\mathbf{x})$  и  $g(\mathbf{x})$  имеют общую часть  $f_1 = g_1$ , где

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} A_1 e^{i\Phi_1} + A_2 e^{i\Phi_2}, \\ g(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} B_1 e^{i\theta_1} + B_2 e^{i\theta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.26.9)$$

Тогда амплитуда в плоскости  $\omega$  равна

$$u(\omega) = A_1 e^{i(\Phi_1 + \alpha_1)} + A_2 e^{i(\Phi_2 + \alpha_2)} + B_1 e^{i(\theta_1 + \beta_1)} + B_2 e^{i(\theta_2 + \beta_2)}. \quad (7.26.10)$$

При этом величины  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  определяют смещение от центра кадра сигналов  $f_1$ ,  $f_2$  и  $g_1$ ,  $g_2$  соответственно. Однако равенство сигналов  $f_1 = g_1$  совсем не означает равенства векторов  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . Одна из боковых компонент равна

$$\begin{aligned} J_2(\mathbf{r} + \mathbf{m}) &= \hat{\mathfrak{F}}^{-1}[I(\omega)] = \hat{\mathfrak{F}}^{-1}[A_1 B_1 e^{i(\Phi_1 - \theta_1 + \alpha_1 - \beta_1)} + \\ &+ A_1 B_2 e^{i(\Phi_1 - \theta_2 + \alpha_1 - \beta_2)} + A_2 B_1 e^{i(\Phi_2 - \theta_1 + \alpha_2 - \beta_1)} + A_2 B_2 e^{i(\Phi_2 - \theta_2 + \alpha_2 - \beta_2)}]. \end{aligned} \quad (7.26.11)$$

Учитывая, далее, наличие общей части в сигналах  $f$  и  $g$ :

$$f_1 = g_1, \quad A_1 e^{i\Phi_1} = B_1 e^{i\theta_1}, \quad (7.26.12)$$

находим окончательный вид первого слагаемого выражения (7.26.11):

$$A_1 e^{i\Phi} A_1 e^{-i\Phi} e^{i(\alpha_1 - \beta_1)} = |F_1(\omega)|^2 e^{i(\alpha_1 - \beta_1)}, \quad (7.26.13)$$

которое после обратного преобразования Фурье описывает в выходной плоскости  $\mathbf{r}$  сигнал

$$\hat{\mathfrak{F}}^{-1}[|F_1|^2 e^{i(\alpha_1 - \beta_1)}] = f_1(\mathbf{r}) * f_1^*(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{m}_1 = \frac{(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1)K}{c}}, \quad (7.26.14)$$

смещенный от центра кадра на вектор  $\mathbf{m}_1$ . Остальные слагаемые (7.26.11) образуют сигналы кросс-корреляции  $f_1 * g_2^*$ ,  $f_2 * g_1^*$



и  $f_2 * g_2^*$ , смещенные на

$$m_2 = \frac{(a_1 - c_2)K}{c}, \quad m_3 = -m_2 \quad \text{и} \quad m_4 = \frac{(a_2 - c_2)K}{c}$$

соответственно. Максимальной интенсивностью обладает автокорреляция совпадающих сигналов  $f_1$  и  $g_1 = f_1$ . В том случае, если эти общие компоненты сигналов  $f$  и  $g$  составляют подавляющую их часть, то на выходной плоскости преобладает пик автокорреляции  $f_1 * f_1^*$ .

Если, наконец, оба сигнала  $f$  и  $g$  полностью идентичны, т. е.

$$f(x) = g(x), \quad (7.26.15)$$

то на выходной плоскости  $\Gamma$  появятся четыре сигнала корреляции:

$$f_1 * f_1^*, \quad f_1 * f_2^*, \quad f_1^* * f_2, \quad f_2 * f_2^*,$$

удаленные от центра кадра на  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$  соответственно. Можно, далее, доказать, что

$$m_2 - m_1 = m_4 - m_3. \quad (7.26.16)$$

Таким образом, второй и третий корреляционные пики отстоят от первого пика на одинаковом расстоянии. Перенесем начало координатной системы  $\Gamma$  в один из двух главных корреляционных пиков, например на вектор  $(-m_1 = c_1 - a_1)$ . Учитывая соотношение (7.26.16), а также тот факт, что сигналы  $f$  и  $g$  тождественны друг другу и

$$a_2 - a_1 = c_2 - c_1, \quad (7.26.17)$$

находим векторы, определяющие положение корреляционных пиков в новой системе координат:

$$\left. \begin{aligned} m_1^0 &= m_1 - m_1 = 0, \\ m_2^0 &= m_2 - m_1 = (a_1 - c_2) - (a_1 - c_1) = c_1 - c_2, \\ m_3^0 &= m_3 - m_1 = m_4 - m_2 = (a_2 - c_2) - (a_1 - c_2) = \\ &= a_2 - a_1 = c_2 - c_1 = -m_2^0, \\ m_4^0 &= m_4 - m_1 = (a_2 - c_2) - (a_1 - c_1) = \\ &= (a_2 - c_2) - (a_2 - c_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.26.18)$$

Таким образом,

— корреляционные пики  $f_1 * f_1^*$  и  $f_2 * f_2^*$  расположены в начале координат;

— корреляционные пики  $f_1 * f_2^*$  и  $f_1^* * f_2$  расположены симметрично относительно пиков  $f_1 * f_1^*$  и  $f_2 * f_2^*$ ;

— суммарная картина интенсивности от корреляционных пиков  $f_1 * f_2^* + f_1^* * f_2$  описывается четной функцией  $\Gamma$ .

Отсюда вытекает следующее правило: факт неравенства функций  $f$  и  $g$  проявляется в отсутствии симметрии суммарной интер-

ференционной картины, наблюдаемой на стадии просвечивания обобщенной голограммы. Однако данное правило является нестрогим, и можно получить неверное заключение, если функции  $f$  и  $g$  являются четными, но имеют такие общие части, что на плоскости  $g$  наблюдается большой корреляционный пик и симметричное распределение интенсивности относительно основного пика корреляции.

Если функция  $f$  содержит в себе шум  $g$ , то на выходе наблюдается функция автокорреляции шума  $g(x) * g^*(x)$ ,<sup>9</sup> перенесенная



Рис. 7.53. Пример корреляционного сравнения левого поля изображения с правым. На рис. б) показан корреляционный отклик, указывающий место расположения буквы  $\delta$  на левом поле.

на вектор  $m_1$ , и функция корреляции  $f(x) * g^*(x)$  между сигналом и шумом (рис. 7.53).

Достоинство описанного выше метода корреляционного сравнения двух сигналов заключается в том, что сравниваемые функции появляются во входном кадре одновременно, в отличие от метода согласованного фильтра, где эти сигналы вносятся во входной кадр на разных ступенях.

### § 7-27. Перераспределение информационных степеней свободы

В главе 5 при рассмотрении информационной структуры оптического сигнала было доказано, что информационным инвариантом оптического сигнала является *полное число степеней свободы*

$$N_0 = 2N_{xy} \cdot N_t, \quad (7.27.1)$$

равное произведению числа *пространственных степеней свободы*

$$N_{x,y} = \left[ 1 + \frac{2A_x}{\left(\frac{\lambda}{2\alpha_x}\right)} \right] \left[ 1 + \frac{2A_y}{\left(\frac{\lambda}{2\alpha_y}\right)} \right] \quad (7.27.2)$$

на число *временных степеней свободы*

$$N_t = 2 (1 + \Delta\nu \cdot T). \quad (7.27.3)$$

Дополнительный множитель 2 в (7.27.1) обусловлен наличием двух независимых состояний поляризации световой волны.

Не меняя полного числа информационных степеней свободы, определяемого апертурой зрачка, размером самого предмета,

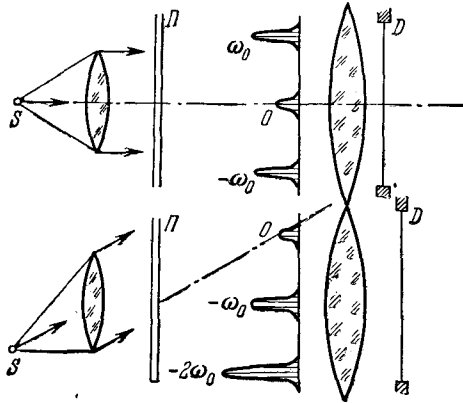


Рис. 7.54. Схемы прямого и косо когерентного освещения предмета  $P$  и изменение положения спектра пространственных частот относительно апертуры зрачка  $D$ .

длительностью опыта и спектром временных частот, можно, используя метод пространственной фильтрации изображений, перераспределять информационные степени свободы и добиться повышения разрешающей способности, превышающей классический предел.

Подобные операции осуществляются путем апостериорной обработки оптической информации с помощью дифракционных решеток либо диафрагм с определенной функцией пропускания.

Рассмотрим наиболее типичный метод перераспределения информационных степеней свободы, с помощью которого увеличение пространственной разрешающей способности по предмету достигается ценой пропорционального уменьшения эффективного поля предмета.

На рис. 7.54 показаны схемы прямого и косо когерентного освещения предмета. Как известно, размеры зрачка определяют наивысшие пространственные частоты, которые пропускаются через оптическую систему. Если зрачок имеет вид прямоугольника, то при освещении предмета плоской волной, распространяющейся параллельно оптической оси, в изображающую систему пройдут пространственные частоты  $\omega (\omega_x, \omega_y)$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$|\omega_x| \leq \omega_{x \text{ макс}}, \quad |\omega_y| \leq \omega_{y \text{ макс}}. \quad (7.27.4)$$

Если плоская освещающая волна падает наклонно, то в систему проходят пространственные частоты  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , заключенные в пределах (рис. 7.55)

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{x_0} - \omega_{x \text{ макс}} &\leq \omega_x \leq \omega_{x \text{ макс}} - \omega_{x_0}, \\ -\omega_{y_0} - \omega_{y \text{ макс}} &\leq \omega_y \leq \omega_{y \text{ макс}} - \omega_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (7.27.5)$$

Из рис. 7.55 видно, что при косом освещении ширина полосы частот, пропущенных в систему, не изменяется, но в систему

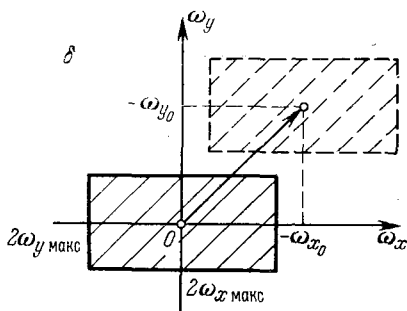


Рис. 7.55. Прямоугольный зрачок при прямом и косом когерентном освещении.

проходят более высокие пространственные частоты, чем при нормальном освещении. Поэтому косое освещение приводит к увеличению разрешения по предмету: становятся видны детали предмета, которые при нормальном освещении ускользали от наблюдателя. Однако переход к косому освещению сопровождается, как правило, искажением изображения предмета. Исключения составляют предметы, пространственная структура которых имеет либо

только положительные, либо только отрицательные пространственные частоты  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ . Предметы, которые обладают «однобокими» или «одноквadrантными» пространственными спектрами, описываются оптическими сигналами

$$u(x) = f(x) + i\chi(x), \quad (7.27.6)$$

действительная и мнимая части которых связаны преобразованием Гильберта, т. е.

$$\chi(x) = \hat{\mathcal{H}}[f(x)]. \quad (7.27.7)$$

На практике подобные случаи обычно не встречаются. Однако если к зрачку подходит волна света, уже испытавшая преобразование пространственных частот в предыдущих оптических каскадах, то такое волновое поле можно считать реальным.

Для достижения качества изображения предмета используется не одна, а несколько косых плоских волн. Если при этом равномерно распределить полосы пропускания пространственных частот, то разрешение по предмету превысит классический предел разрешения. Для того чтобы создать несколько взаимно когерентных косых волн, например две косые волны, используют такую фазовую дифракционную решетку, которая дает только две дифракционные волны первого порядка и не дает централь-

ного изображения (*балансная решетка*). Дифракционную решетку помещают в предметном пространстве либо перед предметом, когда образуются действительные волны, либо позади предмета, когда когерентные волны, освещающие предмет, являются мнимыми. Свет, прошедший через предмет  $\Pi$  и оптическую изображающую систему, падает на вторую дифракционную решетку  $ДР_2$  (рис. 7.56), расположенную в пространстве изображения

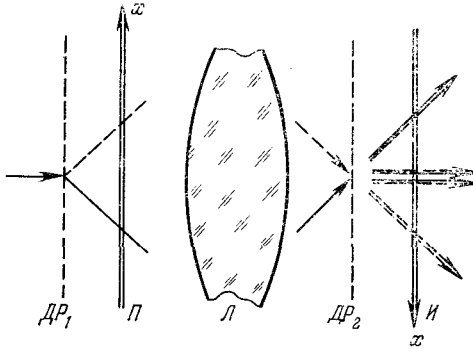


Рис. 7.56. Основная схема повышения разрешающей способности с использованием двух дифракционных решеток  $ДР_1$  и  $ДР_2$ , расположенных в оптически сопряженных плоскостях и имеющих сопряженные постоянные решетки. Линза  $L$  отображает предмет  $\Pi$  в изображение  $H$ .

в оптически сопряженной плоскости. Постоянная решетки  $ДР_2$  связана с постоянной решетки  $ДР_1$  соотношением сопряжения. С помощью решетки  $ДР_2$  дифракционные порядки, прошедшие через предмет  $\Pi$  и линзу  $L$ , приобретают прежнее направление. Кроме желательных направлений образуются также и нежелательные. Процедура отбора только желательных волн приводит к уменьшению размера поля предмета.

Принцип действия всего устройства показан на рис. 7.57. В этой схеме дифракционная решетка  $ДР_1$  помещена позади предмета. Волна света, образованная точкой  $P$  предмета, расщепляется на две волны, мнимые источники которых расположены в точках  $P_{+1}$  и  $P_{-1}$ , отстоящих от истинной точки на расстоянии

$$|\Delta x| = \frac{\lambda}{a} q_0, \quad (7.27.8)$$

где  $a$  — шаг решетки,  $q_0$  — расстояние между плоскостью решетки  $ДР_1$  и плоскостью предмета  $\Pi$ . Точки  $P$ ,  $P_{+1}$  и  $P_{-1}$  отображаются линзой  $L$  в точки  $P'$ ,  $P'_{+1}$  и  $P'_{-1}$  соответственно. Волны, идущие из мнимых изображений  $P'$ ,  $P'_{+1}$  и  $P'_{-1}$ , расщепляются при прохождении через дифракционную решетку  $ДР_2$  на соответствующие пары волн.

Докажем, что изображение точки  $P$  образуется с угловой апертурой в плоскости чертежа, в два раза превышающей апертуру исходной системы, не содержащей дифракционной решетки.

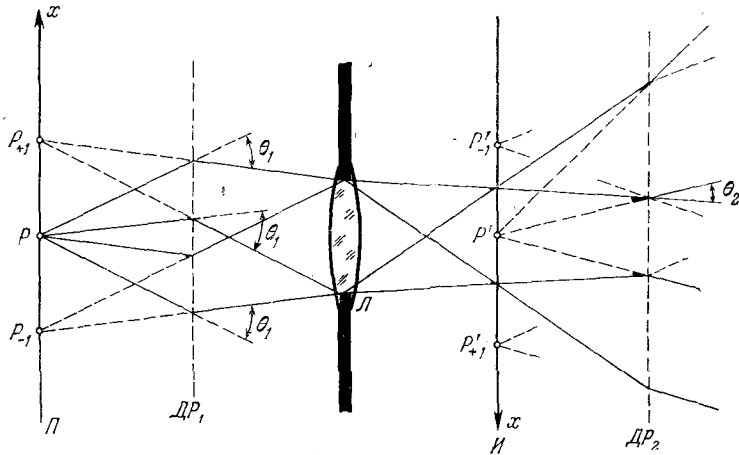


Рис. 7.57. Повышение разрешающей способности изображающей системы при одновременном сокращении поля предмета.

Действительно, угловая апертура исходной оптической системы определяется углом  $\alpha$ , где

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{D}{2q_0}. \quad (7.27.9)$$

Ограничиваясь приближением малых углов и используя теорему синусов, находим

$$\frac{\left(\frac{\alpha'}{2} - \alpha\right)}{q - q_0} = \frac{\theta_1 - \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)}{q_0}, \quad (7.27.10)$$

где  $\alpha'/2$  — угловая апертура модифицированной системы,  $\theta_1$  — угол дифракции, равный  $\lambda/a$ , где  $a$  — шаг решетки. Окончательно получаем

$$\frac{\alpha'}{2} = \frac{\alpha}{2} + \left(1 - \frac{q_0}{q}\right) \frac{\lambda}{a}, \quad (7.27.11)$$

или

$$\frac{\alpha'}{2} = \frac{1}{q} \left[ \frac{D}{2} + (q - q_0) \frac{\lambda}{a} \right]. \quad (7.27.12)$$

Если

$$(q - q_0) \frac{\lambda}{a} = \frac{D}{2}, \quad (7.27.13)$$

то

$$\alpha' = 2\alpha. \quad (7.27.14)$$

Если же выбрать

$$(q - q_0) \frac{\lambda}{a} > \frac{D}{2}, \quad (7.27.15)$$

то лучи света, распространяющиеся после предмета вдоль оптической оси и несущие информацию о низких пространственных частотах, не попадут в апертуру системы. Это приведет к нежелательным искажениям изображения предмета.

Угловая апертура вдоль оси  $y$  при этом не изменится. Кроме изображения  $P'$  точки  $P$  возникнут два лишних изображения  $P'_{+2}$  и  $P'_{-2}$ . В случае протяженных предметов может произойти взаимное наложение полезного и лишнего изображений. Чтобы этого не произошло, амплитуда исходного предмета  $\Pi$  должна отличаться от нуля только на полосках шириной  $\Delta x$ , параллельных оси  $y$ , между которыми должны иметься темные полоски той же ширины. Освещаемый предмет должен покрываться экраном из чередующихся прозрачных и непрозрачных полосок шириной  $\Delta x$ . Это эквивалентно тому, что используемая площадь предмета уменьшается вдвое в соответствии с теоремой об инвариантности полного числа степеней свободы оптического сигнала (рис. 7.57).

Если дифракционная решетка образует  $n$  дифракционных порядков, то разрешающая способность повышается в  $n$  раз по сравнению с классическим пределом, но поле предмета при этом уменьшается в  $n$  раз.

Другой метод перераспределения информационных степеней свободы оптического сигнала позволяет повысить разрешение вдоль оси  $x$  при пропорциональном уменьшении разрешения вдоль оси  $y$ . Этот метод пригоден для одномерных предметов, например для линейчатых спектров. На рис. 7.58 показана схема оптической фильтрации пространственной структуры изображения. Используются две сопряженные дифракционные решетки  $DP_1$  и  $DP_2$  с параллельными штрихами.

Рассмотрим ту фурье-компоненту вдоль оси  $x$  предмета  $\Pi$ , которая описывается амплитудным пропуском

$$t(x) = \cos \omega x \quad (7.27.16)$$

и которая не пропускается апертурой системы вдоль оси, т. е.  $\omega > \omega_{\text{макс}}$ . Поместим в плоскости предмета  $\Pi$  дифракционную решетку, штрихи которой образуют некоторый малый угол  $\alpha$

с осью  $y$ . Амплитудное пропускание балансной решетки  $DP_1$  равно

$$M_1(x, y) = \cos 2\pi \left[ \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{a} \right], \quad (7.27.17)$$

где  $a = 2\pi/\omega_0$  — шаг решетки,  $\omega_0$  — пространственная частота.

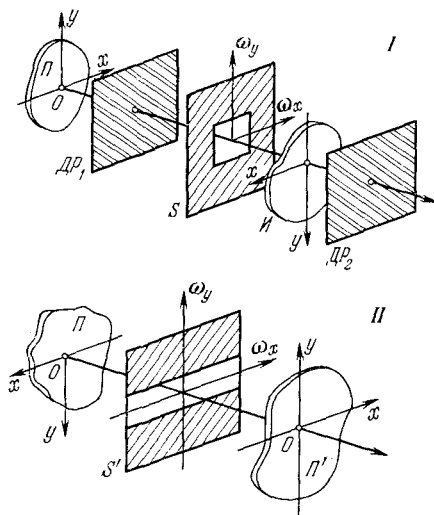


Рис. 7.58. Повышение разрешающей способности вдоль оси  $x$  при пропорциональном уменьшении разрешающей способности вдоль оси  $y$ .

Система из предмета и дифракционной решетки обладает амплитудным пропусканием

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= \cos \omega x \cos 2\pi \left[ \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{a} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cos \left[ x \left( \omega + \frac{2\pi \cos \alpha}{a} \right) + \frac{2\pi y \sin \alpha}{a} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cos \left[ x \left( \omega - \frac{2\pi \cos \alpha}{a} \right) - \frac{2\pi y \sin \alpha}{a} \right]. \quad (7.27.18) \end{aligned}$$

Ограниченная апертура полностью пропустит сигнал биения разностной частоты, т. е. сигнал

$$\tau_0(x, y) = \frac{1}{2} \cos \left[ x \left( \omega - \frac{2\pi \cos \alpha}{a} \right) - \frac{2\pi}{a} y \sin \alpha \right]. \quad (7.27.19)$$



В плоскости изображения позади дифракционной решетки  $DP_2$  появится сигнал

$$\begin{aligned} \tau_{II}(x, y) &= \tau_0 M_2 = \\ &= \frac{1}{4} \cos \omega x + \frac{1}{4} \cos \left[ x \left( \omega - \frac{4\pi}{a} \cos \alpha \right) - \frac{4\pi}{a} y \sin \alpha \right]. \end{aligned} \quad (7.27.20)$$

Первое слагаемое, не зависящее от координаты  $y$ , представляет собой фурье-компоненту с частотой  $\omega$ , которая апертурой системы не захватывалась непосредственно. Чтобы получить изображение без искажений, необходимо погасить второе слагаемое, зависящее от  $y$ . Для этого используется маска в виде щели, параллельной оси  $\omega_x$  (рис. 7.59, *e*), которая осуществляет фильтрацию пространственных частот вдоль оси  $\omega_y$ .

Рассмотрим теперь метод перераспределения информационных степеней свободы, при помощи которого разрешение по предмету можно повысить без уменьшения размера поля предмета. Это достигается с помощью движущихся дифракционных решеток ценой потери временного разрешения. Принцип данного метода состоит в том, что в нескольких различных полосах временных частот шириной  $\Delta\nu_t$ , лежащих в пределах полосы  $\Delta\nu_{t\max}$  исходной системы, передается информация о пространственных частотах, не захватываемых апертурой исходной системы. Предмет освещается лучами под различными углами падения так, что эти лучи имеют разные временные частоты, но взаимно когерентны между собой. Сдвиг частот возникает при движении решетки благодаря доплеровскому смещению временных частот. На рис. 7.60 дана схема устройства с двумя движущимися решетками, положение, скорость и шаг которых удовлетворяют условию оптического сопряжения.

Пусть амплитудное пропускание неподвижной решетки  $DP_1$  равно

$$M(x) = 1 + \cos \frac{2\pi x}{a_x}. \quad (7.27.21)$$

При движении решетки вдоль оси  $x$  ( $v_x$ ) возникнут новые временные частоты

$$\left. \begin{aligned} v_{\pm} &= v_0 \pm \Delta\nu, \\ \Delta\nu &= \frac{v_x}{a_x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.27.22)$$

Временные частоты  $v_{\pm}$  отстоят от основной частоты  $v_0$  по крайней мере на величину  $\Delta\nu_0$ , равную полосе временных частот, заполняемой при передаче возможных временных вариаций предмета.

Тогда информация о различных полосах пространственных частот будет передана по различным и неперекрывающимся полосам

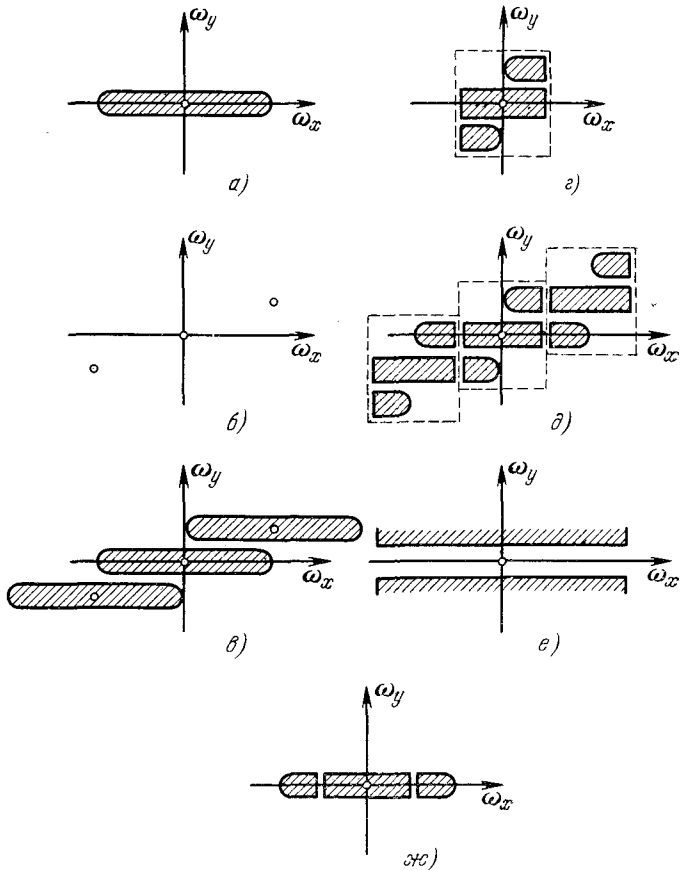


Рис. 7.59. Преобразование пространственных частот в системе рис. 7.58. а) Вид спектра сигнала и апертуры системы. Высокие пространственные частоты вдоль оси  $x$  не пропускаются заданными размерами апертуры; б) дифракционные порядки от нулевых пространственных частот, создаваемые решеткой  $DP_1$  с наклонными полосами (рис. 7.58); в) спектры пространственных частот сигнала после дифракционной решетки  $DP_1$ ; г) пропущенный через квадратную апертуру; д) спектры пространственных частот после дифракционной решетки  $DP_2$  (рис. 7.58, Д); е) щель  $S'$  в плоскости пространственных частот  $\omega$  (рис. 7.58, И); ж) восстановленный спектр исходного сигнала.

временных частот. Это условие определяет минимальную скорость движения решеток  $v_x$ :

$$\frac{v_x}{a_x} \geq \Delta v_0. \quad (7.27.23)$$

В общем случае двухмерной решетки, амплитудное пропускание которой равно

$$M(x, y) = \left(1 + \sum_n \cos \frac{2\pi nx}{a_x}\right) \left(1 + \sum_m \cos \frac{2\pi my}{a_y}\right), \quad (7.27.24)$$

компоненты скорости  $v$  ( $v_x, v_y$ ) зависят от того, какие дифракционные порядки образует решетка. На рис. 7.61 показан пример

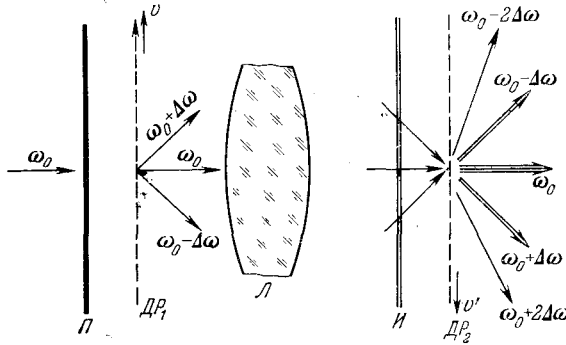


Рис. 7.60. Повышение разрешающей способности изображающей системы без сокращения предметного поля путем использования движущихся дифракционных решеток.

дифракционной решетки, движущейся со скоростью

$$\frac{v_x}{a_x} = \frac{v_y}{3a_y} \geq \Delta\nu_0. \quad (7.27.25)$$

Всего возникает 8 доплеровских компонент.

Вернемся к схеме сверхразрешающей системы, показанной на рис. 7.60. Дифракционная решетка  $ДР_1$  движется со скоростью  $v$  в предметном пространстве. Позади второй решетки  $ДР_2$ , параметры которой связаны с параметрами первой решетки  $ДР_1$  условием оптического сопряжения, располагается оптический фильтр, пропускающий оптические временные частоты в полосе  $\Delta\nu_0$  около частоты  $\nu_0$ . Для того чтобы фильтр мог осуществлять временное интегрирование, постоянная времени фотоприемника  $\tau$  должна быть равна

$$\tau = \frac{1}{\Delta\nu_0}. \quad (7.27.26)$$

Компонента временных частот  $\nu_0 + \Delta\nu_0$ , возникающая на первой решетке, получает обратный сдвиг по временной частоте ( $-\Delta\nu_0$ ) на второй решетке, и на выходе появляется желаемая частота  $\nu_0$ . Обобщая, можно утверждать, что сдвиг на  $m\Delta\nu_0$  в первой решетке

компенсируется обратным сдвигом ( $-m\Delta v_0$ ) во второй решетке. Все остальные компоненты временных частот, образующиеся на выходе второй решетки, не пройдут через оптический фильтр с полосой  $\Delta v_0$  около временной частоты  $v_0$ . При получении такого

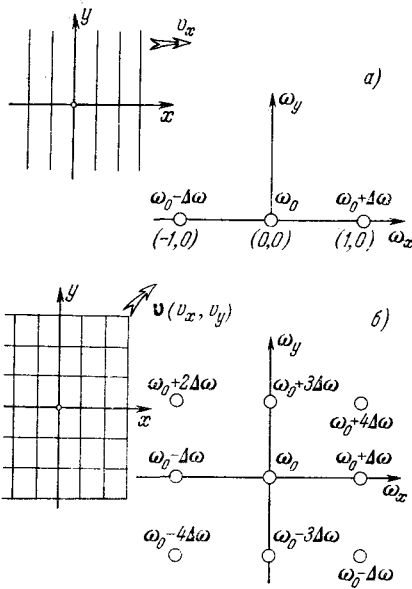


Рис. 7.61. Вторичные временные частоты, возникающие при движении дифракционной решетки со скоростью  $v_x$  вдоль оси  $x$  (а) и со скоростью  $v$  ( $v_x, v_y$ ) (б).

фильтра используют голографический метод: к полю световой волны на выходе второй решетки добавляют когерентную опорную волну. Все бегущие интерференционные картины, образуемые компонентами  $v_0 \pm \Delta v_0$ ,  $v_0 \pm 2\Delta v_0$  и т. д., смазываются, образуя равномерную засветку, и только компонента с частотой  $v_0$  создает стационарную интерференционную картину, которая регистрируется на голограмме.

### § 7-28. Принцип действия когерентной радиолокационной станции бокового обзора \*)

В классической радиолокации с использованием частотной модуляции несущей частоты посылаемого сигнала существует простое соотношение: чем больше размер антенны и чем меньше длина волны зондирующего сигнала, тем выше угловое разрешение радиолокатора. Разрешение по дальности улучшается одновременно с увеличением несущей частоты.

Назначение радиолокационной станции состоит в том, чтобы получить изображение местности, не уступающее по разрешению аэрофотографиям. Это с неизбежностью требует антенн огромных размеров. Так, например, при частоте сигнала 9000 Мгц разрешение, сравнимое с оптическим, достигается при протяженности антенны в 2000 м. Однако очень трудно сделать антенну больших размеров, тем более на самолете. Преодолеть дифракционное ограничение четкости радиолокационных изображений удалось окольным путем, на основе идеи о когерентном приеме. Смысл этой идеи состоит в том, что данные об отраженных радиолокационных сигналах принимают когерентно, накапливая их на

\*) При написании §§ 7-28, 7-29, 7-30 использованы статьи [114, 137, 148, 150, 293].

участке трассы полета, во много десятков раз превышающем размеры антенны, установленной на самолете.

Рассмотрим принцип работы когерентной радиолокационной станции бокового обзора. Радиолокационная станция, размещенная на самолете, перемещается вдоль прямолинейной трассы и непрерывно излучает радиопульсы, следующие один за другим. Благодаря высокой стабильности по частоте сигнал от генератора остается когерентным в течение очень длительного периода времени. За это время самолет пролетает несколько сот и даже

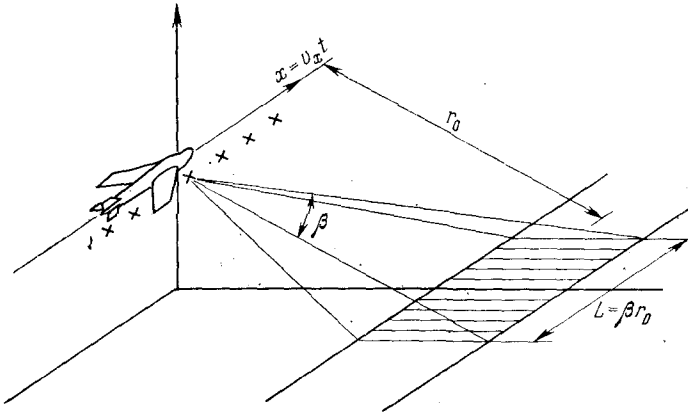


Рис. 7.62. Зондирование Земли широким лучом радиолокационной станции при сохранении высокого пространственного разрешения путем использования синтезированной когерентного приема отраженных сигналов.

тысяч метров. Образуется своеобразная так называемая синтезированная антенна, состоящая из когерентным образом удерживаемой в пространстве и существующей лишь фиктивно и одновременно совокуности радиолокационных диполей (рис. 7.62).

Двухмерная запись отраженных сигналов, принятых когерентной радиолокационной станцией, представляет собой фактически голограмму. Радиолокационный генератор, который посылает зондирующие сигналы, освещающие объект съемки, одновременно является источником опорной волны. Отраженные сигналы, принятые при полете вдоль трассы, интерферируют с опорным сигналом. Сложная интерференционная картина при таком наложении двух сигналов полностью эквивалентна голограмме.

Разберем принцип действия когерентной радиолокационной станции на примере одной отражающей точки (рис. 7.63). Волны, отраженные от такого точечного объекта, имеют сферический фронт. Между тем опорный сигнал во всех диполях синтезированной антенны имеет одинаковую фазу и поэтому представляет собой плоскую волну, распространяющуюся перпендикулярно

трассе полета. Иначе говоря, приемная антенна оказывается сфокусированной на бесконечность.

Принятый сигнал в виде сферического волнового фронта комбинируют в интерференционном корреляторе с когерентным опорным сигналом в виде плоского волнового фронта. Результирующий сигнал отображается на экране электронно-лучевой трубки и затем фотографируется на пленку (рис. 7.64).

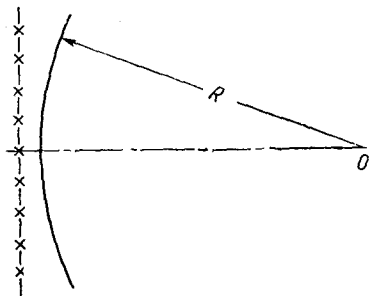


Рис. 7.63. Синтезированная решетчатая антенна и падающая сферическая волна.

Когерентная длина, на которой можно вести когерентное накопление данных, т. е. длина синтезированной антенны, определяется углом раствора диаграммы направленности элементарного диполя. При этом величина угла раствора тем выше, чем меньше размер элементарного диполя. Отсюда следует на первый взгляд парадоксальный вывод: чтобы увеличить эффективную когерентную длину, т. е. получить очень высокое угловое разрешение предметов на местности, размер реальной

антенны на самолете, т. е. антенны элементарного диполя, следует сделать как можно меньше!

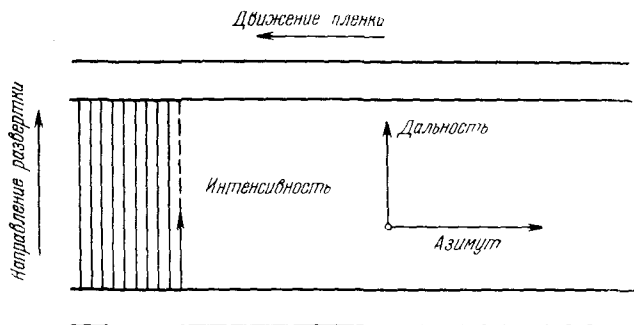


Рис. 7.64. Координаты азимута и дальности на движущейся пленке.

Вернемся к единственной отражающей точке, расположенной на расстоянии  $R$  от трассы самолета. При перемещении луча отображающей электронно-лучевой трубки вверх вдоль оси дальности радиосигнал, отраженный от объекта, появится только при вполне определенном значении временной задержки, составляющей удвоенную величину дальности. На отображающем экране возникает цепочка точек, сливающихся в одну-единствен-

ную, практически горизонтальную линию. Однако яркость этой линии будет изменяться вдоль оси азимута (рис. 7.65), скорость сканирования вдоль которой пропорциональна скорости полета самолета. Эта модуляция яркости возникает вследствие эффекта интерференции при наложении волны, отраженной от точечного объекта и имеющей сферический фронт и переменную величину запаздывания радиолуча по мере пролета мимо объекта, с волной опорного сигнала, которая имеет плоский фронт.

При подлете к точечному объекту чередование областей интерференции с усилением и с ослаблением происходит сначала быстро, затем замедляется, и, когда самолет находится от точечного объекта на минимальном расстоянии, чередование становится наиболее медленным.

Таким образом, на отражающем экране будет нарисована одномерная голограмма. Чем дальше от трассы расположен точечный объект, тем выше на кадре располагается такая одномерная голограмма и тем длиннее оканчивается максимальный участок между двумя соседними областями интерференции двух лучей с усилением или соответственно с ослаблением.

Итак, на кадре каждая точка на поверхности Земли

создаст картину в виде одномерной голограммы, которая характеризуется двумя независимыми параметрами: высотой расположения одномерной голограммы, которая определяет дальность до точки, и положением наиболее разреженного чередования интерференционных полос, которое определяет азимут или точку вдоль трассы, ближайшую к предмету. Кроме того, имеется еще третий параметр — размер разреженного участка одномерной голограммы, который зависит от длины волны зондирующего сигнала и дальности до точки предмета. Первый и третий параметры завязываются воедино на стадии восстановления, так как именно эта связь определяет угол наклона расположения плоскости, на которой появляется восстановленное действительное изображение. Если масштабы сокращения размера кадра и длины волны излучения не соответствуют друг другу, то угол наклона восстанавливающей плоскости необходимо пропорционально изменить.

Схема процесса восстановления изображения с помощью кадра, полученного радиолокационной станцией бокового обзора,

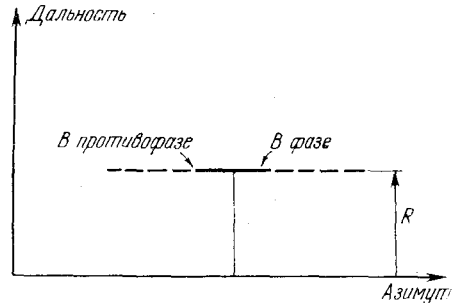


Рис. 7.65. Структура записи принятого сигнала радиолокационной станции с синтезированной антенной, когда предмет состоит из одной точки. Прерывистая полоска, представляющая собой одномерную функцию Френеля, наносится при одном значении дальности, равном  $R$ .

приведена на рис. 7.66. Кадр, записанный в требуемом масштабе, освещается плоской монохроматической волной от лазера. Каждая одномерная голограмма, которая представляет собой зонную картину Френеля вдоль оси азимута на кадре, образует вторичную цилиндрическую сходящуюся волну, которая фокусируется в изображении точки предмета на поверхности Земли. На приведенном рисунке показаны две отражающие точки, отличающиеся как по дальности, так и по азимуту или по длине трассы полета.

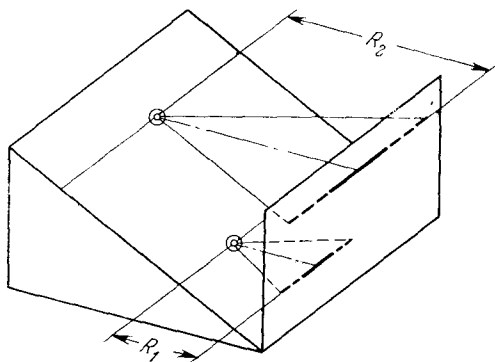


Рис. 7.66. Схема, поясняющая образование восстановленного изображения в наклонной фокальной плоскости. Показаны две точки, отличающиеся как азимуту, так и дальностью

Видно, что восстановленные изображения лежат в одной плоскости. На ней видны тени от предметов, как в предвечерние часы, когда Солнце, расположенное низко над горизонтом, отбрасывает тени большой длины. Длина теней на восстановленном изображении определяется соотношением высоты полета самолета и дальности обзора. Если предмет очень далеко «оторвался» от плоскости Земли, то на восстановленной плоскости мы не увидим его четкого восстановленного изображения: оно полностью размажется.

### § 7-29. Теория когерентной радиолокационной станции бокового обзора

Принципиальной особенностью работы когерентной радиолокационной станции бокового обзора является то, что пространственное разрешение в этой системе достигается путем полного использования временных информационных степеней свободы того одномерного сигнала, который посылается и принимается системой.

Пусть самолет с радиолокационной станцией на борту летит на высоте  $z_c$  со скоростью  $v_x$  вдоль оси  $x$  (рис. 7.62). Луч радиолокационной станции освещает сравнительно большой участок



поверхности Земли с находящимися на нем предметами. Сосредоточим свое внимание пока на какой-нибудь точке  $O(x_0, y_0, z_0 = 0)$  поверхности Земли.

Передатчик радиолокационной станции излучает монохроматический сигнал

$$u(t) = e^{-i\omega_0 t}, \quad (7.29.1)$$

где  $\omega_0$  — частота излучения радиолокационной станции. Сигнал, принятый антенной самолета, находящегося в точке  $P(x = v_x t, y = 0, z_c)$ , равен

$$u_s(t) = u_0 e^{-i\omega_0(t - \Delta t)}, \quad (7.29.2)$$

где  $u_0$  — коэффициент отражения точечного предмета, учитывающий также все остальные геометрические факторы;  $\Delta t$  — время запаздывания ответного сигнала относительно момента излучения радиолокационного импульса  $u(t)$ , причем

$$\Delta t = \frac{2r}{c}, \quad (7.29.3)$$

где  $r$  — дальность от точки  $P$  до самолета,  $c$  — скорость света. Приняв во внимание тот факт, что ширина  $L$  вдоль трассы освещенного участка обычно мала по сравнению со средней дальностью до освещенного участка  $r_0$ , можно выразить время задержки следующим образом:

$$\Delta t = \frac{2r}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2 + z_c^2} \approx \frac{2}{c} \left[ r_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2r_0} \right], \quad (7.29.4)$$

где

$$r_0 = \sqrt{z_c^2 + y_0^2}.$$

Тогда

$$u_s(t) = u_0 e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{i \frac{2\omega_0}{c} \left[ r_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2r_0} \right]} = u_0 e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{i \frac{4\pi r_0}{\lambda}} \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda r_0} (x - x_0)^2}, \quad (7.29.5)$$

где  $\lambda = 2\pi c / \omega_0$  — длина волны радиолокационной станции.

Для того чтобы зарегистрировать как амплитуду, так и фазу отраженного сигнала, используют сигнал от генератора, который выполняет функцию опорного сигнала. При этом в приемном блоке производят сначала сложение сигналов, а затем квадратичное детектирование полученного суммарного сигнала

$$u_d = u(t) + u_s(t). \quad (7.29.6)$$

Регистрируемый сигнал имеет вид

$$\begin{aligned} s(x) &= |u(t) + u_s(t)|^2 = |e^{-i\omega_0 t} + u_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i \frac{4\pi r_0}{\lambda}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda r_0} (x-x_0)^2}|^2 = \\ &= (1 + u_0^2) + 2u_0 \cos \left[ \frac{4\pi r_0}{\lambda} + \frac{2\pi}{\lambda r_0} (x - x_0)^2 \right] \quad (7.29.7) \end{aligned}$$

и отвечает одномерной картине Френеля, полученной от точки, которая расположена на расстоянии  $r_0/2$  от точки  $P$ . Уменьшение расстояния вдвое вызвано тем, что освещающий источник и приемник движутся вместе с самолетом относительно точки  $O$ . Местная пространственная частота зонной картины Френеля равна

$$\begin{aligned} \omega_x(x) &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{4\pi}{\lambda} r_0 + \frac{2\pi}{\lambda r_0} (x - x_0)^2 \right] = \\ &= \frac{4\pi}{\lambda r_0} (x - x_0) = 2k_0 \frac{x - x_0}{r_0}, \quad (7.29.8) \end{aligned}$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda$ . Если луч радиолокационной станции освещает земную поверхность на протяжении  $L_x$  вдоль оси  $x$ , то принятый сигнал от всех точек этого участка занимает полосу пространственных частот

$$\Delta\omega_x = \frac{2k_0}{r_0} L_x. \quad (7.29.9)$$

Пространственная разрешающая способность такого приема равна

$$\Delta x_0 = \frac{2\pi}{\Delta\omega_x} = \frac{\lambda r_0}{2L_x}. \quad (7.29.10)$$

Если радиоволны излучаются обычной антенной диаметром  $D$  в виде квазипараллельного пучка, то размер освещаемого участка равен

$$L_x = r_0 \left( \frac{\lambda}{D} \right), \quad (7.29.11)$$

где

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{D}$$

— угловая расходимость пучка. Тогда пространственное разрешение вдоль трассы полета или азимута равняется

$$\Delta x_0 = \frac{\lambda r_0}{2} \frac{D}{\lambda r_0} = \frac{D}{2}, \quad (7.29.12)$$

т. е. определяется лишь размером антенны радиолокационной станции. Выражение (7.29.12) разъясняет, таким образом, кажущийся парадокс — разрешение радиолокационной станции при когерентном приеме улучшается с уменьшением размеров антенны, в то время как в обычной, классической радиолокационной станции разрешение равно:

$$(\Delta x_0)_{\text{класс}} = r_0 \frac{\lambda}{D}, \quad (7.29.13)$$

т. е. у х о д ш а е т с я при уменьшении размеров антенны.

Для того чтобы принять сигнал с полосой пространственных частот  $\Delta \omega_x$ , полосу временных частот  $\Delta \nu_t$  нужно выбрать из условия

$$v_x \Delta \omega_x = \Delta \nu_t. \quad (7.29.14)$$

Координата  $\xi$  на кадре радиолокационной станции определяет момент времени  $t$  или положение самолета вдоль трассы  $x$ . Если  $V_0$  — скорость перемещения пленки, на которой регистрируется кадр, то

$$\xi = V_0 t = V_0 \frac{x}{v_x}. \quad (7.29.15)$$

За время  $T$  самолет пройдет отрезок траектории

$$s_x = v_x T. \quad (7.29.16)$$

Перо, записывающее сигнал  $s(x)$  в кадре, сдвинется при этом на отрезок

$$S_\xi = V_0 T. \quad (7.29.17)$$

При этом следует твердо соблюдать условие: число информационных степеней свободы на земной поверхности

$$N_x = 2 \frac{s_x}{\Delta x_0} = 2 s_x \frac{\Delta \omega_x}{2\pi} \quad (7.29.18)$$

должно равняться числу степеней свободы в радиолокационном канале

$$N_t = 2T \frac{\Delta \nu_t}{2}, \quad (7.29.19)$$

которое в свою очередь должно равняться числу степеней свободы на пленке

$$N_{\xi} = 2S_{\xi} \frac{\Delta\omega_{\xi}}{2\pi} = 2V_0T \frac{\Delta\omega_{\xi}}{2\pi}. \quad (7.29.20)$$

Эта последняя величина определяется скоростью перемещения пленки и толщиной линии, оставляемой пером, которая равна

$$\Delta\xi = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{\xi}}. \quad (7.29.21)$$

Таким образом,

$$N_x = N_t = N_{\xi}. \quad (7.29.22)$$

Так регистрируется информация о структуре предметов, расположенных на земной поверхности вдоль оси  $x$ . Для получения информации о структуре предметов вдоль оси  $y$ , расположенной перпендикулярно трассе самолета, излучение, испускаемое радиолокационной станцией, посылается короткими импульсами. Наиболее эффективной системой модуляции импульса по фазе, обладающей наилучшими показателями с точки зрения информационной емкости канала и соотношения неопределенности в радиолокационном сигнале, является система частотно-модулированных импульсов вида

$$u(t) = e^{i\varphi(t)}, \quad (7.29.23)$$

где

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \omega_0' t^2, \quad (7.29.24)$$

т. е. мгновенная временная частота сигнала  $u(t)$  изменяется линейно во времени:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \omega_0' t. \quad (7.29.25)$$

Высокочастотный импульс вида (7.29.23) и (7.29.24) начинается в момент  $t = 0$  и длится  $\tau$  сек. Скорость следования импульсных посылок выбирается такой, чтобы принимаемый сигнал как функция времени  $t$  отвечал необходимому шагу между соседними отсчетами. Поэтому сдвиг вдоль траектории  $\Delta s_x$  за время  $\tau$  не должен превышать разрешающей способности всей системы вдоль оси  $x$ , т. е.

$$\Delta s_x \leq \Delta x_0, \quad (7.29.26)$$

или

$$\Delta s_x = v_x \tau \leq \Delta x_0.$$

Иначе говоря, продолжительность импульса должна быть достаточно малой:

$$\tau \leq \frac{\Delta x_0}{v_x}. \quad (7.29.27)$$

Каждый импульс порождает отраженный сигнал, который как функция времени задержки отображается путем перемещения пера на кадре вдоль оси  $y$  со скоростью  $v_\eta$ , так что вертикальная координата на кадре равняется

$$\eta = v_\eta t. \quad (7.29.28)$$

Если предмет состоит только из одной точки  $O$ , то принятый отраженный сигнал равен

$$u_s(t) = u(t + \tau - t_{PO}), \quad (7.29.29)$$

где  $t_{PO}$  — задержка во времени, затрачиваемая на прохождение электромагнитной волной отрезка, равного удвоенной дальности точки  $O$ , а дополнительная постоянная задержка  $\tau$  соответствует тому факту, что в приемном корреляторе происходит когерентное сложение сигнала, являющегося отраженным сигналом от предыдущего импульса, с копией сигнала последующего импульса, которые следуют непрерывно друг за другом.

Интерференционная часть на выходе квадратичного детектора имеет вид

$$u_s(t) u^*(t) = u(t + \tau - t_{PO}) \cdot u^*(t) = e^{i\Delta\varphi(t)}, \quad (7.29.30)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= \varphi(t + \tau - t_{PO}) - \varphi(t) = \\ &= \omega'_0(\tau - t_{PO}) \left[ t + \frac{\tau - t_{PO}}{2} \right] + \omega_0(\tau - t_{PO}). \end{aligned} \quad (7.29.31)$$

Пусть точка  $O'$ , ближайшая к самолету, имеет координаты  $x_O = x$ ,  $y'_O = y_0$ ,  $z'_O = 0$ . Если очередной импульс начинается в момент, когда появляется отраженный сигнал от предыдущего импульса, так что  $\tau = t_{PO'}$ , то

$$t_{PO} - \tau \approx 2 \sin \gamma \cdot \frac{y_0 - y'_0}{c}, \quad (7.29.32)$$

где  $\gamma$  — угол, образованный осью  $z$  с вектором  $\mathbf{r}_0$ , направленным в точку  $P$ . Тогда точка  $O$  соответствует вполне определенной временной частоте  $\omega$ , равной

$$\omega = v_\eta \omega_\eta = -2\omega'_0 \sin \gamma \cdot \frac{y_0 - y'_0}{c} \quad (7.29.33)$$

и линейно зависящей от координаты  $y_0$ . Поскольку  $y_0 \geq y'_0$ , то при положительном знаке  $\omega'_0$  любые частоты  $\omega$  в (7.29.33) являются отрицательными. Ситуация напоминает безлинзовую голограмму Фурье, когда опорная волна выходит из точки, расположенной в н е предметного кадра.

Пространственное разрешение по  $y_0$  определяется величиной

$$\Delta y_0 = \frac{c}{2\nu_0 \tau' \sin \gamma}. \quad (7.29.34)$$

Ширина полосы временных частот  $\Delta \nu$  в приемном устройстве и ширина пространственных частот  $\Delta \omega_\eta$  в кадре, требуемая для получения интегрального образа предмета протяженностью  $L_y$  вдоль оси  $y$ , равны

$$\Delta \nu = \nu_\eta \frac{\Delta \omega_\eta}{2\pi} = 2\nu_0 \sin \gamma \cdot \frac{L_y}{c}. \quad (7.29.35)$$

Число временных степеней свободы, которое может разрешить приемное устройство за интервал времени  $T$  при ширине полосы временных частот  $\Delta \nu$ , равно

$$N_t = 2 T_{\text{эфф}} \Delta \nu = 2\pi \tau' \Delta \nu \quad \left( \tau' \leq \frac{\tau}{2} \right). \quad (7.29.36)$$

Здесь  $T_{\text{эфф}}$  — эффективное время приема, в течение которого устройство работает на прием, а

$$n = \frac{T}{\tau'}$$

— число импульсов продолжительностью  $\tau'$ . Таким образом, число временных степеней свободы сигнала, принятого в импульсе продолжительностью  $\tau'$ , равно числу временных степеней свободы сигнала, принятого в импульсе продолжительностью  $\tau$ , и кроме того, равно числу пространственных степеней свободы, связанных с размером  $L_y$ :

$$\tau' \Delta \nu = \frac{L_y}{\Delta y_0}. \quad (7.29.37)$$

Условие (7.29.27) для скорости повторения импульсов  $1/\tau$  определяет число  $n$ :

$$n \geq \frac{S_x}{\Delta x_0}, \quad (7.29.38)$$

где  $S_x$  — длина участка трассы, проходимого самолетом за  $T$  сек. Число временных степеней свободы, передаваемое радиоканалом,

определяет полное число пространственных степеней свободы предмета, которое можно измерить таким методом, а именно:

$$N_t \geq N_{xy} = 2 \frac{S_x L_y}{\Delta x_0 \Delta y_0}. \quad (7.29.39)$$

### § 7-30. Обработка данных в кадре радиолокационной станции когерентного приема

Кадр с нанесенными на него данными о предметах на поверхности Земли необходимо преобразовать так, чтобы получить само изображение. Такой кадр можно с полным основанием рассматривать как голограмму и, так же как голограмму, освещать когерентным светом, чтобы получить восстановленное изображение.

Если кадр с исходными данными нанести на транспарант и осветить плоской монохроматической волной

$$u_{\text{восст}}(t) = e^{-i\omega_L t} \quad (7.30.1)$$

с частотой

$$\omega_L = \frac{2\pi c}{\lambda_L}, \quad (7.30.2)$$

где  $\lambda_L$  — длина волны светового пучка от лазера, то непосредственно за транспарантом возникнет волновое поле

$$s(x) e^{-i\omega_L t} = (1 + u_0^2) e^{-i\omega_L t} + u_0 e^{-i\omega_L t} \cdot e^{i \left[ \frac{4\pi r_0}{\lambda} + \frac{2\pi}{\lambda r_0} (x-x_0)^2 \right]} + \\ + u_0 e^{-i\omega_L t} \cdot e^{-i \left[ \frac{4\pi r_0}{\lambda} + \frac{2\pi}{\lambda r_0} (x-x_0)^2 \right]}. \quad (7.30.3)$$

Отбрасывая постоянную фазу  $4\pi r_0/\lambda$  и вводя коэффициент перехода  $p$  от трассы полета  $x$  к смещению кадра  $x/p$ , получим

$$s(x) e^{-i\omega_L t} = (1 + u_0^2) e^{-i\omega_L t} + u_0 e^{-i \left[ \omega_L t - \frac{2\pi}{\lambda_L} \frac{\lambda_L}{\lambda} \frac{(x-x_0)^2 p^2}{r_0} \right]} + \\ + u_0 e^{-i \left[ \omega_L t + \frac{2\pi}{\lambda_L} \frac{\lambda_L}{\lambda} \frac{(x-x_0)^2 p^2}{r_0} \right]}. \quad (7.30.4)$$

Второе и третье слагаемые в (7.30.4) описывают цилиндрические волновые фронты с фокусным расстоянием

$$f = \pm \frac{1}{2p^2} \frac{\lambda}{\lambda_L} r_0, \quad (7.30.5)$$

пропорциональным дальности до предмета. Таким образом, на стадии восстановления геометрическое место фокусов для

всех точек освещаемого радиолокационной станцией участка является плоскостью, наклоненной к оси оптической системы (рис. 7.66). При этом выражение (7.30.4) показывает, что фокусирующие свойства возникают только в одном измерении, вдоль оси  $x$ . В направлении дальности восстановленный сигнал не имеет фокусирующих свойств. Отметка по дальности осуществляется

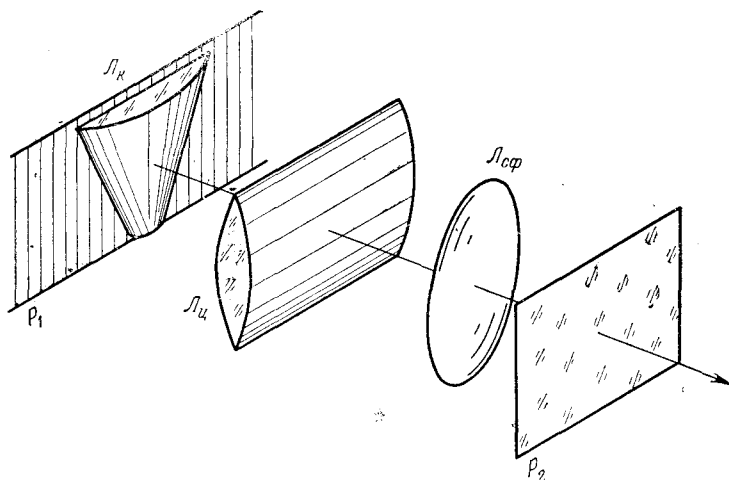


Рис. 7.67. Когерентное оптическое устройство, используемое для получения восстановленного изображения местности. Анаморфотная система состоит из конической линзы  $L_k$ , цилиндрической линзы  $L_ц$  и сферической линзы  $L_{сф}$ .

с помощью импульсной модуляции, и зонная картина Френеля для каждой точки предмета имеет вид узкой линии.

Восстановленное изображение характеризуется двумя особенностями. Во-первых, система является анаморфотной, так как плоскость изображения по дальности совпадает с плоскостью кадра, в то время как плоскость изображения по азимуту располагается вне плоскости кадра и при этом на различных расстояниях при разных дальностях. Во-вторых, масштабы в кадре по азимуту и по дальности в общем случае не совпадают. Поэтому при восстановлении и получении обычного изображения необходимо определенным образом преобразовать волновое поле, возникающее за кадром при освещении его лазерным светом.

Анаморфотные качества изображения устраняются с помощью цилиндрической и конической линз. На рис. 7.67 приведена система, компенсирующая искажения для мнимого изображения. Цилиндрическая линза помещается на расстоянии, равном ее фокусному расстоянию от кадра, и ориентируется так, что фокусировка происходит вдоль оси дальности. В результате этого пре-



образования фокальная плоскость дальности, совпадающая с плоскостью кадра, изображается на бесконечности.

К плоскости кадра вплотную прикладывается коническая линза. Она является цилиндрической вдоль оси  $x$ , но местное фокусное расстояние этой линзы равно фокусному расстоянию по дальности. В результате каждая точка предмета на поверхности Земли изображается на бесконечности и наклонная фокальная плоскость по азимуту приводится в совпадение с фокальной плоскостью по дальности. Так устраняется анаморфизм.

Дополнительная линза переносит изображение из бесконечности в требуемую плоскость, в которой появляется сфокусированное изображение земной поверхности с находящимися на ней предметами. Вследствие неравенства масштабов по кадру вдоль осей  $x$  и  $y$ , восстановленное изображение растянуто в одном направлении. Чтобы устранить этот дефект, необходимо соответствующим образом выбрать фокусное расстояние цилиндрической линзы. Если сферическая линза имеет фокусное расстояние  $f_0$ , а цилиндрическая линза —  $f_{ц}$ , то линейное увеличение в направлении дальности равно

$$M_r = \frac{f_0}{f_{ц}}, \quad (7.30.6)$$

а в направлении азимута

$$M_x = \frac{f_0}{f}, \quad (7.30.7)$$

где  $f$  — фокусное расстояние конической линзы. Эффект растяжения изображения устраняется, если отношение линейных увеличений по дальности и азимуту выбрать равным

$$\frac{M_x}{M_r} = \frac{q}{p}, \quad (7.30.8)$$

где  $p$  — масштаб вдоль азимута,  $q$  — масштаб вдоль дальности, или

$$\frac{f_0}{f} \frac{f_{ц}}{f_0} \frac{p}{q} = 1, \quad \frac{f_{ц}}{f} \frac{p}{q} = 1. \quad (7.30.9)$$

Из (7.30.9) видно, что сферическая линза не влияет на эффект растяжения изображения. С другой стороны, фокусное расстояние конической линзы выбирается равным фокусному расстоянию кадра. Поэтому подстройку можно осуществить только параметром цилиндрической линзы. На рис. 7.68 приведено восстановленное изображение, полученное методом синтезированной антенны.

Путем выбора фокусного расстояния цилиндрической линзы в соответствии с (7.30.9) достигается необходимое соотношение

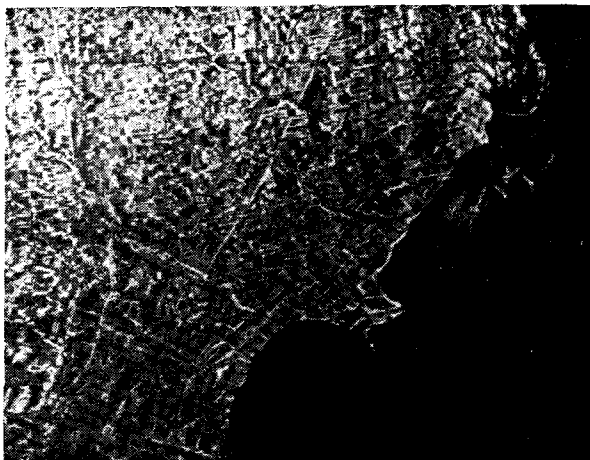


Рис. 7.68. Вид изображения поверхности Земли, восстановленного по данным синтезированной когерентной радиолокационной станции путем оптической обработки в когерентной системе рис. 7.67.

масштабов изображения. Однако фокусное расстояние системы записи сигналов в кадре является функцией дальности  $r_0$ , и поэтому соотношение масштабов изображения достигается только для

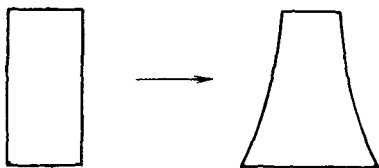


Рис. 7.69. Искажения, вносимые конической линзой. Коэффициент увеличения вдоль азимута меньше для больших расстояний. Прямоугольный участок местности превращается в некоторую сложную фигуру.

одного какого-то расстояния до точки предмета. Для других расстояний изображение искажается, при этом увеличение размера изображения вдоль оси азимута изменяется обратно пропорционально расстоянию до точки предмета и прямоугольный участок местности отображается на стадии восстановления в виде криволинейной фигуры (рис. 7.69). Таким образом, компенсация анаморфотных

свойств достигается ценой введения искажений в виде переменного коэффициента увеличения изображения вдоль оси дальности. Эти искажения устраняются путем введения в плоскость изображения на выходе устройства узкой вертикальной диафрагмы. На непрерывно перемещающуюся фотопленку записывается поток света, пронизанный через такую диафрагму. При движении фотопленки с исходной записью выходная плоскость с изображением также перемещается, но со скоростью, которая

пропорциональна линейному увеличению изображения. В результате повышенная скорость движения изображения при малых значениях дальности компенсируется увеличенными размерами изображения. Отношение скоростей перемещения фотопленок с исходной записью и с изображением выбирают равным отношению масштабов  $p/q$ . Тогда при всех дальностях соотношение масштабов будет требуемым независимо от фокусных расстояний линз.

### § 7-31. Апостериорная обработка изображений. Аподизация

Когерентные оптические системы позволяют весьма эффективно производить апостериорную обработку искаженных изображений. Для того чтобы такая обработка была возможна, искажения, приводящие к ухудшению изображения, должны описываться одной, общей для всего изображения, функцией рассеяния. Тогда искаженное поле  $f(\mathbf{x})$  будет связано с неискаженным полем  $f_0(\mathbf{x})$  соотношением свертки:

$$f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}), \quad (7.31.1)$$

где  $g(\mathbf{x})$  — функция рассеяния. Преобразуя сигнал  $f(\mathbf{x})$  в плоскость пространственных частот, т. е. осуществляя двумерное преобразование Фурье, получаем

$$F(\omega) = F_0(\omega) G(\omega), \quad (7.31.2)$$

где  $G(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[g(\mathbf{x})]$  — модуляционная передаточная функция процесса искажения. Для нахождения функции  $G(\omega)$  используют тот факт, что при  $f_{01}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$  функция

$$f_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad (7.31.3)$$

т. е. размывание точечного изображения, полностью определяет функцию разброса  $g(\mathbf{x})$ , а следовательно, и ее фурье-образ  $G(\omega)$ . Если  $g(\mathbf{x})$  является быстро меняющейся функцией времени, например в случае турбулентной среды, приходится заводить каталог функций разброса для каждой фотографии. Для этого турбулентная среда вместе с волной от излучаемого предмета одновременно просвечивается волной от точечного источника. Его размazanное изображение, равное функции разброса  $g(\mathbf{x})$ , регистрируется сбоку на том же кадре, что и искаженное изображение.

При известном  $G(\omega)$  истинное поле находится путем операции умножения:

$$F_0(\omega) = \frac{F(\omega)}{G(\omega)}. \quad (7.31.4)$$

Рецепты выполнения такой операции были рассмотрены выше. Подобный метод улучшения качества изображений был испытан

как непосредственно в оптических системах, так и путем пересчета на электронно-вычислительной машине.

К методам улучшения пространственной структуры сигнала следует отнести метод *аподизации*. Этот метод состоит в подборе такого амплитудного пропускания зрачка системы, при котором ослабляются боковые лепестки дифракционной картины резко очерченной диафрагмы. Появление боковых лепестков в дифракционной картине аналогично эффекту оптических выбросов или

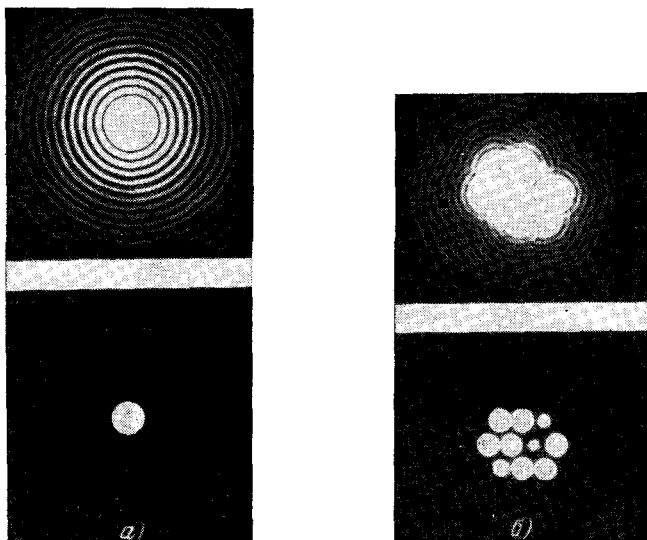


Рис. 7.70. Влияние аподизации на вид картины дифракции далекого поля. Вверху— дифракция без аподизации; внизу— после аподизации.

эффекту Гиббса. Как известно, эффект Гиббса полностью исчезает, если от зрачка, амплитудное пропускание которого описывается прямоугольным импульсом, перейти к зрачку, описываемому треугольным импульсом. Наиболее подходящей формой зрачка является такая, амплитудное пропускание которой описывается функцией Гаусса. Действительно, в этом случае картина дифракции далекого поля описывается фурье-образом зрачка, а фурье-образ функции Гаусса равен функции Гаусса. Боковые лепестки при этом практически полностью исчезают. Процесс аподизации сопровождается неизбежным уширением основного пика дифракционной картины. На рис. 7.70 приведены результаты аподизации картины дифракции далекого поля. С помощью аподизации удается разделить изображение двух близко расположенных предметов, когда они очень сильно отличаются между собой по интенсивности.

### § 7-32. Устранение сферической aberrации линз

В основе метода апостериорного устранения сферической aberrации линз лежит тот факт, что сферическая aberrация линз не зависит от координаты точки изображения, т. е. описывается пространственно инвариантной передаточной функцией. Для того чтобы зарегистрировать передаточную функцию линзы, используют систему, приведенную на рис. 7.71. Параллельный

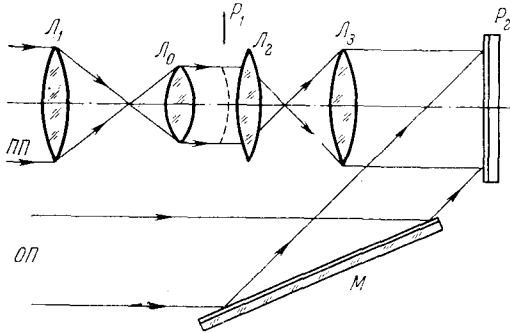


Рис. 7.71. Схема получения голограммы фронта волны, содержащей в себе сферические искажения линзы  $L_0$ .

пучок когерентного света просвечивает рабочую линзу  $L_0$ . Плоская волна испытывает искажения, которые описываются фазовой функцией. Поэтому для регистрации этих искажений требуется голографическая система. Опорный пучок применяется плоский, голограмма располагается нормально к исследуемой волне света. Полученная голограмма используется в качестве корректирующей пластинки, которую помещают в плоскости  $P_1$ .

В проведенных экспериментах с линзой, имеющей фокусное расстояние  $f = 80$  мм и светосилу  $1 : 3,5$ , размер пятна рассеяния удалось уменьшить с  $2$  мм без корректирующей голограммы до  $5$  мкм с корректирующей голограммой.

Корректирующая голограмма не должна вносить фазовых искажений. Использование иммерсионной жидкости улучшает работу корректирующей голограммы.

В заключение следует отметить, что голографический метод устранения сферической aberrации линз еще не может конкурировать с обычными методами гашения aberrации, которые пригодны как при когерентном, так и при некогерентном освещении. Корректирующая голограмма может работать только при когерентном освещении.

## ЛИТЕРАТУРА

### *Статъи*

1. G a b o r D., Theory of communication, J. of IEE, **93**, part III, No. 26, 429—457 (1946).
2. M e y e r - E p p l e r W., Die funktionanalytische Behandlung des Schattenproblems, *Optik*, **1**, 465—474 (1946).
3. P. M i c h e l D u f f i e u x, Remarques sur les phénomènes de diffraction, *Annales de Physique*, **2**, 95—132 (1947).
4. G a b o r D., Diffraction microscopy, *J. Appl. Phys.*, **19**, 1191 (1948).
5. G a b o r D., A new microscopic principle, *Nature*, **161**, 777—778 (1948).
6. G a b o r D., Microscopy by reconstructed wave fronts, *Proc. Roy. Soc.*, **197**, 454—486 (1949).
7. G a b o r D., Communication theory and physics, *Phil. Mag.*, **41**, 1161—1187 (1950).
8. R o g e r s G. L., Gabor diffraction microscopy: the hologram as a generalized zone plate, *Nature*, **166**, 237 (1950).
9. G a b o r D., Diffraction microscopy, *Research*, **4**, 107—112 (1951).
10. G a b o r D., Microscopy by reconstructed wave fronts, II, *Proc. Phys. Soc.*, **64B**, 449—469 (1951).
11. H o p k i n s H. H., The concept of partial coherence in optics, *Proc. Roy. Soc.*, **A208**, 263—277 (1951).
12. E l i a s P., G r e y D. S., R o b i n s o n D. Z., Fourier treatment of optical processes, *J. Opt. Soc. America*, **42**, 127—134 (1952).
13. E l i a s P., Optics and communication theory, *J. Opt. Soc. America*, **43**, 229—232 (1953).
14. G a b o r D., A summary of communication theory, *Proc. London Symposium*, 1952 in W. Jackson (ed.), *Communication theory*, N.Y., 1953.
15. H o p k i n s H. H., On the diffraction theory of optical images, *Proc. Roy. Soc.*, **A217**, 408—432 (1953).
16. M a r é c h a l A., C r o c e P., Un filtre de fréquences spatiales pour l'amélioration du contraste des images optiques, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **237**, 607 (1953).
17. R h o d e s J. E., Jr., Analysis and synthesis of optical images, *Amer. J. Phys.*, **21**, 337—343 (1953).
18. C h e a t h a m T. P., K o h l e n b e r g A., Optical filters: their equivalence to and difference from electrical networks, *IRE Convent. Record*, part 4, 6—12 (1954).
19. T h e o d o r e A. F o r r e s t e r, G u d m a n d s e n R. A., J o h n s o n P. O., Photoelectric mixing of incoherent light, *Phys. Rev.* **99**, 1691—1700 (1955).
20. C r o c e P., Étude d'une méthode de filtrage des images optiques, *Revue d'Optique, Théorique et Instrumentale*, **35**, 569—589, 642—656 (1956).
21. F o r r e s t e r A. T., On coherence properties of light waves, *Amer. J. Phys.*, **24**, 192—196 (1956).
22. L o h m a n n A., Optische Einseitenbandübertragung angewandt auf das Gabor Mikroskop, *Optica Acta*, **3**, 97—99 (1956).

23. Meyer-Eppler W. and Darius G., Two-dimensional photographic autocorrelation of pictures and alphabet letters, Third London Symposium on «Information Theory» (12—16 Sept. 1955), Ed. Colin Cherry, London, 1956.
24. O'Neill E. L., Spatial filtering in optics, IRE Trans. on Inform. Theory, IT-2, 56-65 (1956).
25. Toraldo di Francia G., On resolving power and information, J. Opt. Soc. America, 46, 72 (1956).
26. Connes P., Un nouveau type de spectromètre l'interféromètre à réseaux, Optica Acta, 4, 136—144 (1957).
27. Гамо Н., Intensity matrix and degree of coherence, J. Opt. Soc. America, 47, 976 (1957).
28. Синельников К. Д., Рязанов А. И., К вопросу о повышении разрешающей способности оптических систем, Оптика и спектроскопия, 5, 184—190 (1958).
29. Cowley J. M., Moodie A. F., A new formulation of scalar diffraction theory for restricted aperture, Proc. Phys. Soc., 71, 533—545 (1958).
30. Dugundji J., Envelopes and pre-envelopes of real waveforms, IRE Trans. on Inform. Theory, IT-4, 53—57 (1958).
31. Гамо Хидея, Intensity matrix for the image obtained by a circular aperture, J. Appl. Phys., Japan, 27, 577—584 (1958).
32. Гамо Хидея, Transformation of intensity matrix by the transmission of a pupil, J. Opt. Soc. America, 48, 136—137 (1958).
33. Ароуан Г. Ф., The technique of spatial filtering, Proc. IRE, 47, 1561—1568 (1959).
34. Bickel H. J., Spectrum analysis with delay-line filters, 1959, IRE Wescon Conv. Record, 3, part 8, 59—67 (1959).
35. Карташев А. И., Оптические системы с повышенной разрешающей способностью, Оптика и спектроскопия, 9, 394—398 (1960).
36. Cutrona L. J., Leith E. N., Palermo C. J. and Porcello L. J., Optical data processing and filtering systems, IRE Trans. on Inform. Theory, IT-6, 386—400 (1960).
37. Гамо Хидея, An aspect on information theory in optics, IRE Int. Conv. Record, part 4, 189—203 (1960).
38. Mertz L., Image coding and measurement, J. Opt. Soc. America, 50, No. 2, Adv. (1960).
39. Mertz L., Spectroscopic coding and measurement, J. Opt. Soc. America, 50, No. 1, IX, Adv. (1960).
40. Turin G. L., An introduction to matched filters, IRE Trans. on Inform. Theory, IT-6, 311—329 (1960).
41. Gabor D., Light and information, Progress in Optics, Ed. E. Wolf, 1, 109—153 (1961).
42. Hornitz L. P., Shelton G. L., Pattern recognition using autocorrelation, Proc. IRE, 49, 175—185 (1961).
43. Mertz L., Fresnel coding for photographic devices, J. Opt. Soc. America, 51, No. 5, IX, Adv. (1960).
44. Денисюк Ю. Н., Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения, ДАН СССР, 144, 1275 (1962).
45. Leith E. N., Photographic film as an element of a coherent optical system, Photographic Sci. and Eng., 6, 75—80 (1962).
46. Leith E. N., Upatnieks Juris, Reconstructed wave fronts and communication theory, J. Opt. Soc. America, 52, 1123—1130 (1962).
47. Mertz L., Some mathematical tools, J. Opt. Soc. America, 52, No. 4, XIV Advertisement (1962).
48. Mertz L. and Young N. O., Fresnel transformations of images, Proc. of the Conf. on Optical Instruments and Techniques, London, 1961, Ed. K. J. Habell, Chapman and Hall., 1962.

49. Vanasse G. A., Fejer series approximation to spectral functions obtained by interferometric techniques, *J. Opt. Soc. America*, **52**, 472 (1962).
50. Денисюк Ю. Н., Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения, Автореферат диссертации, Л., ГОИ, 1963.
51. Денисюк Ю. Н., Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения, *Оптика и спектроскопия*, **15**, 522—532 (1963).
52. Денисюк Ю. Н. и Протас И. Р., Усовершенствованные липпмановские фотографические пластинки для регистрации стоячих световых волн, *Оптика и спектроскопия*, **14**, 721—725 (1963).
53. Carpenter R., Comparison of AM and FM reticle systems, *Appl. Opt.*, **2**, 229—236 (1963).
54. Girard A., Spectromètre à grilles, *Appl. Opt.*, **2**, 79—87 (1963).
55. Girard A., Spectromètre à grilles, *J. Phys. et Rad.*, **24**, 139—141 (1963).
56. Van Heerden P. J., A new optical method of storing and retrieving information, *Appl. Opt.*, **2**, 387—392 (1963).
57. Van Heerden P. J., Note on optical information storage in solids, *Appl. Opt.*, **2**, 764 (1963).
58. Van Heerden P. J., Theory of optical information storage in solids, *Appl. Opt.*, **2**, 393—400 (1963).
59. Leith E. and Upatnieks J., Wave front reconstruction with continuous tone objects, *J. Opt. Soc. America*, **53**, 1377—1381 (1963).
60. Lukosz W., Ein Verfahren zur optischen Abbildung mit einem über die klassische Auflösungs Grenze hinausgehenden Auflösungsvermögen, *Z. Naturforsch.*, **18a**, 436—438 (1963).
61. Maréchal A., Optical filtering by double diffraction, *Optical Processing of Information*, Ed. by D. K. Pollock a. c., 1963, p. 20—30.
62. Tsujiuchi J., Correction of optical images by compensation of aberrations and by spatial frequency filtering, *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf., **2**, 133—180 (1963).
63. Young N. O., Photography without lenses and mirrors, *Sky and Telescope*, **25**, No. 1, 8—9 (1963).
64. Bernstein K. L., Spatial filtering with partially coherent light, *J. Opt. Soc. America*, **54**, 571 (1964).
65. Drougard R., Optical transfer properties of fiber bundles, *J. Opt. Soc. America*, **54**, 907—914 (1964).
66. Gamon H., Matrix treatment of partial coherence, *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf, **3**, 189—332 (1964).
67. Harris J. L., Diffraction and resolving power, *J. Opt. Soc. America*, **54**, 931—936 (1964).
68. Kozma A., Kelly D. L., Spatial filtering of signals with additive noise, *J. Opt. Soc. America*, **54**, 1395 (1964).
69. Leith E. N. and Upatnieks J., Wave front reconstruction with diffused illumination and three-dimensional objects, *J. Opt. Soc. America*, **54**, 1295—1301 (1964).
70. Lugt A. V., Signal detection by complex spatial filtering, *IEEE Trans. IT-10*, 139—145 (1964).
71. Mertz L., Another optical Fresnel transformation, *J. Opt. Soc. America*, **54**, No. 10 IV Advertisement (1964).
72. Papoulis A., An estimate of the variation of a band-limited process, *IEEE Trans.*, **IT-10**, 72—74 (1964).
73. Stroke G. W. and Falconer D. G., Attainment of high resolutions in wavefront reconstruction imaging, *Phys. Lett.*, **13**, 306—309 (1964).
74. Васильев Л. А. и Синеглазов О. М., Сравнительные характеристики теневого метода ножа и метода фазового контраста, *Оптика и спектроскопия*, **18**, 1065—1071 (1965).



75. Денисюк Ю. Н., Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения, II, Оптика и спектроскопия, 18, 275—283 (1965).
76. Лейт И., Упатникс Ю., Фотографирование с помощью лазера, УФН, 87, 521—538 (1965).
77. Allen L., Jones D. G. C., Laser-produced speckle patterns, J. Opt. Soc. America, 55, 1188 (1965).
78. Armitage J. D., Lohmann A. W., Herrick R. B., Absolute contrast enhancement, Appl. Opt., 4, 445—451 (1965).
79. Armitage J. D., Lohmann A. W., Character recognition by incoherent spatial filtering, Appl. Opt., 4, 1666 (1965).
80. Armitage J. D. and Lohmann A. W., Character recognition by incoherent spatial filtering, Appl. Opt., 4, 461—467 (1965).
81. Armitage J. D. and Lohmann A. W., Theta modulation in optics, Appl. Opt., 4, 399—403 (1965).
82. Armstrong J. A., Fresnel holograms; their imaging properties and aberrations, IBM J. Research and Development, 9, 171—178 (1965).
83. Bertolotti M., Daino B., Gori F., Sette D., Coherence properties of a laser beam, Nuovo Cim., (10), 38, 1505—1514 (1965).
84. Cathey W. T., Three-dimensional wave front reconstruction using a phase hologram, J. Opt. Soc. America, 55, 457 (1965).
85. Cutrona L. J., Recent developments in coherent optical technology, Opt. and Electro-Opt. Information Processing, 83—123 (1965).
86. Dobrin M. B., Ingalls A. L., Long J. A., Velocity and frequency filtering of seismic data using laser light, Geophysics, 30, 1144—1178 (1965).
87. Einighammer H. J., Zur Abbildung von Röntgensternen mit dem Hologramm-Telescop, Opt., 23, 627—641 (1965/1966).
88. Falconer D. G., Winthrop J. T., Fresnel transform spectroscopy, Phys. Lett., 14, 190—191 (1965).
89. Gabor D., Character recognition by holography, Nature, 208, 422—423 (1965).
90. Gabor D., Stroke G. W., Restrick R., Funkhouser A. and Brumm D., Optical image synthesis (complex amplitude addition and subtraction) by holographic Fourier transformation, Phys. Lett., 18, 116—118 (1965).
91. Gabor D., Stroke G. W., Brumm D., Funkhouser A., Labeyrie A., Reconstruction of phase objects by holography, Nature, 208, 1159—1162 (1965).
92. Goldfischer L. I., Autocorrelation function and power spectral density of laser-produced speckle patterns, J. Opt. Soc. America, 55, 247—254 (1965).
93. Ryuichi Hioki, Takeomi Suzuki, Coherent light transmitted through optical fiber, J. Appl. Phys. Japan, 4, 817 (1965).
94. Izzo N. F., Optical correlation technique using a variable reference function, Proc. IEEE, 53, 1740—1741 (1965).
95. Jackson P. L., Diffractive processing of geophysical data, Appl. Opt., 4, 419—427 (1965).
96. Kelly D. N., Spatial frequency, bandwidth and resolution, Appl. Opt., 4, 435—437 (1965).
97. King G. W., Photooptical storage and processing of information, Appl. Opt., 4, 369—371 (1965).
98. Kozma A. and Kelly D. L., Spatial filtering for detection of signals submerged in noise, Appl. Opt., 4, 387—392 (1965).
99. Leith E. N., Upatnieks J., Lugt A. V., Hologram microscopy and lens aberration compensation by the use of holograms, Appl. Opt., 5, 589 (1966).

100. Leith E. N., Kozma A., Upatnieks J., Coherent optical systems for data processing spatial filtering and wave front reconstruction, *Opt. and Electro-Opt. Information Processing*, 143—158 (1965).
101. Leith E., Upatnieks J. and Haines K., Microscopy by wave front reconstruction, *J. Opt. Soc. America*, 55, 981—986 (1965).
102. Leith E., Upatnieks J., Photography by laser, *Sci. Am.*, 212, No. 6, 24—35 (1965).
103. Lohmann A. W., Reconstruction of vectorial wave fronts, *Appl. Opt.*, 4, 1667—1668 (1965).
104. Lohmann A. W., Wave front reconstruction for incoherent objects, *J. Opt. Soc. America*, 55, 1555—1556 (1965).
105. Pennington K. S. and Lin L. H., Multicolor wave front reconstruction, *Appl. Phys. Lett.*, 7, 56—57 (1965).
106. Preston K., Jr., Computing at the speed of light, *Electronics*, 38, No. 18, 72—83 (1965).
107. Rogers G. L., Phase-contrast holograms, *J. Opt. Soc. America*, 55, 1181 (1965).
108. Stroke G. W. and Funkhouser A. T., Fourier transform spectroscopy using holographic imaging without computing and with stationary interferometers, *Phys. Lett.*, 16, 272—274 (1965).
109. Stroke G. W. and Restrick R. C., Holography with spatially noncoherent light, *Appl. Phys. Lett.*, 7, 229—231 (1965).
110. Stroke G. W., Falconer D. G., Lensless Fourier-transform method for optical holography, *Appl. Phys. Lett.*, 6, 201—203 (1965).
111. Stroke G. W., Restrick R., Funkhouser A. and Brumm D., Resolution-retrieving compensation of source effects by correlative reconstruction in high-resolution holography, *Phys. Lett.*, 18, 274—275 (1965).
112. Stroke G. W., Restrick R., Funkhouser A., Brumm D., Resolution-retrieving source-effect compensating in holography with extended sources, *Appl. Phys. Lett.*, 7, 178—179 (1965).
113. Tuttle F., Optical aids in signal processing, *Appl. Opt.*, 4, 149 (1965).
114. Viénot Jean-Charles, Bulabois J., Filtrage par hologramme d'un signal optique complexe; application au recalage des cartes des radar, *Rev. Opt.*, 44, 621—624 (1965).
115. Бахрах Л. Д., Курочкин А. П., Об использовании оптических систем и метода голографии для восстановления диаграмм направленности антенн СВЧ по измерениям поля в зоне Френеля, *ДАН СССР*, 171, 1309—1312 (1966).
116. Вайнштейн Б. К. и Косоуров Г. И., Лазер как источник для оптической трансформации Фурье, *Кристаллография*, 11, 921—923 (1966).
117. Городинский Г. М. и Галкина В. Н., К вопросу о нарушении когерентности света матовыми стеклянными поверхностями, *Ж. прикл. спектроскопии*, 5, 451—455 (1966).
118. Денисюк Ю. Н., К вопросу о фотографии, воспроизводящей полную иллюстрацию действительности изображаемого объекта, *Ж. научн. и прикл. фотографии и кинематографии*, 11, 46—56 (1966).
119. Зайдель А. Н., Островская Г. В., Островский Ю. И., Челидзе Т. Я., Голографирование лазерной искры с временным разрешением, *ЖТФ*, 36, 2208—2210 (1966).
120. Зайдель А. Н., Константинов В. Б., Островский Ю. И., Лазерная резольвометрия, *Ж. научн. и прикл. фотографии и кинематографии*, 11, 381 (1966).
121. Клименко И. С., Рукман Г. И., Габоровское восстановление волнового фронта с помощью лазера, *Оптика и спектроскопия*, 21, 751—752 (1966).

122. Комар А. П., Стабников М. В., Турухано Б. Г., Восстановление изображений прозрачных преломляющих объектов с помощью фазовых голограмм, ДАН СССР, **169**, 1052—1053 (1966).
123. Косоуров Г. И., Калинкина И. Н., Головей М. П., Восстановление изображения по голограмме в монохроматическом свете, Письма ЖЭТФ, **4**, 84—86 (1966).
124. Микаэлян А. Л., Бобринев В. И., Шумовые ограничения при получении объемных изображений, Письма ЖЭТФ, **4**, 172—174 (1966).
125. Налимов И. П., Лазерная голография — основные принципы и применение, Зарубежная радиоэлектроника, № 2, 3 (1966).
126. Обреимов И. В., Газовый лазер в качестве источника освещенности ДАН СССР, **171**, 1305—1308 (1966).
127. Островская Г. В., Островский Ю. И., Голографическое исследование лазерной искры, Письма ЖЭТФ, **4**, 121—124 (1966).
128. Сороко Л. М., Голография и интерференционная обработка информации, УФН, **90**, 3—46 (1966).
129. De Bitetto D. J., On the use of moving scatterers in conventional holography, Appl. Phys. Lett., **8**, 78—80 (1966).
130. Brown V. R., Lohmann A. W., Complex spatial filtering with binary masks, Appl. Opt., **5**, 967—969 (1966).
131. Cathey W. T., Jr., Spatial phase modulation of wave fronts in spatial filtering and holography, J. Opt. Soc. America, **56**, 1167—1171 (1966).
132. Champagne E. D., Transform relations in coherent systems, Appl. Opt., **5**, 1088 (1966).
133. Cochran G., New method of making Fresnel transform with incoherent light, J. Opt. Soc. America, **56**, 1513—1517 (1966).
134. Consideine P. S., Effects of coherence on imaging systems, J. Opt. Soc. America, **56**, 1001—1009 (1966).
135. Cooper D. C., Méthodes optiques de traitement des signaux, Electronique, No. **64**, 369—376 (1966).
136. Cornacchio J. V., Farnham K. A., On the measurement of the complex spatial coherence of a He—Ne laser beam, Nuovo Cim. (10), **42B**, 108—120 (1966).
137. Cutrona L. J., Leith E. N., Porcellio L. J., Vivian W. E., On the application of coherent optical processing techniques to synthetic-aperture radar, Proc. IEEE, **54**, 1026—1032 (1966).
138. Falconer D. G., Optical processing of bubble chamber photographs, Appl. Opt., **5**, 1365—1369 (1966).
139. Faster Fourier analysis, Sci. Am., **215**, No. 4, Oct. 1966, p. 46.
140. Frieden B. Roy, Image evaluation by use of the sampling theorem, J. Opt. Soc. America, **56**, 1355—1362 (1967).
141. Friesem A. A., Fedorowicz R. J., Recent advances in multi-color wave front reconstruction, Appl. Opt., **5**, 1085—1086 (1966).
142. Gabor D., Holography of the «Whole picture», New Scientist, **29**, No. 4, 74—78 (1966).
143. Gabor D., Les transformations de l'information en optique, Opt. Acta, **13**, 299—310 (1966).
144. Gabor D., Goss W. P., Interference microscope with total wave front reconstruction, J. Opt. Soc. America, **56**, 849—858 (1966).
145. Gabor D., Wellenfront-rekonstruktion oder «Holographie», Phys. Bl., **22**, 256—265 (1966).
146. Goodman J. W., Huntley W. H., Jr., Jackson D. W., Lehmann M., Wave front-reconstruction imaging through random media, Appl. Phys. Lett., **8**, 311—313 (1966).

147. Kozma A., Photographic recording of spatially modulated coherent light, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 428—432 (1966).
148. Leith E. N., Cutrona L. J., Porcellio L. J., Coherent optical techniques for radar data processing, OSA, 1966, Ann. Meet. Prog., 18—21 Okt. 1966, WD-1.
149. Leith E. N., Kozma A., Upatnieks J., Marks J. and Massey N., Holographic data storage in three-dimensional media, *Appl. Opt.*, **5**, 1303—1311 (1966).
150. Leith E. N., Palermo C. J., Some filtering operations using coherent optics, *Proc. Symp. on Generalized Networks*, N.Y., 1966, 743—751 (1967).
151. Leith E. N. and Upatnieks J., Holographic imagery through diffusing media, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 523 (1966).
152. Lin H., Pennington K. S., Stroke G. W., Labeyrie A. E., Multicolor holographic image reconstruction with white-light illumination, *Bell. Syst. Techn. J.*, **45**, 659—660 (1966).
153. Loewenstein E. V., The history and current status of Fourier transform spectroscopy, *Appl. Opt.*, **5**, 845—854 (1966).
154. Lohmann A., Brown B. R., Complex spatial filtering with binary masks, *Appl. Opt.*, **5**, 967 (1966).
155. Lowenthal S., *Laser et traitement de l'information*, *Atomes*, **231**, 163—172 (1966).
156. Lugt A. V., Operational notation for the analysis and synthesis of optical data-processing systems, *Proc. IEEE*, **54**, 1055—1063 (1966).
157. Lugt A. V., Practical considerations for the use of spatial carrier-frequency filters, *Appl. Opt.*, **5**, 1760—1765 (1966).
158. Lukosz W., Optical systems with resolving powers exceeding the classical limit, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 1463—1472 (1966).
159. Lurie M., Effects of partial coherence on holography with diffuse illumination, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 1369—1372 (1966).
160. Mandel L., Wave front reconstruction with light of finite coherence length, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 1636 (1966).
161. Mertz L., Image transformation, I, *J. Opt. Soc. America*, **56**, No. 11, VI, Advt. 1966.
162. Mertz L., Image transformation, II, *J. Opt. Soc. America*, **56**, No. 12, VI, Advt. 1966.
163. Papoulis A., Error analysis in sampling theory, *Proc. IEEE*, **54**, 947—955 (1966).
164. Peters P. J., Incoherent holograms with mercury light source, *Appl. Phys. Lett.*, **8**, 209—210 (1966).
165. Rau J. E., Detection of differences in real distributions, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 1490—1491 (1966).
166. Ring J., Selby M. J., Mock interferometer, II, Construction and test, *Infrared Phys.*, **6**, 33—43 (1966).
167. Rogers G. L., Polarization effects in holography, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 831 (1966).
168. Sakali Hajime, Vanasse George A., Hilbert transform in Fourier spectroscopy, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 131—132 (1966).
169. Selby M. J., Mock interferometer, I, Theory, *Infrared Phys.*, **6**, 21—32 (1966).
170. Simon J. C., La reconnaissance des formes, *Atomes*, **31**, 157—162 (1966).
171. Steel W. H., Two-beam interferometry, *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf, **5**, 145—195 (1966).
172. Takeomi Suzuki, Interferometric uses of optical fiber, *Japan J. Appl. Phys.*, **5**, 1065—1074 (1966).

173. Suzuki T., Hioki R., Frequency response of photographic emulsion in holography, *Japan J. Appl. Phys.*, **5**, 1257—1258 (1966).
174. Suzuki T., Hioki R., Speckled diffraction pattern and source effects on resolution limit in holography, *Japan J. Appl. Phys.*, **5**, 814—817 (1966).
175. Tanner L. H., On the holography of phase objects, *J. Sci. Instr.*, **43**, 346 (1966).
176. Thompson B. J., Ward J. H., Particle sizing — the first direct use of holography, *Scientific Research*, **1**, 11, 37 (1966).
177. Thompson B. J., Parrent G. B., Justh B., Ward J. A., Readout technique for the laser fog disdrometer, *J. Appl. Meteor.*, **5**, 343 (1966).
178. Tollin P., Main P., Rossmann M. G., Stroke G. W., Restrick R. C., Holography and its crystallographic equivalent, *Nature*, **209**, 603—604 (1966).
179. Upatnieks J., Lugt A. V., Leith E., Correction of lens aberrations by means of holograms, *Appl. Opt.*, **5**, 589—593 (1966).
180. Winthrop J. T., Worthington C. R., Convolution formulation of Fresnel diffraction, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 588—591 (1966).
181. Winthrop J. T., Worthington C. R., Fresnel-transform representation of holograms and hologram classification, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 1362—1368 (1966).
182. Александров Е. Б., Бонч-Бруевич А. М., Исследование поверхностных деформаций тел с помощью голограммной техники, *ЖЭТФ*, **37**, 360—369 (1967).
183. Аристов В. В., Броуде В. Л., Ковалевский Л. В., Полянский В. К., Тимофеев В. Б., Шехтман В. Ш., О голографии без опорного пучка, *ДАН СССР*, **177**, 65—67 (1967).
184. Бахрах Л. Д., Соболев Г. А., Фридман Г. Х., Получение голограмм трехмерных объектов, *Изв. вузов, Радиофизика*, **10**, 589—590 (1967).
185. Бахрах Л. Д., Владимирова О. Н., Курочкин А. П., Соболев Г. А., Фридман Г. Х., Применение методов когерентной оптики и голографии к задачам антенной техники и обработки информации, *Сб. «Антенны»*, вып. 2, 33—54, «Связь», 1967.
186. Денисюк Ю. Н., Голография и работы ГОИ по ее развитию, *Оптико-механическая промышленность*, № 11, 18 (1967).
187. Денисюк Ю. Н., Стаселько Д. И., О возможности получения голограмм с использованием референтного луча, длина волны которого отличается от длины волны излучения, рассеянного объектом, *ДАН СССР*, **176**, 1274—1275 (1967).
188. Дерюгин И. А., Свет как носитель информации, *сб. «Квантовая электроника»*, вып. 2, 185—214, Киев, 1967.
189. Дерюгин И. А., Курашов В. Н., Влияние вводимой информации на коллимацию когерентного светового потока, *сб. «Квантовая электроника»*, вып. 2, 247—266, Киев, 1967.
190. Дерюгин И. А., Курашов В. Н., Информационная емкость фотонного поля и оптимизация оптических систем передачи информации, *сб. «Квантовая электроника»*, вып. 2, 229—246, Киев, 1967.
191. Какичапвили Ш. Д., Мумаладзе В. В., Рамишвили Н. М., Новый способ получения голограмм с высшим разрешением, *Письма ЖЭТФ*, **5**, 370—372 (1967).
192. Карташев А. И., Королев А. Н., О методе формирования изображения с помощью оптических систем, имеющих повышенную разрешающую способность в одном направлении, *Оптика и спектроскопия*, **23**, 450—454 (1967).

193. Клименко И. С., Рукман Г. И., К вопросу о восстановлении волнового фронта с помощью голограмм, переданных по телевизионному тракту, ЖЭТФ, 37, 1532—1534 (1967).
194. Клименко И. С., Матинян Е. Г., Рукман Г. И., О восстановлении в белом свете изображений интерференционных картин, формируемых голограммами, полученными путем двойной экспозиции, Письма ЖЭТФ, 6, 535—536 (1967).
195. Ключкин Л. М., Померанцев Н. М., Фабриков В. А., Применение магнитных пленок в голографии, Изв. АН СССР, сер. физич., 31, 386—391 (1967).
196. Комар А. П., Стабников М. В., Турухано Б. Г., Турухано Н., Голографические решетки на тонкой металлической пленке. Оптика и спектроскопия, 23, 827—828 (1967).
197. Комар А. П., Стабников М. В., Турухано Б. Г., Голография с прямым опорным пучком, ДАН СССР, 173, 1059—1061 (1967).
198. Микаэлян А. Л., Разумов Л. Н., Сахарова Н. А., Турков Ю. С., О получении голограмм Фурье с помощью импульсного рубинового лазера, Письма ЖЭТФ, 5, 145—150 (1967).
199. Мустафин К. С., Селезнев В. А., Штырков Е. И., Применение голографии для исследования распределения температурного поля пламени, Оптика и спектроскопия, 22, 319 (1967).
200. Никитюк Н. М., Свет, кванты и вычислительная техника, сб. «Обзор достижений зарубежной вычислительной техники», стр. 48, «Знание», 1967.
201. Пистолькорс А. А., О разрешающей способности голограммы, ДАН СССР, 172, 334—337 (1967).
202. Сотский Б. А., О дифракции света с заданной функцией когерентности, Оптика и спектроскопия, 23, 446—449 (1967).
203. Турбович И. Т., Разложение периодических функций в ряд, аналогичный ряду Котельникова, Радиотехника, 22, № 8, 21—25 (1967).
204. Aleksoff C., Gas lasers as sources for holography, Appl. Opt., 6, 2191—2192 (1967).
205. Bauer A., Fontanel A., Grau G., The application of optical filtering in coherent light to the study of aerial photographs of Greenland glaciers, J. Graciology, 6, 781—793 (1967).
206. Bertolotti M., Gori F., Guattari G., Coherence requirements in holography, J. Opt. Soc. America, 57, 1526—1529 (1967).
207. Vouchareine P., Jacquinet P., Spectrographie par grille, J. Phys., 28, No. 3, 4, Suppl. 183—193 (1967).
208. Bryant John F., W. Thomas Hyde, Morrow Howard E., Diffraction patterns of alphanumeric characters, Appl. Opt., 6, 170 (1967).
209. Brungdahl O., Polarizing holography, J. Opt. Soc. America, 57, 545—546 (1967).
210. Burch J. J., A computer algorithm for the synthesis of spatial frequency filters, Proc. IEEE, 55, 599—601 (1967).
211. Burkhardt C. B., Storage capacity of an optically formed spatial filter for character recognition, Appl. Opt., 6, 1359—1366 (1967).
212. Caulfield H. J., Harris J. L., Light pipe holography, Appl. Opt., 6, 1272 (1967).
213. Connes J. and Connes P., Multiplex spectroscopy of planets, Sci. J., 3, No. 61—63 (1967).
214. Cutrona L. J., Correlation and pulse compression, IEEE Inter. Conv. Res., 15, No. 11, 99—105 (1967).
215. Einghammer H., Elwert G., Mayer U., Fresnel-microzone-plates for X-ray images of the sun, Space Res. Amst., N. Holl. Pub. Co., 7/2, 1336—1341 (1967).

216. Fellgett P., The genesis of multiplex spectroscopy, *Sci. J.*, 3, No. 4, 58—61 (1967).
217. Fischer Fred, Interferenz von Licht verschiedener Frequenz, *Z. Phys.* 199, 544—557 (1967).
218. Friesem A. A., Kozma A., Adams G. F., Recording parameters of spatially modulated coherent wave fronts, *Appl. Opt.*, 6, 851—856 (1967).
219. Friesem A. A., Zelenka J. S., Effects of film nonlinearities in holography, *Appl. Opt.*, 6, 1755—1759 (1967).
220. Friesem A. A., Fedorowicz R. J., Multicolor wave front reconstruction, *Appl. Opt.*, 6, 529—536 (1967).
221. Fujimura Sadao, Isobe Takashi, Extraction of a property of visual patterns by Fraunhofer diffraction, *Japan J. Appl. Phys.*, 6, 516—519 (1967).
222. Gabor D., Holograms as optical elements, *J. Opt. Soc. America*, 57, 562 (1967).
223. Gabor D., Holography and communications, *Proc. Symp. on Generalized Networks*, N.Y., 1966, 1—12 (1967).
224. Gabor D., Holography: photography without lenses in three dimensions, *J. Roy. Soc. Arts.*, 115, 246—256; 256—259 (1967).
225. Goodman J. W., Lawrence R. W., Digital image formation from electronically detected holograms, *Appl. Phys. Lett.*, 11, 77—79 (1967).
226. Goodman J. W., Effects of film nonlinearities on wave front-reconstruction images of diffuse objects, *J. Opt. Soc. America*, 57, 560, WB-14 (1967).
227. Goodman J. W., Film-gram noise in wave frontreconstruction imaging, *J. Opt. Soc. America*, 57, 493—502 (1967).
228. Goodman J. W., Temporal filtering properties of holograms, *Appl. Opt.*, 6, 857—859 (1967).
229. Hirsch P. M., Lesem L. B., Jordan J. A., Jr., Applications of computer-generated holograms, *Ann. Meet. OSA*, p. 8, WA-15 (1967).
230. Horman M. H., Efficiencies of zone plates and phase zone plates, *Appl. Opt.*, 6, 2011—2013 (1967).
231. Jackson P. L., Correlation function spatial filtering with incoherent light, *Appl. Opt.*, 6, 1272—1273 (1967).
232. Kogelnik H., Bragg diffraction in hologram grating with multiple internal reflections, *J. Opt. Soc. America*, 57, 431—433 (1967).
233. Leith E. N., Upatnieks J., Recent advances in holography, *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf, 6, 1—52 (1967).
234. Lesem L. B., Hirsch P. M., Jordan J. A., Jr., Computer display of digital images, *Ann. Meet. OSA*, p. 8, WA-14 (1967).
235. Lohmann A. W., Paris D. P., Binary Fraunhofer holograms, generated by computer, *Appl. Opt.*, 6, 1739—1748 (1967).
236. Lohmann A. W., Paris D. P., Werlich H. W., A computer generated spatial filter, applied to code translation, *Appl. Opt.*, 6, 1139—1140 (1967).
237. Lohmann A. W., Paris D. P., Variable Fresnel zone pattern, *Appl. Opt.*, 6, 1567—1570 (1967).
238. Lohmann A. W., Werlich H. W., Holographic production of spatial filters for code translation and image restoration, *Phys. Lett.*, 25A, 570—571 (1967).
239. Lowenthal S., Belvaux Y., Observation of phase objects by optically processed Hilbert transform, *Appl. Phys. Lett.*, 11, 49—51 (1967).
240. Lowenthal S., Belvaux Y., Progrès récents en optique cohérente: filtrage des fréquences spatiales, holographie, *Revue d'Optique*, 46, 1—64 (1967).

241. Lowenthal S., Belvaux Y., Reconnaissance des formes par filtrage des fréquences spatiales, *Opt. Acta*, **14**, 245—258 (1967).
242. Lugt A. V., The analysis and synthesis of optical information processing systems by operational notation, *Proc. Symp. on Generalized Networks*, N.Y., 1966, 735—741 (1967).
243. Lugt A. V., The effects of small displacement of spatial filters, *Appl. Opt.*, **6**, 1221—1225 (1967).
244. Lukosz W., Optical systems with resolving powers exceeding the classical limit, II, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 932—941 (1967).
245. Mandel L., Complex representation of optical fields in coherence theory, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 613—617 (1967).
246. Meyer A. J., Hickling R., Holograms synthesized on a computer-operated cathode-ray tube, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 1388—1389 (1967).
247. Papoulis A., Limits on bandlimited signals, *Proc. IEEE*, **55**, 1677—1686 (1967).
248. Papoulis A., Maximum intensity of diffraction patterns and apodization, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 362—366 (1967).
249. Papoulis A., Optical systems, singularity functions, complex Hankel transforms, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 207—213 (1967).
250. Papoulis A., Two-dimensional systems with applications to modern optics, *Symposium on Generalized Networks*, Polytechnic Institute of Brooklyn, April 12—14, 753—785 (1966).
251. Parrent G. B., Jr., Reynolds G. O., Space-bandwidth theorem for holograms, *J. Opt. Soc. America*, **56**, 1400—1401 (1967).
252. Rau J. E., Real-time correlation of spatial functions, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 562, WD-11 (1967).
253. Rau J. E., Real-time complex spatial modulation, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 798—802 (1967).
254. Reynolds G. O., Ward J. H., Coherence theory solution to the Pinhole camera, *SPIE-J.*, **5**, Oct.—Nov., 3—8 (1967).
255. Rosen L., Moire effects in computer-generated holograms, *Proc. IEEE*, **55**, 1736—1737 (1967).
256. Stetson K. A., Holographic for penetration, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 1060—1061 (1967).
257. Stigliani D. J., Mittra R., Semonin R. G., Resolving power of a zone plate, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 610—613 (1967).
258. Stroke G. W., Diffraction gratings, *Hand. der Physik*, Bd. 29, 426—754, 1967.
259. Stroke G. W., Zech R. G., Aposterior image correcting «Deconvolution» by holographic Fourier transform division, *Phys. Lett.*, **A25**, 89—90 (1967).
260. Stroke G. W., A reformulated general theory of holography, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 563 (1967).
261. Suzuki T., Experimental study of interference in optical fibers, *Japan, J. Appl. Phys.*, **6**, 348—355 (1967).
262. Tanner L. H., The scope and limitations of three-dimensional holography of phase objects, *J. Sci. Instr.*, **44**, 1011—1014 (1967).
263. Upatnieks J., Leith E. N., Holography with achromatic-fringe systems, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 563, WD-17 (1967).
264. Vanasse G. A., Sakai H., *Fourier-spectroscopy*, *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf, **6**, 259—330 (1967).
265. De Velis J. B., Raso D. J., Reynolds G. O., Effect of source size on the resolution in Fourier transform holography, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 843—844 (1967).
266. Watrasiewicz B. M., Character recognition by holography, *Nature*, **216**, 302—304 (1967).



267. Wilde H. J., *Measurements and analysis of two-dimensional optical correlations*, *J. Opt. Soc. America*, **57**, 583, FD-16 (1967).
268. Гуревич С. Б., Гаврилов Г. А., Константинов А. Б., Константинов В. Б., Островский Ю. И., Черных Д. Ф., Голографическая передача изображений через телевизионную систему, *ЖЭТФ*, **38**, 513—519 (1968).
269. Зайдель А. Н., Малхасян Л. Г., Маркова Г. В., Островский Ю. И., Стробоголографический метод изучения вибраций, *ФТИ им. А. Ф. Иоффе*, Л., 1968.
270. Зайдель А. Н., Островская Г. В., Островский Ю. И., Голографическая диагностика плазмы (обзор), *ЖЭТФ*, **38**, 1404—1419 (1968).
271. Комар А. П., Стабников М. В., Туруханов Б. Г., Туруханов Н., Голограммы следов заряженных частиц в пузырьковой тяжеложидкостной камере, *ФТИ им. А. Ф. Иоффе*, Л., 1968.
272. Мазанько И. П., О радиофизической трактовке голографии, *Радиотехника и электроника*, **13**, 530—532 (1968).
273. Микаэлян А. Л., Голография, «Знание», 1968 (сер. 9, «Радиоэлектроника и связь»).
274. Стаселько Д. И., Смирнов А. Г., Денисюк Ю. Н., О получении голограмм живого диффузного объекта с помощью одномодового рубинового лазера, *Ж. научн. и прикл. фотографии и кинематографии*, **13**, 135—136 (1968).
275. Туруханов Б. Г., Туруханов Н., Интерферометрический контроль голографических установок, *ЖТФ*, **38**, 757—758 (1968).
276. Birch K. G., A spatial frequency filter to remove zero frequency, *Opt. Acta*, **15**, 113—127 (1968).
277. De Bitetto D. J., Bandwidth reduction of hologram transmission systems by elimination of vertical parallax, *Appl. Phys. Lett.*, **12**, 176—178 (1968).
278. Burckhardt C. B., Information reduction in holograms for visual display, *J. Opt. Soc. America*, **58**, 241—246 (1968).
279. Burckhardt C. B., Optimum parameters and resolution limitation of integral photography, *J. Opt. Soc. America*, **58**, 71—78 (1968).
280. Carter William H., Aliasing in sampled holograms, *Proc. IEEE*, **56**, 96—98 (1968).
281. Collins Leland F., Diffraction theory description of bleached holograms, *Appl. Opt.*, **7**, 1236—1237 (1968).
282. Duffieux P. M., Les fonctions ponctuées et l'optique corpusculaire, *Appl. Opt.*, **7**, 1221—1231 (1968).
283. Gabor D., Holographic model of temporal recall, *Nature*, **217**, 584 (1968).
284. Gabor D., Improved holographic model of temporal recall, *Nature*, **217**, 1288—1289 (1968).
285. Haines K. A. and Brumm D. B., Holographic data reduction, *Appl. Opt.*, **7**, 1185—1189 (1968).
286. Hannes H., Interferometric measurements of phase structure in photographs, *J. Opt. Soc. America*, **58**, 140—141 (1968).
287. Hannes H., Interferometrische Messungen an Phasenstrukturen für die Holographie, *Optik*, **26**, 363—380 (1967/1968).
288. Hickling R., Scattering of light by spherical liquid droplets using computer-synthesized holograms, *J. Opt. Soc. America*, **58**, 455—460 (1968).
289. Kock Winston E., Side-looking radar holography and doppler-free coherent radar, *Proc. IEEE*, **56**, 238—239 (1968).
290. Koester C. J., Clifford W., Ask D., de Veer J. D., Two-dimensional image transmission through a single optical fiber, *Ann. Meet. OSA*, Oct., p. 26 (1968).

291. K o z m a A., Effects of film-grain noise in holography, *J. Opt. Soc. America*, 58, 436—438 (1968).
292. L e i t h E. N., Imagery with pseudorandomly diffused illumination, *Appl. Opt.*, 7, 982—983 (1968).
293. L e i t h E. N., I n g a l l i s A. L., Synthetic antenna data processing by wave front reconstruction, *Appl. Opt.*, 7, 539—544 (1968).
294. L i n L. N., A method of hologram information reduction by spatial frequency sampling, *Appl. Opt.*, 7, 545—548 (1968).
295. L i p s o n H., W a l k l e y K., On the validity of Babinet's principle for Fraunhofer diffraction, *Opt. Acta*, 15, 83—91 (1968).
296. L o h m a n n A. W., Matched filtering with self-luminous objects, *Appl. Opt.*, 7, 561—563 (1968).
297. L u g t V a n d e r A., A review of optical data processing techniques, *Opt. Acta*, 15, 1—33 (1968).
298. P o t t e r R. J., The role of optics in information processing, *Appl. Opt.*, 7, 109—114 (1968).
299. P r a t t W. K., A n d r e w s H. C., Computer calculated diffraction patterns, *Appl. Opt.*, 7, 378—379 (1968).
300. R e d m a n D., Processing information with light, *Sci. J.*, 4, No. 2, 51—56 (1968).
301. R i g l e r A. K., Note on the fast Fourier transform, *J. Opt. Soc. America*, 58, 274—275 (1968).
302. R u s s o V., S o t t i n i S., Bleached holograms, *Appl. Opt.*, 7, 202 (1968).
303. S m i t h H. M., Photographic refier images, *J. Opt. Soc. America*, 58, 533—539 (1968).
304. S t r o k e G. W., Z e c h R. G., Photographic realization of a image-deconvolution filter for holographic Fourier transform division, *Japan J. Appl. Phys.*, 7, 764—766 (1968).
305. S t r o k e G. W., I n d e b e t o u w R., P u e c h C. A., A posteriori holographic sharp-focus image restoration from ordinary blurred photographs of three-dimensional objects photographed in ordinary white light, *Phys. Lett.*, 26A, 443—444 (1968).
306. S t r o k e G. W., A reformulated general theory of holography, *Symposium on Modern Opt.*, Polytechnic Inst. of Brooklyn, March 1967, N.Y., 1968.
307. T h o m a s C. E., Coherent optical noise suppression, *Appl. Opt.*, 7, 517—522 (1968).
308. U p a t n i e k s J., Reduction of spatial frequencies in holograms without decreasing the field of view, *J. Opt. Soc. America*, 58, 589—590 (1968).
309. W y a n t J. C., G i v e n s M. P., Effects of the photographic gamma on the luminance of hologram reconstruction, *J. Opt. Soc. America*, 58, 357—361 (1968).

*Книги*

1. A r s a c J., *Transformation de Fourier et théorie des distributions*, Dunod, Paris, 1961.
2. B a r b e r N. F., *Experimental correlograms and Fourier transforms*, Pergamon Press, 1961.
3. B e r a n M. J., P a r r e n t G. B., Jr., *Theory of partial coherence*, pp. 1—194, 1964. Prentice-Hall International Series in Physics.
4. B o r n M., W o l f E. with contributions by B h a t i a A. B., C l e m m o w P. C., G a b o r D., S t o k e s A. R., T a y l o r A. M., W a y m a n P. A., W i l c o c k W. L., *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1965, Third Ed.
5. B o u i x M., *Les fonctions généralisées ou distributions*, Masson & Cie, Editeurs, 1964.

6. Bracewell Ron, The Fourier transform and its applications, McGraw-Hill Co., 1965.
7. Candler C., Modern Interferometers, Hilger & Watts, Hilger Division, 1951.
8. De Velis J. B., Reynolds G. O., Theory and applications of holography, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 1967.
9. Eaglesfield C. C., Laser light. Fundamentals and optical communication, Macmillan, London, 1967.
10. Guide to the laser, Ed. by David Fishlock, Mac Donald, London, 1967.
11. Françon M., Slansky S., Cohérence en optique, Ed. du Centre National de la Recherche Sci., 1965.
12. Françon M., Diffraction cohérence en optique, Gauthier-Villars, Ed., Paris, 1964.
13. Françon M., Modern applications of physical optics, Interscience Publishers, 1963.
14. Françon M., Optical interferometry, Academic Press, New York and London, 1966.
15. Goodman J. W., Introduction to Fourier optics, McGraw-Hill Co., 1968.
16. Grivet P., Blaquiere A., Le bruit de fond, Masson & Cie, 1958, Paris, VI.
17. Hamming R. W., Numerical methods for scientists and engineers, McGraw-Hill Co., Inc., 1962.
18. Helstrom C. W., Statistical theory of signal detection, Pergamon Press, 1960.
19. Hilgevoord J., Dispersion relations and causal description, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1960.
20. Jennison R. C., Fourier transform and convolutions for the experimentalist, Pergamon Press., Oxford — London — New York — Paris, 1961.
21. Lighthill M. J., Introduction to Fourier analysis and generalised functions, Univ. Press. Cambridge, 1959.
22. Linfoot E. H., Fourier methods in optical image evaluation, London — New York, 1964; Focal press, 1964.
23. Lipson H., Taylor C. A., Fourier transforms and X-ray diffraction, G. Bell and Sons, London, 1958.
24. Spectroscopic techniques for far infra-red, submillimetre and millimetre waves, Ed. D. H. Martin, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967.
25. Mertz L., Transformation in optics, J. Wiley & Sons, Inc., New York — London — Sydney, 1965.
26. Metherell A. F., El-Sum H. M. A., Larmore L. (Eds.), Acoustical Holography, Plenum Press, New York, 1968.
27. Optical processing of information, Ed. Donald K. Pollock, Charles T. Koester and James T. Tippett (Sym. Opt. Inf., Oct. 1962).
28. Optical and electro-optical information processing, Ed. James T. Tippett et all., MIT Press, 1965.
29. Papoulis A., The Fourier integral and its applications, McGraw-Hill Co., Inc., 1962.
30. Schwartz L., Théorie des distributions, VI, VII, Paris, 1959.
31. Schwartz L., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris, VI, 1961.
32. Steel W. H., Interferometry, Cambridge Univ. Press, 1967.
33. Stroke G. W., An introduction to coherent optics and holography, Acad. Press, 1966.
34. Strong J., Concepts of classical optics, W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, 1958.]

35. Taylor C. A., Lipson H., Optical transforms, G. Bell and Sons, London, 1964.
36. Tolansky S., An introduction to interferometry, Longmans, London, 1955.
37. Бриллюэн Л., Наука и теория информации, Физматгиз, 1960.
38. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д., Выделение сигналов на фоне случайных помех, «Сов. радио», 1960.
39. Вакман Д. Е., Регулярный метод синтеза фазоманипулированных сигналов, «Сов. радио», 1967.
40. Вакман Д. Е., Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации, «Сов. радио», 1965.
41. Вудворд Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, «Сов. радио», 1955.
42. Голдман Станфорд, Теория информации, ИЛ, 1957.
43. Давенпорт В. Г., Рут В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, 1960.
44. Дёч Ралф, Нелинейные преобразования случайных процессов, «Сов. радио», 1965.
45. Дитчберн Р., Физическая оптика, «Наука», 1965.
46. Захарьевский А. Н., Интерферометры, Оборонгиз, 1952.
47. Леви Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, книга первая, «Сов. радио», 1966.
48. Леви Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, «Сов. радио», 1960.
49. Марешаль А., Франсон М., Структура оптического изображения. Дифракционная теория и влияние когерентности света, «Мир», 1964.
50. Микаэлян А. Л., Тер-Микаэлян М. Л., Турков Ю. Г., Оптические генераторы на твердом теле, «Сов. радио», 1967.
51. О'Нейл Э., Введение в статистическую оптику, «Мир», 1966.
52. «Оптическая обработка информации», Сб. статей под ред. Ерковица С. П., «Мир», 1966.
53. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1962.
54. Рытов С. М., Введение в статистическую радиофизику, «Наука», 1966.
55. Струок Дж., Введение в когерентную оптику и голографию, «Мир», 1967.
56. Франсон М., Сланский С., Когерентность в оптике, «Наука», 1967.
57. Харкевич А. А., Борьба с помехами, «Наука», 1965.
58. Харкевич А. А., Спектры и анализ, Гостехиздат, 1957.
59. Харкевич А. А., Теоретические основы радиосвязи, Гостехиздат, 1954.
60. Хургин Я. И., Яковлев В. П., Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, Физматгиз, 1962.
61. Шварц Л., Математические методы для физических наук, «Мир», 1965.
62. Шестов Н. С., Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех, «Сов. радио», 1967.