

---

**An Introduction  
to  
COHERENT OPTICS  
AND HOLOGRAPHY**

*GEORGE W. STROKE*

*Department of Electrical Engineering  
The University of Michigan  
Ann Arbor, Michigan*

ACADEMIC PRESS  
New York — London — 1966

---

*Дж. Струк*

**ВВЕДЕНИЕ  
В КОГЕРЕНТНУЮ ОПТИКУ  
И ГОЛОГРАФИЮ**

*Перевод с английского  
И. П. НАЛИМОВА и В. Н. КОЛЕСНИКОВА*

*Под редакцией  
Л. М. СОРОКО*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» • МОСКВА 1967

Книга является первой в мировой литературе монографией по физическим основам голографии и оптики когерентных систем. Значительная ее часть представляет собой систематизированное изложение оригинального материала, опубликованного за последние два года в виде отдельных статей, которые написаны с участием самого автора — ведущего американского специалиста в этой области.

Книга содержит введение в качественную теорию дифракции и анализ образования изображений при некогерентном и когерентном освещении. В ней рассматриваются свойства когерентного света и излагаются теоретические и экспериментальные основы оптической голографии (восстановления волнового фронта).

Монография дополнена двумя статьями Габора, предложившего в 1948 г. метод записи и восстановления волнового фронта, и обзором последних исследований в области практических приложений голографии.

Она представляет значительный интерес для широкого круга исследователей и инженеров и может служить ценным пособием для студентов-оптиков.

*Редакция литературы по новой технике*

*Инд. 3-4*

## **Предисловие редактора русского издания**

Предлагаемая читателю книга известного американского оптика Джорджа Струка представляет собой первую и пока единственную в мировой литературе монографию по голографии. Она была написана на основе курса лекций, прочитанных автором в Мичиганском университете.

В своей книге Струк подробно и достаточно многогранно отразил успехи стремительного развития оптической голографии. Исчерпывающий характер этой монографии вполне закономерен, поскольку ее автор является активным участником большинства исследований по интерференции и голографии. Именно он осуществил классические опыты, которые составляют фундамент современной голографии. Так, например, совместно с Деннисом Габором, первооткрывателем голографии, Струк выполнил эксперимент по оптической интерференции двух световых потоков, не перекрывающихся по времени.

Струк, занимаясь разработкой методов изготовления и контроля качества дифракционных решеток с предельно высокими параметрами, находился ближе, чем кто-либо другой из оптиков, к голографии, когда после изобретения лазера началось ее бурное развитие. Оптические явления, составляющие основу голографии и оптики дифракционных решеток, оказались тесно связанными между собой. Завершив в 1959—1961 гг. исследования по оптике дифракционных решеток, обладающих несовершенной структурой, Струк перешел к голографии.

Голография возникла в 1948 г., когда английский физик Габор впервые ввел понятие голограммы, т. е. системы полной записи пространственной структуры световой волны (по амплитуде и по фазе) путем наблюдения интерференции между дифрагированной волной, идущей от предмета, и однородным когерентным фоном. Габор доказал, что такая система регистрации обладает свойством обратимости, позволяющим на второй ступени восстановить изображение предмета. Использование вспомогательного когерентного фона или когерентной подсветки является отличительной чертой любой схемы, применяемой в голографии. Идея о голограмме пришла Габору не случайно: опираясь на интуитивные информационные положения, он был глубоко убежден в возможности извлечения информации о предмете из дифракционной картины, которая всегда содержит эту

информацию в зашифрованном виде. Габор получил первые голограммы и с их помощью восстановил изображение исходного предмета.

Однако наблюдения очень скоро показали, что первоначальная схема страдает недостатками, которые не позволили Габору полностью решить поставленную задачу. Действительное и мнимое изображения предмета, восстановленные на второй ступени с помощью голограммы Габора, накладывались по лучу зрения друг на друга и таким образом создавали взаимные помехи. Недостатком схемы Габора являлось также и то, что интенсивный когерентный фон по первоначальной схеме должен был проходить сквозь образец, а это сильно сужало класс предметов, к которым можно было применить данный метод.

Все эти недостатки пытались устранить многие оптики, однако прошло около 15 лет, прежде чем удалось возродить идею Габора. Решающим толчком к этому послужила деятельность двух радистов, Иммета Лейта и Юриса Упатниекса, которые осуществили синтез теории связи и оптики. Лейт и Упатниекс, используя понятия и принципы однополосной модуляции в технике связи, ввели наклонный пучок, создающий когерентный фон, и этим самым полностью устранили недостатки первоначальной схемы Габора. Большую роль сыграл лазер, который к 1962 г. стал распространенным источником интенсивных когерентных пучков света. Спустя год Лейт и Упатниекс продемонстрировали с помощью двухлучевой голограммы высококачественное изображение трехмерных предметов, реализовав тем самым одно из предсказаний Габора.

Голограмма наделена свойствами активно восстанавливать волну света, идущую от предмета, и тем самым позволяет сделать видимым сам предмет. Это свойство голограммы является следствием того, что при регистрации рассеянной от предмета волны света не теряется ни одна из ее характеристик. На голограмме волна регистрируется полностью: одновременно и в то же время раздельно регистрируются амплитудная и фазовая информация, т. е. осуществляется полный опыт в оптике. В классической фотографии, напротив, регистрируется только интенсивность рассеянной волны, а распределение сдвигов фаз электромагнитных колебаний в пространстве безвозвратно теряется.

Голография, позволившая реализовать полный опыт в оптике, предоставляет экспериментатору новые необычайные возможности, которые позволяют пересмотреть многие проблемы физической оптики. Наиболее интересная возможность состоит в том, что наблюдатель может корректировать оптические свойства прибора, используемого в эксперименте, после того как эксперимент полностью закончен, т. е. апостериорно. Так, напри-

мер, трехмерную схему можно рассматривать на произвольно выбранной глубине. Можно также смещать точку наблюдения, осуществлять оптическую фильтрацию пространственной структуры предмета и, в частности, устранять aberrацию оптического прибора. Однако наиболее удивительное свойство голографии состоит в том, что она позволяет осуществить интерференцию между двумя потоками света, не перекрывающимися *ни во времени, ни в пространстве*.

Голографию нельзя рассматривать только как альтернативу фотографии. Благодаря полной записи света с сохранением не только амплитуды, но и фазы, используя голографию, в настоящее время можно осуществить широкий класс математических операций над комплексными функциями, заданными в виде пространственных распределений амплитуд и фаз волны света.

Голография создала новую оптику, которая по своим свойствам так относится к доголографической оптике, как теория комплексных функций относится к теории действительных функций. Это сравнение не просто красивая аналогия, оно наилучшим образом отражает новые «математические возможности» голографической оптики. Используя принцип голографии, можно уже сегодня выполнять над комплексными функциями математические операции: сложение и вычитание, умножение, дифференцирование и некоторый класс интегральных операций.

Достоинство голографических методов обработки информации состоит в том, что в голографии исходная информация обрабатывается сразу же целиком и практически одновременно по всей области. Столь необходимые в электронных системах операции, как сканирование или развертка изображения по строкам либо разнесение действительной и мнимой частей комплексной функции по отдельным каналам, полностью устраняются в когерентной оптической системе.

В Советском Союзе первым оптиком, который обратил внимание на голографию Габора и начал самостоятельные опыты по разработке более совершенных систем голографии, был Ю. Н. Денисюк. Своими экспериментами с липмановскими эмульсиями в 1962 г. он утвердил совершенно новое, отличающееся от схемы Габора и Лейта прогрессивное направление в голографии, которое позднее получило широкое распространение. Голограмма, которую изобрел Денисюк, представляет собой трехмерную интерферограмму. Вследствие того, что волновой фронт в голографии Денисюка интерферирует с когерентным фоном по всей толщине эмульсии, эта схема с самого начала не дает взаимного наложения действительного и мнимого изображений. Толстослойная голограмма Денисюка восстанавливает только одно изображение предмета, а информация, которую

можно ввести в толстослойную голограмму, оказывается намного богаче информации, содержащейся в обычной голограмме Габора.

Таким образом, основными вехами в развитии голографии можно считать исследования Габора, который впервые предложил и осуществил голографическую систему; исследования Лейта и Упатниекса, которые возродили голографию на основе идей, заимствованных из техники связи, и основали один из новых разделов радиооптики — современную лазерную голографию; исследования Денисюка, предложившего и впервые изготовившего трехмерную голограмму, и, наконец, исследования Струка, который осуществил цикл узловых, исчерпывающих экспериментов по голографии и предложил современные принципы и наиболее эффективные схемы голографии.

Не следует, конечно, забывать о том, что авторы упомянутых здесь четырех открытий опирались в своих работах на достижения предшественников и современников, которые вели исследования в оптике, радиосвязи, теории и технике информации, а также в спектроскопии.

Кроме семи основных глав, книга содержит дополнение автора к русскому переводу книги, а также приложения, в которые вошли исторические работы Габора, выполненные в 1948—1951 гг., и написанный И. П. Налимовым обзор последних работ по голографии и ее применениям.

В вводной главе (гл. 1) даются основные особенности радиооптики, ее истоки и используемые в ней методы. Приведено строгое рассмотрение краевой электромагнитной задачи на примере дифракционной решетки и отмечены ограничения операционного метода при его использовании в радиооптике.

В гл. 2 излагается качественная теория дифракции, формулируется краевая задача дифракции света и рассматривается соотношение Фурье между амплитудами света в зрачке и в плоскости изображения.

Гл. 3 посвящена процессу образования изображения при некогерентном освещении. Вводится понятие передаточной функции и устанавливается связь ее с получаемым изображением с использованием, в частности, плоскости пространственных частот. В заключение разбираются два крайних примера: точечный источник и синусоидальный по интенсивности предмет.

В гл. 4 анализируются понятия когерентности света, как временной, так и пространственной, а также методы их измерения. В конце ее описан интерферометр интенсивности.

В гл. 5 рассматривается процесс образования изображения при когерентном освещении как естественный предшественник голографии. В голографическом аспекте описаны метод филь-

трации пространственной структуры волны света, процедура изготовления согласованного фильтра, а также основы корреляционного анализа. В конце главы дается описание опыта Габора — Струка по интерференции потоков света, не перекрывающихся во времени.

Гл. 6 содержит теоретические и экспериментальные основы оптической голографии, которую Габор назвал методом образования изображения путем восстановления волнового фронта. Здесь рассматриваются: проективная голография Френеля, безлинзовая голография Фурье с высоким пространственным разрешением и метод устранения эффекта протяженности источника с целью сохранения высокого пространственного разрешения по предмету. Затем излагается требование к когерентности света в голографии. В конце главы описан классический эксперимент Струка с голограммой, полученной при некогерентном освещении, и даны экспериментальные обоснования возможности применения голографических принципов для рентгеновских лучей.

Гл. 7 содержит предельно беглый перечень математических вопросов, знание которых необходимо для чтения книги.

В заключение хотелось бы сделать некоторые замечания по содержанию монографии Струка.

Во-первых, материал излагается в книге весьма лаконично, и поэтому ее можно рекомендовать лишь в качестве дополнительного пособия по курсу физической оптики.

Во-вторых, книга Струка по голографии и дополнения к ней не охватывают всех аспектов современной голографии. В частности, полностью опущен теоретико-информационный аспект, имеющий для голографии большое значение. Кроме того, не рассмотрен очень важный для практических целей вопрос влияния шумов на процесс голографической записи и восстановления, а также вопрос о динамическом диапазоне фотодетекторов.

Перевод книги выполнен В. Н. Колесниковым (статья Габора), И. П. Налимовым (гл. 1, 2, 4, 6, авторские предисловия и дополнение автора к русскому изданию) и Л. М. Сороко (гл. 3, 5 и 7). При переводе отдельных выражений и терминов, встречающихся в книге Струка, повсюду, где это было возможно, мы придерживались терминологии русского перевода книги А. Маршалля и М. Франсона «Структура оптического изображения» (изд-во «Мир», 1964 г.). При переводе исправлены некоторые опечатки в тексте и многочисленные неточности в формулах. Списки оригинальных работ, расширенные при редактировании книги, приведены в конце каждой главы, а также после обзора И. П. Налимова.

*Л. М. Сороко*

## Предисловие к русскому изданию

Автор приветствует быстрое появление русского перевода его книги. Он также чрезвычайно рад тому, что в виде дополнения к русскому переводу дана одна из его последних работ, посвященная голограмме, освещаемой белым светом<sup>1)</sup>. Это исследование, которое является продолжением первой в этой области работы Ю. Н. Денисюка, опубликованной в 1962 г.<sup>2)</sup>, позволяет в настоящее время получать многоцветное изображение путем освещения объемной черно-белой голограммы лучами белого света.

В последнее время появилось очень много хороших обзоров, посвященных принципам и успехам голографии, и в частности советских авторов. Среди них удачны обзоры Налимова<sup>3)</sup> и Сорско<sup>4)</sup>, которые я горячо рекомендую.

Наконец, автор хотел бы еще раз напомнить, что 9 ноября 1964 г. в Бостоне (США) он предложил закрепить вклад проф. Денниса Габора, являющегося пионером исследований в этой области, и термином *голография* называть методы восстановления волнового фронта, а также теорию и применение *голограмм*<sup>5)</sup>, как средства образования и обработки оптических сигналов.

Джордж Строук

Июль 1966 г.

<sup>1)</sup> Строук Дж., Лабейри А., Восстановление голографических изображений в белом свете с использованием дифракционного эффекта Липмана — Брэгга, *Phys. Lett.*, **20**, 368—370 (1966); см. 213.

<sup>2)</sup> Денисюк Ю. Н., Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения, *ДАН СССР*, **144** (6), 1275—1278 (1962).

<sup>3)</sup> Налимов И. П., Лазерная голография — основные принципы и применения, *Зарубежная радиоэлектроника*, (2), (1966).

<sup>4)</sup> Сорско Л. М., Лекции по голографии. (Препринт Объединенного института ядерных исследований в Дубне № 2587; см. также *УФН*, **90** (1), 1—46 (1966).

<sup>5)</sup> Gabor D., *Nature*, **161**, 777, 778 (1948).

## Предисловие

Эта книга основана на серии лекций и лекционных курсов, прочитанных автором в 1963—1965 гг. преимущественно в Мичиганском университете. В книгу включено много материала из оригинальных статей по когерентной обработке изображений и голографии. В этих статьях изложена часть результатов последних исследований автора, выполненных в лаборатории Мичиганского университета.

В какой-то степени сам факт включения в монографию оригинальных научных статей уже имеет прецедент — небольшую, но замечательную книгу А. Майкельсона «Исследования в оптике», изданную в 1927 г. В предисловии к этой книге Майкельсон писал: «Для того чтобы придать изложению большую целостность, желательно привлечь и материал, который можно найти в распространенных работах по оптике, ибо только в этом случае может появиться интерес представить все эти исследования с моей собственной точки зрения и передать мои собственные впечатления, подчеркивая при этом те идеи основателей науки, которые произвели на меня глубочайшее впечатление». К сожалению, автор книги вынужден признать, что он не может изложить собственные взгляды и подход каким-либо другим более совершенным путем.

Принимая во внимание большой интерес к новым успехам в оптике и желая поскорее ознакомить с ними широкие круги специалистов за пределами лекционной аудитории, а также по возможности стимулировать дальнейший прогресс в этой области, автор представил значительную часть первоначальных записей лекций в том виде, как они были опубликованы в двух изданиях Мичиганского университета (май 1964 г., март 1965 г.) под названием «Введение в оптику когерентного и некогерентного электромагнитного излучения». Автор приносит извинения за телеграфный стиль изложения и недоработки, которые встречаются в книге, а также за многие возможные пробелы в списках литературы, приведенных в соответствующих главах книги.

Оригинальные статьи проф. Д. Габора о «восстановлении волнового фронта» сейчас приобрели исключительную важность,

так как составляют фундамент оптических принципов получения изображений методом восстановления волнового фронта и, в частности, обратимой регистрации фазы и амплитуды световой волны изображения. Поэтому в приложении к книге эти две оригинальные статьи Габора помещены без каких-либо изменений. Автор весьма признателен проф. Д. Габору за разрешение перепечатать эти статьи, а также за постоянную поддержку и многочисленные полезные беседы и замечания, которые касались голографических аспектов данной книги. Автор также выражает благодарность за постоянную поддержку большой группе коллег, особенно проф. М. Франсону, Дж. Харрисону, П. Жакино, А. Марешалю, О. Молеру и Э. О'Нейлу.

*Джордж Струок*

Анн-Арбор, Мичиган,  
ноябрь, 1965

## Глава 1

### ВВЕДЕНИЕ

#### 1. Современная оптика — раздел радиоэлектроники

Многие поразительные успехи, достигнутые в оптике за последние 10—20 лет, непосредственно связаны с прогрессом в радиоэлектронике, и в частности в таких ее разделах, как техника связи, СВЧ-электроника и радиоастрономия. Наиболее примечательное сходство оптики и радиоэлектроники обнаружилось благодаря успешному применению операционного метода Фурье для анализа процессов образования оптического изображения и в спектроскопии, а также благодаря использованию оптических резонансных систем и управления при помощи оптической обратной связи (например, в лазерах, волоконной оптике и в интерферометрическом управлении станками). Исключительная простота оптических вычислительных устройств и когерентных (гетеродинных) детекторов в технике связи подкрепляет эту аналогию. Общность оптики и радиоэлектроники проявляется и в эффективном использовании обеими этими дисциплинами статистических и когерентных свойств электромагнитных сигналов и излучения, в успешном развитии методов усиления яркости света и управления лазерным пучком и, наконец, в недавних новых успехах «безлинзовой» фотографии и техники «автоматического» распознавания образов. Нелинейная оптика представляет собой другой пример фундаментальной общности теории и техники эксперимента для всех диапазонов электромагнитных волн. Единство принципов и методов связывает астрономию, радиоастрономию, физику электромагнетизма и радиоэлектронику. Работы по установлению и использованию этих фундаментальных принципов в пределах всего электромагнитного спектра весьма эффективно содействовали появлению новых направлений в науке и технике и привели к созданию новой дисциплины, получившей название *радиооптики*.

#### 2. Теория — основа радиооптики

Пожалуй, самым главным фактором бурного развития радиооптики является ее чрезвычайная стройность, обусловленная последовательным применением сложного, но в то же время универсального математического аппарата.

Повторяя слова Таунса [1], можно сказать, что последние наиболее яркие события в радиооптике, включая изобретение лазеров, «отражают в миниатюре грандиозные перемены, которые в последнее время в корне преобразовали природу технологических открытий». Достаточно вспомнить, что лазеры, явления нелинейной оптики, оптические вычислительные устройства, дифракционные решетки, безлинзовая фотография, оптические фильтры и автоматические системы считывания информации были предсказаны и разработаны «почти целиком на базе теоретических идей, отличающихся довольно сложной и абстрактной природой». Подобные открытия или разработки «не могли родиться в полуподвальной мастерской или полностью базироваться на эдисоновском методе интуитивных проб и ошибок». Они являются продуктом современной научной эпохи и почти все без исключения связаны с теоретическими разделами физики, радиосвязи и, конечно, радиооптики.

### 3. Математические методы современной оптики<sup>1)</sup>

Если исключить краевые задачи и проблемы нелинейной оптики, в основе которых лежит электромагнитная теория, а также исследования по физике излучения, где используется квантовая теория и статистическая физика, то можно сказать, что главные разделы радиооптики базируются на операционном методе решения задач с помощью преобразования Фурье. Метод преобразования Фурье применяли уже Релей и Майкельсон на рубеже нашего века. Однако только современная теория распределений, или обобщенных функций, основанная на трудах Л. Шварца (1950—1951 гг.), может рассматриваться как универсальный инструмент, пригодный не только для анализа более или менее классических задач в теории образования изображения и в теории связи, но и для синтеза новых устройств и систем. Матричная формулировка образования изображения с помощью линз и зеркал существенно упростила математические методы расчета линз, особенно при использовании электронной вычислительной машины. Оптические аналоговые корреляторы и вычислительные устройства, созданные на основе новых математических обобщений, начинают дополнять превосходящие их нередко по сложности электронные вычислительные машины. В гл. 5 на нескольких примерах показано, как, пользуясь оптическими методами, можно осуществлять операции умножения и

<sup>1)</sup> Список доступных математических работ приведен в конце данной главы; см, также гл. 7.

комплексного сложения сигналов. Как правило, «сигналом» в оптике называются распределения интенсивности или комплексной амплитуды света, представляемые в пространстве двух измерений (например, в фокальной плоскости линзы или в плоскости ее апертуры с координатами  $x$  и  $y$ ). Благодаря этому оптические вычислительные устройства отличаются простотой и компактностью, а также характеризуются особыми преимуществами благодаря многоканальности и двумерному характеру их емкости (по сравнению с чисто электронными машинами, в которых используются зависимые от времени одномерные сигналы). В результате интенсивность света в любом  $\Delta y$ -канале можно изменять вдоль оси  $x$  и располагать большое число  $\Delta y$ -каналов рядом друг с другом, так что эти каналы могут функционировать одновременно, а не последовательно.

### 4. Краевая задача дифракции электромагнитных волн в оптике и некоторые ограничения операционного метода

Исключительное внимание, которое уделяется операционному методу в оптике и теории связи, с неизбежностью требует, чтобы все четко понимали ограниченность этого метода и знали, где этот метод нельзя применять.

Например, последние успехи в достижении высоких параметров оптических дифракционных решеток [2] основываются на понимании того, что распределение световой энергии между различными дифракционными порядками определяется явлениями поляризации и всей электромагнитной теорией в целом, а не простейшим скалярным приближением теории дифракции. Полное и точное решение краевой электромагнитной задачи для оптических решеток было получено совсем недавно в серии работ Строука, Буске, Петита и Хадни (см., например, [2]). Это решение, дополняющее весьма малочисленный список уже решенных краевых электромагнитных задач, было получено методом, предложенным Строуком в 1960 г. [3].

Самое важное ограничение на применение принципа Гюйгенса, выраженного преобразованием Фурье, для большинства случаев не является серьезным. Соотношение, полученное на основе преобразования Фурье, связывает комплексную амплитуду поля волнового фронта с комплексной амплитудой поля в любой заданной точке изображения. Оно применимо только в непосредственной окрестности квазисферического, ограниченного апертурой волнового фронта, который образует изображение, как, например, вблизи фокуса линзы, независимо от того, является ли



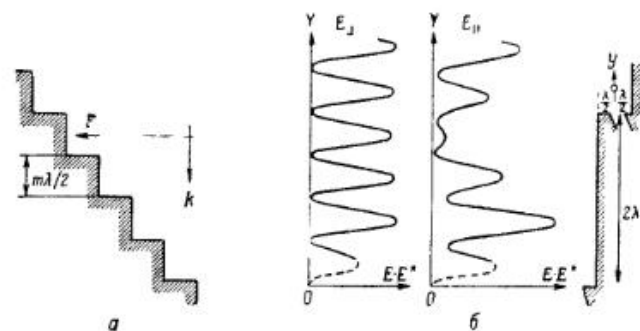


Рис. 1.

*a* — решетки ве-ущая себя как зеркало при указанной поляризации [3]; *б* — изображение стоячей волны герцевского типа, полученной в экспериментах с излучением на длине волны 3 см.

этот фокус главным или вторичным. Пределы применимости принципа Гюйгенса и соотношений, получаемых с помощью преобразования Фурье, при рассмотрении образования изображения станут совершенно очевидными, если при выводе этих соотношений исходить из уравнений Максвелла [4, 5].

Однако неправильно и такое, иногда высказываемое предположение, что скалярное приближение теории дифракции всегда дает хотя бы качественное описание процессов оптической дифракции. Например, согласно электромагнитной теории [3], решетка, показанная на рис. 1, *a*, будет вести себя как *совершенное зеркало*, отражающее только волну, распространяющуюся в направлении, противоположном вектору **k**, и не образующую «классической» дифракции в каких-либо других боковых порядках независимо от ширины ступеньки, параллельной вектору **E**. Это неожиданное для классической теории, но легко получаемое из электромагнитной теории предсказание, сделанное Маршалем и Струком [3] в 1959 г., подтверждается экспериментами с излучением на длине волны 3 см и с поляризацией, параллельной вектору  $E_{\perp}$  (рис. 1, *б*).

Поэтому всякий раз, когда при использовании в оптике универсального метода преобразования Фурье будут наблюдаться систематические расхождения между теорией и экспериментом, необходимо вспомнить об *электромагнитной природе дифракции*.

В самом широком смысле картина дифракции электромагнитных волн возникает в результате того, что точно заданные *краевые условия на границе предмета*, создающего дифракцию, относятся к *полному электромагнитному полю*, состоящему из падающей и дифрагированной волн.

Конкретная дифракционная задача приобретает замечательную простоту, если дифрагированную волну записать в виде суммы плоских волн с *различными амплитудами*, а направляющие косинусы выбрать в качестве параметров. В разд. 5 настоящей главы рассмотрен важный случай оптической решетки.

Основы современных представлений о процессах образования оптических изображений заложены в теории дифракционных решеток и интерферометрии [4, 5].

### 5. Решение краевой задачи на примере дифракционной решетки [5]

Дифракция света на решетке лучше всего описывается так называемым *уравнением решетки*

$$\sin j + \sin j' = \frac{m\lambda}{a}, \quad (1)$$

где  $j$  и  $j'$  — углы, образованные со средней плоскостью решетки падающим и дифрагированным волновыми фронтами соответственно;  $a$  — постоянная решетки.

В учебниках это уравнение обычно весьма просто выводится с помощью принципа Гюйгенса. Однако, применяя гюйгеновское решение, делают неправильное заключение, что плоская дифрагированная волна получается как огибающая многих маленьких сферических волн.

На практике же просто *предполагают*, что если на плоскую решетку падает плоская волна, то дифрагированные волны также являются плоскими, образуя дискретную совокупность. Фактически существование плоских дифрагированных волн есть следствие всего лишь периодической структуры решетки.

*Доказательство* существования дискретной совокупности плоских дифрагированных волн, удовлетворяющих уравнению решетки (1), когда на решетку падает плоская волна, сводится к следующему.

Линованные решетки имеют по существу двумерную структуру. Их поверхность описывается функцией  $S=f(x, y)$  (рис. 2), которая не зависит от координаты  $z$  и является периодической функцией  $x$ :

$$S(x + pa) = S(x) \quad (p - \text{целое число}). \quad (2)$$

Штрихи решетки направлены вдоль оси  $z$ . Вспомним класс *двумерных задач* (не зависящих от  $z$ ). По своей природе двумерные

задачи являются в сущности скалярными<sup>1)</sup>. Однако это не означает, что их можно идентифицировать с неэлектромагнитными задачами, например с акустическими. Двумерную задачу можно сформулировать, используя лишь одну компоненту электромагнитного поля, например  $E_z$  или  $H_z$ . Кроме того, можно показать,

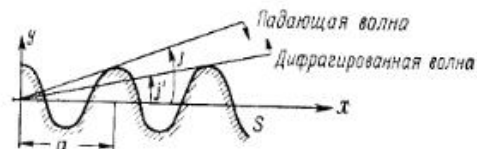


Рис. 2. Схема, поясняющая уравнение решетки  $\sin j + \sin j' = m\lambda/a$ .

что компоненты  $E_z$  или  $H_z$  в подобных задачах удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0, \quad (3)$$

написанному в качестве примера для компоненты  $E_z$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ . Множитель  $\exp(-i\omega t)$  опущен.

Частное решение уравнения (3), имеющее вид

$$\exp[ik(x \sin \theta + y \cos \theta)], \quad (4)$$

представляет собой выражение плоской волны, где  $\theta$  — угол дифракции (не ограниченный в данном случае одним значением  $j'$ , которое удовлетворяет уравнению решетки). Если  $\theta$  не является действительным значением, то выражение (4) представляет собой затухающую волну [5, 6].

Общее решение уравнения (3) состоит из совокупности плоских волн различных направлений и может быть записано в виде интеграла Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(\theta) \exp[ik(x \sin \theta + y \cos \theta)] d\theta, \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Так, например, если задача решена для  $E_z$ -компоненты, то остальные компоненты поля определяются следующим образом:

$$H_x = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad E_x = E_y = H_z = 0.$$

Если же задача решена для  $H_z$ -компоненты, то

$$E_x = -\frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_x = H_y = E_z = 0.$$

— Прим. ред.

где  $E(\theta)$  — амплитуда плоской волны. Функция  $E(\theta)$  в общем виде является комплексной, и чтобы ее найти, требуется решить уже конкретную задачу.

В случае оптической решетки необходимо рассматривать дифракцию поляризованных волн и векторы  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$  в падающей волне выбрать параллельными штрихам, т. е. вдоль оси  $z$ . Пусть  $E_z^i$  или  $H_z^i$  — компоненты поля в падающей волне для этих двух случаев поляризации. Тогда можно написать

$$E_z^i = \exp[-ik(x \sin j + y \cos j)]. \quad (6)$$

Пусть далее  $E_z^d$  — дифрагированное поле. Поскольку суммарное поле  $E_z = E_z^i + E_z^d$  удовлетворяет волновому уравнению и поскольку поле в падающей волне удовлетворяет тому же уравнению, то дифрагированное поле  $E_z^d$  также должно удовлетворять волновому уравнению. В самой общей форме дифрагированное поле  $E_z^d$  можно представить в виде суммы плоских волн различных направлений

$$E_z^d = \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^d(j') \exp[ik(x \sin j' + y \cos j')] dj'. \quad (7)$$

Здесь  $E_z^d(j')$  — амплитуда плоской дифрагированной волны, соответствующей углу распространения  $j'$ . Согласно уравнению (7), существует бесконечная совокупность дифрагированных волн, непрерывно распределенных по углу.

Докажем, что периодическая структура поверхности решетки и то обстоятельство, что граничные условия на поверхности решетки относятся к суммарному полю  $E_z$ , приводят к уравнению решетки (1), которому удовлетворяет только дискретная совокупность волн, взятая из непрерывного углового распределения.

Фактически на поверхности решетки необходимо иметь

$$E_z(x + pa) = E_z(x). \quad (8)$$

Если в уравнение (8) подставить соотношения (6) и (7), то получим

$$\begin{aligned} & \exp[-ik(x \sin j + y \cos j)] \exp(-ikpa \sin j) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^d(j') \exp[ik(x \sin j' + y \cos j')] \exp(ikpa \sin j') dj' = \\ & = \exp[-ik(x \sin j + y \cos j)] + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^d(j') \exp[ik(x \sin j' + y \cos j')] dj'. \quad (9) \end{aligned}$$

Разделив результат на  $\exp[-ik(x \sin j + y \cos j)]$  и вынеся за скобку  $\exp(-ikpa \sin j)$ , получим

$$\begin{aligned} & \exp(-ikpa \sin j) \left\{ 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^d(j') \exp[ik(x+pa)(\sin j + \sin j')] \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp[iky(\cos j + \cos j')] dj' \right\} = \\ & = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^d(j') \exp[ikx(\sin j + \sin j')] \exp[iky(\cos j + \cos j')] dj'. \end{aligned} \quad (10)$$

Для любых заданных  $k$ ,  $p$ ,  $a$  и любого угла  $j$  множитель  $\exp(-ikpa \sin j)$  постоянен. Поэтому, чтобы уравнение (10) удовлетворялось, необходимо положить

$$kpa(\sin j + \sin j') = n \cdot 2\pi \quad (n - \text{целое число}), \quad (11)$$

т. е.

$$k(\sin j + \sin j') = m \frac{2\pi}{a} \quad (m - \text{целое число}). \quad (12)$$

Заметим, что  $n/p = m$  — также целое число вследствие того, что  $p$  является периодом решетки. Вспомня, что  $k = 2\pi/\lambda$ , из соотношения (12) получаем уравнение решетки в окончательном виде

$$\sin j + \sin j' = \frac{m\lambda}{a}. \quad (1)$$

Мы доказали таким образом, что плоская волна

$$E_z^i = \exp[-ik(x \sin j + y \cos j)], \quad (13)$$

падающая на регулярную поверхность с периодом  $a$ , создает дифрагированное поле  $E_z^d$ , состоящее из дискретной совокупности плоских волн:

$$E_z^d = \sum_m (E_z^d)_m \exp[ik(x \sin j'_m + y \cos j'_m)]. \quad (14)$$

Следует обратить внимание на то, что *дифракция света* на решетке в основном обусловлена граничными условиями и периодичностью структуры решетки. Удивительно то, что точное выражение граничных условий не входит явным образом в то решение, которое было нами получено при доказательстве существования плоских дифрагированных волн, удовлетворяющих уравнению решетки. Очевидно, однако, что амплитуда  $E_z^d(j'_m)$  ди-

фрагированных волн будет непременно зависеть от вида граничных условий, в частности от свойств материала (диэлектрик, проводник и т. д.) и от профиля штрихов (разд. 4).

## 6. Дифракционная решетка как несущая, используемая для передачи информации в оптике (применительно к методу восстановления волнового фронта или голографии<sup>1)</sup>)

Подобно тому как синусоидально меняющаяся во времени волна является несущей в радиосвязи, пространственная периодическая решетка представляет собой несущую, используемую

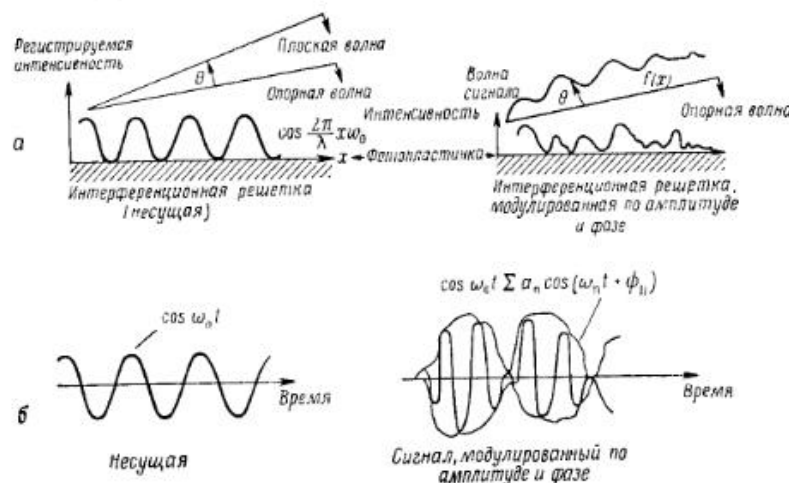


Рис. 3.

$a$  — интерференционная решетка как несущая для передачи информации о комплексной амплитуде (амплитуда и фаза) оптического изображения;  $b$  — несущая в радиотехнике — аналог интерференционной решетки.

для передачи изображения в оптике. Такой несущей может являться, например, синусоидальная решетка, получающаяся на фотопластинке при интерференции двух плоских волн (рис. 3). Как полезный сигнал в радиотехнике, так и оптическое изображение в оптике вызывают изменения амплитуды и фазы несущей. В обоих случаях можно осуществить модуляцию, используя

<sup>1)</sup> Подробное рассмотрение принципов оптической голографии (образование изображения методом восстановления волнового фронта) см. в гл. 6.

как одну, так и две боковые полосы. Роль интерференционной решетки<sup>1)</sup> как пространственной несущей можно непосредственно уяснить на основе элементарной теории образования изображения.

Рассмотрим сначала случай, когда два зеркала ( $M_1$  и  $M_2$ ) освещаются плоской волной  $S_1$  (рис. 4). Зеркала наклонены друг

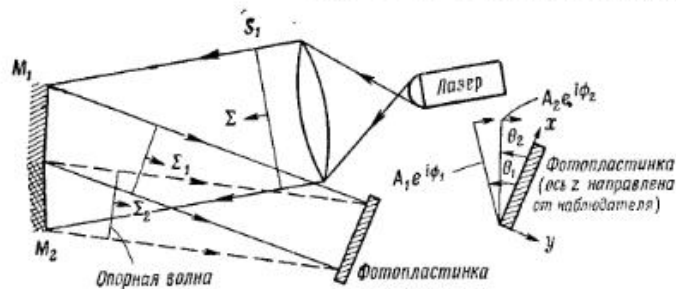


Рис. 4. Голограмма плоского зеркала в качестве предмета.

к другу так, что волны  $A_1 e^{i\varphi_1}$  и  $A_2 e^{i\varphi_2}$ , падающие на расположенную вдалеке фотопластинку, образуют углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  с ее поверхностью, а между собой угол  $(\theta_1 - \theta_2)$ . Очевидно, что распределение интенсивности, зарегистрированной на фотопластинке, описывается синусоидальной интерференционной решеткой с прямолинейными полосами, параллельными оси  $z$ . Считая  $|A_1|$  и  $|A_2|$  постоянными, получаем

$$I(x) = [A_1 \exp(i\varphi_1) + A_2 \exp(i\varphi_2)] \times [A_1^* \exp(-i\varphi_1) + A_2^* \exp(-i\varphi_2)] = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_1||A_2| \exp[-i(\varphi_1 - \varphi_2)] + |A_1||A_2| \exp[+i(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (15)$$

или

$$I(x) = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1||A_2| \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (16)$$

Замечаем, что в случае малых углов

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x \theta_1, \quad (17a)$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} x \theta_2, \quad (17b)$$

<sup>1)</sup> Автор использует два термина — «интерференционная решетка» и «дифракционная решетка». Первый из них подчеркивает метод изготовления, второй, как обычно, — дифракционный характер процессов, происходящих в решетке. — Прим. ред.

период полос равен  $a = \lambda / (\theta_1 - \theta_2)$ . В противном случае необходимо подставлять  $\sin \theta_1$  и  $\sin \theta_2$ . Если интерференционную решетку осветить плоской волной, как это показано на рис. 5, то, согласно уравнению (15), от пластинки начнут распространяться три волны: одна направлена вдоль оси и еще две — под углами  $+(\theta_1 - \theta_2)$  и  $-(\theta_1 - \theta_2)$  к нормали плоскости пластинки.

В гл. 6 будет показано, как при получении голограммы специальными мерами (например, путем использования достаточно

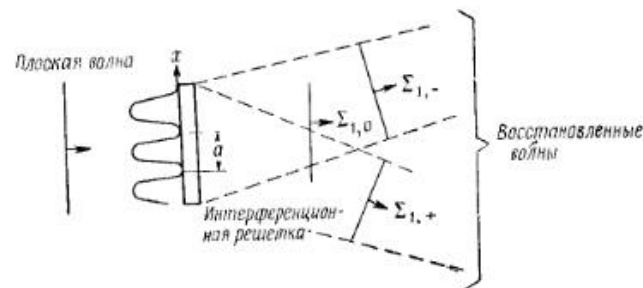


Рис. 5. Восстановление волны, образующей изображение, с помощью голограммы, полученной по схеме рис. 4.

интенсивного опорного пучка) можно подавить все дифракционные порядки, кроме нулевого и первого.

Из теории преобразований Фурье известны следующие соотношения.

Если

$$f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u),$$

то

$$\left. \begin{aligned} f(x) \exp(2\pi i u' x) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u + u'), \\ f(x) \exp(-2\pi i u' x) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u - u'), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где символ  $\mathfrak{F}$  обозначает преобразование Фурье. Уравнение (15) можно также переписать в виде

$$I(x) = (|A_1|^2 + |A_2|^2) + |A_1||A_2| \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} x (\theta_1 - \theta_2)\right] + |A_1||A_2| \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} x (\theta_1 - \theta_2)\right]. \quad (19)$$

В данной задаче  $|A_1|^2 + |A_2|^2$  и  $|A_1||A_2|$  являются постоянными в пределах пластинки. Таким образом картина фраунгоферовой дифракции на бесконечности состоит из изображения трех «точек»: одной на оси и двух под углами  $\pm(\theta_1 - \theta_2)$ . (Если

пластинка имеет конечную ширину, то «точки» в изображении описываются распределением вида  $\sin \theta/\theta$ .) Каждой «точке» на бесконечности соответствует плоская волна, выходящая из пластинки. Будем считать одну из волн, создающих интерференционную решетку, например  $\Sigma_2$  (см. рис. 4), опорной волной. Тогда можно сказать, что волны  $\Sigma_{1,-}$  и  $\Sigma_{1,+}$ , возникающие при облучении интерференционной решетки плоской волной (см. рис. 5), соответствуют восстановленной неизвестной волне, которая вызывала модуляцию.

Смысл такого описания станет ясным, если мы проследим, каким образом волна  $\Sigma_1$  с произвольными амплитудой и фазой,

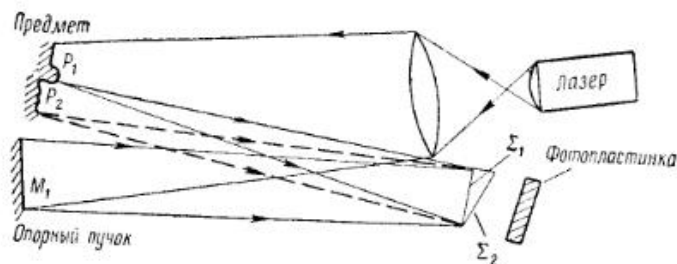


Рис. 6. Получение голограммы трехмерных предметов [7, 9].

возникшая при отражении от предмета, будет зарегистрирована на интерференционной решетке, выполняющей функцию пространственной несущей.

Пусть, например,  $\Sigma_1$  состоит из сферических волн, возникших при рассеянии в разных точках предмета. Другими словами, можно считать, что  $\Sigma_1$  равна полной комплексной амплитуде поля в плоскости, составляющей угол  $\theta_1$  с фотопластинкой, когда пластинка освещается светом, прошедшим через предмет или отразившимся от предмета (рис. 6). Тогда зарегистрированная интенсивность определяется как

$$I(x) = (A_1 A_m)(A_1 A_m)^* + A_2 A_2^* + \\ + [A_m^* \exp(-i\varphi_m)] \{A_1^* A_2 \exp[-i(\varphi_1 - \varphi_2)]\} + \\ + [A_m \exp(i\varphi_m)] \{A_1 A_2^* \exp[+i(\varphi_1 - \varphi_2)]\}, \quad (20)$$

где  $\Sigma_1$  — модулированная плоская волна:

$$\Sigma_1 = A_m(x) \exp[i\varphi_m(x)] A_1 \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \theta_1\right). \quad (21)$$

Как и ранее, считая  $|A_1|$  и  $|A_2|$  постоянными, получим

$$\Sigma_2 = A_2 \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \theta_2\right). \quad (22)$$

Важно отметить, что  $A_m(x)$  и  $\varphi_m(x)$  являются теперь функциями  $x$ .

Если сравнить (20) с (15) и учесть (18), то можно обнаружить, что модулированная волна  $A_m(x) \exp[i\varphi_m(x)]$  зарегистрирована с помощью интерференционной решетки, описываемой выражением (15). Поэтому, осветив пластинку плоской волной, мы снова получим три волны: волну под нулевым углом (нулевой порядок), не содержащую никакой информации, и две боковые волны, промодулированные множителями  $A_m \exp(i\varphi_m)$  и  $A_m^* \exp(-i\varphi_m)$  и выходящие из пластинки под углами  $\pm(\theta_1 - \theta_2)$  соответственно. Очевидно, боковые волны являются полностью восстановленной волной  $\Sigma_1$ , которая в свою очередь получилась при рассеянии на исходном предмете. В гл. 6 будет показано, что две восстановленные волны образуют действительное и мнимое изображения, тождественные изображениям исходного предмета.

Рассмотренная схема восстановления волнового фронта с помощью линейно смещенных полос интерференционной решетки применима, конечно, и к трехмерным предметам. Недавно это было успешно подтверждено в ряде лабораторий<sup>1)</sup>. Автор и его сотрудники расценивают такую схему как практическую основу объемной рентгеновской микроскопии [10, 26]. Вопреки утверждениям, которые иногда делались в связи с разделением изображений при помощи двухлучевой голографии, автору и его сотрудникам [42] недавно удалось экспериментально подтвердить возможность полного разделения изображений при помощи обычной габоровской схемы, когда оба пучка (опорный и модулированный) идут параллельно. При этом восстановление достигалось как при освещении точечным источником, так и при диффузном освещении.

Некоторые из возможностей использования оптической интерференционной решетки в качестве несущей были рассмотрены Дюффье по крайней мере еще в 1944 г. в его классической работе [16] и затем вновь в 1958 г. [17]. Несколько позже Дюффье Ломар [18] предложил использовать оптические эквиваленты однополосной модуляции в «безлинзовой» голограммной фотографии, описанной Габором в 1948 г. (см. также [8], [19]). Более подробное обсуждение теоретических и экспериментальных основ голографии можно найти в работе [10], а также в гл. 6.

<sup>1)</sup> См. гл. 6, а также работы [10, 30].

При получении голограммы в реальной установке не обязательно, конечно, располагать опорное зеркало рядом с предметом. Также нет необходимости освещать предмет плоской волной. Хорошо подходит, например, метод освещения предмета светом, который рассеян молочным стеклом. Метод освещения предмета диффузным или рассеянным светом был впервые предложен автором в 1964 г. [20], и практическое осуществление этой и других идей описано в работе, выполненной Лейтом [9]. Единственным очевидное условие для регистрации голограммы заключается в том, чтобы сохранить возможность регистрации интерференционной картины в том случае, когда предметный и опорный пучки имеют вид плоских волн. В гл. 6 будет показано, что в качестве опорного волнового фронта при получении голограммы можно использовать с различными преимуществами как сферический, так и плоский волновые фронты. Как плоский, так и сферический волновые фронты можно считать «строительными кирпичиками» голографии (рис. 7).

За первыми работами Габора по голографии последовали интенсивные исследования многих авторов, в частности работы

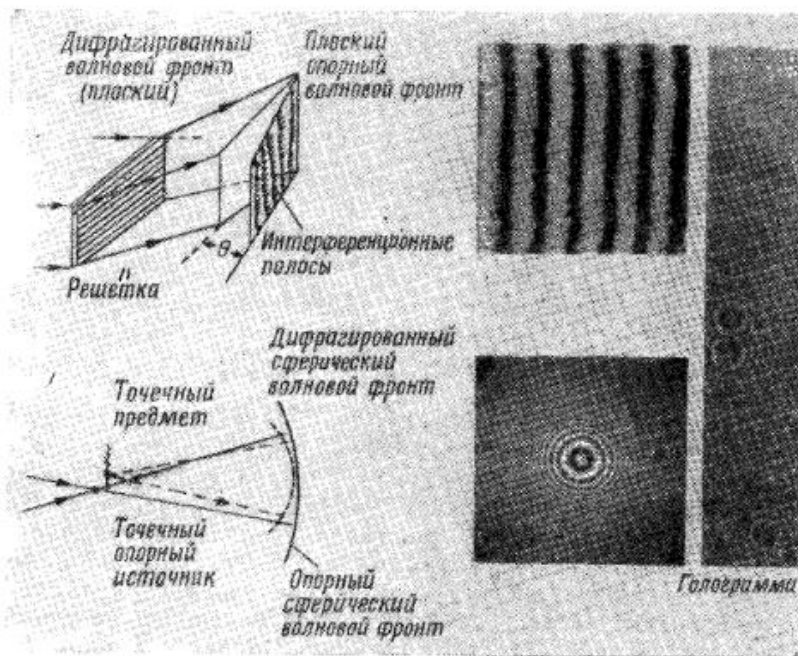


Рис. 7. «Строительные кирпичики» голографии [4].

Эль-Сама с сотрудниками [14, 15, 22, 23] и других авторов [8—20, 22—27]. Например, в 1950 г. Роджерс [24] подметил оптическую эквивалентность линзы и голограммы в форме зонной пластинки Френеля.

Еще в 1948 г. Габор [11—13, 24] подчеркивал возможность достижения удивительно большого увеличения (свыше одного миллиона) в результате двухступенчатого голографического процесса получения изображения с переходом от рентгеновских лучей длиной волны  $1 \text{ \AA}$  к лазерному свету длиной волны  $6328 \text{ \AA}$ , используемому при восстановлении изображения предмета. Однако некоторые [25] расценивали это как «пустое» увеличение голограммы, которое даст разрешение всего около  $5000—10000 \text{ \AA}$ . Но в 1964 г. Строук и Фалькoner [26] продемонстрировали, что голографии будет доступно высокое разрешение вплоть до  $1 \text{ \AA}$ , если применить новую схему получения голограммы и восстановления изображения [27], основанную на преобразовании Фурье, и обобщить замечательные результаты, достигнутые методом рентгеновской микроскопии с использованием электронных вычислительных машин [28], или же оптическим восстановлением [29]. Подробнее об этом методе будет говориться в разд. 4 гл. 6.

## 7. Оптика и теория связи Исторический обзор

Легко понять очевидную аналогию между процессами модуляции и демодуляции при использовании интерференционной решетки в качестве несущей, с одной стороны, и методами гетеродинирования в технике связи — с другой. Следует подчеркнуть также внутреннее сходство указанных методов с методом фазового контраста (при когерентном фоне), который ввел в оптику Цернике в 1934 г. [30—32]<sup>1)</sup>. Однако некоторые начинания в этом направлении можно проследить вплоть до Аббе (1873 г.) [33] и Теплера (1867 г.) (см. [34]).

Еще Дюффье [16], возродивший интерес к использованию преобразования Фурье в оптике, подчеркивал, что, без всякого сомнения, основы современного операционного метода, который применяется в оптической связи при анализе процессов образования и преобразования изображения, а также в спектроскопии, можно найти в работах Майкельсона [35] и Релея [36]. В странах, где говорят на английском языке, метод Фурье привлек к себе внимание лишь после опубликования в 1953 г. статьи

<sup>1)</sup> В 1953 г. Цернике была присуждена Нобелевская премия.

Элиаса «Оптика и теория связи» [37] и появления в 1956 г. лекций О'Нейла «Избранные вопросы оптики и теории связи» [38]. Элиас и О'Нейл воздали должное значительной работе, проделанной их предшественниками. Большой вклад внесли также Марешаль [39], стимулировавший современные исследования в области теории образования изображения и фильтрации, а также Блап-Лапьер [40], Дюффье [16] и О'Нейл [38] своими работами по внедрению теории связи в оптику и Жакино [41] своей работой по спектроскопии.

Работы Катрона и его сотрудников [19] в значительной мере содействовали тем внушительным успехам в технике распознавания образов и оптических вычислительных машин, а также в более общем плане в применении принципов теории связи в оптике, которые были затем достигнуты в Мичиганском университете. Немалую роль в дальнейшем прогрессе в области интерферометрии и дифракционных решеток сыграли недавние работы автора [5, 10, 20].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Townes C. H., в кн. «The Age of Electronics» (Overhage C. F. J., ed.), McGraw-Hill, New York, 1962, p. 166.
2. Stroke G. W., *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 846 (1964).
3. Stroke G. W., *Rev. Optique*, **39**, 291—298 (1960).
4. Maréchal A., Françon M., *Diffraction*, Revue d'Optique, Paris, 1960; русский перевод: Марешаль А., Франсон М., Структура оптического изображения, изд-во «Мир», 1964.
5. Stroke G. W., в кн. «Handbuch der Physik» (Flügge S., ed.), Band 29, Springer, Berlin, в печати.
6. В общем плане вопрос рассмотрен, например, в работе Clementow P. C., в кн. «Principles of Optics» (Born M., Wolf E., eds.), Pergamon Press, New York, 1959, p. 553—588.
7. Stroke G. W., частное сообщение Е. Н. Лейту, 1963.
8. Leith E. N., Uralnieks J., *J. Opt. Am.*, **52**, 1123 (1962).
9. Leith E. N., Uralnieks J., *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 1295 (1964).
10. Stroke G. W., в кн. «Optical Information Processing» (Tippett J. T. et al., eds.), MIT Press, Cambridge, Mass., 1965; см. также Stroke G. W., Leith E. N., частное сообщение Национальному научному фонду США (дек. 6, 1963).
11. Gabor D., *Nature*, **161**, 777 (1948).
12. Gabor D., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A197**, 454—487 (1949); см. стр. 218 настоящей книги.
13. Gabor D., *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B64**, 449—469 (1951); см. стр. 270 настоящей книги.
14. El-Sum H. M. A., *Reconstructed Wavefront Microscopy*, диссертация, Stanford Univ., Stanford, Calif., Nov. 1952; available from University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan (Dissertation Abstracts 4663, 1953).
15. Kirkpatrick P., El-Sum H. M. A., *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 825 (1956).

16. Duffieux P. M., *L'Intégrale de Fourier et ses applications à l'optique*, Faculté des Sciences, Besançon, 1946.
17. Duffieux P. M., *Rev. Optique*, **37**, 441—457 (1958).
18. Lohmann A., *Opt. Acta*, **3**, 97—99 (1956).
19. Cutrona L. J., Leith E. N., Palermo C. J., Porcello L. J., *IRE Trans. Inform. Theory*, **6**, (3), 386—400 (1960); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (10), 3—30 (1962).
20. Stroke G. W., *An Introduction to Optics of Coherent and Noncoherent Electromagnetic Radiations*, Univ. Michigan Engineering Summer Conf. on Lasers, Lecture Notes, May 1964, pp. 1—77.
21. Stroke G. W., *Intern. Sci. Techn.*, (41), 52 (1965).
22. Baez A. V., El-Sum H. M. A., в кн. «X-Ray Microscopy and Micro-radiography» (Cosslett V. E., Engström A., Pattee H. H., Jr., eds.), Acad. Press, New York, 1957, pp. 347—366.
23. См. также пат. США 3083615.
24. Rogers G., *Nature*, **166**, 273 (1950).
25. Baez A. V., *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 756 (1952).
26. Stroke G. W., Falconer D. G., *Phys. Letters*, **13**, 306 (1964).
27. Stroke G. W., Falconer D. G., *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 595 (1965); *Phys. Lett.*, **15**, 238 (1965).
28. Kendrew J. C., Bodo G., Dinitz H. M., Parrish R. G., Wyckoff H., Phillips D. C., *Nature*, **181**, 662 (1958).
29. Buerger M. J., *J. Appl. Phys.*, **21**, 909—917 (1950).
30. Zernike F., *Physica*, **1**, 43 (1934).
31. Zernike F., *Physik. Z.*, **36**, 848 (1935).
32. Zernike F., *Z. Techn. Phys.*, **16**, 454 (1935).
33. Abbe E., *Arch. Mikrosk. Anat.*, **9** (1873).
34. Wolter H., в кн. «Handbuch der Physik» (Flügge S., ed.), Band 24, Springer, Berlin, 1956, p. 555—645.
35. Michelson A. A., *Phil. Mag.*, **34**, 280 (1892).
36. Rayleigh, *Phil. Mag.*, **34**, 407 (1892).
37. Elias P., *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 229—232 (1953).
38. O'Neill E. L., Optical Research Laboratory, Boston Univ., 1956.
39. Maréchal A., Croce P., *Compt. Rend.*, **237**, 607 (1953).
40. Blanc-Lapierre A., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **13**, 275 (1953).
41. Jacquinet P., *Rept. Progr. Phys.*, **23**, 267—312 (1960).
42. Stroke G. W., Brumm D., Funkhouser A., Labeyrie A., Restrict R. C., *Brit. J. Appl. Phys.*, **17**, 497—500 (1966).

#### ЛИТЕРАТУРА ПО МАТЕМАТИКЕ<sup>1)</sup>

- Arsac J., *Transformation de Fourier et Théorie des Distributions*, Dunod, Paris, 1960.
- Bouix M., *Les Fonctions Généralisées ou Distributions*, Masson, Paris, 1964.
- Erdélyi A., *Operational Calculus and Generalized Functions*, Holt, New York, 1962.

<sup>1)</sup> См. также работы:

1. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. I, Физматгиз, 1958.
2. Харкевич А. А., *Теоретические основы радиосвязи*, Гостехиздат, 1957.
3. Bracewell R., *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, 1965. — *Прим. ред.*

- Guillemin E. A., The Mathematics of Circuit Analysis, Wiley, New York, 1951.
- Jennison R. C., Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist, Pergamon Press, New York, 1961.
- Lighthill M. J., An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge Univ. Press, 1958.
- Papoulis A., The Fourier Integral and Its Applications, McGraw-Hill, New York, 1962.
- Schwartz L., Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, Hermann, Paris, 1965; русский перевод: Шварц Л., Математические методы для физических наук, изд-во «Мир», 1965, стр. 412.
- Харкевич А. А., Спектры и анализ, изд. 4-е, Физматгиз, 1962, стр. 236.

## Глава 2

# КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ

### 1. Две стороны дифракции света

Уже в первых исследованиях свойств света, проведенных Фраунгофером, Френелем, Юнгом, Эри и другими учеными в XVIII и XIX веках, было обращено внимание на две стороны дифракции света:

- 1) отклонение направления распространения света от прямой линии при его встрече с границами тела;
- 2) образование дифракционной картины в плоскости изображения, когда световая волна конечных размеров фокусируется при помощи линз, зеркал или других средств.

Исследования, выполненные Максвеллом, Релеем, Зоммерфельдом, Маршалем и другими, позволили выявить две основные особенности процессов дифракции света, различия между которыми необходимо учитывать. Этими особенностями являются:

- 1) электромагнитный характер дифракции света, происходящей на границе тела, который обуславливает направление, поляризацию и амплитуду различных волн;
- 2) возможность использования скалярного подхода для описания свойств дифрагированных волн в процессе образования изображения, когда эти волны ограничены апертурой, а оптическая система имеет несовершенства принципиального характера или обусловленные процессом изготовления.

Кроме этого, в технических применениях оптических элементов (зеркал, линз, призм, дифракционных решеток и т. д.), используемых для образования и преобразования изображений, а также для анализа и синтеза световых волн, играют важную роль также некоторые *геометрические* характеристики оптики (коэффициент увеличения, уравнение линзы, дисперсия спектроscopes, разрешающая способность и т. д.).

### 2. Распределение интенсивности в дифракционной картине и в спектре

#### 2.1. Решение электромагнитной краевой задачи

Чтобы решить произвольную задачу дифракции электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде, достаточно использовать уравнения Максвелла и задать граничные условия,



которым должно удовлетворять полное поле (падающее плюс дифрагированное). Если бы получение строгого решения уравнений Максвелла в каждом практическом случае было бы достаточно простой задачей, то все проблемы оптической дифракции и образования изображения формулировались и решались бы при помощи этих уравнений.

Если электрический вектор падающей волны обозначить через  $E_t$ , а рассеянной волны — через  $E_s$ , то вектор рассеянного поля, равный

$$E_s = E - E_t, \quad (1)$$

где вектор полного поля

$$E = E_t + E_s, \quad (2)$$

должен удовлетворять соответствующим граничным условиям на рассеивающей поверхности или же на границах отверстия. Простейшей границей является, очевидно, бесконечно протяжен-

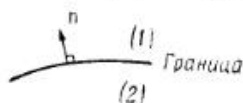


Рис. 1. Схема, поясняющая граничные условия (4).

ная плоскость идеального проводника, действующего как отражатель. В этом случае одно из граничных условий сводится к тому, что на поверхности проводника должна исчезать тангенциальная составляющая полного поля  $E$ . Из этого требования с помощью уравнений Максвелла сразу же получаются законы отражения электромагнитных волн.

Уравнения Максвелла для свободного пространства, записанные в дифференциальной форме, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, & \operatorname{rot} H &= \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \operatorname{div} E &= 0, & \operatorname{div} H &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения всегда должны дополняться соответствующими граничными условиями, которые для нормальных составляющих  $E$  и  $H$  (рис. 1) имеют вид

$$n \cdot \mu_0 (H_1 - H_2) = 0, \quad n \cdot \epsilon_0 (E_1 - E_2) = \sigma, \quad (4)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда, а для тангенциальных составляющих

$$n \times (H_1 - H_2) = K, \quad n \times (E_1 - E_2) = 0, \quad (5)$$

где  $K$  — поверхностная плотность тока.

Если уравнения Максвелла записать в интегральной форме, то граничные условия войдут в них неявно (рис. 2):

$$\begin{aligned} \oint_C E \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \int_S \mu_0 H \cdot n da, \\ \oint_C H \cdot ds &= \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 E \cdot n da + \int_S J \cdot n da, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $J$  — вектор плотности тока. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме вместе с граничными условиями особенно удобны для решения задач дифракции электромагнитных волн (света) на границах простой формы, которые допускают раз-



Рис. 2. Схема, поясняющая уравнение (6).

дельное решение уравнений. К таким границам относятся границы, имеющие форму цилиндра или развернутой цилиндрической поверхности бесконечной протяженности (например, дифракционная решетка) или же форму сферы, эллипсоида, набора цилиндров, сфер и т. д. Решения становятся особенно простыми для двумерных поверхностей, которые являются функциями только двух координат (цилиндры, дифракционные решетки).

Однако строгое решение электромагнитной краевой задачи было найдено до сих пор только в очень малом числе случаев (край, щель, клин, сфера, решетка с синусоидальным профилем<sup>1)</sup> и т. д.). В действительности математические трудности, возникающие при решении электромагнитных краевых задач, весьма велики и сравнимы с трудностями решения краевых задач в других разделах физики (например, в квантовой теории).

Обычно интересуются дифракцией волн, имеющих вид простых гармоник

$$E_t = (E_t)_0 \exp(-i\omega t), \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Недавно было найдено строгое решение для дифракционной решетки с треугольным профилем, основанное на решении, полученном в 1960 г. Строуком [1] для решетки с синусоидальным профилем.

или же их суперпозиций, где  $(E_i)_0$  — амплитуда вектора, не зависящая от времени. Известно, что в этом случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (8)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $\omega = 2\pi f$ . Частота  $f$  и длина волны  $\lambda$  связаны соотношением

$$c = f\lambda, \quad (9)$$

где  $c$  — скорость света. Для случая монохроматической волны имеем

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (10)$$

а на границах

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon_0} \text{rot } \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (11)$$

Внутри идеального проводника ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), где поля  $\mathbf{E}_2 \rightarrow 0$  и  $\mathbf{H} \rightarrow 0$ , соотношение (5) приобретает вид

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0, \quad (12a)$$

т. е. ранее указанные граничные условия на поверхности проводника принимают форму

$$\mathbf{E}_{\text{тангенс}} = 0. \quad (12b)$$

Граничное условие для поля  $\mathbf{H}$  является особенно простым на двумерных поверхностях, когда одна из координат исключается. Проиллюстрируем с помощью этого метода некоторые этапы решения дифракционной задачи. Рассмотрим плоскополяризованную волну  $H_z^i$ , падающую вдоль оси  $-y$  из вакуума (среда 1) на поверхность  $y=f(x)$ , не зависящую от  $z$ . Пусть  $H_z^i$  параллельна  $z$ . Вследствие симметрии условий дифрагированное поле также будет иметь одну компоненту магнитного поля  $H_z^d$ . Пусть полная  $z$ -компонента магнитного поля в среде 1 равна  $H_z = H_z^i + H_z^d$ . Для полного поля в среде 1 имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (13)$$

а на поверхности

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (14)$$

что следует из уравнения (12). Развертывая уравнение  $\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H})$  по отдельным компонентам и замечая, что  $H_x = H_y = 0$ , а

$n_z = 0$ , для полного поля имеем

$$n_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + n_y \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Поскольку

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla H_z = n_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + n_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + n_z \frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad (16)$$

то получаем граничное условие

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0. \quad (17)$$

Мы установили, что граничное условие для поля  $\mathbf{H}$  сводится к следующему: производная по нормали от  $z$ -компоненты полного магнитного поля должна равняться нулю на поверхности идеального проводника, если эта поверхность не зависит от координаты  $z$ , параллельно которой направлен вектор магнитного поля в падающей волне. В общем случае можно показать, что все производные по нормали от ковариантных компонент магнитного поля должны равняться нулю на поверхности идеального проводника, если форма его поверхности совпадает с координатной поверхностью криволинейной ортогональной системы координат.

Чтобы решить краевую задачу электромагнитной дифракции, кроме использования уравнений Максвелла и граничных условий, необходимо удовлетворить также некоторым дополнительным условиям. Одно из них — это «принцип излучения на бесконечности» Зоммерфельда, согласно которому количество энергии от источников, проходящей через конечную площадку, находящуюся на бесконечном удалении от этих источников, стремится к нулю. (На самом деле этот принцип несколько более сильный; он утверждает, что источники должны излучать, а не поглощать энергию.) Второе условие следует из закона сохранения энергии и теоремы Пойнтинга. Третье условие возникает в процессе разложения поля в ряд Фурье по действительными волновыми числами, но и с мнимыми. Для волн с мнимыми волновыми числами, т. е. затухающих волн, или же в общем случае неоднородных волн с комплексными волновыми числами, поверхность равной амплитуды не совпадает с поверхностью равной фазы. Например, в двумерном случае обычной цилиндрической линзы, вариации толщины которой создают изменения в поглощении света в линзе, поверхности равных фаз и равных амплитуд ортогональны друг другу. В оптике чаще всего встречаются именно неоднородные волны.

## 2.2. Проблема образования изображения и принцип Гюйгенса

Используя некоторые существенные приближения, можно, как правило, показать, что гюйгенсовское решение в оптике (как, например, ее «строгая» векторная форма в формулировке преобразования Фурье) выводится из уравнений Максвелла. Одно из главных приближений состоит в том, что принцип Гюйгенса применим только вблизи центра квазисферического волнового фронта, образующего изображение. При рассмотрении проблем дифракции и образования изображений необходимо отдавать себе отчет в приближенном характере принципа Гюйгенса. И во всяком случае кажущаяся простота принципа Гюйгенса даже в той его приемлемой форме, которая получена эвристически на базе принципа суперпозиции и спектрального разложения по плоским волнам, не должна служить оправданием для его использования в качестве основы «строгого» решения, получаемого путем добавления к первоначальному приближению членов более высоких порядков. Однако, если правильно использовать принцип Гюйгенса, выраженный с помощью преобразования Фурье, то он становится достаточно универсальным средством для рассмотрения проблем образования изображений. В частности, его применяют для отыскания распределения интенсивности в пределах дифракционной картины, образуемой волновым фронтом конечного размера при отражении, преломлении и дифракции света в оптических элементах (зеркала, линзы, призмах, решетках).

Точное выражение принципа Гюйгенса, которое получается из уравнений Максвелла, имеет следующий вид<sup>1)</sup>:

$$\mathbf{E}_P(k\alpha, k\beta) = \frac{i}{\lambda} \frac{\exp(-ikR)}{R} \int \int_{\text{По апертуре}} \mathbf{E}_0 \exp[ik\Delta(x, y)] \times \exp[-ik(ax + \beta y)] dx dy, \quad (18)$$

где  $\mathbf{E}_P$  — комплексная амплитуда вектора электрического поля в точке  $P$  плоскости изображения вблизи центра квазисферического волнового фронта радиусом  $R$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — направляющие косинусы, определяющие положение точки  $P$ , если наблюдатель находится на апертуре с центром в точке  $O$  квазисферического волнового фронта;  $x$  и  $y$  — координаты, определяющие точку на апертуре;  $\Delta(x, y)$  — отклонение волнового фронта от сферичности;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $i = \sqrt{-1}$ , а  $\mathbf{E}_0$  — амплитуда  $\mathbf{E}_0(x, y)$  на волновом

<sup>1)</sup> Более подробное рассмотрение этого очень важного вопроса см., например, в работах [2—4], а также в книге А. Зоммерфельда «Оптика», гл. V, ИЛ, 1953. — Прим. ред.

фронте. Направляющие косинусы  $\alpha$  и  $\beta$ , а также координаты  $x$  и  $y$  относятся к квазиплоскому участку волнового фронта в совершенной фокусирующей системе (зеркало или линза). В такой фокусирующей системе плоская волна преобразуется в сферическую. Совершенная система преобразует квазиплоскую волну в квазисферическую. Кроме того, если учесть сделанные приближения, aberrации плоской волны тождественны aberrациям сферической волны.

Уравнение (18) имеет вид преобразования Фурье и выражает следующее: комплексная амплитуда вектора электрического поля в точке на плоскости изображения равна Фурье-образу распределения комплексной амплитуды электрического поля в пределах апертуры, образующей изображение. При этом, очевидно, электрические векторы в пределах апертуры и плоскости изображения параллельны самой плоскости изображения. Преобразование Фурье необходимо выполнить для каждой точки дифракционной картины. Например, для совершенно однородной плоской волны в пределах прямоугольной апертуры шириной  $A$  вдоль оси  $x$   $|\mathbf{E}_0| = 1$ ,  $\Delta = 0$ , и мы имеем

$$\mathbf{E}_P(k\alpha) = \frac{i}{\lambda} \frac{\exp(-ikR)}{R} \int_{-A/2}^{+A/2} \exp(-ik\alpha x) dx, \quad (19)$$

или, интегрируя,

$$\mathbf{E}_P(k\alpha) = \frac{i}{\lambda} \frac{\exp(-ikR)}{R} \frac{A}{2} \frac{\sin k\alpha(A/2)}{k\alpha(A/2)}. \quad (20)$$

Таким образом, комплексная амплитуда  $\mathbf{E}_P(k\alpha)$  изменяется в плоскости изображения как известная функция  $\sin \omega/\omega$  (где  $\omega \approx R\alpha = f\alpha$ ), которая имеет первый минимум при

$$\omega_0 = \frac{\lambda}{A} \text{ рад}, \quad (21)$$

$$\text{т. е. при } \omega_0 = R \frac{\lambda}{A} = f \frac{\lambda}{A}. \quad (22)$$

где  $R = f$  — фокусное расстояние оптической системы. Все приемники (фотоэлектрические, фотографические и т. п.) регистрируют только интенсивность

$$I_P = \overline{\mathbf{E}_P \cdot \mathbf{E}_P^*}. \quad (23)$$

Звездочка здесь означает «комплексное сопряжение». Интенсивность  $I_P$  изменяется как  $(\sin \omega/\omega)^2$ , и первый минимум ее, естественно, расположен на расстоянии  $(\lambda/A)f$  от центрального максимума. Обычно  $I_P$  называют дифракционной картиной, соответствующей апертуре  $A$ .

Уравнение (18), которое описывает дифракцию на бесконечности, обусловленную апертурой, может быть доказано эвристически на основе принципа суперпозиции и принципа Гюйгенса, если вкладывать в него обычный смысл. Рассмотрим зрачок в плоскости  $xy$  и точку  $M$  в центре элемента поверхности  $dx dy$  этой плоскости. Элемент поверхности с центром  $M$  испускает элементарную волну  $f(x, y) dx dy$ , где  $f(x, y)$  — скалярная компонента вектора  $\mathbf{E}$  в зрачке. В направлении, определяемом направляющими косинусами  $\alpha, \beta, \gamma$ , волна из  $M$  имеет сдвиг по фазе  $(2\pi/\lambda)(\alpha x + \beta y)$  по отношению к фазе элементарной волны, испущенной из центра зрачка  $O$ . Благодаря суперпозиции волна в направлении  $(\alpha, \beta, \gamma)$  равняется сумме этих волн

$$\int \int_{\text{По зрачку}} f(x, y) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)\right] dx dy. \quad (24)$$

Все элементарные волны, посылаемые или пропускаемые зрачком в направлении  $\alpha, \beta, \gamma$ , фокусируются совершенной фокусирующей системой в одну точку  $P'(\xi', \eta')$  фокальной плоскости, так что

$$\xi' = \frac{f\alpha}{\gamma}, \quad \eta' = \frac{f\beta}{\gamma}. \quad (25)$$

Поскольку  $\gamma \approx 1$ , а  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , то для координат изображения в фокальной плоскости фокусирующей системы

$$\xi' = f\alpha, \quad \eta' = f\beta \quad (26)$$

и

$$\alpha = \frac{\xi'}{f}, \quad \beta = \frac{\eta'}{f}, \quad (27)$$

где  $f$  — фокусное расстояние. Дифракционную картину описывают следующие уравнения:

$$F(k\alpha, k\beta) = \int \int_{\text{По зрачку}} f(x, y) \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda} (\alpha x + \beta y)\right] dx dy \quad (28)$$

и

$$F\left(\frac{k}{f}\xi', \frac{k}{f}\eta'\right) = \int \int_{\text{По зрачку}} f(x, y) \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{\xi'}{f}x + \frac{\eta'}{f}y\right)\right] dx dy, \quad (29)$$

которые совпадают с выражениями для дифракционной картины, полученными из уравнений Максвелла (18) с использованием указанных там приближений.

Таким образом, задание распределения комплексной амплитуды (по амплитуде и фазе) электромагнитного поля в пределах апертуры независимо от того, как образовалось это поле, позво-

ляет нам рассчитать дифракционную картину, соответствующую данному распределению поля в пределах данной апертуры. Однозначное соотношение, существующее при указанных приближениях между распределением поля в апертуре и распределением света в дифракционной картине, имеет вид преобразования Фурье. Широкое использование операторного метода расчета при решении проблем образования изображения уже дало плодотворные результаты. В частности, была выявлена фундаментальная аналогия между задачами радиосвязи и задачами образования изображения и спектроскопии, для решения которых в равной мере подходят и принцип суперпозиции и операторный метод. Один из методов, с помощью которого можно воссоздать распределение комплексной амплитуды  $f(x, y)$  в плоскости апертуры линзы, сводится к тому, чтобы поместить в апертуру голограмму и дополнительно осветить ее плоской или сферической волной.

### 8. Теория образования изображения и обработка оптических сигналов при помощи преобразования Фурье

Широко известный операторный метод преобразования сигналов, применяемый для анализа и синтеза электрических и электронных систем, может быть немедленно переведен на рельсы оптики, если только «время», используемое в радиоэлектронике, заменить на «пространство» для оптики.

Дифракционную картину (по интенсивности) можно рассматривать как импульсный отклик оптической системы. Интенсивность изображения как функция пространственных координат изображения легко определяется через интеграл свертки функции распределения интенсивности в предмете (получаемого в плоскости изображения при использовании приближения геометрической оптики) с функцией распределения интенсивности дифракционной картины (в плоскости изображения). Фурье-образ дифракционной картины также называется функцией частотного отклика оптической системы, так как он дает распределение света в изображении предмета, имеющего пространственно-периодическое распределение интенсивности. Наконец, можно легко показать, что функция частотного отклика оптической системы равна пространственной свертке комплексной амплитуды распределения света в апертуре с этой же комплексной амплитудой. Например, для равномерно освещенной апертуры, рассмотренной выше, функция частотного отклика, как это сразу видно,

имеет вид треугольника и является функцией пространственных частот, т. е. функцией от (длина)<sup>-1</sup> (см. рис. 5 гл. 3).

Совершенно ясно, что оптические системы, если их использовать в качестве элементов преобразования сигналов в виде электромагнитных волн (например, в телевидении, радиоастрономии и подобных системах), обладают двумерной гибкостью, отсутствующей у электрических систем. Кроме этого, можно дополнительно ввести и использовать координату «время».

Умело используя соотношения между предметом, апертурой и плоскостью изображения, можно существенно упростить измерения искомого распределения света (комплексной амплитуды и интенсивности) в любой из этих прикладных областей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stroke G. W., *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 846 (1964).
2. Maréchal A., Françon M., *Diffraction*, Revue d'Optique, Paris, 1960; русский перевод: Марешаль А., Франсон М., Структура оптического изображения, изд-во «Мир», 1964.
3. Maréchal A., *Imagerie Géométrique*, Revue d'Optique, Paris, 1952.
4. Stroke G. W., в кн. «Handbuch der Physik» (Flügge S., ed.), Band 29, Springer, Berlin, в печати.

### Глава 3

## ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРИ НЕГОМЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ

### 1. Изображение точечного источника

Если выполнены условия, при которых связь между комплексной амплитудой в зрачке  $f(x, y)$  и комплексной амплитудой в фокальной плоскости  $F_{P'}[k(\xi'/f), k(\eta'/f)]$  выражается в форме преобразования Фурье (рис. 1), то, согласно уравнениям (28) и (29) гл. 2,

$$F_{P'}\left(k \frac{\xi'}{f}, k \frac{\eta'}{f}\right) = \int \int_{\text{По зрачку}} f(x, y) \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{\xi'}{f} x + \frac{\eta'}{f} y\right)\right] dx dy, \quad (1a)$$

или

$$F_{P'}(ka, k\beta) = \int \int_{\text{По зрачку}} f(x, y) \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda} (ax + \beta y)\right] dx dy. \quad (1б)$$

Здесь  $F_{P'}$  — амплитуда вектора электрического поля в точке  $P'$ . Напомним, что

$$\xi' = f\alpha, \quad \eta' = f\beta, \quad (2)$$

а

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3)$$

Если использовать символ  $\mathfrak{F}$  для преобразования Фурье или фурье-образа, то выражение (1a) можно переписать в виде

$$F_{P'}\left(\frac{k}{f} \xi', \frac{k}{f} \eta'\right) = \mathfrak{F}[f(x, y)], \quad (4)$$

или

$$f(x, y) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F_{P'}\left(\frac{k}{f} \xi', \frac{k}{f} \eta'\right). \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) указывают на то, что амплитуды в зрачке и в дифракционной картине связаны преобразованием Фурье. Напомним, что

$$\frac{k}{f} \xi' = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \quad (6)$$

$$\frac{k}{f} \eta' = \frac{2\pi}{\lambda} \beta. \quad (7)$$

Из уравнений (1) видно, что *изображение точечного источника* не является точечным. В силу электромагнитной природы света и конечных размеров зрачка свет от точечного источника в общем случае имеет вид дифракционного пятна.

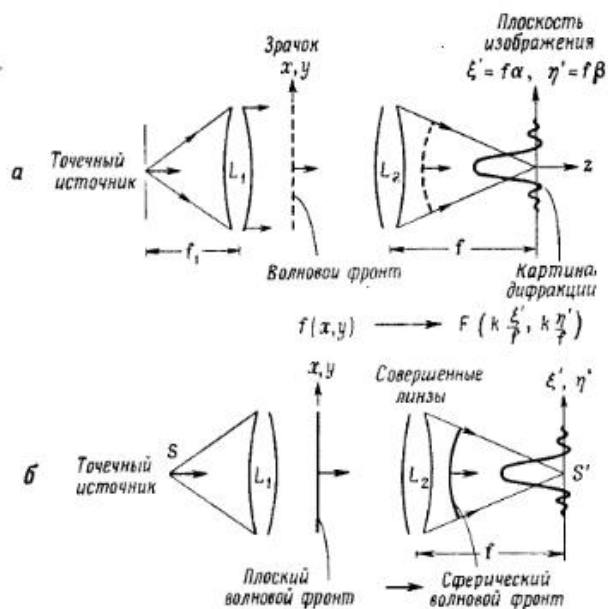


Рис. 1.

а — картина дифракции точечного источника, б — система совершенных линз.

Оптические приемники, как правило, чувствительны к электрическому полю  $\mathbf{E}$  и регистрируют величину этого поля, а именно  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = |\mathbf{E}|^2$ . Поэтому при рассмотрении процесса образования изображения при использовании приближения, основанного на преобразовании Фурье, вектор  $\mathbf{E}$  будет обозначаться символом  $F$  или  $f$ .

Оптические приемники света (фотоэлемент, фотографическая эмульсия, глаз и т. д.) могут обнаруживать в лучшем случае только энергию. Вследствие этого в оптике в обычных условиях измеряется только среднее по времени электрическое поле и детектируемой величиной является *интенсивность*

$$I_{P'} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = |\mathbf{E}|^2, \quad (8)$$

а не комплексная амплитуда вектора электрического поля

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}| \exp[i\varphi(\mathbf{E})].$$

Фаза  $\varphi(\mathbf{E})$  вектора электрического поля тем не менее *может* быть зарегистрирована, если, например, использовать интерферометрическое устройство.

## 2. Сложение света, падающего из нескольких точек источника на отдельную точку изображения

Свет, идущий от нескольких точек источника, может упасть на любую точку изображения. Пусть  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  — векторные амплитуды света, упавшего в точку  $P'$  из двух различных точек источника. Здесь встретятся два предельных случая, которые будут проиллюстрированы на примере двух точек источника.

1. Две точки источника излучают свет когерентно:  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  могут интерферировать и детектируемая интенсивность равна

$$[I_{P'}]_{\text{когер}} = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^* = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2. \quad (9)$$

2. Две точки источника излучают свет совершенно некогерентно:  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  не могут интерферировать и детектируемая интенсивность равна

$$[I_{P'}]_{\text{некогер}} = (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^*) + (\mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^*) = |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 = I_1 + I_2. \quad (10)$$

Различие между измерениями (9) и (10) фундаментально и составляет основу дальнейшего обсуждения процесса образования изображения.

Уравнения (8) — (10) описывают идеальные ситуации. В общем же случае регистрируется интенсивность, усредненная соответствующим образом по времени. Очевидно, далее, что если свет приходит в одну точку изображения от многих точек источника, то

$$[I_{P'}]_{\text{когер}} = \left| \sum_i \mathbf{E}_i \right|^2, \quad (11)$$

а

$$[I_{P'}]_{\text{некогер}} = \sum_i |\mathbf{E}_i|^2 = \sum_i I_i. \quad (12)$$

В результате можно сформулировать следующие хорошо известные «рецепты»: при когерентном освещении суммируются амплитуды и модуль суммы возводится в квадрат; при некогерентном освещении суммируются интенсивности, т. е. квадраты модулей.

Как будет показано ниже в ходе математического анализа явлений когерентности, частичной когерентности и некогерентности, отсутствие интерференции является вполне достаточной характеристикой некогерентного случая, рассмотренного выше.

изображения от элемента источника шириной  $\Delta u'$ , испускающего свет амплитуды  $O(u')$ , когда элемент расположен в точке  $u'$ , определяется выражением

$$\Delta I(u'_0) = s(u'_0 - u') O(u') \Delta u'. \quad (15)$$

Уравнение (15) описывает не что иное, как картину дифракции или функцию разброса, взвешенную по интенсивности  $O(u')$  в точке  $u'$ , являющейся центром соответствующего дифракционного пятна. Вследствие того что даже элементарный излучатель (атом, молекула и т. д.) имеет конечную ширину

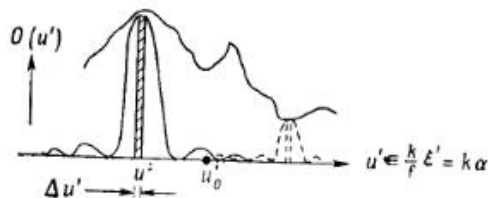


Рис. 3. Образование изображения в терминах свертки.

$\Delta u'$ , максимум функции разброса должен быть нормирован величиной  $O(u') \Delta u'$ . Если свет в точку  $u'_0$  идет от нескольких точек источника, то

$$I(u'_0) = \sum_j O(u'_j) s(u'_0 - u'_j) du', \quad (16)$$

а в предельном случае большого числа точечных источников

$$I(u'_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(u') s(u'_0 - u') du'. \quad (17a)$$

Сразу видно, что уравнение (17a) имеет вид интеграла свертки, т. е. (см. гл. 7)

$$I(u'_0) = O(u') \otimes s(u'). \quad (17b)$$

Некоторые наиболее важные соотношения, установленные нами при анализе процесса образования изображения, можно записать с помощью приведенных координат (6a) и (7a) в следующем виде.

*Дифракционная картина (распределение комплексной амплитуды)*

$$F(u', v') = \iint f(x, y) \exp[i(u'x + v'y)] dx dy = \mathfrak{F}[f(x, y)]. \quad (18)$$

*Функция разброса (распределение интенсивности)*

$$s(u', v') = \mathfrak{F}[f(x, y)] \cdot \mathfrak{F}^*[f(x, y)]. \quad (19)$$

*Изображение (распределение интенсивности)*

$$I(u', v') = O(u', v') \otimes s(u', v'), \quad (20)$$

где символ  $\mathfrak{F}$  означает преобразование Фурье, или фурье-образ оптической функции, а знак  $\otimes$  — интеграл свертки; таким образом:

*Пространственная структура изображения* описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} I(u'_0, v'_0) &= O(u', v') \otimes s(u', v') = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} O(u', v') s(u'_0 - u', v'_0 - v') du' dv'. \end{aligned} \quad (20a)$$

Уравнение (20a) представляет собой двумерный эквивалент соотношения (17).

## 6. Анализ процесса образования изображения в пространстве фурье-координат

Если процесс получения изображения рассматривать в пространстве фурье-координат, или, иначе, в плоскости пространственных частот, то такой подход обнаруживает некоторые существенные преимущества.

Понятие пространства фурье-координат можно ввести по аналогии с радиотехникой, если найти преобразования Фурье обеих сторон равенств (18)–(20), которые выражают процесс образования изображения в плоскости пространственных координат.

Рассмотрим выражение

$$I(u'_0, v'_0) = O(u', v') \otimes s(u', v'). \quad (20b)$$

Напомним, что

$$u' = \frac{2\pi}{\lambda f} \xi' = \frac{\text{Направляющий косинус}}{\text{Длина волны}} = (\text{Длина})^{-1}. \quad (6a)$$

Другими словами,  $u'$  имеет размерность: угол (в радианах), деленный на длину (длину волны) в плоскости изображения. Найдем теперь преобразования Фурье обеих сторон равенства (20). В результате этого равенство (20) будет «перенесено» обратно в плоскость зрачка и будет описывать волновую поверхность с координатами  $x$  и  $y$ .

Используя выражения

$$\mathfrak{F}[I(u', v')] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(u', v') \exp[-2\pi i(u'x + v'y)] du' dv' \quad (21a)$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[O(u', v') \otimes s(u', v')] &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [O(u', v') \otimes s(u', v')] \exp[-2\pi i(u'x + v'y)] du' dv', \end{aligned} \quad (21b)$$

в результате нахождения фурье-образов обеих сторон равенства (20) получим

$$\mathfrak{F}[I(u'_0, v'_0)] = \mathfrak{F}[O(u', v') \otimes s(u', v')]. \quad (21в)$$

По теореме свертки [уравнение (34б) гл. 7] соотношение (21) превращается в уравнение, описывающее процесс образования изображения в пространстве фурье-координат:

$$\mathfrak{F}[I(u'_0, v'_0)] = \mathfrak{F}[O(u', v')] \cdot \mathfrak{F}[s(u', v')]. \quad (22)$$

Уравнение (22) выражает важную теорему о том, что фурье-образ распределения интенсивности изображения равен произведению фурье-образа распределения интенсивности предмета и фурье-образа функции разброса.

Важность этой теоремы станет еще более очевидной, если функцию разброса  $s(u', v')$  выразить через комплексную амплитуду на волновой поверхности  $f(x, y)$ , с которой  $s(u', v')$  связана следующим соотношением:

$$s(u', v') = \mathfrak{F}[f(x, y)] \cdot \mathfrak{F}^*[f(x, y)]. \quad (19)$$

Из второй теоремы свертки [уравнение (41) гл. 7] вытекает, что

$$\mathfrak{F}[s(u', v')] = f(x, y) \otimes f^*(-x, -y). \quad (23)$$

Из этого соотношения следует другой важный вывод о том, что фурье-образ функции разброса выражается сверткой функции зрачка с ее (зеркально повернутой!) комплексносопряженной функцией. Операция (23) очень похожа на встречающуюся до сих пор свертку и известна под названием «складного интеграла». Для действительной симметричной функции зрачка  $f(x, y)$  соотношение (23) превращается в соотношение

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[s(u', v')] &= f(x, y) \otimes f(x, y) \\ &[f(x, y) \text{ -- действительная симметричная}], \end{aligned} \quad (23a)$$

т. е. осуществляется свертка в том же смысле, в каком она была введена ранее. Теперь мы можем записать уравнение (22) в еще более удобной форме.

Так, фурье-образ процесса образования изображения для очень важного на практике случая действительной симметричной  $f(x, y)$  имеет вид

$$\mathfrak{F}[I(u', v')] = \mathfrak{F}[O(u', v')] \cdot [f(x, y) \otimes f^*(-x, -y)] \quad (24)$$

или

$$\mathfrak{F}[I(u', v')] = \mathfrak{F}[O(u', v')] \cdot [f(x, y) \otimes f(x, y)]. \quad (24a)$$

По аналогии с теорией цепей и понятием передаточной функции в радиотехнике функцию

$$\mathfrak{F}[s(u', v')] = f(x, y) \otimes f^*(-x, -y) \equiv \tau(x, y) \quad (23б)$$

можно назвать *передаточной функцией* системы, формирующей изображение, и обозначить ее через  $\tau(x, y)$ . Передаточная функция является комплексной функцией.

В разд. 7 настоящей главы мы покажем, что передаточную функцию  $\tau(x, y)$  можно также рассматривать как функцию частотного отклика оптического прибора. Если оптический прибор формирует изображение синусоидального по интенсивности предмета, то функция частотного отклика  $\tau(x, y)$  дает меру ослабления контраста изображения этого предмета для различных пространственных частот, а также указывает сдвиги синусоидальных (по интенсивности) изображений по отношению к геометрическим изображениям соответствующих синусоидальных предметов. Строго говоря, ослабление контраста определяется модулем  $\tau(x, y)$ , а сдвиг изображений — фазой  $\tau(x, y)$ .

Наконец, из уравнения (64) гл. 7 вытекает другая, более простая форма записи соотношения (23)

$$\tau(x, y) \equiv \mathfrak{F}[s(u', v')] = [f * f^*]_{-x, -y}. \quad (23в)$$

Это соотношение гласит, что передаточная функция  $\tau(x, y)$  равна значению автокорреляции функции зрачка в точке  $(-x, -y)$ .

## 7. Физический смысл функции разброса и анализ процесса образования изображения в плоскости фурье-координат

Продолжим анализ проблемы образования изображения, рассматривая геометрическое изображение предмета, а не сам предмет. Таким образом нам удастся избежать необходимости введения коэффициентов увеличения. (Во многих применениях,



например при рассмотрении астрономических приборов, в результате анализа процесса образования изображения в лучшем случае получается только геометрическое изображение. Геометрическое изображение — это такое изображение, которое создается совершенным оптическим прибором без учета ограничений, налагаемых процессом дифракции и несовершенствами самого прибора. Поэтому использование «геометрического изображения» предмета вместо самого «предмета» является вполне оправданным.)

Рассмотрим теперь проблему получения изображения для двух специфических предметов, а именно точечного предмета и синусоидального по интенсивности предмета.

### 7.1. Точечный источник создает картину дифракции, совпадающую с функцией разброса

Рассмотрим точечный источник с геометрическим изображением

$$\delta(u') = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} \left(\frac{1}{\Delta}\right) du'. \quad (25)$$

Согласно соотношению (20), имеем

$$I(u'_0) = \delta(u'_0) \otimes s(u') = s(u'_0), \quad (26)$$

и мы можем сделать вывод, что функция разброса

$$s(u') = \text{Изображение точечного источника}. \quad (27)$$

Неявно при выводе соотношения (20) предполагалось существование соотношения (27). Отметим, что  $s(u')$  ни в коем случае не должен быть «тривиальным» дифракционным пятном простейшего случая, например распределением вида

$$\left(\frac{\sin u'}{u'}\right)^2$$

или его эквивалентом. В самом общем случае функции  $s(u')$  и  $s(u', v')$  являются изображением бесконечно узкой щели или точечного источника соответственно. Фактически если мы рассматриваем соотношение (20), то  $s(u', v')$  или  $s(u')$  не должна находиться в фокальной плоскости.

### 7.2. Синусоидальный по интенсивности предмет имеет функцию пространственно-частотного отклика, совпадающую с фурье-образом дифракционной картины

По аналогии с простой гармонической функцией времени

$$\exp\left(2\pi i \frac{t}{T}\right)$$

с периодом  $T$  рассмотрим синусоидальный по интенсивности предмет

$$O(u', v') = \exp\left[2\pi i \left(\frac{u'}{U'_0} + \frac{v'}{V'_0}\right)\right], \quad (28)$$

где  $U'_0$  и  $V'_0$  — пространственные периоды предмета в плоскости  $(u', v')$ . Напомним, что в рассматриваемом анализе действительную часть комплексной функции, описывающей предмет и изображение соответственно, необходимо выделять только в конце расчетов. С учетом преобразования  $O(u', v')$  в плоскость  $(x, y)$  функцию, характеризующую предмет, можно записать в виде

$$O(u', v') = \exp[2\pi i (u'x_0 + v'y_0)], \quad (29)$$

где  $x_0 = 1/U'_0$  и  $y_0 = 1/V'_0$  являются теперь «частотами» в плоскости  $(x, y)$ .

Покажем теперь, что изображение синусоидального предмета также является синусоидальным, характеризуется той же частотой или периодом, но в соответствии с передаточной функцией  $\tau(x, y)$  имеет меньший контраст и сдвиг по фазе. Рассмотрим соотношение

$$I(u'_0, v'_0) = O(u', v') \otimes s(u', v'). \quad (20)$$

Согласно разд. 2 гл. 7, интеграл свертки является коммутативной операцией, и мы имеем

$$I(u'_0, v'_0) = s(u', v') \otimes O(u', v') \quad (20a)$$

или

$$I(u'_0, v'_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u', v') \exp\{2\pi i [(u'_0 - u')x_0 + (v'_0 - v')y_0]\} du' dv', \quad (30)$$

что можно записать в виде

$$I(u'_0, v'_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u', v') \exp[2\pi i (u'_0 x_0 + v'_0 y_0)] \times \exp[-2\pi i (u' x_0 + v' y_0)] du' dv'. \quad (31)$$

Замечая, что интегрирование в выражении (31) ведется по  $u'$  и  $v'$ , получаем

$$I(u'_0, v'_0) = \exp[2\pi i(u'_0 x_0 + v'_0 y_0)] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u', v') \exp[-2\pi i(u' x_0 + v' y_0)] du' dv'. \quad (32)$$

Наконец, с помощью (23) мы обнаруживаем, что интеграл в выражении (32) есть не что иное, как передаточная функция

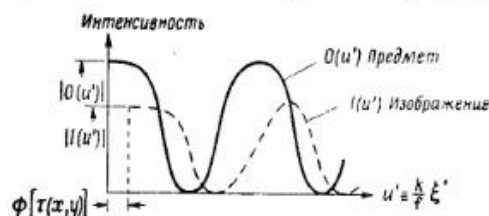


Рис. 4. Функция частотного отклика при некогерентном освещении.

$\tau(x, y)$ . Окончательно изображение  $I(u'_0, v'_0)$  синусоидального предмета мы можем записать в следующем виде:

$$I(u'_0, v'_0) = \exp[2\pi i(u'_0 x_0 + v'_0 y_0)] \tau(x_0, y_0), \quad (33)$$

т. е.

$$I(u'_0, v'_0) = O(u', v') \tau(x_0, y_0). \quad (34)$$

Также можно написать

$$\tau(x_0, y_0) = \frac{I(u'_0, v'_0)}{O(u', v')}. \quad (35)$$

Это соотношение показывает, что передаточная функция в случае синусоидального по интенсивности предмета равна отношению функции распределения интенсивности синусоидального изображения к соответствующей функции синусоидального предмета. В действительности, поскольку мы имеем дело с комплексными амплитудами предмета и изображения, соотношение (35) следует записать в виде

$$|\tau(x_0, y_0)| = \frac{|I(u', v')|}{|O(u', v')|}, \quad (35a)$$

а [Фаза  $\tau(x_0, y_0)$ ] = [Фаза  $I(u', v')$ ] — [Фаза  $O(u', v')$ ],

т. е.

$$\Phi[\tau(x_0, y_0)] = \Phi[I(u', v')] - \Phi[O(u', v')]. \quad (35b)$$

Графическая иллюстрация соотношения (35) для синусоидального предмета дана на рис. 4. В случае предмета, который можно разложить в спектр (ряд или интеграл) синусоидальных по интенсивности фурье-компонент, каждая пространственная частота  $(x_0, y_0)$  дает одну точку на графике передаточной функции данного прибора. Конечно, каждой точке графика передаточной функции отвечают амплитуда  $|\tau(x, y)|$  и фаза  $\Phi[\tau(x, y)]$ . Нако-

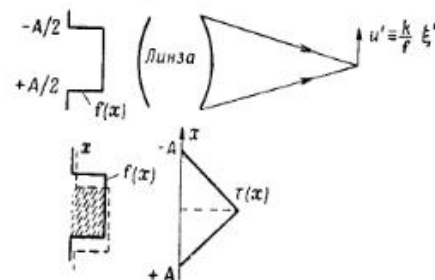


Рис. 5. Частотный отклик при возбуждении пространственным сигналом прямоугольной формы и некогерентном освещении.

пец, мы знаем, что передаточную функцию  $\tau(x, y)$  можно получить с помощью операции свертки волнового фронта (23)

$$\tau(x, y) = f(x, y) \otimes f^*(-x, -y). \quad (23b)$$

Пример  $\tau(x, y)$  для случая действительной функции  $f(x, y) = 1$  в пределах бесконечно длинной щели шириной  $A$  приведен на рис. 5.

## 8. Использование фурье-координат для синтеза предметных функций

Анализ процесса образования изображения в плоскости фурье-координат особенно удобен в задачах «согласованной фильтрации», которые встречаются в спектроскопии и впервые были рассмотрены Голеем, Жираном и другими [6—9]. Они синтезировали очень узкую щель путем изготовления в плоскости пространственных координат частотного образа щели, наблюдаемой в плоскости пространственных частот. Задача синтеза заключается в том, чтобы получить функцию сканирующей щели (в результате сканирования изображения входной щели в монохроматическом свете, прошедшем через аналогичную выходную щель) с тем же самым пространственным разрешением в длинах волн, как и в случае узких щелей, но с сильно увели-

ченным пропусканием потока света. Поскольку для синтеза узкой щели требуется семейство синусоидальных функций, а для неискаженной передачи каждой синусоиды необходимо задать эти синусоиды на достаточно большом участке, то узкую щель можно синтезировать с помощью достаточно широкого входа (и выхода) в плоскости щели, где функции синусоидального пропускания накладываются друг на друга по высоте щели; выигрыш в освещенности равен отношению этой площади к площади узкой щели.

Можно представить себе и многие другие примеры синтеза изображения как при некогерентном (настоящая глава), так и при когерентном освещении.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Maréchal A., Françon M., *Diffraction*, Revue d'Optique, Paris, 1960; русский перевод: Марешаль А., Франсон М., Структура оптического изображения, изд-во «Мир», 1964.
2. O'Neill E. L., *An Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963; русский перевод О'Нейл Э., Введение в статистическую оптику, изд-во «Мир», 1966.
3. Jernison R. C., *Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist*, Pergamon Press, New York, 1961.
4. Forrester A. T., Gundmundsen R. A., Johnson P. O., *Phys. Rev.*, **99**, 1691 (1955).
5. Mandel L., в кн. «Progress in Optics» (Wolf E., ed.), vol. II, North-Holland Publ., Amsterdam, 1963.
6. Golay M. J. E., *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 468 (1951).
7. Girard A., *Opt. Acta*, **7**, 81 (1960); *Appl. Opt.*, **2**, 79 (1963).
8. Stroke G. W., в кн. «Handbuch der Physik» (Flügge S., ed.), Band 29, Springer, Berlin, в печати.
9. Jacquipot P., Roizen-Dossier B., в кн. «Progress in Optics» (Wolf E., ed.), vol. III, North-Holland Publ., Amsterdam, 1964.
10. Mertz L., *Transformations in Optics*, Wiley, New York, 1965; русский перевод: Мерц Л., Интегральные преобразования в оптике, изд-во «Мир».

## Глава 4

### КОГЕРЕНТНОСТЬ СВЕТА (ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ)

#### 1. Введение

Различают по крайней мере три вида когерентности света:

- 1) спектральную (временную или фазовую) когерентность, или же кратковременную когерентность;
- 2) пространственную когерентность;
- 3) амплитудную и частотную стабильность во времени, или долговременную когерентность.

В общем случае свет необходимо описывать с помощью случайных функций. Почти всегда излучение обычных источников

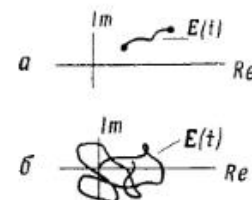


Рис. 1. Диаграмма изменения во времени амплитуды колебаний на оптических частотах (по Марешалю и Франсону [17]).

либо неполяризовано, либо поляризовано частично и имеет конечный интервал частот, а его амплитуда изменяется во времени. Свет от лазеров непрерывного действия, имеющих выходные окна под углом Брюстера, обычно поляризован.

Наиболее простой и самый узкий класс электромагнитного излучения — это монохроматическая поляризованная электромагнитная волна с постоянной амплитудой. Пусть  $E(t)$  — мгновенное значение вектора электрического поля.

В пределах короткого интервала времени этот вектор изменяется (рис. 1, а) как

$$E(t) = E_0(t) e^{i\omega t}.$$

В пределах более длительного интервала времени среднее значение  $\overline{E(t)} = 0$  (рис. 1, б) и

$$\overline{E(t)} = \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} E(t) dt, \quad \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \overline{E(t)} = 0.$$

Однако среднее значение квадрата  $\overline{E(t)E^*(t)}$  имеет размерность энергии и отличается от нуля

$$\overline{E(t)E^*(t)} = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} E(t)E^*(t) dt \neq 0.$$

## 2. Определение когерентности

### 2.1. Корреляционный метод

Пусть в точке  $P$  регистрируется световое излучение от источника  $S$  (рис. 2). Предположим, что свет, приходящий в точку  $P$  разными путями, имеет параллельные векторы поляризации.

Суммарное поле в точке  $P$  равно

$$E_R(t) = E_1(t) + E_2(t),$$

или

$$E_R(t) = E(t) + E(t - \tau). \quad (1)$$

Если имеется квадратичный детектор с большим временем установления, то он зарегистрирует величину

$$I(t, \tau) = \overline{E_R(t)E_R^*(t)} = \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} E_R(t)E_R^*(t) dt \neq 0. \quad (2)$$

Если далее предположить, что источник является стационарным, то

$$I(t, \tau) = I(\tau), \quad (3)$$

где  $\tau$  — время запаздывания второго пучка относительно первого. Исходя из этого, получаем

$$I(\tau) = |\overline{E(t) + E(t - \tau)}|^2 = \overline{|E(t)|^2 + |E(t - \tau)|^2 + 2\overline{E(t)E^*(t - \tau)}}. \quad (4)$$

Все три члена в выражении (4) имеют структуру функции автокорреляции  $\varphi(\tau)$ . При этом из условия стационарности источника следует

$$|\overline{E(t)}|^2 = |\overline{E(t - \tau)}|^2 = \varphi(0). \quad (5)$$

Окончательно регистрируемая интенсивность равна

$$I(\tau) = 2\varphi(0) + 2\varphi(\tau). \quad (6)$$

Для нас представляет интерес функция  $\varphi(\tau)$ , являющаяся функцией автокорреляции электрического поля светового пучка. Выражение (6) становится особенно интересным, если его сравнить с выражением  $I(\tau)$ , полученным с помощью теории интерференции (см., например [1]).

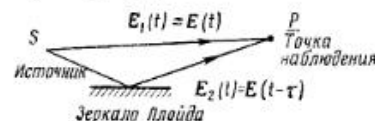


Рис. 2. Схема измерения когерентности с помощью зеркального интерферометра Ллойда.

По-видимому, полезно отметить (подразд. 2.7 настоящей главы), что излучения двух различных источников, испускающих свет двух различных частот, могут интерферировать только в том случае, если эти источники являются стационарными в смысле уравнения (3)!

### 2.2. Интерференционный анализ временной когерентности

#### а. Монохроматический свет (одночастотный источник)

Рассмотрим любой обычный двухлучевой интерферометр. Это может быть зеркало Ллойда, изображенное на рис. 2, или интер-

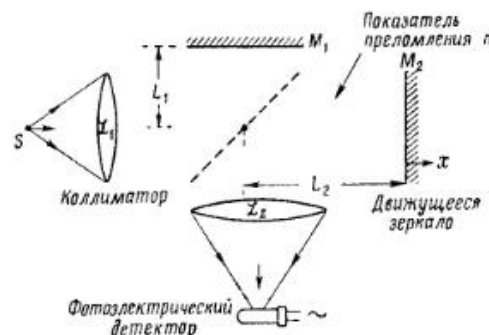


Рис. 3. Интерферометр Майкельсона — Тваймана — Грина с фотоэлектрическим детектором.

ферометр Майкельсона — Тваймана — Грина, показанный на рис. 3.

Пусть одно из зеркал,  $M_2$ , движется поступательно в направлении  $x$  с постоянной скоростью. Тогда ток фотодетектора при

конечном запаздывании  $\tau$  и заданной частоте  $\omega$  равен

$$I(\tau) = 1 + 1 + 2 \cos 2\pi \frac{\tau}{T_\omega} = 2(1 + \cos 2\pi\omega\tau), \quad (7)$$

где  $T_\omega = 1/\omega$ . Вид кривой тока показан на рис. 4. В реальном интерферометре оптическая разность хода равна  $\Delta = n(L_1 - L_2)$ ,

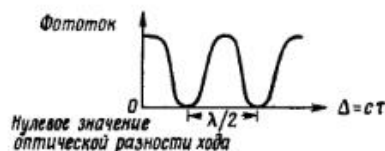


Рис. 4. Сигнал интерференции для одночастотного излучения в зависимости от оптической разности хода  $\Delta = n(L_1 - L_2)$  для интерферометра Майкельсона — Тваймана — Грина (рис. 3).

разность фаз  $\varphi = 2\pi(\Delta/\lambda)$ , время запаздывания  $\tau = \Delta/c$ , где  $c$  — скорость света в вакууме, а  $n$  — показатель преломления.

#### 6. Полихроматический свет (некогерентный источник)

Пусть  $\Phi(\omega)$  — энергетический спектр светового источника, отнесенный к единичному интервалу частоты  $\Delta\omega$  (рис. 5). Предполагается, что некогерентный источник таков, что различные

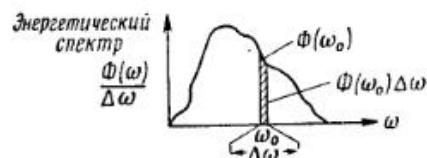


Рис. 5. Энергетический спектр некогерентного (теплового) полихроматического источника света.

частоты спектра в источнике статистически некоррелированы, так что между различными частотами невозможна интерференция в обычном смысле слова. (Случай биения между различными частотами рассматривается ниже.) При таких предположениях для каждой частоты выполняются следующие соотношения:

$$\omega_1 \rightarrow I_1(\tau) = \Phi(\omega_1) \Delta\omega \cdot 2(1 + \cos 2\pi\omega_1\tau),$$

$$\omega_2 \rightarrow I_2(\tau) = \Phi(\omega_2) \Delta\omega \cdot 2(1 + \cos 2\pi\omega_2\tau),$$

и, поскольку когерентность между различными частотами отсутствует, регистрируемая интенсивность имеет вид (рис. 6)

$$I(\tau) = 2 \int_0^\infty (1 + \cos 2\pi\omega\tau) \Phi(\omega) d\omega. \quad (8)$$

#### 2.3. Сравнение корреляционного и интерференционного методов

Если записать выражение (8) в виде

$$I(\tau) = 2 \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega + 2 \int_0^\infty \Phi(\omega) \cos(2\pi\omega\tau) d\omega, \quad (8a)$$

то можно понять физический смысл функции автокорреляции. Действительно,

$$\varphi(0) = \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega \quad (9)$$

и

$$\varphi(\tau) = \int_0^\infty \Phi(\omega) \cos(2\pi\omega\tau) d\omega. \quad (10)$$

Последнее уравнение показывает, что функция автокорреляции электрического поля световой волны равна косинусному фурье-образу энергетического спектра.

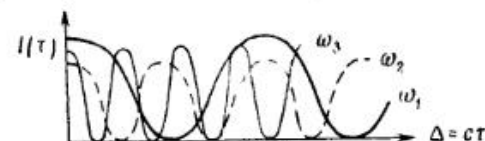


Рис. 6. Сигнал интерференции, наблюдаемый в фотозлектрическом интерферометре от полихроматического источника света.

Уравнение (10) нашло широкое применение в фурье-спектроскопии света, а также в радиоастрономии.

#### 2.4. Узкий спектр с прямоугольным контуром

Этот частный случай узкого спектра с идеальным прямоугольным контуром особенно важен для лазерного излучения (рис. 7). В этом случае интенсивность равна

$$I(\tau) = 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega_0} d\omega + 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega_0} \cos(2\pi\omega\tau) d\omega, \quad (11)$$

т. е.

$$I(\tau) = 4\Delta\omega_0 + \frac{2}{2\pi\tau} \left[ \sin 2\pi\omega\tau \right]_{\omega_0 - \Delta\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega_0}, \quad (12)$$

или окончательно

$$I(\tau) = 4\Delta\omega_0 \left( 1 + \frac{\sin 2\pi \Delta\omega_0 \tau}{2\pi \Delta\omega_0 \tau} \cos 2\pi\omega_0 \tau \right). \quad (13)$$

График этого выражения приведен на рис. 8. Первый минимум огибающей  $\sin x/x$  расположен при  $2\pi\Delta\omega_0\tau = \pi$ . Иногда огибающую

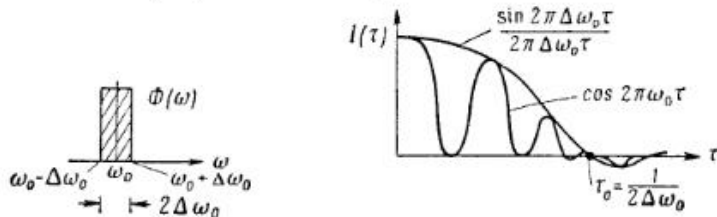


Рис. 7. Спектральный состав излучения от полихроматического источника света с прямоугольным контуром спектра.

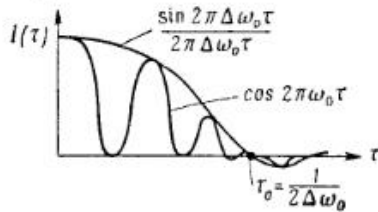


Рис. 8. Сигнал интерференции для источника с прямоугольным контуром спектра.

щую  $\sin x/x$  называют кривой видимости интерференционных полос. Ослабление видимости полос в зависимости от оптической разности хода находится в обратном соотношении с шириной спектральной линии.

### 2.5. Фотоэлектрический интерферометр с подвижным зеркалом в случае гауссова контура спектральной линии

Рассмотрим теперь фотоэлектрический интерферометр (рис. 3), в котором источник света испускает спектральную линию с гауссовым контуром. Этот случай представляет особый интерес, поскольку в обычных условиях спектры именно такого вида имеют большинство тепловых источников света (исключая лазеры). Покажем, что фурье-образ гауссова контура линии имеет также гауссов контур.

Пусть, например,

$$g(\omega) = \exp(-a^2\omega^2), \quad (14)$$

где  $a$  — постоянная. Путем преобразования Фурье получаем

$$g(\omega) = \exp(-a^2\omega^2) \xrightarrow{\mathfrak{F}} G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2\omega^2) \exp(2\pi i\omega x) d\omega. \quad (15)$$

Этот интеграл можно разбить на два

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2\omega^2) \cos(2\pi\omega x) d\omega + i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2\omega^2) \sin(2\pi\omega x) d\omega. \quad (16)$$

Поскольку  $g(\omega)$  — четная функция  $\omega$ , то второй интеграл обращается в нуль. Следовательно,

$$G(x) = 2 \int_0^{\infty} \exp(-a^2\omega^2) \cos(2\pi\omega x) d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\pi^2 x^2}{a^2}\right). \quad (17)$$

Другими словами,

$$g(\omega) = \exp[-(a\omega)^2] \xrightarrow{\mathfrak{F}} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left[-\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2\right]. \quad (18)$$

Уравнение (18) демонстрирует замечательное свойство гауссовой функции: её фурье-образ также является гауссовой функцией. При этом ширина функции фурье-образа обратно пропорциональна ширине исходной функции.

Более общее выражение для фотоэлектрического тока  $F_G$ , регистрируемого фотодетектором, можно получить, если учесть ширину источника (разд. 2 гл. 2). Как показано в работе [2], для гауссова контура спектральной линии

$$\Phi_\sigma = \Phi_0 \exp\left[-\left(\frac{mc^2}{2kT}\right) \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2}\right] \quad (19)$$

имеем следующее выражение для фотоэлектрического тока:

$$F_G(x) = 4\pi^{3/2} R_s^2 I_s \sigma \left\{ 1 + \exp[-4\pi^2 x^2 \sigma^2 n^2] \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin \frac{\pi x \alpha_s^2 n}{\lambda}}{\frac{\pi x \alpha_s^2 n}{\lambda}} \cos \left[ \frac{2\pi x \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_s^2\right)}{\frac{1}{2} \frac{\lambda}{n}} \right] \right\}, \quad (20)$$

где, кроме формы контура линии, также учтена угловая апертура источника  $\alpha_s$  (рис. 9), видимая в коллиматоре. В выражении (20) использованы следующие обозначения:  $R_s$  — радиус источника,  $I_s$  — интенсивность пучка в интерферометре,  $\sigma = 1/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны света,  $n$  — показатель преломления среды внутри интерферометра,  $x$  — расстояние между зеркалами.

Множитель  $\exp[-4\pi^2 x^2 \sigma^2 n^2]$  учитывает эффект контура линии. Эффект конечной апертуры источника учитывается множителем  $\sin \xi/\xi$ . [Обратите внимание на то, что аналогичный множитель в выражении (13) имеет другое происхождение.] При конечной апертуре источника лучи проходят через интерферометр не только параллельно оси, но также под углами к оси в пределах определенного конуса (рис. 9). На практике множитель



Рис. 9. Пояснение к схеме фотоэлектрического интерферометра.

$\xi = \pi x a_s^2 n / \lambda$ , обусловленный геометрией, можно сделать пренебрежимо малым по сравнению с множителем, обусловленным контуром линии, при расстояниях  $x$  вплоть до нескольких метров. Например, если  $\alpha_s \approx 6 \cdot 10^{-4}$  рад, то первый минимум множителя  $\sin \xi/\xi$  находится при  $x \approx 1,5$  м. Однако, как было показано автором [2], при использовании интерферометра с конечной апертурой источника необходимо вводить заметные поправки на длину. Например, для  $\alpha_s \approx 6 \cdot 10^{-4}$  рад член  $\alpha_s^2/4 \approx 1 \cdot 10^{-7}$  под знаком косинуса в выражении (20) приводит к поправке  $0,05 \lambda/2$  при смещении зеркала на  $x = 136$  мм.

## 2.6. Физический смысл спектра мощности

### а. Сигнал одной частоты

Рассмотрим этот вопрос, используя аналогию с электрической цепью (рис. 10). Для изображенной цепи

$$i(t) = I_0 \cos \omega_0 t \quad (21)$$

и, следовательно, падение напряжения

$$v(t) = RI_0 \cos \omega_0 t. \quad (22)$$

Отсюда мощность

$$w(t) = RI_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} RI_0^2 + \frac{1}{2} RI_0^2 \cos 2\omega_0 t. \quad (23)$$

В пространстве частот получаем

$$I(\omega) = \mathfrak{F}[i(t)] = \frac{1}{2} I_0 \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} I_0 \delta(\omega + \omega_0), \quad (24)$$

где дельта-функция определяется через скалярные произведения (разд. 4 гл. 7):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (25)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (26)$$

Спектральное представление тока  $I(\omega)$ , согласно выражению (24), показано на рис. 11.

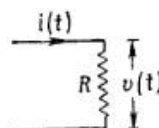


Рис. 10. Эквивалентная схема цепи (к обсуждению спектра мощности).

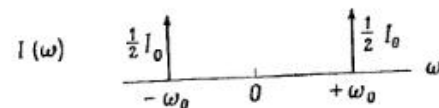


Рис. 11. Спектральное представление  $I(\omega)$  одночастотного сигнала.

Мощность  $w(t)$  в пространстве частот может быть представлена в следующем виде:

$$W(\omega) = \mathfrak{F}[w(t)] = \frac{1}{2} RI_0^2 \delta(0) + \frac{1}{4} RI_0^2 \delta(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{4} RI_0^2 \delta(\omega + 2\omega_0). \quad (27)$$

Из графика  $W(\omega)$ , показанного на рис. 12, можно сделать любопытный вывод: энергия сосредоточена на тех частотах, где

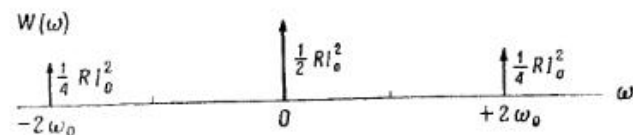


Рис. 12. Спектральное представление  $W(\omega)$  одночастотного сигнала.

нет никакого тока! Этот парадокс заставляет подыскать более правильную интерпретацию спектра мощности.

Остановимся теперь на функции автокорреляции квадрата тока. Рассмотрим

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} i^2(t) dt = \frac{1}{2} I_0^2 \frac{\sin 2\omega_0 T}{2\omega_0 T} \quad (28)$$

Перейдя к пределу, получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} i^2(t) dt = \frac{1}{2} I_0^2. \quad (29)$$

Следовательно, существует функция автокорреляции:

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (I_0 \cos \omega_0 t) |I_0 \cos \omega_0 (t - \tau)| dt, \quad (30)$$

т. е.

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2} I_0 \cos \omega_0 \tau. \quad (31)$$

Фурье-образ  $\Phi(\omega)$  функции автокорреляции имеет следующий вид:

$$\Phi(\omega) = \mathfrak{F}[\varphi(\tau)] = \frac{1}{4} I_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (32)$$

Функцию  $\Phi(\omega)$  называют *спектром мощности* или *энергетическим спектром* тока. Легко видеть, что  $\Phi(\omega)$  содержит мощность как раз на тех же частотах, что и ток (рис. 13). Это позволяет

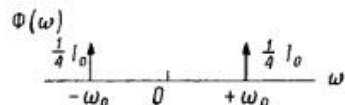


Рис. 13. Спектральное представление  $\Phi(\omega)$  одночастотного сигнала.

сделать вывод о том, что *спектр мощности*, равный фурье-образу функции автокорреляции сигнала, имеет физический смысл энергетического спектра сигнала (в данном случае тока).

#### 6. Сигнал многих частот

Пусть сигнал имеет вид

$$i(t) = \sum_k a_k \exp(i\omega_k t). \quad (33)$$

Тогда

$$F(\omega) = \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k), \quad (34)$$

а спектр мощности, согласно теории преобразования Фурье (разд. 4 гл. 7), может быть представлен как

$$\Psi(\omega) = \mathfrak{F}[\varphi(\tau)] = \sum_k |a_k|^2 \delta(\omega - \omega_k). \quad (35)$$

## 2.7. Гетеродинный анализ сигналов и биений

### а. Биения когерентных волн. Допплеровское смещение частот света, отраженного от движущегося зеркала

Спектр излучения лазера обычно настолько узок, что его невозможно исследовать оптическими спектрометрами высокого разрешения, используя, например, спектрометры на основе дифракционных решеток или даже интерферометры Фабри — Перо. Уже в 1961 г. Джаван и др. [3] показали, что монохроматичность He—Ne-лазера на волне 1,153 мкм достигает  $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-14}$ .

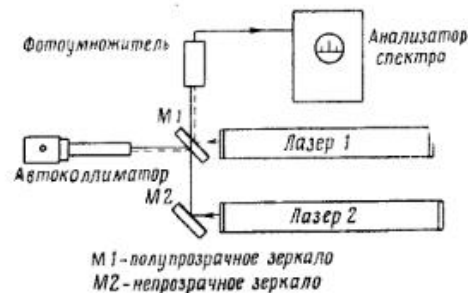


Рис. 14. Гетеродинирование излучения двух He—Ne-лазеров непрерывного действия и выделение частоты биений (по Джавану и др. [3]).

Эти данные были получены путем гетеродинирования света, испущенного от двух одинаковых лазеров (рис. 14). Гетеродинные эксперименты являются по существу интерференционными и весьма похожи на измерения с помощью фотоэлектрического интерферометра с движущимся зеркалом [4], аналогичные описанным в разд. 2.5. Частота света, отраженного от движущегося зеркала  $M_2$  (рис. 3), вследствие эффекта Доплера смещается относительно частоты света, отраженного от неподвижного зеркала  $M_1$ . Поэтому в отличие от разд. 2.5 анализ фотоэлектрического сигнала необходимо производить с учетом *интерференции между волнами различных частот*.

Ввиду сходства методов рассмотрения эффекта Доплера в интерферометре с движущимся зеркалом (рис. 3), с одной стороны, и формы контура линии в гетеродинных экспериментах с помощью биений — с другой, мы сначала проанализируем эффект Доплера в фотоэлектрическом интерферометре с движущимся зеркалом.

Если зеркало движется со скоростью  $v$ , значительно меньшей скорости света  $c$ , то, согласно теории относительности, наблю-



даемая частота  $f_0$  отличается от частоты источника  $f_s$ :

$$f_0 \approx \frac{f_s}{1 - 2 \frac{v}{c} \cos \theta_0} \approx f_s \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right), \quad (36)$$

где  $\theta_0$  — угол, под которым отражается свет от движущегося зеркала (рис. 15).

Здесь мы считаем, что источник  $S$  и фотодетектор расположены в неподвижной системе координат и угол  $\theta_0$  измеряется в

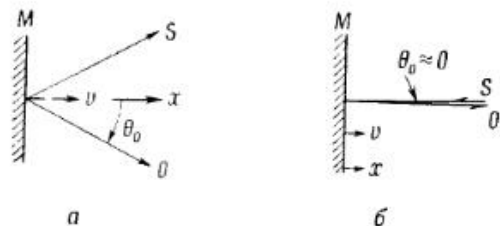


Рис. 15. Иллюстрация релятивистских эффектов при отражении света от движущихся зеркал.

этой же системе [5]. При падении лучей по нормали (рис. 3)  $\theta_0 = 0$  и выражение (36) сводится к виду

$$f_0 \approx f_s \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \right). \quad (37)$$

Если же скорости не очень малы, то вместо выражения (36) следует брать точное выражение

$$f_0 = f_s \frac{\left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{1/2}}{1 - 2 \frac{v}{c} \cos \theta_0}. \quad (36a)$$

Из этого выражения видно, что даже если зеркало перемещается перпендикулярно линии наблюдения ( $\theta_0 = 90^\circ$ ), то частота также смещается.

(В случае отражения света от спутников и других космических объектов это явление может оказаться существенным.)

Рассмотрим сначала качественно, к чему приводит движение зеркала в фотоэлектрическом интерферометре. Согласно выражению (37), относительное смещение частоты равно

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| \approx \left| \frac{2v}{c} \right|, \quad (38)$$

где  $x = vt,$  (39)

$$c = f\lambda, \quad (40)$$

а  $f = f_s$ . За интервал времени  $t$  в интерферометре пройдет

$$n_\lambda = ft \text{ циклов} \quad (41)$$

на частоте  $f = f_s$  и

$$n_{\lambda + \Delta \lambda} \approx f \left( 1 + \frac{2v}{c} \right) t \text{ циклов} \quad (42)$$

на частоте  $f + \Delta f$ . Каждый раз, когда

$$n_{\lambda + \Delta \lambda} - n_\lambda = p \quad (p - \text{целое число}), \quad (43)$$

т. е.

$$ft + \frac{2vt}{c} f - ft = \frac{2xf}{c} = \frac{2x}{\lambda} = p, \quad (44)$$

или

$$x = p \frac{\lambda}{2} \quad (45)$$

в соответствии с теорией, изложенной в разд. 2.5, пройдет *один цикл интерференции, или одно биение*. Отсюда мы можем сделать вывод о *возможности* интерференции световых волн различных частот, если только выполняется условие стационарности (3), обеспечивающее взаимную когерентность двух частот.

Теперь можно изложить несколько более строгую теорию биения частот, пригодную для анализа опытов с гетеродинированием лазерных излучений и к интерферометрам с движущимся зеркалом.

(Что касается лазерного гетеродинирования, то важно напомнить, что частоты излучения двух лазеров можно считать стационарными в течение времени наблюдения, ввиду чего лазеры также можно рассматривать взаимно когерентными в смысле условия стационарности (3) и в смысле, аналогичном когерентности двух частот  $f_0$  и  $f_s$  в интерферометре с движущимся зеркалами, которые, как было показано, могут интерферировать; см. [2].)

Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — комплексные амплитуды электрического вектора двух плоских (или сферических) волн, распространяющихся в одном и том же направлении  $x$  от источников  $S_1$  и  $S_2$ . (Допуски на непараллельность этих двух волн будут определены позже.) Эти комплексные амплитуды можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} E_1 &= \cos \left[ \left( k + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left( \omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right], \\ E_2 &= \cos \left[ \left( k - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left( \omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right], \end{aligned} \quad (46)$$

где  $k=2\pi/\lambda$ ,  $\omega=2\pi f$ , а  $\Delta k$  и  $\Delta\omega$  — соответственно меры различия волновых чисел и частот двух волн  $E_1$  и  $E_2$ .

Суммарное поле  $E$  определяется выражением

$$E = E_1 + E_2 = 2 \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x + \frac{\Delta\omega}{2}t\right), \quad (47)$$

где  $\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x + \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$  — волна биения. Волна  $\cos(kx - \omega t)$  есть не что иное, как амплитуда сигнала интерференции, которая будет наблюдаться в фотоэлектрическом интерферометре при идеально монохроматическом источнике с частотой  $f$ .

Биения в фотоэлектрическом интерферометре имеют максимум при

$$p2\pi = \frac{\Delta k}{2}x + \frac{\Delta\omega}{2}t = 2\pi\left(\frac{\Delta f}{2c}x + \frac{\Delta f}{2}t\right), \quad (48)$$

т. е. при

$$\Delta f \frac{x}{c} = p \quad (49)$$

или

$$\frac{2\omega t}{\lambda} = p. \quad (50)$$

Другими словами, в согласии с предыдущим анализом при смещении зеркала на величину

$$x = p \frac{\lambda}{2} \quad (51)$$

будет наблюдаться одна волна интерференции.

В случае гетеродинирования максимумы биений будут, следовательно, появляться на частоте  $\Delta f$ . Для спектральных линий конечной ширины общий характер интерференции не изменится. Это следует непосредственно из соотношения (8) или из теоремы свертки (см., например, разд. 2, гл. 7). Однако биения перестанут быть монохроматическими. Их спектр уже не будет иметь вид дельта-функций, а расплывется в соответствии с шириной спектральной линии.

#### 6. Допуск на непараллельность двух интерферирующих волн в фотоэлектрических интерферометрах и в гетеродинных экспериментах

Так как фотоэлектрическое гетеродинирование волн от двух (и более) лазеров аналогично фотоэлектрической интерферометрии с движущимся зеркалом, то допуск на непараллельность интерферирующих волн можно определить, если использовать разработанную автором теорию интерферометрии [2].

Возвращаясь к рис. 3, мы можем сказать, что фотоэлектрический элемент регистрирует интеграл распределения интенсивности света в пределах апертуры линзы  $L_2$ , которая используется для фокусировки интерферирующих пучков на чувствительный участок фотодетектора.

(Утверждение остается справедливым и тогда, когда линзы не используются. Однако оно должно быть изменено в том случае, когда на фоточувствительную площадку попадает достаточно протяженная часть интерферирующих волн.)

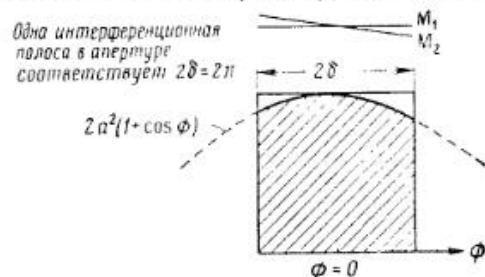


Рис. 16. Влияние непараллельности волновых фронтов на гетеродинирование излучения двух лазеров и на работу фотоэлектрического интерферометра с движущимися зеркалами.

Если две интерферирующие волны образуют угол друг с другом, то интерференционная картина не будет равномерной по яркости и ее интенсивность будет меняться по синусоиде. В пределах апертуры будет получаться целая система интерференционных полос, например в случае двух плоских волн. Поэтому непараллельность волн в интерферометре с движущимся зеркалом будет приводиться к ослаблению контраста полос (или амплитуды сигнала интерференции). Аналогично отсутствие строгой параллельности приведет к уменьшению эффективной амплитуды сигнала биений в гетеродинных экспериментах. Согласно теории [2], мы можем рассматривать отношение фототоков с фазами  $\Phi$ , между двумя интерферирующими волнами, различающимися на  $\Delta\Phi = \pi/2$ . Для прямоугольной апертуры имеем (рис. 16)

$$\frac{\text{Поток при } \Phi = 0}{\text{Поток при } \Phi = \frac{\pi}{2}} = \frac{\int_{-\delta}^{+\delta} (1 + \cos \Phi) d\Phi}{\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (1 + \cos \Phi) d\Phi} = R, \quad (52)$$

что сразу дает

$$R = 1 + \frac{\sin \delta}{\delta}. \quad (53)$$

Амплитуда сигнала интерференции, т. е. видимая амплитуда сигнала биения, равна в этом случае

$$M = R - 1 \quad (54)$$

или

$$M = \frac{\sin \delta}{\delta}. \quad (55)$$

Экспериментально наблюдаемый параметр, через который можно выразить  $M$ , равен числу полос в пределах апертуры интерферометра. Кривая зависимости  $M$  от числа полос интерференции в пределах апертуры дана на рис. 17. Видно, что поло-

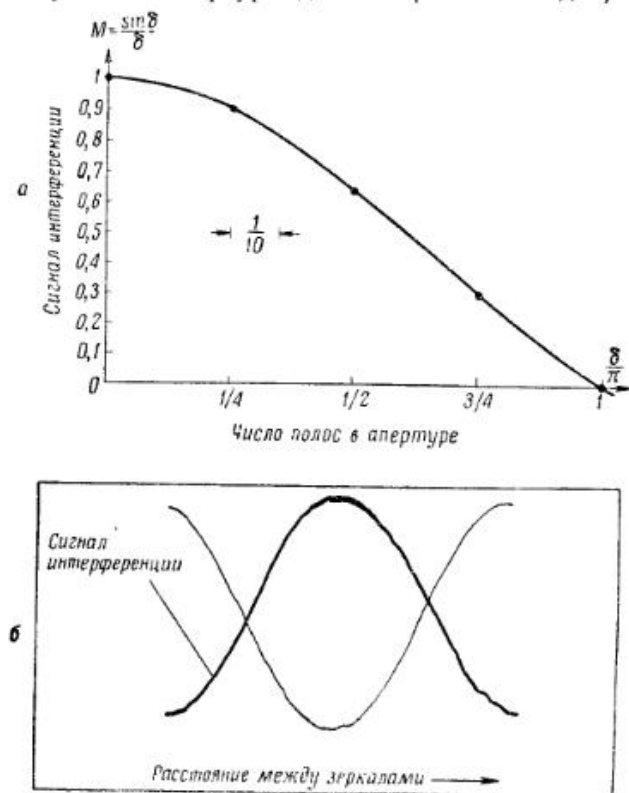


Рис. 17.

а — зависимость амплитуды сигнала интерференции  $M$  от числа полос в пределах апертуры [2]; б — фотоэлектрический сигнал, полученный в работе [6] с помощью ртутной лампы на изотопе  $\text{Hg}^{198}$ . Оптическая разность хода равна 200 мк.

вина полосы в апертуре еще сохраняет амплитуду, равную 62% максимальной. Однако если в апертуру попадает одна полная полоса, то сигнал уменьшается до нуля! Качественно это можно легко понять, если заметить, что наличие в апертуре одной полосы соответствует полупериоду яркого участка и полупериоду темного участка. Любое изменение фазы только сдвигает всю картину по апертуре, и интеграл во всех этих случаях также обращается в нуль. Допуск на непараллельность, приведенный выше, находится в согласии с оценками, полученными позднее применительно к гетеродинированию [7], а также с более ранними результатами [8], относящимися к фотоэлектрическому смещению некогерентного света.

#### в. Фотоэлектрическое смещение некогерентного света

Этот вопрос был рассмотрен в работе Форрестера и др. [8]. Строго говоря, мы можем считать, что гетеродинирование и другие эксперименты с лазерами принадлежат к классу интерференционных экспериментов с когерентным светом, который мы исследовали в предыдущих разделах. Поэтому подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной главы.

Некоторые проблемы, возникающие при смещении некогерентного света, рассматриваются в п. «г». Изложенный здесь вопрос может иметь некоторые практические применения.

#### г. Фотоэлектрическое смещение когерентного света от лазера с некогерентным тепловым излучением<sup>1)</sup>

Этот случай может возникнуть в эксперименте, где требуется привязать частоту света от лазера к средней частоте света, испускаемого внешним газовым разрядом — лампой на линиях  $\text{Kr}^{86}$  или  $\text{Hg}^{198}$  или же источником на атомном пучке. Возможная схема для привязки лазера к газовому разряду показана на рис. 18.

Для поддержания постоянной разности частот между центром спектральной линии от теплового источника и спектральной линией лазера вводится система обратной связи. Два световых пучка смешиваются в фотоумножителе, и возникающая частота биения используется для получения сигнала разбаланса, регулирующего длину резонатора лазера.

Даже в том случае, если доплеровское уширение линии теплового источника значительно шире линии лазера, можно

<sup>1)</sup> Этот подраздел написан автором совместно с проф. Г. Г. Строуком (H. H. Stroke) при участии Ф. Б. Ротца (F. B. Rotz).

показать, что ширина линии теплового источника должна быть значительно уже, чем доплеровская ширина линии газа в лазере. (Это условие не выполняется в упомянутых выше источниках с чистыми изотопами, если производить калибровку линий неона. Однако здесь может подойти источник света на атомном пучке, например описанный Кесслером источник на атомном пучке  $\text{Hg}^{198}$ .) Наше рассмотрение можно также применить к методу стабилизации частоты лазера.

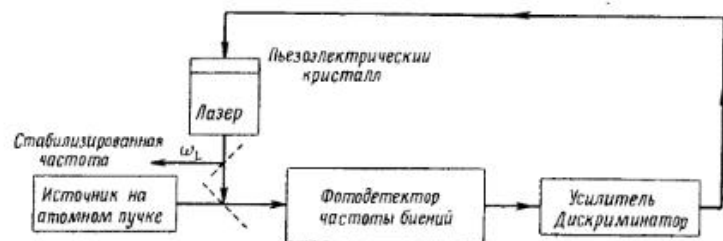


Рис. 18. Стабилизация частоты лазера путем ее «привязки» к частоте источника на атомном пучке.

Пусть  $s(t)$  — амплитуда света от источника на атомном пучке,  $\cos \omega_L t$  — амплитуда света от лазера (считая, что лазер работает в одночастотном режиме), а  $i^2(t)$  — квадрат тока на выходе фотодетектора (разд. 2.6). Тогда

$$i^2(t) = [s(t) + \cos \omega_L t][s(t) + \cos \omega_L t]^* = |s(t)|^2 + \cos^2 \omega_L t + \cos \omega_L t [s(t) + s^*(t)], \quad (56)$$

или иначе

$$i^2(t) = \left[ \frac{1}{2} + |s(t)|^2 \right] + \{\cos \omega_L t [s(t) + s^*(t)]\} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_L t. \quad (57)$$

Из (57) видно, что выражение квадрата фототока состоит из трех членов: первый дает постоянную составляющую; второй, обозначаемый далее  $y(t)$ , используется для стабилизации, а третий изменяется с удвоенной оптической частотой, и его зарегистрировать нельзя.

Теперь получим спектральное представление этих составляющих тока  $i(t)$ , используя теорию, изложенную в разд. 2.6.

Функциями, спектральное представление которых мы хотим получить, будут  $s(t)$ ,  $s^2(t)$  и

$$y(t) = \cos \omega_L t [s(t) + s^*(t)]. \quad (58)$$

Спектральные представления  $\Phi_{ss}(\omega)$  и  $\Phi_{s^2s^2}(\omega)$  функций  $s(t)$  и  $s^2(t)$  непосредственно следуют из анализа, приведенного в

разд. 2.6, и показаны на рис. 19. Предполагается, что  $s(t)$  представляет гауссову функцию с центром на частоте  $\omega_c$ . Аналогично благодаря умножению  $s(t)$  и  $s^*(t)$  на  $\cos \omega_L t$  в выражении (58) спектральное представление  $\Phi_{yy}(\omega)$  функции  $y(t)$  имеет

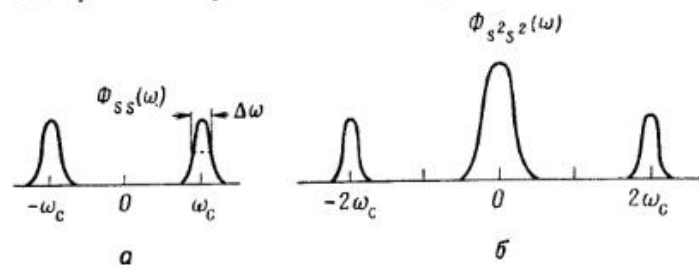


Рис. 19. Спектральное представление величин  $\Phi_{ss}(\omega)$  и  $\Phi_{s^2s^2}(\omega)$  (пояснение к схеме стабилизации лазера на рис. 18).

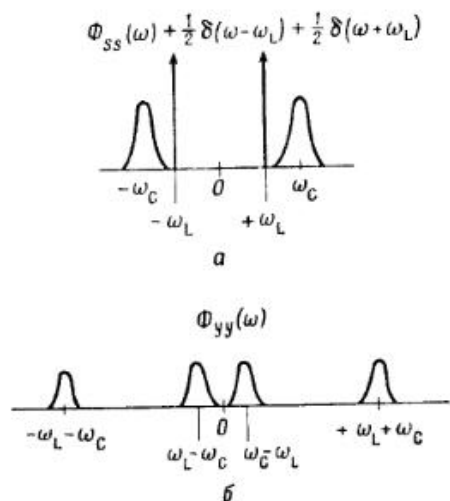


Рис. 20. Спектральное представление излучения лазера *а* и источника на атомном пучке *б*.

вид, приведенный на рис. 20. Спектральная энергия, представляющая интерес для автоматической стабилизации, располагается в двух центральных лепестках на частотах  $\omega_L - \omega_c$  и  $\omega_c - \omega_L$  соответственно. Если сравнить рис. 20 и 19, б, то станет видно, что два центральных лепестка могут совпасть с  $\Phi_{s^2s^2}(\omega)$ ,

если гауссова линия  $s(t)$  слишком широка. Перекрытие не будет большим, если разность частот

$$\omega_c - \omega_L > \frac{3}{2} \Delta\omega, \quad (59)$$

где  $\Delta\omega$  — ширина полосы частот функции  $s(t)$  (см. рис. 19, а).

Практически для стабилизации лазера пучок от него пропускается через атомный пучок, и частота лазера регулируется так, чтобы получить максимальное поглощение. Если расщепить пучок от лазера дважды и направить три лазерных пучка через атомный пучок под соответствующими углами, так чтобы один из них был по возможности ближе к нормали, то можно получить три поглощающих фильтра. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с прецизионными измерениями направления по нормали, которые необходимы для точной локализации частоты  $\omega_c$ , выходы с этих трех фильтров сравниваются при помощи соответствующего дискриминатора. Возможности экспериментов, иллюстрирующих приведенный анализ, определяются, кроме этого, соотношением сигнала и шума, а также разностью амплитуд света от лазера и теплового источника.

### 2.8. Пространственная когерентность

Когда говорят о пространственной когерентности светового пучка, то обычно имеют в виду взаимную когерентность поля в двух точках, освещаемых одним или несколькими источниками света. Степень когерентности поля в двух точках характеризует контраст интерференционной картины, получаемой в экспериментах, где эти точки являются вторичными источниками света.

Понятие пространственной когерентности лучше всего можно уяснить, если рассмотреть двухщелевой интерферометр Юнга или его эквивалент. Из этого рассмотрения можно получить довольно неожиданное, но весьма важное заключение: протяженный источник может создать когерентное поле, несмотря на то что источник состоит из многих миллионов статистически некогерентных излучателей. Это заключение является верным, если соблюдено единственное условие — угловые размеры источника, рассматриваемого из плоскости, где расположены щели, намного меньше, чем отношение длины волны света к расстоянию между щелями<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> О возможности проведения опыта Юнга при еще больших размерах источника с использованием дифракционных решеток см. Françon M., Sliansky S., Coherence en optique, CNRS, 1965, p. 59. — Прим. ред.

Найдем уравнение, определяющее коэффициент частичной когерентности. Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — две щели, освещенные протяженным некогерентным источником (рис. 21);  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  — ам-

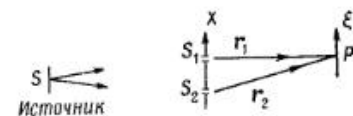


Рис. 21. Интерферометр Юнга и пространственная когерентность.

плитуды электрического поля в месте расположения щелей  $S_1$  и  $S_2$ . Тогда амплитуда поля в точке  $P$  равна

$$E_R(t) = E_1(t) \exp\left(i \frac{\varphi}{2}\right) + E_2(t) \exp\left(-i \frac{\varphi}{2}\right), \quad (60)$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (|\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2|). \quad (61)$$

Наблюдаемой величиной является средняя интенсивность в точке  $P$

$$\overline{E_R(t) E_R^*(t)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E_R(t) E_R^*(t) dt. \quad (62)$$

Черта сверху означает усреднение по времени, когда  $T \gg T_0$ , где  $T_0$  — период колебаний.

Далее имеем

$$\begin{aligned} \overline{E_R(t) E_R^*(t)} &= \overline{(E_1 e^{i\frac{\varphi}{2}} + E_2 e^{-i\frac{\varphi}{2}})(E_1^* e^{-i\frac{\varphi}{2}} + E_2^* e^{i\frac{\varphi}{2}})} = \\ &= \overline{E_1 E_1^*} + \overline{E_2 E_2^*} + \overline{E_1 E_2^* e^{i\varphi}} + \overline{E_1^* E_2 e^{-i\varphi}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Пусть

$$E_1 E_2^* = |E_1 E_2^*| e^{i\theta}. \quad (64)$$

Тогда

$$E_1^* E_2 = |E_1^* E_2| e^{-i\theta} \quad (64a)$$

и далее

$$\overline{E_R E_R^*} = \overline{E_1 E_1^*} + \overline{E_2 E_2^*} + |\overline{E_1 E_2^*}| e^{i\varphi} e^{i\theta} + |\overline{E_1^* E_2}| e^{-i\varphi} e^{-i\theta}, \quad (65)$$

поскольку

$$|\overline{E_1^* E_2}| e^{-i\varphi} e^{-i\theta} = (|\overline{E_1 E_2^*}| e^{i\varphi} e^{i\theta})^*. \quad (66)$$

Отсюда следует, что

$$\overline{E_R(t) E_R^*(t)} = \overline{E_1 E_1^*} + \overline{E_2 E_2^*} + 2 |\overline{E_1 E_2^*}| \cos(\varphi + \theta). \quad (67)$$

Интересно теперь сравнить это выражение с уравнением интерференционных полос в интерферометре Юнга от двух полностью когерентных источников:

$$I = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\sqrt{E_1 E_1^*} \sqrt{E_2 E_2^*} \cos \varphi, \quad (68)$$

или

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \varphi. \quad (68a)$$

По аналогии с выражением (68) перепишем соотношение (67) в виде

$$E_R(t) E_R^*(t) = \overline{E_1 E_1^*} + \overline{E_2 E_2^*} + 2|\gamma_{12}| (\overline{E_1 E_1^*})^{1/2} (\overline{E_2 E_2^*})^{1/2} \cos(\varphi + \theta). \quad (69)$$

В этом уравнении коэффициент частичной когерентности определяем согласно работам [1, 9, 14, 17], а именно

$$\gamma_{12} = \frac{\overline{E_1 E_2^*}}{\sqrt{\overline{E_1 E_1^*}} \sqrt{\overline{E_2 E_2^*}}} = \frac{|\overline{E_1 E_2^*}| \exp(i\theta)}{\sqrt{\overline{E_1 E_1^*}} \sqrt{\overline{E_2 E_2^*}}}. \quad (70)$$

Запишем далее соотношение (69) в виде

$$\overline{E_R(t) E_R^*(t)} = I_1 + I_2 + 2|\gamma_{12}| \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos(\varphi + \theta). \quad (70a)$$

Из сравнения выражений (68) и (69) непосредственно следует физический смысл коэффициента частичной когерентности  $\gamma_{12}$ .



Рис. 22. Коэффициент частичной когерентности  $\gamma_{12}$  для интерферометра Юнга.

Модуль  $|\gamma_{12}|$  служит мерой контраста интерференционной картины, создаваемой щелями  $S_1$  и  $S_2$ , если их освещать источником  $S$ . Фаза  $\theta$  определяет фазовый сдвиг интерференционного максимума по сравнению с его положением, когда щели освещены полностью когерентным светом. Например, фаза  $\theta$  изменяет сдвиг вдоль оси  $\xi'$  в плоскости наблюдения (рис. 22).

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = 1 & \text{ соответствует полной когерентности,} \\ \gamma_{12} = 0 & \text{ — полной некогерентности,} \\ 0 < |\gamma_{12}| < 1 & \text{ — частичной когерентности.} \end{aligned} \quad (71)$$

Смысл угла  $\theta$  можно раскрыть, рассматривая несколько частных случаев. Пусть, например,

$$\varphi + \theta = 2m\pi \text{ и } \cos(\varphi + \theta) = \max = +1.$$

Тогда

$$\overline{E_R E_R^*} = (\overline{E_R E_R^*})_{\max} = I_1 + I_2 + 2|\gamma_{12}| \sqrt{I_1} \sqrt{I_2},$$

т. е. освещенность максимальна. Если же

$$\varphi + \theta = (2m + 1)\pi \text{ и } \cos(\varphi + \theta) = \min = -1,$$

то

$$\overline{E_R E_R^*} = (\overline{E_R E_R^*})_{\min} = I_1 + I_2 - 2|\gamma_{12}| \sqrt{I_1} \sqrt{I_2}$$

и освещенность минимальна.

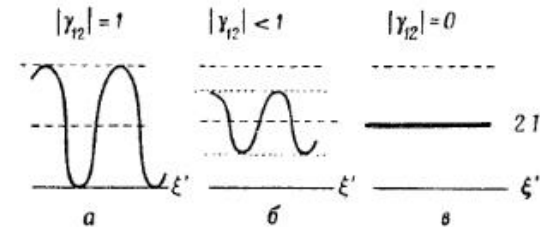


Рис. 23. Амплитуда интерференционных полос в интерферометре Юнга при трех значениях коэффициента частичной когерентности.

Смысл  $|\gamma_{12}|$  можно также уяснить, проведя сравнение со случаем полной когерентности, описываемой выражениями (68) и (68a). Предполагая  $I_1 = I_2$ , получим

$$I_{\text{когер.}} = 2I_1(1 + \cos \varphi), \quad (72)$$

и, следовательно,

$$I_{\text{когер. макс}} = 4I_1,$$

а

$$I_{\text{когер. мин}} = 0.$$

Этот случай отображен на рис. 23, а.

Если же  $|\gamma_{12}| < 1$ , то полосы имеют вид

$$I_{\text{част. когер}} = 2I_1[1 + |\gamma_{12}| \cos(\varphi + \theta)], \quad (73)$$

где  $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$ . Как показано на рис. 23, б, контраст полос при этом ослабляется в  $|\gamma_{12}|$  раз.

При отсутствии когерентности ( $|Y_{12}| = 0$ )

$$\overline{(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*)}_{\text{макс}} = \overline{(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*)}_{\text{мин.}}$$

Поэтому контраст полностью пропадает, как видно из рис. 23, в.

В заключение необходимо подчеркнуть, что простого эксперимента по наблюдению интерференционных полос от двух щелей, помещенных в поле, например лазерного пучка, еще недостаточно для точного описания частичной когерентности этого поля. Такой эксперимент может лишь засвидетельствовать сам факт наличия частичной когерентности. Для ее количественного описания необходимо произвести измерения контраста полос.

### 2.9. Частичная когерентность света от протяженного некогерентного источника

Пусть источник  $S$  освещает две щели ( $S_1$  и  $S_2$ ), как показано на рис. 24. Центр источника расположен на оси  $z$ , перпендикулярной плоскости  $xu$  и проходящей через щель  $S_1$ . Согласно пре-

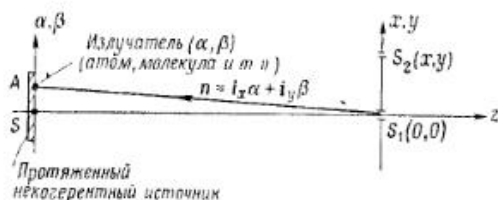


Рис. 24. Получение пространственной когерентности в плоскости  $xu$  при освещении щелей протяженным пространственно некогерентным источником.

дыдущему разделу, источник является совершенно некогерентным. Это означает, что если две щели поместить в плоскости источника, то интерференционные полосы не возникнут. Однако можно доказать, что если удалить эти щели достаточно далеко от некогерентного источника, то можно получить интерференционные полосы с хорошим и даже очень хорошим контрастом.

Рассмотрим две волны  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , покидающие излучатель вдоль направления, которое определяется единичным вектором  $\mathbf{n}$ , идущим из центра  $S_1$  (рис. 25):

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_x \alpha + \mathbf{i}_y \beta, \quad (74)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — направляющие конусы, а  $\mathbf{i}_x$  и  $\mathbf{i}_y$  — единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей. Пусть вектор

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_y y \quad (75)$$

определяет положение  $S_2(x, y)$  относительно  $S_1(0, 0)$ . Разность хода волн  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , испущенных в точке  $A$ , до точек  $S_1$  и  $S_2$  равна

$$\Delta = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho} = \alpha x + \beta y. \quad (76)$$

Следовательно, излучатель  $A$  создает в точках  $S_1$  и  $S_2$  электрические поля (см. рис. 24)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s_1}(t) &= \mathbf{E}(t), \\ \mathbf{E}_{s_2}(t) &= \mathbf{E}(t) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)], \end{aligned} \quad (77)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ .

Если в точке  $A$  имеется много излучателей, например атомов, то получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s_1}(t) &= \sum_j \mathbf{E}_j(t), \\ \mathbf{E}_{s_2}(t) &= \sum_j \mathbf{E}_j(t) \exp[-ik(\alpha_j x + \beta_j y)]. \end{aligned} \quad (78)$$

Мы предполагаем, что свет является монохроматическим. На практике для наблюдения полос в двухщелевом интерферометре

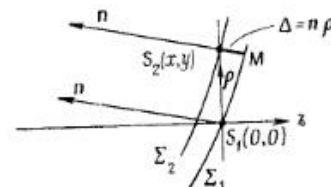


Рис. 25. Схема получения пространственной когерентности в плоскости  $xu$  (см. рис. 24).

требуется не особенно высокая монохроматичность, если только разность времен  $\tau$ , за которые два луча пройдут расстояние от источника до плоскости наблюдения, достаточно мала. В случае полихроматического источника можно использовать светофильтры.

Для оценки контраста полос необходимо найти выражение для

$$\overline{\mathbf{E}_{s_1}(t) \mathbf{E}_{s_2}^*(t)}. \quad (70a)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s_1}(t) &= \mathbf{E}_1(t) + \mathbf{E}_2(t) + \dots, \\ \mathbf{E}_{s_2}(t) &= \mathbf{E}_1(t) \exp(-i\varphi_1) + \mathbf{E}_2(t) \exp(-i\varphi_2) + \dots, \end{aligned} \quad (79)$$

где  $\varphi_1 = 2\pi(\Delta_1/\lambda)$ ,  $\varphi_2 = 2\pi(\Delta_2/\lambda)$ , ..., а  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — оптические разности хода, определяемые выражением (76). Получаем

$$\begin{aligned} \overline{E_{s_1}(t) E_{s_2}^*(t)} &= [\overline{E_1 + E_2 + \dots}] [\overline{E_1^* \exp(i\varphi_1) + E_2^* \exp(i\varphi_2) + \dots}] = \\ &= \overline{E_1 E_1^* \exp(i\varphi_1)} + \overline{E_1 E_2^* \exp(i\varphi_2)} + \overline{E_2 E_1^* \exp(i\varphi_1)} + \overline{E_2 E_2^* \exp(i\varphi_2)} + \\ &\quad + \text{Остальные перекрестные члены.} \end{aligned} \quad (80)$$

Однако вследствие некогерентности источника все перекрестные члены при усреднении обратятся в нуль.

Оставшиеся члены дадут

$$\begin{aligned} \overline{E_{s_1}(t) E_{s_2}^*(t)} &= \overline{E_1 E_1^* \exp(i\varphi_1)} + \overline{E_2 E_2^* \exp(i\varphi_2)} + \dots = \\ &= \sum_j \overline{E_j(t) E_j^*(t) \exp[ik(\alpha_j x + \beta_j y)]}. \end{aligned} \quad (81)$$

Если число излучателей стремится к бесконечности, то, переходя к пределу, получаем

$$E_{s_1}(t) E_{s_2}^*(t) = \int \int_{\text{Источник}} I_s(\alpha, \beta) \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta, \quad (82)$$

где

$$I_s(\alpha, \beta) = \frac{\overline{E_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}^*}}{d\alpha d\beta} \quad (83)$$

есть интенсивность, приходящаяся на единицу телесного угла с заданными угловыми координатами  $\alpha$  и  $\beta$ . Другими словами,  $I_s(\alpha, \beta)$  соответствует распределению интенсивности по источнику при его наблюдении из точки  $S_1$ .

С помощью выражений (82) и (83) сразу же находим, что коэффициент частичной когерентности  $\gamma$ , который описывает интерференцию света, идущего от  $S_1(0, 0)$  и  $S_2(x, y)$ , при освещении самих щелей протяженным некогерентным источником равен

$$\gamma = \frac{\int \int_{\text{Источник}} I_s(\alpha, \beta) \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta}{\int \int_{\text{Источник}} I_s(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}. \quad (84)$$

Уравнение (84) весьма примечательно. Оно показывает, что степень частичной когерентности между точками  $S_1$  и  $S_2$ , освещенными протяженным некогерентным источником, является фурье-образом распределения интенсивности  $I_s(\alpha, \beta)$  источника, наблюдаемого из плоскости, где расположены щели  $S_1$  и  $S_2$ . При этом важно помнить, что центр источника расположен на одной оси с  $S_1$ . Детали можно уяснить на следующем примере.

### а. Двухщелевой интерферометр Юнга и звездный интерферометр Майкельсона

Свойства интерферометров Юнга и Майкельсона позволяют уяснить понятие коэффициента частичной когерентности, определяемого выражением (70), и содержание соотношения между этим коэффициентом и распределением интенсивности по источнику, выражаемое с помощью преобразования Фурье. Рассмотрим сначала схему двухщелевого интерферометра, приведенную на рис. 26. Пусть  $I_s(\alpha, \beta) = I_s$  — постоянная величина. Эк-

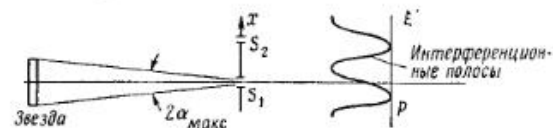


Рис. 26. Интерференционные полосы в интерферометре Юнга при наблюдении звезды — протяженного, пространственно-некогерентного источника света.

перимент показывает, что при некоторых условиях в плоскости  $P$  возникает система интерференционных полос.

Физические свойства системы полос легко описать с помощью понятий, встречающихся в теории преобразования Фурье [выражения (1а) и (18) гл. 3]. Действительно [выражение (12) гл. 7], если

$$f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u'),$$

то

$$\begin{aligned} f(x-d) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u') \exp(2\pi i u' d), \\ f(x+d) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u') \exp(-2\pi i u' d). \end{aligned} \quad (85)$$

Следовательно,

$$f(x+d) + f(x-d) \xrightarrow{\mathfrak{F}} 2F(u') \cos 2\pi u' d, \quad (86)$$

и наблюдаемая интенсивность (рис. 27) описывается выражением

$$I(u') = 4 |F(u')|^2 \cos^2 2\pi u' d, \quad (87)$$

т. е.

$$I(u') = 2 |F(u')|^2 (1 + \cos 4\pi u' d), \quad (88)$$

где  $F(u')$  — огибающая, которая модулирует амплитуду полос, определяемая с помощью выражения

$$F(u') = \mathfrak{F}[f(x)] = \int_{-A/2}^{+A/2} \exp(2\pi i u' x) dx = A \frac{\sin(\pi u' A)}{\pi u' A}. \quad (89)$$



и

$$|F(u')|^2 = A^2 \left[ \frac{\sin(\pi u' A)}{\pi u' A} \right]^2. \quad (90)$$

Контраст системы интерференционных полос равен

$$\gamma(x) = \frac{\int_{-a_{\text{макс}}}^{+a_{\text{макс}}} I_s \exp(-ika_x) da}{\int_{-a_{\text{макс}}}^{+a_{\text{макс}}} I_s da} = \frac{\sin ka_{\text{макс}}x}{ka_{\text{макс}}x} = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} a_{\text{макс}}x}{\frac{2\pi}{\lambda} a_{\text{макс}}x}. \quad (91)$$

Если двухщелевой интерферентометр использовать для измерения диаметра звезд, то кривая видимости полос определяется

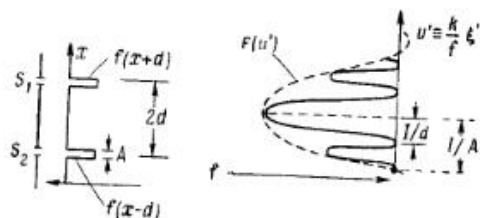


Рис. 27. Образование интерференционных полос в звездном интерферентометре (см. рис. 26).

функцией  $\gamma(x)$ , график которой изображен на рис. 28. Очень важно заметить, что кривая  $\gamma(x)$  на рис. 28 подразумевает, что одна из щелей находится в центре максимума кривой  $\gamma(x)$ . Оче-

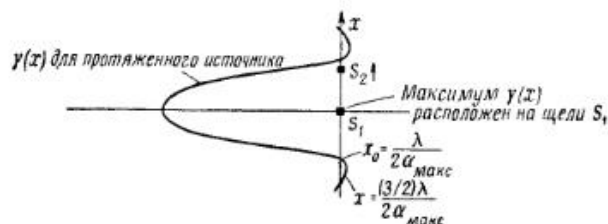


Рис. 28. Коэффициент пространственной когерентности  $\gamma(x)$  в плоскости щелей при освещении плоскости удаленным, пространственно-некогерентным источником.

видно, что видимый угловой диаметр звезды можно получить непосредственно путем измерения расстояния  $2d$  вдоль оси  $x$  между щелями  $S_1$  и  $S_2$ , когда интерференционные полосы исчезают.

Интересная особенность заключается в том, что всегда имеется такое расстояние между  $S_1$  и  $S_2$ , при котором интерференционные полосы от протяженного некогерентного источника получаются с хорошим контрастом. Это замечание можно использовать для оценки условий, при которых с помощью обычного теплового источника света, например, миниатюрной импульсной лампы, можно сформировать пространственно когерентную сферическую (или плоскую) волну. Если такую лампу расположить за достаточно узким красным светофильтром, то ее излучение можно сделать до такой степени когерентным, что удастся наблюдать восстановленное изображение с помощью голограммы, например голограммы Фурье. Для этого голограмму необходимо держать перед глазом, а лампу удалить на расстояние вытянутой руки.

Для примера рассмотрим лампу диаметром 0,1 мм, удаленную от глаза на расстояние 500 мм. Найдем то расстояние  $x_0$ , при котором график  $\gamma(x)$  на рис. 28 имеет первый минимум:

$$x_0 = \frac{\lambda}{2\alpha_{\text{макс}}} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{0,1/500} = 3 \text{ мм.}$$

Таким образом, пространственная когерентность будет достаточно хорошей на площадке размером 1,5—2 мм. Зрачок глаза имеет те же размеры. Следовательно, мы можем наблюдать изображение, восстановленное с помощью голограммы Фурье!

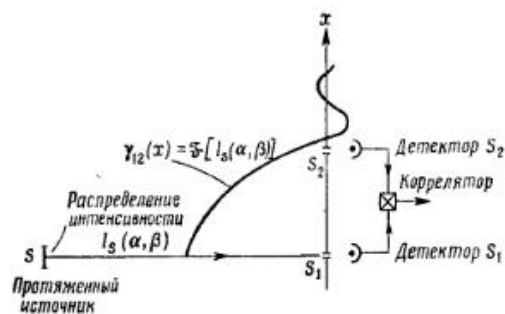
Часто говорят, что когерентность световых пучков улучшается с расстоянием только благодаря самому процессу распространения. В действительности дело просто в том, что при неизменных размерах источника и неизменном расстоянии между щелями расстояние  $S_1S_2$  становится относительно малым, в частности малым по сравнению с эффективной шириной кривой  $\gamma(x)$ , по мере увеличения расстояния между источником и щелями.

## 2.10. Корреляция интенсивности при частичной когерентности

О свойствах когерентности света можно сказать значительно больше, чем это нам потребовалось для экспериментальной характеристики когерентности, рассмотренной выше. Читателю рекомендуются работы [9—11]. Основы теории когерентности можно найти в работах [12—20]<sup>1)</sup>.

Мы рассмотрим далее еще только один аспект когерентности, с тем чтобы проиллюстрировать ту простоту рассуждений,

<sup>1)</sup> См. также книгу Françon M., Slansky S., Cohérence en optique; в настоящее время готовится ее русский перевод. — Прим. ред.

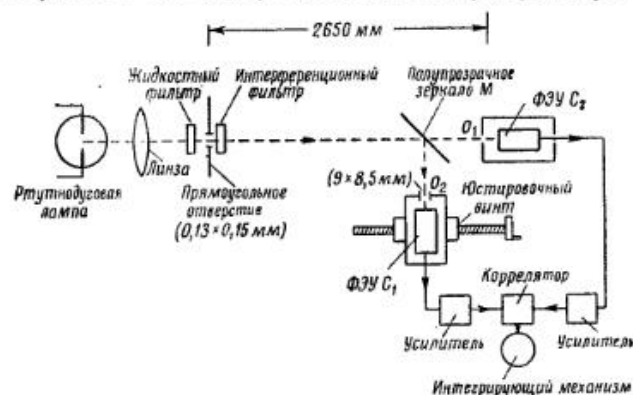


Р и с. 29. Интерферометр интенсивности, являющийся эквивалентом корреляционной установки Хэнбери Брауна и Твисса [4], схема которой показана на рис. 30.

которая достигается при рассмотрении когерентности с помощью современной теории образования изображения и метода преобразования Фурье.

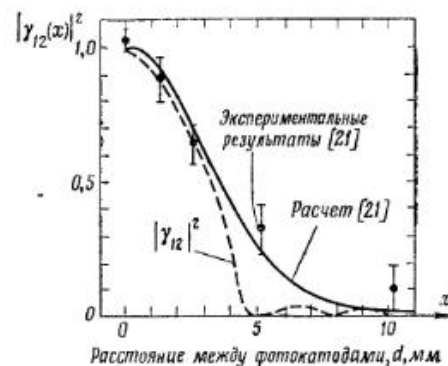
### 2.11. Интерферометр интенсивности

Большой интерес к проблеме когерентности света вызвали эксперименты Хэнбери Брауна и Твисса [21], которые оказались не только трудно объяснимыми, но и совершенно неожиданными для классической теории. В своей основе экспериментальная установка Брауна и Твисса по принципу действия не отличается от рассмотренного выше двухщелевого интерферометра. Однако,



Р и с. 30. Схема установки Хэнбери Брауна и Твисса [4] для демонстрации корреляции между фотоэлектрическими сигналами. Эквивалентная ей схема показана на рис. 29.

в то время как в обычном интерферометре наблюдается система интерференционных полос, образующихся на некотором расстоянии за щелями, в интерферометре интенсивности непосредственно за щелями размещаются два фотоумножителя, а сигналы с этих фотоумножителей подаются на коррелятор. Совершенно аналогичная схема используется в радиоастрономии. Сигналы от двух антенн регистрируются квадратичным детектором, а затем поступают на коррелятор. Результаты этих экспериментов



Р и с. 31. Интерферометр интенсивности. Сравнение теории с экспериментальными данными Хэнбери Брауна и Твисса [21]. Значения  $|\gamma_{12}|^2$  рассчитаны для эквивалентной установки, схема которой приведена на рис. 29.

можно довольно просто объяснить на основе теории образования изображения.

На рис. 29 показано двухщелевое устройство, фактически эквивалентное установке Хэнбери Брауна и Твисса (рис. 30). Детекторы, расположенные за щелями  $S_1(A)$  и  $S_2(B)$ , регистрируют интенсивности  $I_A$  и  $I_B$  соответственно. Необходимо выразить произведение  $I_A I_B$  через распределение интенсивности  $I_s(\alpha, \beta)$  по источнику в зависимости от расстояния между щелями. Два очень простых метода дают одинаково правильные результаты.

#### а. Метод первый

Согласно выражению (84), распределение комплексной амплитуды электрического вектора в плоскости  $x$ , создаваемое источником  $I_s$ , равно

$$\gamma(x) = \mathfrak{F}[I_s(\alpha, \beta)], \quad (92)$$

где символ  $\mathfrak{F}$  обозначает преобразование Фурье. Если щели  $A$  и  $B$  достаточно узкие, то комплексные амплитуды  $f_A(x)$  и  $f_B(x)$  имеют вид

$$f_A(0) = \gamma(0), \quad (93)$$

$$f_B(x) = \gamma(x). \quad (94)$$

Фотоумножители, расположенные вблизи щелей, регистрируют интенсивности

$$I_A(0) = |\gamma(0)|^2 \equiv 1, \quad (95)$$

$$I_B(x) = |\gamma(x)|^2. \quad (96)$$

Наконец, произведение интенсивностей  $I_A I_B$  имеет вид

$$I_A(0) I_B(x) = |\gamma(x)|^2, \quad (97)$$

что полностью согласуется с выводами Хэнбери Брауна и Твисса (рис. 31).

#### 6. Метод второй

Мы можем также вычислить произведение интенсивностей  $I_A I_B$  непосредственно, если использовать теорию, изложенную в разд. 2.9. Пусть  $\mathbf{E}_{s_1}$  и  $\mathbf{E}_{s_2}$  — комплексные амплитуды поля протяженного источника  $I_s(\alpha, \beta)$  вблизи щелей  $A(S_1)$  и  $B(S_2)$ . Тогда произведение интенсивностей  $I_A I_B$  равно

$$I_A(0) I_B(x) = [\mathbf{E}_{s_1} \mathbf{E}_{s_1}^*] [\mathbf{E}_{s_2} \mathbf{E}_{s_2}^*], \quad (98)$$

что можно переписать в виде

$$I_A(0) I_B(x) = [\mathbf{E}_{s_1} \mathbf{E}_{s_2}^*] [\mathbf{E}_{s_2} \mathbf{E}_{s_1}^*]. \quad (99)$$

Тогда коэффициент частичной когерентности, согласно определению, данному соотношениями (70) и (70а), имеет вид

$$\gamma_{12} = \frac{\mathbf{E}_{s_1} \mathbf{E}_{s_2}^*}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}},$$

и, таким образом, мы находим выражение для произведения интенсивностей  $I_A I_B$

$$I_A(0) I_B(x) = \gamma(x) \gamma^*(x), \quad (100а)$$

или

$$I_A(0) I_B(x) = |\gamma(x)|^2. \quad (100б)$$

Любопытно отметить простоту вывода последней формулы и первым и вторым методами, особенно если вспомнить, что в

1954 г., когда Хэнбери Браун и Твисс впервые изложили содержание своих замечательных экспериментов, объяснение их результатов натолкнулось на значительные трудности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., Wolf E., Principles of Optics, 2nd rev. ed., Pergamon Press, New York, 1964, p. 491—554.
2. Stroke G. W., *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 1097—1103 (1957).
3. Javan A., Ballik E. A., Bond W. L., *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 96 (1961).
4. Stroke G. W., *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 1103 (1957).
5. Stroke G. W., в кн. «Encyclopedia of Science and Technology», vol. 4, McGraw-Hill, New York, 1960, p. 264—265.
6. Harrison G. R., Stroke G. W., *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 112 (1955).
7. Read W. S., Fried D. L., *Proc. IEEE*, **51**, 1787 (1963).
8. Forrester A. T., Gudmundsen R. A., Johnson P. O., *Phys. Rev.*, **99**, 1691 (1955).
9. Mandel L., в кн. «Progress in Optics» (Wolf E., ed.), vol. 11, North-Holland Publ., Amsterdam, 1963, p. 183—248.
10. Quantum and Statistical Aspects of Light (selected reprints), Am. Inst. of Physics, New York, 1963.
11. Quantum Electronics (Grivet P., Bloembergen N., eds.), vol. III, Columbia Univ. Press, New York, 1964.
12. Van Cittert P. H., *Physica*, **1**, 201 (1934).
13. Zernike F., *Physica*, **5**, 785 (1938).
14. Hopkins H. H., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A208**, 263 (1951); **A217**, 408 (1953).
15. Blanc-Lapierre A., Dumontet P., *Rev. Optique*, **34**, 1 (1955).
16. Wolf E., *Nuovo Cimento*, **12**, 884 (1954).
17. Maréchal A., Françon M., Diffraction, Revue d'Optique, Paris, 1960; русский перевод: Марешаль А., Франсон М., Структура оптического изображения, изд-во «Мир», 1964.
18. Einstein A., *Z. Physik*, **10**, 185 (1909); **10**, 817 (1909).
19. Einstein A., *Ann. Physik*, **47**, 879 (1915).
20. Einstein A., Hopf L., *Ann. Physik*, **33**, 1096 (1910).
21. Brown R. H., Twiss R. Q., *Nature*, **177**, 28 (1956).
22. Слыш В. И., *УФН*, **87**, 3, 471—489 (1965).

Глава 5

**ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРИ КОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ**

**1. Введение**

Основная особенность процесса образования изображения при когерентном освещении состоит в том, что перед регистрацией сначала складываются *комплексные амплитуды*, а затем интенсивности. Как и в случае некогерентных систем, здесь, очевидно, будет зарегистрирована только интенсивность результирующего поля, а именно  $|E|^2 = EE^*$  — квадрат модуля вектора электрического поля  $E$ . Однако к полю сигнала можно добавить когерентный фон и путем интерференции *обратно зарегистрировать как амплитуду, так и фазу* комплексного сигнала. Типичный пример интерферометрического гетеродинирования, используемого в голографии, описан в разд. 6 гл. 1. Более полно *регистрация фаз* в оптике будет рассмотрена в гл. 6.

Очевидно, что во многих случаях когерентная оптическая система открывает возможность осуществления более гибких операций над изображениями, чем некогерентная система. И это хорошо видно на примере таких систем, как радиосвязь и голография. В следующих разделах главы будут рассмотрены основные понятия, которые используются в когерентной оптической системе.

**2. Когерентное освещение**

В данной главе используется только понятие пространственной когерентности. Исходя из определения пространственной когерентности, приведенного в гл. 4, когерентное освещение лучше всего проиллюстрировать на следующих примерах.

**2.1. Пример 1: освещение точечным источником протяженной области**

Любой предмет, помещенный в поле волны, изображенной на рис. 1, можно считать когерентно освещенным даже тогда, когда сам точечный источник является некогерентным, но при условии,

что диаметр линзы

$$D_L < \frac{1}{n} \frac{f\lambda}{D_s} \quad (n \approx 5 \div 10), \tag{1}$$

где  $D_s$  — размер источника [выражение (91) гл. 4].

**2.2. Пример 2: эквивалентность когерентного предмета и когерентно освещенного предмета**

Когерентный предмет может быть, например, выходным зеркалом лазера (рис. 2). Метод, поясняющий эквивалентность выходной волны пространственно-когерентного лазера и линзы,

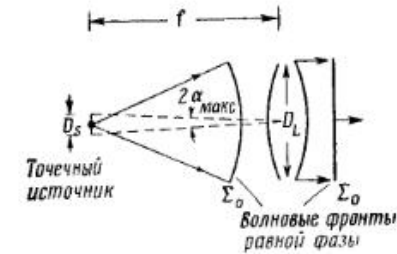


Рис. 1. Когерентное освещение, создаваемое пространственно-некогерентным источником  $D_s$ .



Рис. 2. Эквивалентность пространственно-когерентного предмета и когерентно освещенного предмета (см. рис. 1).



Рис. 3. Эквивалентность пространственно-когерентного лазерного освещения и когерентного освещения по схеме рис. 1 с некогерентным или когерентным источником.

которая создает когерентное освещение, иллюстрируется схемой на рис. 3. Когерентно освещенный предмет, например фотодиапозитив, должен сохранять однородность сдвигов фаз с такой точностью, что в некоторых случаях необходимо погружать пленку в кювету, наполненную жидкостью, коэффициент преломления

которой одинаков с коэффициентом преломления фотопленки. Однако в большинстве случаев, в частности в опытах по пространственной фильтрации и голографии, описанных в следующем разделе, при использовании пленки Polaroid P/N и пластинок Kodak 649 F иммерсионная ванна оказалась излишней.

### 3. Образование изображения при когерентном освещении как процесс двойной дифракции

Образование изображения в когерентной системе целесообразно рассматривать как процесс двойной дифракции. Такое представление лучше всего можно проиллюстрировать на примере оптического устройства, приведенного на рис. 4. Беря его

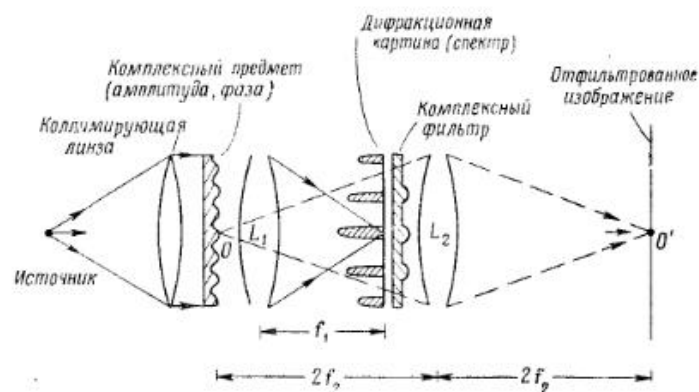


Рис. 4. Схема пространственной фильтрации Марешала и Кроса [1], а также О'Нейла [2].

за основу, мы можем сказать, что предмет, характеризующийся комплексной амплитудой  $T(\xi)$ , создает благодаря дифракции света в зрачке линзы  $L_2$  комплексную амплитуду  $f(x)$ . При этом  $f(x)$  соответствует задней фокальной плоскости линзы  $L_1$ , если предмет освещается параллельным пучком. В этом случае комплексная амплитуда  $f(x)$  равна фурье-образу  $T(\xi)$  комплексной амплитуды предмета. Комплексная амплитуда  $f(x)$  обычно называется дифракционной картиной предмета. Иногда удобно именовать  $f(x)$  пространственным спектром предмета.

Свет, пройдя через линзу  $L_2$ , образует изображение в плоскости  $\xi'$ , так что изображение  $T(\xi')$  можно рассматривать как результат второй дифракции, происходящей над полем  $f(x)$  в зрачке линзы  $L_2$ . Из рис. 4 видно, что амплитуда изображения

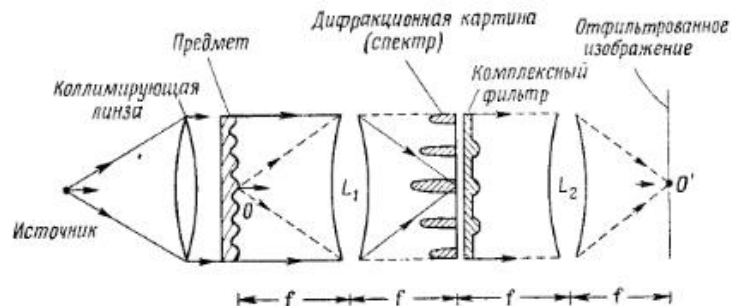


Рис. 5. Схема пространственной фильтрации Катрона [3].

$T(\xi')$  получается как фурье-образ амплитуды  $f(x)$ , и поэтому амплитуда изображения  $T(\xi')$  оказывается тождественной амплитуде предмета  $T(\xi)$ , если, конечно, используются совершенные линзы и если после  $f(x)$  нет комплексного фильтра, показанного на рис. 4, роль которого будет уяснена в следующих разделах.

Принцип двойной дифракции, иллюстрируемый рис. 4, был описан Цернике в 1935 г. в качестве схемы для визуализации фазового контраста. Этот же принцип является исходным в опытах по пространственной фильтрации, описанных Марешалем и Кросом [1] в 1953 г. и О'Нейлом [2] в 1956 г. Аналогичное устройство, изображенное на рис. 5, было предложено в 1960 г. Катрона и др. [3] для осуществления пространственной фильтрации. В настоящее время его широко используют для корреляционной фильтрации. Поскольку в фильтре осуществляется умножение

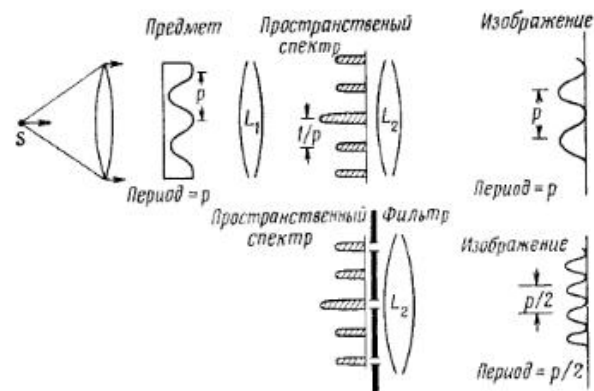


Рис. 6. Принцип двойной дифракции Аббе [4а] и Вуда [4б].

дифракционной картины, то, как будет показано, получающееся при этом изображение представляет собой *корреляцию* предмета и фурье-образа фильтра.

В важности понятия двойной дифракции можно убедиться, если рассмотреть фильтрацию спектральных порядков, производимую перед второй дифракцией. Эта фильтрация осуществляется в фокальной плоскости линзы  $L_1$  (рис. 6) с помощью маски, имеющей периодическую структуру (т. е. структуру решетки). В данном случае фильтрующая маска пропускает к линзе  $L_2$  только нулевой и четные дифракционные порядки. Поле в зрачке линзы  $L_2$ , полученное фильтрацией с помощью этого фильтра, эквивалентно полю, которое создается предметной решеткой, период которой вдвое меньше периода используемой решетки, а изображение, получаемое при второй дифракции, оказывается решеткой с периодом, равным  $p/2$  (рис. 6), вместо периода  $p$ , характеризующего нефильтованное изображение (см. Аббе [4а], Вуд [4б], Марешаль и Франсон [4в] и др.).

Как мы уже указывали, описанные до сих пор фильтрующие устройства производят *умножение* дифракционных картин, а именно дифракционная картина предмета умножается на функцию, которая в свою очередь является дифракционной картиной фильтра, создающего посредством операции корреляции (или свертки) отфильтрованное изображение. Таким образом, процесс фильтрации, выполняемый с помощью *умножения дифракционных картин*, можно назвать *корреляционной фильтрацией*.

Важнейший прогресс в методах оптической фильтрации, а также в интерферометрии был достигнут в 1965 г. Габором, Строуком и др. [5] (разд. 9 настоящей главы), которые доказали, что сложение комплексных амплитуд можно осуществить в самом изображении. Изображение в этом случае формируется путем последовательного наложения на одну и ту же голограмму *интенсивностей* нескольких голограмм. Каждая из этих голограмм содержит дифракционную картину изображения, комплексная амплитуда которого участвует в операции амплитудного сложения. В противоположность корреляционной фильтрации схему Габора — Строука можно назвать методом *синтеза оптических изображений* (разд. 9).

#### 4. Критерии разрешения Аббе и Релея

В качестве следующего примера, иллюстрирующего достоинства понятия двойной дифракции, рассмотрим проблему разрешающей способности на языке тех качественных рассмотрений, которые были сделаны в разд. 3. Мы покажем, что понятия двой-

ной дифракции позволяют весьма прямым путем определить разрешающую способность по предмету, и полученный критерий разрешения (критерий Аббе) хорошо согласуется с известным критерием Релея.

Рассмотрим когерентно освещенный, периодически поглощающий предмет с периодом  $p$  (рис. 7), и пусть комплексная амплитуда его равна

$$2F(\xi) \cos 2\pi \frac{\xi}{p}. \quad (2)$$

В соответствии с теорией преобразования Фурье в зрачке линзы  $L$  образуется дифракционная картина (спектр)

$$f\left(x + \frac{1}{p}\right) + f\left(x - \frac{1}{p}\right). \quad (3)$$

В данном случае дифракционная картина состоит из двух разделенных плоских волн, которые (если предмет мал) условно



Рис. 7. Критерий разрешения Аббе при когерентном освещении. (Эквивалентный критерий Релея рассматривается на рис. 8.)

изображаются двумя пиками на спектре. Для удобства эти пики назовем *спектральными линиями*.

Пусть  $D$  — апертура линзы-объектива, через которую рассматривается предмет. Если две спектральные «линии»  $\pm(\lambda/p)f$  попадают в апертуру, то, согласно теории преобразования Фурье, амплитуда изображения будет равна

$$A(\xi') = \mathfrak{F}\left[f\left(x + \frac{1}{p}\right) + f\left(x - \frac{1}{p}\right)\right] = 2F(\xi') \cos\left(2\pi \frac{\xi'}{p}\right), \quad (4)$$

а интенсивность изображения

$$I(\xi') = A(\xi') A^*(\xi') = 4|F(\xi')|^2 \cos^2\left(2\pi \frac{\xi'}{p}\right) = 2|F(\xi')|^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\xi'}{p}\right). \quad (5)$$

Эти выражения показывают, что изображение имеет ту же периодичность, что и амплитуда предмета. Фактически предмет

полностью разрешим ввиду того, что две волны, которые создаются предметом при первой дифракции, полностью проходят через линзу и образуют изображение при второй дифракции.

Полное разрешение будет получаться только в том случае, если обе спектральные линии попадают в апертуру. Из рис. 7 видно, что разрешение сохраняется без потери контраста вплоть до

$$\frac{\lambda}{p} f \leq \frac{D}{2}, \quad (6)$$

где  $f$  — фокусное расстояние линзы  $L$ , т. е. вплоть до

$$\boxed{p \geq \frac{2\lambda}{D} f} \text{ — критерий разрешения Аббе,} \quad (7)$$

где  $p$  — наименьший период предмета (решетки), который можно разрешить согласно критерию Аббе (7).

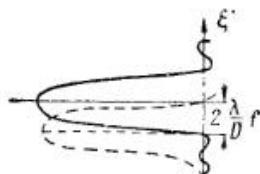


Рис. 8. Критерий разрешения Релея при когерентном освещении. (Эквивалентный критерий Аббе рассмотрен на рис. 7.)

Критерий Аббе (7) можно сравнить с хорошо известным критерием Релея (рис. 8). В случае когерентного освещения критерий Релея можно записать в виде

$$\boxed{\Delta \xi \geq \frac{2\lambda}{D} f} \text{ — критерий Релея} \text{ (при когерентном освещении),} \quad (8)$$

где  $\Delta \xi$  — предел разрешения в плоскости предмета. Из сопоставления выражений (7) и (8) мы можем заключить, что критерии Аббе и Релея в действительности эквивалентны. Однако в большинстве случаев критерий Аббе позволяет лучше понять условия эксперимента, влияющие на окончательный предел разрешения. Это имеет место, например, в голографии.

## 5. Передаточная функция при когерентном и некогерентном освещении

Согласно предыдущему разделу и рис. 7, передаточная функция пространственных частот  $\tau(x)_{\text{когер}}$  при когерентном освещении

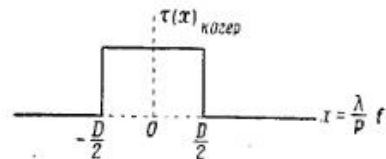


Рис. 9. Передаточная функция идеальной линзы при когерентном освещении (прямоугольная апертура).

нии изображается графиком на рис. 9: пропускание без потери контраста простирается от  $x=0$  до  $x=D/2 = (\lambda/p)f$ , а далее контраст равен нулю.

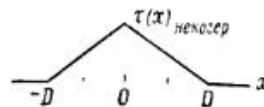


Рис. 10. Передаточная функция идеальной линзы при некогерентном освещении (прямоугольная апертура).

Напомним (разд. 6 гл. 3) для сравнения вид передаточной функции при некогерентном освещении (рис. 10).

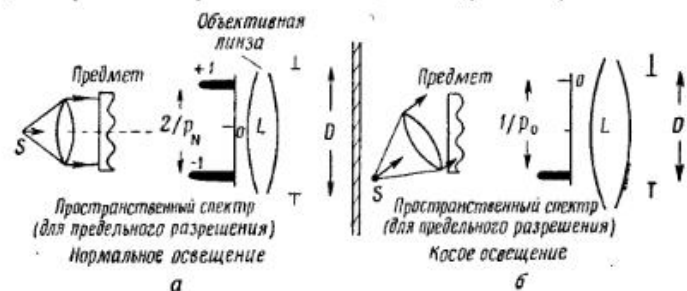


Рис. 11. Принцип двойной дифракции. Объяснение увеличения разрешения при косом освещении (б) по сравнению с обычным освещением (а) для предмета, имеющего периодическую структуру. Косое освещение позволяет увеличить разрешение, однако при этом теряется правильность передачи изображения.

Наконец, используя понятия двойной дифракции, легче объяснить, почему при введении косого когерентного освещения разрешение увеличивается вдвое. Это иллюстрируется рис. 11.

Если провести анализ, аналогичный приведенному в разд. 4, то мы обнаружим, что изображение, полученное при косом освещении, помимо синусоидальной решетки, будет содержать новые гармоники, которые можно рассматривать как помехи. Поэтому изображение, полученное при косом освещении только в одной боковой полосе, не является в точности неискаженным изображением. Однако разрешение при этом улучшается.

## 6. Фазовый контраст

Понятия двойной дифракции позволяют просто объяснить метод фазового контраста, используемый в микроскопии с целью преобразования невидимого слабого фазового контраста в хорошо видимый контраст интенсивности.

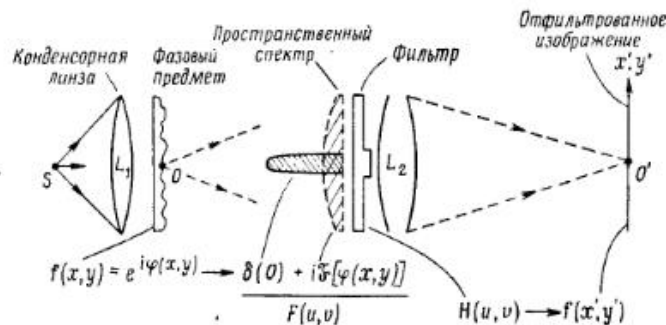


Рис. 12. Пространственная фильтрация.

Рассмотрим чисто фазовый предмет  $f(x, y)$ , т. е.

$$f(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)]. \quad (9)$$

Пусть фаза  $\varphi(x, y)$  имеет достаточно малые значения, так что можно написать

$$f(x, y) \approx 1 + i\varphi(x, y) + \dots \quad (\varphi \ll 2\pi). \quad (10)$$

Очевидно, что фурье-образ функции  $f(x, y)$ , который создается в задней фокальной плоскости линзы  $L_1$  (рис. 12), выражается через

$$F(u, v) = \delta(0) + i\mathfrak{F}[\varphi(x, y)]. \quad (11)$$

Установим теперь в фокальной плоскости линзы  $L_1$  фильтр  $H(u, v)$  оптической толщиной в четверть волны, но такой, что четвертьволновая область  $\pi/2$  покрывает только центральную

часть  $F(u, v)$ . Коэффициент пропускания четвертьволновой области по амплитуде равен  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Уравнение фильтра запишется в виде

$$H(u, v) = \begin{cases} it & \text{для области } \delta(0), \\ 1 & \text{для остальной части спектра.} \end{cases} \quad (12)$$

Отфильтрованный спектр равен

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) = it\delta(0) + i\mathfrak{F}[\varphi(x, y)]. \quad (13)$$

После второй дифракции образуется изображение

$$f(x', y') = \mathfrak{F}[G(u, v)] = it + i\varphi(x, y) = i[t + \varphi(x, y)]. \quad (14)$$

Интенсивность его равна

$$I(x', y') = f(x', y')f^*(x', y') = t^2 + \varphi^2 + 2\varphi t. \quad (15)$$

В частном случае  $t=1$  имеем

$$I(x', y') = 1 + 2\varphi, \quad (16)$$

т. е. контраст интенсивности изображения пропорционален фазовому контрасту предмета. В общем случае, когда коэффициент пропускания по амплитуде для пластинки толщиной  $\pi/2$  равен  $t$ , так что интенсивность постоянной составляющей изображения равна  $t^2$ , контраст в фазовой части изображения определяется выражением

$$c = \frac{t^2 + \varphi^2 + 2\varphi t - t^2}{t^2} \approx \frac{2\varphi}{t} + \frac{\varphi^2}{t^2}. \quad (17)$$

При  $t \leq 1$  достигается очень сильный контраст, даже когда значения  $\varphi$  исключительно малы. Например, если  $t=10^{-3}$  и  $\varphi=10^{-3}$ , то контраст  $c \approx 3$ . Для  $\varphi=10^{-3}$  и  $t=10^{-2}$  контраст равен 0,2.

Уравнение (17) следует сопоставить с выражением для контраста, который получается без фильтра. Из выражения (10) для интенсивности изображения имеем

$$I(x', y')_{\text{без фильтра}} \approx 1 + \varphi^2(x, y). \quad (18)$$

Контраст в фазовой части равен

$$c_{\text{без фильтра}} \approx \frac{\varphi^2}{1} = \varphi^2. \quad (19)$$

При  $\varphi=10^{-3}$  получаем  $c=10^{-6}$ .

Осуществление фазового контраста с помощью селективной фильтрации является типичным примером оптической фильтрации.



## 7. Оптическая фильтрация с помощью голограммы согласованного фильтра

Пример оптической корреляционной фильтрации показан на рис. 13, а схема используемого устройства — на рис. 14 и 15. Пространственная фильтрация в оптике впервые была описана в работах [1, 2]. Позднее стало очевидно, что главную проблему пространственной фильтрации, которая сводится к изготовлению комплексного фильтра, можно решить путем голографической регистрации фильтра, т. е. на основе принципов голографии, впервые описанных Габором [6] в 1948 г. (метод восстановления волнового фронта).

Качественное описание и история оптической фильтрации были даны в разд. 3, где было отмечено, что схема корреляционной фильтрации, широко используемая в настоящее время (см. рис. 14 и 15), базируется на работах Марешаля, Кроса и О'Нейла, на работе Катрона и других авторов, а также на ключевой статье Ван дер Люгта [7]. Следует также отметить, что в общем случае оптическая фильтрация, понимаемая в смысле сложения или вычитания произвольных частей изображения, может потребовать введения принципа синтеза изображений, описанного впервые Габором, Строуком и др. [5] (разд. 9), либо метода оптической компенсации (разд. 4 гл. 6), подобного тому, который был впервые описан Строуком, Рестриком и др. [11] также в 1965 г.

Изложим теперь основные принципы оптической корреляционной фильтрации с помощью согласованного фильтра<sup>1)</sup>.

Система, приведенная на рис. 14 и 15, относится к когерентным системам. Предмет  $O$ , расположенный в плоскости  $P_1$ , изображается оптически на плоскости  $P_3$  без изменения масштаба. Если в плоскости  $P_2$  поместить соответствующий пространственный фильтр, то можно селективно отфильтровать любые пространственные частоты изображения  $O'$ , подобно тому, как это осуществляется в системах радиосвязи.

Поскольку весь процесс в пространстве между  $S$  и  $O'$  должен происходить в когерентном свете, то пространственный фильтр  $H(u', v')$  должен быть комплексным (амплитудно-фазовым) фильтром.

Рассмотрим в качестве примера операции фильтрации (см. рис. 13) задачу поиска слова «CHRIST» на одной из страниц книги.

Поскольку процесс корреляционной фильтрации сводится в основном к операции корреляции между неизвестным или же

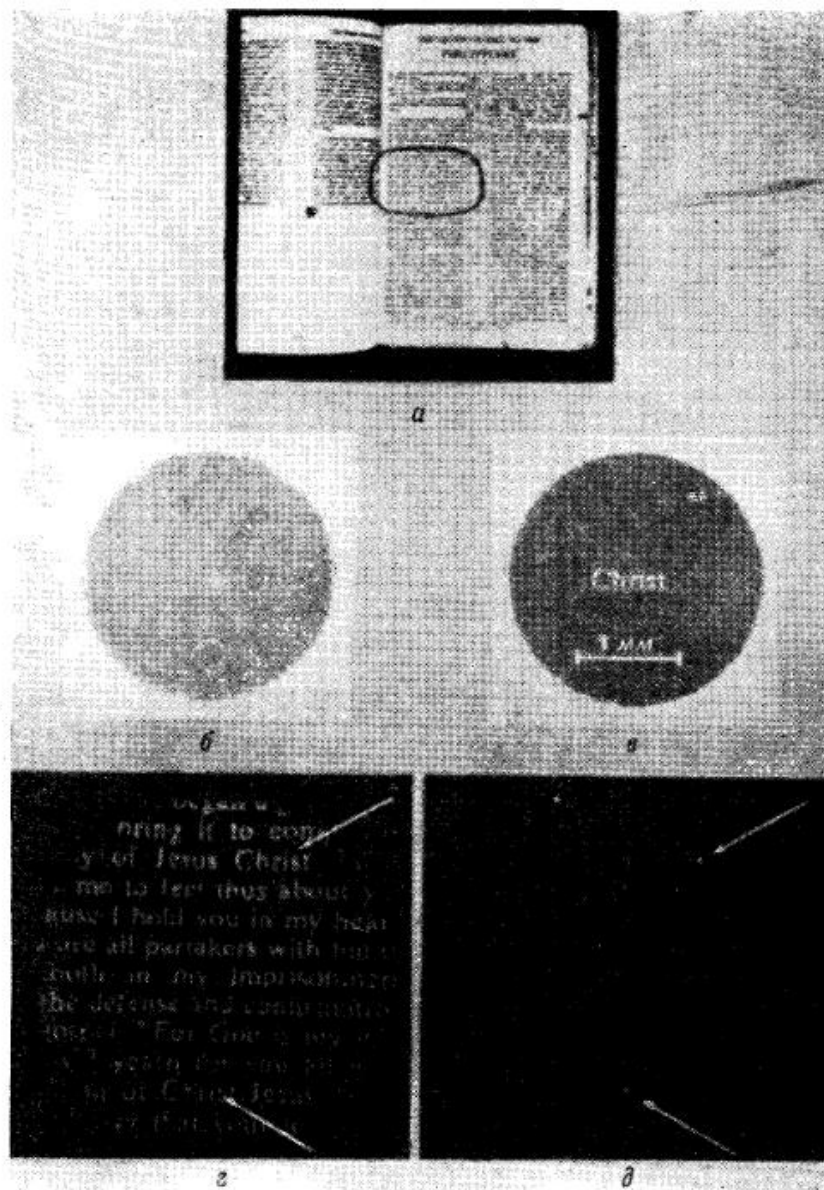


Рис. 13. Корреляционная фильтрация (см. разд. 7) в лучах лазера с длиной волны 6328 Å с использованием пленки Polaroid P/N (из работы Дж. Строука, выполненной совместно со студентами Мичиганского университета, 1964).

$a$  — текст, подлежащий фильтрованию  $|f(x, y)|$  — амплитуда на входной плоскости;  $b$  — голографический фильтр слова «CHRIST»;  $H(u', v')$  — комплексное пропускание фильтра;  $v$  — изображение «CHRIST», восстановленного с помощью фильтра  $|h(x, y)|$  — амплитуда на выходной плоскости;  $z$  — изображение нулевого порядка на выходной плоскости;  $\theta$  — отфильтрованное изображение (правый боковой пучок); сигнал  $|f \otimes h|_{x+b, y+c}$  на выходной плоскости.

<sup>1)</sup> Более общее объяснение и детали можно найти, например, в работе [7].

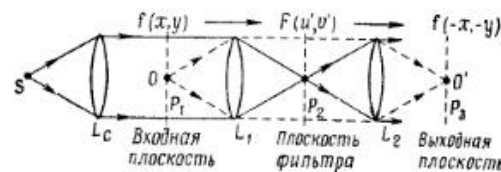


Рис. 14. Корреляционная фильтрация (разд. 7).

желаемым словом (в данном случае «CHRIST») и остальными словами на этой странице, то на выходном изображении оптического коррелятора появятся всплески яркости в местах, где значение такой корреляции достигает максимума. Положение слова «CHRIST» отмечено ярким пятном света, соответствующим свертке

$$f(-x, -y) \otimes h(-x, -y), \quad (20)$$

которая показана на рис. 15, где

$$h(x, y) = \mathfrak{F}[H(u', v')], \quad (21)$$

а  $H(u', v')$  — комплексный фильтр слова «CHRIST» в координатах  $(u', v')$ , определенных на стр. 47 [выражение (6а) гл. 31].

Кроме максимума корреляции слова «CHRIST» с соответствующим словом «CHRIST» на исследуемой странице, корреляционная фильтрация также дает графический ответ на вопрос о степени корреляции «неизвестного» слова «CHRIST» с другими словами текста. Например (см. рис. 13), видно, что имеется определенная корреляция слова «CHRIST» со словом «IMPRISONMENT», что и следует ожидать, а также слова «CHRIST» со словом «IS». Однако, кроме этого, имеется заметная корреляция со словами «ABOUT», «IN MY», «CONFIRMATION», «IS MY» и т. д.

Фотография на рис. 13 поясняет три основные ступени процесса фильтрации при когерентном освещении. На рис. 13, а показан диапозитив, на котором необходимо определить положение слова «CHRIST». На рис. 13, б дан «фильтр», полученный путем регистрации на когерентном фоне дифракционной картины

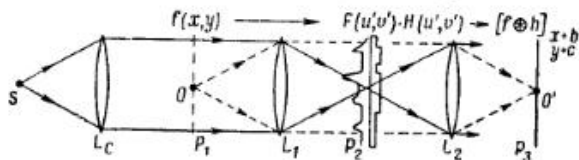


Рис. 15. Корреляционная фильтрация (разд. 7).

слова «CHRIST» по схеме преобразования Фурье (рис. 16). Легко убедиться в том, что комплексный фильтр аналогичен голограмме Фурье. На рис. 13, в показано восстановленное по фурье-образу изображение слова «CHRIST», полученное в фо-

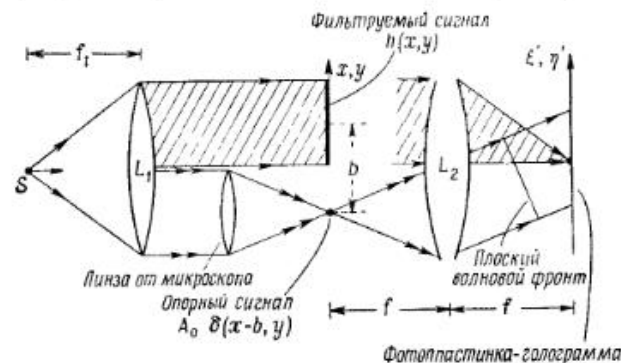


Рис. 16. Схема голографии Фурье для получения комплексно-сопряженного фильтра (гл. 7).

кальной плоскости линзы, при освещении фильтра коллимированным светом.

На рис. 13, д показано отфильтрованное изображение и изображение нулевого порядка (рис. 13, з), полученные на выходной плоскости.

Все эти эксперименты выполнены на пленке Polaroid P/N. Среди многих применений только что описанной корреляционной фильтрации особенно привлекают возможности автоматического чтения и автоматизации библиотечного дела.

### 7.1. Процедура изготовления согласованного фильтра и операция фильтрации

Пусть фильтр описывается выражением

$$H(u', v') = |H| e^{i\theta}. \quad (22)$$

Пусть  $h(x, y)$  — функция пропускания слова «CHRIST», которое подлежит фильтрации. Можно записать

$$h(x, y) = \text{«CHRIST»} - \text{функция фильтра.} \quad (23)$$

В результате преобразования Фурье функция  $h(x, y)$  преобразуется в функцию

$$H(u', v') = |H| e^{i\theta} = \mathfrak{F}[h(x, y)], \quad (24)$$

которую можно наблюдать в фокальной плоскости линзы  $L_2$ .  
Опорный сигнал

$$|A_0|e^{i\varphi} \quad (25)$$

создается по схеме, приведенной на рис. 16, где, согласно выражению (6а) гл. 3, координаты равны

$$\xi' = \frac{1}{k} u', \quad \eta' = \frac{1}{k} v'. \quad (26)$$

Пусть  $b$  — сдвиг вдоль оси  $x$  фильтруемого сигнала относительно точечного опорного источника  $R$  (рис. 16). В фокальной плоскости линзы  $L_2$  в результате преобразования Фурье сигнал имеет комплексную амплитуду

$$A(u', v') = H(u', v') + P(u', v') \quad (27)$$

в соответствии с уравнением

$$h(x, y) + |A_0|\delta(x - b, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(u', v') + P(u', v'). \quad (28)$$

Если написать

$$H(u', v') = |H|e^{i\theta}, \quad (29)$$

то благодаря сдвигу на величину  $b$  функция  $P(u', v')$  [выражение (9а) гл. 7] станет равна

$$P(u', v') = |A_0|e^{i\varphi} = |A_0|\exp[i(bu' + v')], \quad (30)$$

где фаза

$$\varphi = bu' + v' \quad (31)$$

является *линейной* функцией  $u'$ . Поэтому функция  $P(u', v')$  представляет собой плоскую волну, наклоненную под углом

$$\psi = \arctg \frac{b}{f} \approx \frac{b}{f} \quad (32)$$

к оси  $\xi'$  (см. рис. 16).

Распределение интенсивности  $I(u', v')$ , регистрируемой в фильтре, описывается выражением

$$I(u', v') = A(u', v')A^*(u', v') = [H(u', v') + P(u', v')][H(u', v') + P(u', v')]^*, \quad (33)$$

т. е.

$$I(u', v') = [|H|e^{i\theta} + A_0e^{i\varphi}][|H|e^{-i\theta} + A_0e^{-i\varphi}] \quad (34)$$

или

$$I(u', v') = [|H|^2 + A_0^2] + |H|e^{i\theta}A_0e^{-i\varphi} + |H|e^{-i\theta}A_0e^{i\varphi}. \quad (35)$$

Однако требуемый фильтр описывается, согласно выражению (22), функцией  $I(u', v')$ , а не функцией  $H(u', v') = |H|e^{i\theta}$ .

Вопрос стоит так: каким образом требуемый фильтр  $|H|e^{i\theta}$  можно выделить в изготовленном фильтре  $I(u', v')$ ? Ответ: такое разделение происходит автоматически путем дифракции в системе оптической фильтрации, изображенной на рис. 15. Это можно доказать следующим образом.

Для простоты предположим вначале, что комплексное амплитудное пропускание фильтра пропорционально распределению интенсивности  $I(u', v')$ , зарегистрированной в фильтре, причем коэффициент пропорциональности равен 1. В действительности это предположение верно в том случае, когда интенсивность опорного пучка  $A_0^2$  примерно в 10 раз больше величины  $|H|^2$  и экспозиция и проявление фотопленки производятся при контрасте  $\gamma = -2$  (см., например, гл. 6). Для других значений  $\gamma$  комплексная амплитуда на выходе фильтра будет умножаться на  $\gamma/2$ , а комплексная амплитуда волны, вышедшей из фильтра, все еще будет пропорциональна  $I(u', v')$ .

Обращаясь к рис. 15 и выражению (35), мы видим, что комплексная амплитуда поля, появляющегося на выходе фильтрующего устройства, равна

$$F(u', v')I(u', v') = F(u', v')[|H|^2 + A_0^2] + F(u', v')H(u', v')A_0e^{-i\varphi} + F(u', v')H^*(u', v')A_0e^{i\varphi}. \quad (36)$$

Затем с помощью линзы  $L_2$  это поле (36) подвергается преобразованию Фурье. В выражении (36) мы различаем три отдельных члена и обнаруживаем, что соответствующие изображения получаются в плоскости  $\xi(u', v')$  путем преобразования Фурье с использованием следующих уравнений (как это показано в других разделах):

$$F \cdot He^{i\varphi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}[F] \otimes \mathcal{F}[He^{i\varphi}], \quad [(41) \text{ гл. 7}]$$

$$\mathcal{F}[He^{i\varphi}] = \mathcal{F}[H \exp[i(bu' + cv')]] = h(x - b, y - c), \quad [(10а) \text{ гл. 7}]$$

$$\mathcal{F}[He^{-i\varphi}] = \mathcal{F}[H \exp[-i(bu' + cv')]] = h(x + b, y + c). \quad [(10а) \text{ гл. 7}]$$

Здесь для общности опорный точечный источник  $R$  помещен в точку  $x = b$  и  $y = c$  [см. рис. 16 и выражение (31)].

Таким образом, мы обнаруживаем, что преобразование Фурье над выражением (36) дает следующие компоненты

изображения [см. выражения (12), (13), (41) и (62) гл. 7]:

$$F(u', v') [|H|^2 + A_0^2] \xrightarrow{\delta} f(u', v') \otimes \delta [|H|^2 + A_0^2],$$

компонента смещения,  
сосредоточенная у точки  
 $x' = 0, y' = 0$

$$F(u', v') H(u', v') A_0 e^{-i\varphi} \xrightarrow{\delta} A_0 [f \otimes h]_{x+b, y+c}, \quad (37)$$

компонента, сосредоточенная  
у точки  $x = -b, y = -c$

$$F(u', v') H^*(u', v') A_0 e^{i\varphi} \xrightarrow{\delta} A_0 [f * h]_{x-b, y-c}.$$

компонента, сосредоточенная  
у точки  $x = +b, y = +c$

Здесь символ  $\otimes$  означает операцию свертки, а  $*$  — операцию корреляции, согласно выражениям (22) и (52) гл. 7 соответственно. По обе стороны от оптической оси видны два изображения. Одно из них является сверткой, а другое — корреляцией функции фильтруемого изображения  $f(x, y)$  с функцией фильтра  $h(x, y)$ . Эти изображения *отделены* от компоненты смещения, если  $b$  и  $c$  выбраны достаточно большими. Свертка располагается у точки  $x = -b, y = -c$ , а корреляция — у точки  $x = b, y = c$ . Такое пространственное разделение отфильтрованных изображений и компоненты смещения получается благодаря введению в процессе голографического получения фильтра (рис. 16) сдвига опорного пучка  $R$  на величину  $x = b, y = c$  относительно сигнала фильтра  $h(x, y)$ .

В нашем случае [выражение (20)] искомое отфильтрованное изображение появляется в боковом пучке  $f \otimes h$  в форме свертки, а не в форме корреляции  $f * h$ , получаемой в другом боковом пучке. Если функция фильтра  $h(x, y)$  имеет двукратную симметрию вращения (разд. 4 гл. 6 и работу [11]), то требуемая фильтрация получится только в боковом пучке в виде изображения корреляции. Интересно отметить (разд. 4 гл. 6), что имеются другие схемы оптической фильтрации и синтеза, где желаемое изображение в боковом пучке получается в форме корреляции, а не свертки.

Голографически регистрируемый фильтр, т. е. голограмму передаточной функции фильтра  $h(x, y)$ , можно интерпретировать как голограмму, регистрируемую на пространственной несущей в виде синусоидальной дифракционной решетки. Действительно, легко убедиться в том, что *голограмма*, которая получается при интерференции плоской волны  $P(u', v')$  с плоской волной, параллельной плоскости пленки [см. рис. 16, а также выражения

(30) и (31)], является *интерферограммой в форме прямых полос* с расстоянием между ними

$$\xi'_0 \approx \frac{\lambda}{l} b. \quad (38)$$

Такую систему полос можно получить путем введения рядом с точечным эталонным источником  $R(x=b, y=c)$  второго точечного эталона  $R(x=0, y=0)$ , который располагается в начале системы координат  $xOy^1$ .

Качественно сдвиги фаз, регистрируемые на голограмме, можно интерпретировать как *сдвиги* положения несущих полос, соответствующие местным сдвигам фаз в дифракционной картине, которая регистрируется фильтром (т. е. голограммой).

Необходимо подчеркнуть тесную взаимосвязь пространственной фильтрации, с одной стороны, и голографии, с другой стороны, когда эти вопросы излагаются в других разделах, особенно в гл. 6, а также в разд. 9 настоящей главы, где обсуждается проблема синтеза оптических изображений с помощью голографии Фурье.

## 8. Оптическая обработка информации, корреляционный анализ и оптические корреляторы

Среди систем обработки информации, которые нашли практическое применение, целесообразно отметить оптические анализаторы спектра и оптические корреляторы, описанные Катрона и др. [3].

### 8.1. Анализаторы спектра

По существу оптический анализатор спектра аналогичен оптическому спектрометру с дифракционной решеткой, в котором используются монохроматическое излучение и несовершенная дифракционная решетка [9, 10].

Несовершенство решетки в оптическом анализаторе спектра составляют наиболее существенную часть интересующей нас информации, которая регистрируется на фотопленке, например, с помощью катодно-лучевой трубки. Примером сигналов, регистрируемых и анализируемых таким способом, могут служить сейсмограммы колебаний почвы. Задача анализа здесь состоит в том, чтобы определить спектр мощности по сейсмограмме, ко-

<sup>1)</sup> Точечный опорный источник в интерферометрии, по-видимому, впервые ввел Номарский [12, 13].

торая является несовершенной дифракционной решеткой. Принцип действия анализаторов спектра основан на том, что распределение амплитуды света в дифракционной картине, образованной оптической решеткой, соответствует фурье-образу комплексной амплитуды, прошедшей через решетку (совершенную или несовершенную!), когда эта решетка освещается плоской волной монохроматического света. Другими словами, распределение интенсивности дифракционной картины, образованной решеткой, есть не что иное, как *спектр* несовершенств волнового фронта, получающегося после дифракции света на решетке. Если эти несовершенства вводятся в решетку преднамеренно, например, в виде полос интенсивности, зарегистрированных на фотографическом транспаранте, то спектр, формируемый с помощью оптиче-

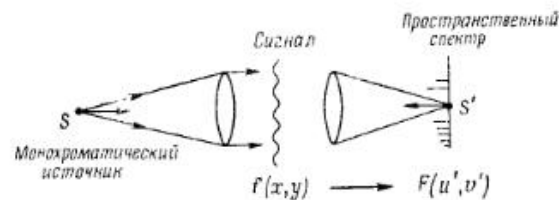


Рис. 17. Схема для осуществления спектрального анализа.

ского преобразования Фурье, будет сразу же давать спектральное распределение вариации интенсивности сигнала в зависимости от координат на пленке. Классический образец применения этого принципа можно найти в акустике (см., например, Фишер и Лихте [8]).

Исчерпывающее теоретическое рассмотрение соотношений между несовершенствами решетки и спектральной дифракционной картиной было дано в работе [9] в форме, непосредственно применимой к анализу спектра, производимому в анализаторах спектра. Джексон [10] недавно рассмотрел эту проблему в конкретном применении к дифракционному методу обработки геофизических данных.

Схема оптического анализатора спектра дана на рис. 17. В обозначениях этого рисунка имеем [соотношение (18) гл. 3]

$$F(u', v') = \mathfrak{F}[f(x, y)], \quad (39)$$

где  $f(x, y)$  — комплексная амплитуда света, прошедшего через фотограмму, спектр которой, т. е. распределение спектральной интенсивности, мы хотим получить. В явном виде в плоскости

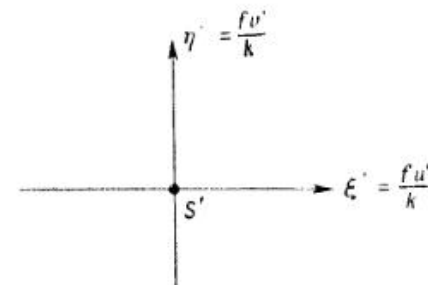


Рис. 18. Координаты изображения, получаемого при спектральном анализе.

изображения  $(\xi', \eta')$  получаем комплексный спектр [соотношение (1а) гл. 3]

$$F\left(k \frac{\xi'}{f}, k \frac{\eta'}{f}\right) = \iint f(x, y) \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{\xi'}{f} x + \frac{\eta'}{f} y\right)\right] dx dy, \quad (40)$$

где  $\xi' = fu'/k$ ,  $\eta' = fv'/k$ , а  $k = 2\pi/\lambda$  (рис. 18).

Спектр интенсивности, зарегистрированной в фокальной плоскости  $(\xi', \eta')$ , описывается следующим соотношением:

$$I\left(k \frac{\xi'}{f}, k \frac{\eta'}{f}\right) = F \cdot F^*. \quad (41)$$

Важное достоинство оптического анализатора состоит в том, что такие анализаторы способны выполнять спектральный анализ *одновременно* для десятков, сотен и в принципе для тысяч



Рис. 19. Многоканальный спектральный анализ [3].

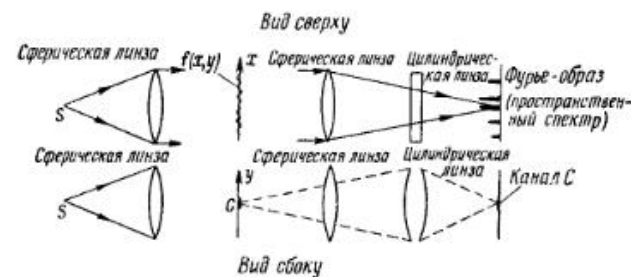


Рис. 20. Многоканальный спектральный анализ [3].

каналов. Таким образом, достигается очень простой метод корреляционной обработки сигналов, поступающих по различным каналам. Многоканальная система изображена на рис. 19 и 20.

Одновременный анализ основан на применении *цилиндрической оптики*. На рис. 20 показан в двух проекциях многоканальный анализатор. На таком принципе был построен 120-канальный анализатор для нефтяной промышленности. Сигналы, поступающие от отдельного сейсмографа, передавались и обрабатывались по одному из каналов.

## 8.2. Оптический кросс-коррелятор

С проблемой кросс-корреляции встречаются в совершенно различных областях, как, например, в статистике, при разработке новых фармацевтических продуктов, а также в задачах обнаружения и опознавания мишеней.

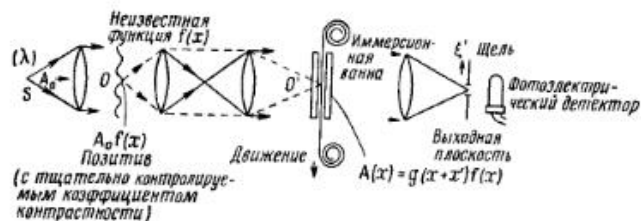


Рис. 21. Оптический кросс-коррелятор [3].

В оптическом кросс-корреляторе (рис. 21) при когерентном освещении известный и неизвестный сигналы записываются на пленке. Обе пленки в общем случае погружаются в иммерсионную кювету, и для осуществления операции кросс-корреляции одна из пленок, называемая эталонной пленкой  $g(x)$ , протягивается через иммерсионную кювету с постоянной скоростью. Иммерсионная кювета заполнена жидкостью, коэффициент преломления которой совпадает с коэффициентом преломления подложки пленки, чем обеспечивается подавление эффекта искажения фаз. На выходной плоскости получают функцию  $|A(k\xi'/f)|^2$ , причем

$$A\left(k\frac{\xi'}{f}\right) = \mathfrak{F}[A(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x+x')\exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda f}\xi'x\right)dx \quad (42)$$

называется *функцией неоднозначности*.

Чтобы превратить экспоненциальный множитель в подынтегральном выражении (42) в единицу, положим  $\xi'=0$ . Тогда фотоэлемент зарегистрирует  $|A(\xi'=0)|^2$ , где

$$A(\xi'=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x+x')dx \quad (43)$$

представляет желаемую кросс-корреляцию. Превращение экспоненциального множителя в единицу очень просто осуществляется с помощью щели (малого отверстия), расположенной на оси. В этом случае  $\xi'=0$  и  $\exp(0)=1$ . Для многоканальных кросс-корреляций используется цилиндрическая оптика с щелями на входной плоскости и многоканальные фотодетекторы, что обеспечивает одновременную обработку по всем каналам.

## 9. Интерферометрия и оптический синтез изображения (сложение комплексных амплитуд) методом последовательного наложения голографических картин на одну голограмму [5]

До последнего времени в оптике считали, что интерферограмму рассеянного волнового фронта можно получить путем сравнения рассеянного волнового фронта с волновым фронтом, отразившимся *одновременно* с ним от эталонного зеркала, как это осуществляется, например, в интерферометре с расщеплением пучка, который изображен на рис. 6, а гл. 6. В более общем случае два различных волновых фронта можно сложить в интерферометре с расщеплением пучка в интерферометре типа Майкельсона или других аналогичных приборах. Такие интерферометры позволяют суммировать комплексные амплитуды от двух волновых фронтов при условии, что два волновых фронта интерферируют одновременно.

В работе [5] впервые было указано на то, что можно осуществить сложение комплексных амплитуд не только двух, но фактически нескольких волновых фронтов, если заставить каждый волновой фронт интерферировать последовательно во времени с одним и тем же когерентным фоном, накапливая эти интерференционные картины в скрытом фотографическом изображении. При этом *интенсивности* отдельных интерферограмм (т. е. голограмм) последовательно складываются таким образом, что в результирующей голограмме воспроизводимо накапливаются (аддитивно по комплексной амплитуде) несколько волновых фронтов.

В качестве примера Габор, Струок и др. [5] привели метод синтеза изображения, с помощью которого из комплексных амплитуд одного изображения в форме волнового фронта голографически вычитались комплексные амплитуды другого изображения. Приведем описание этого метода, согласно работе [5].

На рис. 22, а дана схема экспериментального устройства, используемого для синтеза изображения, а на рис. 22, б и в показаны детали аппаратуры, используемой для получения экспериментальных результатов, которые приведены на рис. 23, а и б.

Показанный результат является первым примером *вычитательного наложения* или оптического стирания изображений, получаемого при сложении дифракционной картины функции  $f_1$  с дифракционной картиной функции  $f_2$ , сдвинутой по фазе на угол  $\pi$  ( $180^\circ$ ). (Во всем последующем описании под *дифракционной картиной* подразумевается комплексная амплитуда векторного поля  $E$  в картине дифракции.) В общем случае функции можно складывать с любыми сдвигами фаз и, в частности, без какого-либо сдвига фазы.

В дальнейшем описании функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  являются комплексными амплитудами пропускания транспаранта (фотопленки и т. д.) или отражающей способности предмета (который может быть, конечно, трехмерным), когда предмет или транспарант освещается монохроматическим светом. И далее  $F_n$  является фурье-образом функции  $f_n$ . Для простоты используются одномерные обозначения.

Поток света  $I$ , достигшего голограммы после  $n$  последовательных экспозиций, определяется путем сложения дифракционных картин, полученных от функций пропускания изображения  $f_n$  на фоне когерентной плоской волны, создаваемой опорной дельта-функцией  $\delta(0)$ . Поток света  $I$  после всех экспозиций равен

$$I = \sum_n t_n I_n, \quad (44)$$

где

$$I_n = F_n F_n^* + A_n F_n \exp(-2\pi i a x) + A_n F_n^* \exp(+2\pi i a x) + A_n A_n^* \quad (45)$$

и  $a$  — сдвиг между  $f_n$  и точечным опорным источником  $R_1$  вдоль оси  $\xi$  (рис. 22, а).

В общем случае каждую экспозицию можно осуществлять при произвольном сдвиге фаз  $\Phi_n$ , характерном для каждой экспозиции. Сдвиг фаз удобно отнести к опорной дельта-функции. Тогда

$$A_n = A_{n0} \exp(i\Phi_n) \delta(0). \quad (46)$$

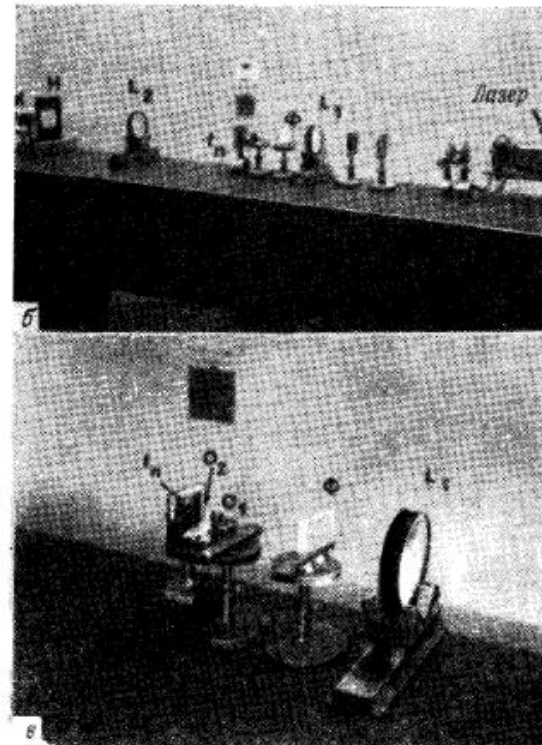
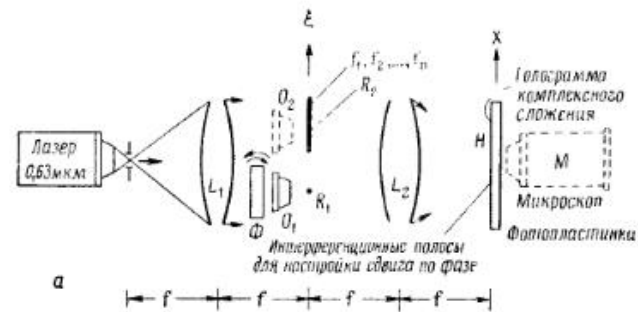


Рис. 22. Синтез комплексного изображения путем последовательного голографического сложения интенсивностей на одной голограмме.

а — схема; б — аппаратура, используемая при синтезе комплексного изображения с помощью голографического преобразования Фурье; в — детали аппаратуры.

В общем случае поток света, достигающий голограммы в единицу времени, от каждой функции равен

$$I_n = A_{n0}^2 + A_{n0} F_n \exp(-i\Phi_n) \exp(-2\pi i a x) + A_{n0} F_n^* \exp(i\Phi_n) \exp(2\pi i a x) + F_n F_n^*, \quad (47)$$

а полный поток света, достигший голограммы, равен

$$I(x) = \sum_n t_n I_n, \quad (48)$$

где  $t_n$  — время экспозиции для каждой функции.

После фотографического проявления при условии, что соблюдается линейность характеристической кривой фотоэмульсии, пропускание голограммы станет равным (разд. 2 гл. 6)

$$H(x) = [I(x)]^{-\nu/2}. \quad (49)$$

Если, как это принято в голографии, интенсивность опорного пучка выбрана достаточно большой по сравнению с интенсивностью функций при экспозиции, то биномиальное разложение выражения (48) дает

$$H(x) \approx 1 - \frac{\nu}{2} X + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{2}\right) \left[\left(\frac{\nu}{2}\right) + 1\right] X^2 + \dots, \quad (50)$$

где

$$X = \frac{1}{\sum_n t_n A_{n0}^2} \left\{ \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n \exp(-i\Phi_n) \right] \exp(-2\pi i a x) + \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n^* \exp(+i\Phi_n) \right] \exp(+2\pi i a x) + \sum_n t_n F_n F_n^* \right\}. \quad (51)$$

а

$$\begin{aligned} X^2 = & \frac{1}{\sum_n t_n A_{n0}^2} \left\{ \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n \exp(-i\Phi_n) \right]^2 \exp(-4\pi i a x) + \right. \\ & + \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n^* \exp(+i\Phi_n) \right]^2 \exp(+4\pi i a x) + \left( \sum_n t_n F_n F_n^* \right)^2 + \\ & + 2 \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n \exp(-i\Phi_n) \right] \left[ \sum_n t_n F_n^* \exp(+i\Phi_n) \right] + \\ & + 2 \left( \sum_n t_n F_n F_n^* \right) \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n \exp(-i\Phi_n) \right] \exp(-2\pi i a x) + \\ & \left. + 2 \left( \sum_n t_n F_n F_n^* \right) \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n \exp(+i\Phi_n) \right] \exp(+2\pi i a x) \right\}. \quad (52) \end{aligned}$$

Пропускание голограммы  $H(x)$  можно выразить в следующем виде:

$$H(x) = H_0(x) + H_1(x) \exp(-2\pi i a x) + H_1^*(x) \exp(+2\pi i a x) + H_2(x) \exp(-4\pi i a x) + H_2^*(x) \exp(+4\pi i a x), \quad (53)$$

где  $H_0(x)$  — член нулевого порядка,  $H_1(x)$  — боковая полоса первого порядка и т. д. Для синтеза представляют интерес изображения, полученные при преобразовании по Фурье членов боковых полос первого порядка, т. е.  $H_1(x)$  и  $H_1^*(x)$  в выражении (53). Преобразование Фурье осуществляется путем освещения голограммы плоской, пространственно-когерентной монохроматической волной и последующего наблюдения изображений в фокальной плоскости линзы.

Интересующий нас член  $H_1(x)$  равен

$$H_1(x) = \left( \sum_n t_n A_{n0}^2 \right)^{-\nu/2} \left\{ -\frac{\nu}{2} \frac{\sum_n t_n A_{n0} F_n \exp(-i\Phi_n)}{\sum_n t_n A_{n0}^2} + \left(\frac{\nu}{2}\right) \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \frac{\left( \sum_n t_n F_n F_n^* \right) \left[ \sum_n t_n A_{n0} F_n \exp(-i\Phi_n) \right]}{\left( \sum_n t_n A_{n0}^2 \right)^2} \right\}. \quad (54)$$

В выражении (54) необходимо обратить внимание на то, что  $H_1(x)$  пропорционально величине

$$\sum_n t_n A_{n0} \exp(-i\Phi_n) F_n. \quad (55)$$

Иначе говоря, компонента голограммы  $H_1(x)$ , отвечающая боковой полосе первого порядка, оказывается действительно пропорциональной взвешенной сумме фурье-образов  $F_n$  функций  $f_n$ , как это и требуется для синтеза комплексных амплитуд.

Вышеприведенные уравнения, в частности  $H_1(x)$  [уравнение (54)], можно упростить теоретически и экспериментально, если все времена экспозиции  $t_n$  взять одинаковыми, т. е. положить  $t_n = t$ , и все амплитуды опорных пучков  $A_{n0}$  также выбрать равными, т. е.  $A_{n0} = A$ .

В этом случае пропускание голограммы в боковой полосе первого порядка равняется

$$H_1(x) = (ntA^2)^{-\nu/2} \left\{ -\frac{\nu}{2A} \left( \sum_n F_n \exp(-i\Phi_n) \right) + \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \frac{\nu}{2n^2 A^2} \left( \sum_n F_n F_n^* \right) \left( \sum_n F_n \exp(-i\Phi_n) \right) + \dots \right\}. \quad (56)$$



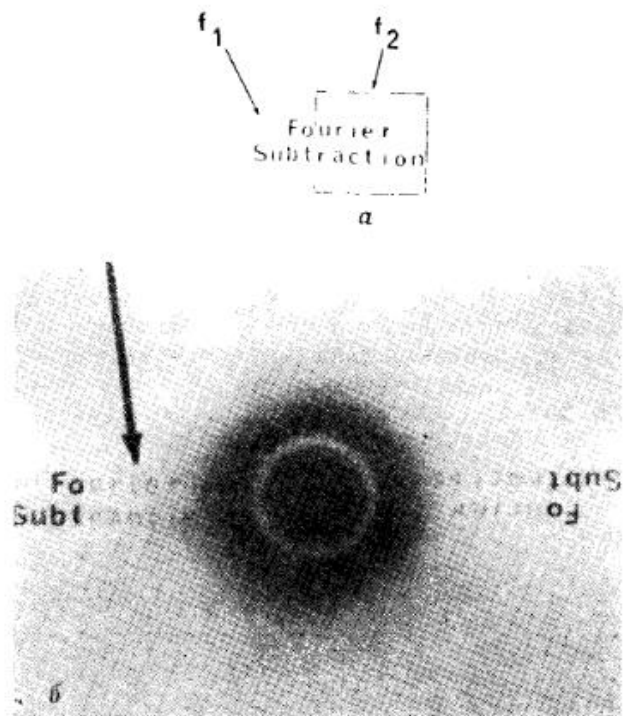


Рис. 23.

*a* — функции  $f_1 = \text{FOURIER SUBTRACTION}$  и  $f_2 = \text{FOURIER SUBTRACTION}$ , интенсивности которых в дифракционной картине были сложены последовательно с помощью голографического синтеза изображений (рис. 22) [5]. Между двумя экспозициями был введен сдвиг фазы  $\Phi = 180^\circ$  с тем, чтобы вычесть комплексную амплитуду дифракционной картины  $f_2$  из амплитуды  $f_1$ ; *b* — восстановленный фурье-образ (рис. 19 гл. 6) результата вычитания функции  $f_2$  из  $f_1$  (рис. 23, *a*); получен с помощью голограммы, зарегистрированной в устройстве для синтеза изображения (рис. 22, *b*).

Точность комплексного сложения  $\sum_n F_n$  зависит от отношения сигнал/шум, характеризующего весь этот метод.

Если в качестве сигнала  $S$  взять первый член в выражении (56)

$$S = (ntA^2)^{-\nu/2} \left(-\frac{\gamma}{2A}\right) \left(\sum_n F_n \exp(-i\Phi_n)\right), \quad (57)$$

а в качестве шума  $N$  — второй член в выражении (56)

$$N = (ntA^2)^{-\nu/2} \left(\frac{\gamma}{2}\right) \frac{\gamma}{2n^2A^3} \left(\sum_n F_n F_n^*\right) \left(\sum_n F_n \exp(-i\Phi_n)\right), \quad (58)$$

то отношение сигнал/шум равно

$$\frac{S}{N} = \frac{nA^2}{\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) \left(\sum_n F_n F_n^*\right)}. \quad (59)$$

Легко убедиться в том, что превосходное отношение сигнал/шум, полученное в эксперименте, зафиксированном на рис. 23, *a* и *b*, подтверждает правильность предсказаний, вытекающих из соотношения (59).

Сделаем несколько дополнительных замечаний, чтобы пояснить устройство для синтеза изображения, показанное на рис. 22.



Рис. 24. Интерферограмма, полученная методом последовательного сложения голографических интенсивностей на одной голограмме [15].

Существенным элементом его является фазовая пластинка  $\Phi$ , служащая в данном случае для осуществления операции вычитания путем сложения функции  $f_1$  с функцией  $f_2$ , сдвинутой по фазе на  $\pi$  ( $180^\circ$ ).

Настройка фазовой пластинки  $\Phi$  осуществляется непосредственно путем наблюдения интерференционных полос, получаемых в плоскости  $x$  (рис. 22, *a*) с помощью точечного эталона  $R_2$ , который формируется временно устанавливаемым объективом от микроскопа  $O_2$ . Фазовую пластинку с произвольным сдвигом фаз можно получить методом отбеливания экспонированной фотозмульсии на высококачественном оптическом стекле [14].

Пример интерферометрии путем последовательного сложения интенсивностей в одной голограмме был недавно описан Строумом и Лабейри [15] (рис. 24). Полученная интерферограмма была восстановлена с помощью преобразования Фурье (гл. 6) безлинзовой голограммы Фурье [16]. В скрытом изображении этой безлинзовой голограммы Фурье происходила последова-

тельно во времени интерференция с когерентным фоном: сначала волны света, пропущенной через фазовый предмет [14], который был изготовлен фотографически, а затем волны света, падающей на этот же фазовый предмет.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Maréchal A., Croce P., *Compt. Rend.*, **237**, 607 (1953).
2. O'Neill E. L., Optical Research Lab., Boston Univ., 1956.
3. Cutrona L. J., Leith E. N., Palermo C. J., Porcello L. J., *IRE Trans. Inform. Theory*, **6**, 386 (1960).
- 4а. Аббе Е., Теория образования изображения, изложенная в его лекциях, прочитанных в Йене (см. Czapski S., *Grundzüge der Theorie der Optischen Instrumente nach Abbe*, 2nd ed., Chap. II, Barth, Leipzig, 1904, p. 27—64).
- 4б. Wood R. W., *Physical Optics*, 3rd ed., Macmillan, New York, 1934; русский перевод: Вуд Р., *Физическая оптика*, М., 1936.
- 4в. Maréchal A., Франсон М., *Diffraction*, *Revue d'Optique*, Paris, 1960; русский перевод: Марешаль А., Франсон М., *Структура оптического изображения*, изд-во «Мир», 1964.
5. Gabor D., Stroke G. W., Restrick R., Funckhouser A., Brumm D., *Phys. Lett.*, **18**, 116 (1965).
6. Gabor D., *Nature*, **161**, 777 (1948).
7. Van der Lugt A., *IEEE Trans. Inform. Theory*, **10**, 139 (1964).
8. Fischer F., Lichte H., *Tonfilm Aufnahme und Wiedergabe nach dem Klangfilm-Verfahren*, Hirzel, Leipzig, 1931.
9. Stroke G. W., *Rev. Optique*, **39**, 291—398 (1960).
10. Jackson P. L., *Appl. Opt.*, **4**, 419 (1965).
11. Stroke G. W., Restrick R., Funckhouser A., Brumm D., *Phys. Lett.*, **18**, 274 (1965).
12. Nomarski G., *Catalogue de la 53<sup>e</sup> Exposition de Physique*, Paris, 1956, p. 69; см. также *Optik*, **9—10**, 537 (1960).
13. Dyson J., *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 386 (1957).
14. Gabor D., Stroke G. W., Brumm D., Funckhouser A., Labeyrie A., *Nature*, **208**, 1159 (1965).
15. Stroke G. W., Labeyrie A., *Appl. Phys. Lett.*, ...
16. Stroke G. W., *Appl. Phys. Lett.*, **6**, 201 (1965).

#### Глава 6

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ОПТИЧЕСКОЙ ГОЛОГРАФИИ<sup>1)</sup>

Последние успехи лазерной техники вызвали новую волну интереса к голографии, впервые описанной Габором в 1948 г. [1—5] и названную им методом образования изображения путем восстановления волнового фронта.

Качественное описание двухступенчатого голографического принципа образования изображения было дано в гл. 1. С методом голографии мы встречались также в гл. 5 в связи с той важной ролью, которую голография играет в системах оптической фильтрации и при синтезе оптических изображений.

В этой главе мы более подробно рассмотрим голографические принципы образования изображения и опишем новые результаты (теоретические и экспериментальные), которые были недавно получены с участием автора в ходе разработок систем образования изображений и методов получения максимально возможного разрешения в тех диапазонах электромагнитного спектра, где такие системы невозможно осуществить иначе, как только с помощью голографии (например, в рентгеновских лучах). Мы можем сказать в самом общем виде, что те принципы голографии, которые рассматриваются в данной главе, составляют основу любых других голографических систем образования изображений и голографических методов преобразования изображений. Например, используя эти принципы, можно воссоздать трехмерное изображение предмета с помощью голограммы, искусственно изготовленной по расчетным координатам предмета!

После 1948 г. вопросу голографии было посвящено большое число работ. Значительный прогресс был достигнут при разработке методов амплитудного наложения когерентного фона на поле, рассеянное от предмета, а также при получении неперекрывающихся в пространстве восстановленных изображений. Оптимистические предсказания Габора, содержащиеся в его

<sup>1)</sup> Данная глава частично основана на материалах, представленных на Симпозиуме по оптической обработке информации (Бостон, 9 ноября 1964 г.). см. также [6].

статье [2], опубликованной в 1949 г., оправдались через 15 лет<sup>1)</sup>. Вместе с тем сейчас стало очевидным, что возможность дальнейшего распространения методов голографии зависит от решения ряда проблем.

В этой главе мы рассмотрим теоретические и экспериментальные основы голографии, исходя из современной трактовки этих вопросов и опираясь на экспериментальные результаты. Из последних достижений особенно следует выделить два эксперимента и две теоретические работы:

1. Реализация принципа восстановления волнового фронта, рассеянного от трехмерных макроскопических объектов при освещении их лазером на длине волны 0,63 мкм.

2. Достижение больших геометрических увеличений ( $\sim 150\times$ ) при безлинзовом восстановлении волнового фронта от биологических микрообразцов, также освещаемых лазером на длине волны 0,63 мкм.

3. Новое теоретическое доказательство в пользу того, что с помощью рентгеновской голограммы можно получить исключительно высокие пространственные разрешения, значительно выше тех, которые ранее считались предельными. Реальная перспектива достижения коэффициента увеличения свыше  $1 \cdot 10^6$  делает возможным получение рентгеновских изображений с высоким разрешением.

4. Простая и четкая формулировка требований к пространственной и временной когерентности. Соблюдение этих требований не только позволяет получить лазерные голограммы трехмерных предметов, но также решает проблему распространения голографического метода на рентгеновскую микроскопию.

Работы Габора [1—5] сыграли выдающуюся роль в создании нового метода образования оптических изображений. В знак признания этого факта автор предложил назвать этот новый метод *голографией*; этот термин характеризует процесс образования изображений с помощью голограмм. Этот новый термин составлен по аналогии со словом «фотография», характеризующим образование изображений с помощью линз.

## 1. Экспериментальные основы

Выражение «восстановление волнового фронта» используется для обозначения двухступенчатого фотографического процесса. Регистрация амплитуды и фазы рассеянной электромагнитной волны осуществляется на первой ступени путем добавления ко-

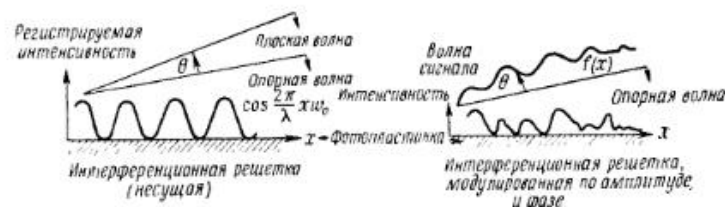


Рис. 1. Интерференционная решетка, модулированная по амплитуде и фазе.

герентного фона определенной структуры. Затем, на второй ступени, спустя некоторый промежуток времени, восстанавливается исходный волновой фронт. Когерентный фон необходим для регистрации на голограмме отрицательных и комплексных значений электрического поля. Методы регистрации волнового фронта отличаются между собой схемами введения когерентного фона. Следует, однако, напомнить, что сама идея о необходимости введения когерентного фона непосредственно связана с общим принципом, предложенным Цернике в 1934 г. в связи с разработкой фазово-контрастного микроскопа [7—10].

Нетрудно уловить тесную аналогию между методом регистрации фазы рассеянной волны с помощью голограммы (рис. 1—3) и методом регистрации фазы в двухлучевом интерферометре (рис. 6). Эта аналогия становится почти полной в схемах, которые мы используем для объяснения принципа голографии.

Легко можно показать [11] (рис. 4 и 6 гл. 1), что на фотопластинке образуется интерференционная решетка как в случае двухлучевой интерферограммы (рис. 6), так и в случае голограммы (рис. 3). При получении голограммы фоновая, или

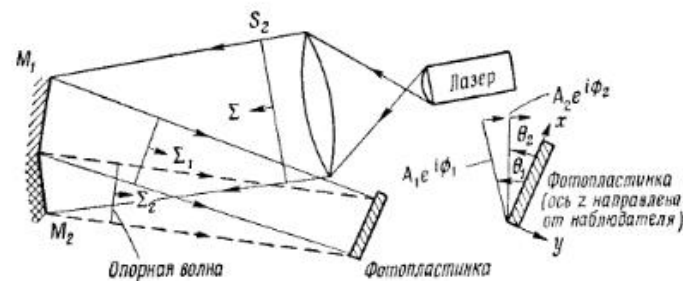


Рис. 2. Схема получения голограммы, представляющей собой модулированную интерференционную решетку, в случае предмета  $M_1$ , создающего плоскую волну.

<sup>1)</sup> См. стр. 218.

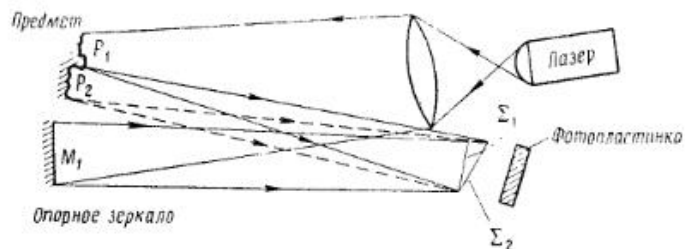


Рис. 3. Получение голограммы трехмерных предметов [11, 17].

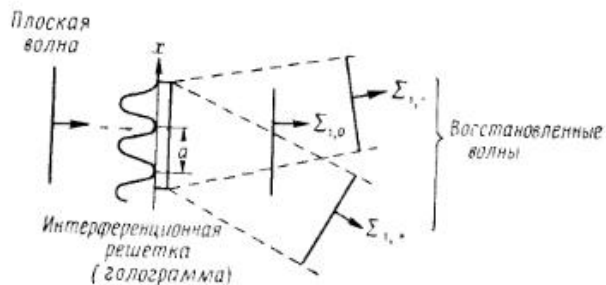


Рис. 4. Восстановление плоской волны с помощью голограммы, показанной на рис. 2.

опорная, волна образует вблизи фотопластинки некоторый угол с рассеянной волной. Если обе волны являются плоскими, т. е. получены при рассеянии от плоского зеркала (рис. 2), то голограмма (интерферограмма) образуется в виде решетки, состоящей из прямолинейных интерференционных полос с синусоидальным профилем.

Если такую решетку — простейшую голограмму — осветить плоской волной (рис. 4), то при дифракции возникнет система плоских дифракционных волн, которые, как легко видеть, представляют собой восстановленные исходные плоские волны.

Если в рассеянной волне имеются как амплитудные, так и фазовые вариации, то полосы на голограмме все еще сохраняют вид решетки в ее обобщенном смысле (рис. 1). Однако эти полосы решетки промодулированы как по положению, так и по интенсивности пространственным распределением электромагнитного поля рассеянной волны в непосредственной близости от фотопластинки. Если теперь решетку с модулированными полосами осветить плоской волной, то она воспроизведет (разд. 2) две различные системы дифрагированных волн, фазовая и амплитудная модуляции которых совпадают с аналогичными моду-

ляциями исходной рассеянной волны вблизи фотопластинки. Наблюдатель, рассматривающий одну из систем дифрагированных волн, увидит тот же предмет, который он видел, когда рассматривал волны, рассеянные исходным предметом. Вторая система этих волн обладает свойством формировать действительное изображение без каких-либо дополнительных линз.

Дифракционные и интерференционные свойства решеток являются не только необходимыми, но и достаточными для объяснения физических явлений, лежащих в основе метода восстановления волнового фронта [11, 12]. Чтобы достичь полной наглядности, достаточно напомнить, что обобщенные голограммы — это модулированные дифракционные решетки, или дифрактограммы.

Объяснение свойств голограммы с помощью зонной пластинки Френеля уже использовал Габор [1, 2.] а затем это представление позднее было развито и другими авторами, например Роджерсом [13] и Эль-Самом [14].

Ниже приводится краткий обзор тех теоретических основ голографии, которые необходимы для дальнейшего развития теории.

## 2. Теоретические основы

Строго говоря, детальный анализ принципов голографии возможен только на основе общей электромагнитной теории процессов рассеяния, дифракции и поляризации. Однако для большинства задач, рассматриваемых в данной главе, достаточно приближенная теория, используемая в физической оптике. Необходимо, однако, помнить об ограничениях этой теории, указанных в разд. 2 гл. 2, а также в работе [12].

Пусть  $\Sigma_2$  — волна, рассеянная освещенным предметом (рис. 3). Комплексную амплитуду этой электромагнитной волны можно разбить на две части: амплитуду  $A(x)$  и фазу  $\varphi(x)$ . Каждая из них несет информацию о структуре волны. Чтобы спустя некоторое время мы могли восстановить эту рассеянную волну, необходимо зарегистрировать амплитуду и фазу предельно полно. Обычная фотография позволяет зарегистрировать только амплитуду волны или, более точно, амплитуду, возведенную в определенную степень. Однако при этом информация о фазе всегда теряется, так как фотоэмульсия реагирует только на абсолютное значение амплитуды рассеянного света.

Здесь можно отметить то, что именно безвозвратная потеря информации о фазе создает трудность восстановления изображений с обычных рентгеновских дифракционных картин. К счастью,

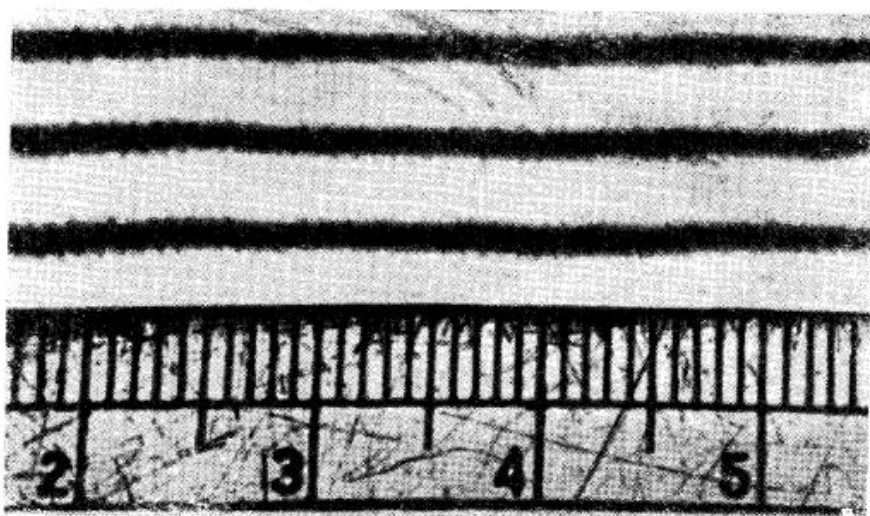


Рис. 5. Интерферограмма волнового фронта, отраженного от оптической дифракционной решетки [15].

С помощью интерферометра, изображенного на рис. 6, фотографировалось распределение комплексной амплитуды волны, дифрагировавшей на решетке. Для того чтобы зарегистрировать комплексную амплитуду, между дифрагированным и опорным пучками создавался малый угол. Такой же способ применяется при получении голограммы (рис. 2 и 3).

в голографии регистрируется как амплитуда, так и фаза рассеянной волны, совокупность которых необходима для восстановления изображения.

Сам факт регистрации фазы покажется не столь удивительным, если мы вспомним хорошо известные интерферометрические методы, используемые при регистрации фазы оптического волнового фронта.

Пожалуй, наиболее известным интерферометрическим методом регистрации фазы волнового фронта является *двухлучевая интерферометрия*. Например, с помощью интерферометра, изображенного на рис. 6, можно сфотографировать пространственное распределение фазы волнового фронта, дифрагировавшего на линзованной оптической решетке (рис. 5). Эти рисунки наглядно демонстрируют ту роль, которую в голографии играют как дифракция на решетке, так и интерферометрическая регистрация дифрагированных волн. Пространственные сдвиги интерференционных полос на интерферограмме линейно связаны с распределением фаз дифрагированного волнового фронта, так

что расстояние между соседними полосами отвечает сдвигу фаз, равному  $2\pi$ . С помощью интерферограммы можно восстановить дифракционную картину либо оптически, либо путем осуществления преобразования Фурье на электронной вычислительной машине (рис. 7). Известны и многие другие системы двухлучевых интерферометров, которые позволяют осуществить аналогичную регистрацию фазы волнового фронта: достаточно указать на зеркало Ллойда, интерферометр Физо, интерферометр Майкельсона — Тваймана — Грина и др. Методы

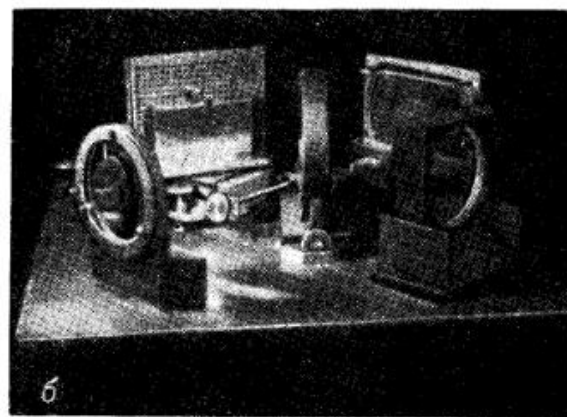
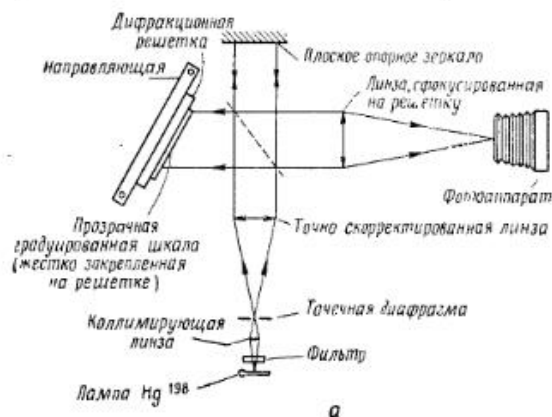


Рис. 6.

*a* — схема интерферометра для фотографирования распределения комплексной амплитуды в волне, дифрагировавшей на решетке [15]. Имеется сходство между этим интерферометром и установкой для получения голограммы [11, 16, 17]; *б* — внешний вид интерферометра [15].

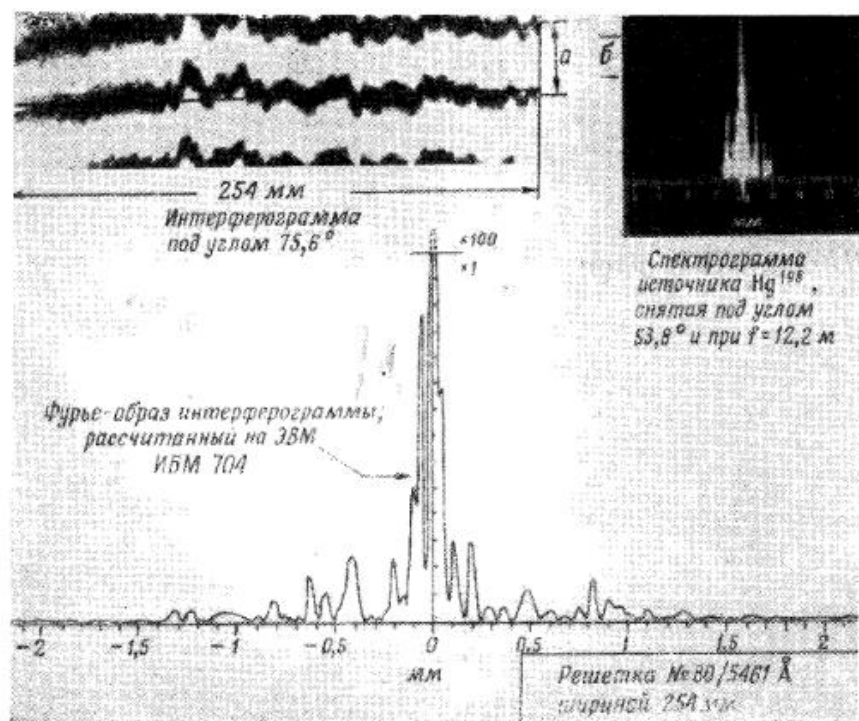


Рис. 7. Преобразование Фурье изображения точечного источника, соответствующего волновому фронту от интерферограммы [18, 19].

Вверху слева показана интерферограмма, полученная с помощью дифракционной решетки 300 *штрих/мм*. Внизу приведен фурье-образ интерферограммы, рассчитанный с помощью электронной вычислительной машины.

Вверху справа — спектрограмма зеленой линии 0,5461 *мкм* изотопа  $\text{Hg}^{198}$ . Получение фурье-образа интерферограммы с помощью электронной вычислительной машины аналогично оптическому преобразованию Фурье, используемому при оптической обработке данных, записанных на пленку, например при дифракционной обработке геофизических данных [20].

$a$  — расстояние между соседними полосами;  $b$  — отрезок, соответствующий двукратному увеличению интенсивности.

гетеродинамирования с использованием лазеров также имеют много общих черт с двухлучевой интерферометрией [11].

Многообещающий метод регистрации распределения амплитуды и фазы волнового фронта рассеянной волны был предложен Цернике в 1934 г. [7—10]. Метод Цернике, используемый в фазово-контрастном микроскопе, состоит в введении дополнительного когерентного фона, который соответствующим образом ослаблен по амплитуде и отрегулирован по фазе. Этот дополни-

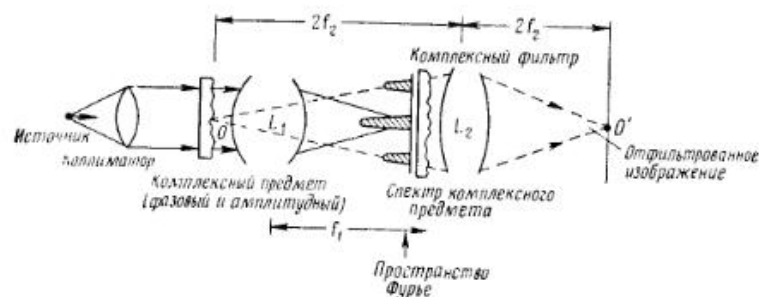


Рис. 8. Схема устройства, используемого для фазово-контрастной системы образования изображения [7—10] и для пространственной фильтрации [21].

тельный фон интерферирует с волновым фронтом, рассеянным от предмета, причем интерференция происходит непосредственно перед регистрацией. Когерентный фон обусловлен самим предметом и фактически представляет собой не что иное, как часть света, прошедшего через прозрачный предмет (образец) без дифракции (рис. 8). Когерентный фон накладывается на излучение, рассеянное в широком интервале углов от каждого участка образца. Амплитудное сложение происходит в пространстве Фурье (рис. 8) между образцом и линзой  $L_2$ , которая осуществляет повторное преобразование изображения. Таким образом, весь процесс сводится к *одноступенчатому* преобразованию изображения. Назначение комплексного фильтра, устанавливаемого в плоскости Фурье, состоит в том, чтобы изменить соответствующим образом фазу, а также амплитуду когерентного фона. Последний концентрируется в плоскости Фурье вблизи оси, и интенсивность его обычно велика по сравнению с полем, рассеянным исследуемым образцом. На принципах, аналогичных принципу Цернике (рис. 8), основаны методы пространственной фильтрации, впервые предложенные Маршалем в 1953 г. [21] и развитые различными авторами [22] (гл. 5). Двухступенчатый голографический процесс, изобретенный Габором [2], имеет фундаментальное сходство с фазово-контрастной микроскопией Цернике. Так же как и в методе Цернике, вводится когерентный фон, который получается при прохождении света через сам образец. Однако эти методы существенно различаются между собой. В методе Габора сначала фотографируют голограмму, полученную в результате интерференции когерентного фона с рассеянным полем, а затем ее используют для восстановления изображения при второй дифракции. В методе же Цернике изображение формируется непосредственно из отфильтрованной картины дифракции.

Как будет показано в разд. 2.2, при восстановлении волнового фронта с помощью голограммы любого типа образуются два изображения. До последнего времени неверно считали (см., например, [23]), что полное пространственное разделение изображений возможно лишь при двухлучевой схеме получения голограммы (рис. 9). В противоположность этому автор (совместно со своими студентами) [24] недавно доказал, что идеальное разделение можно получить при помощи первоначальной «однолучевой» габоровской схемы, когда оба пучка (опорный и модулирующий) идут параллельно. При этом восстановление получалось как при точечном, так и при диффузном освещении. Разумеется, двухлучевая схема удобна в эксперименте, но никаких принципиальных преимуществ она перед «однолучевой» схемой не имеет. Очень длительное время «однолучевая» схема Габора ассоциировалась с невозможностью пространственного разделения действительного и мнимого изображений. В работе [23], описывающей двухлучевую схему голографии, явно подразумевается, что введение двухлучевой схемы является важнейшим усовершенствованием. В других работах высказывалось мнение, что двухлучевая схема — это непременно условие (*sine qua non*) для осуществления полной записи фазы и пространственного разделения восстановленных изображений. Автор и его студенты [24] доказали, что несимметричная двухлучевая голограмма (см., например, рис. 9) — это всего-навсего половина эквивалентной симметричной однолучевой голограммы Габора<sup>1)</sup>. Такую однолучевую голограмму можно изготовить, если опорный пучок после огибания предмета с двух сторон направить нормально на фотопластинку. Двухлучевая схема впервые была предложена Ломаном [25] и описана Катрона и его сотрудниками [26]. Опорный пучок (плоский или сферический) в этой схеме получается путем отклонения с помощью призмы [16] или зеркала [11] части пучка света, направленного на предмет<sup>2)</sup>.

В рентгеновском диапазоне, где отсутствуют призмы или зеркала, необходимые для получения плоского или сферического опорного пучка, классическая схема голографии столкнулась,

<sup>1)</sup> С этим утверждением автора можно согласиться только в том случае, если не расценивать его как умаление фундаментального значения того исторического факта, что именно работы Лейта и Упатниекса, открывших и осуществивших двухлучевую схему голографии, являются теми узловыми исследованиями, которые по существу возродили идею голографии Габора и открыли возможность широкого применения голографии в науке и технике. Другой ветвью основополагающих экспериментов явились работы Денисюка. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> См. также работы Мерца по использованию однополосной схемы преобразования Френеля [80]. — *Прим. ред.*

казалось бы, с непреодолимыми трудностями, пока, наконец, Строук с Фальконемером не наметили этапы их устранения.

В конце 1964 г. [27] они доказали, что *голограмма Фурье* дает гораздо более высокую разрешающую способность, чем обычная голограмма Френеля (разд. 3). Однако первоначально считалось (разд. 7 гл. 5), что голограмму Фурье можно получить только в фокальной плоскости системы фокусирующих линз или зеркал. В такой системе волна, рассеянная предметом, подвергалась преобразованию Фурье, а уже затем интерферировала с опорной волной. Поэтому необходимость фокусирующих элементов при получении голограммы Фурье превращалась в непреодолимое препятствие при использовании этой схемы голографии Фурье в рентгеновском диапазоне, пока, наконец, в начале 1965 г. автор [29] не предложил способ получения *безлинзовой голограммы Фурье*. Необходимость введения фокусирующих элементов между предметом и голограммой полностью отпала (разд. 3)! Для рентгеновских лучей при длинах волн  $1 \text{ \AA}$  голограмма Фурье позволяет в 1000 раз повысить разрешающую способность по сравнению с голограммой Френеля. Однако даже и это преимущество, казалось, ничего не может дать, так как для его реализации требовалось создание точечных опорных пучков с размером, равным желаемой разрешающей способности, т. е.  $1 \text{ \AA}$ . Наконец, в 1965 г. автор и его сотрудники [30] доказали, что «размытые» изображения, получаемые от протяженного источника, можно восстановить с высоким разрешением по схеме корреляционной компенсации, если использовать для этого источник *определенной пространственной структуры, возрождающий разрешение в процессе восстановления* [31] (разд. 3).

Теперь перейдем к изложению принципов получения голограммы и восстановления изображений, общих для любых голографических систем формирования изображения.

## 2.1. Процесс получения голограммы

Амплитуду и фазу рассеянной волны можно зарегистрировать фотографически, если к рассеянной волне, падающей на фотопластинку, добавить когерентный опорный пучок. Простейшая схема осуществления такой суперпозиции световых волн показана на рис. 3 и 9. Широкая плоская волна освещает одновременно предмет и плоское зеркало [11] или треугольную призму [16]. Излучение, рассеянное предметом, создает вблизи фотопластинки поле с амплитудой  $A(x)$  и фазой  $\varphi(x)$ . Призма, поворачивая пучок на малый угол  $\theta$ , создает там же поле с постоянной амплитудой  $A_0$  и линейно меняющейся фазой  $\alpha x$ , где  $\alpha$  — постоян-

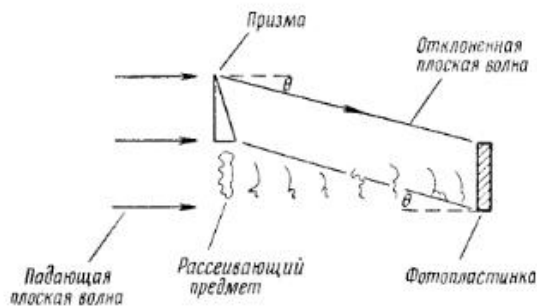


Рис. 9. Схема получения голограммы (см. также рис. 2 и 3).

ная, определяемая углом  $\theta$  и длиной волны  $\lambda$  (при малых углах  $\sin \theta \approx \theta$ ):

$$a\lambda = 2\pi\theta. \quad (1)$$

Полная амплитуда поля на фотопластинке равна

$$A_0 e^{-iax} + A(x) e^{i\varphi(x)}. \quad (2)$$

Фотоэмульсия регистрирует интенсивность

$$I(x) = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0 A(x) \cos [ax + \varphi(x)]. \quad (3)$$

Мы видим, что благодаря наличию опорного пучка ( $A_0 \neq 0$ ) удалось сохранить фазу  $\varphi(x)$  рассеянной волны.

Фотографическая эмульсия регистрирует интенсивность света, возведенную в некоторую степень, определяемую коэффициентом контрастности  $\gamma$ . Если работать на линейном участке характеристической кривой фотоэмульсии, то амплитудное пропускание ее  $T(x)$  пропорционально выражению

$$\begin{aligned} T(x) &\sim [I(x)]^{-\gamma/2} = \\ &= \{A_0^2 + A^2(x) + 2A_0 A(x) \cos [ax + \varphi(x)]\}^{-\gamma/2} \approx \\ &\approx A_0^{-\gamma/2} \left\{ A_0^2 - \frac{1}{2} \gamma A^2(x) - \gamma A_0 A(x) \cos [ax + \varphi(x)] \right\} \approx \\ &\approx 2A_0^2 - \gamma A^2(x) - 2\gamma A_0 A(x) \cos [ax + \varphi(x)] = \\ &= 2A_0^2 - \gamma A^2(x) - \gamma A_0 A(x) e^{i\varphi(x) + iax} - \gamma A_0 A(x) e^{-i\varphi(x) - iax}. \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — коэффициент контрастности. При выводе мы предполагали, что интенсивность опорного пучка намного выше, чем интенсивность света, рассеянного предметом. Это позволяет сохранить в разложении биннома только члены первого порядка. Выражение (4) Габор [1, 2] назвал уравнением голограммы.

Следует отметить две особенности этого уравнения. Во-первых, коснемся роли коэффициента контрастности  $\gamma$ . В отличие от требований, возникающих при осуществлении аналогичных процессов, ни точная величина  $\gamma$ , ни ее знак не влияют на процесс получения голограммы. Например, если изготовить контрастный отпечаток с голограммы и этим изменить знак  $\gamma$  на обратный, то это приведет к изменению фазы переменной составляющей пропускания на  $180^\circ$ . Небольшое изменение абсолютной величины коэффициента контрастности  $\gamma$  приведет к усилению или ослаблению амплитуды этой переменной составляющей.

Вторая особенность затрагивает взаимосвязь амплитуды  $A(x)$  и фазы  $\varphi(x)$ . Легко заметить, что амплитуда  $A(x)$  и фаза  $\varphi(x)$  рассеянной волны входят в уравнение голограммы естественным образом, т. е. как  $A(x) \exp[i\varphi(x)]$  в третий член (4) и  $A(x) \exp[-i\varphi(x)]$  в четвертый. Недавно Кэйзи [32] и Пеннингтон [33] доказали, что распределение интенсивности света можно превратить в вариации толщины эмульсии, пропорциональные (при определенных условиях [34]) экспозиции, и путем фотохимического отбеливания получить рельефно-фазовую голограмму. В этом случае, если экспозиции не слишком велики, комплексная амплитуда пропускания голограммы имеет вид

$$T(x) = e^{iI(x)} \approx 1 + iI(x). \quad (4a)$$

## 2.2. Процесс восстановления изображения

Процесс восстановления изображения исходного предмета осуществляется очень просто с помощью голограммы, описываемой выражением (4). При этом не требуются ни линзы, ни шпирен-фильтры, ни нож Фуко. Достаточно только осветить голограмму пучком света с плоским волновым фронтом, как показано на рис. 10. Плоская волна при прохождении через фотопластинку умножается на величину, соответствующую пропусканию  $T(x)$ . При этом на выходе пластинки возникнут четыре составляющие, соответствующие членам уравнения (4). Первый член является постоянной величиной, и поэтому он не создает вариации, а просто равномерно ослабляет параллельный пучок. Второй член также ослабляет пучок, но неравномерно, что приводит к дифракции плоской волны.

Третий и четвертый члены уравнения голограммы (4) создают более сложную картину. Чтобы понять, каким образом они преобразуют падающую плоскую волну, рассмотрим действие призмы треугольного сечения. Известно, что такая призма сдвигает фазу падающего пучка на величину, пропорциональную толщине призмы в точке падения (рис. 11). При



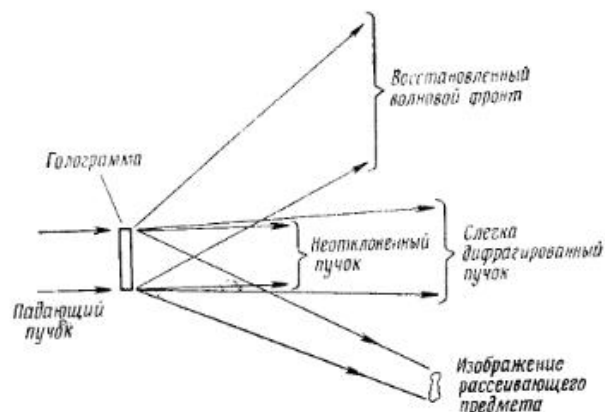


Рис. 10. Восстановление волнового фронта и образование изображения при освещении голограммы плоской волной.

положительном сдвиге фазы пучок отклоняется вверх, а при отрицательном — вниз. Поэтому действие третьего члена уравнения (4) можно описать как умножение плоской волны на амплитуду рассеянной волны и отклонение ее в положительном направлении. Аналогично четвертый член осуществляет умножение плоской волны на комплексно-сопряженную амплитуду рассеянной волны и ее отклонение в отрицательном направлении.

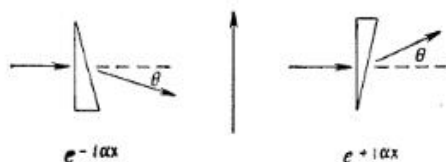


Рис. 11. Схема с призмой, поясняющая сдвиг фазы и поворот волнового фронта, обусловленный третьим и четвертым членами уравнения (4);  $\alpha l = 2\pi\theta$ .

Благодаря этим призматическим сдвигам фаз в третьем и четвертом членах уравнения (4) пучок отклоняется вверх и вниз соответственно на угол  $\theta$ , определяемый соотношением (1). Кроме того, третий член, описывающий пучок, отклоняемый вверх, содержит в качестве множителя амплитуду поля  $A(x)\exp[i\varphi(x)]$  и таким образом восстанавливает точную копию исходной рассеянной волны. Четвертый член, описывающий пучок, отклоняемый вниз, содержит в качестве множителя комплексно-сопряженную амплитуду и также восстанавливает копию исходной волны с тем только существенным различием, что волна эта

распространяется «назад» во времени, как бы возвращаясь к исходному трехмерному предмету.

Перейдем теперь к рассмотрению принципов, лежащих в основе этих процессов.

### 2.3. Физические принципы голографии

Для выяснения физических принципов голографии рассмотрим метод регистрации и восстановления волнового фронта для образцов исчезающе малых размеров. Первоначальный вариант этого метода применительно к точечным образцам был предло-

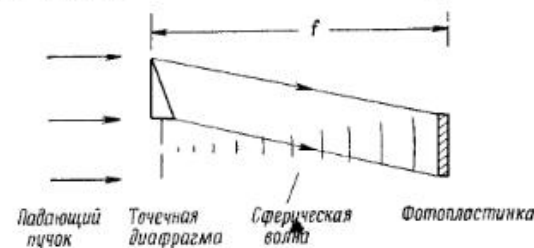


Рис. 12. Голограмма точечного предмета. Схема используется при обсуждении коэффициента увеличения, определяемого выражением (6).

жен Габором [2], а позднее был развит Роджерсом [13, 35—37] и Эль-Самом [14].

По аналогии с этими работами выберем в качестве образца непрозрачную пластинку с точечным отверстием. Если такое отверстие осветить плоской волной, то, согласно принципу Гюйгенса, оно будет действовать как источник сферической волны. На фотопластинку упадет волна с амплитудой

$$A_0 e^{-i\alpha x} + A \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda f} x^2\right], \quad (5)$$

где  $A$  — некоторая постоянная,  $\lambda$  — длина волны света,  $f$  — расстояние между точечным отверстием и фотографической пластинкой (рис. 12). Согласно уравнению (4), пропускание голограммы для точечного предмета равно

$$T(x) \sim 2A_0^2 - \gamma A^2 - \gamma A_0 A \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda f} x^2 + i\alpha x\right] - \gamma A_0 A \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda f} x^2 - i\alpha x\right]. \quad (6)$$

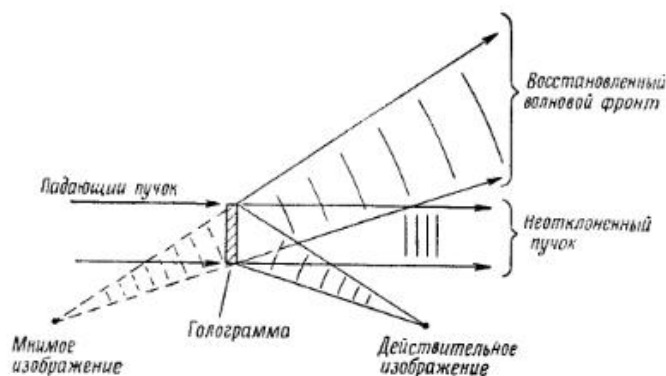


Рис. 13. Восстановление волнового фронта и образование изображения при освещении голограммы точечного предмета (см. рис. 12).

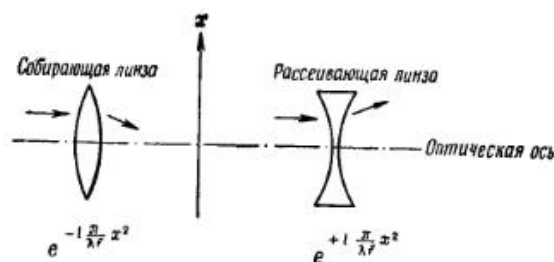


Рис. 14. Схема с линзами, поясняющая действие линейных и квадратичных членов в экспоненте выражения (6) (см. рис. 12).

Относительная простота исходного предмета и выражения (6) позволяет наглядно объяснить процесс восстановления. Если голограмму, описываемую выражением (6), поместить в параллельный пучок, то, как показано на рис. 13, возникнут три составляющие пучка. Первую составляющую образуют первый и второй члены выражения (6). Поскольку они постоянны, то справа от голограммы появится параллельный равномерно ослабленный пучок. Третий и четвертый члены выражения (6) имеют в показателе экспоненты линейные фазовые сдвиги, благодаря чему эти две составляющие отклоняются вверх и вниз в зависимости от знака показателя экспоненты.

Чтобы понять, к чему приводит квадратичный фазовый сдвиг  $\pm (\pi/\lambda f)x^2$ , напомним, что тонкая сферическая линза сдвигает фазу падающего пучка на величину, пропорциональную квадрату расстояния между осью и точкой падения. Собирающая линза создает отрицательный сдвиг фаз (рис. 14). Поэтому третий член

выражения (6) не только отклоняет пучок вверх, но и действует как рассеивающая линза. Падающая плоская волна повернет вверх и превратится в расходящуюся сферическую волну. Эта волна идентична волне, которая освещала голограмму при экспозиции. Аналогично четвертый член выражения (6) действует на плоский пучок не только как отклоняющая вниз призма, но и как собирающая линза. Повернутый вниз пучок превращается в сходящуюся сферическую волну. Эта волна сфокусируется в точку на расстоянии  $f$  от голограммы. Таким образом при освещении голограммы *плоской волной* мы получаем не только восстановленный исходный волновой фронт рассеянной волны, но также и сфокусированное изображение предмета, в данном случае — точечный источник. В разд. 2.4 рассматриваются система освещения предмета *точечным источником* и свойственная голографии возможность получения больших геометрических увеличений.

#### 2.4. Геометрическое увеличение

Голографические системы позволяют получать исключительно высокие коэффициенты увеличения. Основной прием — это использование в процессе восстановления излучения с длиной волны, большей, чем длина волны излучения, применяемого в процессе получения голограммы. Подсчитаем коэффициент увеличения. Пусть предмет имеет вид двух точечных отверстий в непрозрачной пластинке, отстоящих друг от друга на расстоянии  $2\delta$ . Согласно принципу Гюйгенса, каждое отверстие можно считать точечным сферическим излучателем. Тогда амплитуда волны на фотопластинке имеет вид

$$A_0 \exp(-iax) + A \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f}(x - \delta)^2\right] + A \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f}(x + \delta)^2\right]. \quad (7)$$

Согласно уравнению (4), пропускание соответствующей голограммы пропорционально следующему выражению:

$$\begin{aligned} T(x) \sim & 2A_0^2 - 2\gamma A^2 \left[ 1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda f} \delta x \right] - \\ & - \gamma A_0 A \left\{ \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f}(x - \delta)^2\right] + \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f}(x + \delta)^2\right] \right\} \exp(iax) - \\ & - \gamma A_0 A \left\{ \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f}(x - \delta)^2\right] + \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f}(x + \delta)^2\right] \right\} \exp(-iax). \end{aligned} \quad (8)$$

В этом месте мы отступим от описания обычного метода восстановления и рассмотрим схему, приведенную на рис. 15<sup>1)</sup>. Для освещения голограммы используется *точечный источник* излучения на длине волны  $\lambda'$ . Напомним, что при получении голограммы использовался плоский волновой фронт с длиной волны  $\lambda$ . Четвертый член уравнения (8) будет по-прежнему действовать как комбинация призмы и линзы (разд. 2.3), отклоняя

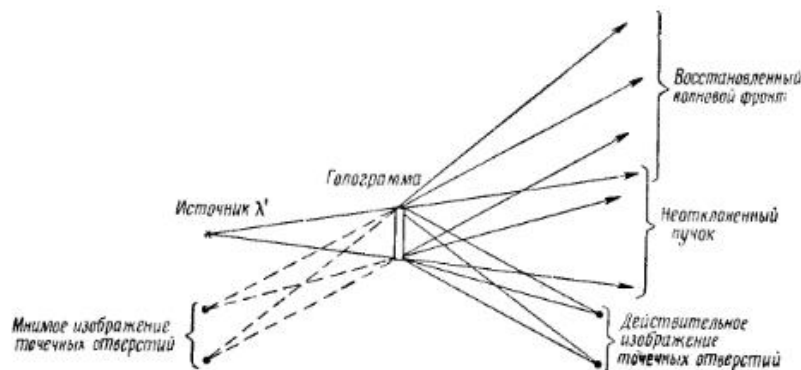


Рис. 15. Восстановление волнового фронта и образование изображения при освещении голограммы точечным источником.

Предмет состоит из двух точечных отверстий (см. также рис. 16).

излучение вниз и фокусируя его в точку. Однако вследствие перехода при восстановлении к другой длине волны фокусное расстояние  $f'$  линзы изменится в соответствии с формулой

$$\lambda' f' = \lambda f, \quad (9)$$

где  $f$  — начальное фокусное расстояние эквивалентной линзы. Расстояние  $q$  между голограммой и изображением связано с расстоянием  $p$  между источником и голограммой (рис. 16) классической формулой линзы

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda'}{\lambda f}. \quad (10)$$

Линейные размеры восстановленного изображения возрастут в  $M$  раз по сравнению с размерами предмета; при этом коэффициент линейного увеличения равен

$$M = \frac{2\Delta}{2\delta}. \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Подробное рассмотрение голографии Френеля, основанное на изложенных здесь общих принципах, см., например, в работах [38, 39].

Учитывая подобие треугольников на рис. 16, можно выразить  $M$  через известные размеры

$$M = \frac{2\Delta}{2\delta} = \frac{p+q}{p}. \quad (12)$$

(Призма повернет оба крайних луча на один и тот же угол  $\theta$ , поэтому подобие треугольников не нарушится.) Отсюда получаем формулу для коэффициента линейного увеличения

$$M = \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{q}{f}. \quad (13)$$

В этом выражении  $f$  — расстояние между исходным предметом и голограммой (рис. 12) в процессе ее получения в лучах света

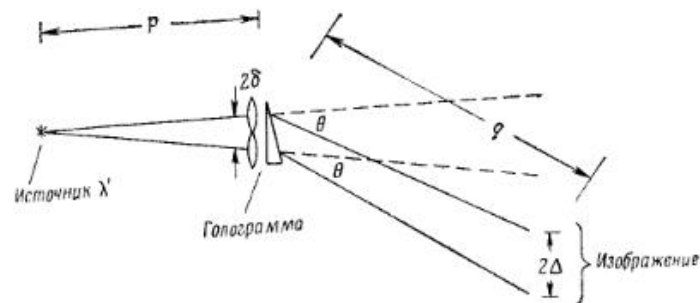


Рис. 16. Схема, поясняющая свойство голограммы увеличивать предмет. Голограмма и предмет те же, что и на рис. 15. Для ясности голограмма заменена эквивалентной системой, состоящей из призмы и двух линз. (Верхний и центральный пучки для наглядности опущены.)

с длиной волны  $\lambda$ ;  $q$  — расстояние между голограммой и плоскостью изображения (рис. 16), восстановленного светом на длине волны  $\lambda'$ . В случае рентгеновской микроскопии коэффициент увеличения  $M$ <sup>1)</sup> может превышать значение  $10^6$ .

<sup>1)</sup> Коэффициент увеличения в голографии Фурье (разд. 3) выражается аналогичной формулой. Пусть точечный предмет  $P$  находится на расстоянии  $\xi$  от источника в плоскости, нормальной к оси. Тогда на голограмме получится «решетка» с постоянной решетки  $a_p = \lambda/\xi$ . При восстановлении голограмма действует как линза с фокусным расстоянием  $f'$ , осуществляющая преобразование Фурье. «Решетка» создает точечное изображение  $P'$  на расстоянии  $\xi' = \lambda' f' / a_p = \xi \lambda' f' / \lambda f$  от оси. Таким образом, коэффициент увеличения равен  $\lambda' f' / \lambda f$ .

### 2.5. Разрешающая способность

Хорошо известно, что увеличение само по себе бесполезно, если оно не сопровождается высокой разрешающей способностью. Вопрос о разрешающей способности обычной голографии Френеля [1—5, 13, 14, 16, 17, 35—37, 40, 41] был подробно рассмотрен в работах Баеца [40, 42] и Эль-Сама [14]. Они показали, что основную роль здесь играют два фактора: разрешающая



Рис. 17. Ограниченная разрешающая способность обычной голографии Френеля, обусловленная зернистостью фотоэмульсии.

способность фотопластинки, используемой в качестве голограммы, и диаметр источника, применяемого при получении голограммы. В принципе голография основана на законах интерферометрии. Не удивительно поэтому, что факторы, ограничивающие разрешающую способность, одни и те же и в голографии, и в интерферометрии (об интерферометрии см. [15] и рис. 6).

Так как голограмма — это по существу интерферограмма, то ее способность к регистрации информации определяется, помимо монохроматичности источника, следующими двумя параметрами: 1) углом между опорным и рассеянным пучками; 2) размерами и формой апертуры источника, с помощью которого формируется плоский или расходящийся опорный пучок. В разд. 3 описаны методы, применение которых способствует улучшению этих параметров. Здесь же мы пока остановимся более подробно на классических ограничениях разрешающей способности [40, 42, 43], свойственных голографии Френеля.

В чем причина этих ограничений разрешающей способности проективной голографии? Очевидно, в том, что доступные фотоэмульсии и источники света тех размеров, которыми мы располагаем, не позволяют зарегистрировать слишком частые интерференционные полосы. Например (рис. 17), если имеется эмульсия с разрешением 0,5 мкм, то с ее помощью можно различить два точечных предмета, отстоящих друг от друга на расстоянии не меньше чем на 10 000 Å, даже в том случае, если использовать рентгеновское излучение на длине волны 1 Å. При этом такое разрешение достижимо лишь в оптимальных условиях, когда предмет освещается плоской волной, и можно зарегистрировать интерференционные полосы шириной 0,5 мкм.

Проведем строгий расчет предельной разрешающей способности голографии Френеля. Изготовим голограмму одного точечного образца, используя плоский опорный пучок. Пусть  $I(x)$  — интенсивность, регистрируемая фотопластинкой:

$$I(x) = A_0^2 + A^2 + 2A_0A \cos\left(\alpha x + \frac{\pi}{\lambda f} x^2\right). \quad (14)$$

Пространственная частота  $\nu(x)$  вариаций интересующего нас третьего члена зависит от координаты  $x$ , поскольку по определению

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \left(\alpha x + \frac{\pi}{\lambda f} x^2\right) = \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{x}{\lambda f}. \quad (15)$$

Таким образом, если разрешающая способность эмульсии равна  $N$  линиям на единицу длины, то фотопластинка регистрирует лишь пространственные частоты

$$|\nu(x)| = \left| \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{x}{\lambda f} \right| \leq N. \quad (16)$$

Иначе говоря, картина вариаций будет зафиксирована только в том случае, если  $x$  попадает в интервал

$$-N_0 - \frac{\alpha}{2\pi} \leq \frac{x}{\lambda f} \leq N_0 - \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (17)$$

где размер  $2x_{\text{макс}}$  этого интервала равен размеру голограммы в направлении  $x$ . Отсюда имеем

$$2x_{\text{макс}} = 2N\lambda f. \quad (18)$$

Физически это эквивалентно тому, что собирающая линза (рис. 13), фокусирующая плоскую волну, имеет ограниченные размеры  $2x_{\text{макс}}$ . С другой стороны, из классической теории дифракции [уравнение (8) гл. 5] следует, что при освещении линзы

размером  $2x_{\text{макс}}$  плоской волной предел разрешающей способности по Релею равен

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2x_{\text{макс}}} f. \quad (19)$$

Сравнивая выражения (18) и (19), получаем выражение для классического предела разрешающей способности голографии Френеля

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2N}. \quad (20)$$

Это согласуется с качественными оценками, полученными с помощью рис. 17.

Вследствие приближенного характера формулы (20) она остается справедливой также и для внеосевой сферической опорной волны. Если диаметр источника имеет размеры, равные предельному разрешению эмульсии, т. е.  $1/N$ , что типично для существующих эмульсий и точечных источников (в виде отверстий), то формула (20) также остается верной. Более подробно влияние размеров источника на процессы регистрации и восстановления изображений рассматривается в разд. 4. Там будет показано, с помощью какого метода можно скомпенсировать потери разрешения, обусловленные протяженностью источника, если его размеры велики по сравнению с желаемым разрешением.

Таким образом, предельное разрешение голографии Френеля приближенно равно удвоенному разрешению регистрирующей среды. У лучших фотоэмульсий, например у спектроскопических пластинок 649 F, выпускаемых фирмой «Кодак», разрешение составляет около 0,5 мкм. Поэтому независимо от длины волны света, используемого при регистрации, в голографии Френеля невозможно добиться разрешения, лучшего чем 1 мкм. В 1965 г. нами [29] был предложен метод безлинзовой голографии Фурье. Дальнейшие исследования [27—31] показали, что с ее помощью можно значительно повысить реальное разрешение. Достижению этой же цели способствует также предложенный нами в 1965 г. [31] метод компенсации потерь разрешения для протяженных источников с помощью схемы корреляционного восстановления.

### 3. Голография Фурье с высоким разрешением

#### 3.1. Введение

Чтобы получить в голографии высокую разрешающую способность, необходимо, чтобы оптическая система пропускала дифракционную картину в широком интервале углов [см. критерии

Аббе и Релея, уравнения (7) и (8) гл. 5]. Однако, кроме этого, необходимо, чтобы свет, рассеянный предметом на максимально большие углы по отношению к направлению освещения, можно было зарегистрировать путем наблюдения картины интерференции между рассеянной волной и опорным пучком. Согласно критерию разрешения Аббе, для пространственного разрешения деталей предмета величиной  $a$  порядка размеров длины волны  $\lambda$  требуется зарегистрировать дифракционную картину в пределах

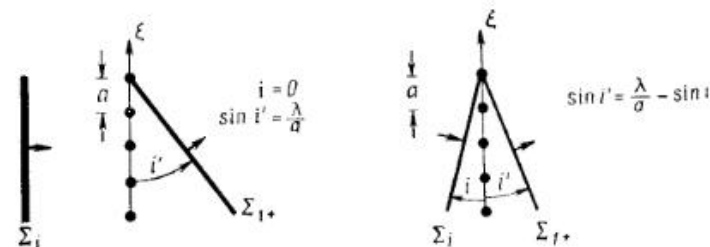


Рис. 18. Схема, поясняющая дифракцию на решетке.

углов  $i' = \arcsin(\lambda/a) = \pi/2$  (на рис. 18 показан простейший предмет — дифракционная решетка). Исходя из этих же соображений, можно найти размер  $2x_{\text{макс}}$  голограммы, требуемый для получения заданного разрешения.

Весьма существенным развитием основ голографии явились работы Строука и Фальконера [27] и Строука [29], в которых впервые была предложена голография Фурье. Оказалось, что голография Фурье дает значительный выигрыш в разрешающей способности по сравнению с голографией Френеля. В голографии Фурье восстановленные действительное и мнимое изображения образуются на  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно. Чтобы восстановить эти изображения, достаточно осветить голограмму Фурье плоской монохроматической волной, а затем сфокусировать ее с помощью линзы (рис. 19). В результате второго преобразования Фурье в фокальной плоскости линзы появится изображение.

Последующий анализ основан на предположении, что как для формирования эталонного пучка при получении голограммы, так и при восстановлении изображения используются точечные источники. Это предположение вполне оправдано тем, что эффекты, связанные с использованием протяженного источника, можно скомпенсировать [31], как будет показано в разд. 4.

Некоторое время считалось, что процесс преобразования Фурье, в частности получение голограммы Фурье, обязательно требует линз или других фокусирующих систем. Если нам задана некоторая фокусирующая система, то распределение

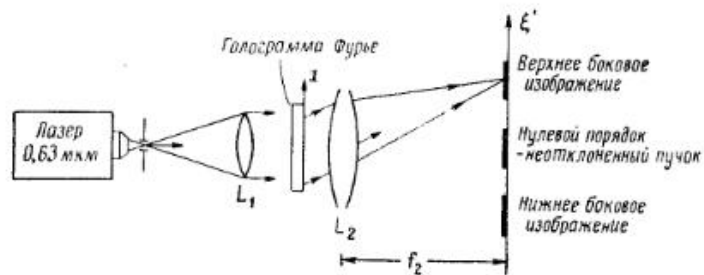


Рис. 19. Восстановление изображений с помощью голограммы Фурье. При освещении голограммы производится преобразование Фурье [11].

комплексной амплитуды (например, поля  $E$ ) в плоскости зрачка линзы и такое же распределение в фокальной плоскости связаны преобразованием Фурье (рис. 20, а). Поскольку в рентгеновском диапазоне фокусирующие линзы и зеркала отсутствуют, то все преимущества голографии здесь фактически сводятся на нет.

Вторым существенным этапом в развитии основ голографии явилось изобретение безлинзовой голографии Фурье [29]. Автор показал, что голограмму Фурье можно получить без каких-либо фокусирующих линз или зеркал (рис. 20, б). Эксперименты

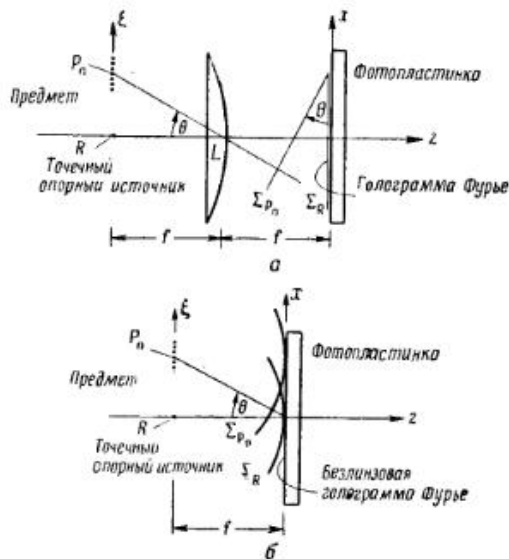


Рис. 20.

а — получение голограммы Фурье; б — получение голограммы Фурье без помощи линзы [29].

Строука и его сотрудников (рис. 21) подтвердили, что с помощью безлинзовой голографии Фурье можно повысить разрешение, в частности, для трехмерных предметов.

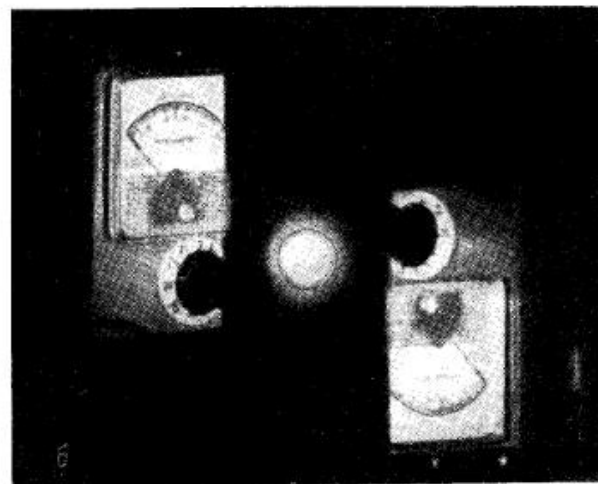
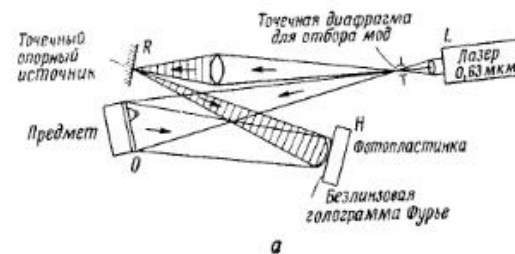


Рис. 21.

а — регистрация трехмерных предметов с помощью голограммы Фурье без использования линз [30]; б — изображение, восстановленное по схеме рис. 19 с помощью безлинзовой голограммы Фурье.

Высоких разрешений одинаково успешно можно достичь с помощью голографии Фурье, как линзовой, так и безлинзовой. Линзовые варианты используются иногда для задач фильтрации и синтеза изображений. Особенно удобна голография Фурье при регистрации волн, распространяющихся под большими углами к оси и передающих наиболее высокие пространственные

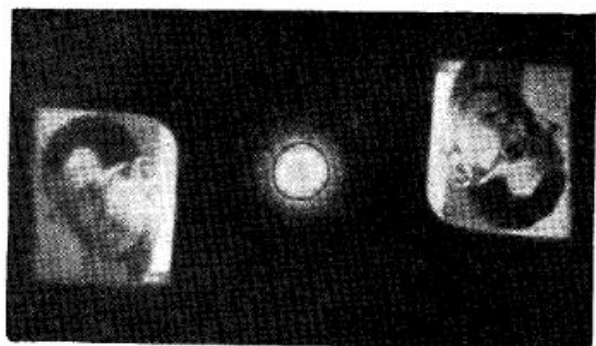


Рис. 22. Изображение, восстановленное с голограммы Фурье по схеме рис. 20, а.

Голограмма изготовлена на пленке Polaroid P/N.

частоты. На рис. 22 приведена фотография изображений, восстановленных с помощью голограммы Фурье, изготовленной на пленке Polaroid P/N.

### 3.2. Физические основы безлинзовой голографии Фурье высокого разрешения

Ранее уже отмечалось, что голограмма — это по существу интерферограмма, образующаяся при интерференции поля, рассеянного от предмета, с опорной волной или когерентным фоном. Обычно опорная волна имеет протяженный фронт плоской или сферической формы в зависимости от схемы используемого устройства.

Для удобства рассуждений часто полагают, что рассеивающий предмет — это либо обобщенная двумерная или трехмерная решетка, либо система рассеивающих точечных диполей. В голографии также полагают, что различные точки предмета рассеивают свет когерентно; при этом подразумевается временная когерентность. Каждая точка предмета считается стационарным излучателем той же частоты, что и частота опорной волны. Суперпозиция опорной волны и волн, рассеянных предметом, создает на голограмме интерференционную картину. Ее комплексную амплитуду можно рассчитать двумя методами: 1) найти сумму опорного и рассеянного полей в плоскости голограммы; 2) просуммировать картины интерференции опорной волны с одной из многочисленных составляющих рассеянного поля. Ниже мы будем использовать второй метод рассмотрения.

В обычной проективной голографии Френеля процесс регистрации осуществляется следующим образом. Сферические волны, рассеянные различными точками предмета, интерферируют с плоской или сферической опорной волной, причем ее кривизна отличается от средней кривизны волн, идущих от предмета. Для каждой точки предмета возникает своя система колец — зонных картин Френеля. Наличие зонных картин Френеля, несущих информацию о рассеянной волне, рассматривалось как обязательное условие достоверной регистрации фаз волны, рассеянной предметом.

Значительный прогресс в голографии был достигнут в работах [27, 29], в которых впервые было доказано, что фазовую информацию о рассеянном поле можно зарегистрировать без помощи зонных картин Френеля. При этом информация о фазах регистрируется с помощью голограммы Фурье, которая представляет собой картину интерференции между сферическими волнами, рассеянными отдельными точками предмета, и расходящейся опорной волной той же кривизны. Последнее достигается тем, что центр опорного пучка располагается вблизи предмета.

То, что фазовую информацию можно зарегистрировать без помощи зонных картин Френеля, становится сразу же очевидным, если вспомнить об аналогии, которая имеется между голограммой и интерферограммой. Напомним здесь, что различают две группы интерферограмм:

1) интерферограммы с локализованными полосами, как, например, кольца Ньютона или интерферограммы с зонами Френеля, а также прямые полосы, возникающие при интерференции двух плоских волн;

2) интерферограммы с нелокализованными полосами или полосами на бесконечности; такие полосы возникают при интерференции между двумя плоскими волнами или же между двумя сферическими волнами одинаковой кривизны, распространяющимися в одном и том же направлении. Если две волны имеют одинаковую кривизну и одно и то же направление распространения, то фазовая информация входит в интерферограмму в форме локальных изменений интенсивности на волновом фронте без образования локализованных интерференционных полос.

Несмотря на то что мы недавно доказали [24], что центр опорной волны можно расположить на оси предмета, все же для лучшего разделения двух изображений (одного на  $+\infty$ , другого на  $-\infty$ ) предпочтительно использовать наиболее распространенные сейчас методы голографии, а именно обычную схему сдвига центра предмета относительно опорного пучка. Следует отметить, что эксцентрическое расположение центра предмета и

точечного опорного источника (рис. 20, б) естественным образом вытекает из схемы получения безлинзовой голограммы Фурье. Благодаря этому пространственное разделение двух симметричных изображений в голографии Фурье получается автоматически при восстановлении.

### 3.3. Теория безлинзовой голографии Фурье

Пусть  $T(\xi)$  — комплексная амплитуда рассеянного предметом электрического поля в плоскости предмета. Пусть далее

$$A_r = A_0 \exp\left(i \frac{k}{2f} x^2\right) \quad (21)$$

есть комплексная амплитуда сферической опорной волны, имеющей центр в точке  $\xi=0$  — в плоскости фотопластинки (рис. 23).

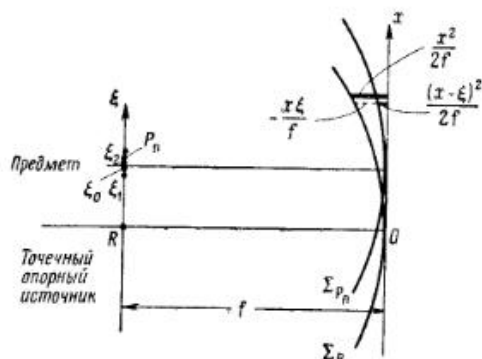


Рис. 23. Схема, поясняющая параметры, используемые при описании получения голограммы Фурье.

Каждая точка предмета образует сферическую волну, амплитуда которой в плоскости фотопластинки выражается следующим образом:

$$T(\xi) \exp\left[i \frac{k}{2f} (x - \xi)^2\right] d\xi. \quad (22)$$

Суммарная амплитуда рассеянного поля в плоскости фотопластинки равна

$$A_s(x) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\xi) \exp\left[i \frac{k}{2f} (x - \xi)^2\right] d\xi. \quad (23)$$

Если предмет достаточно мал, а голограмма имеет размеры, достаточно большие, чтобы обеспечить высокое разрешение, то

членом  $\xi^2$  можно пренебречь<sup>1)</sup> и считать

$$(x - \xi)^2 \approx x^2 - 2x\xi. \quad (24)$$

Тогда амплитуду поля (23) с учетом соотношения (24) можно выразить так:

$$A_s \approx \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\xi) \exp\left[i \frac{k}{2f} x^2\right] \exp\left[-i \frac{k}{f} x\xi\right] d\xi. \quad (25)$$

На голограмме будет зарегистрирована интенсивность

$$I(x) = (A_r + A_s)(A_r + A_s)^*, \quad (26)$$

т. е.

$$I(x) = |A_s|^2 + |A_r|^2 + A_s^* A_r + A_s A_r^*. \quad (27)$$

Из соотношений (21), (25) и (27) получаем распределение интенсивности на голограмме

$$I(x) = |A_0|^2 + |A_s|^2 + A_0 \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\xi) \exp\left(-i \frac{k}{f} x\xi\right) d\xi + A_0^* \int_{\xi_1}^{\xi_2} T^*(\xi) \exp\left(+i \frac{k}{f} x\xi\right) d\xi. \quad (28)$$

Мы видим, что распределение интенсивности на голограмме определяется фурье-образами комплексной амплитуды  $T(\xi)$  и ее комплексно-сопряженной функции  $T^*(\xi)$ , заданными в плоскости предмета<sup>2)</sup>.

Ранее мы показали [уравнение (4)], что если голограмму осветить плоской волной, то поле, образующееся позади голограммы, имеет вид

$$H(x) \approx [I(x)]^{-\nu/2} \quad (29)$$

<sup>1)</sup> Множитель  $\exp[i(k/2f)x^2]$  действует на восстановленное изображение как тонкая рассеивающая линза (рис. 14). Компенсация этого эффекта предложена в работе [27].

<sup>2)</sup> Фактически здесь осуществляется обратное преобразование Фурье, и интегралы в уравнении (28) следует рассматривать как инверсные фурье-образы, так как в экспоненте стоит знак «минус». Именно это обстоятельство оправдывает выбор прописной буквы  $T(\xi)$  для описания поля в плоскости  $\xi$ , так как, согласно общим правилам [уравнения (2) и (5) гл. 7], переход от функции  $f(x)$ , заданной в координатном пространстве, к функции  $F(u)$ , заданной в пространстве «частот» или координатах Фурье, требует наличия в экспоненте знака «плюс». — Прим. ред.



при условии, что фотоэмульсия работает на прямолинейном участке характеристической кривой. При этом коэффициент контрастности  $\gamma$  имеет следующий геометрический смысл:

$$\gamma = \operatorname{tg} \varphi, \quad (30)$$

где  $\varphi$  — угол наклона прямолинейного участка характеристической кривой, изображенной на графике в двойном логарифмическом масштабе. Если, как обычно, интенсивность опорного пучка в плоскости голограммы намного больше интенсивности рассеянного поля, то, разлагая выражение (29) в ряд, определим с учетом (28) пропускание голограммы

$$H(x) \approx A_0^{-\gamma-2} \left\{ A_0^2 - \frac{\gamma}{2} |A_s|^2 - \frac{\gamma}{2} A_0 \int_{\xi_1}^{\xi_2} T(\xi) \exp\left(-i \frac{k}{f} x \xi\right) d\xi - \frac{\gamma}{2} A_0 \int_{\xi_1}^{\xi_2} T^*(\xi) \exp\left(i \frac{k}{f} x \xi\right) d\xi \right\}. \quad (31)$$

Последнее уравнение можно назвать уравнением пропускания голограммы, освещаемой плоской волной (рис. 24). Первые два члена в фигурных скобках являются постоянными. В двух интегралах можно узнать фурье-образы<sup>1)</sup> комплексной амплитуды  $T(\xi)$ , описывающей исходный предмет, и ее комплексно-сопряженной функции  $T^*(\xi)$ .

Для того чтобы восстановить изображения предметов  $T(\xi)$  и  $T^*(\xi)$ , необходимо осуществить преобразование Фурье над функцией  $H(x)$ . Для этого голограмма освещается плоской волной  $\Sigma_i$  и изображение, образующееся в фокальной плоскости, фотографируется с помощью линзы  $L$  (рис. 24). Поскольку ис-

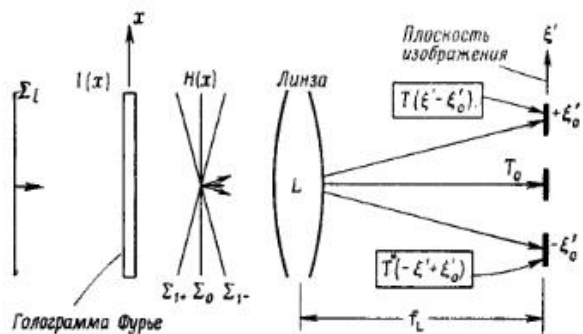


Рис. 24. Схема восстановления путем преобразования Фурье, выполняемого над голограммой Фурье  $H(x)$ .

<sup>1)</sup> См. предыдущее примечание.

ходный предмет располагается на расстоянии  $\xi_0$  от оси [чтобы осуществить преобразование Фурье в соответствии с формулами (25) и (28)], то два восстановленных изображения, не перекрывающая друг друга, будут находиться на расстояниях  $+\xi'_0$  и  $-\xi'_0$  от оси, т. е. с тем же эксцентриситетом, что и в исходном расположении. Чтобы учесть эксцентриситет  $\xi_0$ , введем

$$T(\xi - \xi_0). \quad (32)$$

Из теорий преобразований Фурье [выражение (9) гл. 7] известно, что если

$$T(\xi) \xrightarrow{\frac{\delta^{-1}}{\delta}} t(x), \quad (33)$$

то

$$T(\xi - \xi_0) \xrightarrow{\delta} t(x) \exp(2\pi i \xi_0 x). \quad (34)$$

Поскольку, согласно выражению (16) гл. 7,

$$T^*(\xi) \xrightarrow{\delta} t^*(-x), \quad (35)$$

то аналогично

$$T^*(\xi - \xi_0) \xrightarrow{\delta} t^*(-x) \exp(2\pi i \xi_0 x). \quad (36)$$

Наконец, учитывая знаки в экспонентах  $\exp(-ikh\xi/f)$  и  $\exp(+ikh\xi/f)$  в уравнении (31) и используя соотношения (34) и (36), находим, что преобразование уравнения (31) по Фурье дает два изображения, которые описываются амплитудами

$$T(\xi' - \xi'_0), T^*(-\xi' + \xi'_0) \quad (37)$$

соответственно. Эти изображения расположены симметрично относительно точки  $\xi = 0$ .

#### 3.4. Сопоставление разрешающих способностей голографии Фурье и голографии Френеля

Голография Фурье, особенно ее безлинзовый вариант, вызывает к себе больший интерес, так как она дает высокое пространственное разрешение по предмету, особенно при захвате света, дифрагированного под большими углами.

Рассмотрим в качестве предмета двумерную дифракционную решетку, характеризуемую постоянной решетки  $a$ . Углы падения  $i$  и дифракции  $i'$  связаны уравнением решетки [выражение (1) гл. 1].

$$\sin i + \sin i' = \frac{m\lambda}{a}. \quad (38)$$

Если излучение падает нормально к поверхности решетки ( $i=0$ ), то

$$i' = \arcsin \frac{\lambda}{a}. \quad (39)$$

Отсюда видно, что если разрешение достигает величины порядка длины волны  $\lambda$ , то угол дифракции составляет примерно  $\pi/2$ .

Если дифракция происходит под большими углами, то голограмма Френеля уже больше не описывается приближенными выражениями (24). Используя схему на рис. 25, можно показать, что оптическая разность хода равна

$$\Delta = f(1 - \cos i'). \quad (40)$$

В безлинзовой голографии Фурье оптическая разность хода определяется совсем другим выражением (рис. 26)

$$\Delta_{\text{Ф}} = \xi_0 \sin i'. \quad (41)$$

Это выражение справедливо для любых углов, если только голограмма Фурье регистрируется на *сферической фотопластинке*. Для малых углов пластинка может оставаться плоской (рис. 27).

Сравнивая выражения (40) и (41), можно сделать вывод, что коэффициент «выигрыша» в разрешающей способности составит

$$G = \frac{\Delta}{\Delta_{\text{Ф}}} = \frac{f}{\xi_0} \left[ \frac{1}{\sin i'} - \frac{1}{\operatorname{tg} i'} \right]. \quad (42)$$

Мы видим, что преимущества голографии Фурье по разрешающей способности по сравнению с голографией Френеля особенно заметны при больших углах дифракции и при малых расстояниях  $\xi_0$ . Если  $f/\xi_0 = 1000$  (например,  $f = 100$  мм и  $\xi_0 = 0,1$  мм), то коэффициент «выигрыша»  $G$  в этом случае равен

$i'$ , градус	$G$ для $f/\xi_0 = 1000$
10	100
30	300
45	400
64	650
80	980
90	1000

Из таблицы видно, что даже при углах дифракции  $i' = 10^\circ$  голография Фурье дает выигрыш в 100 раз по сравнению с голографией Френеля для типичных в рентгеновской микроскопии

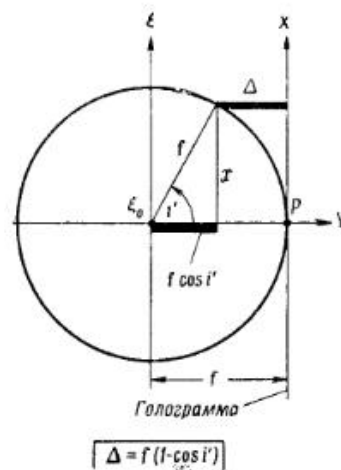


Рис. 25. Оптическая разность хода в голограмме Френеля.

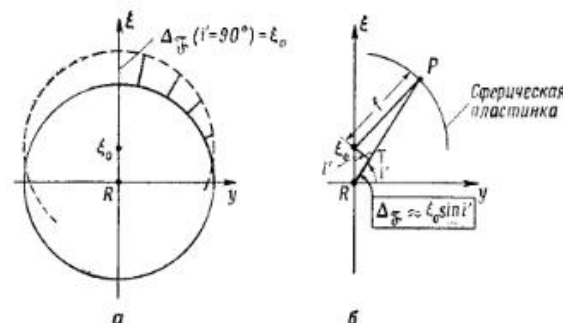


Рис. 26. Оптическая разность хода в безлинзовой голограмме Фурье на сферической фотопластинке [29].

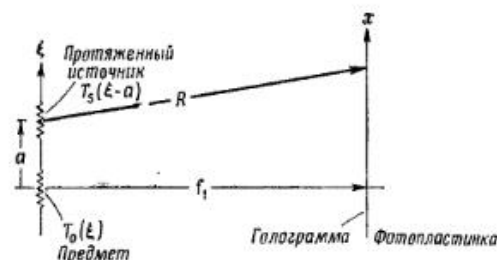


Рис. 27. Голография с использованием *протяженного* источника [31]. При использовании протяженных источников предмет и источник эквивалентны. В одинаковой степени они кодируют друг друга при регистрации и декодируют при восстановлении (см. рис. 28 и 29).

значений  $f/\xi_0$ , а фактически этот выигрыш в разрешении может достигать трех порядков величины.

Приведем также таблицу значений параметра  $g$ , т. е. величины, которая в уравнении (42) заключена в квадратные скобки

$i'$ , градус	$g$
10	0,1
30	0,3
45	0,4
64	0,65
80	0,98
90	1,00

С величиной  $G$  она связана соотношением

$$G = g \frac{f}{\xi_0}. \quad (43)$$

Даже в микроскопии видимого или ультрафиолетового диапазона голография Фурье дает ощутимые преимущества, например при  $f/\xi_0 = 25$  и  $i' = 45^\circ$  выигрыш составляет 10, а при  $f/\xi_0 = 50$  и  $i' = 64^\circ$  выигрыш в разрешении превышает 30.

#### 4. Компенсация протяженности источника в голографии

Если при регистрации или восстановлении используются протяженные источники, то разрешение по изображению уменьшается, в результате чего изображение точечного предмета размывается подобно тому, как это описано в гл. 3. Согласно выражению (17) гл. 3, потери разрешения вызываются тем, что при получении голограммы осуществляется интегральная операция свертки предмета с источником. Изображение точечного предмета размывается до размеров источника; этот процесс более подробно будет рассмотрен ниже. До недавнего времени считалось, что использование протяженных источников вместо точечных приводит к безвозвратной потере разрешения. В рентгеновской голографии такие потери были бы особенно велики, так как источники размером менее 100 Å отсутствуют, а предельное разрешение определяется длиной волны, равной 1 Å.

Весьма важный прогресс в голографии и вообще в системах образования изображений при когерентном освещении был до-

стигнут в работах Строука и его сотрудников [31]. Авторы этих работ указали на парадоксальную возможность «возрождения» разрешающей способности при восстановлении. Было доказано, что для этого голограмму, полученную с помощью протяженного источника, необходимо осветить также протяженным источником. Структура последнего должна быть такой, чтобы функция корреляции предмета и источника имела вид узкого пика, ширина которого равна требуемому разрешению. Такими свойствами обладают источники с широким спектром пространственных частот, например зонные пластинки Френеля или другие конфигурации, которые можно получить с помощью интерференции.

#### 4.1. Краткая теория

Чтобы проиллюстрировать этот важнейший вывод, рассмотрим сначала теорию метода в том кратком виде, как она была изложена в работе [31].

Рассмотрим в качестве модели простейшую схему получения одномерных голограмм Фурье (рис. 23). В плоскости, где находится предмет, описываемый комплексной амплитудой  $T_0(\xi - a)$ , располагается точечный источник с амплитудой  $T_s(\xi) = \delta(\xi)$ . Однако в отличие от прежней схемы рассмотрим теперь протяженный источник пространственно-когерентного света с комплексной амплитудой

$$T_s(\xi - a), \quad (44)$$

где  $a$  — эксцентриситет или смещение источника относительно «центра тяжести» предмета, который описывается комплексной амплитудой

$$T_0(\xi). \quad (45)$$

Теми же шагами, что и при выводе соотношения (28), получим распределение интенсивности по голограмме

$$I(x) = [t_0 t_0^* + t_s t_s^*] + t_0 t_s^* \exp(2\pi i a x) + t_0^* t_s \exp(-2\pi i a x), \quad (46)$$

где  $t_0$  и  $t_s$  — фурье-образы предмета  $T_0$  и источника  $T_s$  соответственно [соотношение (33)].

Если теперь голограмму осветить *точечным источником*, как это делается в обычной схеме голографии Фурье (разд. 3 настоящей главы), то возникнут два внеосевых изображения, соответствующих второму и третьему членам уравнения (46). Чтобы найти амплитуду верхнего и нижнего изображений, необходимо найти фурье-образ комплексного амплитудного пропускания

(47), используя для этого соотношения (57) и (9) гл. 7. Тогда второй и третий члены уравнения (46) примут вид

$$(T_0 * T_s^*)_{\xi-a}, \quad (47)$$

и

$$(T_0^* * T_s)_{\xi+a}, \quad (48)$$

где символ  $*$  означает операцию корреляции [(52) гл. 7]. Так как коэффициент увеличения принят равным единице, то в качестве координаты изображения можно взять  $\xi$ . Очевидно, изображения будут размыты в результате их корреляции с протяженным источником  $T_s$ .

Осветим теперь голограмму вместо точечного источника некоторым протяженным источником  $T_s'$ , который может и не совпадать с  $T_s$ . Если фурье-образ  $T_s'$  равен  $t_s'$ , то комплексное амплитудное пропускание голограммы для второго члена уравнения (46) имеет вид

$$t_s' [t_0^* \exp(2\pi i a x)] = [t_0 \exp(2\pi i a x)] (t_s' t_s^*). \quad (49)$$

Фурье-образ этого выражения с учетом соотношений (34а), (57) и (9) гл. 7 описывает верхнее внеосевое изображение

$$[T_0 \otimes (T_s' * T_s^*)]_{\xi-a}, \quad (50)$$

где символ  $\otimes$  означает операцию свертки [соотношение (22) гл. 7].

Если корреляция

$$(T_s' * T_s^*) = \delta$$

равна дельта-функции, то мы получим

$$(T_0 \otimes \delta)_{\xi-a} = (T_0)_{\xi-a}. \quad (51)$$

Это уравнение гласит, что верхнее восстановленное изображение идентично самому предмету в том случае, если операция корреляции между амплитудой восстанавливающего источника и комплексно-сопряженной амплитудой  $T_s^*$  имеет вид  $\delta$ -функции. Иными словами, при соблюдении такого условия применение протяженных источников в голографии не приводит к потере разрешения.

Если, например,  $T_s' = T_s$ , то

$$(T_s' * T_s^*) \quad (52)$$

является функцией автокорреляции источника. Если  $T_s$  содержит широкий спектр пространственных частот, то величина, определяемая выражением (52), имеет вид функции с очень узким

центральным максимумом. Чтобы различные пространственные частоты были представлены достаточно полно, *требуется* протяженный источник определенных размеров. Но именно это и повышает светимость источника, столь желательную в голографических системах. В качестве примера такого класса протяженных источников мы уже упоминали зонные пластинки Френеля.

Эксперименты по компенсации разрешающей способности описанным здесь методом иллюстрируются рис. 28 и 29. Из рис. 28 видно, что даже весьма произвольный выбор источника

в виде  $\int d\xi$  дает возможность добиться достаточно полной компенсации размытия верхнего изображения. Однако размытие нижнего изображения остается некомпенсированным. Это вызвано тем, что описанное выше преобразование не годится для компенсации последнего члена уравнения (46): оно может скомпенсировать лишь второй член этого уравнения.

В самом деле, если голограмма, как и прежде, освещается источником  $T_s'$ , то в результате преобразования Фурье, выполняемого над последним членом уравнения (46), возникнет изображение, описанное выражением

$$[T_0^* * (T_s' \otimes T_s)]_{\xi+a}, \quad (53)$$

или, если  $T_s' = T_s$ ,

$$[T_0^* * (T_s \otimes T_s)]_{\xi+a}. \quad (54)$$

В общем случае свертка  $(T_s \otimes T_s)$  не равна дельта-функции, если только источник не обладает двукратной симметрией вращения относительно оптической оси (рис. 2 гл. 7). Таким образом, необходимо четко различать обычно полезную функцию автокорреляции источника  $(T_s * T_s)$  от не всегда полезной свертки  $(T_s \otimes T_s)$ . Это различие иллюстрирует рис. 28, а. Верхнее изображение получается при помощи операции корреляции, и поэтому его размытие удается компенсировать. Нижнему изображению соответствует операция свертки, и оно остается размытым.

В заключение отметим, что в ряде применений различие между свойствами операции свертки и корреляции может оказаться полезным. Например, комплексно-сопряженное изображение в первоначальной схеме микроскопа Габора можно подавить, если использовать источник такой формы, которая *не обладает* двукратной симметрией вращения!

Прежде чем сформулировать дальнейшие выводы, приведем более строгое доказательство результатов, кратко изложенных выше.

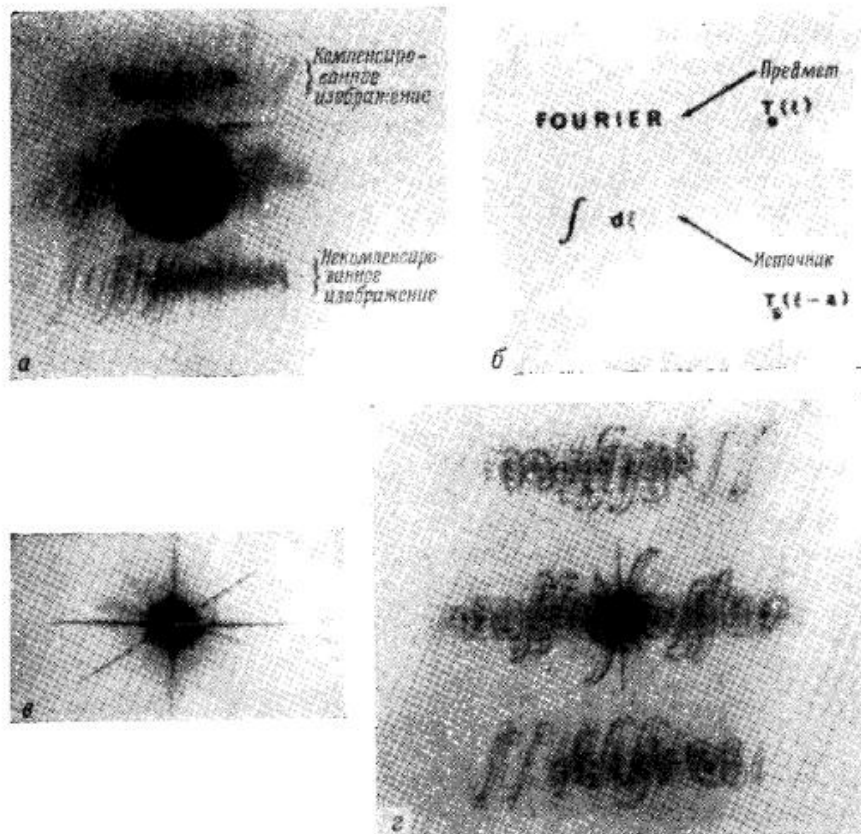


Рис. 28. Компенсация протяженности источника, позволяющая «возродить» разрешающую способность голограммы Фурье с помощью метода корреляционного восстановления [31].

*a* — компенсированное изображение, восстановленное с кодированной голограммы *в*. Голограмма освещалась тем же *протяженным* источником  $\int d\xi$  произвольной формы, что и при регистрации (см. *б*). Разрешение верхнего изображения восстановлено, поскольку здесь осуществляется корреляция функций источников. Нижнее изображение, наоборот, размыто, так как здесь происходит свертка функций источников (см. также рис. 2 гл. 7).

*б* — в качестве предмета выбрано слово **FOURIER**. Получение голограммы *в* осуществлено с помощью источника  $\int d\xi$ . Несмотря на произвольность выбора источника, удается апостериорно возродить разрешающую способность с помощью метода корреляционного восстановления. Имеется сходство с аподизацией (устранение побочных максимумов дифракционной картины); см., например, [44].

*в* — кодированная голограмма Фурье, при изготовлении которой вместо точечного источника был взят источник в форме  $\int d\xi$ .

*г* — некомпенсированное восстановленное изображение, получающееся при освещении голограммы *в* плоской волной по схеме рис. 19.

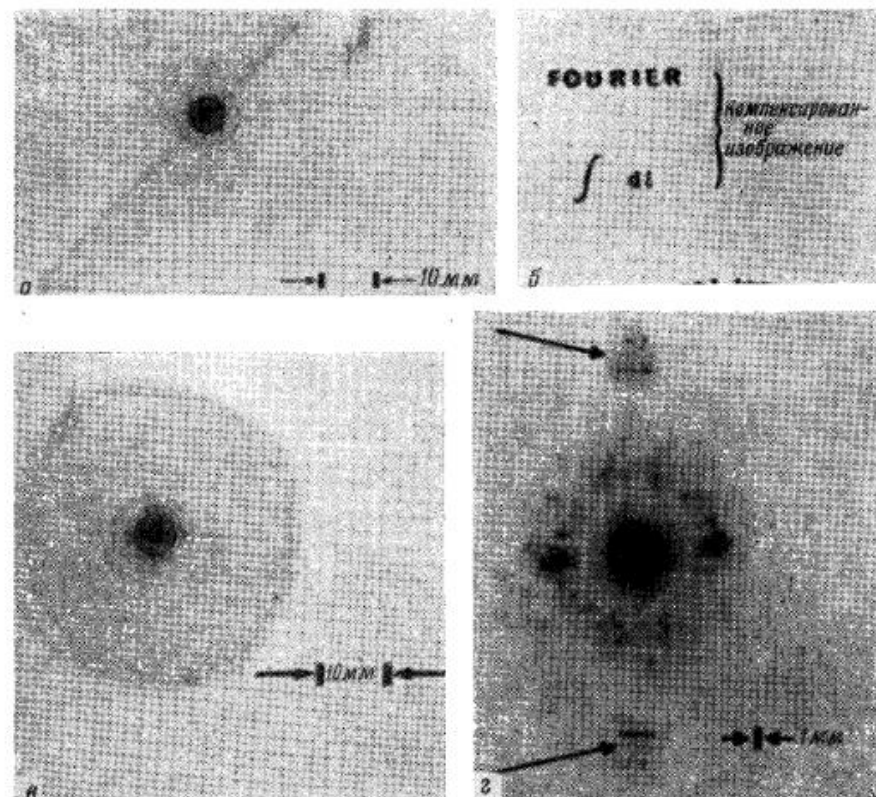


Рис. 29. Апостериорная компенсация протяженного источника, позволяющая «возродить» разрешающую способность голограммы [31].

*a* — голограмма Фурье с фокусным расстоянием  $f = 600$  м.м. В качестве источника при получении голограммы использовалась половина зонной пластинки Френеля диаметром 19 м.м. Зонная пластинка была изготовлена путем интерференции. Диагональ разделяет голограмму на две части. Одна из них была освещена сферической волной из действительного фокуса зонной пластинки, а другая — из мнимого. Можно брать и полные зонные пластинки (см. *в* и *г*). Возможны также и протяженные источники без специальной структуры, например две полулинзы.

*б* — компенсированное изображение, восстановленное путем преобразования Фурье. Голограмма *a* была освещена *тем же самым* протяженным источником, который использовался при ее получении.

*в* — кодированная голограмма Фурье. В качестве источника использовалась *полная* зонная пластинка диаметром 10 м.м (та же, что и в случае *a*).

*г* — компенсированные изображения, восстановленные с помощью голограммы *a*. Голограмма освещалась той же самой *полной* зонной пластинкой, что и при получении восстановленного изображения по схеме *б* [31].

4.2. Строгая теория<sup>1)</sup>

Рассмотрим чертеж, изображенный на рис. 27. Пусть функция пропускания предмета, как и раньше, равна

$$T_0(\xi), \quad (45)$$

а функция пропускания источника есть

$$T_s(\xi - a). \quad (44)$$

Излучение, прошедшее сквозь предмет, создаст на голограмме электрическое поле с амплитудой

$$E_0(x) = \int T_0(\xi) \exp(ik_1 R) d\xi, \quad (55)$$

где  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ , а  $R$  — расстояние от источника до точки  $x$  на голограмме. Разлагая бином в приближении  $f_1 \gg x \gg \xi$ , получаем

$$\begin{aligned} R &= [f_1^2 + (x - \xi)^2]^{1/2} = f_1 \left[ 1 + \frac{(x - \xi)^2}{f_1^2} \right]^{1/2} = \\ &= f_1 \left[ 1 + \frac{(x - \xi)^2}{2f_1^2} + \dots \right] = f_1 + \frac{x^2}{2f_1} - \frac{x\xi}{f_1}. \end{aligned} \quad (56)$$

Если  $t_0$  и  $t_s$  — фурье-образы  $T_0$  и  $T_s$  соответственно, то поля, создаваемые предметом и источником в плоскости голограммы, равны

$$E_0(x) = \exp\left\{ ik_1 \left[ f_1 + \frac{x^2}{2f_1} \right] \right\} t_0(x), \quad (57)$$

$$E_s(x) = \exp\left\{ ik_1 \left[ f_1 + \frac{x^2}{2f_1} \right] \right\} t_s(x) \exp\left[ -ik_1 \frac{xa}{f_1} \right]. \quad (58)$$

Фотопластинка регистрирует интенсивность

$$\begin{aligned} I(x) &= [E_0(x) + E_s(x)][E_0(x) + E_s(x)]^* = \\ &= t_0 t_0^* + t_s t_s^* + t_0 t_s^* \exp\left[ ik_1 \frac{xa}{f_1} \right] + t_0^* t_s \exp\left[ -ik_1 \frac{xa}{f_1} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Комплексная амплитуда  $h(I)$  поля, возникшего при освещении голограммы, зависит от интенсивности  $I(x)$ . Если голограмму осветить плоской волной, что соответствует применению точечного источника при восстановлении, то, разлагая  $h(I)$  в ряд около значения средней интенсивности  $I_0$ , получим

$$h(I) = h(I_0) + h'(I_0)(I - I_0) + \frac{h''(I_0)}{2!}(I - I_0)^2 + \dots \quad (60)$$

<sup>1)</sup> Разработана автором совместно с Рестриком и др. [31].

Подставляя выражение  $I(x)$  из (59) в (60), находим

$$\begin{aligned} h(I) &= h_0 + h_1 \exp\left[ -ik_1 \frac{xa}{f_1} \right] + h_{-1} \exp\left[ ik_1 \frac{xa}{f_1} \right] + \\ &+ h_2 \exp\left[ -2ik_1 \frac{xa}{f_1} \right] + \dots + h_n \exp\left[ -ink_1 \frac{xa}{f_1} \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Внеосевое изображение первого порядка описывается комплексным коэффициентом

$$h_1 = h'(I_0) t_s t_0^* + \frac{1}{2!} h''(I_0) 2t_s t_0^* (t_0 t_0^* + t_s t_s^* - I_0) + \dots \quad (62)$$

Выясним условия, при которых первый член соотношения (62) играет основную роль. Перепишем соотношение (59) в виде

$$(I - I_0) = A + \left[ B^* \exp\left( ik_1 \frac{xa}{f_1} \right) + B \exp\left( -ik_1 \frac{xa}{f_1} \right) \right], \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} A &= t_0 t_0^* + t_s t_s^* - I_0, \\ B &= t_s t_0^*. \end{aligned} \quad (64)$$

Произведя двукратное разложение трехчлена (63) по формуле бинома, получим

$$\begin{aligned} (I - I_0)^n &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-\beta)! \beta!} A^{n-\alpha} (B^*)^{\alpha-\beta} B^{\beta} \times \\ &\times \exp\left[ -ik_1 \frac{xa}{f_1} (2\beta - \alpha) \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Однако для первого члена внеосевого изображения

$$2\beta - \alpha = 1 \quad (66)$$

или

$$\alpha \text{ нечетно и } \beta = \frac{1+\alpha}{2}. \quad (67)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} [(I - I_0)^n]_{\text{н.ч. бок. полоса}} &\sim \sum_{\alpha \text{ нечетно}} \frac{n!}{(n-\alpha)! \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)! \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)!} \times \\ &\times A^{n-\alpha} (B^*)^{\frac{\alpha-1}{2}} B^{\frac{1+\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Рассмотрим теперь фурье-образ типичного слагаемого этой суммы

$$\mathfrak{F}\left[ A \left( A^{n-\alpha-1} (B^*)^{\frac{\alpha-1}{2}} B^{\frac{1+\alpha}{2}} \right) \right] = \mathfrak{F}[A] \otimes \mathfrak{F}\left[ A^{n-\alpha-1} (B^*)^{\frac{\alpha-1}{2}} B^{\frac{1+\alpha}{2}} \right]. \quad (69)$$

В соответствии с соотношением (64)

$$\mathfrak{F}[A] = \mathfrak{F}[t_0 t_0^* + t_s t_s^* - I_0]. \quad (70)$$

Теперь предположим, что

$$\mathfrak{F}[t_0 t_0^*] \approx \delta\text{-функция} \quad (71)$$

и

$$\mathfrak{F}[t_s t_s^*] \approx \delta\text{-функция}, \quad (72)$$

где

$$\mathfrak{F}[t_0 t_0^*] = T_0 * T_0^* \quad (73)$$

и

$$\mathfrak{F}[t_s t_s^*] = T_s * T_s^*. \quad (74)$$

Также замечаем, что

$$\mathfrak{F}[I_0] = \delta\text{-функция}, \quad (75)$$

так как  $I_0$  — постоянная величина.

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{F}[A] = \delta\text{-функция}. \quad (76)$$

Повторяя эту операцию  $n$  раз и учитывая, что

$$\delta \otimes W = W \quad (77)$$

для любого  $W$ , мы получаем вместо соотношения (69) следующее выражение:

$$(B^* B)^{\frac{\alpha-1}{2}} B. \quad (78)$$

Снижая далее степень  $B$  с помощью аналогичной процедуры, находим

$$\mathfrak{F}[B] = \mathfrak{F}[t_s t_0^*] = T_s * T_0^*. \quad (79)$$

Сравнивая соотношение (79) с первым членом выражения (62), мы видим, что они идентичны по форме. Отсюда мы можем сделать вывод, что члены более высокого порядка в выражении (62) пренебрежимо малы при условии, если равенство

$$\mathfrak{F}[t_0 t_0^*] = T_0 * T_0^* \approx \delta\text{-функция} \quad (71a)$$

выполняется с достаточно хорошим приближением.

Тогда выражение (62) принимает вид

$$h_1 \approx h'(I_0) t_s t_0^*. \quad (80)$$

В заключение необходимо получить восстановленное изображение. Для этого найдем фурье-образ выражения (80). С целью

общности предположим, что восстановление производится на другой волне света  $\lambda_2 = 2\pi/k_2$  и при другом фокусном расстоянии  $f_2$ .

Пусть фурье-образ  $h_1(x)$  равен

$$H_1(\xi') = \int h_1(x) \exp\left[-ik_2 \frac{x\xi'}{f_2}\right] dx, \quad (81)$$

где  $\xi'$  — координата в плоскости изображения, т. е. в фокальной плоскости линзы, осуществляющей преобразование Фурье и имеющей фокусное расстояние  $f_2$ .

Используя при интегрировании (81) промежуточные переменные и учитывая выражение (80), получаем

$$\begin{aligned} H_1(\xi') &= \int h'(I_0) t_s t_0^* \exp\left(-i \frac{k_1 x a}{f_1}\right) \exp\left(-i \frac{k_2 x a}{f_2}\right) dx = \\ &= h'(I_0) \int \int \int T_s(v) \exp\left(-i \frac{k_1 x v}{f_1}\right) T_0^*(\eta) \exp\left(i \frac{k_1 x \eta}{f_1}\right) \times \\ &\times \exp\left(-i \frac{k_1 x a}{f_1}\right) \exp\left(-i \frac{k_2 x \xi'}{f_2}\right) dv d\eta dx = \\ &= h'(I_0) \int T_s(v) \int T_0^*(\eta) \times \\ &\times \int \exp\left\{-i \left[\frac{k_1 v}{f_1} + \frac{k_2 a}{f_1} - \frac{k_1 \eta}{f_1} + \frac{k_2 \xi'}{f_2}\right] x\right\} dx d\eta dv = \\ &= h'(I_0) \int T_s(v) \int T_0^*(\eta) \delta\left[\frac{k_1 v}{f_1} + \frac{k_1 a}{f_1} - \frac{k_1 \eta}{f_1} + \frac{k_2 \xi'}{f_2}\right] d\eta dv = \\ &= h'(I_0) \int T_s(v) T_0^*\left(v + a + \frac{k_2 f_1}{k_1 f_2} \xi'\right) dv. \end{aligned} \quad (82)$$

Уравнение (82) гласит, что амплитуда бокового изображения равна функции корреляции  $T_s$  и  $T_0^*$ , имеющей эксцентриситет  $a$  относительно оптической оси и увеличенной в число раз, равное

$$\frac{f_2 k_1}{f_1 k_2} = \frac{f_2 \lambda_2}{f_1 \lambda_1}. \quad (83)$$

Это согласуется с выражением (48) и коэффициентом увеличения, определяемым выражением (13). Такое согласие позволяет прийти к выводу, что упрощающие предположения, сделанные в предыдущем разделе, вполне приемлемы. Таким образом, приближенная формула действительно дает правильные результаты, если справедливы условия (71) и (72).

#### 4.3. Некоторые выводы

Можно утверждать, что метод компенсации протяженного источника найдет применение в интерферометрии, а также в голографии. Можно также предполагать, что схема компенсации

может применяться при оптической фильтрации (гл. 5) либо в сочетании с методами фильтрации, либо даже вместо них.

Наконец, важно подчеркнуть тесную аналогию, имеющуюся между методом компенсации протяженного источника с помощью операций корреляции при когерентном освещении и методом, основанным на использовании согласованного фильтра при некогерентном освещении, например в спектроскопии (спектроскоп Жирара на решетках). Эта аналогия позволяет сделать вывод (который не кажется очевидным с первого взгляда), что метод компенсации протяженного источника — это, по существу, метод, основанный на использовании согласованного фильтра при когерентном освещении.

### 5. Требование к когерентности в голографии

Строго говоря, для получения голограммы при пространственно-когерентном освещении требуется выполнить только одно условие когерентности, которое состоит в том, чтобы излучение от каждой точки предмета могло интерферировать с излучением от любой точки источника<sup>1)</sup>.

Условие когерентности удовлетворяется при выполнении следующих требований. Во-первых, рассеивающий предмет  $T_0$  и источник  $T_s$  должны испускать свет одной и той же частоты. Во-вторых, необходимо, чтобы предмет и источник были стационарными<sup>2)</sup> в поле, которое падает на голограмму. Это условие не нарушается для диффузно рассеивающего предмета. Кроме того, и сам предмет можно освещать диффузным светом. При этом условие стационарности нарушено не будет. Наконец, в предыдущем разделе было доказано, что различие между предметом и источником фактически отсутствует. Таким образом, как источник, так и предмет могут образовывать диффузную волну при условии, конечно, что источник  $T_s'$ , используемый при восстановлении, дает кросс-корреляцию  $T_s * T_s'$ , которая равна дельта-функции, как это было показано в разд. 4.

Метод получения голограммы (рис. 38) при освещении предмета рассеивателем, движущимся во время экспозиции, был успешно продемонстрирован в работе [28]<sup>3)</sup>. Результаты ее можно

легко понять, если привлечь теорию наложения интенсивностей в скрытом изображении при последовательных экспозициях [45] одной и той же голограммы (разд. 9 гл. 5).

Если для регистрации голограммы вместо лазеров используются обычные источники света, область, на которой может возникнуть интерференция, ограничивается шириной спектральной линии. Когерентная длина  $L$  определяет размеры и глубину предмета или сцены, голограмму которой можно получить путем интерференции с плоской или сферической волной, формируемой с помощью зеркала, располагаемого иногда вблизи предмета<sup>1)</sup>.

Рассмотрим две волны света, одну с частотой  $\nu$ , а другую с частотой  $\nu - \Delta\nu$ . Пусть  $c$  — скорость света в вакууме, а  $\lambda$  — длина волны, соответствующая частоте  $\nu$ . Тогда

$$c = \nu\lambda. \quad (84)$$

Круговая частота

$$\omega = 2\pi\nu, \quad (85)$$

а фаза  $\varphi$ , входящая в уравнение волны, равна

$$\varphi = \omega t = 2\pi\nu t. \quad (86)$$

Пусть в момент  $t=0$  две волны с частотами  $\nu$  и  $\nu - \Delta\nu$  находятся в одинаковой фазе. Через некоторый промежуток времени  $t$ , которому соответствует длина  $L$ , определяемая как

$$L = ct, \quad (87)$$

две волны разойдутся по фазе на величину

$$\Delta\varphi = 2\pi[\nu t - (\nu - \Delta\nu)t] = 2\pi\Delta\nu t. \quad (88)$$

Отсюда, дифференцируя соотношения (86) и (84), из выражения (88) получим

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2} t, \quad (89)$$

где  $\Delta\lambda$  — разность длин волн, соответствующая разности частот  $\Delta\nu$ .

Определим длину когерентности  $L_{\pi/2}$  как расстояние, на котором разность фаз между двумя волнами составит  $\pi/2$ . Сравнивая выражения (89) и (87), получаем следующее значение когерентной длины:

$$L_{\pi/2} = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (90)$$

<sup>1)</sup> Доказательство, приведенное ниже, получено совместно с Г. Г. Строуком.

<sup>1)</sup> Для получения голограммы при пространственно-некогерентном освещении выдвигается требование, противоположное указанному (разд. 9.2).

<sup>2)</sup> Не только в смысле механической стационарности, но также и в смысле условия стационарности (3) гл. 4. — Прим. ред.

<sup>3)</sup> Результаты работы [28], по-видимому, не подтверждаются последующими опытами, см. De Bifetto D. J., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (4), 78—80 (1966). — Прим. ред.



Это уравнение используется для определения размеров, в пределах которых можно сохранить когерентность, когда задана определенная геометрия, а спектр излучения состоит из двух линий.

## 6. Сводка основных результатов

В предыдущих разделах были изложены теоретические и экспериментальные основы голографии. Составляющими элементами голографии являются:

- 1) интерферометрия;
- 2) теория дифракционных решеток;
- 3) условия когерентности.

При распространении голографии на область рентгеновских волн необходимо помнить, что критерии интерферометрии позволяют априори оценить успех голографического метода, если путем моделирования выполнить некоторые необходимые эксперименты.

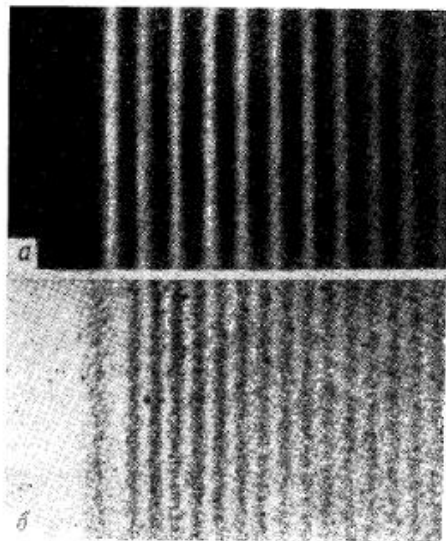


Рис. 30. Сравнение интерференционных полос в рентгеновском и оптическом диапазонах, свидетельствующее об осуществимости рентгеновской микроскопии с помощью голограммы.

Полосы получены при помощи зеркала Ллойда.

*a* — для видимого света с  $\lambda = 4358 \text{ \AA}$  [46]; *b* — для рентгеновского излучения с  $\lambda = 8,33 \text{ \AA}$  [47].

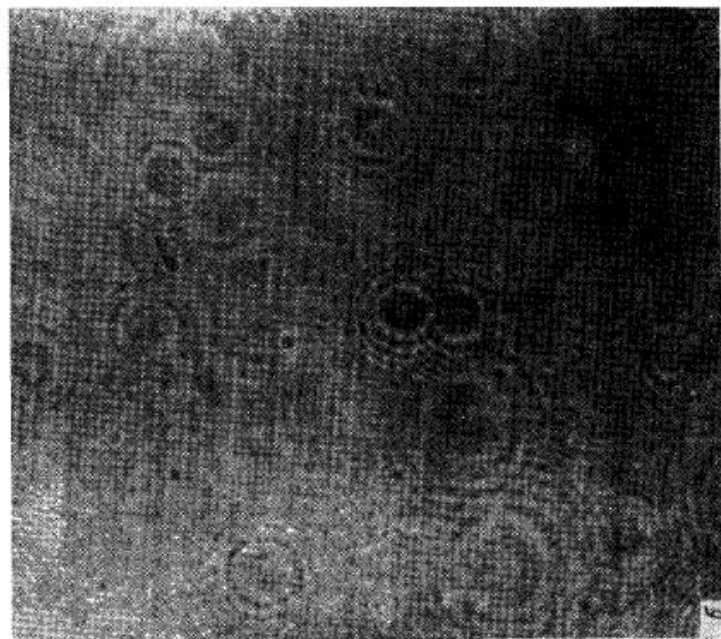
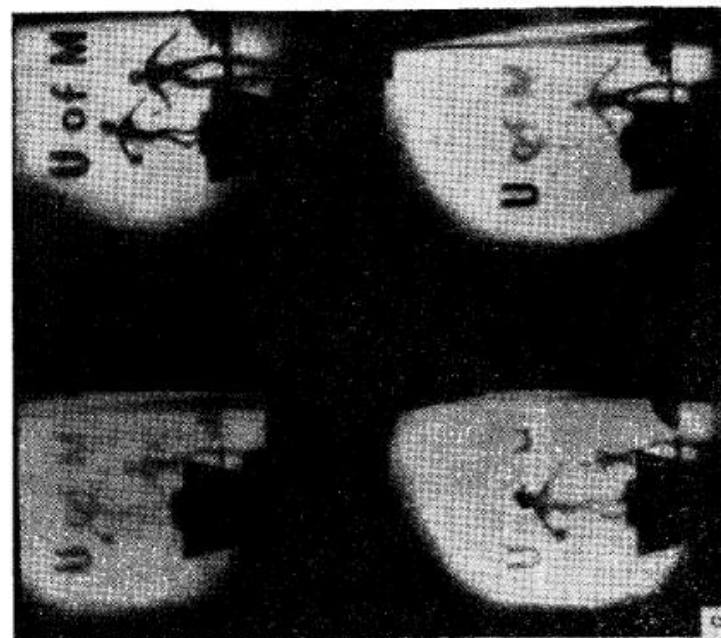


Рис. 31.

*a* — изображение трехмерной стены, восстановленной с помощью голограммы [11, 17]. Чтобы продемонстрировать трехмерность восстановленного изображения, при фотографировании этого изображения фокусируется на плоскости, расположенных за голограммой на разной глубине, и поворачивается под разными углами. Два верхних снимка, сделанные при малой диафрагме под разными углами, иллюстрируют эффект параллакса. Два нижних снимка, сделанные с большой диафрагмой под одним и тем же углом, демонстрируют эффект глубины трехмерной стены. При получении голограммы использовался лазер на длине волны 0,63 мкм.

*b* — голограмма.

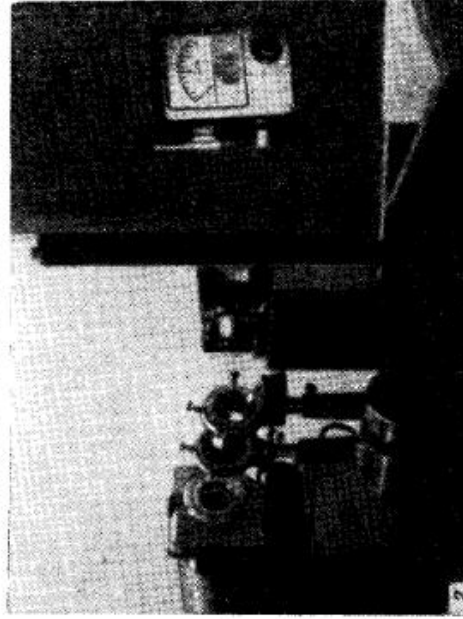
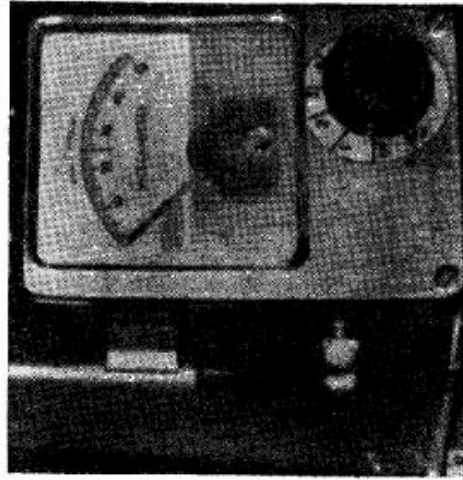
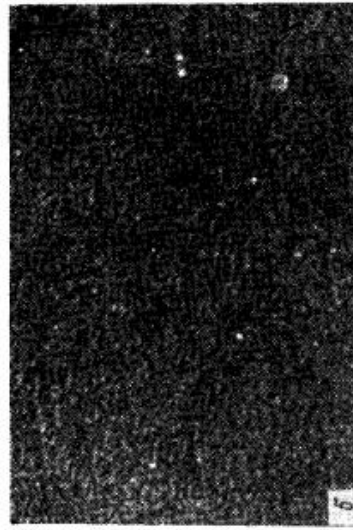
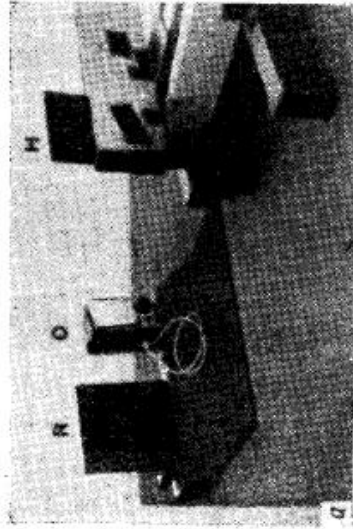


Рис. 32. Голографическая регистрация и восстановление трехмерного предмета по методу, описанному в работе [11].

*а* — схема получения голограммы; *В* — опорное зеркало, *О* — предмет, *Н* — голограмма на фотопластинке Kodak 649F; *б* — голограмма; *в* — действительное изображение, сфотографированное без помощи фотоаппарата; *г* — минное изображение, сфотографированное с помощью фотоаппарата. На обеих столбцах использовался лазер на красном лазере 0,63 мкм.

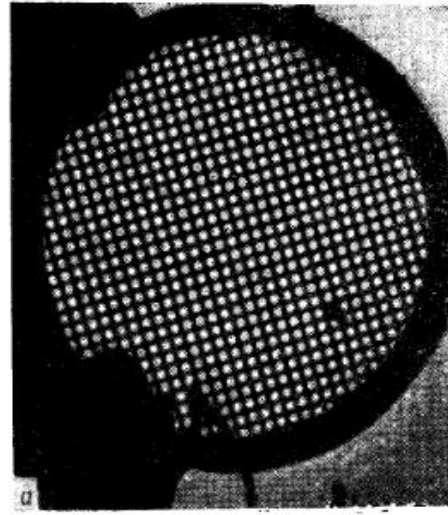
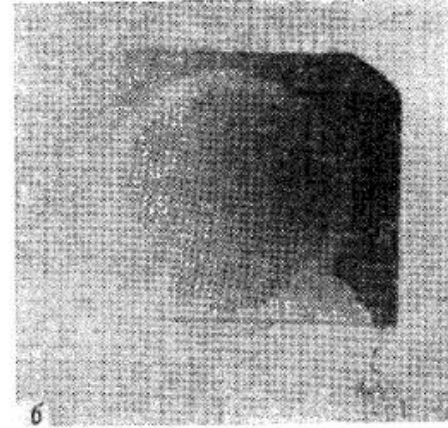


Рис. 33. Безлинзовая микроскопия.

*а* — действительное изображение по структуре типа кристаллической решетки, восстановленное без помощи линз. Восстановление с шестикратным увеличением было проведено на установке, схема и внешний вид которой изображены на рис. 36 и 37. Детали изображения получены с прекрасным разрешением (например, видна проволока диаметром 0,1 мкм, поддерживающая решетку). Хотя нетрудно было получить стократное увеличение, авторы ограничились увеличением в 6 раз, чтобы образец был виден целиком [27].

*б* — голограмма, полученная в проекционном микроскопе (рис. 34 и 35) и дающая изображение *а* при восстановлении. Как получение голограммы, так и восстановление проведены с помощью лазера на длине волны 0,63 мкм без помощи каких-либо линз. Если при восстановлении использовать рентгеновское излучение с длиной волны 1 Å, то это создаст дополнительное увеличение в 6328 раз. Полный коэффициент увеличения в рентгеновской микроскопии может достигнуть  $10^4$ .

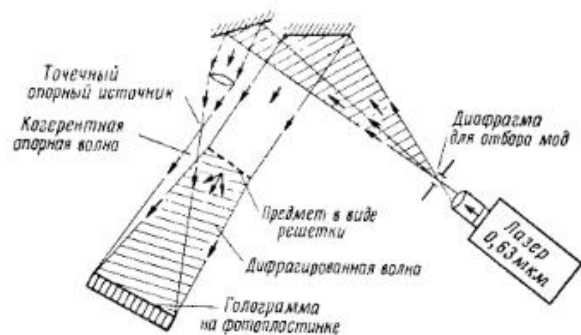


Рис. 34. Безлинзовая микроскопия. Схема проекционной голографической установки, на которой была изготовлена голограмма (рис. 33).

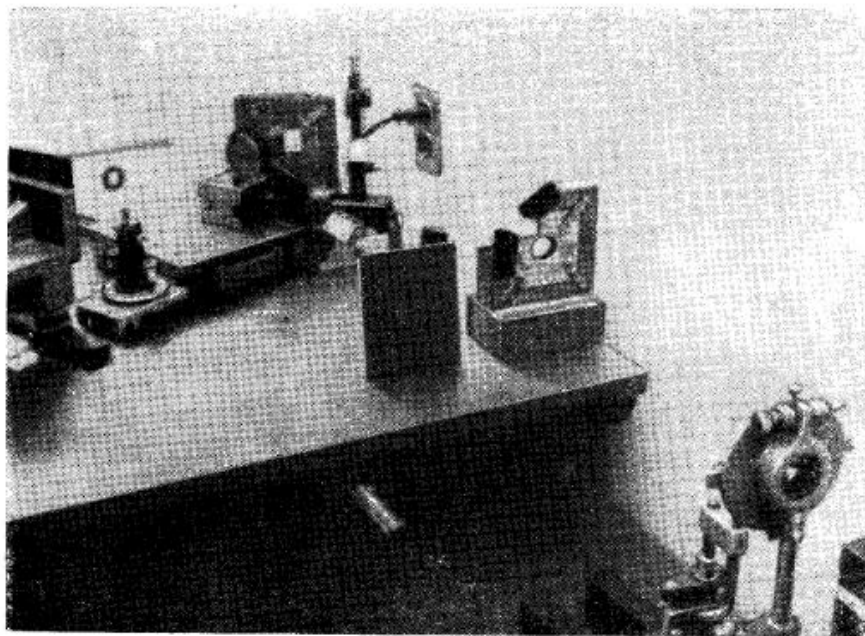


Рис. 35. Безлинзовая микроскопия. Внешний вид проекционной голографической установки [11] (см. рис. 34).

Голографическая микроскопия представляет особый интерес ввиду трехмерности получаемого здесь изображения и связанной с этим значительной глубины поля зрения. Это свойство может принести пользу не только в рентгеновской и электронной микроскопии, но также в микроскопах с видимым и ультрафиолетовым излучением. Диаметр образца  $O$  (решетки) равен приблизительно 14 м.м.

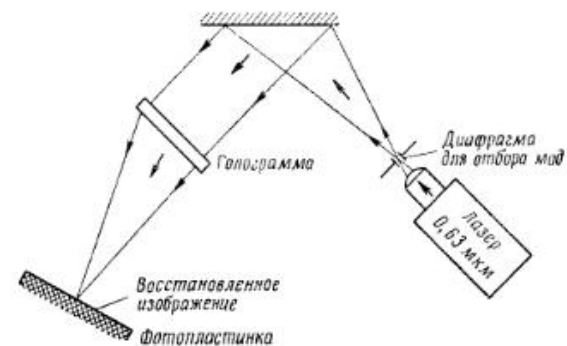


Рис. 36. Голографическая микроскопия. Схема восстановления изображения в проекционной микроскопии.

На рис. 30 показаны интерференционные полосы, полученные Кельстромом [47] для рентгеновских лучей с  $\lambda = 8,33 \text{ \AA}$  при помощи зеркала Ллойда. Результаты этого эксперимента могут служить указанием того, какого порядка величины когерентность может быть достигнута, а следовательно, характеризовать и ту голограмму, которую можно изготовить в соответствии с теорией, изложенной в предыдущем разделе.

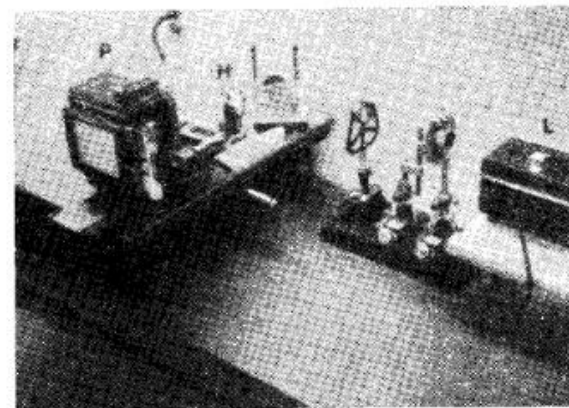


Рис. 37. Голографическая микроскопия. Внешний вид установки (рис. 36) для восстановления изображения в проекционной микроскопии.

$P$  — пластинодержатель;  $H$  — голограмма;  $L$  — лазер.

Восстановленные изображения трехмерных сцен, освещенных согласно методам, изложенным в предыдущих разделах [11, 17, 27, 48], показаны на рис. 31, а. На рис. 31, б и 32, б приведены соответствующие голограммы этих трехмерных сцен. При получении голограммы и при восстановлении использовался лазер с длиной волны 0,63 мкм.

Микрофотография двумерной решетки, увеличенной в 6 раз, сделанной с помощью безлинзовой голографии согласно схеме,

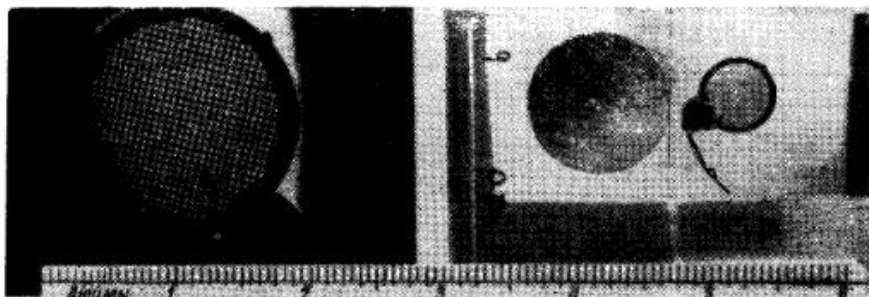


Рис. 38. Голографическая микроскопия с движущимся рассеивателем и с освещением под многими направлениями [28].

В масштабе показаны слева направо: увеличенное в 3 раза изображение, голограмма и образец. Схема получения голограммы дана на рис. 39, а внешний вид установки — на рис. 40. Во время экспозиции диффузный рассеиватель двигался. В связи с этим напомним работу по амплитудному синтезу изображений [31] (см. также рис. 22 и 23 гл. 5), в которой показано, что комплексные амплитуды можно суммировать в скрытом изображении голограммы! Для этого надо при соответствующих условиях (!) осуществить *последовательное наложение голограмм по интенсивности*. Изображение высокого качества, восстановленное в этих необычных (на первый взгляд) условиях, демонстрирует эффекты когерентности и суперпозиции в голографии. В ряде случаев приходится специально использовать движущееся зеркало или рассеиватель, чтобы добиться высокого разрешения.

рассмотренной в разд. 2.4, приведена на рис. 33, а, а соответствующая голограмма, также полученная без помощи линз, — на рис. 33, б. На рис. 35 дан общий вид установки для получения голограммы, а на рис. 34 ее схема. Рис. 37 представляет собой фотографию установки для восстановления изображения.

При попытке распространить голографические методы на рентгеновскую микроскопию мы столкнулись с принципиальными трудностями. Они возникают из-за невозможности сформировать однородную протяженную волну рентгеновского излучения на требуемых участках рассеянного поля. Для того чтобы обойти

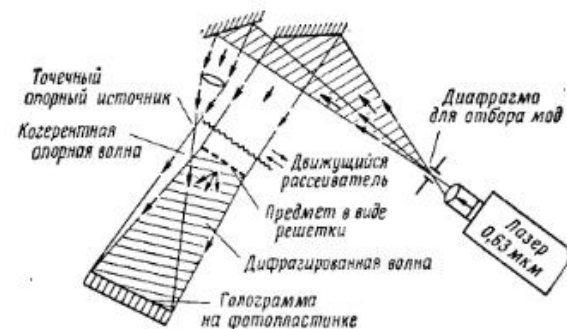


Рис. 39. Схема получения голограммы с движущимся рассеивателем и освещением под многими направлениями [28] <sup>1)</sup>.

Использование рассеивателя не только обеспечивает освещение образца под всеми углами, но также служит средством расщепления пучка, например с помощью полуматовых пластинок, упомянутых Ньютоном в „Оптике“ в связи с интерферометрией (см. также [61, 62]).

эту трудность, мы предложили применить зеркала или рассеиватели, приводимые в движение во время экспозиции. В результате использования этого приема когерентный пучок (или его часть) направляется во всех заданных направлениях. Согласно этому принципу, были выполнены моделирующие эксперименты в оптическом диапазоне.

На рис. 38 приведена фотография изображения, восстановленного с голограммы, которая была получена в эксперименте, когда рассеиватель, бросающий свет на предмет, во время экспозиции находился в движении. Там же показаны в масштабе голограмма и предмет. Схема установки, используемой при получении голограммы (рис. 38), дана на рис. 39, а рис. 40 представляет собой фотографию этой установки. Для получения хороших голограмм необходимо выполнить следующие основные требования:

1. Интерферометрическая (механическая и тепловая) стабильность расстояний между всеми элементами: предметом, опорным зеркалом или линзой и фотографической пластинкой. В голографии, как и в обычной интерферометрии, все элементы установки необходимо разместить на массивной основе и ждать, пока в системе не наступит тепловое равновесие.

2. Интенсивность опорного пучка на фотопластинке должна быть в 5—10 раз выше интенсивности рассеянного поля. Тогда,

<sup>1)</sup> Результаты последующих экспериментов [см. De Bitetto D. J., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (4), 78—80 (1966)] не подтверждают опыта автора, и здесь, по-видимому, необходимы более тщательные исследования. — *Прим. ред.*

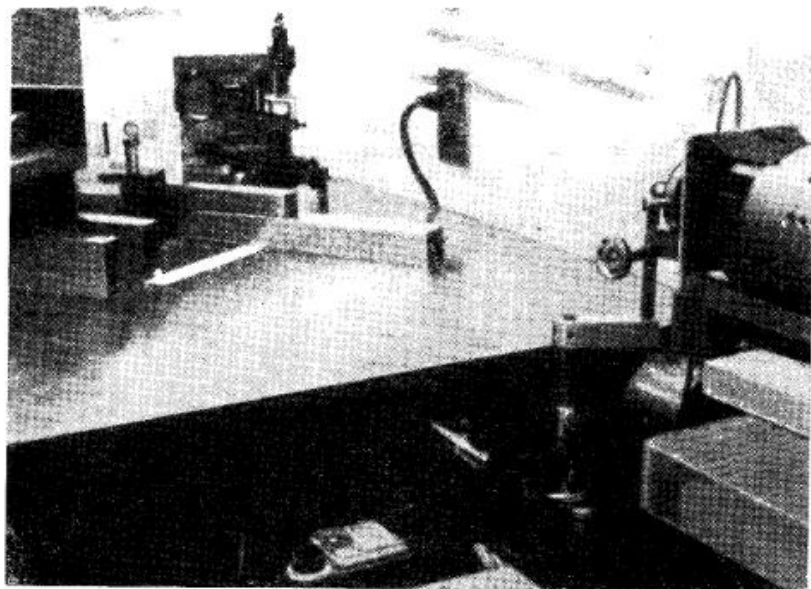


Рис. 40. Внешний вид голографического микроскопа с диффузным освещением и движущимся рассеивателем [28].

Справа гелий-неоновый лазер непрерывного действия средней мощности. В данной работе использовались лишь лазеры непрерывного действия. В ряде случаев, чтобы избежать влияния вибраций и нестабильности температуры, выгодно использовать импульсные лазеры. Эти недостатки особенно выступают при получении голограмм крупных предметов. (Впервые голографирование быстро протекающих явлений с помощью лазера в обычном импульсном режиме и с модуляцией добротности описано в работе [63].) Однако работы Мичиганского университета показали, что удовлетворительной стабильности интерферометров не трудно добиться и с лазерами непрерывного действия.

согласно уравнению (4), будут возникать боковые изображения только первого порядка (см. также уравнение (62) и разд. 4).

Наконец, несколько замечаний о голографии Фурье с высоким пространственным разрешением. Кроме той схемы высокого разрешения, которая была приведена в разд. 3, можно представить себе много других схем осуществления преобразования Фурье. Во всех подобных устройствах восстановленное изображение возникает в фокальной плоскости линзы, осуществляющей это преобразование. При этом большие коэффициенты увеличения, определяемые выражением (13), достигаются с помощью голографии Фурье с тем же успехом, что и в голографии Френеля. При этом коэффициент увеличения, обусловленный

только геометрическими факторами, равен  $f_2/f_1$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — фокусные расстояния линз, используемых при получении голограммы и восстановления изображения.

## 7. Электронный микроскоп и рентгеновский голографический микроскоп

Необходимо сделать несколько замечаний о возможности применения голографического микроскопа в свете успехов современной электронной микроскопии.

Современные электронные микроскопы легко достигают разрешающей способности порядка нескольких ангстрем. Даже самые оптимистические оценки не позволяют в настоящее время надеяться, что в рентгеновской микроскопии (голографической или обычной) удастся превзойти это разрешение при использовании любых мыслимых рентгеновских источников. С другой стороны, есть основания считать, что в электронных микроскопах будущего удастся улучшить уже достигнутое высокое разрешение, а также успешно преодолеть проблему нагрева образца.

Однако имеются такие проблемы, решение которых с помощью рентгеновского голографического микроскопа привело бы к устранению ряда существенных недостатков современного электронного микроскопа. Так, например, рентгеновские лучи не нагревают образец и обладают значительно большей проникающей способностью, чем электронные лучи самых высоких энергий. Эти качества очень важны для металлургии и особенно для биофизики, где приходится иметь дело с живой материей. Кроме того, рентгеновскому микроскопу не требуется вакуум, в то время как электронному микроскопу вакуум необходим. Дальнейшего улучшения разрешающей способности микроскопа можно достичь, если удастся получить голограмму в  $\gamma$ -лучах.

## 8. Заключение

Важной и вместе с тем весьма трудно разрешимой проблемой рентгеновской кристаллографии остается задача определения фазы рассеянной волны. Если амплитуда и фаза рассеянной волны не известны одновременно, то невозможно полностью восстановить структуру кристаллического образца. Первая попытка разрешить проблему определения фазы была сделана, по-видимому, Брэггом в 1939 г. [49]. Затем последовали работы Бюргера [50—52], который воспользовался идеей Берша [53].

Бюргер и Брэгг доказали, что изображение кристалла можно получить путем использования специальной фазовой пластинки,

помещаемой в различных дифракционных пятнах обратной решетки, и последующего осуществления оптического преобразования Фурье, что фактически означает схему оптического синтеза изображений. Метод оказался весьма успешным, однако он требовал априорного знания фаз рассеянных волн, а они бывают известны лишь в редких случаях, например для кристаллов с центральной симметрией [49—52].

Не так давно Кендрию и его сотрудники [54, 55] успешно синтезировали структуру кристаллов, используя электронную вычислительную машину для осуществления преобразования по Фурье рентгеновской дифракционной картины. Такой подход возможен там, где удастся использовать метод «тяжелых атомов» или изоморфного замещения, например в кристаллах протеина, таких, как молекула миоглобина [56]. Несмотря на все это, рентгеновская микроскопия в ее современной форме имеет ограниченное применение из-за трудностей нахождения фаз в различных точках обратной кристаллической решетки как в методе Кендрию, так и методе Бюргера и Брэгга.

Новые пути решения фазовой проблемы в рентгеновской микроскопии были недавно выдвинуты Строуком и Фальконером [27], затем были разработаны Строуком и рядом других ученых [29, 31]. Новый подход является не чем иным, как безлинзовой голографией Фурье. Голография Фурье основана на общих принципах метода восстановления волнового фронта, впервые предложенного Габором в 1948 г. [1—5]. В этом методе на дифракционную картину накладывается когерентный фон, являющийся опорным волновым фронтом, и это позволяет зарегистрировать как амплитуду, так и фазу рассеянных волн. Первые успешные эксперименты с голографическим микроскопом в видимом диапазоне были проведены самим Габором [1—5], а затем повторены многими исследователями. Вскоре обнаружилось, что с помощью рентгеновской голографии Фурье невозможно добиться высокого пространственного разрешения. Предел обусловлен разрешением пленки и размерами источника (разд. 3 и 4). Оказалось, что в голографии Френеля достижимое разрешение составляет всего 5000—10 000 Å, а не 1 Å. Подметив аналогию между методом синтеза изображения по Бюргеру — Кендрию, с одной стороны, и методом голографического микроскопа<sup>1)</sup>, с другой стороны, Строук и Фальконер [27] доказали,

<sup>1)</sup> Строгое подтверждение существования такой аналогии, впервые подмеченной Брэггом [57], было дано Россизном и Строуком [58]. Они показали полнейшую аналогию, с одной стороны, между голографией Фурье с компенсацией протяженного источника [31] (разд. 4) и, с другой стороны,  $\alpha$ -синтезом Рамана — Рамачандрана, осуществляемым на основе метода тяжелых атомов [59, 60] путем нахождения обратной свертки функции Паттерсона, когда структура кристалла частично известна.

что высокого разрешения в голографической микроскопии можно достичь путем соответствующего изменения первоначального принципа голографии. В частности, они показали, что голограмма Фурье позволяет преодолеть эффект протяженного источника и проблему мелкозернистости фотоэмульсии, возникающие в обычной проекционной голографии. Вскоре после этого Строук [29] продемонстрировал метод получения голограммы Фурье с помощью *безлинзового* преобразования Фурье, при котором сохранялись исходные преимущества безлинзовой фотографии Габора. Совсем недавно Строук и др. [31] показали, что потери разрешения при использовании протяженных источников на стадии получения голограммы можно удивительным образом компенсировать путем применения на стадии восстановления другого протяженного источника с соответствующей структурой. Таким образом, проблема структуры источника в голографической микроскопии [11, 28, 29, 31, 48], по-видимому, окончательно разрешается с помощью безлинзовой голографии Фурье [29, 30] на основе когерентно-интерферометрического рассмотрения структуры освещающих источников.

## 9. Голография при некогерентном освещении

Принцип голографии Фурье при когерентном освещении, рассмотренный в предыдущих разделах этой главы, позволяет дать очень простое объяснение образованию изображения с помощью габоровского метода восстановления волнового фронта [11]. Наиболее существенным фактором при получении голограммы является пространственная когерентность по предмету, т. е. способность различных точек предмета интерферировать друг с другом (разд. 2.8 гл. 4) или с опорным пучком (разд. 5 гл. 6).

На возможность нарушения этого требования было впервые указано Строуком и Фанкхаузером [64] в 1965 г. Предложенный ими метод тесно связан с голографической спектроскопией Фурье. При этом голограмма получается при *спектрально некогерентном* освещении с помощью двухлучевого интерферометра Майкельсона — Тваймана — Грина. Такая голограмма при восстановлении методом голографии Фурье воспроизводит спектр непосредственно в фокальной плоскости линзы без какого-либо математического преобразования спектрограммы, как это делается в обычной, неголографической спектроскопии Фурье.

В литературе уже было предложено несколько различных схем некогерентной голографии [65—67], кроме той, которая дана в разд. 9.2 гл. 6.

Несмотря на то что все признавали необходимость разработки голографии при некогерентном освещении, никому не удавалось реализовать ее на опыте. Только в 1965 г. Строук и Рестрик [68] сначала доказали теоретически, а затем подтвердили экспериментально, что с помощью монохроматического, но *пространственно-некогерентного* излучения можно получить голограмму Фурье для случая протяженных предметов. При восстановлении путем преобразования Фурье в фокальной плоскости линзы получались высококачественные изображения предметов.

Подробное описание метода Строука — Рестрика получения голограммы при некогерентном освещении дано в разд. 9.2. Сущность метода состоит в формировании для каждой точки предмета в плоскости голограммы синусоидальной интерференционной решетки, имеющей вполне определенные ориентацию и пространственную частоту. При этом различные решетки складываются *по интенсивности*. На голограмме регистрируется *фурье-образ* распределения *интенсивности* по предмету<sup>1)</sup>. Необходимое для этого наложение интерференционных картин *по интенсивности* обеспечивается тем, что излучение от различных точек предмета некогерентно. Таким образом, для получения голограммы при некогерентном освещении необходимо, чтобы отсутствовала когерентность между различными точками предмета. Это требование кажется парадоксальным.

Сначала мы рассмотрим голографическую спектроскопию Фурье при спектрально-некогерентном источнике, так как этот метод прост и имеет особое значение в некогерентной голографии.

### 9.1. Голографическая спектроскопия Фурье при спектрально-некогерентном источнике [64, 75]

Вслед за работами Жакино [69], Фельжета [70], Стронга [71] и др., имевшими основополагающее значение для спектроскопии Фурье, последовали исследования [72—74], в которых были установлены замечательные свойства и существенные достоинства различных вариантов этого метода. Одно из главных достоинств этого метода состоит в одновременной регистрации всех спектральных компонент (длительность регистрации не зависит от ширины спектра), а также высокая освещенность. Применение этого метода выдвигает требование прецизионного сканирования или перемещения зеркала (сравнимых по точности с требованиями, предъявляемыми к делительным машинам). Иско-

<sup>1)</sup> А не фурье-образ распределения амплитуды, как в обычной когерентной голографии. — Прим. ред.

мый спектр получается в результате преобразования Фурье, которое осуществляется на электронной вычислительной машине над интерферограммой, зарегистрированной фотоэлектрически. Последние успехи в голографии и особенно в голографии Фурье, естественно, ставят вопрос о поиске возможных упрощений в технике спектроскопии и в применениях голографии в астрономии.

Теоретические основы голографической спектроскопии и соответствующие экспериментальные результаты были впервые изложены в работе [64]. Метод позволяет получать спектр без каких-либо пересчетов, если оптические узлы и воздушная среда в интерферометре обладают полной стационарностью. В противоположность обычным системам<sup>1)</sup>, применение которых требует разработки различных методов расшифровки фотоэлектрически зафиксированного фурье-образа (или френелевского образа), наш метод не требует ни расшифровки фотоэлектрически зафиксированного спектра, ни интерферометрического сканирования.

Рассмотрим в качестве примера систему регистрации спектральной голограммы Фурье в двухлучевом интерферометре, в котором волновые фронты каждого из плеч образуют между собой малый угол  $\theta$  (рис. 41). Система интерференционных полос, регистрируемая фотографически в плоскости, параллельной биссектрисе угла, образованного волновыми фронтами, представляет собой некогерентное наложение систем монохроматических полос, отвечающих каждой длине волны  $\lambda$ . Как будет показано ниже, уравнение системы полос в плоскости фотопластины имеет вид

$$I(x) = \int_0^{\infty} I(\sigma)[1 + \cos 2\lambda\sigma x] d\sigma, \quad (91)$$

где  $\sigma = 1/\lambda$  см<sup>-1</sup>;  $I(\sigma)$  — спектральное распределение интенсивности (спектр) источника. Косинусный фурье-образ функции  $I(\sigma)$ , входящий в уравнение (91), описывает спектральную голограмму Фурье, которая представляет собой «некогерентное» наложение синусоидальных по интенсивности решеток. Каждой спектральной линии соответствует своя решетка. Поэтому при освещении голограммы пространственно-когерентной монохроматической волной (как это показано на рис. 24) в фокальной плоскости линзы в каждом из боковых пучков образуются спектры

<sup>1)</sup> См. книгу Л. Мерца «Интегральные преобразования в оптике» (изд-во «Мир»), посвященную в значительной степени спектроскопии Фурье. — Прим. ред.

$I(\sigma)$ , расположенные симметрично относительно оси, отмеченной положением пучка нулевой пространственной частоты.

В экспериментах [64, 75] был использован интерферометр Майкельсона — Тваймана — Грина с компенсацией (рис. 41). Голограмма, на которой зарегистрирован спектр холодного дугового разряда, приведен на рис. 42. На рис. 43 дан спектр, восстановленный при освещении голограммы лазерным светом на длине волны  $0,63 \text{ мкм}$  (см. рис. 24). При регистрации голограммы была использована очень широкая диффузно освещенная апертура. Интерферометрический клин создавал угол между лучами интерферометра, соответствующий  $30 \text{ полос/мм}$  от белого ртутного света. Оптическая разность хода лучей в интерферометре была близка к нулю. Использовались фотопластины Kodak 649F с высоким разрешением. Юстировочные эксперименты были проведены на фотопленке Polaroid P/N. Выполненные вначале опыты с импульсной лампой показали, что непрерывный спектр также образует интерференционную голограмму, по которой он может быть воспроизведен.

Уравнение (91) можно получить эвристически. Однако представляет интерес рассмотреть некоторые шаги вывода более подробно.

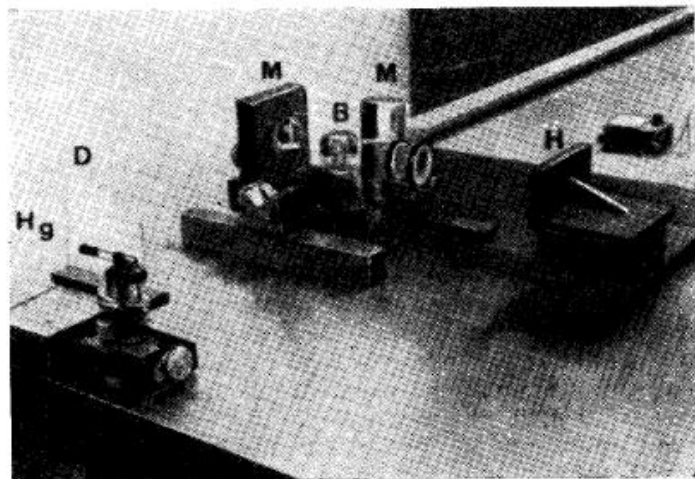


Рис. 41. Внешний вид интерферометра, с помощью которого изготавливались голографические интерферограммы Фурье в спектрально некогерентном свете [64].

Hg — ртутная лампа с холодным дуговым разрядом; D — матовое стекло; M — зеркала интерферометра; B — светоделитель; H — голограмма.

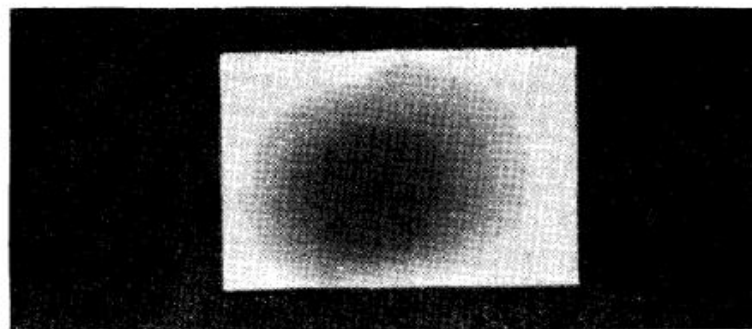


Рис. 42. Голографическая интерферограмма Фурье, изготовленная с помощью интерферометра (рис. 41).

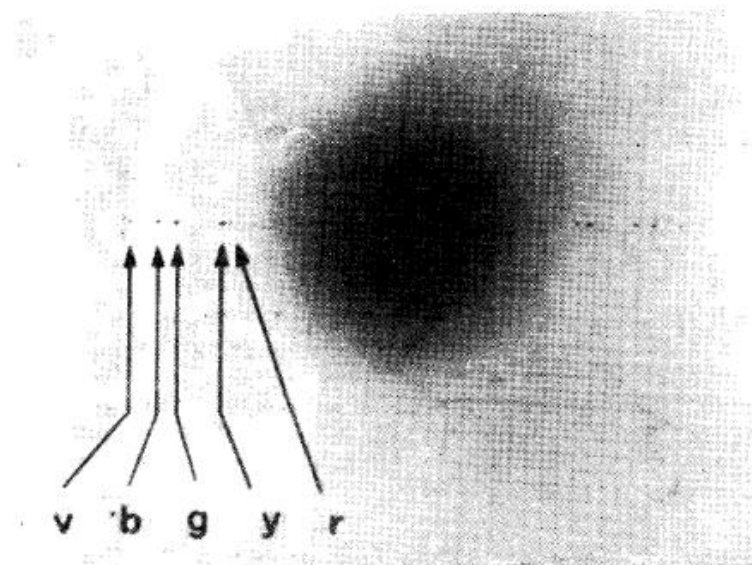


Рис. 43. Спектр ртути, восстановленный с помощью голографической интерферограммы Фурье (рис. 42).

Голографическая интерферограмма Фурье освещалась плоской волной лазера на длине волны  $0,63 \text{ мкм}$ , и рассеянное излучение собиралось в фокальной плоскости линзы по схеме рис. 24. Точки спектра в левом и правом «боковых диапазонах» расположены симметрично. Это позволяет найти длину волны, измеряя только отношение расстояний. Точки слева удалось приписать следующим линиям ртути [76]:

v (4047 и 4078 Å), b (4348 — 4359 Å), g (5461 Å), y (5770 и 5790 Å), r (6152 и 6234 Å).



Пусть  $E(x, y, z)$  — электрический вектор плоской волны с длиной волны  $\lambda$ , наклоненной под углом  $\theta/2$  к оси  $z$  интерферометра так, что в плоскости  $(xy)$ , нормальной к оси  $z$ , поле можно описать следующим образом:

$$E(x, y) = E_0 \exp \left[ 2\pi i \sigma x \sin \frac{\theta}{2} + \omega t \right], \quad (92)$$

где  $\sigma = 1/\lambda$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $c = f\lambda$  — скорость света,  $t$  — время. Пусть вторая плоская волна той же длины волны  $\lambda$ , распространяющаяся под углом  $(-\theta/2)$  к оси  $z$ , создает в той же плоскости поле

$$E(x, y) = E_1 \exp \left[ 2\pi i \sigma x \sin \left( -\frac{\theta}{2} \right) + \omega t + \varphi \right], \quad (93)$$

где  $\varphi$  — разность фаз. Если в плоскости  $(xy)$  поместить фотопластинку, то она зарегистрирует интенсивность интерференционной картины

$$[I(x, y)]_k = \frac{1}{2} E_0^2 + \frac{1}{2} E_1^2 + E_1 E_0 \cos \left[ 2\pi \sigma x \sin \frac{\theta}{2} - \varphi \right]. \quad (94)$$

Мы можем настроить интерферометр таким образом, что оптическая разность хода лучей в интерферометре будет равна нулю:  $\varphi = 0$ . Для упрощения выкладок положим  $E_0^2 = E_1^2 = I(\sigma)$ , где  $I(\sigma)$  — интенсивность источника с волновым числом  $\sigma$ , а  $\theta$  — малый угол. После этого уравнение (94) примет вид

$$[I(x, y)]_k = I(\sigma) [1 + \cos 2\pi \sigma \theta x]. \quad (95)$$

Это уравнение описывает интенсивность интерференционных полос голограммы для источника с волновым числом  $\sigma$ , имеющим разброс  $\Delta\sigma$ .

Вследствие некогерентности между спектральными линиями излучения источника голограмма, которая будет получаться от многоцветного источника со сложным спектром по интенсивности  $I(\sigma)$ , имеет вид

$$I(x) = \int_0^{\infty} I(\sigma) [1 + \cos 2\pi \sigma \theta x] d\sigma, \quad (96)$$

что совпадает с выражением (91). О свойствах источников, исследуемых методами спектроскопии Фурье, см., например, [72].

Ранее мы показали (разд. 2.1 и 4), что комплексная амплитуда  $H(x)$  излучения, прошедшего через голограмму с интенсивностью  $I(x)$ , равна

$$H(x) \approx [I(x)]^{-\gamma/2}, \quad (97)$$

где  $\gamma$  — коэффициент контрастности проявленной фотопластинки. При обычных условиях получения голограммы  $I(x)$  можно представить в виде

$$I(x) \approx 1 + \epsilon. \quad (98)$$

Тогда, разлагая в ряд, получим

$$H(x) \approx 1 - \frac{\gamma}{2} \epsilon. \quad (99)$$

Это уравнение показывает, что интересующая нас часть  $H(x)$  линейно связана с зарегистрированной интенсивностью. Поэтому интенсивность восстановленного изображения не зависит от коэффициента контрастности голограммы.

Чтобы  $I(x)$  можно было записать в виде уравнения (98), необходимо, строго говоря, потребовать соблюдения условия

$$\frac{1}{2} (E_0^2 + E_1^2) > E_0 E_1, \quad (100)$$

которое означает, что интенсивность одного пучка должна несколько отличаться от интенсивности второго пучка. Практически это условие легко выполнить, если, например, зеркала двух плеч интерферометра будут иметь различные покрытия. Однако мы доказали (см. рис. 41—43), что спектры воспроизводятся также и с помощью интерферометра, в котором оба зеркала имеют одинаковый коэффициент отражения. Это обусловлено тем, что в обычной голографии равенство интенсивностей двух пучков приводит к возникновению спектров высоких порядков. Такая голограмма действует как квадратичный детектор в радиотехнике либо как оптическая дифракционная решетка [12]. Более подробный анализ голографической спектроскопии Фурье приведен в работе [77]. Там же изложены эксперименты, подтверждающие возможность получения с помощью голографической спектроскопии Фурье спектров с высоким разрешением. Здесь же следует указать на то, что в самом общем виде функцию  $I(x)$  можно выразить через  $H(x)$  в форме ряда Тейлора по степеням интенсивности  $(I - I_0)$  (разд. 4). Также следует отметить своеобразный дуализм [64] между методом регистрации спектральных частот в голографической спектроскопии и методом регистрации пространственных частот в голографической системе формирования изображения на одной спектральной частоте, в том числе при *пространственно-некогерентном освещении*.

Более подробное рассмотрение факторов, ограничивающих регистрацию интерференционных полос в голографической спектроскопии, дано в работе [77]. Там же проведено сравнение

освещенности и разрешающей способности голографической спектроскопии с аналогичными характеристиками других спектроскопических систем и определены возможные области применения голографической спектроскопии.

Однако здесь мы можем привести простейшее рассмотрение разрешающей способности голографического метода спектроскопии Фурье [75]. Пусть размер голограммы вдоль оси  $x$  равен  $A$ . Пусть  $a_\lambda$  — период «интерференционной решетки», соответствующей длине волны  $\lambda$ . Согласно уравнению решетки (12),

$$\sin i + \sin i' = m \frac{\lambda}{a}. \quad (101)$$

Осветив голограмму плоской волной  $\Sigma_i$  под углом  $i=0$ , мы получим изображение первого порядка (см. рис. 24), расположенное от оси на расстоянии

$$(\xi'_0)_1 \approx f \frac{\lambda_L}{a_\lambda} = f \lambda_L \nu_\lambda, \quad (102)$$

где  $\lambda_L$  — длина волны излучения лазера, используемого при восстановлении;  $\nu_\lambda = 1/a_\lambda$  — пространственная частота решетки, соответствующей длине волны  $\lambda$ . Дифференцируя это уравнение, получаем

$$\frac{d(\xi'_0)_1}{d\nu_\lambda} = f \lambda_L, \quad (103)$$

т. е.

$$\Delta(\xi'_0)_1 = f \lambda_L \Delta \nu_\lambda. \quad (104)$$

Напомним, что, согласно уравнению (94), частота решетки  $\nu_\lambda$  обратно пропорциональна  $\lambda$ . Пусть  $C$  — коэффициент пропорциональности, тогда

$$\nu_\lambda = \frac{C}{\lambda} \quad (105)$$

и, следовательно,

$$\Delta(\xi'_0)_1 = -C f \lambda_L \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}. \quad (106)$$

В соответствии с критерием Релея (см. разд. 4 гл. 5, а также работу [12]) предельное спектральное разрешение достигается при условии

$$\Delta(\xi'_0)_1 = f \frac{\lambda_L}{A}, \quad (107)$$

где  $A$  — размер голограммы. Приравняв правые части выражений (106) с (107) и учитывая (105), находим разрешающую

способность голографической спектроскопии Фурье для излучения на длине волны  $\lambda$ .

$$N = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = A \nu_\lambda. \quad (108)$$

Здесь  $N$  — полное число полос, уместяющихся на голограмме, для длины волны  $\lambda$ . Очевидно, разрешающая способность, согласно выражению (108), совпадает с разрешающей способностью решетки шириной  $A$  [12]. Пусть, например,  $\nu_\lambda = 2000$  линия/мм, что легко регистрируется с помощью спектроскопических фотопластинок Kodak 649F. Тогда разрешающая способность равна

$$N = 2000 A \quad (\text{на каждый миллиметр } A). \quad (109)$$

Если голограмма мала (как, например, на рис. 42, где  $A = 20$  мм), то разрешающая способность равна 40 000 при частоте полос 2000 на 1 мм.

На первый взгляд может показаться, что применение протяженных источников в голографическом интерферометре приведет к затруднениям. Протяженные источники особенно выгодны там, где требуется очень высокая освещенность, хотя ее можно получить и в спектрометрах обычных типов (интерферометр с малой апертурой и спектрометр Фурье с фотоэлектрической регистрацией).

На возможность получения высокой разрешающей способности впервые указал Жакино [72, 73, 78, 79].

Схема голографического спектрометра Фурье изображена на рис. 41.

Голографический метод спектроскопии Фурье обладает рядом достоинств. Для регистрации спектра не требуются ни линзы, ни щели. Достаточно лишь собрать абсолютно жесткий интерферометр, состоящий из двух зеркал (или их эквивалентов) и направленный на диффузный источник света. Такие системы будут полезны в астрономии и при исследовании плазмы.

## 9.2. Голография при пространственно-некогерентном освещении

Строук и Рестрик [68], используя аналогию с голографической спектроскопией Фурье, обратили внимание на то, что голограмму Фурье можно получить также и от протяженных предметов при монохроматическом пространственно-некогерентном освещении. Восстановленное изображение образуется при повторном преобразовании Фурье, например, путем освещения голограммы плоской монохроматической волной (рис. 24). В фокальной плоскости линзы возникнет восстановленное изображение.

Дуализм между методом регистрации спектральных частот с помощью голограммы Фурье (разд. 9.1) и регистрацией пространственных частот в голографической системе формирования изображения при монохроматическом освещении был подмечен в работах [64, 75].

Прежде чем приступить к анализу, напомним основное свойство голограммы Фурье [68]. Каждой точке пространственно-некогерентного предмета соответствует на голограмме одна синусоидальная интерференционная решетка, характеризуемая определенной пространственной частотой и ориентацией. Различные решетки складываются по интенсивности, так как свет, распространяющийся от предмета, пространственно некогерентен. Таким образом на голограмме регистрируется пространственный фурье-образ распределения интенсивности по предмету. Именно отсутствие взаимной когерентности между различными точками предмета приводит к тому, что фурье-образы складываются на голограмме по интенсивности.

Для краткости изложим анализ в форме, представленной впервые Строуком и Рестриком [68].

В качестве модели рассмотрим систему со светоделителем, при помощи которой предмет проектируется на плоскость с образованием двух изображений, имеющих интенсивности  $I(\xi)$  и  $I(-\xi)$  соответственно. Эти изображения связаны друг с другом симметрией двукратного вращения относительно оси  $z$ , нормальной к плоскости  $\xi$  (разд. 4, [31] и рис. 44).

Поскольку различные точки предмета  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  взаимно некогерентны, то каждая из этих точек будет интерферировать с соответствующими зеркальными точками  $-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_r$ . В плоскости голограммы  $x$ , нормальной к оси  $z$  и расположенной на расстоянии  $z=f$  от плоскости  $\xi$ , образуется система полос, пространственная частота и ориентация которой отвечает только одной точке предмета. Суммарная интенсивность  $I(x)$ , зарегистрированная на голограмме, определяется уравнением

$$I(x) = \int I(\xi) \left( 1 + \cos 2\pi \frac{2x\xi}{\lambda f} \right) d\xi, \quad (110)$$

где  $\lambda$  — длина волны света. Интенсивность голограммы  $I(x)$ , согласно уравнению (110), состоит из постоянного слагаемого и косинусного фурье-образа распределения интенсивности предмета  $I(\xi)$ . Поэтому при освещении голограммы пространственно-когерентной плоской монохроматической волной (рис. 24) в результате преобразования Фурье в фокальной плоскости линзы возникнут два изображения  $I(\xi)$ , расположенных симметрично относительно оптической оси, вокруг которой разместится изображение от постоянного слагаемого.

Общий вид светоделительной установки, которая была использована в эксперименте, показан на рис. 44. Там же виден предмет в виде буквы «R», освещенный пространственно-некогерентным светом. На рис. 45 дана фотография восстановленного изображения буквы «R». В качестве светоделителя использовалась оптическая дифракционная решетка [12] с

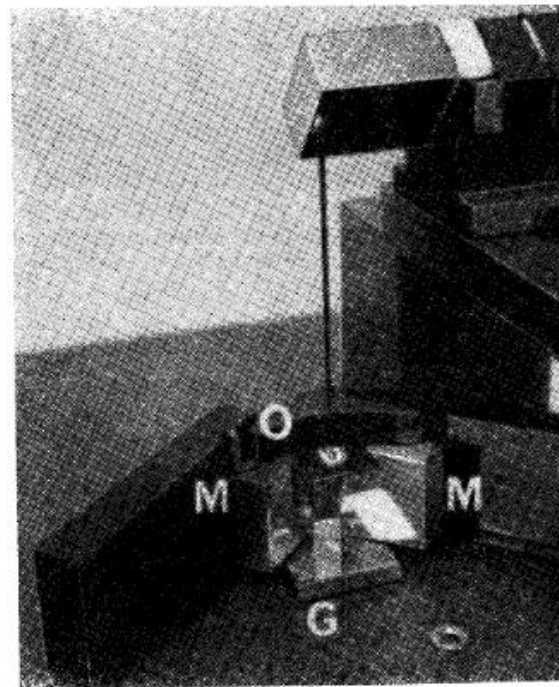


Рис. 44. Светоделительная установка для изготовления безлинзовых голограмм Фурье при некогерентном освещении [68].

Снимок установки сделан из плоскости, в которой размещена голограмма. Предмет  $O$  (буква «R») освещался сверху по стрелке. Дифракционная решетка  $G$ , использованная в качестве светоделителя, создавала два изображения на зеркалах  $M$ . Изображения на зеркалах  $M$  имели двукратную симметрию вращения. (Изображение буквы «R», заметное на поверхности решетки непосредственно ниже предмета, возникает из-за рассеяния на поверхности, и на голограмме его не видно.) Масштаб установки определяет размер решетки:  $55 \times 55$  м.м. Изображения от зеркал  $M$  интерферируют в голограмме Фурье без всяких дополнительных оптических элементов. Фотопластинка Kodak 649F размещалась на расстоянии  $f=1$  м от зеркал  $M$ . Независимо Мерц [80] предложил другую схему сложения волновых фронтов, предназначенную для звездного интерферометра. Эту схему также можно использовать в светоделительной установке для голографии при некогерентном освещении.

1180 *штрих/мм*. Профиль штрихов был такой, что два изображения первого порядка имели одинаковую интенсивность [12, 81]. Чтобы превратить излучение лазера на длине волны 0,63 *мкм* в пространственно-некогерентное, свет проектировался на быстро движущийся рассеиватель, а от него на предмет. Для контроля

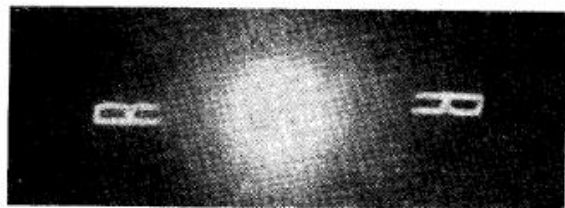


Рис. 45. Изображения буквы «R», восстановленные путем нахождения фурье-образа голограммы, полученной на светоделительной установке (рис. 44) при пространственно-некогерентном освещении.

того, что при движении рассеивателя достигалась необходимая некогерентность, был поставлен эксперимент, в котором рассеиватель был неподвижен и, следовательно, рассеянная волна была пространственно-когерентной (рис. 38—40). В этом случае,



Рис. 46. «Изображения», восстановленные по преобразованиям Фурье, — нулевой пучок в центре и два боковых изображения.

Голограмма получена при пространственно-когерентном освещении — рассеиватель, освещающий предмет (рис. 44), был неподвижен. Качество изображений подтверждает, что при неподвижном рассеивателе когерентность сохраняется, в то время как при движущемся рассеивателе когерентность полностью исчезает.

как легко видеть (разд. 4), при восстановлении получается свертка  $I(\xi)$  с  $I(\xi)$ , а не само изображение. Как видно из восстановленной картины на рис. 46, изображения предмета не возникло.

В работе [68] предполагалось применить метод безлинзовой голографии Фурье при некогерентном освещении для рентгенов-

ской микроскопии. Вместо дифракционной решетки можно использовать кристалл, способный расщеплять рентгеновское излучение. Ранее указывалось (разд. 3 и 4), что голограмма Фурье дает более высокое разрешение, чем голограмма Френеля. Здесь четко выступает свойство голографии Фурье суммировать плоские волны или их сферический эквивалент (рис. 20) и связанное с ним отсутствие aberrаций. Преимущества голограммы Фурье над голограммой Френеля можно сравнить с аналогичными преимуществами плоской дифракционной решетки над волгнутыми [12].

Автор надеется, что общие основы когерентной оптики, некогерентной оптики и голографии, изложенные в данной книге, будут стимулировать интерес читателя к дальнейшему изучению этих предметов. Результатом этого может явиться множество интересных применений, значительную часть из которых едва ли можно предвидеть в настоящее время.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Gabor D., *Nature*, **161**, 777 (1948).
- Gabor D., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A197**, 454 (1949); см. стр. 218 настоящей книги.
- Gabor D., *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B64**, 449 (1951); см. стр. 270 настоящей книги.
- Gabor D., *Research*, **4**, 107 (1951).
- Gabor D., *Proceedings of the Congrès de Microscopie Electronique*, 1952.
- Stroke G. W., *Optical Information Processing* (Tippett J. T. et al., eds.), MIT Press, Cambridge, Mass., 1965.
- Zernike F., *Physica*, **1**, 43 (1934).
- Zernike F., *Z. Techn. Phys.*, **16**, 454 (1935).
- Zernike F., *Physik. Z.*, **36**, 848 (1935).
- Wolter H., в кн. «Handbuch der Physik» (Flügge S., ed.), Band 24, Springer, Berlin, 1956, p. 555—645.
- Stroke G. W., в кн. «An Introduction to Optics of Coherent and Non-Coherent Electromagnetic Radiation» (Engineering Summer Conferences Text), Univ. Michigan, Ann Arbor, Mich., 1964 (2nd ed., 1965).
- Stroke G. W., в кн. *Handbuch der Physik* (Flügge S., ed.), Band 29, Springer, Berlin, в печати.
- Rogers G., *Nature*, **166**, 237 (1950).
- El-Sum H. M. A., *Reconstructed Wavefront Microscopy*, диссертация, Stanford Univ., Stanf., Calif., Nov. 1952; available from Univ. Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan (Dissert. Abstracts 4663, 1953).
- Stroke G. W., *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 30 (1955).
- Leith E., Upatnieks J., *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 1377 (1963).
- Leith E., Upatnieks J., *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 1295 (1964); подробное изложение работ [16, 17, 41] можно найти в обзоре Налимова И. П., *Зарубежная радиоэлектроника*, (2), стр. 3 (1966).
- Stroke G. W., *Rev. Optique*, **39**, 291 (1960).
- Stroke G. W., *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 1321 (1961).

20. Jackson P. L., *Appl. Opt.*, **4**, 419 (1965).
21. Maréchal A., Croce P., *Compt. Rend.*, **237**, 607 (1953).
22. O'Neill E. L., Selected Topics in Optics and Communication Theory, Optical Res. Lab., Boston Univ. Techn. Note, 133, 1957.
23. Leith E., Upatnieks J., *Physics Today*, **18**, 26 (1965).
24. Stroke G. W., Brumm D., Funkhouser A., Labeyrie A., Restrict R., *Brit. J. Appl. Phys.*, **17**, 497 (1966).
25. Lohmann A., *Opt. Acta*, **3**, 97—99 (1956).
26. Cutrona L. J., Leith E. N., Palermo C. J., Porcello L. J., *IRE Trans. Inform Theory*, (3), 386—400 (1960); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (10), стр. 3 (1962).
27. Stroke G. W., Falconer D. G., *Phys. Lett.*, **13**, 306 (1964).
28. Stroke G. W., Falconer D. G., *Phys. Lett.*, **15**, 238 (1965).
29. Stroke G. W., *Appl. Phys. Lett.*, **6**, 201 (1965).
30. Stroke G. W., Brumm D., Funkhouser A., *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1327 (1965).
31. Stroke G. W., Restrict R., Funkhouser A., Brumm D., *Phys. Letters*, **18**, 274 (1965); *Appl. Phys. Lett.*, **6**, 178 (1965).
32. Cathey W. T., *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 457 (1965).
33. Pennington K. S., *Microwaves*, **4**, (10) 35; русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (9), 121 (1966) (обсуждается дифракция Брэгга на толстой голограмме в методах цветной голографии).
34. Gabor D., Stroke G. W., Brumm D., Funkhouser A., Labeyrie A., *Nature*, **208**, 1159 (1965).
35. Rogers G., *Proc. Roy. Soc. (Edinburgh)*, **A58**, 193 (1950—1951).
36. Rogers G., *Proc. Roy. Soc. (Edinburgh)*, **A63**, 193 (1952).
37. Bragg W., Rogers G., *Nature*, **167**, 190 (1951).
38. Armstrong J. A., *IBM J. Res. Develop.*, **9**, 171 (1965).
39. Stroke H. H., Principles of Holography, Laser, Inc., Briarcliff Manor, New York, 1965.
40. Baez A. V., *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 756 (1952).
41. Leith E., Upatnieks J., *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1123 (1962).
42. Baez A. V., El-Sum H. M. A., в кн. «X-ray Microscopy and Microradiography» (Cosslett V. E. et al., eds.), Acad. Press, New York, 1957, p. 347—366.
43. Kirkpatrick P., El-Sum H. M. A., *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 825 (1956).
44. Jacquinet P., Roizen-Dossier B., в кн. «Progress in Optics» (Wolf E., ed.), vol. III, North-Holland Publ., Amsterdam, 1964, p. 29—186 (в частности, см. стр. 136—146); см. также Stroke G. W., там же, vol. II, p. 1—72.
45. Gabor G., Stroke G. W., Restrict R., Funkhouser A., Brumm D., *Phys. Lett.*, **18**, 116 (1965).
46. Jenkins F. A., White H. E., Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, New York, 1957.
47. Kellström G., *Nov. Acta Reg. Soc. Sci. Uppsaliensis*, **8**, 5 (1932).
48. Stroke G. W., частные сообщения Е. Н. Лейту, 1963—1964.
49. Bragg W. L., *Nature*, **149**, 470 (1942).
50. Buerger M. J., *Proc. Natl. Acad. Sci. US*, **27**, 117 (1941).
51. Buerger M. J., *J. Appl. Phys.*, **21**, 909 (1950).
52. Buerger M. J., *Proc. Natl. Acad. Sci. US*, **36**, 330—335 (1950).
53. Voersch H., *Z. Techn. Physik*, 337—338 (1938) (в частности, см. примечание 3 на стр. 338).
54. Kendrew J. C. et al., *Nature*, **181**, 662 (1958).
55. Kendrew J. C., в кн. «Biophysical Science — a Study Program» (Oncley J. L., ed.), Wiley, New York, 1959, p. 94.

56. Perutz M., *Sci. Am.*, **211**, 64 (1964); русский перевод: сб. «Молекулы и клетки», изд-во «Мир», 1966, стр. 11—23.
57. Bragg W. L., *Nature*, **166**, 399 (1950).
58. Tollin P., Main P., Rossmann M. G., Stroke G. W., Restrict R., *Nature*, **209**, 603 (1966).
59. Ramachandran G. N., Raman S., *Acta Cryst.*, **12**, 957 (1959).
60. Ramachandran G. N., Advanced Methods of Crystallography, Acad. Press, New York, 1964, p. 371.
61. Burch J. M., *Nature*, **171**, 889 (1953).
62. Duson J., в кн. «Concepts of Classical Optics» (Strong J., ed.), Freeman, San Francisco, California, 1958, p. 383.
63. Brooks R. E., Hellinger L. O., Wuerker R. F., Briones R. A., *Appl. Phys. Lett.*, **7**, 92 (1965).
64. Stroke G. W., Funkhouser A., *Phys. Lett.*, **16**, 272 (1965).
65. Mertz L., advertisement, *J. Opt. Soc. Am.*, **54** (10), IV (1964).
66. Winthrop J. T., Worthington C. R., *Phys. Lett.*, **15**, 124 (1965).
67. Cochran G., abstract, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 615 (1965).
68. Stroke G. W., Restrict R. C., *Appl. Phys. Lett.*, **7**, 229 (1965).
69. Jacquinet P., Dufour Ch., *J. Rech. Centre Nat. Rech. Sci., Lab. Bellevue (Paris)*, **6**, 91 (1948).
70. Fellgett P., диссертация, Cambridge Univ., 1951.
71. Strong J., *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 354 (1957).
72. Jacquinet P., *Rep. Progr. Phys.*, **23**, 267—312 (1960).
73. Colloquium papers, в *J. Phys. Radium*, **19** (3), (1958).
74. Connes J., *Rev. Optique*, **40**, 45, 116, 171, 231 (1961).
75. Stroke G. W., Proc. Zeeman Centennial Conf., Amsterdam, Sept. 1965. *Physica*, в печати.
76. Harrison G. R., Lord R. C., Loofbourow J. R., Practical Spectroscopy, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1949.
77. Stroke G. W., Funkhouser A., в печати.
78. Jacquinet P., XVIIe Congress du GAMS, Paris, 1954.
79. Jacquinet P., *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 761 (1954).
80. Mertz L., Transformations in Optics, Wiley, New York, 1965; русский перевод: Мерц Л., Интегральные преобразования в оптике, изд-во «Мир», 1967.
81. Stroke G. W., *Phys. Letters*, **5**, 45 (1963).
82. Gabor D., Stroke G. W., Restrict R., Funkhouser A., Broom D., *Phys. Letters*, **18**, 274 (1965).
83. El-Sum H. M. A., Optical Processing of Information (Pollack D. K., Koester C. J., Tippett J. T., eds), Spartan Books, Baltimore, Maryland, 1963, p. 85—97; русский перевод: Оптическая обработка информации, сб. статей, изд-во «Мир», 1966, стр. 251—266.

## БИБЛИОГРАФИЯ <sup>1)</sup>

### Обзоры

1. Платоненко В. Т., Голография. Фотографирование и восстановление волнового фронта, *УФН*, **90** (1), 199—201 (1966).

<sup>1)</sup> Здесь собрана добавленная при переводе литература за 1965—1966 гг., на которую нет ссылок в монографии и обзоре. Библиографию за предыдущие годы см. в *J. Soc. Mot. Pict. Telev. Eng.*, **75**, 373—434, 759—809 (1966).

2. Сороко Л. М., Голография и интерференционная обработка информации, *УФН*, **90** (1), 1—46 (1966). Библ. 98 назв.
3. Сороко Л. М., Безлинзовая оптика. Фотографирование в лучах лазера, *Природа*, **55** (2), 37—48 (1966).
4. Blum J., Holography: the picture looks good, *Electronics*, **39** (8), 139—143 (1966).
5. Clossets F., Des «objets-fantômes» en plein jour, *Sciences et Avenir* (239), 8—12, 70 (1967).
6. Collier R. J., Some current views on holography, *IEEE Spectrum*, **3** (7), 67—74 (1966).
7. Davy J., Breakthrough in three dimensions, *Management Today*, p. 21, 22 (July/August 1966).
8. Di Pentima A., Holography, 133rd AAAS Meeting — Washington, D. C., 26—31 December, 1966, *Science*, **154** (3754), 1363, 1364 (1966).
9. Eaglesfield Ch. C., Holograms: what uses have they?, *Discovery*, **27** (6), 23—26 (1966).
10. Gabor D., Holography, or the whole picture, *New Scientist*, **29** (478), 74—78 (1966).
11. Gabor D., Holography—the reconstruction of wavefronts, *Electronics and Power*, **12**, 230—239 (July 1966).
12. Kogelnik H. W., Holography—fundamentals and demonstrations, *The Scanner*, **16** (5), 1 (1966).
13. Leith E. N., Holography's practical dimension, *Electronics*, **39** (15), 88—94 (1966).
14. Leith E. N., Holography—lensless 3D photography, *Industrial Research*, **8** (9), 40—44 (1966).
15. Leith E. N., Upatnieks J., Wavefront reconstruction photography, *Physics Today*, **18** (8), 26—32 (1965).
16. Leith E. N., Upatnieks J., True 3D image from laser photography, *Electronics World*, p. 34, 35 (October 1965).
17. Leith E. N., Upatnieks J., Holograms: their properties and uses, *SPIE Journ.*, **4** (1), 3—6 (October—November 1965).
18. Leith E. N., Upatnieks J., Photography by laser, *Scientific American*, **212** (6), 24 (1965), русский перевод: *УФН*, **87** (3), 521—538 (1965); *Наука и жизнь*, (11), 22—31 (1965).
19. Morris R. E., Physical principles of holography, *J. Phot. Sci.*, **14** (5), 291—296 (1966).
20. Nassenstein H., Abbildungsverfahren mit Reconstruction des Wellenfeldes (Holographi), *Z. Angew. Physik*, **22** (1), 37—50 (1966).
21. Ose T., Holography, *Oyo Buturi*, **35** (9), (1966), на японском языке.
22. Paques H., Smigielski P., Holographie, *Optica Acta*, **12** (4), 359—378 (1965).
23. Spiller E., Optische Nachrichtenübertragung durch Holographie, *Umschau in Wiss. Techn.*, (9), 288—292; (10), 315—321 (1966).
24. Thompson B. J., Parent J. B., Jr., Holography, *Science Journ.*, **3** (1), 42—49 (1967).

## Физическая оптика

1. Михаэлян А. Л., Бобринёв В. И., Шумовые ограничения при получении объемных изображений, *Письма в редакцию ЖЭТФ*, **IV** (5), 172—174 (1966).
2. Пистолькорс А. А., О разрешающей способности голограммы, *ДАН СССР*, **172** (2), 334—337 (1967).
3. Burch J. M., Gates J. W., Hall R. J., Talner L., Holography with a scatter-plate as a beam-splitter and a pulsed ruby laser as a light source, *Nature*, **212** (5068), 1347 (1966).

4. Cathey W. I., Jr., Spatial phase modulation of wavefronts in spatial filtering and holography, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (9), 1167—1171 (1966).
5. Delsing E., The Fourier spectra of photographic objects. Part 1. Statement of the problem and apparatus for research, *Optik*, **23** (2), 177—188 (1965/1966).
6. Gabor D., Improvements in and relating to optical apparatus for producing multiple interference patterns, пат. США 2770166, November 13, 1956.
7. Helström C. W., Image luminance and ray tracing in holography, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (4), 433—441 (1966).
8. Kock W. E., Rendeiro J., Some curious properties of holograms, *Proc. IEEE*, **53** (11), 1787 (1965).
9. Kopylov G. I., On some possible properties of holograms, *Phys. Lett.*, **21** (6), 645, 646 (1966).
10. Lohmann A. W., Wavefront reconstruction for incoherent objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **55** (11), 1555, 1556 (1965).
11. Lohmann A. W., Reconstruction of vectorial wavefronts, *Appl. Optics*, **4** (12), 1667 (1965).
12. Lurie M., Effects of partial coherence on holography with diffuse illumination, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (10), 1369—1372 (1966).
13. Mandel L., Color imagery by wavefront reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, **55** (12), 1697, 1698 (1965).
14. Marquet M., Fortunato G., Royer H., Etude theorique de la correspondance objet-image dans l'holographie, *Compt. Rend.*, **261** (18), 3553—3555 (1965).
15. Meier R. W., Depth of focus and depth of field in holography, *J. Opt. Soc. Am.*, **55** (12), 1693 (1965).
16. Meier R. W., Cardinal points and the novel imaging properties of a holographic system, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (2), 219—223 (1966).
17. Parrent G. B., Reynolds G. O., Space-band-width theorem for holograms, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (10), 1400 (1966).
18. Peters P. J., Incoherent holograms with mercury light source, *Appl. Phys. Lett.*, **8** (8), 209 (1966).
19. Rosen R., Focused-image holography with extended sources, *Appl. Phys. Lett.*, **9** (9), 337—339 (1966).
20. Royer H., Contribution a l'etude de l'information en holographie, *Compt. Rend.*, **261** (20), 4003 (1965).
21. Stroke G. W., Brumm D., Funkhouser A., Labeyrie A., Restrick R. C., On the absence of phase-recording or «twin-image» separation problems in Gabor (in-line) holography, *Brit. J. Appl. Phys.*, **17** (4), 497—500 (1966).
22. Suzuki T., Hioki R., Speckled diffraction pattern and source effect on resolution limit in holography, *Jap. J. Appl. Phys.*, **5** (9), 814—818 (1966).
23. Winthrop J. T., Worthington C. R., Fresnel-transform representation of holograms and hologram classification, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (10), 1362—1369 (1966).
24. Worthington C. R., Production of holograms with incoherent illumination, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (10), 1397 (1966).

## Зонные пластинки Френеля

1. Einighammer H. J., Zur Abbildung von Röntgensternen mit dem Hologramm-Teleskop, *Optik*, **23** (7), 627—641 (1965/1966).
2. Norman M. H., Chau H. H. M., Zone plate theory based on holography, *Appl. Optics*, **6** (2), 317—322 (1967).
3. Kock W. E., Rosen L., Rendeiro J., Holograms and zone plates, *Proc. IEEE*, **54** (11), 1599, 1600 (1966).

4. Kock W. E., Three-color hologram zone plates, *Proc. IEEE*, **54** (11), 1610, 1611 (1966).
5. Paques H., Achromatization of holograms, *Proc. IEEE*, **54** (9), 1195 (1966).
6. Roig J., Taravellier R., Mas G., Interferences entre les ondes diffractées par des écrans de faibles dimensions et un fond cohérent fourni par un laser, *Compt. Rend.*, **263** (9), 608—611 (1966).
7. Waldman G. S., Variation on the Fresnel zone plate, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (2), 215—218 (1966).

#### Методика

1. Зайдель А. Н., Константинов В. Б., Островский Ю. И., Лазерная резольвометрия, *Журн. научн. и прикладн. фотографии и кинематографии*, **11** (5), 381 (1966).
2. Клименко И. С., Рукман Г. И., Габоровское восстановление волнового фронта с помощью лазера, *Оптика и спектроскопия*, **XXI** (6), 751, 752 (1966).
3. Комар А. П., Стабников Н. В., Турухано Б. Г., Голография с прямым опорным пучком, *ДАН СССР*, **173** (5), 1059—1061 (1967).
4. Косоуров Г. И., Калинин И. Н., Головей М. П., Восстановление изображения по голограмме в монохроматическом свете, *Письма в редакцию ЖЭТФ*, **IV** (3), 84—86 (1966).
5. Константинов В. Б., Зайдель А. Н., Константинов В. Б., Островский Ю. И., Фотографирование в когерентном свете. Экспериментальная техника и разрешающая способность метода, *ЖТФ*, **XXXVI** (9), 1718—1721 (1966).
6. Beddoes M. P., Aktar S. A., Some techniques for producing holograms with lasers, *Electronics and Communication*, **13** (9), 61 (1965).
7. Carcel J. T., Rodemann A. H., Florman E., Domeshech S., Simplification of holographic procedures, *Appl. Optics*, **5** (7), 1199—1201 (1966).
8. Corcoran V. J., Herron R. W., Jaramillo J. G., Generation of a hologram from a moving target, *Appl. Optics*, **5** (4), 668, 669 (1966); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (10), 129, 130 (1966).
9. De Bitetto D. J., On the use of moving scatterers in conventional holography, *Appl. Phys. Lett.*, **8** (4), 78—80 (1966).
10. Falconer D. G., Role of the photographic process in holography, *Phot. Sci. Eng.*, **10** (3), 133—135 (1966).
11. Harris F. S., Sherman G. C., Billings B. H., Copying holograms, *Appl. Optics*, **5** (4), 665, 666 (1966); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (10), 131—133 (1966).
12. Hoffman A. S., Doidge J. G., Mooney D. G., Inverted reference-beam hologram, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1559 (1965).
13. Козма А., Photographic recording of spatially modulated coherent light, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**, 428—434 (1966).
14. Landry J., Coffee-table holography, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (8), 1133 (1966).
15. Landry M. J., Copying holograms, *Appl. Phys. Lett.*, **9** (8), 303, 304 (1966).
16. Leith E. N., Photographic film as an element of a coherent optical system, *Phot. Sci. Eng.*, **6** (2), 75—80 (1962).
17. Leith E. N., Kozma A., Upatnieks J., Requirements for hologram construction, *Laser Lett.*, **3** (6), 2—10 (1966).
18. Nassimbene E. G., Ross R. M., Reducing noise in holograms, *IBM Techn. Disc. Bull.*, **8**, 1396 (1966).
19. Rigler A. K., Wavefront reconstruction by reflection, *J. Opt. Soc. Am.*, **55** (12), 1693 (1965).

20. Rogers G., The design of experiments for recording and reconstructing three-dimensional objects in coherent light (holography), *J. Sci. Instr.*, **43** (10), 677 (1966).
21. Ross R. M., Making holograms using Brewster's angle, *IBM Techn. Disc. Bull.*, **8**, 1404 (1966).
22. Royer H., Study of the recording of high frequencies by photographic emulsions, *Compt. Rend.*, **261**, 5024—5027 (1965).
23. Slaymaker F. H., The elimination of building vibration in an optical laboratory, *Appl. Optics*, **5** (11), 1766—1768 (1966).
24. Van Ligten R. F., Influence of photographic film on wavefront reconstruction. I. Plane wavefronts, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (1), 1—9 (1966).
25. Urbach J. C., Meier R. W., Thermoplastic xerographic holography, *Appl. Optics*, **5** (4), 666, 667 (1966); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (10), 125—128 (1966).
26. Urbach J. C., The role of screening in thermoplastic xerography, *Phot. Sci. Eng.*, **10** (5), 287—297 (1966).
27. Wallis S., Magnification and observation of a holographic interference pattern, *Opt. Acta*, **13** (3), 241—246 (1966).
28. Wilmot D. W., Schineller E. R., Heuman R. W., Hologram illumination with a flashlight, *Proc. IEEE*, **54** (4), 690, 691 (1966).

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ И КОРРЕЛЯЦИИ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ИЛИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Преобразование Фурье и его различные приложения к операциям свертки, корреляции и распределениям в настоящее время уже вошли в арсенал теоретической оптики и стали ее неотъемлемым инструментом. Это видно на примерах теории образования изображения, интерферометрии, спектроскопии и, наконец, голографии. Даже элементарное рассмотрение теории преобразования Фурье, приведенное ниже, дает исследователям универсальное средство для анализа различных задач физической оптики, теории дифракции и интерферометрии. А во многих случаях использование только таких теорем, как теоремы смещения или теоремы свертки, которые будут даны в следующих разделах, позволяет быстро находить решения целого ряда задач, которые в прошлом требовали применения специально разработанных и часто весьма громоздких методов.

### 1. Преобразование Фурье<sup>1)</sup>

Если задана действительная или комплексная функция  $f(x)$  действительного переменного  $x$ , меняющегося в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , такая, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx, \quad (1)$$

т. е. функция  $f(x)$  принадлежит к классу  $L(f \in L)$ , то фурье-образ  $F(u)$  этой функции  $f(x)$  определяется выражением

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(2\pi i u x) dx. \quad (2)$$

Часто выражение (2) записывается сокращенно в виде

$$f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u) \quad (3)$$

или

$$\mathfrak{F}[f(x)] = F(u), \quad (4)$$

где символ  $\mathfrak{F}$  обозначает преобразование Фурье, или фурье-образ функции, а стрелка обозначает сам процесс преобразования.

Аналогично можно представить обратное преобразование Фурье, которое получается, если в экспоненте взять знак минус:  $\exp(-2\pi i u x)$ .

Если функция  $F(u)$  принадлежит к классу  $L [F(u) \in L]$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \exp(-2\pi i u x) dx = f(x), \quad (5)$$

или в сокращенном виде

$$F(u) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f(x), \quad (6)$$

или, наконец,

$$\mathfrak{F}^{-1}[F(u)] = f(x), \quad (7)$$

где символ  $\mathfrak{F}^{-1}$  означает обратное преобразование Фурье, или инверсный фурье-образ.

#### 1.1. Некоторые свойства преобразования Фурье

Приведем, как правило, без доказательства те свойства, которые очень часто используются в оптике.

#### 1.2. Линейность

Пусть  $a_1$  и  $a_2$  — комплексные постоянные. Из определения (2) непосредственно следует, что если

$$\left. \begin{array}{l} a_1 f_1(x) \\ a_2 f_2(x) \end{array} \right\} \in L, \quad (8)$$

то

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} a_1 F_1(u) + a_2 F_2(u).$$

#### 1.3. Теорема смещения

Это наиболее важное свойство выражается соотношением, которое нетрудно доказать. Свойство смещения фурье-образа состоит в следующем.

<sup>1)</sup> Разд. 1 и 2 основаны на работах [1—4].



Если

$$f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u),$$

то

$$f(x - x') \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u) \exp(2\pi i u x'), \quad (9)$$

где  $x'$  — постоянная. Функция  $f(x - x')$  получена из первоначальной функции  $f(x)$  путем смещения начала отсчета в точку  $+x'$ . Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x') \exp(2\pi i u x) dx = F(u),$$

Если произвести замену переменных

$$x - x' \rightarrow y, \text{ причем } y \equiv x, \\ dx \rightarrow dy,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x') \exp(2\pi i u x) dx$$

преобразуется в

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp[2\pi i u (x + x')] dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(2\pi i u x) \exp(2\pi i u x') dx = F(u) \exp(+2\pi i u x'),$$

что и требовалось доказать.

#### 1.4. Обратная теорема смещения

Это свойство является симметричным предыдущему, и его тоже легко доказать.

Если

$$f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u), \quad (10)$$

то

$$f(x) \exp(-2\pi i u' x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u - u'),$$

где  $u'$  — постоянная.

Если фурье-образ существует, то выражения (9) и (10) можно записать в следующем виде:

$$f(x) \xrightarrow{\frac{\mathfrak{F}}{\delta^{-1}}} F(u),$$

далее

$$f(x - x') \xrightarrow{\frac{\mathfrak{F}}{\delta^{-1}}} F(u) \exp(2\pi i u x') \quad (9a)$$

и

$$f(x) \exp(-2\pi i u' x) \xrightarrow{\frac{\mathfrak{F}}{\delta^{-1}}} F(u - u'). \quad (10a)$$

Легко убедиться в целесообразности следующих обозначений (рис. 1):

$$[f]_{x-x'} \equiv f(x - x'), \quad (11a)$$

$$[f]_{x+x'} \equiv f(x + x'), \quad (11б)$$

$$[F]_{u-u'} \equiv F(u - u'), \quad (11в)$$

$$[F]_{u+u'} \equiv F(u + u'), \quad (11г)$$

где, например, выражение  $[f]_{x+x'} \equiv f(x + x')$  соответствует функции  $f(x)$ , если начало координат перенесено из точки  $x=0$

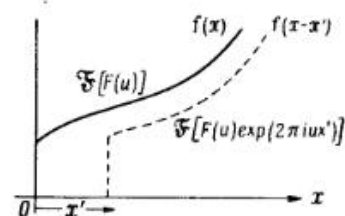


Рис. 1. Теорема смещения фурье-образа, вытекающая из (9).

в точку  $x = -x'$ . С помощью выражений (11a) — (11г) мы можем записать систему (9) и (10) в такой форме

$$[f]_{x-x'} \xrightarrow{\frac{\mathfrak{F}}{\delta^{-1}}} F \exp(2\pi i u x'), \quad (9б)$$

$$[f]_{x+x'} \xrightarrow{\frac{\mathfrak{F}}{\delta^{-1}}} F \exp(-2\pi i u x');$$

$$f \exp(2\pi i u' x) \xrightarrow{\frac{\mathfrak{F}}{\delta^{-1}}} [F]_{u-u'}, \quad (9в)$$

$$f \exp(-2\pi i u' x) \xrightarrow{\frac{\mathfrak{F}}{\delta^{-1}}} [F]_{u+u'}.$$

Наконец, следует обратить внимание на то, что различие между фурье-образом, который содержит  $\exp(2\pi i u x)$ , и инверсным фурье-образом, содержащим  $\exp(-2\pi i u x)$ , имеет существенное значение, когда производят сложение или вычитание двух фурье-образов (9б) и (9в). Соответствующим примером служат соотношения (58) — (64).

### 1.5. Таблица свойств преобразования Фурье

Таблица свойств преобразования Фурье, приводимая без доказательств, дана здесь ввиду значимости этих свойств для многих оптических задач. Большинство необходимых доказательств легко выполнить по схеме, использованной в предыдущем разделе. Если  $x'$  и  $u'$  — постоянные величины, то

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u), \\ f(x - x') &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u) \exp(2\pi i u x'), \\ f(x + x') &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u) \exp(-2\pi i u x'), \\ f(x - x') + f(x + x') &\xrightarrow{\mathfrak{F}} 2F(u) \cos(2\pi u x'), \\ f(x - x') - f(x + x') &\xrightarrow{\mathfrak{F}} 2iF(u) \sin(2\pi u x'), \\ 2f(x) - f(x - x') - f(x + x') &\xrightarrow{\mathfrak{F}} 4F(u) \sin^2 \pi u x', \\ f(x) \exp(-2\pi i u' x) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u - u'), \\ f(x) \exp(2\pi i u' x) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u + u'), \\ f(x) \cos(2\pi u' x) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{2} [F(u - u') + F(u + u')], \\ f(x) \sin(2\pi u' x) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} -\frac{1}{2} i [F(u + u') - F(u - u')], \\ f(x) \sin^2 \pi u' x &\xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{4} [2F(u) - F(u + u') - \\ &\quad - F(u - u')]. \end{aligned} \quad (12)$$

### 1.6. Двумерное и многомерное преобразование Фурье

Если учесть очевидное ограничение [как и в случае соотношения (1)], то вместо  $x$  и  $y$  можно использовать переменные  $x, y, z$  и т. д., а также  $u, v, w$  и т. д. и соответствующие кратные интегралы в формулах преобразования.

### 1.7. Изменение масштаба и преобразование Фурье

Докажем, что если

$$f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u), \quad (13)$$

то

$$f(ax) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right),$$

где  $a$  — комплексная постоянная с модулем  $|a|$ . Нам требуется доказать

$$\mathfrak{F}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) \exp(2\pi i u x) dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right). \quad (14)$$

Пусть  $ax = y$  и  $dx = (1/a) dy$ . Рассмотрим сначала  $a > 0$ . Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y \rightarrow \infty$  и

$$\mathfrak{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left(2\pi i u \frac{y}{a}\right) dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right).$$

Теперь пусть  $a < 0$ . Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y \rightarrow -\infty$  и

$$\mathfrak{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y) \exp\left(2\pi i u \frac{y}{a}\right) dy = -\frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right).$$

В общем случае  $a \neq 0$  имеем

$$f(ax) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right),$$

что и требовалось доказать.

Особый случай изменения масштаба возникает при  $a = -1$ :

$$f(-x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(-u). \quad (15)$$

Важный класс преобразования комплексно-сопряженной функции рассматривается в следующем разделе.

### 1.8. Фурье-образ комплексно-сопряженной функции

Этот важный класс преобразований встречается в оптике очень часто. Пусть  $f^*(x)$  — комплексно-сопряженная функция к  $f(x)$ . Иначе говоря,  $f^*(x)$  получается из  $f(x)$  путем замены всех  $i = \sqrt{-1}$  на  $-i$ . Учитывая это, найдем, что

$$f^*(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F^*(-u). \quad (16)$$

Действительно, сразу получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) \exp(2\pi i u x) dx = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi i u x) dx \right\}^* = F^*(-u),$$

что и требовалось доказать.

### 1.9. Тригонометрическая форма преобразования Фурье

Часто используется следующая тригонометрическая форма преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(2\pi i u x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi u x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi u x) dx. \quad (17)$$

### 1.10. Свойства симметрии

Используя предыдущие уравнения, легко доказать следующие важные соотношения.

Если  $f(x)$  действительна, т. е.

$$f^*(x) = f(x), \quad (18)$$

то

$$F^*(-u) = F(u),$$

или

$$F^*(u) = F(-u).$$

Если  $f(x)$  действительна и четна, т. е.

$$f(x) = f^*(x) = f^*(-x),$$

то

$$F(u) = F^*(u) = F^*(-u). \quad (19)$$

Если  $f(x)$  действительна и нечетна, т. е.

$$f(x) = -f(-x) = f^*(x),$$

то

$$F(u) = -F(-u) = F^*(-u). \quad (20)$$

## 2. Свертка

Интегральная операция свертки появляется в оптике столь же естественно, как и при описании любой другой линейной системы. Краткое рассмотрение, приведенное ниже, имеет важное значение для понимания многих разделов книги.

### 2.1. Определение свертки

По определению свертка  $f(t)$  получается из двух функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  с помощью интегральной операции

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad (21)$$

где  $\tau$  — независимая (текущая) переменная, а  $t$  представляет ряд последовательных значений *сдвига* функции  $f_2(t)$  относительно  $f_1(t)$ . Интеграл от произведения перекрывающихся частей функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  определяется при одном таком сдвиге  $t$ . Другими словами, функция  $f(t)$  в аналитической или графической форме получается путем последовательного определения интеграла от произведения двух функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , когда эти две функции последовательно сдвигаются друг относительно друга. Значения интеграла находятся для каждого сдвига  $t$  функции  $f_2(t)$  относительно  $f_1(t)$ , включая значение  $f(0)$ , которое соответствует значению  $t=0$ , когда две функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  «совпадают», т. е. имеют общую абсциссу.

Ради компактности интеграл свертки (21) часто удобно записать в виде

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t). \quad (22)$$

### 2.2. Кратные свертки и свертки нескольких функций

Двойной интеграл свертки двух функций независимых переменных  $x$  и  $y$  можно записать в виде

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_0, y_0) f_2(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0. \quad (23)$$

Возможно получение свертки более чем двух функций, которая также имеет физический смысл, в частности в оптике (в интерферометрии, спектроскопии, голографии и т. д.). Например, функция пропускания  $W(\sigma)$ , или аппаратная функция интерферометра Фабри — Перо, в зависимости от волнового числа  $\sigma = 1/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны света в сантиметрах, определяется, согласно Шаббало [6], следующим уравнением:

$$W(\sigma) = A(\sigma) \otimes D(\sigma) \otimes F(\sigma), \quad (24)$$

где  $A(\sigma)$  — так называемая *функция Эри*, характеризующая пропускание интерферометра Фабри — Перо (эта функция используется в физической оптике);  $D(\sigma)$  — *функция рассеяния*, характеризующая несовершенство зеркал интерферометра

Фабри — Перо, а  $F(\sigma)$  — функция, характеризующая протяженность источника, который всегда имеет конечные размеры, в то время как при выводе функции Эри  $A(\sigma)$  источник рассматривался точечным. Напомним, что функция Эри  $A(\sigma)$  может быть получена в виде

$$A(\sigma) = \frac{\text{Выходящий поток}}{\text{Падающий поток}} = \left( \frac{T}{1-R} \right)^2 / \left[ 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(2\pi nl \cos i) \right], \quad (25)$$

где  $R$  и  $T$  — коэффициенты отражения и пропускания зеркал Фабри — Перо,  $l$  — расстояние между зеркалами,  $n$  — коэффициент преломления среды между зеркалами, а  $i$  — угол, образуемый плоской волной в пространстве между зеркалами с оптической осью.

Можно сказать, что функция, аналогичная описанной выражением (24), характеризует и другие спектроскопические приборы, например спектрометры с дифракционными решетками. Уравнения, близкие к уравнению (24), описывают работу интерферометрических устройств, используемых при получении голограммы, а также во многих применениях голографии.

### 2.3. Теорема свертки (фурье-образ свертки)

Фурье-образ свертки равен произведению фурье-образов двух функций. Докажем также обратную теорему: фурье-образ произведения двух функций равен свертке фурье-образов двух функций.

Чтобы доказать прямую теорему свертки, рассмотрим функцию

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (26)$$

Пусть

$$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u) \quad (27)$$

осуществляется с помощью преобразования Фурье, т. е.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i u t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt. \quad (28)$$

Теперь изменим порядок интегрирования в выражении (28), опираясь на обычные в этом случае предположения, затем внесем

экспоненциальный множитель в скобки и вынесем  $f_1(\tau)$  за скобки:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i u t) f_2(t - \tau) dt \right] d\tau. \quad (29)$$

Теперь применим к (29) теорему смещения фурье-образа (9а). Мы замечаем, что скобку в (29) можно записать так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) \exp(-2\pi i u t) dt = F_2(u) \exp(2\pi i u \tau), \quad (30)$$

где  $F_2(u)$  — обозначает фурье-образ функции  $f_2(t)$ . Уравнение (29) можно теперь записать в виде

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) F_2(u) \exp(2\pi i u \tau) d\tau. \quad (31)$$

Поскольку  $F_2(u)$  можно при интегрировании по  $\tau$  вынести за интеграл, выражение (31) окончательно принимает вид

$$F(u) = F_2(u) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \exp(2\pi i u \tau) d\tau; \quad (32)$$

в последнем выражении легко распознать произведение фурье-образов

$$F(u) = F_1(u) F_2(u). \quad (33)$$

Таким образом, можно заключить, что если

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F_1(u)$$

и

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F_2(u),$$

то

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(u) = F_1(u) F_2(u), \quad (34a)$$

т. е.

$$\boxed{f_1 \otimes f_2 \xrightarrow{\mathfrak{F}} F_1 \cdot F_2.} \quad (34b)$$

Уравнение (34) представляет собой первую теорему свертки, которая утверждает, что фурье-образ свертки двух функций равен произведению фурье-образов двух функций.

Теперь приведем вторую теорему свертки. Пусть  $f(t)$  — свертка двух функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , т. е.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad (35)$$

и пусть  $f_2(t)$  — фурье-образ функции  $F_2(u)$ , т. е.

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(u) \exp(-2\pi i u t) du, \quad (36)$$

или

$$f_2(t - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(u) \exp[-2\pi i u (t - \tau)] du. \quad (37)$$

Подставив выражение (37) в (35), получим

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(u) \exp(-2\pi i u t) \exp(2\pi i u \tau) du d\tau. \quad (38)$$

Вследствие равномерной сходимости второго интеграла по  $\tau$  мы можем изменить порядок интегрирования в уравнении (38) на обратный, в результате чего получим

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(u) \exp(-2\pi i u t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \exp(2\pi i u \tau) d\tau}_{F_1(u)} du. \quad (39)$$

Второй интеграл равен  $F_1(u)$ , т. е. фурье-образу  $f_1(\tau)$ , и окончательно выражение (39) можно записать в таком виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(u) F_2(u) \exp(-2\pi i u t) du. \quad (40)$$

Сравнивая выражения (40) и (35), можно получить

$$\boxed{f_1 \otimes f_2 \xleftarrow{\mathfrak{F}^{-1}} F_1 F_2.} \quad (41)$$

Уравнение (41) показывает, что фурье-образ произведения двух функций равен свертке фурье-образов двух функций.

### 3. Функция корреляции

Необходимо подчеркнуть существенное различие между сверткой, с одной стороны, и функцией корреляции — с другой, особенно в связи с тем, что по виду они очень близки.

Если одна из двух функций является сопряженной с некоторой функцией, то в качестве подходящего представления выступает функция корреляции, а не свертка.

#### 3.1. Определение функции корреляции

По определению функция автокорреляции  $\varphi_{11}(\tau)$  равна

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_1^*(t + \tau) dt, \quad (42)$$

а функция кросс-корреляции  $\varphi_{12}$  определяется выражением

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2^*(t + \tau) dt. \quad (43)$$

Аналогично имеем

$$\varphi_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(t + \tau) f_2(t) dt. \quad (44)$$

#### 3.2. Преобразование функции корреляции

Рассмотрим произведение

$$F_1 F_2^*, \quad (45)$$

для которого с помощью преобразования Фурье можем записать

$$F_1 \xrightarrow{\mathfrak{F}} f_1, \quad (46)$$

а

$$F_2 \xrightarrow{\mathfrak{F}} f_2. \quad (47)$$

Мы хотим получить выражение для фурье-образа произведения  $F_1 F_2^*$ . Сначала заметим [см. (41)], что из выражения (45) следует

$$F_1 F_2^* \xrightarrow{\mathfrak{F}} f_1(t) \otimes f_2^*(-t). \quad (48)$$

Здесь последнее соотношение необходимо записать полностью. Кроме того,

$$f_1(t) \otimes f_2^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2^*[t - (-\tau)] d\tau, \quad (49)$$

т. е.

$$f_1(t) \otimes f_2^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2^*(t + \tau) d\tau. \quad (50)$$

Уравнение (50) является, согласно соотношению (43), функцией корреляции  $\varphi_{12}(\tau)$ . Поэтому мы можем записать

$$F_1 F_2^* \xrightarrow{\hat{g}} f_1(t) \otimes f_2^*(-t) \equiv \varphi_{12}(\tau). \quad (51)$$

Часто бывает выгодно представить функцию корреляции в форме, аналогичной интегралу свертки. Мы определяем операцию корреляции с помощью символа  $*$

$$\varphi_{12}(\tau) \equiv f_1(t) * f_2^*(t). \quad (52)$$

Наконец, мы можем записать соотношение (51) в виде

$$\boxed{F_1 F_2^* \xrightarrow{\hat{g}} f_1 * f_2^*} \quad (53)$$

Аналогично находим

$$F_1^* F_2 \xrightarrow{\hat{g}} f_1^* + f_2. \quad (54)$$

Мы можем привести также выражение для преобразований, полученных при условиях

$$\begin{aligned} f_1 &\xrightarrow{\hat{g}} F_1, \\ f_2 &\xrightarrow{\hat{g}} F_2, \end{aligned} \quad (55)$$

когда мы имеем

$$f_1 f_2^* \xrightarrow{\hat{g}} F_1 * F_2^* \quad (56)$$

$$f_1^* f_2 \xrightarrow{\hat{g}} F_1^* * F_2. \quad (57)$$

Однако здесь надо соблюдать осторожность, так как знак «плюс» в  $\exp(2\pi i u x)$  означает прямое преобразование и соответственно знак «минус» в  $\exp(-2\pi i u x)$  — обратное преобразование. Если это учесть, то можно записать полную систему двух преобразований в следующей форме,

Если заданы

$$\begin{aligned} g_1 &\xrightarrow{\hat{g}} G_1, \\ g_2 &\xrightarrow{\hat{g}} G_2, \end{aligned} \quad (58a)$$

то [выражение (2)]

$$\begin{aligned} G_1 &\xrightarrow{\hat{g}} g_1(-x), \\ G_2 &\xrightarrow{\hat{g}} g_2(-x), \end{aligned} \quad (58b)$$

и сводка правил преобразования для функций корреляции имеет вид

$$\begin{aligned} g_1 g_2^* &\xrightarrow{\hat{g}} G_1 + G_2^*, \\ g_1^* g_2 &\xrightarrow{\hat{g}} G_1^* + G_2. \end{aligned} \quad (59)$$

и

$$\begin{aligned} G_1 G_2^* &\xrightarrow{\hat{g}} (g_1 * g_2^*)_{-x}, \\ G_1^* G_2 &\xrightarrow{\hat{g}} (g_1^* * g_2)_{-x}. \end{aligned} \quad (60)$$

Наконец, для системы функций автокорреляции мы имеем следующую сводку правил преобразований. Пусть дано

$$\begin{aligned} f_1 &\xrightarrow{\hat{g}} F_1, \\ f_1^* &\xrightarrow{\hat{g}} F_1^*(-u). \end{aligned} \quad (61)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} f_1 f_1^* &\xrightarrow{\hat{g}} F_1 * F_1^*, \\ f_1^* f_1 &\xrightarrow{\hat{g}} F_1^* * F_1. \end{aligned} \quad (62)$$

Следует указать, что выражение (62) известно как *теорема Парсеваля*, которая иногда интерпретируется как закон сохранения энергии. Можно также отметить, что

$$\begin{aligned} F_1 F_1^* &\xrightarrow{\hat{g}} (f_1 * f_1^*)_{-x}, \\ F_1^* F_1 &\xrightarrow{\hat{g}} (f_1^* * f_1)_{-x}, \end{aligned} \quad (63)$$

и далее из сравнения соотношений (63) с (61) получаем

$$f_1(t) \otimes f_1^*(-t) = (f_1 * f_1^*)_{-t}. \quad (64)$$

Графическая интерпретация операций свертки и корреляции дана на рис. 2. Мы можем, в частности, отметить существенное различие между функциями автокорреляции и свертки для

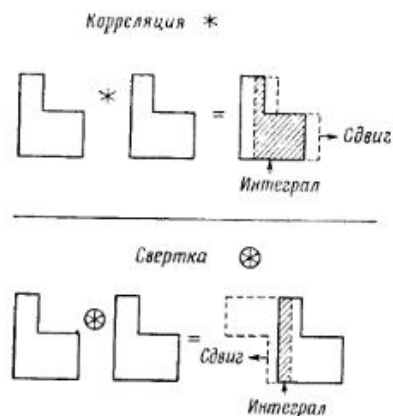


Рис. 2. Наглядная иллюстрация операций корреляции и свертки.

таких функций (одна из них изображена на рис. 2), которые не обладают симметрией относительно поворота на  $180^\circ$ . То же самое замечание относится, конечно, и к функциям кросс-корреляции! Оно приобретает особую важность в задачах образования изображения при когерентном, а также и некогерентном освещении (разд. 7.1 гл. 5 и разд. 4 гл. 6).

#### 4. Распределения, или обобщенные функции

Теория распределений или обобщенных функций, впервые изложенная Л. Шварцем в 1950—1951 гг., в разработке которой приняли участие многие авторы (в частности, Дж. Арзак, А. Эрдели, М. Лайтхилл и Дж. Темпл), представляет собой универсальный математический аппарат современной оптики и радиооптики, эффективность которого постоянно возрастает. Для более фундаментального ознакомления читатель отсылается к одной из последних монографий в этой области.

С целью иллюстрации универсальности этого метода здесь достаточно привести лишь несколько примеров.

##### 4.1. Определения

Скалярным произведением двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$  называется интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = \langle f(x), g(x) \rangle. \quad (65)$$

Даже если функция  $f(x)$  не имеет фурье-образа, мы можем определить  $\langle f(x), g(x) \rangle$  через некоторое конечное число при условии, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$  существует. В этом случае  $f(x)$  называется распределением или обобщенной функцией. Вспомним, что функция может иметь фурье-образ в строгом смысле только тогда, когда эта функция абсолютно интегрируема, т. е. если существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (66)$$

Например, функция  $f(x) = 1$  не имеет фурье-образа в этом смысле. Однако если положить  $f(x) = \delta(x)$ , так что

$$\langle \delta(x)g(x) \rangle = g(0), \quad (67)$$

а

$$\langle \delta(x-a)g(x) \rangle = g(a), \quad (68)$$

то уравнения (67) и (68) определяют дельта-функцию Дирака как распределение, или обобщенную функцию.

##### 4.2. Импульсный отклик линейной системы

Пусть  $L$  — линейный оператор, действующий на  $f(t)$  или  $f(x)$ , как это показано на рис. 3. Мы требуем, чтобы линейная система имела свойства:

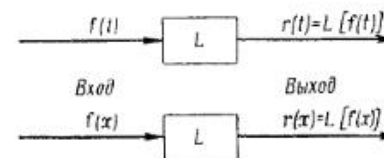


Рис. 3.

а) линейности

$$L[a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] = a_1L[f_1(t)] + a_2L[f_2(t)], \quad (69)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные;

б) инвариантности во времени (или в пространстве)

$$\begin{aligned} L[f(t-t_1)] &= r(t-t_1) \\ L[f(x-x_1)] &= r(x-x_1), \end{aligned} \quad (70)$$

Импульсный отклик линейной системы, например оптической системы, электрической цепи и т. д., обозначается через  $h(t)$  или  $h(x)$  (рис. 4).

Для *оптического фильтра* (например, интерференционного фильтра или оптической цепи [5]) временной импульсный отклик  $h(t)$  является упорядоченным, так как компоненты волн различных временных частот при прохождении через фильтр задержи-

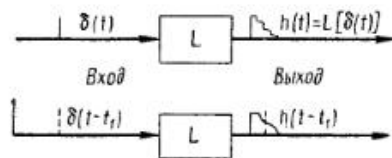


Рис. 4.

ваются на различную величину. Для *оптических систем образования изображения* пространственный импульсный отклик  $h(x)$  также является упорядоченным. [Под пространственным импульсным откликом  $h(x)$  обычно подразумевают дифракционную картину.]

#### 4.3. Отклик линейной системы на произвольную входную функцию

Пусть теперь функция на входе  $f(t)$  состоит из *суммы единичных импульсов*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1) \delta(t_1 - t) dt_1. \quad (71)$$

Вспомним, что, согласно выражению (68),

$$\langle \delta(t_1 - t) f(t_1) \rangle = f(t),$$

и мы получаем соотношение между функциями на входе и на выходе системы, показанное на рис. 5, где  $h(t_1)$  — импульсный отклик системы  $L$ .

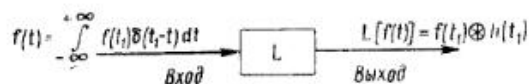


Рис. 5.

Теперь находим непосредственно функцию на выходе. В силу того, что  $L$  является линейным оператором,

$$L[f(t)] = L \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1) \delta(t_1 - t) dt_1 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1) L[\delta(t_1 - t)] dt_1. \quad (72)$$

Тогда

$$L[f(t)] = r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1) h(t_1 - t) dt_1. \quad (73)$$

Это соотношение демонстрирует то фундаментальное свойство, что выход  $r(t)$  равен *свертке* функции импульсного отклика с функцией на входе.

В случае образования изображения при некогерентном освещении, для которого картина дифракции или функции разброса имеет вид

$$h(x) = s(x),$$

а функция на входе  $f(x)$  соответствует оптико-геометрическому изображению предмета, т. е.  $f(x) = O(x)$ , функция на выходе имеет вид  $r(x) = I(x)$ , где

$$I(x) = O(x) \otimes s(x), \quad (74)$$

как уже показано в гл. 3 [соотношение (20)].

#### 5. Спектральный анализ<sup>1)</sup>

Пусть  $\Phi(\omega)$  — функция спектрального распределения энергии на входе линейной системы (рис. 6). Функция на выходе  $R(\omega) = L[\Phi(\omega)]$  показана на рис. 6. Функция  $R(\omega)$  может быть либо

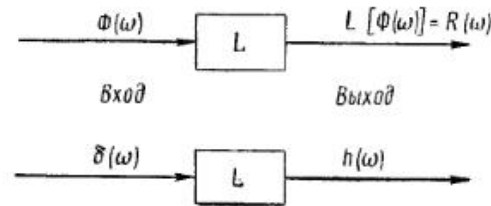


Рис. 6.

спектром, наблюдаемым с помощью дифракционной решетки в зависимости от  $\omega$  или  $\lambda$ , либо откликом в оптическом спектральном анализаторе с гетеродинным детектором,

<sup>1)</sup> См. также гл. 4.



Пусть импульсный отклик спектрометра равен  $h(\omega)$ . Пусть, далее, функция на входе  $\Phi(\omega)$  определяется соотношением

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega_0) \delta(\omega_0 - \omega) d\omega_0. \quad (75)$$

Функция на выходе, согласно (74), равна

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega_0) h(\omega_0 - \omega) d\omega_0, \quad (76)$$

т. е.

$$R(\omega) = \Phi(\omega) \otimes h(\omega). \quad (77)$$

Это соотношение представляет собой основное уравнение, определяющее характерные свойства спектрометров. В спектрометре регистрируется как раз функция  $R(\omega)$ . С помощью преобразования Фурье (77) [соотношение (34б)] получаем

$$\mathfrak{F}[R(\omega)] = \mathfrak{F}[\Phi(\omega)] \mathfrak{F}[h(\omega)]. \quad (78)$$

Напомним, что для оптических систем и электрических цепей [см., например, соотношение (23) гл. 3] фурье-образ  $\mathfrak{F}[h(\omega)]$  равен частотному отклику системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Arsac J., Transformations de Fourier et théorie des distributions, Dunod, Paris, 1960.
2. Jennison R. C., Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist, Pergamon Press, New York, 1961.
3. Lighthill M. J., An Introduction to Fourier analysis and generalized functions, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1958.
4. Харкевич А. А., Спектры и анализ, изд. 3-е, перераб., Москва, 1957.
5. Stroke G. W., Proc. IEEE, 52, 855 (1964).
6. Chabbal R., Rev. Opt., 37, 49, 366, 501 (1958).
7. O'Neill E. L., An Introduction to statistical optics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963; русский перевод О'Нейл Э., Введение в статистическую оптику, изд-во «Мир», 1966.
8. Шварц Л., Математические методы для физических наук, изд-во «Мир», 1965.
9. Bracewell R., The Fourier transform and its applications, McGraw-Hill, 1965.

#### Дополнение автора к русскому изданию

### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В БЕЛОМ СВЕТЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФРАКЦИОННОГО ЭФФЕКТА ЛИПМАННА — БРЭГГА<sup>1)</sup>

Дж. Струк, А. Лабейри

Описывается метод получения рефлексных голограмм в липпмановских фотоэмульсиях, предложенный Денисюком в 1962 г. Авторам удалось восстановить монохроматическое изображение в лучах белого (например, солнечного) света, а также продемонстрировать возможность использования трехмерных решеток в качестве оптического аналога кристаллической решетки.

На рис. 1, а показано устройство, которое было использовано для получения голограмм двумерных или трехмерных предметов. При освещении голограммы лучами обычного солнечного света (или, например, светом электрического фонарика) по схеме, приведенной на рис. 1, б, происходило восстановление «одноцветного» изображения предмета. Примером восстановленного изображения, полученного при освещении голограммы лучами солнечного света, может служить фотография кузнечика, показанная на рис. 2. Исходный предмет имел вид диапозитива размером 24×36 мм на пленке Kodachrome. Диапозитив помещался на расстоянии  $z=25$  мм от фотографической пластинки так, чтобы реализовалась рефлексная схема проективной голографии [1], и освещался лазером на длине волны 0,63 мкм.

Физические основы голографического метода получения изображений, иллюстрируемого рис. 1, можно легко объяснить. Отбор одного цвета при восстановлении осуществляется благодаря многократной интерференции белого света на слоях, которые образуются в объеме эмульсии при интерференции опорного поля с полем, рассеянным от предмета. Подобная интерференция возникает в липпмановских фотографиях, впервые описанных в 1894 г. [2]. Расстояние между образующимися слоями равно  $\lambda/2$ , когда оба пучка в виде плоских волн падают на фотопластинку по нормали. В случае же произвольного рассеивающего предмета (рис. 1, а) максимумы многослойной структуры смещаются вдоль оси  $z$  в соответствии со сдвигами фаз рассеянного электрического поля относительно опорного поля, а степень

<sup>1)</sup> Stroke G. W., Labeyrie A. F., Phys. Lett., 20 (4), 368—370 (1966).

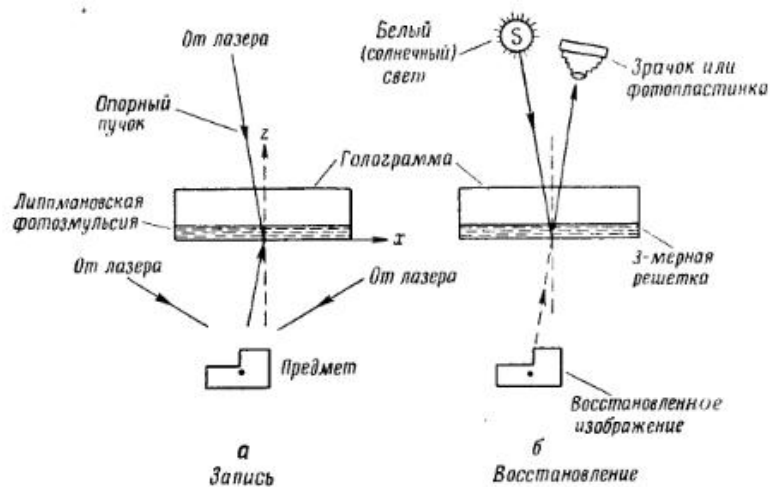


Рис. 1. Схема получения в лазерном свете решетчато-подобной голограммы (а), которая при освещении белым светом (б) восстанавливает одноцветные изображения на основе эффекта Липпмана — Брэгга.



Рис. 2. Изображение кузнечика, восстановленное при освещении солнечным светом голограммы по схеме рис. 1, б.

Исходный предмет в этом случае был диапозитивом размером  $24 \times 36$  мм на пленке Kodachrome, который помещался на расстоянии 25 мм перед голограммой и освещался лазером на длине волны 0,63 мкм. Даже при освещении той же голограммы простым карманным электрическим фонариком получались очень яркие, четкие изображения.

почернения проявленной фотоэмульсии по глубине  $z$  для заданных координат ( $x$ ) плоской голограммы будет определяться суммарной амплитудой рассеянного поля.

При восстановлении (рис. 1, б) голограмма освещается белым светом с той же стороны, с которой падал опорный пучок. Как и в случае дифракции на кристалле, образуется одноцветное восстановленное изображение, которое получается в соответствии с принципом восстановления волнового фронта, описанным Габором в 1948 г. [3].

Восстановленная волна характеризуется:

- 1) локальной фазовой модуляцией, определяемой местными сдвигами отражающих слоев многослойной структуры;
- 2) локальной амплитудной модуляцией, определяемой местными вариациями почернения голограммы;
- 3) цветом, отбираемым при брэгговской дифракции света на слоях, образующих решетчатую структуру.

При этом расстояние между слоями можно изменять, используя специальный метод фотохимической обработки, например опуская процесс фиксирования фотоэмульсии [4, 5].

Основы теории рефлексной голограммы такого типа впервые были разработаны Денисюком в 1962 г. [6] для случая, когда предмет освещался *сквозь* голограмму, а не отдельным пучком, который обычно отделяется перед попаданием на голограмму, как это показано на рис. 1, а. Денисюк описал эксперимент с зеркалами, которые он использовал в качестве предметов, освещаемых светом от ртутной лампы. Однако он не продемонстрировал никаких фотографий скорее всего потому, что у него тогда еще не было лазера, без которого очень трудно получить хорошие голограммы [3].

Очень хороший результат, приведенный в этой статье, мы легко получили, освещая солнечным светом голограмму, сформированную с помощью лазера на длине волны 0,63 мкм. (Такое же по качеству легко наблюдаемое изображение достаточной яркости было получено нами с помощью карманного электрического фонарика.)

Небезынтересно заметить, что в работе [7] было описано устройство, аналогичное нашей схеме получения рефлексной голограммы Липпмана — Брэгга, но предназначенное для доказательства возможности освещения обращенным опорным пучком обычной монохроматической голограммы на просвет. При этом авторы не стремились получить рефлексные голограммы с последующим восстановлением изображений в лучах белого света, как это описано здесь. Как отмечалось в работе [7], введение обращенного опорного пучка имело определенные достоинства, так как оно давало возможность помещать опорное зеркало

не вблизи удаленного предмета, а рядом с лазером, если, конечно, была достаточной длина когерентности света лазера [1].

Многими авторами были описаны наблюдавшиеся ими рефлексные изображения, которые получались при освещении лазером обычной голограммы на просвет. Необходимо, однако, отметить, что все методы в голографии были развиты на основе первой работы Габора [3].

Теоретическое описание голографического процесса, которое мы привели в этой статье, можно изложить, рассматривая модулированную рефлексную решетку Липпмана — Брэгга. Развернутая теория будет дана в подробной статье [4].

Пусть рассеянное поле в плоскости голограммы (плоскость  $x$ ) описывается выражением

$$A(x) \exp i\varphi(x), \quad (1)$$

и пусть рассеянная волна и опорный пучок падают на голограмму вдоль оси  $z$ , перпендикулярной плоскости голограммы. Интенсивность, регистрируемая голограммой, равна

$$I(x, z) \sim 1 + A(x) \cos [2kz + \varphi(x)], \quad (2)$$

где  $k=2\pi/\lambda$ , а  $\lambda$  — длина волны света, используемая при получении голограммы.

При освещении голограммы плоской волной белого света в трехмерной решетке, описываемой уравнением (2), произойдет процесс дифракции Липпмана — Брэгга и восстановится волна

$$A(x) \exp i\varphi(x) \quad (3)$$

только одной длины.

Интересно отметить, что восстановленные изображения получаются особенно яркими, если использовать такую схему, в которой рассеянное поле при получении голограммы сводится линзой в фокус на определенном расстоянии за голограммой со стороны опорного пучка. Среди изученных нами экспериментальных подробностей мы нашли наиболее совершенным рецепт обработки липпмановской эмульсии, описанный Айвсом в 1908 г. [5], который особенно удобен для контроля расстояния между отдельными слоями.

В нашей статье [4] мы обсуждаем дальнейшее распространение метода «рефлексной голографии», в частности получение трехмерной кристаллической решетки в фотографической эмульсии. Последнее может представлять особый интерес при использовании подобных решеток для моделирования дифракции в оптическом диапазоне и в качестве средства упрощения некоторых аспектов синтеза рентгеновских изображений, например при

изучении структуры протеннов и в кристаллографии. По-видимому, метод найдет применение в интерферометрии, спектроскопии, а также в цветной голографии.

#### ЛИТЕРАТУРА <sup>1)</sup>

1. Строук Дж., Основные главы настоящей книги.
2. Lippman G., *J. de Physique*, 3, 97 (1894).
3. Gabor D., *Nature*, 161, 777 (1948).
4. Labeyrie A. E., Stroke G. W., *Optica Acta*, в печати.
5. Ives H. E., *Astrophys. J.*, 27, 325 (1908)
6. Денисюк Ю. Н., *ДАН СССР*, 144 (6), 1275 (1962).  
1. Taylor C. A., Lipson H., *Optical transforms*, London, 1964.
7. Hoffman A. S., Doidge J. G., Mooney D. G., *J. Opt. Soc. Am.*, 55, 1559 (1965).

<sup>1)</sup> См. также работы по моделированию в оптическом диапазоне процессов дифракции рентгеновских волн на кристаллической решетке:

1. Taylor C. A., Lipson H., *Optical transforms*, London, 1964.
2. Lipson H., Taylor C. A. X-ray crystal-structure determination as a branch of physical optics, *Progress in Optics*, V, Wolf E., ed., 1966, p. 289—348. — *Прим. ред.*

## МИКРОСКОПИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА, I<sup>1), 2)</sup>

Д. Габор

### Введение

Период систематического увеличения разрешающей способности электронных микроскопов, начало которому было положено в 1931 г. работами Кнолля и Руски, был фактически завершен в 1946 г., когда Хиллиер и Рамберг [1] устранили астigmatизм объектива и достигли разрешающей способности, лишь незначительно отличающейся от теоретического предела. Хотя барьер на пути дальнейшего прогресса имеет чисто техническую природу, все же он достаточно грозен для того, чтобы помешать любым существенным улучшениям в прямом направлении.

Теоретический предел разрешения обычных электронных микроскопов составляет около 5 Å. Он определяется компромиссом между дифракцией и сферической абберацией в электронных объективах и в оптимальном случае пропорционален корню четвертой степени из абберационной постоянной. Хотя было выдвинуто несколько предложений, направленных на коррекцию объективов, все они сопряжены с такими техническими трудностями, что самое большее, чего можно ожидать, даже будучи оптимистом, — это достичь улучшения в 2 раза. Нет никакой надежды повысить разрешающую способность в 10 раз по сравнению с уже достигнутой на сегодня<sup>3)</sup>, так как это потребовало бы осуществления коррекции сферической абберации с точностью до

<sup>1)</sup> Gabor D., Microscopy by reconstructed wavefronts: I, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A197, 454—487 (1949).

<sup>2)</sup> В статьях Габора изложена теория дифракционного микроскопа и основы голографии. С момента их написания (1949—1951 гг.) прошел большой срок и, естественно, многие утверждения Габора нуждаются в комментариях. Чтобы дать все необходимые пояснения, потребовался бы подробный обзор достижений в оптике и в многочисленных смежных науках за этот период, что при издании настоящей книги не было предусмотрено. Если же при чтении статей Габора у читателя возникнут какие-либо вопросы, то можно ему порекомендовать обратиться к основным главам книги, так как более полного изложения вопросов когерентной оптики в литературе пока что нет. — *Прим. ред.*

<sup>3)</sup> То есть в 1949 г. — *Прим. ред.*

1/10 000. Такая точность может быть обеспечена методами оптической мастерской, но едва ли ее когда-нибудь можно будет достичь с помощью средств, имеющихся в распоряжении электронной оптики<sup>1)</sup>.

Новый метод представляет собой попытку обойти этот барьер, не преодолевая его в лоб, двухступенчатым процессом, в котором предмет регистрируется с помощью пучка электронов, а восстанавливается с помощью светового пучка. Общая идея такого процесса впервые возникла у автора под влиянием работы Брэгга «Рентгеновская микроскопия» [2] (см. также [3]). Однако метод Брэгга, в котором кристаллическая решетка восстанавливается с помощью процесса дифракции на дифракционной картине, полученной в рентгеновских лучах, может быть применен лишь к одному определенному классу периодических структур. Обычно это связывают с тем, что дифракционные картины содержат информацию только об интенсивностях волны и не содержат информации о фазах. Но эта формулировка не вполне удачна, так как она сразу же наводит на мысль, что раз фазы ненаблюдаемы в случае применения этого метода, то они ненаблюдаемы всегда. В самом деле, при анализе обычных дифракционных картин нельзя установить не только ненаблюдаемую часть фазы, но также и ту ее часть, которая обусловлена геометрическими и оптическими свойствами предмета и в принципе могла бы быть определена путем сравнения фаз рассматриваемой волны и стандартной опорной волны. Именно эти рассуждения привели меня в конце концов к новому методу.

Для того чтобы новый метод стал практически применимым, его необходимо было объединить с новым принципом, о котором до сих пор, по-видимому, никто не упоминал. Если дифракционная картина, образованная при освещении предмета, фотографируется при когерентном освещении, причем к дифрагированной волне добавляется когерентный фон, то фотография будет содержать полную информацию о всех изменениях, которые претерпела освещающая волна при рассеянии от предмета. Возникающая при этом двузначность фазы будет обсуждена позднее. Более того, изображение предмета может быть восстановлено по этой фотографии без каких-либо расчетов. Необходимо лишь убрать предмет и осветить фотографию только одним когерентным фоном. Одной из компонент возникающей при этом вторичной волны будет *восстановленная исходная волна*, рассеянная от предмета. Можно найти условия, при которых остальные компоненты могут быть в достаточной степени отделены от

<sup>1)</sup> Разрешающая способность современных электронных микроскопов составляет 5 Å. — *Прим. ред.*

полезной компоненты, восстанавливающей истинное или близкое к истинному изображение исходного предмета.

Этот принцип был подтвержден многочисленными экспериментами. Некоторые из результатов приведены на рис. 10—12 и пояснены в последнем разделе этой статьи.

В обычной оптике когерентный фон можно получить многими путями, однако в электронной оптике нет устройства для эффективного расщепления пучка электронов; таким образом, единственный подходящий способ заключается в использовании в

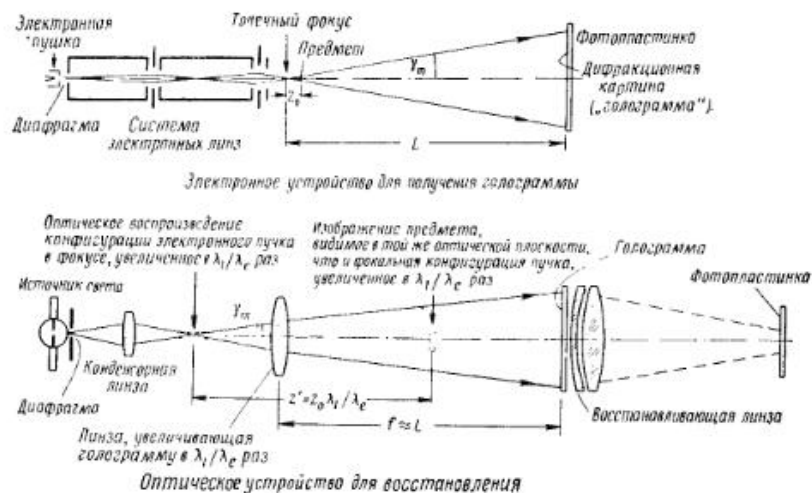


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая принцип электронной микроскопии на основе метода восстановления волнового фронта.

качестве когерентного фона самого освещающего пучка. Это приводит нас к схеме освещения когерентной расходящейся электронной волной (рис. 1). Предвосхищая доказательство принципа восстановления, которое будет сделано позже, объясним сначала действие этой схемы.

Все устройство состоит из двух частей: электронного устройства для получения голограммы и оптического устройства для ее восстановления. Регистрирующее устройство подобно электронному теневого микроскопу [4], но с тем существенным отличием, что оно работает при когерентном освещении и в таких условиях, в которых теневого микроскоп не применяется, так как интерференционная картина имеет слишком мало сходства с исходным предметом. Электронная пушка в сочетании с подходящей диафрагмой и системой электронных линз создает когерентный

освещающий пучок с максимально острым фокусом. Вследствие неизбежной сферической aberrации электронных линз строго гомоцентрический пучок получить, конечно, невозможно, но для простоты мы можем называть узкую «талию» пучка «точечным фокусом». На некотором небольшом расстоянии перед точечным фокусом или за ним устанавливается небольшой предмет, а на сравнительно большом расстоянии  $L$  — фотографическая пластинка. Угол расходимости пучка  $\gamma_m$  должен обеспечивать требуемый предел разрешения  $d_A$ , который, согласно Аббе, равен

$$d_A = \frac{\lambda}{2 \sin \gamma_m}.$$

Множитель  $1/2$  мы будем использовать в этой статье для упрощения обсуждения, но в численных расчетах его следует заменить более точным значением  $0,6$ .

Поскольку в этой статье мы часто будем говорить о фотографии дифракционной картины, сделанной при освещении предмета расходящимся когерентным пучком, то полезно будет ввести для нее специальное название, чтобы отличать ее от самой дифракционной картины, которая будет рассматриваться как некоторая комплексная функция. Название «голограмма» вполне оправдано, так как фотонегатив содержит полную информацию, необходимую для восстановления предмета, который может быть как двумерным, так и трехмерным.

Голограмма должна быть или отпечатана с негатива, или получена на обратной фотопластинке и соответствующим образом проявлена. Позитив переносится в оптическое восстанавливающее устройство, представляющее собой оптический аналог электронного устройства. В этом устройстве вместо пучка электронов используется оптический световой пучок. Все основные размеры, которые определяют форму волны, здесь изменяются пропорционально отношению длины световой волны  $\lambda_l$  к длине электронной волны  $\lambda_e$ . Так как в электронной микроскопии чаще всего применяются электроны с энергией  $50 \text{ кэВ}$ , имеющие длину волны де-Бройля около  $0,05 \text{ \AA}$ , то отношение длин волн будет порядка  $100\,000$ . Можно отметить, что фокусное расстояние электронных линз не является существенным размером, поэтому нет необходимости изменять его в том же масштабе.

Чтобы избежать изменения масштаба на фотографической пластинке, предусмотрена дополнительная линза, которая увеличивает масштаб в оптическом пространстве в отношении  $\lambda_l/\lambda_e$  путем увеличения фокусного расстояния. Это означает, что голограмма отодвигается практически в бесконечность, т. е. она должна быть расположена в фокальной плоскости коллиматорной линзы. На схеме, изображенной на рис. 1, для простоты

предполагается, что углы расходимости пучков в регистрирующем и восстанавливающем устройствах одинаковы, но далее будет показано, что условие  $f=L$  не является существенным. Не является необходимым также и применение отдельной системы конденсорных линз. Конденсор и коллиматор, которые, чтобы упростить объяснение, показаны на рис. 1 как отдельные элементы, образуют один оптический узел, назначение которого заключается в создании в плоскости голограммы волнового фронта, являющегося точной копией первоначального. Сферическая aberrация и неустранимая эллиптичность электронных линз должны быть воспроизведены с большой точностью, причем допуск для крайних лучей должен быть равен около одной интерференционной полосы.

Таким образом, в новом методе уже не нужно исправлять сферическую aberrацию электронных линз. Размер отверстия может быть намного больше величины предельно допустимой в обычной электронной микроскопии. Для достижения некоторого определенного разрешения необходимо только воспроизвести aberrации с той же самой точностью, с которой они должны быть исправлены. Таким образом, трудности переносятся из области электронной оптики в область световой, где могут быть изготовлены преломляющие поверхности любой формы без ограничений, накладываемых в электронной оптике теорией электромагнитного поля. От электроннооптической части схемы мы требуем лишь определенной умеренной стабильности в работе, достаточной для того, чтобы избежать слишком частой юстировки оптической системы.

Технические трудности, возникающие при работе с этой схемой, в этой статье не рассматриваются. Отметим лишь, что к ним относятся задачи обеспечения механической и электрической стабильности, проблема работы с предметами, много меньшими тех, с которыми до сих пор приходилось иметь дело в электронной микроскопии, и, наконец, задача получения высоких плотностей тока при сохранении когерентности. Короче говоря, в этой статье рассматриваются главным образом общие теоретические основы нового метода.

### Принцип восстановления волнового фронта

Рассмотрим когерентную монохроматическую волну с комплексной амплитудой  $U$ , падающую на фотографическую пластинку. Можно написать  $U=A \exp(i\psi)$ , где  $A$  и  $\psi$  — действительные величины. Амплитуду  $U$  можно разложить на падающую волну (или «фоновую волну»)  $U_0=A_0 \exp(i\psi_0)$  и остаток

$U_1=A_1 \exp(i\psi_1)$ , который обусловлен возмущением, созданным предметом, и может быть назван вторичной волной. Таким образом, комплексная амплитуда на фотографической пластинке равна

$$U=U_0+U_1=A_0 e^{i\psi_0}+A_1 e^{i\psi_1}=e^{i\psi_0}(A_0+A_1 e^{i(\psi_1-\psi_0)}), \quad (1)$$

а ее абсолютное значение имеет вид

$$A=[A_0^2+A_1^2+2A_0A_1 \cos(\psi_1-\psi_0)]^{1/2}.$$

График плотности почернений фотографической пластинки, построенный в зависимости от логарифма экспозиции, имеет вид S-образной кривой с приблизительно прямолинейным участком между двумя изгибами. На прямолинейном участке коэффициент пропускания интенсивности пропорционален экспозиции, возведенной в степень  $-\Gamma$ . Термин «пропускание» и символ  $t$  будут применяться в этой статье для обозначения коэффициента пропускания амплитуды волны, который, вообще говоря, является комплексной величиной. Тогда коэффициент пропускания интенсивности равен  $tt^*$ , где звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина. В случае чистого поглощения без изменения фазы пропускание  $t$  является действительным числом, равным корню квадратному из коэффициента пропускания интенсивности. Таким образом, для негатива мы можем написать

$$t_n=(K_n A)^{-\Gamma_n},$$

где коэффициент  $K_n$  зависит от времени экспозиции. После изготовления позитива с этого негатива освещенность на выходе пропорциональна  $t_n^2$ ; следовательно, пропускание диапозитива равно

$$t_p=[K_p(K_n A)^{-\Gamma_n}]^{-\Gamma_p}=K A^\Gamma, \quad (2)$$

где  $\Gamma=\Gamma_n \Gamma_p$  — полная контрастность негативно-позитивного процесса. Этот вид зависимости сохраняется и в том случае, если используются обратимые фотоматериалы.

Если теперь в процессе восстановления мы осветим позитив-голограмму одним только когерентным фоном  $U_0$ , то будет получена «замещающая волна»  $U_s$ , которая с точностью до постоянного множителя равна

$$U_s=U_0 t_p=A_0 e^{i\psi_0}[A_0^2+A_1^2+2A_0A_1 \cos(\psi_1-\psi_0)]^{1/2} \Gamma. \quad (3)$$

Наиболее простой и, как будет ниже показано, также наиболее благоприятный выбор — это  $\Gamma=2$ . В этом случае

$$U_s = U_0 A^2 = A_0 e^{i\psi_0} [A_0^2 + A_1^2 + 2A_0 A_1 \cos(\psi_1 - \psi_0)] = \\ = A_0^2 e^{i\psi_0} \left[ A_0 + \frac{A_1^2}{A_0} + A_1 e^{i(\psi_1 - \psi_0)} + A_1 e^{-i(\psi_1 - \psi_0)} \right]. \quad (4)$$

При сопоставлении этого выражения с выражением (1) видно, что если  $A_0 = \text{const}$ , т. е. если когерентный фон равномерный, то замещающая волна содержит компоненты, пропорциональные исходной волне  $U$  (первый и третий члены в скобках). Этот факт сам по себе еще не является доказательством принципа восстановления, поскольку любая волна может быть расщеплена на заданную волну и остаток. Необходимо доказать, что остаток, т. е. сопутствующая часть волны  $U_s$ , не приводит к серьезным искажениям.

Этот остаток содержит два члена. Один из них имеет ту же фазу, что и когерентный фон, но амплитуду в  $(A_1/A_0)^2$  раз больше амплитуды когерентного фона. Этот член может быть сделан очень малым, если интенсивность когерентного фона относительно велика, но это вовсе не означает, что контраст в голограмме будет плохим. Пусть, например,  $(A_1/A_0)^2 = 0,01$ , т. е. интенсивность вторичной волны составляет лишь 1% интенсивности первичной. Это дает  $A_1/A_0 = 0,1$ , и отношение интенсивности максимума к интенсивности минимума в системе интерференционных полос равно  $(1,1/0,9)^2 = 1,5$ . При коэффициенте контрастности  $\Gamma=2$  отношение коэффициента пропуска интенсивности будет равно  $1,5^2 = 2,25$ , т. е. будет наблюдаться очень сильный контраст. Значение контраста упадет ниже минимальной величины, которую еще можно наблюдать (около 4%), лишь при  $(A_1/A_0)^2 \leq 0,0001$ , т. е. если поток света, рассеянного предметом на площадь всей голограммы, меньше чем 0,01% освещающего потока света. Этот замечательный эффект когерентного фона систематически применялся Цернике [5] для увеличения видимости слабых интерференционных полос.

Второй член остатка имеет ту же самую амплитуду  $A_1 A_0^2$ , что и восстановленная исходная вторичная волна, но фазовый сдвиг относительно когерентного фона имеет противоположный знак. Для краткости этот член может быть назван комплексно-сопряженной волной. Эти волны-«двойники» несут одинаковую энергию.

Наличие сопряженной волны приводит к серьезному искажению лишь в исключительных случаях; большей частью сопряженные волны могут быть эффективно разделены. Возможность разделения видна на примере зонных пластинок Френеля. В самом

деле, их можно рассматривать как голограммы точечного предмета, полученные на бесконечности при освещении точечным источником. Зонные пластинки действуют одновременно как положительные и как отрицательные линзы, обладающие двумя фокусами — по одному с каждой стороны пластинки и на равных расстояниях от нее. Эти фокусы можно наблюдать отдельно. Как будет показано ниже, при освещении голограммы точечным источником такие двойные изображения возникают всегда; однако если источник расположен от них на конечном расстоянии, то они будут зеркально-симметричными по отношению к точечному источнику, а не к голограмме. Если пучки лишь приблизительно гомоцентричны, то второе изображение становится нерезким, однако всегда можно достичь эффективного разделения изображений, если предмет достаточно мал и если избегать некоторых взаимных расположений элементов системы.

В то время как сопряженную волну устранить нельзя, искажения, обусловленные побочным членом, пропорциональным  $(A_1/A_0)^2$ , а также неравномерностью когерентного фона, могут быть либо исключены полностью, либо по крайней мере существенно уменьшены модификацией фотографического процесса. В случае малых предметов разность плотности почернений в двух соседних интерференционных максимумах незначительна, по крайней мере на большей части голограммы. Это позволяет «размазать» интерференционные полосы путем экспонирования слегка расфокусированного отпечатка-голограммы и проявления его до контраста  $\Gamma=1$ . Если этот отпечаток, имеющий пропускание, обратно пропорциональное сумме  $(A_0^2 + A_1^2)$ , поместить в регистрирующую систему одновременно с позитивом в качестве маски и осветить фоновой волной  $U_0$ , то замещающая волна будет описываться выражением

$$U'_s = A_0 e^{i\psi_0} [A_0^2 + A_1^2 + 2A_0 A_1 \cos(\psi_1 - \psi_0)] / (A_0^2 + A_1^2) = \\ = e^{i\psi_0} \left[ A_0 + \frac{2A_1 \cos(\psi_1 - \psi_0)}{1 + (A_1/A_0)^2} \right] = \\ = e^{i\psi_0} \left[ A_0 + 2A_1 \cos(\psi_1 - \psi_0) - 2 \frac{A_1^3}{A_0^2} \cos(\psi_1 - \psi_0) + \dots \right]. \quad (5)$$

Побочный член по сравнению с когерентным фоном имеет здесь порядок  $(A_1/A_0)^3$ , а искажение, обусловленное неравномерностью когерентного фона, устранено. Если хотят исключить сам когерентный фон, то можно также использовать негатив, снятый при освещении начальным пучком, но без предмета и проявленный до контраста, характеризуемого коэффициентом  $\Gamma=2$ .

Чтобы кратко обсудить также случай  $\Gamma \neq 2$ , положим для упрощения  $A_0 = 1$  и  $A_1/A_0 = a$ . Из выражения (3), применяя биномиальное разложение, получим

$$U_s = e^{i\psi_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} \Gamma a^2 + \Gamma a \cos(\psi_1 - \psi_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Gamma(\Gamma - 2) a^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_0) + \dots \right]. \quad (6)$$

В восстановленной волне контраст повышается в отношении  $1/2\Gamma$ . Однако дополнительно возникают сопряженные волны с фазовыми сдвигами  $2(\psi_1 - \psi_0)$  и т. д., но с меньшими амплитудами. Отсюда видно, что наилучший вариант соответствует  $\Gamma = 2$ , за исключением того случая, когда первоначальный контраст настолько мал, что значение  $\Gamma$  должно быть повышено даже ценой появления искажений при восстановлении.

### Освещение сферической волной

Чтобы более подробно изучить процесс восстановления, будет полезно начать с простого случая освещения точечным источником. Такое освещение может быть в первом приближении осуществлено с помощью достаточно малого отверстия, используемого в качестве источника света. Вначале будет удобно ограничить обсуждение двумерными предметами, занимающими часть замкнутой поверхности  $\Sigma$ , которая включает точечный источник  $O$ . Предмет в точке  $P$  поверхности  $\Sigma$  может быть охарактеризован коэффициентом пропускания амплитуды  $t(P)$ , который равен отношению комплексных амплитуд по обе стороны от  $\Sigma$  в окрестности точки  $P$ . Коэффициент  $t$ , вообще говоря, комплексный; он действителен лишь в случае чисто поглощающих предметов. Вполне очевидно, что понятие коэффициента пропускания (действительного или комплексного) не применимо к предмету, который является двумерным в математическом смысле. Что же касается физического предмета, к которому это понятие применимо, то мы должны предположить, что его толщина равна по крайней мере нескольким длинам волн. Более того, мы должны предположить, что вдоль поверхности  $\Sigma$  функция  $t(P)$  не изменяется заметно в пределах длины волны. Таковы условия применимости теории дифракции Френеля—Кирхгофа. В электронной оптике при использовании быстрых электронов с длиной волны около  $0,05 \text{ \AA}$  эти условия всегда выполняются, так как не существует предметов (исключая атомные ядра), чьи физические свойства изменялись бы значительно в пределах расстояния около десяти длин волн.

С учетом этих ограничений мы можем применить дифракционную формулу Френеля—Кирхгофа (ср., например, [6, стр. 73]). Обозначения пояснены на рис. 2. Если в точке  $O$  рас-

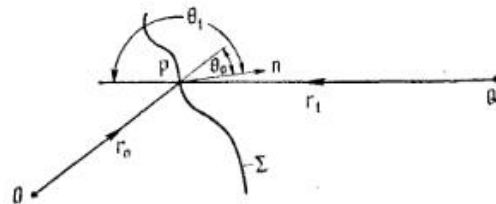


Рис. 2. Схема, поясняющая дифракционную формулу Френеля—Кирхгофа.

положен источник монохроматического излучения единичной интенсивности, то амплитуда освещающей волны равна

$$U_0 = \frac{1}{r_0} e^{ikr_0},$$

где  $r_0$  — расстояние, отсчитываемое от точки  $O$ , а  $k = 2\pi/\lambda$ . Наличие предмета на поверхности  $\Sigma$  приводит к изменению амплитуды за точкой  $Q$  до значения

$$U(Q) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Sigma} t(P) e^{ik(r_0+r_1)-1/2\pi i} (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) \frac{dS}{r_0 r_1}. \quad (7)$$

Применим теперь эту формулу для того, чтобы рассчитать «физическую тень» плоского предмета на бесконечности. Физическая тень включает дифракционные эффекты, и ее необходимо отличать от «геометрической тени», в которую она переходит при неограниченном уменьшении длины волны.

Поскольку используемые на практике пучки имеют углы расходимости порядка  $0,05$  или меньше, мы можем положить  $\cos \theta_0 = -\cos \theta_1 = 1$  и считать множитель  $1/r_0 r_1$  постоянной величиной. Мы также опустим постоянный множитель  $(1/2\lambda)e^{-1/2\pi i}$  и запишем уравнение (7) в упрощенной форме

$$U(Q) = \int_{\Sigma} t(P) e^{ik(r_0+r_1)} dS. \quad (7.1)$$

Используя обозначения, которые поясняются на рис. 3, получаем следующее выражение для расстояния  $r_0$  от начала отсчета до некоторой точки  $P$  в плоскости предмета  $z = z_0$ :

$$r_0 = (x^2 + y^2 + z_0^2)^{1/2} = z_0 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z_0} - \frac{1}{8} \frac{(x^2 + y^2)^2}{z_0^3} + \dots$$



В этом разделе мы будем использовать лишь два первых члена разложения.

Точка наблюдения  $Q$  может быть расположена в направлении оси  $Z$  на некотором расстоянии  $L$ , очень большом по сравнению с  $z_0$  (практически на бесконечности), так что мы можем написать

$$r_1 = L \sec \gamma - (x \cos \alpha + y \cos \beta).$$

Первые члены в выражениях для  $r_0$  и  $r_1$  определяют постоянные фазовые множители, не зависящие от  $x$  и  $y$ , которые могут быть опущены. Остающаяся существенная часть (7.1) может быть

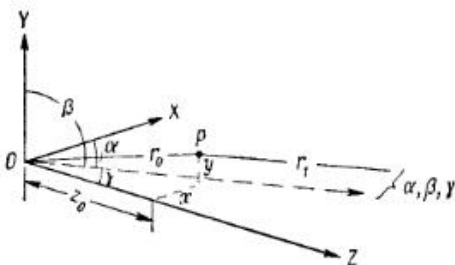


Рис. 3. Схема для пояснения обозначений.

названа «амплитудой волны, распространяющейся в направлении  $\alpha, \beta$ » и равна

$$U(\alpha, \beta) = \iint t(x, y) \exp \left\{ ik \left[ \frac{x^2 + y^2}{2z_0} - (x \cos \alpha + y \cos \beta) \right] \right\} dx dy. \quad (8)$$

Если пределы интегрирования не указаны, то в этой статье далее всегда будет подразумеваться, что интегрирование производится в бесконечных пределах. Так как фаза в подынтегральном выражении справедлива лишь для малых углов, уравнение (8) имеет физический смысл только в том случае, если  $t(x, y)$  быстро убывает до исчезающе малых значений вне малой центральной области.

Теперь вместо направляющих косинусов удобно ввести «фурье-координаты»  $\xi$  и  $\eta$  с помощью соотношений

$$\xi = \frac{1}{\lambda} \cos \alpha, \quad \eta = \frac{1}{\lambda} \cos \beta. \quad (9)$$

Связь этих переменных с координатами  $X, Y$  в плоскости, расположенной на большом расстоянии  $z=L$ , определяется выражениями

$$X = L \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = \frac{\lambda L \xi}{[1 - \lambda^2 (\xi^2 + \eta^2)]^{1/2}}, \quad Y = L \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{\lambda L \eta}{[1 - \lambda^2 (\xi^2 + \eta^2)]^{1/2}}.$$

Если угол расходимости освещающего пучка достаточно мал, то  $\xi$  и  $\eta$  можно рассматривать как координаты в плоскости физической тени. Геометрическая тень точки  $(x, y)$  имеет фурье-координаты  $\xi = x/\lambda z_0, \eta = y/\lambda z_0$ . Величина

$$\mu = \lambda z_0 \quad (10)$$

является единственным параметром дифракционной задачи. Квадратный корень из нее можно рассматривать как характеристическую длину. Далее будет показано, что детали с размерами, большими  $\mu^{1/2}$ , имеют тени, более или менее подобные самим деталям, однако тени более мелких деталей при дифракции теряют всякое сходство с самими деталями.

Используя обозначения (9) и (10), а также подстановку  $x^2 + y^2 = r^2$ , уравнение (8) можно записать в виде

$$U(\xi, \eta) = \iint [t(x, y) e^{i\pi r^2/\mu}] e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy. \quad (11)$$

Таким образом, амплитуда волны, распространяющейся в направлении  $\xi, \eta$ , равна, согласно стандартным обозначениям [7], фурье-образу функции

$$t(x, y) \exp \left( \frac{i\pi r^2}{\mu} \right).$$

Мы можем сразу же написать выражение и для обратного преобразования

$$t(x, y) = e^{-i\pi r^2/\mu} \iint U(\xi, \eta) e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (12)$$

Полезно исследовать эти преобразования чисто математически, временно пренебрегая условиями, которые должны быть наложены на функцию  $t(x, y)$ , чтобы придать ей физический смысл. Прежде всего мы представим их в более симметричной форме. Предположим, что амплитуда  $U(\xi, \eta)$  получается при прохождении освещающей волны  $U_0$  через «тень предмета» в плоскости  $\xi, \eta$ , обладающую пропусканием  $\tau(\xi, \eta)$ . (Можно отметить, что  $\tau$ , вообще говоря, комплексная величина; следовательно, тень предмета не может быть заменена фотографическим негативом.) Другими словами, пусть

$$U(\xi, \eta) = U_0(\xi, \eta) \tau(\xi, \eta). \quad (13)$$

Фон  $U_0$  можно получить непосредственно из уравнения (11), положив  $t=1$  и обозначив  $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$ :

$$U_0(\xi, \eta) = i\mu \exp(-\pi i \mu \rho^2).$$

Окончательно фурье-образ и прообраз описываются симметричными формулами

$$\tau(\xi, \eta) = \frac{1}{i\mu} e^{\pi i \mu \rho^2} \iint t(x, y) e^{-\pi i x \xi - 2\pi i t(x\xi + y\eta)} dx dy, \quad (14)$$

$$t(x, y) = i\mu e^{\pi i \mu \rho^2} \iint \tau(\xi, \eta) e^{-\pi i \mu \rho^2} e^{2\pi i t(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (15)$$

Их можно назвать прямым и обратным «теневыми преобразованиями», а функции  $t(x, y)$  и  $\tau(\xi, \eta)$  — парой «теневых образов». Они, конечно, тесно связаны с фурье-образами, хотя в некоторых отношениях и проще их.

Преобразования (14) и (15) можно получить одно из другого с помощью следующего правила. Заменяем  $t$  на  $\tau$ ;  $x$  на  $\xi$ ;  $y$  на  $\eta$ , т. е. латинские символы греческими, а также заменим  $i$  на  $-i$  и  $\mu$  на  $1/\mu$ . Два последовательных преобразования восстанавливают исходный предмет. Физически это означает, что если бы вместо фотографии мы могли бы получить «тень предмета», поглощение и преломление в которой определяются функцией  $\tau(\xi, \eta)$ , и осветили бы ее когерентным фоном, то мы должны были бы в точности восстановить предмет  $t(x, y)$  в его первоначальном положении. Так как фотография не может передать мнимую часть функции  $\tau$ , то при освещении ее когерентным фоном возникает определенная остаточная волна, которую мы рассмотрим в следующем разделе. Но сначала полезно рассмотреть несколько примеров теневых преобразований.

Как и в случае интегралов Фурье, образы экспоненциальных функций от квадратичных форм особенно просты и поучительны. Удобно записать их в следующем виде:

$$t(x, y) = \exp[-\pi(A_1 x^2 + 2B_1 x + A_2 y^2 + 2B_2 y)].$$

Это — произведение множителя, зависящего от  $x$ , на множитель, зависящий от  $y$ , а так как образ в свою очередь равен произведению сомножителей, зависящих от  $\xi$  и  $\eta$ , то достаточно найти образ функции

$$t(x) = e^{-\pi(Ax^2 + 2Bx)}, \quad (16.1)$$

который равен

$$\tau(\xi) = (1 + i\mu A)^{-1/2} \exp\left[-\frac{\pi i(\mu A \xi^2 + 2B\xi - iB^2)}{1 + i\mu A}\right]. \quad (16.2)$$

Следовательно, теневой образ экспоненциальной функции от квадратичной формы является функцией того же самого типа,

что и фурье-образ экспоненты, но соотношение между параметрами будет другим. Например, если  $A=B=0$ , т. е.  $t$  — постоянная величина, то  $\tau$  будет равно той же самой постоянной, в то время как фурье-образ постоянной величины есть дельта-функция, которая обращается в нуль всюду, кроме точки, где аргумент равен нулю. Далее теневой образ гармонической функции ( $A=0$ )

$$t(x) = \exp\left(\frac{2\pi i x}{p}\right) \quad (16.3)$$

снова является гармонической функцией

$$\tau(\xi) = \exp\left(-\frac{i\pi \mu}{p^2}\right) \exp\left(\frac{2\pi i \mu \xi}{p}\right). \quad (16.4)$$

Период тени равен  $p/\mu$ , что совпадает с геометрической тенью периода  $p$ . Единственное отличие заключается в фазовом множителе  $\exp(-i\pi \mu/p^2)$ . Если период  $p$  велик по сравнению с характеристической длиной  $\mu^{1/2}$ , то фазовый множитель стремится к единице. Это означает, что если предмет не содержит более мелких деталей, нежели  $\mu^{1/2}$ , то физическая тень стремится к геометрической:

$$\tau(\xi, \eta) \rightarrow t(\mu \xi, \mu \eta).$$

Уравнения (16.3) и (16.4) указывают простое правило построения теневых образов предмета путем разложения функции  $t(x, y)$  в интеграл Фурье с периодами  $p_x, p_y$ . Фурье-коэффициенты образа будут отличаться от оригинала только фазовым множителем

$$\exp\left[-i\pi \mu \left(\frac{1}{p_x^2} + \frac{1}{p_y^2}\right)\right].$$

Для практических целей этот метод следует использовать осторожно, так как бесконечные дуги периодических функций не очень пригодны для описания малых предметов и так как применимость уравнений (14) и (15) к физическим процессам, строго говоря, ограничена предметами, которые заметно пропускают свет лишь в области  $x/z_0 \ll 1, y/z_0 \ll 1$ .

### Восстановление при освещении точечным источником

Стигматическое освещение является особенно простой и поучительной иллюстрацией принципа восстановления, который подробно обсуждался в первом разделе. Следует напомнить, что если голограмма помещена в положение, которое занимал

исходный предмет, и освещена одним лишь когерентным фоном, то, кроме освещающей или первичной волны, появляются две другие волны, одна из которых пропорциональна исходной вторичной волне, испущенной предметом, а вторая отличается от нее лишь противоположным знаком сдвига фазы по отношению к когерентному фону. Другими малыми побочными членами можно пренебречь.

Теперь будет удобно вычесть когерентный фон, т. е. первичную волну, как в плоскости предмета, так и в плоскости фотографической пластинки и вместо  $t$  и  $\tau$  рассмотреть функции

$$t_1 = t - 1 \quad \text{и} \quad \tau_1 = \tau - 1. \quad (17)$$

Поскольку значению  $t=1$  соответствует  $\tau=1$ , функции  $t_1(x, y)$  и  $\tau_1(\xi, \eta)$  связаны теми же самыми соотношениями (14) и (15), которые связывают  $t$  и  $\tau$ . Мы будем говорить о  $t_1$  как о «собственно предмете» и о  $\tau_1$  как о его тени.

В соответствии с уравнением (6) замена физической тени фотографическим негативом означает замену  $\tau_1$  на

$$\frac{1}{2} \Gamma(\tau_1 + \tau_1^*).$$

Подставляя это выражение в обратное теневое преобразование (15), мы получим два члена  $t_1$ . Первый из них отличается от исходного предмета лишь множителем  $1/2\Gamma$ . Но во втором члене, полученном из  $1/2\Gamma\tau^*$ , знак перед  $i$  меняется на обратный, и это приводит к появлению побочного изображения в плоскости предмета, наложенного на правильно восстановленный предмет.

Мы можем дать простую интерпретацию волне, соответствующей  $\tau^*$ , если заметим, что в уравнении (14), примененном к предмету  $t_1$ ,

$$\tau_1(\xi, \eta) = \frac{1}{i\mu} e^{i\pi\mu\rho^2} \iint t_1(x, y) \times \\ \times \exp\left(-\frac{\pi r^2}{i\mu}\right) \exp[-2\pi i(x\xi + y\eta)] dx dy \quad (14.1)$$

изменение знака перед  $i$  эквивалентно изменению знака перед  $x, y$  и  $\mu = \lambda z_0$ , а также замене  $t_1(x, y)$  на функцию  $t(-x, -y)$ :

$$t_1(x, y) = t(-x, -y). \quad (18)$$

Это преобразование имеет теперь параметр  $-\mu$  вместо  $\mu$ , т. е. оно соответствует предмету в плоскости  $-z_0$ , взятой вместо плоскости  $+z_0$ . Согласно уравнению (18), этот новый предмет является зеркальным отражением исходного предмета относительно оси  $z$ , но с заменой запаздывающей фазы на опережающую.

щую. Резюмируя, можно сказать: сопряженная волна  $\tau^*$  соответствует кажущемуся предмету-«двойнику», расположенному симметрично с исходным предметом относительно центра симметрии — точечного фокуса  $O$  — и обладающему противоположным по сравнению с исходным предметом фазовым сдвигом.

Это заключение иллюстрируется рис. 4, на котором показаны предметы-«двойники». Формулу Френеля—Кирхгофа можно рассматривать как сумму элементарных сферических волн,

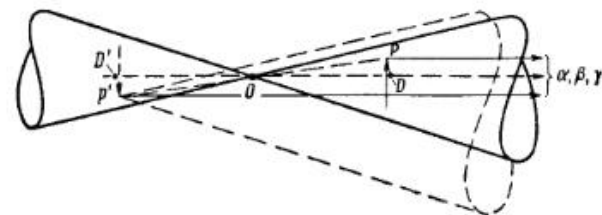


Рис. 4. Сопряженные изображения, возникающие в процессе восстановления

возникающих в точке предмета  $P$ , с амплитудами, пропорциональными  $t(P)$ . На бесконечности в направлении  $\alpha, \beta$  их можно рассматривать как плоские волны; если отвлечься от сдвига фазы, возникающего в предмете, разность фаз относительно когерентного фона задается оптической разностью длин луча  $\overline{OP}$  и его проекции  $\overline{OD}$  на прямое направление. Из рис. 4 видно, что ту же самую разность фаз, но с противоположным знаком дала бы точка предмета  $P'$ , расположенная центрально-симметрично относительно  $P$ , если был бы также изменен знак фазового сдвига в точке  $P'$ .

Такое объяснение возникающей в процессе восстановления остаточной волны как волны, испущенной предметом-«двойником», ясно показывает, что можно найти условия, позволяющие достаточно эффективно отделить восстановленный предмет от его «двойника» путем применения для наблюдений оптической системы с ограниченной глубиной фокуса. Разделение становится возможным, если расстояние  $2z_0$  между предметами-«двойниками» превышает глубину фокуса  $D_i$ , которая может быть определена как отношение предела разрешения  $d$  к полному углу расходимости  $2\gamma_m$  пучка, используемого для формирования изображения. Используя формулу разрешения Аббе, критерий разрешения можно записать в следующем виде:

$$2z_0 > \frac{d}{2\gamma_m} = \frac{\lambda}{4\gamma_m^2}. \quad (19)$$

Если точечный фокус создается не физическим отверстием, а его изображением, сформированным оптической системой, то это эквивалентно условию, что предмет должен находиться вне области дифракции, в которой волну нельзя рассматривать как сферическую.

Вне фокальной области дифракции разделение возможно, но оно не будет полным. Изображения-«двойники» будут всегда до некоторой степени интерферировать друг с другом, и эту интерференцию нельзя регулировать по желанию. Это следует из структуры уравнений преобразования, которые содержат лишь одну характеристическую длину  $(\lambda z_0)^{1/2}$ , и нет другой длины, с помощью которой можно было бы образовать безразмерный фактор разделения. Таким образом, побочная часть восстановленного изображения зависит лишь от самого предмета и от параметра  $\mu$ . Перейдем теперь к более детальному исследованию обусловленных ею искажений.

#### Побочная часть волны при восстановлении с помощью точечного источника

Простота преобразований (16.1) и (16.2) наводит на мысль о построении произвольных плоских предметов из гауссовых пятен (интенсивность в пятне распределена по нормальному закону). В пределе они переходят в двумерные дельта-функции, которые могут представлять любую функцию  $t_1(x, y)$ , однако нет никакой необходимости переходить к этому пределу, более того, это было бы физически неоправдано. Оптические образы создаются не точками, а элементарными областями, размер которых соответствует пределу разрешения. В пределах такой малой площади значения функции  $t_r(x, y)$ , описывающей восстановленный предмет, не являются не зависимыми друг от друга.

Сначала мы осуществим процесс восстановления для единичного гауссова пятна. Пусть функция пропускания в плоскости предмета имеет вид

$$t(x, y) = 1 - A \exp \left\{ -\frac{\pi}{a^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} = 1 - A e^{-\pi(r'/a)^2}, \quad (20)$$

где  $r'$  — означает расстояние от центра пятна  $x_0, y_0$ ;  $(1 - A)$  — амплитуда волны, прошедшей в центре пятна; когерентный фон принят за единицу. В случае только поглощающего предмета  $A$  — действительное положительное число, меньшее 1. Если

предмет имеет чисто фазовый контраст, то  $|1 - A| = 1$  и  $|A|$  лежит в пределах от 0 до 2.

Физическая тень функции (20) в соответствии с уравнениями (16.1) и (16.2) может быть описана следующей функцией:

$$\tau(\xi, \eta) = 1 + \frac{i\epsilon A}{1 - i\epsilon} \exp \left( \frac{\pi i \mu r'^2}{1 - i\epsilon} \right), \quad (21)$$

где

$$\epsilon = \frac{a^2}{\mu} = \frac{a^2}{\lambda z_0}$$

и

$$r'^2 = \left( \xi - \frac{x_0}{\mu} \right)^2 + \left( \eta - \frac{y_0}{\mu} \right)^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2,$$

причем точки  $\xi_0, \eta_0$  являются геометрической тенью  $x_0, y_0$ . Дифракционная картина (21) сосредоточена около этой точки. Ее вид определяется безразмерным параметром  $\epsilon$ . Если  $\epsilon$  велико, то  $\tau$  приближается к геометрической тени функции  $t(\mu\xi, \mu\eta)$ . В более важном случае, которому соответствует  $\epsilon \ll 1$ , выражение (21) можно упростить:

$$\tau(\xi, \eta) = 1 + i\epsilon A \exp \left[ -\pi(a r')^2 + \pi i \mu r'^2 \right]. \quad (21.1)$$

Чем меньше исходное пятно, тем больше его физическая тень.

Фотография заменяет комплексную физическую тень (21.1) действительной функцией пропускания

$$\tau_s(\xi, \eta) = |\tau|^\Gamma \div 1 + \frac{1}{2} \Gamma i \epsilon A e^{-\pi(a r')^2} e^{\pi i \mu r'^2} - \frac{1}{2} \Gamma i \epsilon A^* e^{-\pi i \mu r'^2}. \quad (22)$$

Это приближение справедливо при  $\epsilon^2 \ll 1$ .

Обратное преобразование (15), примененное к первым двум членам в правой части выражения (22), восстанавливает исходный предмет (20), но контраст восстановленного предмета отличается от контраста исходного в  $1/2\Gamma$  раз. Это же самое преобразование, примененное к последнему члену правой части выражения (22), дает побочный член, характеризующий ошибку:

$$t_e(x, y) = -\frac{1}{4} \Gamma i \epsilon A^* e^{-\pi(a r'/2\mu)^2} e^{-\pi i (r'^2/2\mu)}. \quad (23)$$

Он равен амплитуде (при единичном когерентном фоне), создаваемой изображением-«двойником» в плоскости исходного предмета. Побочное изображение сосредоточено около точки  $x_0, y_0$ , но его характер совершенно отличается от характера исходного предмета. Амплитуда  $t_e$  медленно уменьшается по мере роста расстояния  $r'$  от центра, причем тем медленнее, чем меньше радиус  $a$  исходного пятна, в то время как фаза изме-

няется быстро в соответствии с последним множителем в выражении (23), и это изменение не зависит от размеров пятна. Таким образом, влияние побочного изображения будет проявляться в образовании системы частых и слабых интерференционных полос, наложенных на восстановленное изображение.

Для справок можно привести также точное значение восстановленной функции пропускания  $t_r$  в случае  $\Gamma=2$ :

$$t_r(x, y) = 1 - A \exp\left[-\pi\left(\frac{r'}{a}\right)^2\right] - \frac{i\epsilon A^*}{2+i\epsilon} \exp\left[-\frac{\pi(\epsilon+2i)}{\mu(4+\epsilon^2)} r'^2\right] + \frac{\epsilon^2 A A^*}{1+\epsilon^2-2i\epsilon} \exp\left[-\frac{2\pi\epsilon(1+\epsilon^2+2i\epsilon)}{\mu[(1+\epsilon^2)^2+4\epsilon^2]} r'^2\right]. \quad (22.1)$$

Первые два члена соответствуют точно восстановленному изображению, последние два — побочной амплитуде. Они отличаются от выражения (23) лишь членами порядка  $\epsilon^2$  или выше.

На рис. 5 показан процесс восстановления в случае  $\Gamma=2$  на примере гауссова пятна с абсолютно черным центром. Необходимо соблюдать осторожность в случае контрастного предмета и не увеличивать контраст выше  $\Gamma=2$ . Как показано на рис. 6, это приводит к появлению более светлого центра внутри черного кольца, а черные линии будут казаться двойными.

До сих пор размер отверстия мы считали неограниченным; следовательно, не было нижнего предела размеров пятна  $a$ , которое можно было бы точно воспроизвести. Влияние ограниченного разрешения можно просто учесть, если предположить, что при получении голограммы была использована маска с амплитудным пропусканием

$$\exp[-\pi(c\rho)^2].$$

Маска такого вида предпочтительнее отверстий с резкими краями не только с точки зрения математической простоты, но также и потому, что такая маска ослабляет до минимума «ложные детали», возникающие от резких краев апертуры. Они широко применяются в структурном анализе ([8, стр. 350]).

Если маска применяется дважды, как при фотографировании, так и в процессе восстановления, то ее полное действие определяется выражением

$$\exp[-\pi(\Gamma+1)(c\rho)^2].$$

Чтобы получить теперь правильный контраст в процессе восстановления, положим  $\Gamma=2$ . Пусть также  $3c^2=b^2$ . Мы должны теперь восстановить предмет, т. е. гауссово пятно (20), с помощью физической тени

$$\tau_s = e^{-\pi(b\rho)^2} \{1 + i\epsilon A e^{-\pi(a^2-i\mu)\rho'^2} - i\epsilon A^* e^{-\pi(a^2+i\mu)\rho'^2}\}, \quad (24)$$

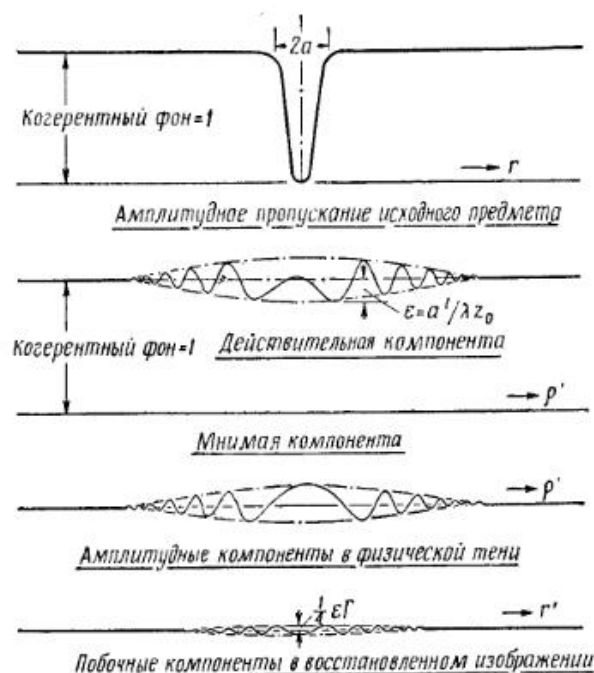


Рис. 5. Голографический процесс для гауссова пятна.

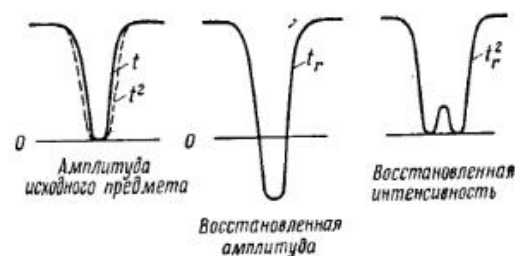


Рис. 6. Искажение при повышенном контрасте.

которая отличается от функции пропускания (22) только множителем, обусловленным маской. Вводя малый безразмерный параметр

$$\sigma = \frac{b^2}{\mu} = \frac{b^2}{\lambda z_0}$$

и пренебрегая степенями  $\epsilon$  и  $\sigma$  выше первой, с помощью преобразования (15) получим

$$t_r(x, y) = (1 + i\sigma) \exp\left[-\frac{\pi\sigma}{\mu} (1 + i\sigma) r^2\right] - \frac{A}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \exp\left\{-\frac{\pi}{a^2 + b^2} [r'^2 + \epsilon\sigma(x_0^2 + y_0^2)]\right\} - \frac{1}{2} i\epsilon A^* \exp\left\{-\frac{\pi i r'^2}{2\mu} - \frac{\pi}{4\mu} [\epsilon[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \sigma[(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2]]\right\}. \quad (25)$$

Первый член этого выражения описывает фон. За исключением очень малых дифракционных эффектов (порядка  $\sigma^2$ ), он представляет собой геометрическую тень маски, спроектированную на плоскость предмета. Второй член описывает «правильно» восстановленный предмет. Основное различие заключается в том, что протяженность восстановленного пятна равна  $(a^2 + b^2)^{1/2}$  вместо  $a$ . Следовательно,  $b$  имеет смысл *предела разрешения* (с точностью до некоторого численного множителя, который будет определен позже). Множитель  $[1 + (b/a)^2]^{-1}$  перед амплитудой отражает то обстоятельство, что амплитуда уменьшается в том же самом отношении, в каком увеличивается площадь пятна. Уменьшение контраста в изображении очень малых предметов кажется более сильным, чем в случае обычной микроскопии, где амплитуда убывает как корень квадратный из площади, однако результат получается тот же самый, поскольку контраст в передаче интенсивности при наличии сильного когерентного фона является линейной функцией амплитуды.

Член, характеризующий ошибку, во второй строке имеет структуру, отличающуюся от структуры, описываемой выражением (23); он больше не сосредоточен точно в исходном пятне, а содержит множитель, сосредоточенный в зеркальном изображении пятна  $-x_0, -y_0$ . С помощью подстановки  $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$  мы можем записать этот член в другой, очень удобной форме:

$$t_e = -\frac{1}{2} i\epsilon A^* \exp\left[-\frac{\pi}{4\mu} (\epsilon - \sigma) r'^2\right] \exp\left[-\frac{\pi i r'^2}{2\mu} - \frac{\pi\sigma}{2\mu} (r^2 + r_0^2)\right]. \quad (25.1)$$

Это выражение особенно удобно в случае, когда  $\epsilon = \sigma$ , т. е.  $a = b$ , так как в этом случае амплитуда в системе полос  $t_e$  не зависит от  $r'$ . Амплитуда (но не фаза) сосредоточена в точке  $x, y = 0$ .

Этот результат можно положить в основу теории побочной части волны при восстановлении произвольных предметов с целью формулирования требований, предъявляемых к предметам в двухступенчатой микроскопии.

Микроскоп, как и любая другая оптическая система, может передавать лишь конечное количество информации. Описание предмета с помощью непрерывной функции пропускания становится поэтому нежелательной идеализацией, поскольку такая

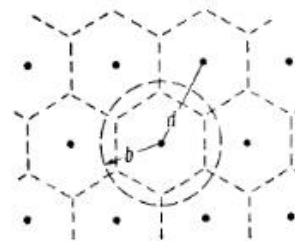


Рис. 7. Разбивка предмета на независимые элементы.

функция содержит бесконечное количество невозпроизводимых деталей. Мы подойдем ближе к адекватному описанию, если разделим предмет на ячейки размером порядка предела разрешения, свяжем с каждой ячейкой некоторый комплекс информации и исследуем прохождение этой информации через оптическую систему.

Уравнение (25.1) наводит на мысль, что если мы представим предмет в виде решетки двумерных гауссовых пятен с размерами  $a = b$ , то получим особенно простые результаты. Как показано на рис. 7, мы располагаем эти пятна в виде гексагональной решетки с расстоянием  $d$  между соседними центрами, где  $d$  — предел разрешения, который мы определим немного по-другому, чем обычно, а именно постулируем, что три (а не два) равных гауссовых пятна с размерами  $a = b$  находятся на пределе разрешения, если их центры удалены один от другого на расстояние  $d$ , т. е. минимум между ними исчезает как раз при этом расстоянии. Если  $a = b$ , то, согласно уравнению (25), амплитуда в члене, описывающем правильно восстановленный предмет, следует закону  $\exp[-1/2\pi(r'/b)^2]$ . В точке, находящейся

посередине между тремя центрами  $r' = d/\sqrt{3}$ ; следовательно,  $d$  определяется из условия

$$\exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{b\sqrt{3}}\right)^2\right] = \frac{1}{3},$$

откуда получаем

$$d = 1,45b.$$

Это выражение находится в хорошем согласии с обычным определением предела разрешения

$$d = \frac{0,6\lambda}{\sin \gamma_m},$$

если мы определим  $\gamma_m$  как такой угол, при котором амплитуда фона уменьшается в  $\sqrt{3}$  раз, т. е. интенсивность фона составляет  $1/3$  его максимального значения. Обозначая соответствующий радиус в плоскости предмета как  $R = z \sin \gamma_m$ , мы получим

$$\exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{\mu} R^2\right) = \exp\left[-2\pi\left(\frac{b}{\lambda} \sin \gamma_m\right)^2\right] = \frac{1}{3},$$

откуда следует

$$b = 0,42\lambda/\sin \gamma_m, \quad d = 0,61\lambda/\sin \gamma_m.$$

Пусть  $N$  — число независимых элементов в пределах освещенного поля, т. е. число ячеек, содержащихся в диске радиусом  $R$ . Каждая ячейка занимает площадь

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}d^2 = 0,433d^2 = 0,91b^2;$$

следовательно, число  $N$  равно

$$N = \frac{\pi}{0,91} \frac{R^2}{b^2} = 3,45 \cdot 0,42^2 \left(\frac{\lambda z_0}{b^2}\right)^2 = 0,61 \frac{1}{\sigma^2}. \quad (26)$$

Число  $N$  легко может быть сделано очень большим, порядка  $10^6$ — $10^8$ . Это показывает возможность *статистической оценки* побочной части воспроизводимого изображения на основе предположения о случайном распределении амплитуды по независимым элементам предмета. Понятно, конечно, что в особых случаях это может привести к большим ошибкам, но тем не менее это, бесспорно, приемлемое предположение, если рассматривается большое число разнообразных предметов.

Присвоим элементам номера от 1 до  $N$ . Побочная амплитуда в восстановленном изображении в точке  $x, y$  возникает как результат суперпозиции членов вида (25.1), описывающих ошибку, по одному от каждой ячейки с центром  $x_n, y_n$ . Обозначим  $r_n$  расстояние от точки  $x_n, y_n$  до точки  $x, y$ . С учетом упроще-

ний, вытекающих из условия  $\sigma = \epsilon$ , результирующая амплитуда ошибки равна

$$t_e(x, y) = \frac{1}{2} i\sigma e^{-\pi\sigma r^2/2\mu} \sum_{n=1}^N A_n^* e^{-\pi\sigma r_n^2/2\mu} e^{-\pi i r_n^2/2\mu}, \quad (27)$$

где через  $r_n$  обозначено расстояние от точки 0, 0 до точки  $x_n, y_n$ .

Относительное расстояние  $r'_n$  между точками  $x, y$  и  $x_n, y_n$  входит здесь только в фазовый множитель  $\exp(-\pi i r_n^2/2\mu)$ . Два множителя, характеризующих спад вероятности, уменьшаются медленно. Первый из них, стоящий перед суммой, соответствует корню квадратному из ослабления фона, т. е. он уменьшается со скоростью, вдвое меньшей, чем амплитуда фона. Второй множитель сосредоточен в точке (0, 0) и спадает с той же скоростью, что и первый множитель. Таким образом, в качестве первого приближения допустимо положить оба множителя равными единице и заменить уравнение (27) упрощенным выражением

$$t_e(x, y) = \frac{1}{2} i\sigma \sum_{n=1}^N A_n^* \exp\left(-\frac{\pi i r_n^2}{2\mu}\right). \quad (27.1)$$

Другими словами, чтобы получить в точке  $x, y$  амплитуду ошибки, мы должны в этой точке осуществить суперпозицию большого числа,  $N$ , *незатухающих* волн с длинами  $2\mu/r'$ , исходящих из всех точек изображения  $(x_n, y_n)$ . Эти длины волн всегда больше предела разрешения  $d$ . Их наименьшее значение, достигаемое при  $r' = 2R$ , равно  $\mu/R$ , в то время как предел разрешения равен  $0,61 \mu/R$ .

Введем теперь гипотезу, что между фазами этих волн нет никакой корреляции. В этом предположении среднее значение квадрата компоненты  $t_e$ , синфазной с фоном, которое обозначим  $t_{эфф}^2$ , равно половине суммы абсолютных значений квадратов членов, стоящих в правой части:

$$t_{эфф}^2 = \frac{1}{8} \sigma^2 \sum_{n=1}^N A_n A_n^* = \frac{1}{8} \sigma^2 N \overline{A_n A_n^*} = \frac{1}{8} \sigma^2 N A_{эфф}^2. \quad (28)$$

Здесь мы через  $A_{эфф}^2$  обозначим среднее значение квадрата вторичных амплитуд  $\overline{A_n A_n^*}$ , усредненное по всему полю. Понятно, что средний уровень пропускания предмета должен рассматриваться как часть фона, и  $A_{эфф}$  есть мера отклонения от равномерности. Объединяя уравнения (26) и (28), получим

$$t_{эфф} = 0,28 A_{эфф}. \quad (29)$$

Уравнение (29) дает нам возможность сформулировать критерий отбора подходящих предметов. Фон можно рассматривать

как практически равномерный, если контраст в интенсивности не превышает около 5%, т. е. если амплитуда контраста меньше 2,5%. Это означает, что в среднем по всему полю подходящие предметы должны удовлетворять условию

$$A_{\text{эфф}} \leq 0,1. \quad (30)$$

Рассмотрим в качестве примера черно-белый предмет, в котором черная часть, где  $A=1$ , покрывает  $k$ -ю часть освещенного поля, в то время как для остальной части  $A=0$ . В этом случае  $A_{\text{эфф}} = \sqrt{k}$ , и мы получаем простое правило, что черными точками или линиями должно быть покрыто не более 1% освещенного поля. Если, например, в качестве предмета взять диск, наполовину черный и наполовину белый, его диаметр не должен превышать  $1/7$  диаметра поля.

В качестве второго примера рассмотрим предмет с чисто фазовым контрастом, но со случайным распределением фазовых сдвигов. Мы должны определять это условием, которое должно быть удовлетворено в случае каждого применения теории Френеля — Кирхгофа; между точками, отстоящими друг от друга меньше чем на длину волны, фаза не должна заметно изменяться. Другими словами, если предмет резко сфокусирован, он должен казаться однородным и прозрачным. В обычной микроскопии этому условию будут удовлетворять покрытый «морщинами» лист целлулоида или даже покрытая сеткой желатина. Однако слой коллоидной дисперсии на молочном стекле этому условию не удовлетворяет. Помня это ограничение, мы можем применить теперь уравнение (29). Можно показать, что значение  $A_{\text{эфф}}$  снова равно единице. В случае чисто фазового контраста конец комплексного вектора пропускания  $t=1 - A$  движется по единичной окружности, причем все ориентации  $t$  равновероятны. Следовательно,  $\bar{t}=0$ , что дает  $\bar{A}=1$  и

$$A_{\text{эфф}}^2 = |A - \bar{A}|^2 = |A - 1|^2 = |t|^2 = 1.$$

Это означает, что если фазовый предмет такого типа перекрывает все поле, то он создает очень серьезные искажения, так как  $t_{\text{эфф}}=0,28$ . Этот результат показывает, что неравномерно прозрачная подложка, на которой находится предмет, даже если она невидима в обычный микроскоп, сделает самые контрастные или регулярно повторяющиеся детали предмета почти невидимыми. Поскольку кажется сомнительным, что в электронной микроскопии можно будет найти либо «оптически плоскую», либо по крайней мере приемлемую поддерживающую мембрану периодической структуры, то желательно применять такие мембраны, которые занимают лишь малую часть освещенного поля, либо обходиться вообще без них.

### Улучшение разделения изображений с помощью масок и других методов

Эти результаты приводят к выводу, что даже в случае очень малых предметов нелегко достичь высокой степени чистоты воспроизведения, так как побочная интенсивность пропорциональна корню квадратному из площади предмета. Однако в случае малых предметов становятся пригодными специальные методы, позволяющие очень эффективно исключить побочные амплитуды. Первый из них заключается в наложении маски на геометрическую тень в голограмме. Во втором методе маскируется фон в процессе восстановления.

Побочная амплитуда нежелательна лишь на площади, занятой истинным изображением. Таким образом, среди лучей, выходящих из предмета-«двойника», необходимо устранить лишь те, которые проходят сквозь предмет. Как можно видеть из рис. 4, если предмет мал, эти лучи будут иметь существенно то же самое направление, что и первичные лучи, освещающие предмет. Это означает, что мы можем существенно уменьшить побочную амплитуду, если наложим маску на геометрическую тень в голограмме.

Наложение маски, однако, приводит к двум новым искажениям. Во-первых, сама маска создает систему интерференционных полос. Этот эффект может быть значительно ослаблен, если применяется маска в форме гауссова пятна (гауссова маска). Во-вторых, маска уничтожает часть информации, необходимой для полного восстановления. Очевидно, что грубые детали будут страдать больше всего, так как информация о них содержится на площади, расположенной внутри или вблизи геометрической тени в голограмме, в то время как информация о более тонких деталях размазывается за пределами тени на большой площади. Но если размеры всего предмета порядка характеристической длины  $\mu^{1/2}$  или меньше, то эффект потери деталей становится несущественным. Следовательно, маскирование геометрической тени является очень эффективным методом улучшения восстановленных изображений очень малых предметов.

Во втором методе когерентный фон, т. е. первичная волна, подавляется *после* того, как она пройдет голограмму. Это может быть сделано следующим образом. С помощью восстанавливающей линзы создается действительное изображение точечного источника (рис. 1), которое экранируется расположенной в этой точке маленькой черной маской, предпочтительно гауссовой маской. Эта схема подобна той, которая используется в хорошо известном шпирен-методе. В результате, если пренеб-



речь дифракционными эффектами на маске, вместо амплитуды в плоскости предмета

$$1 - t_c - t_e,$$

где индексом  $c$  обозначена «правильная», а индексом  $e$  — «ошибочная» побочная часть, мы теперь получим

$$-t_c - t_e.$$

Следовательно, поглощающий предмет будет виден теперь ярким на темном фоне, как в методе «темного поля». В то время как в обычном методе «светлого поля» интенсивность приблизительно равна

$$1 - 2t_c - 2t_e,$$

в методе «темного поля» она равна

$$t_c^2 + 2t_e t_c + t_e^2.$$

Здесь  $t_e^2$  можно рассматривать как побочный фон, а  $2t_e t_c$  — результат интерференции двух изображений. Интенсивность побочного фона равна квадрату его прежнего значения. Она пропорциональна доле освещенного поля, покрытой предметом, а не корню квадратному из этой величины и становится пренебрежимо малой для предметов, которые покрывают лишь несколько процентов освещенного поля. Интерференционное произведение  $2t_e t_c$  ничего не добавляет к фону, так как оно равно нулю всюду вне предмета, где  $t_c = 0$ . На поле предмета оно обуславливает лишь слабую модуляцию истинной плотности. В случае черно-белых предметов этот эффект пренебрежимо мал, так как контуры предметов остаются неизменными. Вопрос о том, насколько сильно он исказит полутоновые предметы, будет подвергнут дальнейшему рассмотрению.

По-видимому, в случае малых предметов наиболее многообещающей будет комбинация этих двух методов, т. е. маскирование геометрической тени и первичной волны.

Третий, наиболее трудный метод улучшения разделения заключается в том, что проводится серия восстановлений при различных значениях  $\mu$ . В то время как истинное изображение всегда остается тем же самым, побочное изображение изменяется и, следовательно, может быть подавлено. Четвертый метод обсудим позже в связи с освещением неточечными источниками.

### Освещающие волны с астигматизмом и сферической абберацией

Следуя методу, впервые предложенному Дебаем, построим общую когерентную освещающую волну из плоских элементарных волн, нормальных к направлению  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , и с амплитудой  $Ad\Omega$  в бесконечно малом телесном углу  $d\Omega$ , т. е.

$$A(\alpha, \beta) \exp [ik \{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p(\alpha, \beta)\}] d\Omega. \quad (31)$$

Амплитуда  $A$  предполагается действительной, фазовый множитель  $\exp(-ikp)$  выражает опережение фазы относительно прямого луча, проходящего через источник  $O$ , расположенный в начале координат. Пусть  $O$  совпадает со «средним параксимальным фокусом» пучка, а фазу положим равной

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} A_s (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) + \frac{1}{4} (C_x \cos^4 \alpha + 2C_{xy} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + C_y \cos^4 \beta). \quad (32)$$

Первый член соответствует опережению фазы вследствие астигматизма, второй определяется «эллиптической» сферической абберацией. Для упрощения здесь предполагалось, что эллиптические ошибки второго и четвертого порядка имеют одни и те же главные оси  $x, y$ .

Введем полярные углы  $\gamma, \theta$ , связанные с  $\alpha$  и  $\beta$  следующими соотношениями:

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \theta, \quad \cos \beta = \sin \gamma \sin \theta. \quad (33)$$

Функция  $p$  может быть записана в виде

$$p(\gamma, \theta) = \frac{1}{2} A_s \sin^2 \gamma \cos 2\theta + \frac{1}{4} \sin^4 \gamma \left[ \frac{3}{8} (C_x + C_y) + \frac{1}{4} C_{xy} + \frac{1}{2} (C_x - C_y) \cos 2\theta - \frac{1}{4} \left[ C_{xy} - \frac{1}{2} (C_x + C_y) \right] \cos 4\theta \right]. \quad (34)$$

Член четвертого порядка теперь равен сумме, в состав которой входят такие слагаемые: член, связанный со сферической абберацией, и два члена, обусловленные астигматизмом, один из которых эллиптический, а второй — с учетверенной периодичностью. Если линза круглая, то

$$C_x = C_y = C_{xy} = C_s \quad (35)$$

и член с астигматизмом четвертого порядка исчезает. Здесь  $C_s$  — постоянная сферической абберации. Ее смысл иллюстрирует

схема распределения лучей в пучке, приведенная на рис. 8. В большей части практически важных приложений разрабатываемой здесь теории хорошо оправдано приближение геометрической оптики, так как предполагается применять пучки с апертурами, примерно в 10 раз большими, чем в обычной электронной микроскопии, где дифракционный диск имеет тот же порядок величины, что и геометрические aberrации. Поскольку минимальное сечение пучка растет как третья степень апертуры, а дифракционный эффект обратно пропорционален первой степени, то он представляет лишь малую поправку — порядка  $10^{-4}$  геометрических размеров.

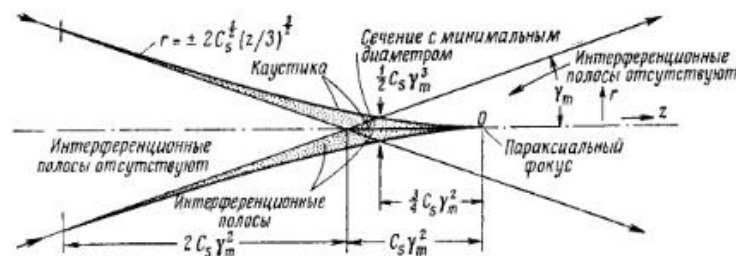


Рис. 8. Конфигурация пучка в фокусе при наличии сферической aberrации  $C_s$ .

Если апертурный угол равен  $\gamma_m$ , то все лучи пересекают ось аксиальной каустики, представляющей собой линию длиной  $C_s \gamma_m^2$  за параксиальным фокусом  $O$ . Диаметр пучка в гауссовой плоскости  $z=0$  равен  $2C_s \gamma_m^3$ , однако диаметр минимального сечения, расположенного в плоскости  $z = -3/4 C_s \gamma_m^2$ , в 4 раза меньше. Минимальное сечение определяется пересечением огибающей каустики, которая является поверхностью вращения, описываемой уравнением  $r = \pm 2C_s^{1/2} (z/3)^{1/2}$ , с конусом максимального раскрытия, определяемого уравнением  $r = \pm (z + C_s \times \gamma_m^2) \gamma_m$ . Этот конус и внешняя каустика делят пучок на четыре области различного характера, две из которых, выделенные на рис. 8 точками, содержат интерференционные полосы. Первая из них лежит внутри огибающей, но вне конуса. Лучи пересекаются в каждой точке этой области. Вторая область окружает аксиальную каустик. Она ограничена огибающей и конусом максимального раскрытия, и в каждой ее точке пересекаются три луча. Интерференционные полосы в обеих областях настолько резки и контрастны, что делают помещенные в них предметы почти невидимыми; таким образом, весь отмеченный точками объем не является подходящим местом для размеще-

ния предметов. В двух остающихся областях, справа и слева, каждую точку пересекает лишь один луч. Они представляют собой области с плавным изменением интенсивности фона, пригодные для расположения микроскопических предметов. В области слева самая большая плотность освещенности — вблизи края; во второй области, справа, плотность максимальна на оси.

Если в добавление ко всему пучок также астигматичен, как это всегда бывает в электронной оптике, то рис. 8 все еще может служить полезной иллюстрацией, но теперь лишь для главных сечений пучка, причем они должны быть изображены смещенными вдоль оси на  $\pm A_s$ . Следовательно, точка  $O$  будет теперь находиться посередине между двумя фокальными линиями, ориентированными под прямыми углами друг к другу, а также к оси пучка и разделенными расстоянием  $2A_s$ .

Возвращаясь к представлениям волновой оптики, просуммируем элементарные волны (31), в результате чего получим следующее выражение для комплексной амплитуды в точке  $(x, y, z)$ :

$$U_0(x, y, z) = \iint A(\gamma, \theta) \exp \left\{ ik \left[ (x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \gamma + z \cos \gamma - \frac{1}{2} A_s \sin^2 \gamma \cos 2\theta - \frac{1}{4} C_s \sin^4 \gamma \right] \right\} \sin \gamma d\gamma d\theta. \quad (36)$$

Мы используем здесь упрощения, вытекающие из уравнения (35); они будут применяться также для упрощения обсуждения во всех последующих формулах, но результаты будут таковы, что позволят без труда распространить их также и на более общий случай, описываемый уравнениями (32) и (34).

Введем под знаком интеграла в выражение (36) фурье-координаты

$$\xi = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad \eta = \frac{\cos \beta}{\lambda} \quad \text{и} \quad \rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}.$$

Точные уравнения преобразования имеют вид

$$\sin \gamma = \lambda \rho, \quad \cos \gamma = (1 - \lambda^2 \rho^2)^{1/2}, \\ d\Omega = \sin \gamma d\gamma d\theta = \frac{\lambda^2 d\xi d\eta}{(1 - \lambda^2 \rho^2)^{1/2}}.$$

Мы снова предполагаем, что пучок достаточно узкий, что позволяет нам пренебречь выражением  $\sin^2 \gamma = \lambda^2 \rho^2$  в знаменателе последнего выражения. Однако в фазовом множителе мы должны учесть все члены вплоть до четвертого порядка по  $\rho$  и написать

$$\cos \gamma = (1 - \lambda^2 \rho^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \rho^2 - \frac{1}{8} \lambda^4 \rho^4.$$

В этом приближении получаем

$$U_0(x, y, z) = \lambda^2 e^{ikz} \int \int A(\xi, \eta) \exp \left\{ 2\pi i \left[ x\xi + y\eta - \frac{1}{2} z \lambda \rho^2 - \frac{1}{2} A_s \lambda (\xi^2 - \eta^2) - \frac{1}{8} (z + 2C_s) \lambda^3 \rho^4 \right] \right\} d\xi d\eta. \quad (36.1)$$

Значение этого интеграла, как и значение точного выражения (36), может быть легко оценено при больших расстояниях  $R$  от источника в направлении  $\alpha, \beta$ . Эта оценка дает

$$U_0(R, \alpha, \beta) = (-i) \frac{\lambda}{R} A(\gamma, \theta) e^{ik(R-p)}, \quad (36.2)$$

где функция  $p$  задается уравнением (32) или (34). Множитель  $(-i)$ , выражающий сдвиг волнового фронта на  $1/4\lambda$  по сравнению с компонентами (31), возникает вследствие перехода от плоских волн к сферическим и обычен для дифракционной теории. Уравнение (36.2) представляет фон в области физической тени предмета, которую мы должны теперь рассчитать.

Предмет, расположенный в плоскости  $z=z_0$ , может быть охарактеризован, как и прежде, комплексной функцией пропускания  $t(x, y)$ . Используя основную предпосылку дифракционной теории Френеля — Кирхгофа, будем считать, что амплитуда непосредственно перед предметом равна амплитуде невозмущенной освещающей волны  $U_0(x, y, z_0)$  и непосредственно за предметом отличается от нее в  $t(x, y)$  раз. Теперь переменные  $\alpha, \beta, \gamma$  в выражении для освещающей волны нужно обозначить индексом  $O$  («original», т. е. «исходный»), чтобы отличить их от переменных без индекса, описывающих волну, рассеянную предметом и распространяющуюся от него.

Задача заключается в том, чтобы из выражений, описывающих продифрагировавшие плоские элементарные волны, составляющие начальную волну, построить выражение для рассеянной волны. Для этого снова можно применить формулу Френеля — Кирхгофа в упрощенном виде (7.1), но только волну  $r_0^{-1} \exp(ikr_0)$  необходимо заменить суммой элементарных волн (34). Величина  $r_1$  по-прежнему означает расстояние точки наблюдения  $Q(R, \alpha, \beta)$  от точки предмета  $P$ . Следовательно, формула Френеля — Кирхгофа теперь примет вид

$$U(Q) = U(R, \alpha, \beta) = \frac{1}{i\lambda R} \int \int \int t(x, y) A(\alpha_0, \beta_0) \exp \{ ik[r_0(\alpha_0, \beta_0) + r_1(\alpha, \beta)] \} dx dy d\alpha_0 d\beta_0, \quad (37)$$

где

$$r_0(\alpha_0, \beta_0) = x \cos \alpha_0 + y \cos \beta_0 + z_0 \cos \gamma_0 - p(\alpha_0, \gamma_0),$$

$$r_1(\alpha, \beta) = R - x \cos \alpha - y \cos \beta - z_0 \cos \gamma.$$

Выражая углы через фурье-координаты  $(\xi, \eta)$  и  $(\xi_0, \eta_0)$ , мы получим в том же самом приближении, как и в (36.1), что

$$U(R, \xi, \eta) = \frac{\lambda}{iR} e^{ikR} \int \int t(x, y) dx dy \times \int \int A(\xi_0, \eta_0) \exp \left\{ 2\pi i \left[ x(\xi_0 - \xi) + y(\eta_0 - \eta) - \frac{1}{2} z_0 \lambda (\rho_0^2 - \rho^2) - \frac{1}{8} z_0 \lambda^3 (\rho_0^4 - \rho^4) - \frac{1}{2} A_s \lambda (\xi_0^2 - \eta_0^2) - \frac{1}{4} C_s \lambda^3 \rho_0^4 \right] \right\} d\xi_0 d\eta_0. \quad (38)$$

Симметрия этого выражения нарушается двумя последними членами, но она сразу же восстанавливается, если мы переходим к физической тени путем деления амплитуды  $U(R, \alpha, \beta)$  на фон  $U_0(R, \alpha, \beta)$ , определяемый уравнением (36.2):

$$\tau(\xi, \eta) = \int \int \int t(x, y) \frac{A(\xi_0, \eta_0)}{A(\xi, \eta)} \exp \left[ 2\pi i \left\{ x(\xi_0 - \xi) + y(\eta_0 - \eta) - \frac{1}{2} z_0 \lambda (\rho_0^2 - \rho^2) - \frac{1}{2} A_s \lambda [(\xi_0^2 - \xi^2) - (\eta_0^2 - \eta^2)] - \frac{1}{8} \lambda^3 (z_0 + 2C_s) (\rho_0^4 - \rho^4) \right\} \right] dx dy d\xi_0 d\eta_0. \quad (39)$$

Эта формула определяет физическую тень на бесконечности от предмета, расположенного в плоскости  $z=z_0$  и освещенного пучком, сформированным системой с абберациями четвертого порядка. Очевидно, что она может быть распространена на абберации любого порядка. Она является эквивалентом формулы преобразования (14) для освещения точечным источником, но ее нельзя записать в форме интеграла по плоскости предмета, так как интегрирование по углам нельзя здесь выполнить в трансцендентных функциях, обычно используемых в анализе. С другой стороны, этот интеграл можно без труда свести к двойному интегралу по переменным углам с помощью фурье-образа  $T(\xi, \eta)$  функции  $t(x, y)$ , который равен

$$T(\xi, \eta) = \int \int t(x, y) e^{-2\pi i (x\xi + y\eta)} dx dy.$$

Уравнение (39) принимает тогда вид

$$\tau(\xi, \eta) = \int \int T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) \frac{A(\xi_0, \eta_0)}{A(\xi, \eta)} \exp \left[ \pi i \left\{ z_0 \lambda (\rho^2 - \rho_0^2) + A_s \lambda [(\xi^2 - \xi_0^2) - (\eta^2 - \eta_0^2)] + \frac{1}{4} \lambda^3 (z_0 + 2C_s) (\rho^4 - \rho_0^4) \right\} \right] d\xi_0 d\eta_0. \quad (40)$$

Это преобразование можно проиллюстрировать несколькими простыми примерами. Если  $t=1$ , т. е. нет никакого предмета, то  $T$  является дельта-функцией

$$T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) = \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0).$$

Это означает, что интеграл (40) равен значению подынтегрального выражения при  $\xi_0 = \xi$ ,  $\eta_0 = \eta$ , т. е., как и прежде, единице.

Если  $t(x, y)$  — гармоническая функция  $x, y$  с периодами  $1/a, 1/b$

$$t(x, y) = \exp[2\pi i(ax + by)], \quad (41.1)$$

то  $T$  — снова дельта-функция, но смещенная в точку  $a, b$

$$T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) = \delta(\xi - \xi_0 - a, \eta - \eta_0 - b),$$

и интеграл снова равен значению подынтегрального выражения, но на этот раз в точке ( $\xi_0 = \xi - a, \eta_0 = \eta - b$ ). Физическая тень определяется уравнением

$$\begin{aligned} \tau(\xi, \eta) = & \frac{A(\xi - a, \eta - b)}{A(\xi, \eta)} \exp\left\{ \pi i a (2\xi - a) [\lambda(z_0 + A_s) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \lambda^3 (z_0 + 2C_s)(2\xi^2 - 2\xi a + a^2)] \right\} \exp\left\{ \pi i b (2\eta - b) [\lambda(z_0 - A_s) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \lambda^3 (z_0 + 2C_s)(2\eta^2 - 2\eta b + b^2)] \right\}. \quad (41.2) \end{aligned}$$

Первый множитель в показателе экспоненты мы уже встречали в теневом преобразовании при освещении точечным источником. Но период в тени более не остается постоянной величиной; другими словами, тень синусоидальной решетки не копирует исходного предмета. Если, например,  $b=0$ , т. е. решетка параллельна оси  $y$ , то расстояние между двумя максимумами равно

$$\left\{ (\lambda z_0 a) \left[ 1 + \frac{A_s}{z_0} + \frac{1}{4} \lambda^2 \left( 1 + \frac{2C_s}{z_0} \right) (2\xi^2 - 2\xi a + a^2) \right] \right\}^{-1}.$$

Первый множитель представляет собой геометрическую тень с периодом  $1/a$ , второй является поправкой, возникающей вследствие астигматизма и сферической aberrации, а также обусловленной наличием члена четвертого порядка, выражающего отклонение сферического волнового фронта от параболоида. Во всех практических приложениях  $z_0$  будет порядка величины  $C_s \gamma_m^2$ , причем  $z_0$  всегда пренебрежимо мало по сравнению с  $2C_s$ . Таким образом, астигматизм и сферическую aberrацию пучка можно определить по двум голограммам синусоидальной решетки, полученным при двух взаимно перпендикулярных положениях. Однако этот метод не очень чувствителен. Вблизи края освещенного поля, где  $\xi \gg a, \eta \gg b$ , расстояние между двумя соседними максимумами будет в  $(1 + C_s \gamma_m^2 / z_0)$  раз меньше геометрического расстояния. Если же нужно получить хорошие фотографии, то  $z_0$  должно быть порядка  $C_s \gamma_m^2$ , и этот множитель будет порядка единицы. Отсюда видно, что синусоидальная

решетка является не очень подходящим тест-объектом. Сферическую aberrацию можно намного лучше определить по физической тени тонкой проволоки, но обсуждение этого случая не может быть проведено на основе использования элементарных выражений и рассматриваться здесь не будет.

### Восстановление при наличии сферической aberrации и астигматизма

Предположим, что была сделана фотография физической тени предмета, удовлетворяющей соотношению (39) или (40). Мы видели, что если фон относительно сильный, то это эквивалентно подстановке вместо функции  $\tau_1$  ее действительной части  $1/2(\tau_1 + \tau_1^*)$ , где, как и выше,  $\tau_1$  относится к «собственно предмету» без фона. Чтобы найти в восстановленном предмете часть, характеризуемую побочным членом, мы должны применить к  $\tau_1$  преобразование, обратное (39). Но это довольно сложно, в то время как интерпретация с помощью представлений об изображении «двойниках» приводит к намного более простым и ясным результатам.

Выражение для функции  $\tau_1^*$ , комплексно-сопряженной физической тени  $\tau_1$ , получается из уравнения (39) путем замены знака перед  $i$ . Предположим теперь, как и выше, что в плоскости  $z=z_0$  находится предмет «двойник», характеризуемый функцией пропускания

$$t'_1(x, y) = t_1^*(-x, -y).$$

Заменяя переменные интегрирования  $x, y$  на  $-x, -y$ , получим для  $\tau$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tau_1^*(\xi, \eta) = & \int \int \int \int t'_1(x, y) \frac{A(\xi_0, \eta_0)}{A(\xi, \eta)} \exp\left\{ 2\pi i [x(\xi_0 - \xi) + y(\eta_0 - \eta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} z_0 \lambda (\rho_0^2 - \rho^2) + \frac{1}{2} A_s \lambda [(\xi_0^2 - \xi^2) - (\eta_0^2 - \eta^2)] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \lambda^3 (z_0 + 2C_s)(\rho_0^4 - \rho^4) \right\} dx dy d\xi_0 d\eta_0. \quad (42) \end{aligned}$$

Согласно уравнению (39), полученное выражение является выражением для физической тени предмета  $t'_1$ , расположенного в плоскости  $-z_0$ , но с тем важным отличием, что знаки  $A_s$  и  $C_s$  здесь также изменены. Физическое значение этого обстоятельства становится яснее, если вместо  $\tau_1^*$  мы рассмотрим дополнительную волну  $U'_1$ , которая возникает в процессе восстановления и получается из уравнения (42) путем умножения его

на фон (36.2). Результат можно записать в следующем виде:

$$U_1'(R, \xi, \eta) = \frac{\lambda}{iR} e^{ikR} \int \int t_1'(x, y) dx dy \int \int A(\xi_0, \eta_0) \times \\ \times \exp \left\{ 2\pi i \left[ x(\xi_0 - \xi) + y(\eta_0 - \eta) + \frac{1}{2} z_0 \lambda (\rho_0^2 - \rho^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8} z_0 \lambda^3 (\rho_0^4 - \rho^4) + \frac{1}{2} A_s \lambda (\xi_0^2 - \eta_0^2) + \frac{1}{4} C_s \lambda^3 \rho_0^4 \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -2\pi i \left[ A_s \lambda (\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{2} C_s \lambda^3 \rho^4 \right] \right\} d\xi_0 d\eta_0. \quad (43)$$

Сравнивая это выражение с выражением (38), можно видеть, что первые две строки представляют излучение предмета  $t_1'$ , расположенного в плоскости  $-z_0$ , но освещенного с помощью такой оптической системы, в которой знаки астигматизма  $A_s$  и сферической aberrации  $C_s$  изменены. Это гарантирует полную симметрию освещения предмета и его «двойника». Однако излученная волна отличается фазовым множителем [последний множитель в правой части уравнения (43)]. Это означает, что элементарная волна, испущенная некоторым элементом  $t_1'(x, y) dx dy$  предмета-«двойника», имеет астигматизм  $2A_s$  и сферическую aberrацию  $2C_s$ . Следовательно, при наличии астигматизма или сферической aberrации предмет-«двойник», появляющийся в процессе восстановления, более не будет резким, а будет выглядеть так, как если бы его рассматривали через оптическую систему, обладающую aberrациями, удвоенными по сравнению с aberrациями конденсорной системы. Можно, конечно, четко видеть побочное изображение, а не истинное, если воспользоваться оптической системой с aberrациями противоположного знака, но невозможно одновременно видеть четко оба изображения.

Этот результат иллюстрируется рис. 9, который позволяет провести элементарную проверку. Огибающая освещающего пучка показана сплошными линиями, а прерывистыми — пучок, кажущийся выходящим из точки  $P'$  предмета-«двойника». Аксиальная каустика этого пучка всегда вдвое длиннее каустики освещающего пучка. Это можно легко понять, если представить себе аксиальную каустику как геометрическое место центров гомоцентрических пучков, каждый из которых испускает лучи лишь в пределах определенного конуса. Для каждого из этих элементарных пучков имеется некоторая резкая точка, сопряженная точке  $P$  и лежащая на линии, соединяющей точку  $P$  с центром пучка. Уравнение (43) подтверждает, что это рассуждение, проведенное в рамках геометрической оптики, фактически оправдано.

Из рис. 9 видно также, что пучок, связанный с некоторой точкой предмета-«двойника», пересекает плоскость предмета в пределах площади, вчетверо большей площади освещенного поля. Отсюда мы сразу же можем сделать заключение, что если освещенность поля равномерная, то побочная амплитуда в плоскости предмета составляла бы такую же долю истинной амплитуды, как и в случае гомоцентрического пучка, т. е. уравнение (29) снова было бы применимым. На самом деле в пучках со сферической aberrацией в сечениях, не очень удаленных от

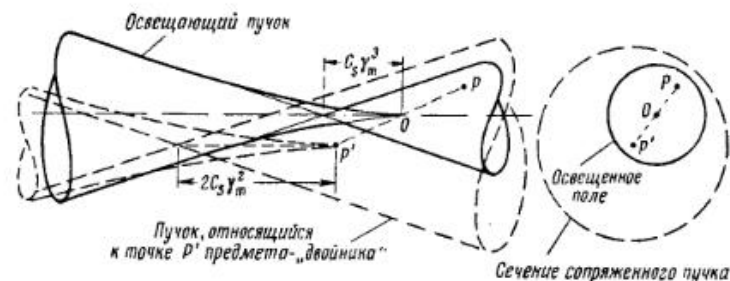


Рис. 9. Предмет-«двойник» при наличии сферической aberrации.

каустики, освещенность очень неравномерная, и на этом основан четвертый метод улучшения разделения изображений, который мы рассмотрим в этом разделе в дополнение к трем другим методам, обсуждавшимся выше. Применение масок не очень эффективно при наличии сферической aberrации, так как геометрическая тень точечного предмета имеет вид радиальной линии, являющейся проекцией аксиальной каустики. Она становится малой лишь в том случае, если предмет расположен на оси, но в электронной оптике нельзя, пользуясь прозрачной подложкой, помещать малые предметы в середине поля.

Этот четвертый метод улучшения разделения заключается в том, что предмет помещают в такое место, где освещенность меньше средней по полю. Чтобы кратко пояснить это, введем «коэффициент освещенности»  $J$ , равный отношению средней интенсивности по малой площади предмета к среднему значению по всему освещенному полю. Если средний коэффициент пропускания интенсивности предмета равен  $tt^*$  и предмет покрывает  $k$ -ю часть поля, то доля полного потока, испускаемого предметом, равна  $tt^*kJ$ . В точности такой же поток идет также от предмета-«двойника». Но только лишь  $1/4kJ$ -я часть этого потока пройдет через предмет. Множитель  $J$  здесь одинаков с тем, который был определен выше по непосредственной освещенности

предмета. Это объясняется тем, что, как можно видеть из рис. 9, малые предметы-«двойники» интерферируют друг с другом в направлении, в котором они непосредственно освещены. Переходя от интенсивностей к корню квадратному из среднего квадрата амплитуд, получим, что степень разделения пропорциональна  $\sqrt{kJ}$ , т. е. в  $\sqrt{J}$  раз больше ранее полученной нами для однородного освещения точечным источником. Следовательно, помещая малые предметы в *относительно темные* зоны поля, где  $J < 1$ , можно улучшить разделение за счет уменьшения побочного фона на площади предмета. Соответственно предмет-«двойник» посылает больше света в другие области поля, но побочная амплитуда, конечно, безвредна, если она падает заведомо за пределами восстановленного предмета.

Можно отметить, что относительно слабое освещение не влияет на контраст изображения восстановленного предмета до тех пор, пока оно не забивается «двойниками», рассеянным светом и искажениями, возникающими из-за неравномерного проявления фотографии.

### Критерии когерентности

До сих пор мы предполагали, что монохроматическая освещающая волна, идущая из точечного источника, абсолютно когерентна, но искажается при прохождении через систему линз. Абсолютная когерентность означает возможность образования интерференционных полос любого порядка, но она означает, конечно, и нулевую интенсивность. На практике мы должны найти компромисс между этими двумя противоречивыми требованиями. Наилучший компромисс достигается в том случае, если степень когерентности как раз достаточна для того, чтобы создать интерференционную картину, по которой предмет может быть восстановлен в требуемом пределе разрешения.

Необходимый критерий когерентности может быть немедленно сформулирован без учета каких-либо деталей голограммы. Вообразим, что абсолютно когерентный освещающий пучок перемещается в течение экспозиции параллельно самому себе, так что представляющая его точка, т. е. значение параксиального фокуса, описывает круг диаметром  $d_c$ . Но это эквивалентно перемещению предмета в пределах диска того же диаметра, так как для физической тени на бесконечности имеет значение лишь относительное расположение пучка и предмета. По такой «размазанной» голограмме в лучшем случае можно восстановить изображение с пределом разрешения  $d_c$ . Таким образом, мы получаем необходимое условие, что гауссов, или номинальный,

диаметр  $d_c$  освещающего диска не должен превышать предела разрешения  $d_A$  по Аббе

$$d_c \leq d_A = \frac{\lambda}{2 \sin \gamma_m}. \quad (44)$$

Мы можем показать, что это необходимое условие является также и достаточным, поскольку при его соблюдении получатся голограммы, практически не отличимые от голограммы, полученной в абсолютно когерентном пучке в пределах пластинки радиусом, соответствующим максимальному углу  $\gamma_m$ . Выразим в уравнении (44) длину волны с помощью соотношения де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где  $p$  — импульс частиц в пучке. Это соотношение столь же справедливо для фотонов, как и для электронов или любых других частиц. Интерпретируя  $p \sin \gamma_m$  как максимум поперечного импульса  $p_t$  частиц в пучке, перепишем соотношение (44) в виде

$$d_c 2p_t \leq h. \quad (44.1)$$

Сопоставим это выражение с неравенством Гейзенберга

$$d_c' 2p_t' \geq h, \quad (45)$$

где  $d_c'$  означает максимум поперечной неопределенности в положении частиц в пучке в гауссовой фокальной плоскости, а  $2p_t'$  — максимум неопределенности поперечного импульса. Остановимся сначала на том случае, когда в рассматриваемой плоскости пучок ограничен физической апертурой, т. е.  $d_c = d_c'$ . Принцип Гейзенберга утверждает: если частицы, составляющие пучок, определены с точностью до предела (45), то они неразличимы; другими словами, обусловленные ими эффекты, такие, как интерференционные полосы, нельзя отличить один от другого путем наблюдения в пределах телесного угла, соответствующего тому значению  $p_t'$ , которое превращает неравенство в равенство. Сопоставляя неравенства (44.1) и (45), мы видим, если  $d_c = d_c'$ , то мы должны иметь  $p_t < p_t'$ , следовательно, интерференционные полосы внутри конуса  $\gamma_m$  заведомо одинаковы для всех частиц пучка.

Но если  $d_c$  является не физической апертурой, а ее гауссовым изображением, сформированным оптической системой, этот критерий все же сохраняет силу, потому что в гауссовой оптике  $d_c \sin \gamma_m$  является инвариантом. Если бы критерий (44) был недостаточным, то можно было бы преодолеть ограничения, налагаемые принципом Гейзенберга, с помощью подходящей си-

стемы линз, расположенной перед физической апертурой и позволяющей наблюдать различия в системе полос, что делало бы частицы до некоторой степени различимыми.

Эти очень общие рассуждения определены, конечно, лишь с точностью до множителя порядка единицы. Чтобы получить более точные сведения об изменениях, происходящих в голограмме вследствие отклонения от абсолютной когерентности, рассмотрим простой случай освещения через физическую апертуру диаметром  $d$  и исследуем ее влияние на систему полос, созданных точечным предметом, расположенным на оси на расстоянии  $z_0$  от апертуры. Каждая точка освещающей апертуры создает систему полос, концентрических с осью, связывающей эту точку с точкой предмета. Эти системы полос взаимно некогерентны, следовательно, их интенсивности должны суммироваться. На краю голограммы угловое расстояние между двумя полосами равно  $\lambda/z_0 \sin \gamma_m$ . Если две системы полос смещены друг относительно друга на половину этого расстояния, то они будут полностью дополнять друг друга и интерференционные полосы пропадут. Этот случай соответствует расстоянию между двумя точками источника  $\lambda/2 \sin \gamma_m$ , которое как раз равно пределу Аббе  $d_A$ .

В согласии с Цернике [5] мы определяем «степень когерентности»  $D_c$  как отношение изменения интенсивности от максимума к минимуму в системе полос при предельном значении угла  $\gamma_m$  к соответствующей величине в случае равного светового потока, испускаемого точечным источником в центре апертуры. Предполагая, что изменение интенсивности в системе полос происходит по синусоидальному закону, получим

$$D_c = \iint \cos\left(\frac{\pi x}{d_A}\right) dx dy / \iint dx dy, \quad (46)$$

где интегрирование ведется по всей площади освещающей апертуры диаметром  $d$ . Подынтегральная функция  $\cos(\pi x/d_A)$  выражает то обстоятельство, что две точки, разделенные в направлении  $X$  расстоянием  $d_A$ , находятся в противофазе. Интегрирование дает

$$D_c = J_0\left(\frac{1}{2} \pi \frac{d}{d_A}\right) + J_2\left(\frac{1}{2} \pi \frac{d}{d_A}\right), \quad (47)$$

где  $J_0$  и  $J_2$  — функции Бесселя нулевого и второго порядка. Некоторые значения  $D_c$  приведены в таблице.

Данные этой таблицы подтверждают предположение о том, что система полос на краю голограммы будет быстро сглаживаться, если диаметр источника света заметно превосходит предел разрешения Аббе.

$\frac{d}{d_A}$	0,0	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
$D_c$	1	0,925	0,837	0,723	0,590	0,448	0,312	0,181

Условие когерентности (47) строго ограничивает доступные сегодня интенсивности. Главным образом в силу этой причины приложения метода восстановленных волновых фронтов будут, вероятно, ограничены световыми волнами длиной, не сильно отличающейся от длин волн видимого диапазона, и электронами. Рентгеновские лучи, протоны и другие частицы должны быть исключены, так как в настоящее время нет соответствующих источников достаточной интенсивности. Даже в случае электронов потребуются длительные экспозиции, пока не будет улучшена современная техника.

### Восстановление в оптическом диапазоне

До сих пор мы предполагали для простоты, что восстановление выполняется на волне той же самой длины, которая используется для получения голограммы. Будем впредь обозначать через  $\lambda'$  длину волны первой ступени, а через  $\lambda''$  длину волны второй ступени. Используем один и два штриха также для обозначения величин  $A_s$  и  $C_s$  при соответствующих длинах волн. То же самое формальное различие будет использовано для расстояний  $z'_0$  и  $z''_0$ , но здесь необходимы некоторые пояснения. Величина  $z'_0$  определяется системой получения голограммы; она равна действительному расстоянию до предмета от среднего параксиального фокуса освещающего пучка. Однако при восстановлении нет никакого физического предмета и  $z''_0$  означает просто положение плоскости, на которую должна быть сфокусирована оптическая система для того, чтобы получить правильное или по крайней мере наилучшее из возможных изображений исходного предмета.

Результат анализа — физическая тень, которую мы будем обозначать теперь  $\tau'$ , — описывается уравнением (42). Мы перепишем это уравнение вновь, но фурье-координаты  $(\xi, \eta)$  заменим углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Из соображений симметрии будет удобно обозначать штрихом не только параметры первой ступени, но

также и координаты  $x, y$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , используемые при анализе. Напишем

$$\tau'(a', \beta') = \int \int \int \int \frac{A'(a'_0, \beta'_0)}{A'(a', \beta')} t'(x', y') \times \\ \times \exp \{2\pi i [Q(a'_0, \beta'_0) - Q(a', \beta')]\} \frac{d(\cos \alpha'_0) d(\cos \beta'_0)}{\cos \gamma'_0} dx' dy', \quad (48)$$

где фаза  $Q$  равна

$$Q(a', \beta') = \frac{1}{\lambda'} \left[ x' \cos a' + y' \cos \beta' - \frac{1}{2} z'_0 \sin^2 \gamma'_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} A'_s (\cos^2 a' - \cos^2 \beta') - \frac{1}{8} (z'_0 + 2C'_s) \sin^4 \gamma' \right]. \quad (49)$$

Это же самое уравнение применяется для восстановления предмета  $t''$ , но все одиночные штрихи заменяются на двойные. Тот факт, что голограмма, полученная на первой ступени, используется также в процессе восстановления, выражается соотношением

$$\tau''(a'', \beta'', \gamma'') = \tau'(a', \beta', \gamma'), \quad (50)$$

где углы  $\alpha', \beta', \gamma'$  и  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  относятся к соответствующим точкам голограммы. Соотношение между ними определяется геометрией обеих ступеней голографического процесса.

Рассмотрим сначала простой случай, приведенный на рис. 1, когда фокусное расстояние  $f$  коллиматорной линзы, которая на первом этапе оптически отодвигает голограмму в бесконечность, равно расстоянию  $L$  при восстановлении. В этом случае углы  $\alpha', \beta'$  и  $\alpha'', \beta''$  равны, и их индексы можно опустить. Непосредственной проверкой легко убедиться, что уравнение (48) преобразуется в соответствующее уравнение для  $\tau'' = \tau'$ , если положить

$$x' = \frac{\lambda'}{\lambda''} x'', \quad y' = \frac{\lambda'}{\lambda''} y'', \quad A'_s = \frac{\lambda'}{\lambda''} A''_s, \quad C'_s = \frac{\lambda'}{\lambda''} C''_s, \quad z'_0 = \frac{\lambda'}{\lambda''} z''_0 \quad (51)$$

и

$$\tau''(x'', y'') = \tau' \left( \frac{\lambda'}{\lambda''} x'', \frac{\lambda'}{\lambda''} y'' \right). \quad (52)$$

Преобразование переменных интегрирования  $x$  и  $y$  чисто формально. Следующие два уравнения постулируют изменение масштаба аббераций  $A'_s$  и  $C'_s$  в процессе восстановления, а последнее — из условий (51) устанавливает следующее: чтобы видеть предмет  $t''$ , заданный уравнением (52), необходимо сфокусировать систему на плоскость  $z''_0$ .

Рассмотрим теперь более общий случай

$$f = kL, \quad (53)$$

когда фокусное расстояние коллиматорной линзы в  $k$  раз больше расстояния  $L$  при получении голограммы, причем по-прежнему предполагаем, конечно, что голограмма находится в фокальной плоскости линзы. (Сюда же относится также и тот случай, когда голограмма, используемая для восстановления, представляет собой в  $m$  раз увеличенную копию исходного предмета; в этом случае параметр  $k$ , фигурирующий в следующих ниже уравнениях, имеет значение  $f/mL$ .) Углы  $\alpha', \dots$  и  $\alpha'', \dots$  связаны теперь соотношениями

$$\frac{\cos \alpha'}{\cos \gamma'} = k \frac{\cos \alpha''}{\cos \gamma''}, \quad \frac{\cos \beta'}{\cos \gamma'} = k \frac{\cos \beta''}{\cos \gamma''}. \quad (54)$$

Решение этих уравнений можно записать в виде

$$\cos \alpha' = k \cos \alpha'' \left[ 1 - \frac{1}{2} (k^2 - 1) \sin^2 \gamma'' - \frac{3}{8} (k^2 - 1)^2 \sin^4 \gamma'' - \dots \right]. \quad (54.1)$$

Можно ограничиться лишь первыми двумя членами разложения. Введем их в уравнение (48), где для простоты положим  $\lambda' = \lambda''$ , чтобы отделить изменения, обусловленные геометрией, от изменений, обусловленных сменой длины волны. Существенные свойства преобразования можно вывести из фазы  $Q$ , определяемой уравнением (49), которое теперь запишем в виде

$$\lambda Q = k(x' \cos \alpha'' + y' \cos \beta'') - \frac{1}{2} k^2 z'_0 \sin^2 \gamma'' - \\ - \frac{1}{2} k^2 A'_s (\cos^2 \alpha'' - \cos^2 \beta'') - \frac{1}{8} k^4 \left( \frac{z'_0}{k^2} + 2C'_s \right) \sin^4 \gamma'' - \\ - \frac{1}{2} k(k^2 - 1)(x' \cos \alpha'' + y' \cos \beta'') \sin^2 \gamma'' + \frac{3}{8} z'_0 k^2 (k^2 - 1) \sin^4 \gamma'' + \\ + \frac{1}{2} A'_s k^2 (k^2 - 1) \sin^2 \gamma'' (\cos^2 \alpha'' - \cos^2 \beta''). \quad (55)$$

Члены в первой и во второй строках соответствуют точному воспроизведению, остальные члены представляют ошибки, которые возникают при  $k^2 \neq 1$ . Оставляя только первые четыре члена, преобразуем уравнение (48) в идентичное уравнение для  $\tau''$ , взятое вместо  $\tau'$ , сделав подстановки

$$kx' = x'', \quad ky' = y'', \quad k^2 A'_s = A''_s, \quad k^4 C'_s = C''_s, \quad k^2 z'_0 = z''_0 \quad (56)$$

и

$$t''(x'', y'') = t' \left( \frac{x''}{k}, \frac{y''}{k} \right), \quad (57)$$



Это означает, что для того, чтобы увидеть изображение, которое является в  $k$  раз увеличенной копией исходного предмета, необходимо увеличить масштаб астигматизма в  $k^2$  раз, сферической aberrации в  $k^4$  раз и сфокусировать оптическую систему на плоскость  $z_0'' = k^2 z_0'$ .

Но это изображение будет искажено aberrациями, которые определяются новыми членами в уравнении (55). Второй член во второй строке представляет *кому*. Первый член в последней строке является дополнением к сферической aberrации и может быть введен в  $C_s'$ . Последний член показывает, что астигматизм  $A_s''$  второго порядка при получении голограммы приводит к астигматизму четвертого порядка при восстановлении, т. е. к сферической aberrации эллиптического типа.

Все члены, характеризующие ошибки, могут оставаться очень малыми, если только  $k^2 \ll 1$ . Можно показать, что наилучшие положения предмета находятся вблизи плоскости  $z_0' = -C_s' \sin^2 \gamma_m'$ ; следовательно, значения  $x'$ ,  $y'$  будут порядка  $C_s' \sin^3 \gamma_m'$ , даже если предмет находится в крайнем положении. Таким образом, член, характеризующий кому в уравнении (55), будет порядка

$$k(k^2 - 1)C_s' \sin^3 \gamma_m' \sin^3 \gamma_m'' \approx \frac{k^2 - 1}{k^2} C_s' \sin^6 \gamma_m',$$

т. е., если только не выполняется условие  $k^2 \ll 1$ , он будет очень мал, за исключением крайних случаев, когда сферическая aberrация  $C_s' \sin^4 \gamma_m'$  имеет порядок нескольких сотен полос. В таких случаях кома может достигать нескольких полос и может возникнуть необходимость компенсации комы в оптической системе при восстановлении.

Последний член в уравнении (55) имеет порядок

$$\frac{k^2 - 1}{k^2} A_s' \sin^4 \gamma_m'$$

и также мал, если только не выполняется условие  $k^2 \ll 1$ . В хороших электронных линзах  $A_s'$  равно  $10^{-4} C_s'$  или даже меньше; следовательно, если даже сферическая aberrация имеет порядок 1000 полос, этот член представляет лишь долю полосы.

Таким образом, длину оптического устройства, используемого при восстановлении, можно выбрать заметно отличающейся от расстояния  $L$  в электронном устройстве, используемом при получении голограммы. Может оказаться особенно выгодным сделать  $k < 1$ , т. е. использовать увеличение  $\lambda''/\lambda'$ , имеющее порядок 100 000, не полностью, а только частично. Остаток может быть обеспечен оптической системой наблюдения. Здесь

имеется то преимущество, что можно работать с меньшими линзами, хотя и с пропорционально большей числовой апертурой. Полагая, например,  $C_s' = 1$  см и  $\sin \gamma_m' = 0,05$ , мы получим минимальный диаметр электронного пучка равным 0,625 мкм, и при  $k=1$  необходима оптическая система, способная формировать световой пучок с минимальным диаметром 6,25 см. Удобно будет уменьшить это значение в 2 или даже в 4 раза, так как изготовление оптических систем с числовыми апертурами от 0,1 до 0,2 не представляет трудностей, если нет необходимости применения больших линз.

Резюмируя, можно сказать, что если масштаб aberrации при восстановлении связан с aberrациями электронной конденсорной системы соотношениями

$$A_s'' = k^2 \frac{\lambda''}{\lambda'} A_s', \quad C_s'' = k^4 \frac{\lambda''}{\lambda'} C_s', \quad (58)$$

то поперечные размеры предмета будут увеличенными в отношении  $k\lambda''/\lambda'$ , а продольные размеры — в отношении  $k^2\lambda''/\lambda'$ . Следовательно, геометрическая, или  $k$ -я часть, преобразования является преобразованием того же типа, что и преобразование при помощи оптических приборов с продольным увеличением, равным квадрату поперечного, в то время как  $\lambda$ -я часть преобразования является однородным изменением масштаба, не реализуемым в обычной геометрической оптике.

Точность, с которой должны выполняться условия (58), лучше всего выразить через число полос. Максимально допустимое отклонение волнового фронта от сферической формы без потери разрешающей способности, согласно оценке Глазера [9], равно 0,4 от длины волны, а согласно оценке Брука [10] — одной длине волны. Вторую оценку можно считать более реальной. Следовательно, условие (58) для  $C_s''$  должно быть выполнено с точностью до одной полосы. Принимая снова  $C_s' = 1$  см и предел разрешения 1 Å, в соответствии с правилом Аббе найдем, что необходимая апертура  $\sin \gamma_m' = 0,025$  или, используя более точный числовой множитель 0,6 вместо 0,5,  $\sin \gamma_m' = 0,030$ . Это дает 200 и 400 полос на краю поля, в соответствии с чем и выбирают численный множитель. Таким образом, сферическая aberrация в оптической модели должна имитировать  $C_s'$  с точностью около одной полосы на 200 или 400 полос.

На краю поля допуск на астигматизм составляет около четверти полосы. В тщательно изготовленных электронных объективах постоянная  $A_s'$  имеет величину порядка нескольких микрон, и она с помощью компенсационного метода, предложен-

ного Хиллиером и Рамбергом [1], может быть уменьшена по крайней мере еще на порядок. Это необходимо для реализации полной разрешающей способности современных электронных микроскопов. Снова, выражая все через число полос, можно сказать, что астигматизм в тщательно изготовленных, но не скомпенсированных электронных линзах доходит до нескольких полос при апертурах порядка 0,003. Если апертуру увеличить в 10 раз, чтобы достичь десятикратного улучшения разрешающей способности, то искажение будет порядка нескольких сотен полос. Следовательно,  $A'_s$  необходимо имитировать в оптическом восстанавливающем устройстве также с точностью до одной полосы на несколько сотен полос.

Можно предположить, что для имитации параметров электроннооптической системы необходимо сначала тщательно измерить  $A'_s$  и  $C'_s$  и затем по этим данным рассчитать соответствующую оптическую систему. Однако это едва ли подходящий для практики метод. При его использовании, помимо трудностей осуществления измерений с требуемой точностью, обнаруживается еще и такой недостаток, что к тому моменту, когда расчет закончен и оптическая копия системы изготовлена, изменения параметров электроннооптической системы, вероятно, намного превысят допустимую ошибку. По-видимому, более предпочтительно сделать астигматизм и сферическую aberrацию оптической системы, используемой при восстановлении, переменными и регулировать их до тех пор, пока не будет достигнута максимальная резкость изображения определенной части изучаемого предмета, например подложки, или же определенных стандартных тест-объектов. Сферическую aberrацию можно сделать переменной с помощью смещения пластинки четвертого порядка, а астигматизм — с помощью скрещенных цилиндрических линз или наклонных линз. Опытные оптики, несомненно, будут в состоянии установить порядок систематического выполнения трех юстировок: фокуса, астигматизма и сферической aberrации. Таким образом, необходима лишь умеренная степень постоянства параметров электроннооптической системы, достаточная по крайней мере для осуществления серии восстановлений без слишком частых юстировок.

### Экспериментальная проверка

Эксперименты начались почти тотчас же после того, как появилась идея о голографическом восстановлении. Они подтвердили правильность основного принципа, но показали необходимость детальной разработки и модификации первоначальной,

отчасти примитивной точки зрения на механизм восстановления, которая была высказана ранее [11]. Позднее эксперименты были продолжены, чтобы проверить количественные выводы теории, описанной в этой статье.

В этих экспериментах получение голограммы и восстановление изображения выполнялись с видимым светом, хотя не всегда с одной и той же длиной волны. Устройство для получения голограммы было реализовано в соответствии со схемой, приведенной в верхней части рис. 1, но с оптическими линзами вместо электронных. Конденсор отбрасывал изображение ртутной дуги высокого давления (миниатюрная лампа с вольфрамовыми электродами) через цветной фильтр на отверстие диаметром около 0,2 мм. Использовались линии с длиной волны 4358 Å (фиолетовая) и 5461 Å (зеленая), выделенные светофильтрами. В более ранних экспериментах применялся объектив микроскопа, который давал изображение этого отверстия, уменьшенное примерно в 40 раз, т. е. с номинальным диаметром около 5 мкм. Это изображение и служило точечным источником. Предметами были большей частью микрофотографии, помещавшиеся в слое иммерсионного масла между двумя полированными стеклянными пластинами. В первых экспериментах расстояние между точечным источником и предметом составляло около 50 мм, расстояние от предмета до фотографической пластинки — 550 мм, следовательно, геометрическое увеличение было около 12.

Фотографическая пластинка удерживалась в заданном положении с помощью трех фиксирующих булавок. Первоначально предполагалось получить голограммы на обратимых фотопластинках, чтобы обеспечить идентичность положения при получении голограммы и при восстановлении изображения. При использовании негативно-позитивного процесса при печатании правильность установки обеспечивалась тем же самым фиксированным расположением булавок. Эти предосторожности оказались излишними в тех экспериментах, в которых не только гауссов, но также и физический диаметр источника был порядка предела разрешения; последнее доказывает, что в этих случаях теория освещающих гомоцентрических пучков является удовлетворительным приближением. Но в экспериментах с сильной сферической aberrацией в освещающем пучке эти предосторожности были необходимы. Было найдено, однако, что обратимое проявление не обязательно, и всюду использовался значительно более гибкий негативно-позитивный фотографический процесс. Негатив голограммы проявлялся обычно до контраста от  $\Gamma=1,2$  до  $\Gamma=1,6$ , а позитив — от  $\Gamma=0,7$  до  $\Gamma=1,6$ , так что можно было изменять суммарные значения  $\Gamma$  в широком интер-

вале. Когда было подтверждено, что наилучшие результаты получаются при полном контрасте  $\Gamma=2$ , в дальнейшем мы стремились получать контраст  $\Gamma$  как можно ближе к этому значению.

Позитив голограммы, используемый для восстановления, смазывался иммерсионным маслом и зажимался между полированными стеклянными пластинами, которые нужно было тщательно подбирать. Позитив оптически отодвигался назад с помощью визирной линзы, представлявшей собой ахроматический дублет, сцементированный и просветленный, с фокусным расстоянием 175 мм и линейной апертурой 47 мм. Сферическая aberrация составила три полосы, сопряженные на бесконечности. Согласно оценкам, диаметр, удовлетворяющий допуску в четверть волны, равен 27 мм, и приведенные ниже числовые апертуры определяются этим «эффективным диаметром». Восстановленное изображение рассматривалось в микроскоп и фотографировалось на пластинках, введенных в окуляр.

На рис. 10 воспроизведена одна из фотографий, полученных в ходе этих первых экспериментов. Слева приведена непосредственная фотография исходного предмета, представлявшего собой микрофотографию листа бумаги с именами трех основателей волновой теории света. Она была получена посредством системы наблюдения с той же самой оптикой, которая применялась в процессе восстановления. Сверху показана центральная часть голограммы, а справа — восстановленное изображение. Все три снимка сделаны в свете фиолетовой линии ртути с длиной волны 4358 Å. Эффективная числовая апертура равнялась 0,025, следовательно, предел разрешения равен  $0,6 \times 0,436 / 0,025 = 10$  мкм. Он составляет 1/150 диаметра воспроизведенной части микрофотографии и примерно соответствует промежутку между буквами *Y* и *G* в слове HUYGENS.

Хотя на наилучших восстановленных изображениях достигнуто почти такое же разрешение, как и на прямых фотографиях, все же на них заметен сильный «шум». В меньшей степени он обусловлен искажениями, созданными изображением «двойником», но в большей степени — частичками пыли и неоднородностями в двух объективах микроскопов. Можно отметить, что в электронном устройстве, по-видимому, нельзя ожидать появления этих неприятных эффектов, которые возникают из-за большой чувствительности метода, использующего когерентный фон, к сдвигам фаз. Пусть электронные линзы несовершенны с точки зрения теоретической оптики, но они свободны от пыли и не дают ширен-эффектов, так как электромагнитное поле автоматически «размазывается», и в этом отношении любая

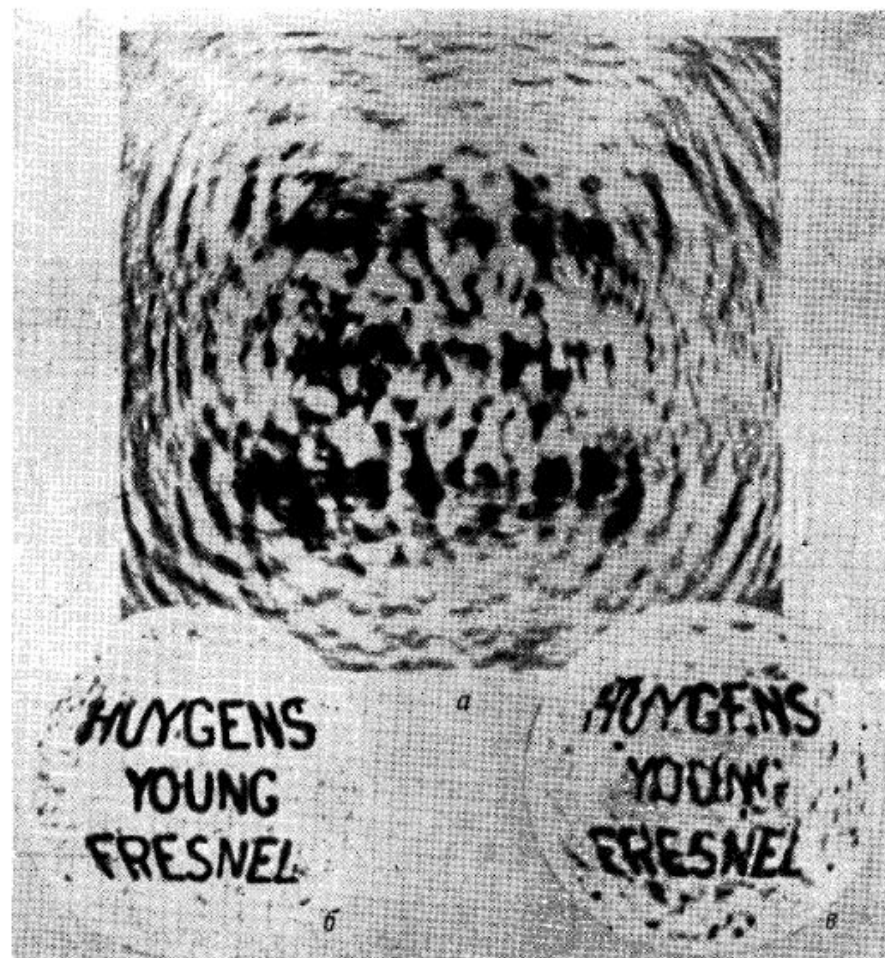


Рис. 10. Голографический цикл в оптическом диапазоне.

Исходным предметом являлась микрофотография диаметром 1,5 мм. Она освещалась светом с длиной волны  $\lambda = 4358$  Å через отверстие диаметром 0,2 мм, уменьшенное с помощью объектива микроскопа до номинального диаметра 5 мкм. Предмет располагался на расстоянии 50 мм от изображения отверстия. Геометрическое увеличение равно 12. Эффективная апертура линзы, использованной в процессе восстановления, равна 0,025. Шумовой фон обусловлен главным образом несовершенством освещающего предмета.

а — голограмма; б — предмет; в — восстановленное изображение предмета.

электронная линза превосходит все самые лучшие оптические линзы.

Чтобы уничтожить эти несущественные искажения, в некоторых последующих экспериментах оптические поверхности уменьшались до минимума. В экспериментах, в которых были получены снимки, приведенные на рис. 11 и 12, источником являлось отверстие диаметром 3 мкм, проколотое в фольге очень тонкой иглой. Таким образом, при получении голограммы на оптическом пути не было никаких других стеклянных поверхностей, кроме поверхностей пластин, поддерживающих микрофотографии. Оптика, используемая в процессе восстановления, также была сведена до минимума благодаря отказу от второго микроскопа. Расстояние между предметом и визирной линзой было уменьшено до 180 мм, расстояние между линзой и пластинкой — увеличено до 700 мм, так что визирная линза давала четырехкратное увеличение предмета, достаточное для прямого фотографирования на малочувствительных пластинках. Еще большее увеличение достигалось, когда получение голограммы производилось в свете фиолетовой линии ртути, а восстановление — в свете зеленой линии.

Эффективная числовая апертура в серии этих экспериментов равнялась 0,075, а теоретический предел разрешения был 3,5 мкм. Это составляет около 1/350 диаметра той части микрофотографии, которая приведена на рис. 11 и содержит имена десяти основателей теории света. Разрешение как раз достаточно для того, чтобы заметить просвет в верхней части буквы «А». Теоретическое разрешение в процессе восстановления меньше, потому что как при получении голограммы, так и при восстановлении использовался один и тот же источник излучения — отверстие диаметром 3 мкм. Величину расчетного предела можно оценить по эмпирическому правилу сложения статистически независимых ошибок, что дает около 5,5 мкм. Фактически достигнутое разрешение в случае рис. 11, а также рис. 12 очень близко к расчетному. Можно также видеть, что фон здесь намного более однороден, чем на рис. 10. Оставшиеся искажения весьма существенны и обусловлены предметом — „двойником“. В этих экспериментах предмет — „двойник“ также можно было сфокусировать, причем по резкости его нельзя было отличить от «истинного» изображения.

В настоящее время ведутся эксперименты по проверке теории освещения пучками, имеющими большую сферическую аберрацию. Эти эксперименты уже подтвердили основные выводы теории.

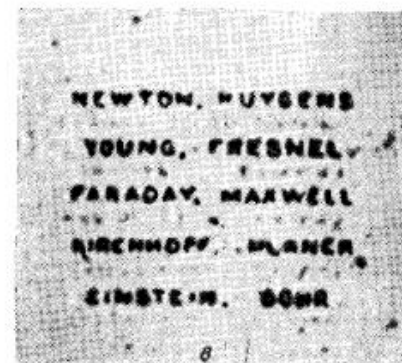
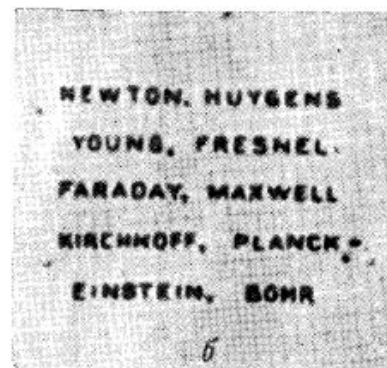


Рис. 11. Голографический цикл при освещении предмета через маленькое отверстие.

Буквы на исходном предмете были вписаны в прямоугольник размером  $0,65 \times 0,5$  мм. Предмет освещался светом с длиной волны  $\lambda = 4358 \text{ \AA}$  через отверстие диаметром 3 мкм, расположенное на расстоянии 18 мм от предмета. Геометрическое увеличение равно 10. Эффективная апертура, использованная при восстановлении, равна 0,075.

а — голограмма; б — предмет; в — восстановленное изображение предмета.

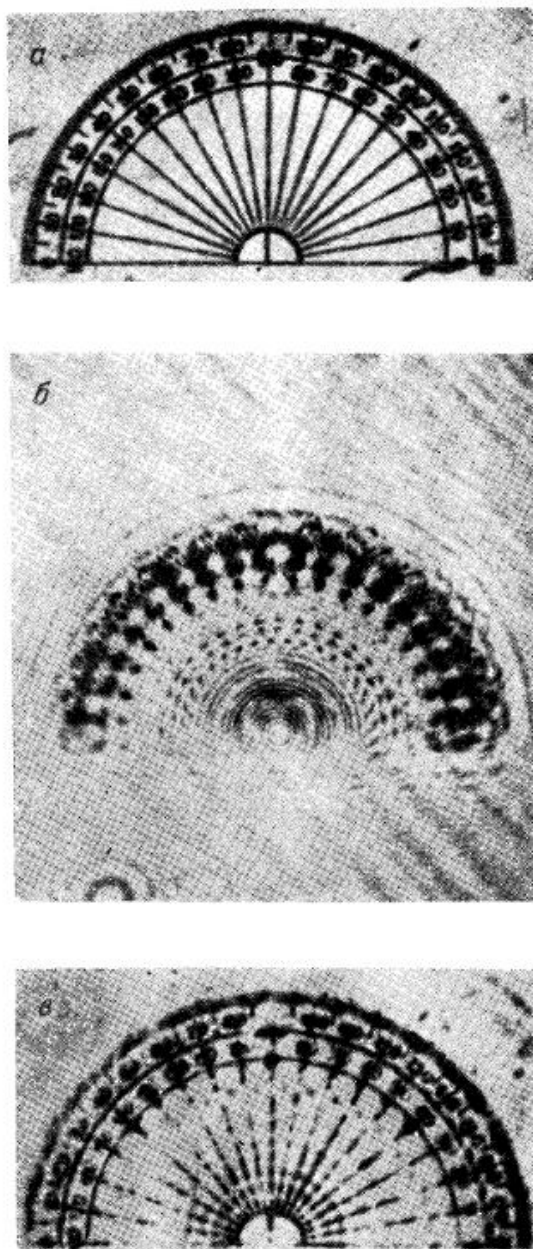


Рис. 12. Голографический цикл при освещении предмета через маленькое отверстие с изменением длины волны.

Исходным предметом был микротранспортёр диаметром 1 м.м. Условия те же самые, как и в случае, иллюстрируемом рис. 11, но в процессе восстановления использован свет с длиной волны  $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ .

*a* — предмет; *b* — голограмма; *в* — восстановленное изображение предмета.

## Заключение

Новый, голографический принцип может быть применен во всех случаях, когда имеется достаточно интенсивный источник когерентного монохроматического излучения, позволяющий получить расходящуюся дифракционную картину при относительно сильном когерентном фоне. В то время как его применение в электронной микроскопии, по-видимому, позволит достичь разрешения, не доступного для обычных электронных микроскопов, вероятно, все же более заманчивы перспективы применения нового метода в области световой оптики, где открывается возможность регистрации на одной фотографии информации о трехмерных объектах. В процессе восстановления можно сфокусировать последовательно одну плоскость за другой так, как будто сам предмет расположен в исходном положении, хотя искажения, обусловленные влиянием различных частей предмета, не лежащих в резко фокусируемой плоскости, при когерентном освещении больше, чем при некогерентном. Вполне возможно, что в световой оптике, где допустимо расщепление лучков, будут найдены такие методы использования когерентного фона, которые позволят улучшить разделение предмета по глубине, а также подавить влияние «сопряженной волны» более эффективно, нежели это было сделано в исследованных здесь простейших схемах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hillier J., Ramberg E. G., *J. Appl. Phys.*, **18**, 48 (1947).
2. Bragg W. L., *Nature*, **149**, 470 (1942).
3. Boersch H., *Z. techn. Phys.*, **19**, 337 (1938).
4. Boersch H., *Z. techn. Phys.*, **20**, 346 (1939).
5. Zernike F., *Proc. Phys. Soc.*, **61**, 147 (1948).
6. Baker B. B., Copson E. T., *The mathematical theory of Huygens' principle*, Clarendon Press, Oxford, 1939.
7. Campbell G. A., Foster R. M., *Fourier integrals for practical applications*, Bell Telephone System Monograph, New York, 1931.
8. Bunn W., *Chemical crystallography*, Oxford Univ. Press, 1945.
9. Glaser W., *Z. Phys.*, **121**, 647 (1943).
10. Bruck H., *C. R. Acad. Sci., Paris*, **224**, 1553 (1947).
11. Gabor D., *Nature*, **161**, 777 (1948).

## МИКРОСКОПИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА, II<sup>1)</sup>

Д. Габор

### 1. Введение

Принцип дифракционной (голографической) микроскопии был описан в предыдущей статье<sup>2)</sup> (цитируемой далее как «статья I»), в которой была подробно обсуждена одна из возможных схем его практического применения (так называемый проекционный метод). В этом методе микроскопический предмет освещается пучком света или электронов, испускаемых малым отверстием, либо непосредственно, либо через систему линз, причем между предметом и фотографической пластинкой, на которой формируется дифракционная картина, называемая голограммой, не помещается более ни одной линзы. Было показано, что если эта фотография, обработанная подходящим способом, освещается затем копией первоначальной освещающей волны, то в пространстве восстанавливается изображение исходного предмета совместно с его «двойником», вообще говоря, размытым и искаженным. Теоретически и экспериментально было доказано также, что влияние этой побочной части на восстановленное изображение не велико, если выбраны предметы подходящего типа с достаточно большим прозрачным пространством между темными частями.

С самого начала электронная микроскопия рассматривалась как основное, хотя и не единственное предложение метода восстановления волнового фронта. В ходе своих экспериментов Хейн и Дайсон [1] столкнулись со значительными практическими затруднениями и разработали модифицированную оптическую схему, которую они предложили автору. Их метод можно назвать «методом пропускания»; в нем для получения голограммы применяется слегка измененная схема электронного микроскопа просвечивающего типа. В то время как в проекционном методе вся электронно-оптическая система расположена между малым освещающим отверстием и предметом, в схеме пропускания она расположена между предметом и фотографической пластинкой. Эта последняя схема имеет некоторые преимущества, причем

наиболее очевидное заключается в том, что предмет можно осмотреть и отрегулировать с помощью хорошо известных методов обычной электронной микроскопии, прежде чем с него будет снята голограмма, а перед окончательной экспозицией изображение должно быть лишь в определенной степени расфокусировано. Другое столь же важное преимущество этой схемы заключается в том, что она имеет широкое поле. В проекционном методе освещающий пучок имел уже свою конечную широкую расходимость и соответственно малое поперечное сечение в той области, где может быть расположен предмет. В схеме пропускания расходимость освещающего пучка мала, а поле соответственно велико. Кроме того, как будет показано ниже, эти преимущества не получены ценой введения каких-либо недостатков. Первоначально опасались — и именно поэтому это предложение не было принято раньше, — что схема пропускания потребует более сложного оптического устройства для осуществления процесса восстановления. Но, как будет видно из дальнейшего, эта установка никоим образом не сложнее установки, необходимой в проекционной схеме. Кроме того, она имеет то дополнительное преимущество, что в ней можно использовать действительное изображение освещаемого отверстия. Благодаря этому можно экранировать неизменную часть освещающей волны («когерентного фона»), после того как она пройдет через голограмму, или изменить фазу этой волны с помощью фазовой пластинки Цернике и, таким образом, получить восстановленное изображение методами «темного поля» или фазового контраста.

Эти ставшие необходимыми практические модификации, естественно, потребовали пересмотра теории на несколько более широкой основе и завершения ее обсуждением условий применения, не рассмотренных в статье I.

### 2. Принципы восстановления волнового фронта

Рассмотрим монохроматическую, когерентную волну с амплитудой  $U = A \exp(i\varphi)$ , падающую на фотографическую пластинку. Предположим, что пластинка проявлена с обращением или же с негатива отпечатан позитив, так что результирующий коэффициент контрастности равен  $\Gamma$ <sup>1)</sup>. На линейном участке

<sup>1)</sup> Габор D. Microscopy by reconstructed wavefronts: II, *Proc. Phys. Soc.*, **B64**, 449—469 (1951).

<sup>2)</sup> См. стр. 218.

<sup>1)</sup> По определению коэффициент контрастности  $\Gamma$  равен тангенсу угла наклона линейного участка так называемой кривой почернения — графика зависимости плотности почернения (логарифм величины, обратной коэффициенту пропускания интенсивности) фотографической пластинки от логарифма экспозиции (равной произведению освещенности на время экспозиции).

кривой почернения коэффициент пропускания амплитуды  $t$  для обработанной фотографической пластинки определяется выражением  $t = KA\Gamma = K(UU^*)^{\Gamma/2}$ , где  $K$  — постоянная величина. Представим теперь, что  $U$  состоит из когерентного фона, или освещающей волны  $U_0$  и возмущения, или вторичной волны  $U_1$ , рассеянной предметом:

$$U = U_0 + U_1 = A_0 \exp i\psi_0 + A_1 \exp i\psi_1 = \\ = \exp i\psi_0 [A_0 + A_1 \exp \{i(\psi_1 - \psi_0)\}].$$

С другой стороны, если мы осветим фотографию-голограмму одним лишь когерентным фоном, то мы тотчас за эмульсией получим волну  $U_s = tU_0$ . В простейшем, а также наиболее благоприятном случае коэффициент контрастности  $\Gamma = 2$ . При этом значении контраста

$$U_s = tU_0 = KA^2 A_0 \exp i\psi_0 = \\ = KA_0^2 \exp i\psi_0 \left[ A_0 + \frac{A_1^2}{A_0} + A_1 \exp \{i(\psi_1 - \psi_0)\} + \right. \\ \left. + A_1 \exp \{-i(\psi_1 - \psi_0)\} \right]. \quad (1)$$

Для простоты предположим, что когерентный фон однороден по интенсивности, т. е.  $A_0 = \text{const}$ , и сопоставим два последних уравнения. Выражения перед скобками с точностью до постоянного множителя равны. Внутри скобок мы видим, что вместо амплитуды когерентного фона  $A_0$  в уравнение (1) входит  $A_0[1 + (A_1/A_0)^2]$ . Если мы предположим — и это очень существенное условие, — что амплитуда когерентного фона намного больше амплитуд, рассеянных предметом, то членом  $(A_1/A_0)^2$  можно пренебречь. Следующие члены  $A_1 \exp(i\psi_1)$  идентичны в обоих выражениях. Это означает, что восстановлена подлинная вторичная волна с правильной фазой, и если пренебречь малым членом  $A_1^2/A_0$ , то и с правильной относительной амплитудой. Но последний член в выражении (1) новый: он представляет волну с той же самой амплитудой, как и вторичная волна  $U_1$ , но со знаком фазы, отличным от знака когерентного фона.

Это можно пояснить с помощью диаграммы, показанной на рис. 1. Если рассеянная волна относительно слаба, то полная амплитуда волны очень близка к вектору  $\overline{OP}$ , равному амплитуде когерентного фона, сложенной с синфазной компонентой рассеянной волны. В случае фотографической пластинки с коэффициентом контрастности  $\Gamma = 2$  эта амплитуда, возведенная в квадрат, характеризует пропускание, показанное на нижней диаграмме. Чтобы обе диаграммы привести к одному масштабу,

амплитуда когерентного фона полагается равной единице. Амплитуда прошедшей волны теперь очень близка к амплитуде когерентного фона, сложенной с удвоенной синфазной компонентой рассеянной волны. Этот результат можно интерпретировать, как показано на диаграмме, таким образом, что восстановленная волна отличается от исходной лишь «сопряженной амплитудой», синфазная компонента которой равна, а квадратурная компонента противоположна соответствующим компонентам амплитуды рассеянной волны. Может показаться, что эта интерпретация произвольна, поскольку квадратурная компонента подавляется, однако ниже будет показано, что это очень близко



Рис. 1. Векторная диаграмма, объясняющая принцип восстановления для коэффициента контрастности  $\Gamma = 2$ .

соответствует восприятию амплитуды рассеянной волны глазом, а именно как волны, идущей от предмета-«двойника».

Для того чтобы показать это, мы можем продолжить в несколько более общей форме рассуждения, начатые в статье I. По-прежнему будем предполагать, что освещающая волна выходит из точечного источника, но опустим предположение, сделанное в статье I, что фотографическая пластинка находится на бесконечности. Переход к освещающим волнам, отличным от сферических, легко может быть осуществлен на последней стадии.

Рассмотрим точечный источник  $S$ , точечный предмет  $O_1$  и точку  $P$  фотографической пластинки (рис. 2). В точку  $P$  падают прямой луч  $SP$  и непрямой  $SO_1P$ . Разность фаз между ними равна сумме двух компонент: одна из них пропорциональна разности длин прямой и ломаной линий, а вторая равна некоторому скачку фазы, который луч может испытать при рассеянии на предмете. Интерференция этих лучей дает в точке  $P$  полную амплитуду. Но в точности та же самая амплитуда получилась бы при другом знаке разности фаз двух лучей. Мы можем построить два таких луча с другим знаком разности фаз, прежде всего обращая направление распространения, т. е. пред-

ставляя себе сходящуюся в точку  $S$  сферическую волну, а не волну, выходящую из нее. Пусть  $QO_2$  является таким сходящимся волновым фронтом. Если он определен так, что  $\overline{SO_1} + O_1P - \overline{SP} = \overline{O_2P} - \overline{PQ}$ , то лучи, выходящие из точек  $O_1$  и  $O_2$ , будут иметь различные по знаку разности фаз относительно прямого луча. (Если  $O_1$  не точка, а малый предмет, создающий определенное запаздывание фазы, то необходимо постулировать, что



Рис. 2. Сопряженные точки предметов  $O_1$  и  $O_2$ .

$O_2$  создает равное по величине опережение фазы.) Простой расчет показывает, что при малых углах  $\alpha$  величины  $r_1$  и  $r_2$  связаны следующим соотношением:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{R}, \quad (2)$$

т. е., другими словами, сопряженные точки  $O_1$  и  $O_2$  являются оптически сопряженными относительно сферического волнового фронта, проходящего через точку  $P$  и рассматриваемого как зеркало. Можно отметить, что это верно лишь в первом приближении; при больших значениях  $\alpha$  вид  $O_2$  будет зависеть также от  $\alpha$ , а не только от радиуса  $R = \overline{SP}$ ; при  $R = \text{const}$  точка  $O_2$  будет уже не точкой, а абберационной фигурой, которая не идентична абберационной фигуре сферического зеркала. Однако в двух специальных случаях, представляющих особый интерес, фигура, сопряженная точке, является также резкой точкой независимо от положения точки  $P$ . В первом случае точечный предмет  $O_1$  расположен очень близко к источнику  $S$  по сравнению с его расстоянием от пластинки. Это и есть *проекционный случай*, рассмотренный в статье I; сопряженные точки симметричны по отношению к точечному источнику. Второй случай реализуется тогда, когда предмет расположен значительно ближе к пластинке, чем к источнику. Будет показано, что этот случай соответствует *методу пропускания*: сопряженные точки являются зеркальными отражениями друг друга по отношению к пластинке.

Могут спросить, нельзя ли получить какое-то преимущество при промежуточном расположении, помещая предмет, например, посередине между источником и пластинкой так, что сопряженный предмет отодвигается в бесконечность. Однако никаких преимуществ это не дает, поскольку, как видно из уравнения (2), две сопряженные амплитуды в точке  $P$  всегда равны. От сопряженного предмета избавиться нельзя; он является неизбежным следствием «нечувствительности к фазе» фотографической пластинки [2].

Используя обозначения рис. 2, запишем уравнение (2) в виде

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} = \frac{2}{R}.$$

Это соотношение является оптически инвариантным, т. е., другими словами, если в процессе восстановления отображают оп-

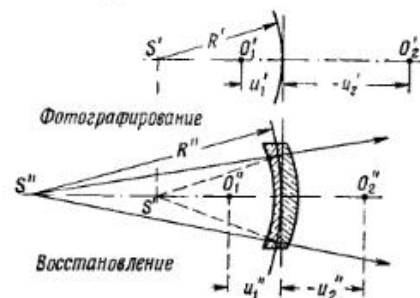


Рис. 3. Использование различных освещающих волн при восстановлении дает тот же эффект, что и оптическое преобразование.

тическое пространство источника и голограммы таким образом, что сферическая волна, идущая от источника к пластинке, имеет некоторую другую кривизну, то две сопряженные амплитуды остаются зеркальными изображениями относительно преобразованного сферического волнового фронта.

При выводе уравнения (1) предполагалось, что волна, использованная в процессе восстановления, характеризуется теми же самыми разностями фаз между различными точками фотографической пластинки, как и волна, использованная для получения голограммы. Теперь мы опустим это предположение и покажем, что по крайней мере в этом приближении замена одной освещающей волны другой дает тот же самый эффект, что и оптическое преобразование. Предположим, как показано на рис. 3, что пластинка первоначально была освещена из точки  $S'$ , удаленной от нее на расстояние  $R'$ , в то время как в процессе восстановления это расстояние равняется  $R''$ . Пред-



ставим теперь, что перед голограммой мы помещаем тонкую отрицательную линзу с фокусным расстоянием, определяемым соотношением  $-1/F = 1/R' - 1/R''$ , а за ней — положительную линзу с равным по величине, но положительным фокусным расстоянием. Таким образом, полный эффект равен нулю, но поскольку отрицательная линза восстановила первоначальную кривизну волнового фронта, отсюда сразу же вытекает, что в оптическом пространстве между двумя линзами сопряженные изображения занимают свои первоначальные положения  $O'_1$  и  $O'_2$ . Следовательно, замена волнового фронта дает тот же самый эффект, что и положительная линза, помещенная за голограммой. Мы получаем, например, для первой точки уравнение преобразования

$$\frac{1}{u'_1} - \frac{1}{u''_1} = \frac{1}{F} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}.$$

В частности, если новая освещающая волна плоская, то в преобразовании начального положения предмета действие голограммы аналогично действию линзы с фокусным расстоянием  $1/R'$ . Это свойство, а также некоторые другие интересные оптические свойства голограмм были недавно отмечены Роджерсом [3].

Если освещающая волна не сферическая, то сопряженный предмет более не будет резким, а исказится аберрациями двойной волны, обусловленными отклонениями волнового фронта от сферы. Это проиллюстрировано на рис. 4. Соответствующая теория развита в статье I.

### 3. Теория образования изображения при использовании метода пропускания

На рис. 5 показаны схемы оптических установок, используемых в проекционном методе и методе пропускания. В обоих случаях требуются три электронные линзы, чтобы создать необходимое сильное уменьшение отверстия в первой схеме и большое увеличение предмета во второй. Сразу же можно заметить, что метод пропускания фактически является разновидностью проекционного метода, если рассматривается заднее оптическое пространство, в  $H$ -плоскости которого расположена фотографическая пластинка. Однако можно показать, что проще рассмотреть вместо него переднее оптическое пространство, которое содержит отверстие и предмет. Это позволяет прийти к простому пониманию процесса восстановления более прямым

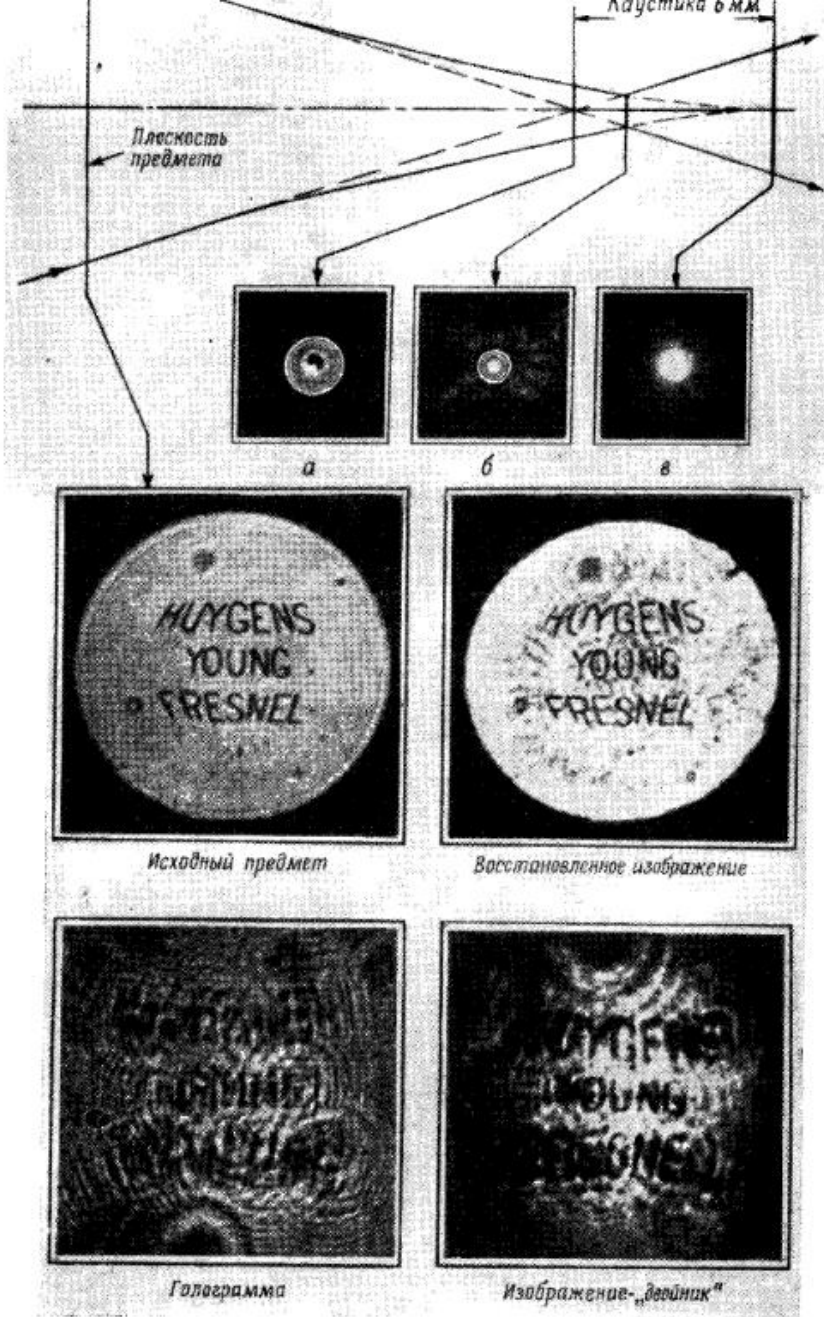


Рис. 4. Восстановление с помощью голограммы, полученной проекционным методом, при наличии сильной сферической аберрации. На фотографиях показаны три поперечных сечения освещающего пучка: исходный предмет, голограмма, восстановленные изображения предмета и его «двойника». Видно, что восстанавливаются детали предмета, размеры которых намного меньше диаметра пучка в минимальном сечении. а — крайний фокус; б — наименьшее сечение; в — гауссова плоскость.

путем. Будет также показана существенная идентичность двух методов, что мы заранее подчеркнули выбором одного и того же символа  $z_0$  для обозначения расстояния от источника до предмета в первой схеме и расстояния расфокусировки во второй.

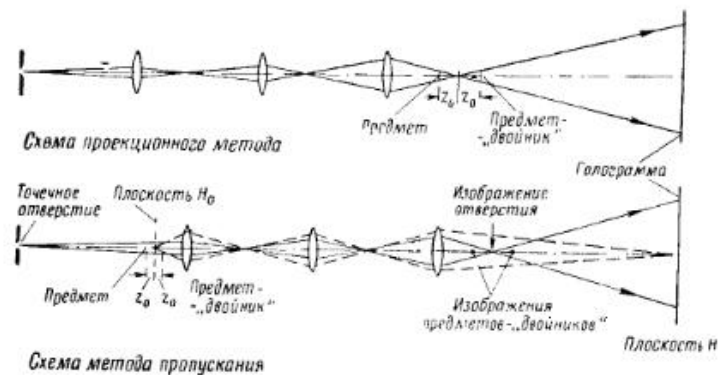


Рис. 5. Схемы электрооптических систем, используемых в двух методах получения голограмм.

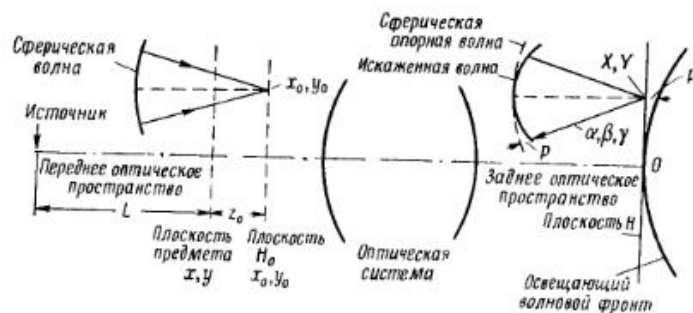


Рис. 6. Обозначения, принятые в методе преломления.

Ось  $z$  является оптической осью.  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образованные нормальными плоских волн соответственно с осями  $x, y, z$ . В геометрической аппроксимации они становятся лучами.

Соответствующие обозначения поясняются на рис. 6. Плоскость  $H_0$  является гауссовой сопряженной к плоскости  $H$ , т. е. плоскости фотографической пластинки; она расположена от плоскости предмета на малом расстоянии  $z_0$ , которое будет приниматься положительным при расположении, показанном на рис. 6, т. е. с «перефокусированным» объективом. Расчет состоит из двух основных этапов. На первом из них мы рассчитываем амплитуды в плоскости  $H_0$ , которую мы назовем «виртуальной

голограммой». На втором этапе мы принимаем во внимание aberrации оптической системы и рассчитываем истинную голограмму. Первую будем обозначать  $U^0(x_0, y_0)$ , а вторую —  $U(X, Y)$ .

Чтобы рассчитать первую голограмму, мы применим принцип Кирхгофа в упрощенной форме, справедливой для малых внеосевых углов:

$$U^0(x_0, y_0) = \frac{1}{z_0} \iint U_0^0(x, y) t(x, y) \exp(ikr_1) dx dy. \quad (3)$$

Здесь  $U_0^0(x, y)$  — амплитуда освещенности в плоскости предмета,  $t(x, y)$  — амплитудное пропускание предмета, являющееся в общем случае комплексной величиной;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число и  $r_1$  — расстояние от рассматриваемой точки  $(x_0, y_0, z_0)$  в плоскости  $H_0$  до точки  $(x, y, 0)$  в плоскости предмета. Разложим в ряд

$$r_1 = z_0 + \frac{1}{2z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \frac{1}{8z_0^3} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 + \dots$$

Можно апостериорно проверить, что пригодные для практического применения расстояния расфокусировки  $z_0$  достаточно велики, чтобы было оправдано применение формулы Кирхгофа в упрощенной форме (3). Кроме того, третий член в разложении  $r_1$  можно опустить. Мы позволим себе также опустить соответствующий член в фазе освещающей волны  $U_0^0$ , которая с точностью до постоянного множителя равна

$$U_0^0 = \exp \frac{1}{2} ik(x^2 + y^2) \frac{1}{L}.$$

Таким образом, для амплитуды в плоскости виртуальной голограммы мы получим

$$U^0(x_0, y_0) = \exp \left( \frac{ik}{2z_0} r_0^2 \right) \iint t(x, y) \times \exp \left[ \frac{1}{2} ik \left( \frac{1}{z_0} + \frac{1}{L} \right) r^2 - i \frac{k}{z_0} (xx_0 + yy_0) \right] dx dy, \quad (4)$$

где использованы подстановки  $x^2 + y^2 = r^2$  и  $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$ .

Эта виртуальная голограмма отображается на фотографическую пластинку оптической системой, которую характеризуют определенные ограничения, накладываемые на пучок лучей, и определенные геометрические aberrации. Как хорошо известно, их можно описать путем задания фазового искажения волны,

которая в переднем оптическом пространстве является сферической и сходится в точке  $x_0, y_0$  на плоскости  $H_0$ .

Для упрощения формулы предположим, что геометрическое увеличение равно единице. Это не приводит к ограничениям, так как в окончательной форме будет удобно отнести все оптические данные снова к пространству предмета. Плоская элементарная волна, являющаяся компонентой искаженной волны в заднем оптическом пространстве (которая соответствует сферической волне в переднем оптическом пространстве сходящейся в точке  $x_0, y_0$ ), достигнет точки  $X, Y$  с приращением фазы

$$(x_0 - X) \cos \alpha + (y_0 - Y) \cos \beta + p(\alpha, \beta, x_0, y_0) + p'(X, Y).$$

Здесь мы разбили искажение фазы на две компоненты, показанные на рис. 6;  $p$  — расстояние, измеренное в радиальном направлении, между искаженной и упомянутой сферической волнами; последние совпадают друг с другом в направлении радиуса, проведенного параллельно оси. Расстояние  $p$  является функцией углов  $\alpha, \beta$  и координат точки  $x_0, y_0$ . Вторая компонента,  $p'$ , выражает приращение фазы всей волны в целом. Она является функцией только  $X, Y$  и характеризует искажение волны, которая в переднем оптическом пространстве была плоской и нормальной к оси. Но так как она зависит только от  $X, Y$ , она добавляет к амплитуде лишь фазовый множитель  $\exp(ikp')$ , не оказывающий никакого влияния на фотографическую эмульсию, а следовательно, и на весь процесс. Поэтому мы можем с самого начала опустить  $p'$  во всех последующих формулах.

Мы пренебрегаем дисторсией изображения, кривизной поля и астигматизмом третьего порядка, но учитываем астигматизм первого порядка, сферическую aberrацию и кому. Хорошо известно, что очень существенной ошибкой электронных линз является астигматизм на оси, возникающий вследствие эллиптичности или неровности электродов. Ввиду этого было бы неоправданным предполагать, что «сферическая» aberrация обладает осевой симметрией. Для простоты мы предположим только, что ее главные оси совпадают с астигматическими осями, и тогда напишем

$$p = \frac{1}{2} A_s (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) + \frac{1}{4} (C_x \cos^4 \alpha + 2C_{xy} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + C_y \cos^4 \beta) + B(x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta) \sin^2 \gamma.$$

В этом выражении  $A_s$  — расстояние вдоль оси между двумя астигматическими фокусами; коэффициенты  $C_x, C_y$  и  $C_{xy}$ , имеющие размерность длины, являются константами апертурной погрешности; в случае вращательной симметрии  $C_x = C_y = C_{xy} = C_s$ ,

где  $C_s$  — постоянная сферической aberrации;  $B$  — коэффициент, характеризующий кому.

Роль апертуры в оптической системе может быть представлена множителем пропускания  $\exp\{-\frac{1}{2}(\gamma/\gamma_m)^2\}$ . Такое «гауссово» усечение, как было показано в статье I, аналитически очень удобно. Будет также удобно, как и в статье I, заменить угловые переменные  $\alpha, \beta, \gamma$  фурье-координатами  $\xi = \cos \alpha/\lambda, \eta = \cos \beta/\lambda, \rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = \sin \gamma/\lambda$ .

При этих условиях и обозначениях, применяя снова формулу Кирхгофа в упрощенной форме, можно для амплитуды в плоскости  $H$  получить следующее выражение:

$$U(X, Y) = \int \int U^0(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \times \\ \times \int \int \exp\left\{-\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right)^2 - 2\pi i[(x_0 - X)\xi + (y_0 - Y)\eta + p]\right\} d\xi d\eta.$$

С помощью формулы Френеля легко проверить, что если нет искажения волны, т. е.  $p=0$ , и если нет ограничения пучка лучей, то это преобразование восстанавливает  $U^0$ , т. е. в этом случае  $U(X, Y) = U^0(X, Y)$ .

Если подставим теперь сюда выражение для  $U^0$  из соотношения (4), то для амплитуды в плоскости голограммы получим следующее выражение в форме шестикратного интеграла:

$$U(X, Y) = \int \int \int \int \int \int t(x, y) \exp\left\{\frac{\pi i}{\lambda} \left[\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{L}\right)(x^2 + y^2) + \frac{1}{z_0} [x_0^2 + y_0^2 - 2(xx_0 + yy_0)]\right]\right\} \exp\left\{-2\pi i[(x_0 - X)\xi + (y_0 - Y)\eta + \frac{1}{2} A_s \lambda (\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{4} \lambda^3 (C_x \xi^4 + 2C_{xy} \xi^2 \eta^2 + C_y \eta^4) + B\lambda^2 (x_0 \xi + y_0 \eta) \rho^2]\right\} dx dy dx_0 dy_0 d\xi d\eta. \quad (5)$$

Это выражение может быть сразу же сведено к четырехкратному интегралу, потому что  $x_0$  и  $y_0$  входят в показатель экспоненты только в первой и второй степенях, и эту часть интеграла можно легко взять с помощью следующей формулы:

$$\int \int \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_0^2 + y_0^2) \exp\left\{-2\pi i \left[x_0 \left(\frac{x}{\lambda z_0} + \xi(1 + B\lambda^2 \rho^2)\right) + y_0 \left(\frac{y}{\lambda z_0} + \eta(1 + B\lambda^2 \rho^2)\right)\right]\right\} dx_0 dy_0 = \\ = i\lambda z_0 \exp\left[-\pi i \lambda z_0 \left\{\left(\frac{x}{\lambda z_0} + \xi(1 + B\lambda^2 \rho^2)\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda z_0} + \eta(1 + B\lambda^2 \rho^2)\right)^2\right\}\right]. \quad (6)$$

Следовательно,

$$U(X, Y) = \int \int \int \int t(x, y) \exp \left[ \pi i \left( \frac{r^2}{\lambda L} - \lambda z_0 \rho^2 \right) \right] \exp \left[ - \left( \frac{\rho}{\rho_m} \right)^2 \right] \times \\ \times \exp \left\{ - 2\pi i [(x - X)\xi + (y - Y)\eta] \right\} \exp \left\{ - 2\pi i \left[ \frac{1}{2} A_s \lambda (\xi^2 - \eta^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^3 \left[ \frac{1}{4} (C_x \xi^4 + 2C_{xy} \xi^2 \eta^2 + C_y \eta^4) - Bz_0 \rho^4 \right] + B\lambda^2 (x\xi + y\eta) \rho^2 \right] \right\} \times \\ \times dx dy d\xi d\eta. \quad (7)$$

Это простейшая форма, в которой может быть выражено точное решение<sup>1)</sup>. Она дает значение амплитуды как в сфокусированном, так и в расфокусированном изображении, получаемом в любом микроскопе (обычном или электронном) с гауссовой апертурой с точностью вплоть до погрешностей третьего порядка в случае стигматического, когерентного освещения предмета, расположенного на расстоянии  $L$  от источника.

Интерпретация этого выражения проста, если мы рассмотрим все множители последовательно один за другим. Сравнивая с выражением (5), видим, что кома входит сюда преобразованной к плоскости предмета, т. е. вместо  $x_0, y_0$  в формуле появляются  $x, y$ . Сферическая aberrация испытала некоторое изменение, которое в случае вращательной симметрии эквивалентно уменьшению  $C_s$  на  $4Bz_0$ . Позднее мы увидим, что этим полностью можно пренебречь. Следовательно, обусловленное aberrациями искажение фазы, которое выражается последним множителем в уравнении (7), имеет такой же вид, как в случае, если бы оптическая система была сфокусирована на предмет. Единственный ощутимый эффект дефокусировки проявляется в виде множителя  $\exp(-\pi i \lambda z_0 \rho^2)$ , который можно назвать «множителем дефокусировки».

Вместо того чтобы оперировать с амплитудой  $U$ , выгоднее, как и в статье I, иметь дело с «тенью предмета», который, будучи помещен в плоскость голограммы и освещен когерентным фоном  $U_0$ , дает позади себя амплитуду  $U$ . Эта «тень предмета» имеет комплексный коэффициент пропускания  $\tau(X, Y) = U(X, Y)/U_0(X, Y)$ , который отличается от коэффициента пропускания голограммы только в мнимой части. Амплитуду коге-

<sup>1)</sup> Оно является точным, строго говоря, лишь в той степени, в какой можно рассматривать точной формулу Кирхгофа. Но это приближение в электронной оптике справедливо со столь высокой степенью точности, которая почти недоступна в световой оптике, так как длина волны быстрых электронов мала по сравнению с размерами любого предмета, за исключением атомного ядра.

рентного фона  $U_0$  можно рассчитать по методу стационарной фазы; она равна

$$U_0(X, Y) = \frac{L}{L + z_0} \exp \left\{ 2\pi i \left[ \frac{X^2 - Y^2}{2\lambda(L + z_0)} - \frac{1}{2} A_s \frac{X^2 - Y^2}{\lambda(L + z_0)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} \frac{(C_x X^4 + 2C_{xy} X^2 Y^2 + C_y Y^4) - B(L + z_0) R^4}{\lambda(L + z_0)^4} \right] \right\}, \quad (8)$$

где  $X^2 + Y^2 = R^2$ . Как установлено, всеми членами, кроме первого, в показателе экспоненты можно полностью пренебречь, и даже первый член мал. На практике освещение в методе пропускания можно рассматривать как освещение плоской волной, но для того чтобы сделать в дальнейшем некоторые заключения, мы сохраним в этом выражении первый член.

Дальнейшее существенное упрощение выражения (7) возможно лишь в том случае, если расстояние дефокусировки велико по сравнению как с расстоянием  $A_s$  между астигматическими фокусами, так и с длиной каустики в фокальной картине сферической aberrации, т. е. если  $z_0 \gg A_s$  и  $z_0 \gg C_s Y_m^2$ . В этом случае несколько утомительный вывод дает следующую формулу для пропускания тени предмета:

$$\tau(X, Y) = \frac{1}{i\lambda z_0} \exp \left( \frac{\pi i}{\lambda z_0} R^2 \right) \int \int t(x, y) \exp \left( \frac{\pi i}{\lambda z} r^2 - \frac{W^2}{(z_0 Y_m)^2} \right) \times \\ \times \exp \left[ - \frac{2\pi i}{\lambda z_0} (Xx + Yy) \right] \exp \left\{ - 2\pi i \left[ \frac{1}{2} A_s \frac{(X-x)^2 - (Y-y)^2}{\lambda z_0^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} C_s \frac{W^4}{\lambda z_0^4} + B \frac{[X(X-x) + Y(Y-y)] W^2}{\lambda z_0^3} \right] \right\} dx dy, \quad (9)$$

где введена подстановка  $W^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2$ . Переход от выражения (7) к выражению (9) можно выразить простым правилом: замените каждый пучок волновых нормалей, сходящихся в точке  $X, Y$ , единичным лучом от точки  $x_0, y_0$  до точки  $X, Y$ . Последнее выражение, таким образом, представляет собой геометрическую аппроксимацию решения. Достаточно длинное исследование, которое может быть опущено, показывает, что это приближение на самом деле сохраняет силу почти до той точки, где  $z_0$  приближается к вершине каустики. Следующее приближение, в котором луч не просто проведен через точку  $x_0, y_0$ , но определяется из условия постоянства фазы, справедливо в дифракционной микроскопии практически без ограничений всюду, где геометрические погрешности в области каустики сильно перевешивают дифракционное размытие волны. Однако это приближение требует решения кубического уравнения для каждого

луча, и точное решение слишком сложно, чтобы его можно было здесь с успехом обсудить.

Можно отметить, что если геометрические погрешности пренебрежимо малы, то выражение (9) становится идентичным выражению (14) статьи I, которое с точностью до множителя  $\exp[-W/(z_0\gamma_m)^2]$ , ограничивающего пучок лучей, дает «теневой образ» предмета на фотопластинке, удаленной в бесконечность, при освещении этого предмета точечным источником, удаленным от него на расстояние  $z_0$ . Однако именно ограничение пучка лучей составляет главное отличие проекционного метода от метода пропускания. В проекционном методе точка фотографической пластинки получает излучение от *всех* точек предмета, если имеются достаточно мелкие детали, в то время как в методе пропускания вклад в образование амплитуды в одной точке голограммы дают, вообще говоря, лишь те точки предмета, которые расположены в пределах круга радиусом  $z_0\gamma_m$ . Следовательно, несмотря на формальное сходство, которое мы подчеркнули, используя в обеих статьях один и тот же символ  $z_0$  для представления различных величин, в реальных голограммах между ними имеется весьма существенное различие.

Общее обсуждение мы можем начать как с точной формулы (7), так и с приближенной (9). Положим для простоты  $L = \infty$ , т. е. пусть для освещения используются параллельные лучи. В этом случае когерентный фон  $U_0$ , определяемый выражением (8), уменьшается до единицы, а функция  $U(X, Y)$  дает как теневой образ предмета, так и амплитуды в плоскости голограммы. Величина пропускания фотографии (если предположить, что она правильно обработана), как показано в разд. I, пропорциональна действительной части  $\tau$ , следовательно, в рассматриваемом случае, действительной части  $U$ . Но непосредственной проверкой выражения (7) при  $L = \infty$  можно найти, что действительная часть соответствует *двум* предметам с функциями пропускания  $t(x, y)$  и  $t^*(x, y)$ , которые расположены на расстояниях  $\pm z_0$  от плоскости  $H_0$ , причем знаки абберационных коэффициентов  $A_s, C_s$  и т. д. для второго предмета должны быть изменены. Это проиллюстрировано на рис. 7, где показано положение каустик сферической абберации для некоторой точки предмета и ей сопряженной точки. После восстановления один из предметов будет резким (не имеет значения, который из двух именно), а другой будет искажен удвоенными абберациями. К этому мы еще вернемся позднее.

Быть может, поучительно взглянуть на соотношение между предметом и голограммой с другой точки зрения. Отметим, что координаты  $(x, y)$  плоскости предмета входят в выражение (7), определяющее амплитуду в голограмме, только под знаком

интеграла

$$\int \int t(x, y) \exp \frac{\pi i r^2}{\lambda L} \exp [-2\pi i (x\xi + y\eta)(1 + B\lambda^2 \rho^2)] dx dy. \quad (10)$$

Для простоты положим снова  $L = \infty$ , т. е. рассматриваем освещение параллельным пучком, и заменим  $\xi, \eta$  новыми переменными

$$\xi' = \xi(1 + B\lambda^2 \rho^2), \quad \eta' = \eta(1 + B\lambda^2 \rho^2). \quad (11)$$

Выражение (10) принимает тогда вид

$$\int \int t(x, y) \exp [-2\pi i (x\xi' + y\eta')] dx dy,$$

которое является фурье-образом коэффициента  $t(x, y)$  при новых переменных  $\xi', \eta'$  и стандартных обозначениях работы [4].

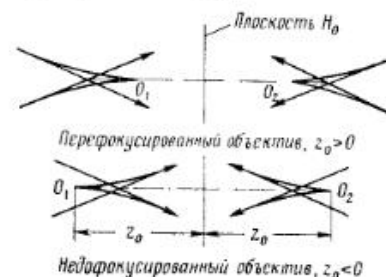


Рис. 7. Сопряженные предметы в методе пропускания.

Обозначая фурье-образ символом  $\tilde{t}$ , выражение (10) запишем в виде  $\tilde{t}[\xi(1 + B\lambda^2 \rho^2), \eta(1 + B\lambda^2 \rho^2)]$ . Можно сказать, что учет комы привел к определенным искажениям образа в фурье-пространстве. Подставляя это выражение в выражение (7), где для простоты мы запишем апертурную погрешность в форме, имеющей осевую симметрию, получим

$$U(X, Y) = \int \int \tilde{t}[\xi(1 + B\lambda^2 \rho^2), \eta(1 + B\lambda^2 \rho^2)] \exp \left\{ -2\pi i \left[ \frac{1}{2} \lambda z_0 \rho^2 + \frac{1}{2} A_s \lambda (\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{4} C_s \lambda^3 \rho^4 \right] \right\} \exp \left[ -\left( \frac{\rho}{\rho_m} \right)^2 \right] \exp [2\pi i (X\xi + Y\eta)] d\xi d\eta.$$

Мы снова получили интеграл Фурье в стандартной форме [так называемый «левый образ», если выражение (10) назвать «правым образом»]. Обращая эту формулу, получим фурье-образ амплитуды  $U$ , который обозначим  $\tilde{\tilde{t}} U$ ,

$$\tilde{\tilde{t}} U(\xi, \eta) = \tilde{t}[\xi(1 + B\lambda^2 \rho^2), \eta(1 + B\lambda^2 \rho^2)] \times \exp \left[ -\left( \frac{\rho}{\rho_m} \right)^2 \right] \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{1}{2} \lambda z_0 \rho^2 + P \right) \right]. \quad (12)$$

где  $P$  — приращение фазы, обусловленное только астигматизмом и сферической aberrацией; кома входит в множитель  $\mathcal{H}t$ . Этот результат означает, что фурье-образ амплитуды в плоскости голограммы получается простым умножением искаженного комой фурье-образа предмета. Другими словами, простая периодическая компонента функции пропускания предмета плотностью  $\exp[2\pi i(x\xi' + y\eta')]$  преобразуется в плоскости  $H$  в другую простую периодическую компоненту

$$\exp[2\pi i(X\xi + Y\eta)] \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right)^2 - 2\pi i\left(\frac{1}{2}\lambda z_0 \rho^2 + P\right)\right],$$

где связь между переменными  $\xi, \eta$  и  $\xi', \eta'$  дается соотношениями (11). При условии что нет других aberrаций, помимо здесь рассмотренных, это выражение остается справедливым в любой плоскости независимо от того, сфокусировано ли в ней изображение или нет. Расфокусировка просто смещает фазы различных компонент в соответствии с множителем  $\exp(-\pi i \lambda z_0 \rho^2) \approx \exp[-i\pi \lambda z_0 \rho'^2 (1 - 2B\lambda^2 \rho'^2)]$ ; здесь для упрощения правой части мы используем то обстоятельство, что практически всегда  $B\lambda^2 \rho^2 = B\gamma^2 \ll 1$ .

Несмотря на формальную простоту, эта интерпретация оптического преобразования с помощью интегралов Фурье имеет, вообще говоря, лишь ограниченную применимость, хотя Дюффье [5] дал много интересных примеров противоположного характера, поскольку интенсивность должна быть рассчитана в каждой точке путем суммирования амплитуд компонент Фурье и вычисления квадрата абсолютных значений суммарной компоненты. Но в дифракционной микроскопии, если удовлетворяются необходимые условия, т. е. если амплитуда равномерного когерентного фона велика по сравнению со всеми другими амплитудами, ситуация другая. Равномерный когерентный фон  $U_0^0(x, y) = 1$  в соответствии с выражением (12) преобразуется также в равномерное распределение  $U_0(X, Y) = 1$ , и основной член, определяющий интенсивность, равен просто сумме действительных частей компонент Фурье. Таким образом, нам раскрылся новый аспект дифракционной микроскопии как процесса восстановления амплитуды в плоскости голограммы по действительной части периодических компонент, что уже отмечалось в статье I для особого случая.

#### 4. Восстановление

Мы уже видели в разд. I, что нет необходимости освещать голограмму в процессе восстановления точной копией первоначальной волны. Это обстоятельство имеет большое значение в

методе пропускания. Как мы видели в предыдущем разделе, можно рассматривать голограмму как полученную в переднем оптическом пространстве с таким фоном, который соответствует этому пространству. Необходимо лишь учесть погрешности оптической системы, связанные с геометрическими факторами и ограничением пучка лучей, но не нужно учитывать искажение фазы  $\rho'$  фона. Поскольку освещающий пучок в переднем оптическом пространстве существенно параллелен, при восстановлении мы можем освещать голограмму плоской волной. Но мы, конечно, должны скорректировать астигматизм первого порядка, сферическую aberrацию и кому. Можно отметить, что вследствие зеркальной симметрии сопряженных точек в переднем оптическом пространстве мы можем использовать корректирующую систему с погрешностями того же знака, что и у начальных погрешностей, или же другого знака в зависимости от того, какую из сопряженных точек желательно скорректировать.

Пока что мы предполагали, что коэффициент увеличения равен единице. Придадим ему теперь значение  $M$ , которое можно получить для электронного пучка в микроскопе или же путем оптического увеличения голограммы. Обозначим, как и в статье I, одним штрихом все параметры, относящиеся к получению голограммы, например  $\lambda'$  — длина волны де-Бройля, а двумя штрихами — параметры, относящиеся к восстановлению, например  $\lambda''$  — длина волны света. Мы можем получить теперь все параметры процесса восстановления из выражения (7) или из более простого выражения (9), постулируя, что все фазы, измеренные в интерференционных полосах, должны быть в процессе восстановления такими же, как и при получении голограммы. Следовательно, мы получим, например, из первого множителя перед знаком интеграла в выражении (9) условие  $R^2/\lambda' z_0' = M^2 R^2/\lambda'' z_0''$  или  $z_0'' = M^2 z_0' \lambda'/\lambda''$ .

Удобно ввести с помощью соотношения  $m = M\lambda'/\lambda''$  так называемое «избыточное увеличение»  $m$ . Оно указывает, насколько фактическое увеличение превышает отношение световой и электронной длин волн. В практических приложениях оно будет, вероятно, величиной порядка единицы, так как отношение  $\lambda''/\lambda'$  имеет значение около 100 000, а именно этот порядок увеличения требуется для получения фотографий с высоким разрешением. С этим обозначением из выражения (7) или (9) мы получим<sup>1)</sup>

$$z_0'' = m^2 z_0' \frac{\lambda'}{\lambda''}, \quad A_s'' = m^2 A_s' \frac{\lambda''}{\lambda'}, \quad C_s'' = m^4 C_s' \frac{\lambda''}{\lambda'}, \quad B'' = m^2 B'. \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Эти формулы были получены также в статье I, но необходимо отметить, что в проекционном методе расстояние  $z_0$  имело, конечно, другой смысл, чем здесь.

Постоянная сферической aberrации  $C'_s$  объективов электронного микроскопа имеет величину порядка нескольких сантиметров, следовательно, при  $m \approx 1$  мы получим значение  $C'_s$  порядка нескольких километров. Но, конечно, нет необходимости выполнять коррекцию в оптическом пространстве голограммы. Если за голограммой ввести уменьшающую оптическую

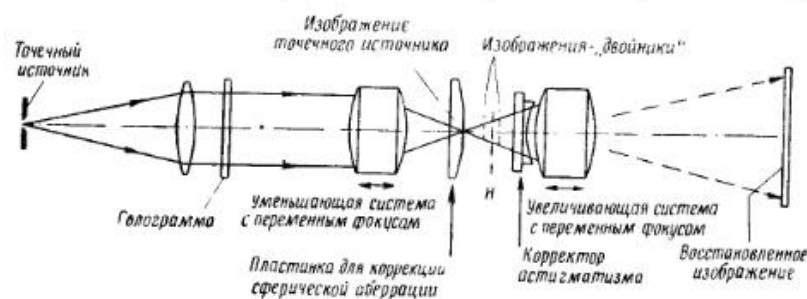


Рис. 8. Схема оптического восстанавливающего устройства.

систему, в которой  $m$  равно, например,  $1/10$ , то постоянная сферической aberrации в этом пространстве снижается до разумных размеров.

Таким образом, установка для восстановления должна будет включать уменьшающую систему по крайней мере в том случае, если  $M$  превышает 10 000. Кроме того, выгодно сделать коэффициент уменьшения этой системы в определенных пределах переменным. Поскольку необходимая для коррекции сферическая aberrация изменяется как четвертая степень увеличения, изменения  $m$  в отношении 1:2 достаточно, чтобы перекрыть область изменения  $C'_s$  от 1 до 16.

На рис. 8 показана схема восстанавливающего устройства подобного рода, где голограмма освещается параллельным пучком. Он сводится к точечному фокусу с помощью уменьшающей системы с переменным коэффициентом уменьшения. Доступность этого точечного фокуса по ряду соображений дает важное преимущество. Одно из них заключается в том, что, как отметил Дайсон в отношении восстанавливающего устройства для проекционных голограмм, этот фокус является подходящим местом для корректирующей пластинки четвертого порядка; при ее помещении в каком-либо другом месте эта пластинка создает сильную кому, которую требуется исправлять. Другое соображение заключается в том, что в этой схеме можно заэкранировать точечный фокус, причем предпочтительнее всего черным пятном, поглощение в котором распределено по закону Гаусса,

и, следовательно, применить метод темного поля, который мы обсудим в конце этой статьи. Коррекция комы может быть осуществлена с помощью небольшого смещения пластинки четвертого порядка вдоль оси.

В оптическом пространстве после уменьшающей системы изображения-двойники появляются приблизительно на равных расстояниях от изображения  $H$  плоскости голограммы. Астигматизм может быть исправлен с помощью двух цилиндрических линз положительного и отрицательного знака, каждая из которых может вращаться. За ними располагается регулируемая уменьшающая система, которая создает окончательное изображение на фотографической пластинке.

Вместо голограммы, обработанной до контраста  $\Gamma=2$ , в схеме пропускания можно также применять голограмму, обработанную до контраста  $\Gamma=1$ , и свет, упавший на нее, отразить назад зеркалом, т. е. использовать ее в схеме отражения. Это позволяет использовать первую линзу как для коллимации, так и для уменьшения, однако преимущества такой схемы несколько сомнительны, особенно ввиду потерь света в светоделительном устройстве.

В заключение можно отметить, что восстанавливающее устройство в методе пропускания ничуть не сложнее, чем в проекционной схеме, и оно имеет дополнительное преимущество, заключающееся в доступности действительного изображения источника света, что может быть реализовано в схеме проекционного метода лишь за счет введения почти недопустимых усложнений.

## 5. Критерии когерентности

До сих пор в развиваемой здесь теории мы предполагали, что точечный источник испускает монохроматическое абсолютно когерентное излучение. В статье I обсуждалось как в общем виде, так и в частном случае проекционного метода влияние замещения этого идеализированного источника реальным малым источником. Эту теорию необходимо будет приложить и к методу пропускания, а также обсудить практически более важный вопрос об интенсивности и экспозиции.

Нужно различать три критерия когерентности, которые можно охарактеризовать как критерии «поперечной», «продольной» и «хроматической» когерентности. Первый из них относится к допустимому диаметру отверстия источника, второй — к постоянству положения плоскости  $H_0$ , а третий — к спектральной ширине излучения.

### Поперечная когерентность

Критерий допустимого диаметра источника можно получить из выражения (7), которое дает для амплитуды в плоскости голограммы, обусловленной бесконечно малым элементом поверхности предмета, следующее выражение:

$$u(X, Y) dx dy = t(x, y) \exp\left(\frac{\pi i}{\lambda L} r^2\right) dx dy \times \\ \times \int \int \exp(-\pi i \lambda z_0 \rho^2) \exp\{-2\pi i [(x-X)\xi + (y-Y)\eta + p]\} d\xi d\eta. \quad (14)$$

С другой стороны, согласно выражению (8), амплитуда когерентного фона равна

$$U_0(X, Y) = \exp\left[2\pi i \left(\frac{R^2}{2\lambda L} + \dots\right)\right].$$

из которого мы здесь переписали только интересующую нас часть, а остатком полностью пренебрегли. Для удовлетворительной когерентности необходимо выполнение требования, чтобы фаза  $u$  изменялась не больше чем на половину полосы, т. е. на  $\pi$ , если освещающее пятно движется по кругу диаметром  $d_s$ . Вместо перемещения источника мы можем с таким же успехом передвигать на равную величину плоскость предмета и плоскость  $H_0$ , т. е. мы добавляем равные величины либо к  $x$  и  $X$ , либо к  $y$  и  $Y$ . Видно, что выражение под знаком интеграла в (14) зависит только от  $x-X$  и от  $y-Y$ , а следовательно, остается неизменным. [Учет комы, как это видно, если вместо выражения (7) применить выражение (9), дает пренебрежимо малое отличие.] Таким образом, разность фаз между  $u$  и  $U_0$ , возникающая вследствие движения источника, равна  $(\pi/\lambda L)(r^2 - R^2) = (\pi/\lambda L)[(x-X)(x+X) + (y-Y)(y+Y)]$ . В худшем случае точки  $x, y$  и  $X, Y$  находятся на одной линии с осью  $(0, 0)$  и смещение пятна величиной  $d_s$  также находится на той же линии. В этом случае мы получаем критерий

$$\frac{2d_s}{\lambda L} |r - R| \leq 1. \quad (15)$$

Величину  $|r - R|$  необходимо теперь интерпретировать как радиус круга в плоскости  $H_0$ , в котором содержится информация о точечном предмете вплоть до детали размером  $d_A$ , где  $d_A = \lambda/2\gamma_m$  — предел разрешения по Аббе. Если расстояние дефокусировки  $z_0$  велико по сравнению с  $A_s$  и длиной каустики сферической аберрации  $C_s\gamma_m^2$ , то информацию можно считать содержащейся в конусе с углом расходимости  $\gamma_m$ , так что

$|r - R| = z_0\gamma_m$ . Подставив это выражение в (15), получим критерий когерентности

$$d_s \ll \frac{L}{z_0} \frac{\lambda}{2\gamma_m} = \frac{L}{z_0} d_A \quad (z_0 \gg A_s, C_s\gamma_m^2). \quad (16)$$

Если, однако, расстояние  $z_0$  мало, то мы должны принять во внимание, что информация содержится в области, которая по существу является картиной геометрических аберраций, поскольку в условиях дифракционной микроскопии геометрические погрешности можно рассматривать весьма большими по сравнению с дифракционным размытием пучка. Рассматривая для простоты лишь сферическую аберрацию, найдем, что радиус этой области равен  $C_s\gamma_m^3$  в гауссовой плоскости и  $1/4 C_s\gamma_m^3$  в плоскости минимального сечения. Подставляя эти значения в (15), мы получим новый критерий, справедливый для малых расстояний  $z_0$ ; выписывать его полностью нет необходимости. Достаточно отметить, что с точки зрения поперечной когерентности эффективное расстояние дефокусировки  $z_0$  в неравенстве (16) никогда не может быть меньше  $1/4$  длины каустики, т. е.  $z_0 \geq 1/4 C_s\gamma_m^2$ . Это можно также выразить в той форме, что отверстие с диаметром  $d_s$ , видимым из предмета, никогда не может стягивать угол, больший, чем длина волны, деленная на диаметр минимального сечения.

### Продольная когерентность

Одна из наиболее важных практических трудностей в дифракционной микроскопии и в любом методе улучшения разрешающей способности электронных микроскопов связана с требованием высокого постоянства расположения фокуса. Можно напомнить, что электронная микроскопия оперирует с фокусными расстояниями того же порядка, как и оптическая микроскопия, т. е. несколько миллиметров, в то время как ее достигнуты разрешения, примерно в 100—200 раз лучшие. Кроме того, электронные линзы не так стабильны, как стеклянные, они испытывают флуктуации и, наконец, не ахроматичны. Так, электронная микроскопия на магнитных линзах становится возможной только при стабилизации токов в линзах с точностью порядка  $1/20\,000$ . В столь высокой стабильности нет необходимости в электростатических микроскопах с постоянным потенциалом, где фокусное расстояние остается фиксированным. Но даже здесь менее жесткие требования к стабильности связаны с очень большой глубиной резкости электронных объективов, обусловленной малостью апертурных углов. Однако любой дальнейший прогресс сопряжен с повышением требований к стабиль-



ности, так как глубина резкости уменьшается обратно пропорционально квадрату апертурного угла.

Пределы изменения  $z_0$ , т. е. пределы фокусировки гауссовой плоскости, можно сразу же получить из уравнения (14). Расстояние  $z_0$  в этом уравнении входит только в множитель  $\exp(-\pi i \lambda z_0 \rho^2)$  под знаком интеграла. Влияние изменения  $z_0$  на  $\Delta z$  тем больше, чем больше  $\rho$ . Если расстояние  $z_0$  само по себе достаточно велико, то максимальное эффективное значение  $\rho$  равно  $\rho_m = \gamma_m / \lambda$ . Постулируя, что изменение  $\Delta z$  должно вызывать фазовый сдвиг меньше чем на половину полосы, мы получим следующий достаточный критерий:

$$\Delta z \leq \pm \frac{\lambda}{2\gamma_m^2} = \frac{d_A}{\gamma_m}, \quad (17)$$

который означает, что изменения расстояния  $z_0$  должны оставаться в пределах глубины резкости. Этот критерий достаточен и необходим при больших значениях  $z_0$ . Нет нужды исследовать отчасти менее строгие условия необходимости для малых  $z_0$ , когда предмет расположен в пределах каустики, потому что, как будет показано дальше, такая ситуация имеет существенные практические недостатки.

Практические следствия критерия (17) будут обсуждаться Хейном в отдельной публикации, причем в ней будет сделан особый упор на электронный микроскоп с магнитными линзами. Но можно отметить, что даже при абсолютной стабильности линз или в случае электростатических систем с постоянным потенциалом предел будет достигаться при разрешении примерно от 1 до 2 Å, за которым разброс энергии электронов будет мешать дальнейшему прогрессу, если не используются ахроматические линзы. Возможности ахроматических электронных линз уже обсуждались автором в 1951 г. в отдельной статье [6].

### Хроматическая когерентность

Критерий хроматической когерентности также можно получить из выражения (14), в котором наиболее существенным множителем, зависящим от  $\lambda$ , снова является  $\exp(-\pi i \lambda z_0 \rho^2)$ , если только расстояние  $z_0$  не слишком мало. Применяя тот же критерий, что и выше, для наибольшего допустимого относительного изменения длины волны, мы получим  $|\Delta\lambda/\lambda| \leq \lambda/z_0 \gamma_m^2 = 2d_A/z_0 \gamma_m$ . Даже при наилучших мыслимых разрешениях и наибольших значениях  $z_0$ , которые еще совместимы с разумными экспозициями, это соотношение дает значения  $\Delta\lambda/\lambda$ , которые хорошо укладываются в пределы, обеспечиваемые системой

стабилизации современных электронных микроскопов. Следовательно, нет необходимости рассматривать здесь этот критерий, за исключением того случая, когда перестает действовать более сильный критерий (17) при использовании ахроматических электростатических линз постоянного потенциала.

### Когерентный электронный ток

Рассмотрим схему освещения, изображенную на рис. 9. В плоскости  $H_0$  информация об очень малом предмете содержится в круге радиусом  $z_0 \gamma_m$ . При корректном использовании

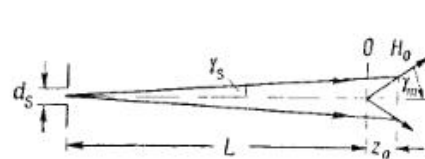


Рис. 9. Схема, поясняющая понятие когерентного тока.



Рис. 10. Типичный предмет, подходящий для дифракционной микроскопии.

этого метода на указанную площадь должна падать когерентная первичная волна. Таково условие, сформулированное неравенством (16). (В статье I показано, что этому условию фактически соответствует 72,3% когерентности.) Покажем теперь, что электронный ток через этот круг, «когерентный ток», всецело ограничивается условиями эмиссии.

Из рис. 9 и неравенства (16) получим соотношение  $\gamma_s = z_0 \gamma_m / L = (d_A / d_s) \gamma_m$ ; подставляя сюда значение  $d_A$  из формулы Аббе, найдем

$$\gamma_s d_s = \gamma_m d_A = \frac{1}{2} \lambda. \quad (18)$$

Это означает, что в когерентных пучках инвариант Смита — Лагранжа имеет определенное значение, равное половине длины волны. Применим теперь этот результат к электронам. Обозначая скорость электронов  $V$ , а максимальную поперечную компоненту скорости  $V_t$ , получим  $\gamma_s = V_t / V$ . С другой стороны, согласно соотношению де-Бройля,  $\lambda = h / mV$ . Подставляя все это в выражение (18), получим  $d_s = h / 2mV_t$ . Это совершенно общее соотношение справедливо для любого сечения, если мы в правую часть подставим максимальное значение поперечной скорости в данном сечении. Соответствующая площадь равна  $S_c = \frac{1}{4} \pi d_s^2 = \frac{1}{16} \pi (h / mV_t)^2$ , где индекс  $s$  означает когерентность.

Для ограничения  $V_l$  в электронной оптике имеются хорошо известные методы; из этого можно было бы сделать вывод, что мы можем, например, увеличивать когерентную площадь катода сверх любого предела. Однако покажем теперь, что если максимальная поперечная скорость уменьшается, то ток достигает некоторого предельного значения. Предположим, что у поверхности катода справедливо максвелловское распределение заряженных частиц по скоростям; тогда плотность тока, создаваемого частицами со скоростью  $v_n$ ,  $v_t$ , равна

$$C \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z = 2\pi C \exp\left\{-\frac{m(v_n^2 + v_t^2)}{2kT}\right\} v_t dv_t dv_n.$$

Если  $V_l$  означает максимально допустимую поперечную скорость в пучке, то ток через площадь  $S_c$  равен

$$I_c = \frac{\pi}{16} \left(\frac{h}{mV_l}\right)^2 2\pi C \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv_n^2}{2kT}\right) v_n dv_n \int_0^{V_l} \exp\left(-\frac{mv_t^2}{2kT}\right) v_t dv_t. \quad (19)$$

Выразим ток как произведение «эффективной когерентно эмитирующей площади»  $S_{\text{эфф}}$  на полную плотность эмиссии катода, т. е. положим

$$I_c = S_{\text{эфф}} 2\pi C \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv_n^2}{2kT}\right) v_n dv_n \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv_t^2}{2kT}\right) v_t dv_t. \quad (20)$$

Из выражений (19) и (20) найдем

$$\begin{aligned} S_{\text{эфф}} &= \frac{\pi}{16} \left(\frac{h}{mV_l}\right)^2 \frac{\int_0^{V_l} \exp\left(-\frac{mv_t^2}{2kT}\right) v_t dv_t}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv_t^2}{2kT}\right) v_t dv_t} = \\ &= \frac{\pi}{16} \left(\frac{h}{mV_l}\right)^2 \left\{1 - \exp\left(-\frac{mV_l^2}{2kT}\right)\right\} \ll \frac{\pi h^2}{32mkT}, \end{aligned}$$

причем предел достигается, когда отсечка производится при очень малых скоростях, так что  $mV_l^2/2kT \ll 1$ . Это означает, что максимальное значение когерентно эмитирующей площади термоэлектронного катода не зависит ни от чего, кроме его температуры.

Эта площадь очень мала и также очень малы когерентные токи  $I_c$ , которые можно получить с этих площадей, как показано в таблице для вольфрамовых катодов.

Температура $T$ , °К	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000
Плотность эмиссии, $a/\text{см}^2$	0,116	0,293	0,717	1,63	3,54	7,31	14,1
Максимальная площадь $S_{\text{эфф}}$ , $10^{-14} \text{ см}^2$	1,42	1,36	1,31	1,26	1,21	1,17	1,14
Когерентный ток $I_c$ , $10^{-11} a$	0,165	0,405	0,94	2,06	4,30	8,55	16,1

Можно отметить, что когерентный ток совершенно не зависит от предела разрешения, но его ограничение весьма сильно ощущается при высоких разрешениях, что обусловлено следующими двумя причинами. В плоскости  $H_0$  этот ток распределен на площади  $\pi(z_0 \gamma_m)^2 = (\pi/4)(\lambda z_0/d_{\lambda})^2$ ; следовательно, плотность тока в пространстве предмета уменьшается пропорционально квадрату разрешения при условии, что расстояние расфокусировки  $z_0$  поддерживается постоянным. По причинам, изложенным в следующем разделе, может даже оказаться необходимым увеличивать  $z_0$  с ростом разрешающей способности, и, таким образом, условия могут быть еще хуже. Во-вторых, если  $d_{\lambda}$  необходимо сохранять в некотором заданном отношении к размерам зерна фотографической пластинки, увеличение должно расти пропорционально разрешающей способности, что дает еще один квадратичный множитель. Таким образом, при прочих равных условиях время экспозиции должно будет расти по крайней мере пропорционально четвертой степени разрешения. Мы не будем подробно обсуждать здесь этот вопрос, но необходимо лишь заметить, что при работе с вольфрамовыми катодами и лучшими из имеющихся на сегодня фотографических пластинок необходимое время экспозиции оказывается равным около часа, если желательно получить разрешение, лучшее чем примерно 2 Å.

Поэтому крайне желательно найти эмиттеры, дающие более высокую плотность эмиссии, чем вольфрамовые катоды. Одна из очевидных возможностей — использовать автоэлектронную эмиссию. Бенджамин и Дженкинс [7] нашли, что в течение длительного времени можно получать плотности тока, по крайней мере в 1000 раз более высокие, чем в случае термоэлектронной эмиссии вольфрама. Это позволило бы уменьшить время экспозиции до секунд вместо часов. Однако необходимо проделать еще большую исследовательскую работу, чтобы приспособить эти очень чувствительные точечные катоды к разборным устройствам. Кроме того, поскольку скорости электронов около этих

катодов, вероятно, имеют разброс порядка нескольких вольт, то применять их можно будет, по-видимому, лишь в сочетании с ахроматическими линзами, что является предметом специального исследования.

#### 6. Условия, необходимые для получения голограмм

Предполагая, что электронный источник, источник питания и увеличение выбраны подходящим образом, можно заметить, что остается еще один важный параметр — расстояние расфокусировки  $z_0$ . Имеется несколько различных условий, которые его определяют, но среди них мы отметим лишь следующие три.

Первое условие — интенсивность. Мы уже видели, например, что плотность тока на предмете обратно пропорциональна квадрату  $z_0$ , однако ее нельзя увеличить сверх всякого предела, поскольку с уменьшением расстояния  $z_0$  его «эффективное» значение никогда не падает ниже  $1/4$  длины каустики. Таким образом, было бы желательно помещать предмет непосредственно в картину фокальной aberrации. Но такая резкая фокусировка трудна и ненадежна; кроме того, она противоречит также двум другим условиям.

Сущность метода дифракционной микроскопии состоит в том, чтобы внести как можно больше информации в свободное пространство, где интенсивность когерентного фона велика, т. е. информация должна проявиться в виде дифракционных полос, окружающих предмет. (В электронной микроскопии их всегда называют полосами Френеля, хотя оптики, кажется, не одобряют этот термин.) На рис. 10 показан типичный предмет, подходящий для дифракционной микроскопии, с относительно большими чистыми пространствами и со средней шириной  $D$ . Свободное пространство используется лучше, если полосы с обеих сторон как раз покрывают его, т. е. если  $z_0 \gamma_m \approx 1/2 D$ , или, используя соотношение Аббе,  $z_0 \approx D d_A / \lambda$ . Если, например,  $D = 1000 \text{ \AA}$  и  $d_A = 5 \text{ \AA}$ , то  $z_0 = 10 \text{ мкм}$ , а при  $d_A = 1 \text{ \AA}$   $z_0$  равно только  $2 \text{ мкм}$ . Уже можно видеть, что при высоких разрешениях это условие становится несущественным.

Третье условие для  $z_0$  следует из рассмотрения процесса восстановления, в котором сопряженный предмет должен быть как можно меньше искажать восстанавливаемый предмет. Если одно из изображений предмета сделано резким, то второе искажается удвоенными aberrациями, как это показано на рис. 11 для случая сферической aberrации. Необходимо различать два случая:  $z_0 > 0$  и  $z_0 < 0$ . Теория (см. [8], стр. 163) и оптические эксперименты, проиллюстрированные на рис. 4, ясно показывают, что второй

случай для нас более благоприятен. Впереди острого конца каустики тянется область заметной длины, в которой интенсивность имеет обычно острый максимум на оси. В случае  $z_0 < 0$ , с другой стороны, точка  $O_1$  находится в полой области aberrационной фигуры сопряженной точки  $O_2$ , где интенсивность имеет на оси плоский минимум. В процессе восстановления, показанном на рис. 4, предмет помещался именно в эту область. Эксперименты с противоположным положением предмета не удалось

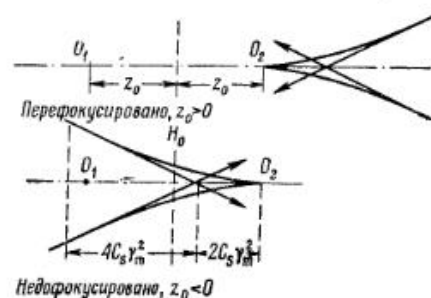


Рис. 11. Изображения предмета и его «двойника» в процессе восстановления после исправления погрешностей в одном из них.

провести вследствие очень больших различий плотностей почернения фотографической пластинки, выходящих далеко за границы линейной части кривой почернений.

В пределах диапазона, равного удвоенной длине аксиальной каустики, эта область окружена ярким кольцом, содержащим тонкую систему интерференционных полос. По мере приближения к определенной точке они исчезают, причем условием для этого, как можно видеть из рис. 11, является следующее неравенство:

$$-z_0 > 3C_s \gamma_m^2 = \frac{3}{4} C_s \left( \frac{\lambda}{d_A} \right)^2. \quad (21)$$

В качестве примера положим  $C_s = 1 \text{ см}$  (микроскоп с магнитными линзами),  $\lambda = 0,05 \text{ \AA}$  (соответствует  $60 \text{ кэВ}$ ) и  $d_A = 5 \text{ \AA}$ . Тогда  $z_0 > 0,75 \text{ мкм}$ , т. е. много меньше, чем дает установленный выше критерий. Но при  $d_A = 1 \text{ \AA}$  новый критерий дает  $z_0 > 19 \text{ мкм}$ , что намного больше. Видно, что условие (21) становится строгим только при высоких разрешениях. По-видимому, желательно всегда брать большее из двух значений.

Можно спросить, возможно ли восстановление по резко сфокусированной фотографии. Одно резкое изображение, конечно, всегда может быть получено, но оно мало полезно, если на него

наложено размазанное изображение предмета-«двойника». Сомнительно даже восстановление высококонтрастных предметов, потому что в области каустики высококонтрастные предметы создают сложную и резкую систему интерференционных полос, идентифицировать которые, по-видимому, очень трудно.

## 7. Восстановление по методу темного поля

Как уже объяснялось в статье I, голограмма имеет то преимущество перед обычной фотографией, сделанной при некогерентном освещении, что она может трактоваться скорее как физический объект, чем фотография, и может быть исследована методами светлого или темного поля, а также методом фазового контраста.

Было также показано, что малые предметы, размеры которых меньше характеристической длины  $(\lambda z_0)^{1/2}$ , дают восстановленные изображения, искажение которых вследствие наложения изображения-«двойника» несущественно, и им можно пренебречь. Но в электронной микроскопии это условие не всегда легко удовлетворяется. Поскольку достаточно прозрачной подложки нет, то предмет сам должен быть стабильным в течение длительных экспозиций, однако это условие не всегда выполняется при работе с предметом такого типа, который изображен на рис. 10.

Один из менее благоприятных случаев, который часто встречается, это восстановление более или менее прямого и резкого края протяженного предмета. Для простоты мы обсудим лишь случай поглощающей полуплоскости, ограниченной прямым краем. Восстановление дает одно резкое изображение, но за ним на расстоянии  $2z_0$  появляется изображение-«двойник» в виде сопряженной плоскости с протяженной системой полос Френеля, которые могут быть настолько контрастными, что маскируют даже изображения немного отступающих от края малых предметов, которые сами по себе могли бы быть весьма подходящими предметами для дифракционной микроскопии. Покажем теперь, что в этом весьма неблагоприятном случае результат может быть значительно улучшен с помощью метода темного поля. Как уже говорилось, в этом методе прямая, или освещающая, волна устраняется после того, как она пройдет голограмму, с помощью малого, предпочтительно «размытого» черного пятна, наложенного на действительное изображение отверстия источника. «Размытие», т. е. распределенное пропускание пятна, приводит к тому, что дифракционные полосы, которые могут возникнуть в случае резко ограниченного пятна, здесь отсутствуют.

В дальнейших расчетах мы пренебрегаем для простоты геометрическими aberrациями. Тогда выражение (7) для амплитуды в плоскости голограммы упрощается и принимает вид

$$U(X, Y) = \int \int \int \int t(x, y) \exp[-(\rho_m^2 + \pi i \lambda z_0 \rho^2)] \times \\ \times \exp[-2\pi i [(x-X)\xi + (y-Y)\eta]] dx dy d\xi d\eta,$$

где под интегралом мы выделили множитель Фурье. Коэффициент пропускания голограммы, по крайней мере в тех областях, где нет ни сильных недодержек, ни передержек, пропорционален  $U+U^*$ , где  $U^*$  — амплитуда, комплексно-сопряженная с  $U$ .

Амплитуда в плоскости одного из восстановленных изображений получается из этого же самого выражения путем добавления «множителя фокусировки»  $\exp(\pi i \lambda z_0 \rho^2)$  под знаком интеграла. Применяя это условие к  $U+U^*$ , получим для восстановленной амплитуды

$$U_{\text{восст}} = \int \int \int \int t(x, y) \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right)^2\right] \times \\ \times \exp[-2\pi i [(x-X)\xi + (y-Y)\eta]] dx dy d\xi d\eta + \\ + \int \int \int \int t(x, y) \exp[-(\rho_m^2 - 2\pi i \lambda z_0 \rho^2)] \times \\ \times \exp[2\pi i [(x-X)\xi + (y-Y)\eta]] dx dy d\xi d\eta. \quad (22)$$

Первая строка представляет восстановленный предмет, вторая — его «двойник».

Предположим теперь, что предметом является полуплоскость, так что  $t=0$  от  $x=-\infty$  до  $x=0$  и  $t=1$  для положительных значений  $x$ . Будет, однако, проще взять сначала  $t=\pm 1/2$  для  $x \geq 0$  и добавить затем однородный уровень  $1/2$ . Интегралы в выражении (22) превращаются тогда в хорошо известные интегралы Фурье (см. [4]), и для первого члена в выражении (22) мы получим

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\pi \rho_m X) = \frac{1}{2} + \pi^{-1/2} \int_0^{\pi \rho_m X} \exp(-z^2) dz, \quad (23)$$

а для второго, предполагая  $\lambda z_0 \rho_m^2 \gg 1$ ,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left[\frac{\pi \rho_m X}{(1 - 2\pi i \lambda z_0 \rho_m^2)^{1/2}}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1+i) \left[ C\left(\frac{\pi X^2}{2\lambda z_0}\right) - iS\left(\frac{\pi X^2}{2\lambda z_0}\right) \right], \quad (24)$$

где  $\operatorname{erf}$  означает интеграл вероятности ошибок, а  $C$  и  $S$  — интегралы Френеля.

Однако этот результат, как уже ранее говорилось, справедлив лишь в области умеренных экспозиций, где когерентный фон можно считать сильным. Если полуплоскость полностью поглощает, то на теневой стороне когерентного фона нет, и амплитуда получается путем вычисления абсолютного значения квадрата «краевой волны», который равен разности между выражением (24) и его значением при отсутствии дифракции, т. е.

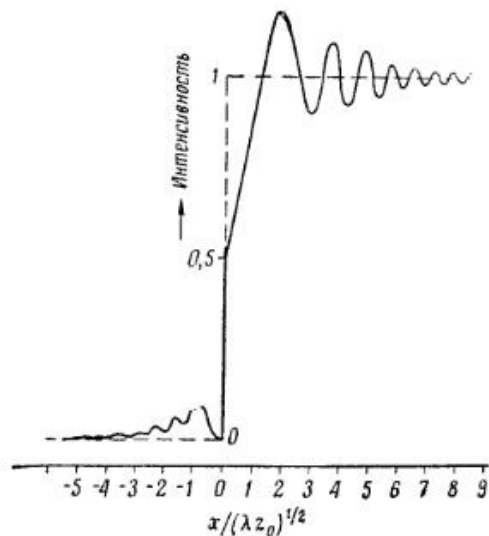


Рис. 12. Восстановление прямого края по методу светлого поля.

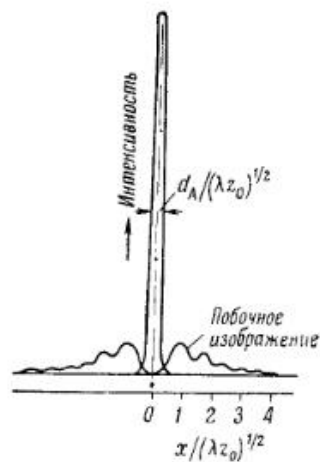


Рис. 13. Восстановление прямого края по методу темного поля.

при  $\lambda=0$ . Следовательно, интенсивность на теневой стороне равна  $\frac{1}{4}[(C+S-1)^2 + (C-S)^2]$ , в то время как на освещенной стороне интенсивность получается без заметной ошибки путем добавления действительной части выражения (24) к когерентному фону и возведения в квадрат, что дает  $[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(C+S)]^2$ . Полученные таким образом интенсивности нанесены на график рис. 12. Для простоты предполагалось, что предел разрешения очень мал по сравнению с характерной длиной  $(\lambda z_0)^{1/2}$ , так что правильно восстановленная часть изображения, соответствующая выражению (23), является ступенчатой функцией.

Из рис. 12 видно, и это было найдено также в многочисленных экспериментах, что восстановленное изображение никоим образом нельзя признать удовлетворительным. Полосы на освещенной стороне слишком заметны. Можно подавить их с по-

мощью контрастной фотографии, но при этом будут подавлены также и полезные детали.

Но если подавлен фон, картина полностью изменяется. Усиления полос не происходит, интенсивность, как показано на рис. 13, определяется суперпозицией двух краевых волн, причем одна из них сфокусирована, а вторая нет. Обе волны несут равную полную интенсивность, т. е. площади под кривыми равны. Но если предел разрешения мал по сравнению с  $(\lambda z_0)^{1/2}$ , интенсивность в резком изображении может быть намного больше, чем в побочном изображении. Таким образом, становится видимым правильный контур предметов, причем с очень большим контрастом, и при подходящих условиях изображение может не сильно отличаться от изображения, полученного по методу темного поля, в котором «двойник» полностью отсутствует. Таким образом, комбинируя методы светлого и темного полей и вообще наблюдения по методу фазового контраста, можно получить больше правильных деталей даже в случае неподходящих предметов. Это хорошо подтверждается предварительными наблюдениями в оптических экспериментах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Haine M. E., Dyson J., *Nature* (London), **166**, 315 (1950).
2. Bragg W. L., *Nature* (London), **166**, 399 (1950).
3. Rogers G. L., *Nature* (London), **166**, 237 (1950).
4. Campbell G. A., Foster R. M., *Fourier Integrals for Practical Applications*, Bell Telephone System, Monograph. B584, 1931.
5. Duffieux P. M., *Reunion d'Opticiens* (Paris: Ed. Revue d'Optique), 1950.
6. Gabor D., *Proc. Phys. Soc.*, **B64**, 244 (1951).
7. Benjamin M., Jenkins R. O., *Proc. Roy. Soc.*, **A176**, 262 (1940).
8. Picht J., *Optische Abbildung* (Braunschweig: Vieweg), 1931.

## ПРИМЕНЕНИЯ ГОЛОГРАФИИ

(Обзор)<sup>1)</sup>

### 1. Введение

Интерес к голографии не исчерпывается только тем, что она дала возможность ввести в оптику третье измерение. Голография вторглась почти во все традиционные области прикладной оптики, заставив пересмотреть сложившиеся ранее границы между ними. Голографический принцип позволил по-новому осмыслить некоторые области ИК-техники, СВЧ-техники, акустики, рентгеновской и электронной микроскопии, короче говоря, все те направления, где играет роль интерференция волн.

Однако, рассматривая современное состояние голографии, удобно классифицировать ее приложения по используемым свойствам голограмм, а не по видам излучений, применяемым для их получения. Предлагаемая классификация применений голографии (см. таблицу) не претендует на универсальность, но позволяет привести в систему свыше 100 работ, вышедших в основном после опубликования монографии Струка. Был использован также ряд более ранних работ, поскольку в книге Струка вопросы применения описаны очень бегло. Следуя этому принципу, можно выделить десять основных направлений, которые и будут рассмотрены ниже.

Наиболее очевидным применением голографии является трехмерная фотография. В ней используется сочетание фотографических и локаторных свойств голограммы, позволяющих не только регистрировать изображение, но также и определять расстояние до каждой его точки. Сюда можно отнести и такие процессы, как звуко-, радио- и ИК-видение, у которых сходен первый этап — запись голограммы. Для перевода изображения в видимый диапазон используется еще одно свойство голограмм: меняя масштаб интерференционной картины пропорционально изменению длины волны, при восстановлении изображения в видимом свете можно сохранить его трехмерность.

Распознавание образов — одно из наиболее интересных и многообещающих применений голографии. Оно опирается на

Трехмерная фотография	Изобразительная фотография	Технология	Нанесение сложных микроизображений
	Фотограмметрия		Микрообработка
	Контурная фотография	Интерскопия	Исследование неоднородностей материалов
	Импульсная съемка движущихся объектов		Наблюдение за стенками неправильной формы
	Полночная съемка		Кодирование изображений
	Звуковидение		Наблюдение в турбулентной атмосфере
	Радиовидение		Микроскопия
Моделирование антенн СВЧ	Рентгеновская микроскопия		
Распознавание образов	Чтение печатных и рукописных текстов	Электронная микроскопия	
	Распознавание трехмерных объектов	Кино	Системы трехмерной индикации
	Обработка аэрофотоснимков		Телевидение
Ассоциативный поиск	Системы трехмерной индикации	Телевидение на СВЧ	
Голограммы объемного типа	Волновая фотография	Кино	Системы трехмерной индикации
Интерферометрия	Измерение вибраций сложных поверхностей	Оптика	Компенсация aberrаций линз
	Измерение деформаций необработанных сложных поверхностей		Безлинзовая оптика
	Фазовые трехмерные объекты Аэрогидродинамика		Комбинированные линзо-голографические безабберационные системы
	Интерферометрические измерения		
	Неразрушающий контроль трещин		

<sup>1)</sup> Обзор составлен И. П. Налимовым.

способность голограммы выделять из группы предметов только те, «изображения» которых на ней записаны. Чем обусловлена высокая способность голограмм к распознаванию, приближающая их к идеальным согласованным фильтрам? Рассмотрим наиболее общую схему голографирования (рис. 1). Пусть  $A$  и  $B$  — когерентно излучающие объекты, в частности ими могут быть любые предметы, освещенные достаточно когерентным лазером. Если излучение способно создать в некоторой плоскости интерференционную картину — систему стоячих волн, то можно установить здесь фотопластинку и получить голограмму. Облучая голограмму  $A+B$  идеальной копией исходного волнового

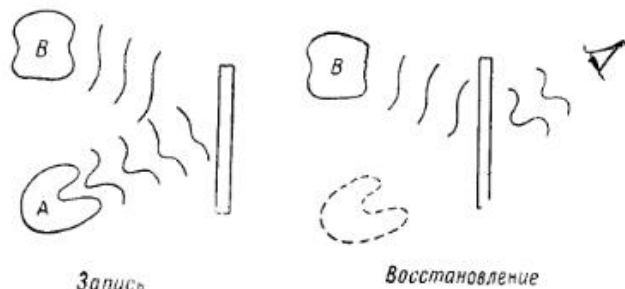


Рис. 1. Наиболее общая схема голографирования.

фронта одного предмета (например, предмета  $B$ ), получим совершенный волновой фронт другого предмета. Голограмма пропустит лишь ту часть пространственного спектра, которая близка к записанному на ней спектру. Другими словами, она «откликнется» только на изображение одного из «своих» предметов при условии, что он установлен в соответствующей позиции<sup>1)</sup>. Если, например, предмет  $B$  — это комбинация точечных источников, составляющая код буквы, то голограмма  $A+B$ , облученная буквой  $A$ , сформирует код  $B$ . При использовании записи под разными углами на одной голограмме удастся записать много букв. Здесь открывается новый канал связи человека с электронной вычислительной машиной, который позволит освободить оператора от ручного ввода данных. Кроме того, этим путем, вероятно, можно будет решить очень острую проблему вычислительной техники — распознавание многомерных образов.

Голографическая память вызвала большой интерес ввиду ее исключительно высокой емкости (теоретический предел

<sup>1)</sup> В обычной схеме волновой фронт  $B$  берется плоским или сферическим, поскольку такой фронт легче сформировать и нацелить на голограмму.

$10^{12}$  бит/см<sup>3</sup>), а также ассоциативных свойств, благодаря которым она напоминает память человека. Механизм голографической памяти связан с интерференционной записью информации в светочувствительном объеме. В этом направлении пока еще выполнено слишком мало исследований, чтобы уверенно говорить о перспективах такой памяти. Задержка в основном за разработкой объемных светочувствительных материалов высокого оптического качества и чувствительности.

Можно ожидать, что вскоре промышленность получит новый метод неразрушающего контроля поверхностей, основанный на использовании голограмм. Это применение голографии является частным случаем дифференциальной интерферометрии. Точно так же, как голограмма «распознает» записанные на ней объекты, она реагирует на малейшие изменения их оптических свойств. Обычно количественные показатели, характеризующие эти изменения, извлекаются из структуры и плотности интерференционных полос, образованных при наложении волн от самого предмета и волн от того же предмета, восстановленных с помощью голограммы. В перспективе это направление обеспечит бесконтактный контроль сложных необработанных поверхностей (их вибраций, деформаций, трещин и изменений отражательных свойств). Факторы, тормозящие разработку этого метода, носят в основном технический, а не принципиальный характер. Например, требуется обеспечить совершенное крепление и устойчивость оптических элементов, дающих интерференционную картину.

Технологические приложения голографии — использование действительного изображения для обработки — лишь начинают развиваться, но у них большое будущее. Преимущества голографической обработки материалов перед обычной лазерной связаны с возможностью бесконтактного нанесения сложнейших узоров и отверстий на поверхности сложной формы, а также с отсутствием линз. С помощью голограммы можно получить в пределах поля примерно на порядок больше разрешенных элементов, чем с помощью наилучшей линзы. Это связано с тем, что линза близка к идеальной лишь вблизи оси, а по краям поля разрешение падает. У голограммы разрешение распределено по полю более равномерно. Необычные качества голографической технологии может приобрести при комбинированном использовании фокусирующих, распознавательных и интроскопических свойств голограмм. Развитие этого направления требует повышения мощности и когерентности излучения лазеров.

Голографическая интроскопия (внутривидение) не только расширяет кривую чувствительности человеческого глаза на все лазерные частоты, но и открывает возможность трехмерного на

блюдения за объектами, находящимися за светонепроницаемыми стенками произвольной формы, а также в неоднородных и рассеивающих средах. В этом случае голограмма регистрируется в ИК- или УФ-лучах лазера. Перевод трехмерного изображения в видимый диапазон осуществляется так же, как в звуковидении и микроскопии, при помощи масштабных переходов, т. е. уменьшений или увеличений интерференционной картины (голограммы) пропорционально изменению длины волны. «Устранение» стенки происходит путем ее компенсации при восстановлении действительного изображения. Здесь развитие применений сдерживается главным образом из-за отсутствия многоэлементных ИК-приемников высокого разрешения.

Создание безлинзового голографического микроскопа позволит биологам и медикам наблюдать трехмерные изображения живых тканей и микроорганизмов. При использовании рентгеновского излучения возникает возможность больших увеличений (до  $10^6$ ) с сохранением разрешающей способности. Принцип действия микроскопов, хорошо описанный в книге Струка, основан на масштабных переходах и геометрическом увеличении в расходящихся пучках. Трудности осуществления микроскопии высокого разрешения связаны с отсутствием рентгеновских лазеров. Для микроскопии живой клетки нужно улучшить когерентность и мощность существующих ультрафиолетовых лазеров.

Голографическое кино дает возможность проектирования и наблюдения трехмерных динамических изображений. Одна из возможных реализаций объемного кино может быть следующей. На голограмму под разными углами записываются различные моменты сцены. При восстановлении голограмма (или освещающий пучок) поворачивается, создавая эффект движения. Зритель смотрит на голограмму, как в окно, за которым развертываются события. Однако пока не ясно, как изготовить большие голограммы размером с экран кинотеатра, через которые могли бы наблюдать десятки людей. Нет пока и способов увеличения трехмерных изображений — простое проектирование здесь не подходит. Все это ограничивает ближайшее будущее голографического кино лишь демонстрационными или специальными применениями (например, бортовое устройство отображения для слепой посадки самолета).

Трехмерное телевидение на основе голографии в настоящее время может быть реализовано лишь в простейшем варианте. Его создание тормозит отсутствие динамических (стирающихся) голограмм, а также и то, что еще не разработаны способы считывания таких голограмм и, кроме того, передачи большого объема информации. Несомненно, квантовая оптика и лазерная

техника движутся в направлении, отвечающем интересам трехмерного телевидения. Голография так или иначе использует разрабатываемые для других целей системы сверхширокополосной оптической связи, модуляции и сканирования световых пучков. Уже сейчас голографический принцип, возможно, сыграет положительную роль в обычном телевидении, обеспечит повышение надежности передачи и сможет быть использован для кодирования изображений.

Наконец, голограмма явится серьезным конкурентом линзе. Обладая не худшим разрешением в фокальном пятне, голограммы в отличие от линз не нарушают трехмерности изображений. Вместе с тем они проще в изготовлении и легки. Так, голограммы точки — зонные пластинки Френеля — можно применить для фокусировки широких пучков — до 10 м в диаметре, тогда как делать линзы или зеркала такого размера просто неразумно. Применение голограмм в сочетании с линзами позволит создавать несложные безаберрационные системы.

## 2. Трехмерная фотография

Создание лазера в первую очередь является созданием нового источника видимого излучения. В качестве такого источника он открывает уникальные возможности для показа изображений. «Именно в области визуальной индикации лазер найдет одно из самых важных применений», — писал пионер лазерной техники Артур Шавлов [108].

Свойства и получение лазерных голограмм, дающих трехмерные изображения, обсуждались подробно в ряде обзоров [3, 11, 13, 16—18]. Отметим здесь два основных преимущества голографических изображений перед обычными фотографическими: 1) при голографировании предмета не надо фокусировать лучи, следовательно, нет опасности получить размытое изображение из-за недостаточной фокусировки; 2) голограмма регистрирует весь предмет одинаково четко по всей глубине. Этого нельзя добиться никакими фотографическими ухищрениями. Кроме того, преимуществом голографии является и то обстоятельство, что нелинейность фоторегистрации не влияет на качество передачи тонов. Даже используя для записи голограммы самую контрастную эмульсию, можно восстановить тоновое изображение.

Качество получаемых на лазере трехмерных изображений уже сейчас столь высоко, что Габор имел основание для полшутливого утверждения [33]: «Чтобы получить такие картинки с помощью ртутной дуговой лампы, мне потребовалось бы так



сколлимировать ее излучение, что экспозиция заняла бы время с момента открытия голографии в 1947 г. до сегодняшнего дня».

Развитие этого направления шло по линии усовершенствования известной методики [25, 71], особенно импульсной голографии на рубиновом лазере [20, 21, 59]. Кроме того, в рамках этого направления продемонстрирован ряд новых приложений голографии: так, она использована для подводной съемки [48, 63], для изготовления трехмерных контурных карт [54, 55] и для восстановления диаграмм направленности антенн СВЧ [2].

Исторически первым практическим применением голографии следует считать дисдрометр. Эта установка [32, 102] предназначена для исследования быстро движущихся частиц, взвешенных в атмосфере, например капель дождя или тумана, снежинок, кристалликов льда и аэрозолей размером от 3 до 3000 мкм. Обычная фотография не позволяет держать в фокусе каждую движущуюся частицу в течение такого времени, которое соответствует необходимой экспозиции. Фотографическим методом невозможно зарегистрировать все частицы некоторого объема сразу и с одинаковой резкостью. Дисдрометр устраняет эти трудности. Рубиновый лазер мощностью 10 Мвт с модулированной добротностью освещает движущиеся частицы в объеме до 5000 см<sup>3</sup> в течение 20 нсек. «Замороженное» на голограмме трехмерное распределение частиц можно затем последовательно просматривать с помощью непрерывного лазера, например гелий-неонового.

Разрабатывается портативный вариант установки [73], который позволит регистрировать структуру облаков прямо с борта самолета, что даст возможность предсказывать туманы и искусственно воздействовать на них.

Неожиданным оказалось, что дисдрометр может найти гораздо более широкое применение, чем предполагалось вначале. Фирма «Technical Operation», изготовившая три первых образца дисдрометра, получила свыше 400 запросов об этой установке [74]. Среди множества возможных применений можно назвать: контроль загрязнений воздуха, контроль турбулентных жидких струй, изучение динамики аэрозолей, анализ смазочных составов, наблюдение процессов во внутренних объемах паровых турбин, изучение роста и распада капель тумана, контроль и анализ медицинских аэрозолей, фотографирование следов в трековой камере.

Последнее применение облегчит труд экспериментаторов, занимающихся измерением следов в пузырьковой камере и камере Вильсона. Сейчас для восстановления геометрии траекторий и определения кинематики процессов при высоких энергиях используется стереосъемка и электронные вычислительные

машины. Апостериорная обработка трехмерных голографических изображений позволит сократить объем вычислительной работы.

Кроме того, голография позволит увеличить фокальную глубину фотографий в трековой камере [125]. Однако здесь на пути исследователей встает ряд трудностей. Во-первых, поскольку углы достигают 45°, приходится брать фотоэмульсии высокого разрешения, которые малочувствительны. Во-вторых, в камере Вильсона с частотой циклов расширения 30 раз/мин осложняется сам процесс голографической съемки. В-третьих, сильное магнитное поле камеры вызывает фарадеево вращение плоскости поляризации, что ухудшает контрастность видимости интерференционных полос. Наконец, яркость и контрастность восстановленных треков невелики.

Для преодоления последнего затруднения в работе [10] было предложено прибегнуть к восстановлению изображений с фазовых голограмм. Экспериментально продемонстрирована возможность восстановления изображений фазовых объектов (типа пузырей в стекле) в объемах, сравнительно протяженных по лучу зрения. Для наблюдения трехмерных фазовых объектов, восстановленных с голограммы, можно использовать методы шпирен-фотографии [113].

Если речь идет о голографировании мелких прозрачных (как в трековой камере) или непрозрачных объектов, заключенных в большой объем, то можно применить фраунгоферовские голограммы [30]. Фотопластинку располагают в ближней зоне большой апертуры, которая одновременно является дальней зоной для мелких частиц. Тогда на голограмме регистрируется интерференционная картина фраунгоферовской дифракции на частицах. При восстановлении изображений с таких голограмм в дальней зоне частиц мнимое изображение отсутствует.

Для целей демонстрации больших объемных изображений разработан ряд голографических установок [56, 60, 117] с углом обзора предмета, достигающим 360°. Опорный пучок создается выпуклым коническим (рис. 2) или сферическим зеркалом. После голографирования предмет убирается, а на его месте наблюдатель видит через пленку восстановленное изображение, которое можно рассматривать под любым углом. Трудности связаны с изготовлением неплоского зеркала, а также с юстировкой. Поскольку здесь наиболее наглядно проявляются достоинства трехмерного голографического изображения, установки подобного типа найдут широкое применение в рекламном деле и для демонстрации иллюстраций на лекциях.

Используя мощные лазерные импульсы малой длительности, можно «замораживать» быстропеременные процессы во всем исследуемом объеме, а затем сколь угодно долго изучать трех-

мерное изображение, восстановленное непрерывным лазером. Недостаточная пока когерентность рубиновых лазеров вынуждает в настоящее время принимать специальные меры: пространственное согласование — выравнивание оптических длин опорного и предметного пучков [20, 21] и селекцию продольных мод [59]. Чтобы записывать голографические изображения больших предметов на малые голограммы с помощью лазера небольшой мощности, можно использовать линзы, помещая их между предметом и голограммой. Следует подчеркнуть, что

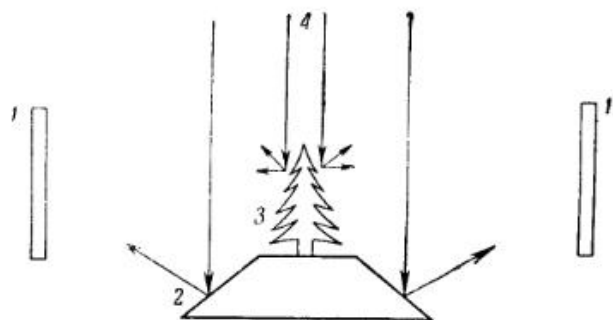


Рис. 2. Голографическая установка с углом осмотра предмета, равным  $360^\circ$ .

1 — круговая голограмма; 2 — коническая поверхность зеркала; 3 — предмет; 4 — когерентное освещение.

проблема импульсного голографирования больших объемов (свыше  $5000 \text{ см}^3$ ) и больших однородных поверхностей пока не решена, так как отсутствуют необходимые для этого лазеры.

В обычных условиях глаза человека являются незаменимым инструментом визуального исследования трехмерных объектов. Там, где условия для визуального наблюдения отсутствуют — в подводных условиях, внутри сложных установок, — действенную помощь может оказать голография. Проведены эксперименты по голографированию микроорганизмов в аквариуме с морской водой [63]. Запись проводилась рубиновым лазером с экспозицией 60 *нсек*. При восстановлении с помощью гелий-неонового лазера микроскоп фокусировался на различных плоскостях трехмерной сцены. Если изготовить набор голограмм на большой глубине моря, то можно изучить реальное поведение глубоководных организмов в их нормальном окружении, например их взаимную и световую ориентацию.

Другой вид подводной голографии описан в работе [48]. Цель исследования — анализ акустических вибраций подводных объектов. Схема эксперимента показана на рис. 3.

Любопытно, что для создания опорного пучка использовалось отражение от стенки аквариума с водой.

Голография предоставляет необычную возможность трехмерного видения в звуковых [49] и радиоволнах [31, 64—66]<sup>1)</sup>. Простая идея такой визуализации основана на том, что интерференционные картины различных волновых полей тождественны друг другу, если длины волн одинаковы. Однако, вообще говоря, для наблюдения неискаженного трехмерного изображения равенство длин волн необязательно. Если запись проведена с помощью излучения с большой длиной волны  $\lambda_1$ , а восстановление с помощью светового излучения с малой длиной волны  $\lambda_2$ ,

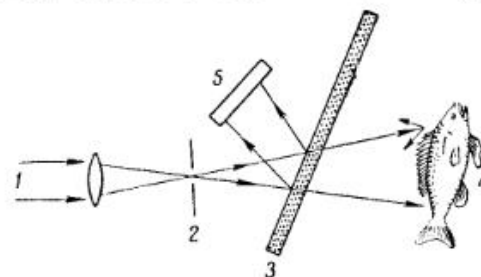


Рис. 3. Схема подводной голографии.

1 — лазерный свет; 2 — диафрагма; 3 — стенка аквариума, дающая опорный пучок; 4 — предмет; 5 — голограмма.

то масштабный переход — уменьшение начальной голограммы  $M = \lambda_1/\lambda_2$  раз — также позволит сохранить трехмерность при восстановлении. Звуко- и радиовидение в таком варианте требуют многоэлементных приемников высокого разрешения и перевода полученных голограмм в оптические голограммы, которые можно будет просветить лазером и восстановить изображение, «увиденное» звуком или радиоволнами. Возможно, для ультразвука таким приемником может служить пьезокерамическая мозаика (например, керамика на основе титаната бария) со считыванием электронным лучом и индикацией на экране телевизора. Для радиоволн нужны специальные многоэлементные антенные решетки.

В некоторых случаях можно обойтись без фиксирования звуковой голограммы. Об оригинальном методе звуковидения сообщается в статье [93]. Ультразвуковые датчики и предмет погружены в воду (рис. 4). На поверхности воды образуется рябь

<sup>1)</sup> Мы не упоминаем рентгеновские, электронные и прочие волны, так как их длина волны существенно (более чем в  $10^4$  раз) отличается от световой, что затрудняет визуальное наблюдение объемного изображения.

в результате интерференции прямого и предметного пучков ультразвука. Облучая лазером эту интерференционную картину, можно сразу же восстановить изображение предмета. Изображения трехмерных предметов будут искажаться из-за неравенства длины волны света и ультразвука, но, регулируя фокусное расстояние телескопа, можно по очереди рассматривать различные сечения трехмерного объекта.

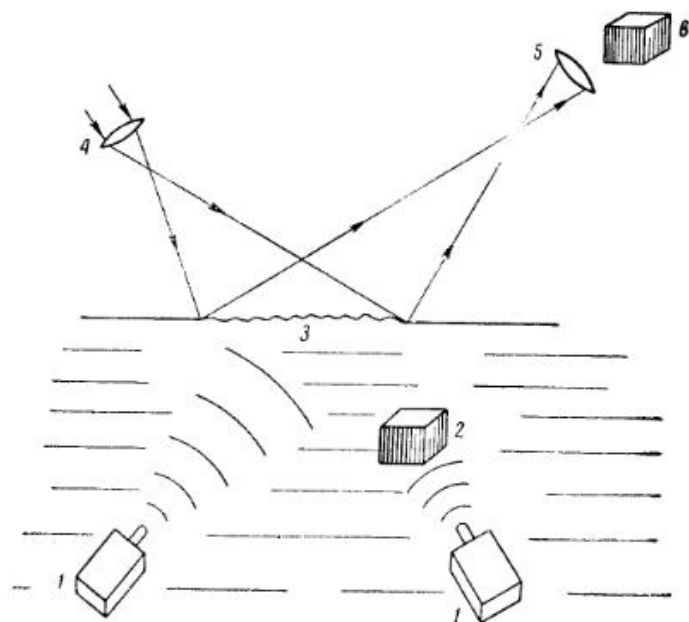


Рис. 4. Схема трехмерного звуковидения под водой с голографической визуализацией.

1—ультразвуковые датчики, погруженные в воду; 2—предмет; 3—ультразвуковая голограмма на поверхности воды; 4—лазерный свет; 5—телескопический приемник; 6—восстановленное изображение.

Этот метод найдет применение для наблюдений в непрозрачной воде, а также в других океанографических исследованиях. Кроме того, есть надежда, что в будущем исследователи смогут видеть внутренние органы живых людей. На основе этого же метода предполагается осуществить контроль работы внутренних узлов герметизированных блоков электронного оборудования. Однако во всех этих случаях исследуемый объект необходимо помещать в жидкость. Пока основная трудность — получение опорного пучка ультразвука, обладающего достаточной сферичностью.

Радиовидение с использованием «синтетических» голограмм было осуществлено в работе [31]. Френелевская картина изготавливалась постепенно путем механического сканирования зондом в плоскости голограммы габоровского типа. Уменьшенная фотография осциллограммы при облучении гелий-неоновым лазером восстанавливала исходный предмет. Поскольку  $\lambda_1 = 3$  см, а  $\lambda_2 = 0,63$  мкм, то восстановленное изображение было очень мало, и при его наблюдении параллакс отсутствовал. Для его увеличения предлагается склеивать много маленьких голограмм [66]. Тогда объект будет виден таким, как будто его рассматривают через множество маленьких отверстий в экране. Как полагает автор, на этом принципе сможет работать голографическое телевидение в радиоволнах.

Другое интересное применение радиовидения описано в статье [121]. Предлагается использовать голографический принцип для картографирования поверхности планеты с борта космического корабля, облетающего эту планету. Планету и корабль освещает наземный СВЧ-источник. Вдоль трассы корабля, играющей роль одномерной голограммы регистрируется интерференция прямой волны и волны, рассеянной от планеты в направлении полета. Из этих радарных карт можно получить информацию о структуре поверхности, которую не дают обычные РЛС или оптические методы. Например, получение радарной карты Венеры — чуть ли не единственный способ ее исследования. Только прямое приземление может дать больше сведений. Система подобного типа разрабатывается НАСА для космических исследований [76]. Аналогичные бортовые системы, предназначенные для военных самолетов тактической разведки, разрабатываются фирмой «Perkin—Elmer» [75]. Предполагается также записывать радарные карты на фотопленке, чтобы затем наблюдать восстановленное изображение в когерентном свете. Для быстрого восстановления изображений, голографированных в невидимых лучах, фирма разрабатывает двумерный пространственный модулятор света. Такой модулятор позволит визуально наблюдать изображения, восстановленные с помощью переданных по радиоканалам ИК- или СВЧ-голограмм.

Оригинальный метод изготовления трехмерных контурных карт и макетов изделий описан в работах [54, 55]. С этой целью предлагается освещать предмет либо двумя коллимированными когерентными пучками с малым углом между ними, либо одним пучком, содержащим излучение двух слегка различных частот (например, аргоновый лазер с  $\Delta\lambda = 65$  А). С полученной голограммы одночастотным пучком можно восстановить изображение, контурные линии на котором свидетельствуют о дальности

расположения тех или иных деталей (если голограмма была расположена под прямым углом к пучку).

Измерение диаграммы направленности СВЧ-антенны (особенно большой) вызывает затруднения, так как при таких измерениях приходится удаляться на значительные расстояния от антенны. Вместо этого предложено [2] измерять распределение СВЧ-поля на относительно малом расстоянии от антенны и изготавливать с помощью голографии оптическую модель этого поля. Восстановленное с голограммы оптическое изображение можно с помощью линзы превратить в некоторой плоскости в диаграмму направленности. В статье обоснована возможность масштабных переходов от СВЧ-голограмм в оптический диапазон и приведены результаты измерения диаграмм направленности в 3 см диапазоне зондовым и голографическим методами.

Голография открывает возможность создания трехмерных изображений объектов, которые еще не удавалось наблюдать, а также «синтетических» предметов [92]. Например, на ЭВМ можно пересчитать рентгенограмму неизвестной сложной молекулы белка таким образом, чтобы получить его голограмму, а не изображение, способное дать лишь плоскую индикацию. Затем бинарную голограмму — набор черно-белых линий — можно вычертить на листе бумаги и уменьшить фотографически. Теперь такую синтетическую голограмму нужно просветить лазером и восстановить объемное изображение молекулы. Экспериментальное получение синтетических голограмм описано в работе [46]. Способ изготовления синтетических голограмм для имитации трехмерных предметов рассмотрен в работе [110]. Светящийся конец волокна механически перемещался в пространстве, и на каждой позиции его изображение регистрировалось на голограмме, благодаря чему при восстановлении возникал куб, состоящий из 120 светящихся точек. Вопросы создания и обработки голограмм на цифровых вычислительных машинах рассмотрены в работе [57].

### 3. Распознавание образов

Распознавательная способность голограмм нашла применение в ряде практических систем. Наиболее известен голографический чтец [17, 18, 53]. Аппарат предназначен для чтения микрофильмов и для ввода текста в вычислительную машину. Голограмма различает 100 букв, записанных на ней под разными углами (по принципу  $\theta$ -модуляции Ломана). Распознавание заключается в нахождении максимума корреляции при сравнении спектра неизвестной буквы и набора известных букв,

включающих искомую. Другими словами, голограмма, действуя как согласованный фильтр, пропустит лишь пространственный спектр, приближающийся к спектру, записанному на ней.

Преимуществом метода являются малые размеры узнающего элемента — голограммы, хранящей возможные варианты. Габор подсчитал [43], что на одной голограмме можно записать до 30 букв в 30 вариантах в комбинации с машинным кодом каждой буквы. Это означает, что становится возможным ввод в машину рукописных текстов. На опознавание укажет возникший за голограммой максимум сигнала в виде набора ярких точек — машинного кода данной буквы. Аналогичная голограмма позволит [72] автоматически печатать или показывать на видеозэкране данные, выдаваемые вычислительной машиной.

Для того чтобы голограмма буквы не менялась при смещениях буквы, Габор предложил [43] использовать голограммы Фурье, т. е. голограммы, получаемые в фокусе линзы. В другом способе [93] инвариантность к смещению обеспечивается сравнением текста с голограммой Фраунгофера, изготовленной в дальней зоне.

Большой интерес для военных представляет нахождение нужных объектов на аэрофотоснимках. Зная географические координаты объекта, можно затем по аэрофотоснимку составить карту местности. Автоматическое обнаружение хромосом известной формы упростит проведение генетических исследований. Необходимые для этого голографические системы разрабатываются в США рядом фирм [75, 79].

Более общее направление распознавания связано с получением фантомных изображений. Осветив голограмму Фурье фрагментом начального изображения, удалось получить фантомное изображение всего объекта [103]. Например, по женской шляпке было восстановлено изображение всего лица и головы. Это свойство голограмм может найти применение при распознавании и определении местоположения фрагмента предмета, например при поиске страницы по известной строчке, и в других аналогичных случаях. Можно также вести поиск трехмерных объектов по какой-то известной детали (признаку) [29].

Механизм такого поиска был описан в разд. 1. В данном случае нужно только считать, что предмет  $B$  является фрагментом предмета  $A$ <sup>1)</sup>. Практически изображение, восстановленное путем компенсации протяженности источника, является не чем иным, как фантомным изображением.

Отличие экспериментов, описанных в работе [103], от работ Строука по компенсации протяженности источника состоит в

<sup>1)</sup> Математическое описание этого явления см. на стр. 152—162.

применении диффузной подсветки транспаранта. Фантомное изображение трехмерного диффузно отражающего объекта исследовалось в работе [29]. Естественно, в отличие от [103] на голограмме регистрировался уже не фурье-образ предмета. Поясним теперь возникновение фантомного изображения. Каждый фрагмент диффузно рассеивал свет по всей голограмме, следовательно, она регистрировала результат интерференции одного фрагмента с остальными частями предмета. Амплитуда и фаза всех волн от предмета определялись относительно соответствующих характеристик волн фрагмента. Поэтому, осветив голограмму одним фрагментом, получали изображение всего предмета в целом — его фантомное изображение.

В работе [103] освещающий предмет можно было двигать относительно голограммы Фурье, и фантомное изображение ходило за ним, сохраняя свою четкость. Здесь же при движении освещающего предмета фантомное изображение исчезало. Причина такого различия ясна: спектр Фурье является одним из тех редких случаев, когда дифракционный спектр не зависит от положения точки на плоскости.

#### 4. Интерференционная память

В отличие от предыдущих применений, где используются тонкослойные эмульсии, для запоминающих устройств выгодно применять толстые голограммы.

Наглядная схема голографической записи в трехмерной среде рассмотрена Габором [44]. Запись сводится к тому, что объемная голограмма регистрирует набор стоячих волн, создаваемых предметным и опорным пучками. При восстановлении такая голограмма работает как объемная дифракционная решетка, т. е. резонансная структура, дающая дифракционную картину для определенных длин волн и углов падения. Другими словами, восстановление происходит только тогда, когда восстанавливающий пучок аналогичен записываемому по углу и длине волны.

Перспективность применения голограммы в запоминающих устройствах обусловлена двумя ее следующими свойствами. Во-первых, запись каждой точки предмета оказывается равномерно распределенной по всему регистрирующему объему. Поэтому не страшны даже значительные повреждения голограммы. Они лишь несколько ухудшают отношение сигнал/помеха. Это же свойство повышает надежность воспроизведения записанной информации. Во-вторых, каждая точка голограммы дает вклад в восстановленное изображение. Это означает, что память

обладает ассоциативными свойствами, т. е. выборка нужной информации производится по ее определенному признаку, а не по адресу ячейки, в которой она хранится, как это делается в обычных запоминающих устройствах. Добавочным преимуществом голографической памяти служит отсутствие линз при записи. Благодаря этому удается до конца (насколько позволяет конечная длина волны света) использовать разрешающую способность фотоматериала.

С другой стороны, тот факт, что визуальное изображение почти не страдает при ликвидации части голограммы, убеждает нас, что на голограмме слишком много избыточной для глаза информации. В этом смысле голографическая запись не экономична, и необходимы исследования на основе теории информации, которые позволят найти оптимальные методы голографической записи в различных условиях.

В качестве регистрирующей среды чаще всего используются толстослойные фотоэмульсии, щелочногалоидные кристаллы и фотохромные стекла. Толстослойные фотоэмульсии исследовались в работах [41, 42, 87, 88, 90]. Показано, что эмульсия работает как трехмерная голограмма, если ее толщина превышает расстояние между интерференционными полосами. В работе [42] на толстослойную пластинку записывались многоцветные изображения с помощью гелий-неонового (0,63 мкм) и аргонового (0,488 и 0,515 мкм) лазеров. Хотя многоцветные пучки направлялись на голограмму под одним углом, каждый цвет создавал в эмульсии свою систему интерференционных поверхностей. Благодаря этому при восстановлении под углом Брэгга возникло цветное трехмерное изображение.

Оптические свойства трехмерных голограмм теоретически подробно исследованы в работе [87]. Эксперименты с толстослойными эмульсиями показали чувствительность восстановленного изображения к углу и длине волны считывающего пучка. Путем поворота голограммы после каждой экспозиции были изготовлены голограммы движущихся предметов. Вращая голограмму в лазерном пучке, можно было под углом Брэгга наблюдать движущееся изображение.

Теория восстановления изображений с толстых голограмм дана в статье [22]. Получено строгое решение дифракционной задачи для круговой и линейной поляризации. Даны численные оценки для ряда случаев, которые типичны для голографии, и показано, что максимум интенсивности наблюдается под углом Брэгга.

В статье [62] описаны эксперименты с фотохромными стеклами. Пока достигнуто разрешение 60 *линия/мм*. Для того чтобы изображение не исчезало, требовались экспозиции не менее 1,5 час на аргоновом лазере мощностью 25 мвт.

В кристалле KBr размером  $2,5 \times 2,5 \times 0,2 \text{ см}^3$  удалось записать 30 различных изображений [34], хотя теоретически возможна запись 500 000 изображений. Для записи кристалл нагревали до  $80^\circ \text{C}$ . При облучении лазером окрашенные центры отбеливались, в результате чего регистрировалась интерференционная картина. Затем кристалл охлаждали до  $0^\circ \text{C}$  и, просвечивая под тем же углом, восстанавливали изображение. Щелочногалонидные кристаллы обладают существенными преимуществами перед толстослойными фотоэмульсиями:

1) для «проявления» такой фотоэмульсии достаточно простого охлаждения;

2) не происходит сжатия эмульсии, искажающего цвет;

3) эксперименты обладают отличной воспроизводимостью результатов, так как нетрудно изготовить кристаллы одной толщины;

4) в отличие от пленок чувствительность кристаллов не меняется от образца к образцу.

В 1966 г. всеобщее внимание привлекли трехмерные голограммы, восстанавливаемые в белом свете<sup>1)</sup>. Хотя применение «волновых фотографий» Денисюка [4—8] далеко не ограничивается системами памяти, уместно рассмотреть эти и дальнейшие работы других авторов в данном разделе обзора, поскольку механизм записи в светочувствительном объеме здесь тот же самый, что и систем памяти.

Денисюк первым подметил сходство голографии с липпмановским процессом цветной фотографии. В его установке когерентный пучок, прошедший липпмановскую пластинку, отражался предметом, расположенным с другой стороны пластинки. Интерференция прямого и отраженного пучков создавала «волновую фотографию» — запись информации об оптических свойствах предмета. При освещении голограммы белым светом от источника с достаточно малыми угловыми размерами возникало цветное изображение предмета — вогнутого сферического зеркала. Характерной особенностью волновых фотографий Денисюка было то, что опорный пучок вводился с обратной стороны голограммы, и интерференционные плоскости (слои) возникали почти параллельно поверхности (а не перпендикулярно, как в более поздних опытах с обычными фотоэмульсиями [41, 42, 87, 88, 90]). Расстояние между плоскостями было очень мало

<sup>1)</sup> Следует помнить, что белым светом можно восстановить любую голограмму, не обязательно трехмерную. Достаточно лишь между ней и источником поставить интерференционный фильтр.

Статью Строука — одну из первых экспериментальных работ в этом направлении — см. на стр. 213. В этой статье описана реализация идей Денисюка с помощью лазера.

( $\sim \lambda/2$ ). При восстановлении подсвечивающий пучок проходил множество слоев (несколько десятков) эмульсии. Лишь малая часть пучка дифрагировала, формируя при этом изображение, а остальная часть проходила прямо и терялась.

Поскольку первые работы Денисюка стали уже классическими, полезно привести его собственное определение [6], сжато формулирующее идею этих работ: «При релеевском рассеянии излучения на объекте интенсивность волнового поля в окружающем объект пространстве с достаточной степенью точности моделирует «оптический оператор рассеяния» этого объекта. Это свойство излучения дает возможность, зафиксировав названное поле в материальной среде, получить пространственную структуру, оптические свойства которой совпадают с оптическими свойствами объекта».

Работы Строука ([116] и стр. 213 настоящей книги) отличались тем, что благодаря лазеру удалось разделить опорный и предметный пучки и получить качественные изображения сложных протяженных предметов. Кроме систем памяти, волновые фотографии Денисюка и особенно их позднейшие варианты, разработанные Строуком и его сотрудниками [91, 116], а также другими авторами [122], могут найти применение в следующих областях:

а) изобразительная техника, создающая полную иллюзию реальности изображаемых предметов, например трехмерные портреты, восстанавливаемые солнечным светом;

б) гидролокация, радиолокация и ультразвуковая дефектоскопия;

в) изготовление диспергирующих элементов типа объемных дифракционных решеток. Моделирование трехмерных решеток в кристаллографических исследованиях.

## 5. Интерферометрия

Благодаря изобретению голографии область применения интерферометрии расширяется настолько, что становится возможным исследование не только простых идеализированных поверхностей, но и диффузно отражающих предметов произвольной формы. До сих пор интерферометрический метод применялся лишь для исследования качества зеркальных поверхностей, линз и полированных предметов правильной формы. В голографическом интерферометре не требуется зеркального отражения. Для опорного волнового фронта не нужно иметь аналитического выражения, а помехи на оптическом пути могут быть довольно существенными. Более того, оказывается возможным создавать

интерферограмму изображений, либо существующих в разное время, либо записываемых с помощью излучения разной длины волны. Анализ проблем голографической интерферометрии наиболее подробно изложен в работах [1, 50—52, 112].

Направления голографической интерферометрии можно классифицировать как по типу используемой методики, так и по характеру применения. В методическом отношении различают интерферометрию с двойной экспозицией, с многократной экспозицией, мгновенную интерферометрию поверхностей, импульсную интерферометрию динамических фазовых объектов и интерферометрическое измерение восстановленных трехмерных изображений.

Прежде чем перейти к рассмотрению применений, остановимся на основных интерферометрических схемах. Наиболее прост для эксперимента метод двойной экспозиции. Имея лазер и мелкозернистую фотопластинку, можно дважды заснять на голограмму любую поверхность, если, конечно, она не абсолютно черная. Если в промежутке между экспозициями поверхность в отдельных местах немного деформировалась, то на восстановленном изображении в этих местах возникнут интерференционные полосы<sup>1)</sup>. Преимущества этого метода в том, что он не требует совершенной оптики и точной юстировки; кроме того, если экспонировать пленку в два разных момента времени, он позволит изучать как стационарные, так и нестационарные процессы. В этом методе также привлекает легкость изготовления дифференциальных интерферограмм, регистрирующих малые изменения оптического пути лучей или положения предметов сложной формы.

Если поверхность вибрирует, голограмма как бы многократно экспонируется, запечатлевая множество изображений в определенном диапазоне позиций. При этом волновые фронты, отраженные вибрирующей поверхностью, усредняются на голограмме по времени. В восстановленном изображении возникает система интерференционных полос, определяющая узлы и контуры мест с постоянной амплитудой вибраций.

Эти два метода дают возможность изучать происходящие явления, не позволяя управлять ходом событий. Мгновенная интерферометрия сразу дает сведения об изменениях. Если проявленную голограмму поместить на прежнее место и осветить, а также подсветить лазером предмет, возникнет интерференция восстановленных и предметных волновых фронтов. Например, в схеме, изображенной на рис. 5, в направлении призмы пойдут

<sup>1)</sup> Полосы могут также располагаться как в пространстве перед предметом, так и «внутри» предмета [1, 51].

две плоские волны: одна прямая, прошедшая призму, а другая — восстановленная с голограммы. Эти волны в точности совпадают. Если теперь слегка изменить угол призмы, то наблюдатель увидит систему параллельных интерференционных полос.

Необходимо отметить, что качество оптики как в этом методе, так и в остальных не играет роли, поскольку она одинакова на обоих этапах. Однако здесь требуется точная юстировка, поскольку голограмма после проявления должна быть помещена в исходную позицию, так как в противном случае полосы будут обусловлены не изменениями в предмете, а несо-

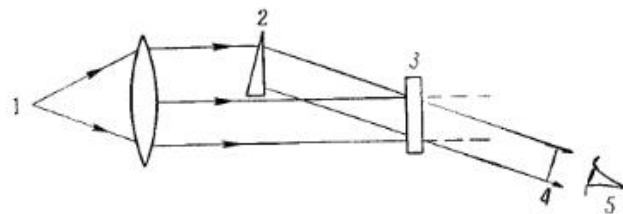


Рис. 5. Схема интерференции восстановленного и предметного волновых фронтов.

1 — лазер; 2 — призма; 3 — голограмма, на которой «записано» изображение призмы; 4 — совпадающие предметный и восстановленный волновые фронты; 5 — наблюдатель.

вмещением предмета и его изображения. Конечно, визуальный контроль дает меньше деталей исследуемого предмета, чем фотографический (например, с двойной экспозицией), но зато достигается выигрыш во времени.

Применения голографической интерферометрии можно разделить на четыре основных направления: исследование вибраций, деформаций, фазовых предметов (т. е. таких предметов, которые меняют лишь фазу прошедшей волны, оставляя неизменной ее интенсивность) и интерферометрические измерения.

Интерферометрический анализ вибраций диффузно отражающих предметов рассмотрен в работах [105, 111]. Наблюдение проводилось как по методу многократной экспозиции, так и путем мгновенной интерферометрии. В последнем случае изготавливалась голограмма неподвижного предмета, а затем через нее наблюдался вибрирующий предмет.

Применение голографии для анализа вибраций позволило приступить к исследованию ряда проблем, которые ранее не поддавались решению. Например, предполагается [78] изучать колебания мембран в микрофонах и громкоговорителях, поверхностные волны на различных материалах. Открывается возмож-

ность обнаружения вибраций объектов в вакууме, когда нет среды, передающей звук. Предлагается оригинальный метод обнаружения дефектов в толстых и тонких металлических изделиях сложной формы, которые не удастся изучать рентгеновскими методами. Мощным импульсом ИК-лазера предполагается вызывать звуковые волны в металле, а затем детектировать их с поверхности голографическим методом.

Продемонстрирована [81] высокая эффективность голографического вибрационного анализа при его использовании для ультразвукового неразрушающего контроля: для обнаружения и изучения трещин, несовершенств и щелей в твердых телах. Были изготовлены две пластины холоднокатаной стали, причем на одной была трещина. Затем с помощью соленоида в пластинках возбуждались вибрации частотой от 110 до 617 гц. Интерференционные картины для этих пластинок сильно отличались между собой и по-разному менялись с частотой. В месте трещины всегда возникали пучности, так как там металл ослаб, и колебания происходили с наибольшей амплитудой.

Голографический контроль необработанных поверхностей можно применить в большом числе случаев. Все эти применения опираются на интерференционный метод сопоставления нескольких состояний при помощи экспозиции на голограмму. Перечислим здесь лишь некоторые применения. Так, можно исследовать все изменения в твердых телах, отражающиеся на форме и качестве их поверхности [96]. Изменения могут вызываться действием нагрева, давления или набухания. Например, можно исследовать пузыри и непровары в стенках полых сосудов [98]. Нагрев воздуха внутри сосуда вызывает расширение стенки, причем участки с лучшей теплопроводностью расширяются больше, чем нормальные участки. Картина интерференционных полос позволит выявить эти места. Аналогично можно испытывать сосуды под давлением. Ослабленным местам будут соответствовать частые интерференционные полосы. Предлагается изучать ползучесть материала [28]. (Конечно, за время экспозиции смещение не должно превышать длину волны.) Путем подсчета интерференционных полос проведено измерение напряжений в швеллере, находящемся под нагрузкой [24].

Во всех перечисленных применениях производилось сравнение разных состояний одного и того же предмета. Большой интерес для промышленности представляет сравнение разных предметов, например контролируемой детали с эталонной. Сравнение производится [23] с использованием наклонной подсветки. В этом случае на расшифровке интерференционной картины сказывается не только отклонение детали от стандарта, но и неточность ее установки в заданное положение относительно голограммы.

Голографическая интерферометрия динамических фазовых предметов в гидро- и аэродинамике жидких струй, газовых потоков и т. д. требует применения специальной методики, близкой к обычной интерферометрии этих предметов [12, 118—120]. Она отличается от рассмотренной методики отсутствием фокусировки на фотопластинке. Благодаря этому количество фиксируемой информации на фотопластинке увеличивается. Схема эксперимента может быть такой же, как и в методе двойной экспозиции. Возникновение интерференционных полос связано с тем, что свет, прошедший более плотные участки, например фронт ударной волны, отстает и задерживается по фазе в сравнении со светом, прошедшим тот же путь в однородной среде.

В работах [9, 15, 61] было получено и исследовано восстановленное изображение контура другого фазового предмета — плазмы. С целью получения плазмы излучение рубинового лазера с модуляцией добротности фокусировалось в некоторой точке воздушного объема. Несфокусированное излучение лазера использовалось [15] для получения голограмм габоровского типа. Затем [61] удалось сфотографировать лазерную искру на трех стадиях ее развития по двухлучевой схеме Лейта — Упатниекса. По измерению голограммы удалось подсчитать плотность электронов на различных этапах пробоя. Для наблюдения восстановленного изображения искры использовались шлирен-метод и гелий-неоновый лазер на 0,63 мкм [9].

## 6. Голография в технологии

Сочетание высокой мощности лазерного излучения и замечательной способности голограмм фокусировать свет в сложные трехмерные фигуры позволяет надеяться на широкое использование голографии в технологической обработке поверхностей. Особенно полезной голография будет в тех случаях, когда наносимые на поверхность фигуры должны иметь на большей части поля высокое разрешение — порядка 1 мкм. Так, лучшие линзы способны создавать по полю не более 3000 разрешенных элементов в строке, тогда как голограммы без труда дают 10 000 разрешенных элементов.

В отличие от большинства других применений голографии в технологии используется восстановленное действительное изображение. Чтобы разрешение было максимальным, необходимо действительное изображение фокусировать как можно ближе к голограмме. Тогда число зон Френеля, дающих вклад в каждую точку изображения, будет наибольшим (при данных размерах голограммы). Если число зон Френеля мало, резкость ухуд-



шается. С другой стороны, если голограмма расположена слишком близко к изображению, на поверхность попадет прямой лазерный пучок и ухудшит контраст, что не всегда желательно. Поэтому здесь важен выбор оптимального расстояния голограмма — поверхность.

По-видимому, первым технологическим применением голографии является бесконтактное нанесение микросхем [39, 80]

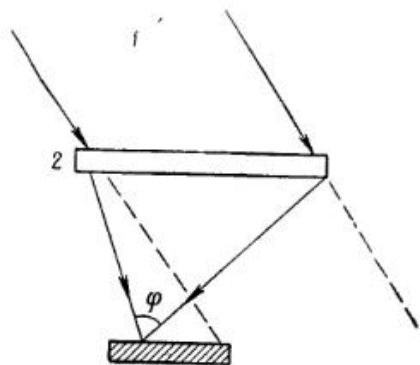


Рис. 6. Бесконтактное нанесение микросхем с помощью голограмм.

1 — лазерный свет; 2 — голограмма-фотошаблон; 3 — микросхема.

(рис. 6). Действительное изображение в нужных местах воздействует на слой фоторезиста, так что после смывания остается нужная фигура — защитный слой, предохраняющий пленку от травления.

Помимо отсутствия линз и высокого разрешения, голографическое нанесение микросхем имеет еще ряд специфических преимуществ. Отсутствие контакта с обрабатываемой поверхностью устраняет возможность появления царапин и оседания пылинок, а также облегчает автоматизацию печатания. Контактная печать препятствует получению сверхвысоких разрешений, так как требует идеально плоских поверхностей. В отличие от контактного фотошаблона, способного дать около 100 отпечатков, голограмма может служить сколь угодно долго. Наконец, не страшны пылинки, находящиеся в пространстве между голограммой и фоторезистом, так как зарегистрированная информация о каждой точке предмета равномерно распределена по всей голограмме. Пылинка лишь снизит яркость точки на небольшую величину.

Голографическая технология требует существенного повышения мощности лазеров при одновременном улучшении их когерентных свойств. Чем больше мощность, тем больше допу-

стимая площадь наносимого изображения. Существенный недостаток фокусирующих голограмм — их очень низкий к.п.д. Обычно в образовании действительного изображения участвует лишь несколько процентов падающей световой энергии. Остальное излучение проходит без дифракции напрямую и теряется. Для повышения яркости действительного изображения предложено помещать голограммы внутрь лазерного резонатора [104].

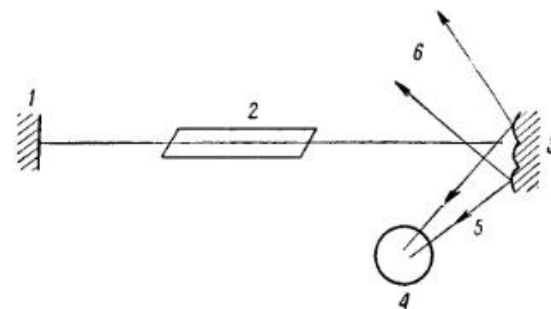


Рис. 7. Металлизированная голограмма в лазерном резонаторе.

1 — глухое зеркало резонатора; 2 — активная среда лазера; 3 — металлизированная голограмма; 4 — обрабатываемая поверхность; 5 — действительное изображение; 6 — мнимое изображение.

Если металлизированную голограмму (рис. 7) установить вместо одного из зеркал резонатора, а другое зеркало сделать глухим, то для образования действительного изображения может быть использовано до 50% мощности лазера. На пропускающих фазовых голограммах к.п.д. (степень использования освещающего пучка) может достигать 25%, так как будут возникать два действительных и два мнимых изображения.

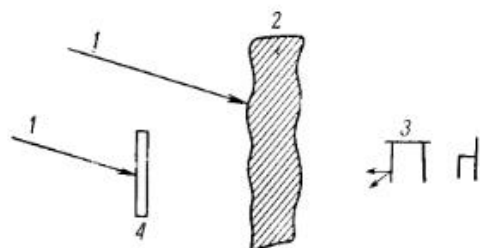
Дальнейшее совершенствование голографической технологии пойдет, вероятно, по пути комбинирования фокусирующих свойств голограмм с их необычными распознавательными и интроскопическими «способностями».

## 7. Голографический метод в интроскопии

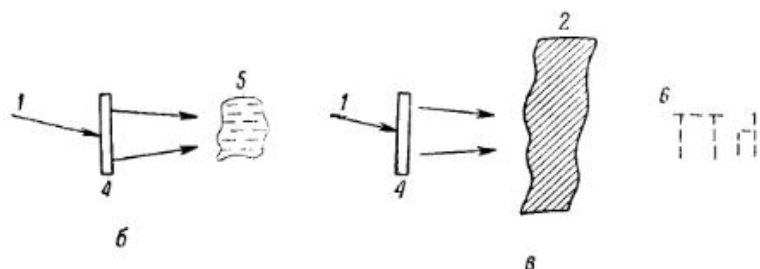
Передача изображения через прозрачные стенки (например, через ребристые стекла) неправильной формы вызывает астигматические искажения изображения. Изображения, переданные через неоднородную или рассеивающую среду (например, среду со случайными или турбулентными флуктуациями показателя преломления), теряют резкость и размываются.

Уникальную возможность избежать этих искажений предоставляет [70] голографический метод записи и восстановления

волнового фронта. Какое свойство голограмм обеспечивает такую возможность? Предположим, что на голограмму записано изображение предмета совместно с «изображением» стенки (или рассеивающей среды) (рис. 8, а). Если при восстановлении просто облучать голограмму лазерным пучком, то возникающее при этом изображение будет совершенно лишено смысла



а



б

Рис. 8. Голографическое наблюдение через стенки неправильной формы. При восстановлении без компенсации изображение размыто.

а — запись; б — восстановление без компенсации; в — восстановление с компенсацией.  
1 — лазерный свет; 2 — стенка неправильной формы; 3 — предмет; 4 — голограмма; 5 — размытое (некомпенсированное) изображение; 6 — скомпенсированное изображение.

(рис. 8, б). Стоит, однако, на пути лучей действительного изображения поместить прежнюю стенку, сохранив ее положение относительно голограммы, как возникнет неискаженное действительное изображение предмета (рис. 8, в). Поскольку действительное изображение непревзойдено для визуального наблюдения, его можно «вывернуть наизнанку» и получить более приятное для глаза изображение [107].

Для этого запишем действительное изображение на вторую голограмму. Тогда при рассмотрении последней в лазерном свете (рис. 9) наблюдатель увидит висящее между ним и голо-

граммой трехмерное действительное изображение, ничем не отличающееся от исходного предмета. Стенку удалось устранить так, будто ее и не было.

Следует заметить, что операции «выворачивания наизнанку» не потребовалось бы совсем, если бы удалось сразу же скомпенсировать мнимое изображение. Однако для мнимого изображения это, по-видимому, неосуществимо. Механизм компенсации состоит в том, что все сдвиги фаз, приобретенные на

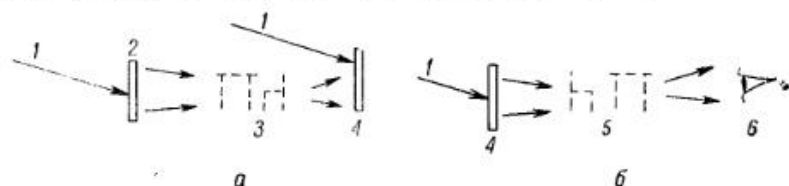


Рис. 9. Схема «выворачивания наизнанку» действительного изображения.

а — действительное изображение, восстановленное с голограммы 2, записывается на другую голограмму 4; б — при освещении последней наблюдатель видит копию изображения исходного предмета, висящую в воздухе между ним и голограммой.

1 — лазерный свет; 2 — голограмма; 3 — действительное изображение; 4 — голограмма; 5 — копия исходного предмета; 6 — наблюдатель.

прямом пути, компенсируются противоположными по знаку сдвигами фаз на обратном пути. Другими словами, если в прямом направлении распространяется волна  $S$ , то в обратном должна распространяться волна  $S^*$  — комплексно-сопряженная волна, т. е. можно компенсировать только действительное изображение.

Теоретическое обоснование этого замечательного свойства голограмм — передавать неискаженные изображения через неоднородные среды — опирается на теорему взаимности. Последняя вытекает из основного свойства функции Грина — перестановочности источника возмущения и точки наблюдения. В общем виде это свойство формулируется так: пусть антенна  $A$ , находящаяся в точке  $O_1$ , является излучателем, а антенна  $B$ , расположенная в точке  $O_2$ , — приемником. Пусть теперь излучает антенна  $B$ , создавая такое же поле, как в предыдущем случае, из точки  $O_2$ . Тогда, согласно свойству перестановочности, у антенны  $A$  будет то же поле, что и у антенны  $B$  в первом случае, независимо от свойств среды и формы антенн. Важно, что справедливость этой теоремы не зависит от неоднородностей среды.

Для простоты рассматривается среда без поглощения, показатель преломления  $n(\mathbf{r})$  которой меняется вдоль пути по определенному или случайному закону. Распространение световой волны в такой среде описывается волновым уравнением

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = 0,$$

где  $k=2\pi/\lambda$  — волновое число в свободном пространстве;  $u$  — компонента электрического вектора. Будем считать, что размеры неоднородности гораздо больше длины волны излучения.

Волна, распространяющаяся приблизительно в прямом направлении, описывается следующим решением уравнения:

$$u = S(\mathbf{r}) \exp[-iknz],$$

где  $S(\mathbf{r})$  — функция, медленно меняющаяся с  $z$ .

Однако это уравнение имеет и другое решение

$$u = S^*,$$

описывающее волну, распространяющуюся в обратном направлении.

Таким образом, чтобы восстановить изображение, «разрушенное» перегибностью среды, требуется выполнить три условия:

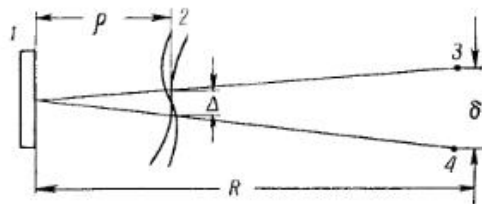


Рис. 10. Голографическая передача неискаженных изображений через возмущающий слой без компенсации.

1 — голограмма; 2 — волновые фронты опорной и предметной волн в возмущающем слое; 3 — источник; 4 — предмет.

1) ход показателя преломления вдоль обратного пути должен повторять  $n(\mathbf{r})$  по шести координатам, определяющим положение и ориентацию неоднородности в пространстве; 2) в обратном направлении должна распространяться волна, комплексно-сопряженная с прямой волной; 3) расходимость пучка, освещающего голограмму при восстановлении, должна равняться расходимости опорного пучка при записи, чтобы увеличение изображения стенки (среды) равнялось единице.

Дальнейшие исследования показали, что в ряде случаев можно обойтись без компенсации [47], например в случае «тонкой» возмущающей среды (слоя). Надо лишь расположить (рис. 10) предмет и опорный источник достаточно близко друг к другу так, чтобы расстояние между ними

$$\delta < \frac{R}{\rho} \Delta,$$

где  $R$  — расстояние предмет — голограмма;  $\rho$  — расстояние источника — голограмма;  $\Delta$  — размер неоднородности,

При этом условии предметная и опорная волны испытают почти одинаковую задержку по фазе, благодаря чему на голограмме запишется та же интерференционная картина, что и при отсутствии возмущающего слоя. Следовательно, при восстановлении копии слоя не потребуется. Особенно легко сохранить разрешение, если располагать голограмму вплотную к слою ( $\rho=0$ ). Тогда предмет и источник могут находиться на любом расстоянии или же среда может иметь форму толстого слоя.

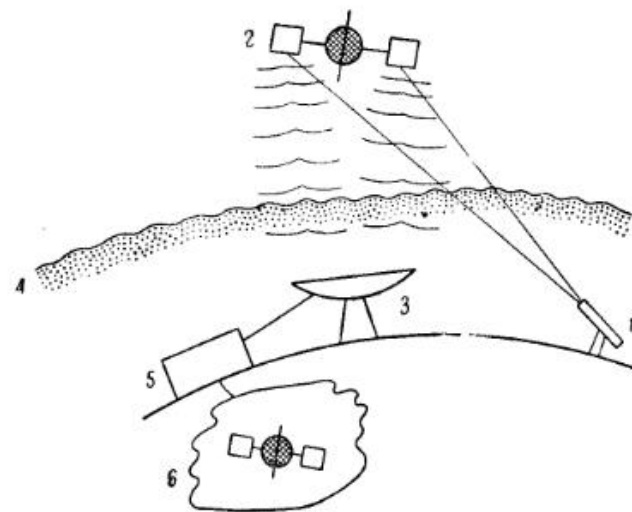


Рис. 11. Схема голографической передачи изображений из-за пределов земной тропосферы.

1 — лазер; 2 — космический корабль; 3 — приемник; 4 — турбулентная атмосфера; 5 — преобразователь; 6 — изображение.

Недостаток метода связан с тем, что когерентный источник требуется располагать рядом со «спрятанным» предметом.

Предполагают, что система, построенная на этих принципах, позволит передавать неискаженные изображения со спутников, находящихся на орбите [58, 82, 83, 109]. При обычном наблюдении с помощью телескопа изображение космонавта, вышедшего из космического корабля, искажается из-за турбулентности атмосферы в приземном слое. Мощный наземный лазер (рис. 11) освещает спутник. Отраженное от двух частей спутника излучение регистрируется наземным приемником. Принятая голограмма преобразуется (как именно, не сообщается) в видимое изображение. Влияние турбулентности на качество голограммы устраняется благодаря тому, что волновые фронты от двух

частей спутника проходят одинаковые пути и разность фаз между ними сохраняется.

Однако, на наш взгляд, к практической реализации такой системы следует отнестись с осторожностью: слишком велики требуемый диаметр телескопа и необходимая мощность лазера.

Во многих практических случаях стенка имеет правильные поверхности (рис. 8), что облегчает ее установку. Правильные поверхности можно создавать искусственно, помещая испытуемый материал в кювету с иммерсионной жидкостью.

Любопытно, что компенсационный метод позволяет получать неискаженные изображения через прозрачные поверхности неправильной формы, например через матовые стекла и волнистую водную поверхность; как известно, наблюдать через такие поверхности с помощью обычной оптики или невооруженным глазом практически невозможно.

Широкие возможности в голографической интроскопии открываются при использовании принципа визуализации невидимых изображений, рассмотренного Лейтом и Упатниексом [85] и осуществленного Дулеем [31]. Для перевода изображения в видимый диапазон предложены масштабные переходы — увеличение и уменьшение голограмм. Сочетание масштабных переходов с компенсационным методом [14] в принципе позволяет наблюдать неискаженные трехмерные объекты за светонепроницаемыми стенками произвольной формы. Для реализации этой возможности потребуется преодолеть многочисленные технические трудности. Нужны источники достаточно когерентного и мощного излучения. Здесь интерес представляет лазер на  $\text{CO}_2$  с длиной волны 10,6 мкм.

Кроме интроскопии оптических деталей и минералов, компенсационный метод найдет применение для кодирования секретных документов и для изучения распространения волн в неоднородных средах. Возможно, удастся осуществить лазерную связь в турбулентной атмосфере, которой не будут страшны хаотические флуктуации показателя преломления воздуха.

Вместо компенсации стенки можно записать ее изображение на отдельную голограмму [116]. Если затем освещать обе голограммы одновременно, то удастся восстановить изображение предмета, находящегося за стенкой.

## 8. Голографическая микроскопия

Голографическая микроскопия начала развиваться в основном благодаря усилиям групп Строука и Лейта в Мичиганском университете США. Работы Строука, нацеленные на

достижение разрешений порядка  $1 \text{ \AA}$  (что соответствует размерам молекул живых тканей), подробно описаны в основных главах настоящей монографии. В работе [115] продолжалось исследование габоровской схемы голографического микроскопа. Опорный и предметный пучки направлялись вдоль одной оси, и изображение предмета фокусировалось на голограмме. Практически опорная и предметная волны имели не только одинаковое направление, но и одинаковую кривизну. Поскольку запись происходила в толще 17-микронного слоя эмульсии Kodak 649F, была использована возможность восстановления изображения в белом свете (с помощью угольной дуги). Хотя восстановленный предмет (модель атома размером 15 см) можно было наблюдать лишь под одним определенным углом зрения, но зато наблюдатель мог фокусировать взгляд на различных плоскостях изображения, что давало возможность извлекать информацию о третьем измерении предмета.

В работе [126] описан эксперимент по оптическому моделированию рентгеновского голографического микроскопа (габоровского типа), действующего на основе использования двойного преобразования Фурье. Эксперимент проводился без использования лазера. Опорная волна создавалась точечным отверстием в плоскости предмета. При восстановлении удалось получить четкие изображения периодических структур.

В статьях Лейта и его сотрудников [84, 85] описаны схемы микроскопии в расходящихся лазерных пучках, приведены формулы увеличения и определены условия, при которых в восстановленном изображении отсутствуют aberrации. Более подробно теория углового и продольного увеличений изложена в работе [94], где даны выражения для aberrаций третьего порядка при восстановлении точечных предметов и указаны пути их устранения.

Первые высококачественные трехмерные изображения микрообъектов были получены в работах [26, 27, 77, 124]. Микроизображение получалось как по методу светлого поля, так и поляризационным методом [26, 27, 77]. Увеличение достигалось в два этапа. Сначала с помощью обычного микроскопа увеличенное изображение проектировалось на голограмму. Затем при восстановлении с помощью линзы создавалось добавочное увеличение. Хотя при таком методе трехмерность в ее обычном смысле нарушалась, в восстановленном изображении удавалось просматривать различные по глубине плоскости.

Одна из возможных схем такого микроскопа [124] приведена на рис. 12. С этим микроскопом на гелий-неоновом лазере были изготовлены голограммы окрашенной нейронной сети. Фотогра-

фируя восстановленное квазитрехмерное изображение, удалось сделать снимки двух плоскостей, отстоящих друг от друга на 40 мкм, причем размеры наименьших деталей достигали 1 мкм. В то же время обычным голографическим методом (без использования объектива микроскопа) авторам удалось достичь разрешения 12 мкм и лишь с особым трудом 5 мкм.

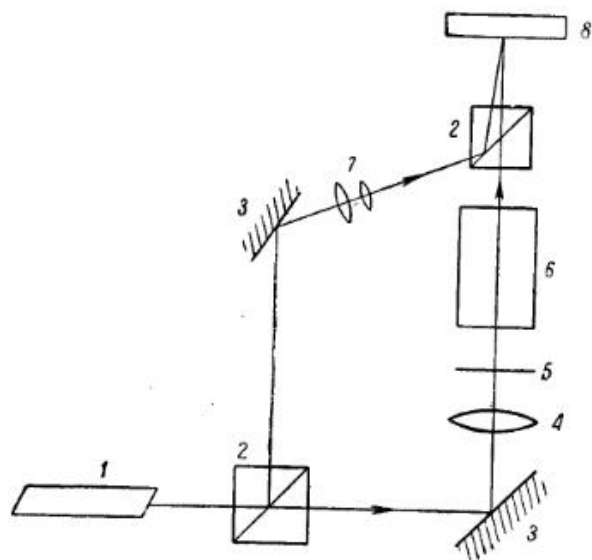


Рис. 12. Голографический микроскоп, позволяющий наблюдать изображение на разной глубине.

1 — лазер; 2 — призма-куб; 3 — зеркало; 4 — конденсор; 5 — предмет; 6 — микроскоп; 7 — микрообъектив; 8 — голограмма.

Достоинством микроскопической голографии является также и то, что она сохраняет фазовую информацию о предмете. Кроме того, возможность увеличения без помощи линз в ряде случаев даст выигрыш в разрешающей способности по сравнению с линзовыми микроскопами. Предполагаемые применения голографического микроскопа связаны с наблюдением тканей, пораженных раком, а также подвижных или короткоживущих микрообъектов, например амеб и кровяных телец. Их можно быстро зарегистрировать, а затем с помощью голограммы просматривать по глубине.

## 9. Голографическое кино

Голографический метод в принципе позволяет воспроизвести с неподвижного экрана изображение движущегося предмета<sup>1)</sup>. Для этого на одну голограмму необходимо записать под разными углами последовательные положения предмета [38, 89, 99, 100]. При восстановлении голограмма последовательно освещается теми же источниками и под теми же углами, в результате чего создается эффект движения.

Возможны и другие варианты голографического кино, например с использованием панорамного стереоскопического зрительного устройства [97] либо скачкообразного поворота источника или самой голограммы, а также путем применения методов современной кинотехники — вращающихся барабанов и зеркал. Проблема состоит в том, что наложение изображений, записанных в соседние моменты времени, вызывает нежелательные искажения. Пока удавалось записывать под разными углами до семи изображений [89]. Велики трудности изготовления голограммы размером с экран кинотеатра. Тем не менее, по-видимому, это единственный путь к массовому зрелищу, поскольку проблема увеличения для большой аудитории трехмерных изображений, восстановленных с небольших голограмм, вряд ли разрешима.

Более реальна разработка систем трехмерной индикации индивидуального пользования, например системы слепой посадки самолетов [67]. Предлагается заснять на большое число голограмм макет аэропорта с посадочной полосой, причем каждая голограмма дает изображение полосы, как ее видит пилот при приземлении. Радиолокатор выдает позицию самолета относительно полосы, а электронная вычислительная машина выбирает нужную голограмму. Пилот видит трехмерную посадочную полосу как реальную и способен посадить самолет в густом тумане по одним голограммам. Пока создан лишь лабораторный макет такой установки.

## 10. Голографическое телевидение

Понятен всеобщий интерес к возможности осуществления объемного голографического телевидения. Такое телевидение максимально приблизит искусство и технику телевизионного вос-

<sup>1)</sup> Помимо этого, изображение может быть объемным и цветным (хотя сама пленка серая) и не требует для наблюдения никаких вспомогательных зрительных устройств.

произведения к реальным условиям и позволит создать почти стопроцентный эффект присутствия.

Хотя первое объемное телевизионное изображение, полученное на ином принципе, было продемонстрировано Шмаковым 17 лет назад [19], дальнейшие перспективы трехмерного телевидения связываются именно с голографией. Разработка таких систем интенсивно обсуждается и, по-видимому, прогрессирует. Так, есть сообщения, что уже в 1967 г. будет показан макет коммерческой голографической системы, передающей трехмерные изображения и требующей полосы не более 6 Мгц [36].

Впервые идея голографического телевидения была, по-видимому, высказана Роджерсом [106] в его патенте от 1958 г. — еще до изобретения лазера. Наиболее подробное обсуждение требований к голографической системе трехмерного телевидения приведено в работе [86]. Показано, что такая система потребует полосу около  $10^{11}$  гц (при разрешении телеэкрана 700 линия/мм)<sup>1)</sup>, что на четыре порядка превышает полосу современного телеканала. Поэтому передача трехмерных изображений по обычному телеканалу возможна в настоящее время лишь для простых объектов или в режиме медленного сканирования.

Если изготовить крупноструктурные голограммы, выбирая малый угол между предметным и опорным пучками, то их можно будет сразу же передавать по телевидению. Первую успешную телетрансляцию [37] таких голограмм уже удалось провести. Однако этот метод пригоден лишь для малых двумерных предметов типа транспаранта. По сравнению с обычной телетрансляцией он имеет лишь те преимущества, что информация об изображении передается в закодированном виде и что такая передача отличается высокой помехоустойчивостью. Даже потеряв до 90% информации (например, 9 из 10 мин связь не работала из-за помех), можно восстановить различные контуры всего исходного изображения.

Другой возможный путь — телевидение в СВЧ-диапазоне [66]. В качестве СВЧ-голограммы можно использовать многоэлементные антенные решетки. Количество информации, содержащейся в голограмме, которая получена в миллиметровом диапазоне, не слишком велико и может быть передано обычными средствами. Наблюдение на приемном конце телеканала предполагается осуществить путем облучения лазером уменьшенной голограммы. Однако такие голограммы очень малы и не дают заметного параллакса. Если склеить набор таких голограмм, предмет

<sup>1)</sup> В настоящее время лабораторные макеты телеэкранов «Эйдофор» имеют разрешение не выше 100 линия/мм.

будет виден таким, как будто его наблюдают через множество маленьких отверстий в экране.

Дальнейшее наступление на голографическое телевидение, очевидно, пойдет с нескольких сторон. Во-первых, совершенствование телевизионной техники позволит повысить скорость передачи<sup>1)</sup> и качество трехмерности голографических изображений. Далее, развитие лазерной техники обеспечит создание широкополосных оптических линий связи, а также соответствующих систем модуляции и сканирования световых пучков. По-видимому, использование лазерного луча является единственным путем передачи колоссального объема информации, заключенной в голограмме.

Третье направление связано с разработкой динамических приемников изображения и более быстродействующих экранов с повышенной разрешающей способностью. Сегодня особенно перспективными кажутся фотохромные материалы и термопластики. У первых разрешение находится на молекулярном уровне, но пока мала чувствительность. Вторые отличаются быстродействием — уже сейчас изготовление голограммы занимает несколько секунд, и это время может быть снижено до долей секунды.

Кроме того, голографическое телевидение должно изыскать средства экономии полосы пропускания. Например, можно без значительного ущерба уменьшить поле зрения в вертикальном направлении. Необходимо, кроме того, воспользоваться и тем, что последовательные изображения лишь слегка отличаются друг от друга. Создавая у края голограммы расходящийся опорный луч, можно значительно укрупнить наименьший элемент голограммы. Возможны также затемнение несущественных деталей изображения и другие оптические трюки. Наконец, не вся записанная на голограмме информация требуется для восстановления изображения, и нужно научиться управлять этим свойством избыточности.

## 11. Голографическая оптика

Созданию безлинзовой оптики и применению голограмм в линзовых системах пока посвящено относительно небольшое число работ. Очевидно, эти применения начнут интенсивно развиваться, когда будет отработана необходимая голографическая методика, а также преодолена некоторая инерция заинтересо-

<sup>1)</sup> Исходя из того что голограмма  $25 \times 25$  см<sup>2</sup> содержит  $6 \cdot 10^{10}$  элементов (при разрешении 1000 линия/мм), нетрудно подсчитать, что сегодня ее передача по стандартному каналу с полосой  $8 \cdot 10^6$  гц займет около 2 час.

ванных исследователей, которая объясняется приверженностью к традиционным методам.

Последнее особенно характерно для линзовой оптики, где сложившаяся методика доведена до совершенства, и новичку, каким является голограмма, трудно пробить себе дорогу. Тем не менее уже ясно, что голограмма в ряде случаев окажется полезной и даже может вытеснить линзу. Например, разработан фотоаппарат без единой линзы, в котором фокусировка осуществляется зонными пластинками Френеля [67]. Для проведения астрономических экспериментов желательнее устанавливать на спутниках большие телескопы. Стеклолинза диаметром 3 м весит 3 т. Зонная пластинка таких же размеров из тонкого пластика почти невесома. К тому же ее можно сложить и развернуть на орбите в большой лист [69]. Для изготовления зонных пластинок достаточно сфотографировать интерференционную картину. Это значительно проще, чем провести притирку, доводку и полировку оптической линзы.

Зонные пластинки найдут применение в лазерной связи [67]. На передающем конце они позволят резко сколлаимировать посылаемый сигнал. На приемном конце зонные пластинки будут фокусировать широкие пучки диаметром до 10 м.

Однако не следует забывать о хроматизме голограмм и, в частности, зонных пластинок, обусловленном их дифракционным происхождением. Очевидно, основное применение голографическая оптика найдет в когерентных системах, хотя известны методы ахроматизации голограмм, позволяющие использовать их и с некогерентным светом [68, 101].

Отметим также невысокую собирающую способность голограмм, обычно не превышающую 10—20%. Методы изготовления голограмм с высоким к.п.д. пока еще мало разработаны.

Голограммы находят применение и в комбинации с линзами для устранения сферических aberrаций последних [123], для исследования передаточных функций оптической системы [40] и для изготовления дифракционных решеток высокого разрешения [45].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Е. Б., Бонч-Бруевич А. М., *ЖТФ XXXVII* (2), 360—369 (1967).
2. Бахрах Л. Д., Курочкин А. П., *ДАН СССР*, 171 (6), 1309—1312, (1966).
3. Бородина С. В., *Радиоэлектроника за рубежом* (27—28), 78—84 (1966).
4. Денисюк Ю. Н., *ДАН СССР*, 144 (6), 1275 (1962).
5. Денисюк Ю. Н., *Оптика и спектроскопия*, 15 (4), 522—532 (1963).

6. Денисюк Ю. Н., Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 1963, 133 стр., 34 рис., библиография 49 назв.
7. Денисюк Ю. Н., *Оптика и спектроскопия*, 18 (2), 275—283 (1965).
8. Денисюк Ю. Н., *Успехи научной и прикладной фотографии и кинематографии*, 11 (1), 46—56 (1966).
9. Зайдель А. Н., Островская Г. В., Островский Ю. И., Челидзе Т. Я., *ЖТФ XXXVI* (12), 2208—2210 (1966).
10. Комар А. П., Стабников М. В., Турухано Б. Г., *ДАН СССР*, 169(5), 1052, 1053 (1966).
11. Лейт Э., Упатниекс Ю., *УФН*, 87 (3), 521—538 (1965); см. также *Наука и жизнь*, (11), 22—31 (1965).
12. Мустафин К. С., Селезнев В. А., Штырков Е. И., *Оптика и спектроскопия*, XXII, вып. 2, 319—320 (1967).
13. Налимов И. П., *Зарубежная радиоэлектроника* (2), 3—28 (1966).
14. Налимов И. П., Авторское свидетельство по заявке № 1062342/26-25 от 12.3.66, выданное 5.11.66.
15. Островская Г. В., Островский Ю. И., *Письма в редакцию ЖЭТФ*, IV (4), 121—123 (1966).
16. Платоненко В. Т., *УФН*, 87 (3), 575—580 (1965).
17. Сороко Л. М., Лекции по голографии, Препринт ОИЯИ, март 1965.
18. Сороко Л. М., *УФН*, 90 (1), 1—46 (1966). Библиография 98 назв.
19. Шамаков П. В., Цветное и объемное телевидение, М., 1955, 54 стр.
20. Brooks R. E., et al., *Appl. Phys. Lett.*, 7 (4), 92 (1965).
21. Brooks R. E., Heflinger L. O., Wuerker R. F., *IEEE Journ. Quant. El.*, QE-2 (8), 275—279 (1966).
22. Burekhardt C. B., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (11), 1502—1509 (1966).
23. Burch J. M., *Production Engineer*, 44 (9), 436, 444 (1965).
24. Burch J. M., Ennos A. E., Wilton R. J., *Nature*, 209 (5027), 1015 (1966).
25. Carcel J. T. et al., *Appl. Optics*, 5 (7), 1199—1201 (1966).
26. Carter W. H., Dougal A. A., *Electronics*, 39 (10), 204 (1966).
27. Carter W. H., Engeling P., Dougal A. A., *IEEE J. Quant. El.*, QE-2 (2), 44 (1966).
28. Collier R. J., Doherty E. T., Pennington K. S., *Appl. Phys. Lett.*, 7 (8), 223—225 (1965).
29. Collier R. J., Pennington K. S., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (2), 44 (1966).
30. De Velis J. B., Parrent G. B., Thompson B. J., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (4), 423—427 (1966).
31. Dooley R. P., *Proc. IEEE*, 53 (11), 1733—1735 (1965); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (4), 131—133 (1966).
32. *El. News*, (536), 26 (1966).
33. *El. Weekly*, (298), 6 (1966).
34. *Electronics*, 39 (11), 35 (1966).
35. *Electronics*, 39 (15), 94 (1966).
36. *Electronics*, 39 (24), 25 (1966).
37. Enloe L. H., Murphy J. A., Rubinstein C. B., *Bell Syst. Techn. J.*, 45 (2), 335—339 (1966); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (11), 31—33 (1966).
38. Erdős P., *IBM Techn. Disc. Bull.*, 9 (3), 291 (1966).
39. Field R. K., *Electronic Design*, (15), 17—18 (1966).
40. Françon M., Lowenthal S., May M., Prai R., *Compt. Rend.*, 263 (3), 237—240 (1966).
41. Friese A. A., *Appl. Phys. Lett.*, 7 (4), 102 (1965).

42. Friesem A. A., Fedorowicz R. J., *Appl. Optics*, 5 (6), 1085, 1086 (1966).
43. Gabor D., *Nature*, 208 (5009), 422, 423 (1965).
44. Gabor D., *Electronics*, 39 (15), 94 (1966).
45. George N., Matthews J. W., *Appl. Phys. Lett.*, 9 (5), 212—219 (1966).
46. Givens M. P., Siemens-Wapniarsky W. J., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (4), 537 (1966).
47. Goodman J. W., Huntley W. H., Jr., Jackson D. W., Lehmann M., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (12), 311 (1966).
48. Grant R. M., Lillie R. L., Barnett N. E., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (8), 1142 (1966).
49. Greguss P., *J. Phot. Sci.*, 14 (6), 329—332 (1966).
50. Haines K. A., Hildebrand B. P., *IEEE Trans. on IM*, IM-15 (4), 595—602 (1966).
51. Haines K. A., Hildebrand B. P., *Appl. Optics*, 5 (4), (1966); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника* (5), стр. 100—112 (1966).
52. Hefflinger L. O., Wuerker R. F., Brooks R. E., *Appl. Phys.*, 37 (2), 642—649 (1966).
53. Hersch P., *El. News*, (495), 5 (1965).
54. Hildebrand B. P., Haines K. A., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (4), 537 (1966).
55. Hildebrand B. P., Haines K. A., *Phys. Lett.*, 21 (4), 422, 423 (1966).
56. Hioki R., Suzuki T., *Jap. J. Appl. Phys.*, 4 (10), 816 (1965).
57. Huang T. S., Prasad B., MIT Res. Lab. of Electronics. Quart. Prog. Rep. № 81, 1966, p. 199—205.
58. *IEEE Spectrum*, 3 (11), 114 (1966).
59. Jacobson A. D., McClung F. J., *Appl. Optics*, 4 (11), 1509 (1965).
60. Jeong T. H., Rudolf P., Lockett A., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (9), 1263, 1264 (1966).
61. Kakos A., Ostrowskaya G. H., Ostrovskii Ju. I., Zaidel A. N., *Phys. Lett.*, 23 (1), 81—83 (1966).
62. Kirk J. P., *Appl. Optics*, 5 (10), 1684, 1685 (1966).
63. Кнох С., *Science*, 153, 989 (1966).
64. Kock W. E., Harvey F. K., *Bell Syst. Techn. J.*, 20, 564—587 (1951).
65. Kock W. E., Sound waves and light waves, N. Y., 1965; русский перевод: Кок У., Звуковые и световые волны, М., 1966.
66. Kock W. E., *Proc. IEEE*, 54 (2), 331 (1966).
67. Kock W. E., *El. News*, (567), 32 (1966).
68. Kock W. E., *Proc. IEEE*, 54 (11), 1610, 1611 (1966).
69. Kock W. E., Rosen L., Rendeiro J., *Proc. IEEE*, 54 (11), 1599, 1600 (1966).
70. Kogelnik H., *Bell Syst. Techn. J.*, 44 (10), 2451—2454 (1965).
71. Landry J., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (8), 1133 (1966).
72. Lanza C., *IBM Techn. Discl. Bull.*, 8, 1559, 1560 (1966).
73. *Laser Focus*, 1 (6), (1965).
74. *Laser Focus*, 2 (6), 5 (1966).
75. *Laser Focus*, 2 (7), 4, 5 (1966).
76. *Laser Focus*, 2 (10), 10 (1966).
77. *Laser Focus*, 2 (11), 8 (1966).
78. *Laser Focus*, 2 (13), 7 (1966).
79. *Laser Focus*, 2 (13), 15 (1966).
80. *Laser Focus*, 2 (14), 4 (1966).
81. *Laser Focus*, 2 (17), 30—32 (1966).
82. *Laser Focus*, 2 (19), 11 (1966).

83. *Laser Focus*, 2 (20), (1966).
84. Leith E. N., Upatnieks J., *J. Opt. Soc. Am.*, 55 (5), 569, 570 (1965).
85. Leith E. N., Upatnieks J., Haines K. A., *J. Opt. Soc. Am.*, 55 (8), 981—986 (1965).
86. Leith E. N., Upatnieks J., Hildebrand B. P., Haines K. A., *J. SMPTE*, 74 (10), 893—896 (1965); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (5), 3—11 (1966).
87. Leith E. N. et al., *Appl. Optics*, 5 (8), 1303—1312 (1966).
88. Leith E. N. et al., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (4), 536 (1966).
89. Leith E. N., Upatnieks J., Kozma A., Massey N., *J. SMPTE*, 75 (4), 323 (1966); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника*, (1), 142—147 (1967).
90. Lin L. H., Pennington K. S., *Bell Lab. Rec.*, 43 (10), 416 (1965).
91. Lin L. H., Pennington K. S., Stroke G. W., Labeyrie A. E., *Bell Syst. Techn. J.*, 27 (4), 659, 660 (1966).
92. Lohmann A. W., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (4), 537 (1966).
93. Lohmann A. W., Armitage J., *J. Opt. Soc. Am.*, 54 (11), 1404 (1964).
94. Meier R. W., *J. Opt. Soc. Am.*, 55 (8), 987—992 (1965).
95. Mueller R. K., Sheridan N. K., *Appl. Phys. Lett.*, 9 (9), 328, 329 (1966); см. также *Electronics*, 39 (24), 37, 38 (1966).
96. Nassenstein H., *Phys. Lett.*, 21, 290, 291 (1966).
97. Nassimbene E. G., *IBM Techn. Discl. Bull.*, 8, 1397, 1398 (1966).
98. *New Scientist*, 31 (503), 18 (1966).
99. Paques H., Smigielski P., *Compt. Rend.*, 260 (25), 6562—6564 (1965).
100. Paques H., Smigielski P., *Optica Acta*, 12 (4), 359—378 (1965).
101. Paques H., *Proc. IEEE*, 54 (9), 1195 (1966).
102. Parrent G. B., Thompson B. J., *Optica Acta*, 11 (3), 183—192 (1964).
103. Pennington K. S., Collier R. J., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (1), 14—16 (1966).
104. Pole R. V., Wieder H., Myers R. A., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (9), 229—231 (1966).
105. Powell R. L., Stetson K. A., *J. Opt. Soc. Am.*, 55 (12), 1593—1598 (1965).
106. Rogers G., *J. Sci. Instr.*, 43 (10), 677 (1966).
107. Roitz F. B., Friesem A. A., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (6), 146—148 (1966); см. также исправление *Appl. Phys. Lett.*, 8 (9), 240 (1966).
108. Schawlow A., *Microwaves*, 5 (7), 16 (1966).
109. *Science News*, 90 (18), 349 (1966).
110. Spitz E., Weits A., *Compt. Rend.*, 262 (11), 758—760 (1966).
111. Stetson K. A., Powell R. L., *J. Opt. Soc. Am.*, 55 (12), 1694, 1695 (1965).
112. Stetson K. A., Powell R. L., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (9), 1161—1168 (1966).
113. Story J. B., Ballard G. S., Gibbons R. H., *J. Appl. Phys.*, 37 (5), 2183 (1966).
114. Stroke G. W., Zech R. G., *Appl. Phys. Lett.*, 9 (5), 215—217 (1966).
115. Stroke G. W., *Phys. Lett.*, 23 (5), 325—327 (1966).
116. Stroke G. W., Labeyrie A. E., *Phys. Lett.*, 20 (2), 157—159 (1966).
117. Supertzi E. P., Rigler A. K., *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (4), 524 (1966).
118. Tanner L. H., *J. Sci. Instr.*, 43 (2), 81—83 (1966).
119. Tanner L. H., *J. Sci. Instr.*, 43 (5), 346 (1966).
120. Tanner L. H., *J. Sci. Instr.*, 43 (12), 878—887 (1966).
121. Tyler G. L., *J. Geophys. Res.*, 71, 1559—1567 (1966); русский перевод: *Зарубежная радиоэлектроника* (9), (1967).



122. Upatnieks J., Marks J., Fedorowicz R. J., *Appl. Phys. Lett.*, 8 (11), 286 (1966).
123. Upatnieks J., Van der Lugt A., Leith E. N., *Appl. Optics*, 5 (4), 589—593 (1966).
124. Van Ligtен R. F., Osterberg H., *Nature*, 211 (5046), 282 (1966).
125. Welford W. T., *Appl. Optics*, 5 (5), 872 (1966).
126. Winthrop J. T., Worthington C. R., *Phys. Lett.*, 21 (4), 413 (1966).

### БИБЛИОГРАФИЯ<sup>1)</sup>

#### Обзоры

1. Dickinson A., Dye M. S., Principles and practice of holography, *Wireless World*, 73 (2), 56—61 (1967).
2. Elliott E. R., Lasers—where they are now, *El. Weekly* (334), 7, 34 (1967).
3. Ennos A. E., Holography and its applications, *Contemp. Phys.*, 8 (2), 153—170 (1967).
4. Françon M., La coherence en Optique, *Atomes* (241), 162—166 (1967).
5. Gabor D., Les transformations de l'information en Optique, *Optica Acta*, 13 (4), 299—310 (1966).
6. Maréchal A., Theory and practice of image formation, *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (12), 1645—1648 (1966).
7. Marquet M., Performances en holographie, *Revue d'Optique*, 45 (9), 404—416 (1966).
8. Ramberg E. G., The hologram—properties and applications, *RCA Review*, 27 (4), 467—500 (1966).
9. Smith A. B., Direct-view 3-D images!, *Radioelectronics*, XXXVIII (1), 46—49 (1967).
10. Yates J. M., Wavefront image evaluation, *Br. J. Photogr.*, 133 (5518), 328—330, 343 (1966).

#### Физическая оптика

1. Павленко Ю. Г., Восстановление процесса упругого рассеяния в когерентном свете, *ЖЭТФ*, 52 (3), 699—701 (1967).
2. Champagne E. B., Nonparaxial imaging, magnification, and aberration properties in holography, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (1), 51—55 (1967).
3. Konjaev K. V., Interference method of twodimensional Fourier transform with spatially incoherent illumination, *Phys. Lett.*, 24A (9), 490—491 (1967).
4. Reynolds G. O., De Velis J. B., Hologram coherence effects, *IEEE Trans. on AP*, AP-15 (1), 41—48 (1967).
5. Roig J., Taravellier R., Mas G., Interferences entre une onde cohérente  $\Sigma'$  émise par un laser et une onde  $\Sigma''$  diffractée par un objet de faibles dimensions, dans le cas d'un faisceau forment astigmatique, *Compt. Rend.*, 263 (18), 1014—1017 (1966).

#### Методика

1. Микаэлян А. Л., Разумов Л. Н., Сахарова Н. А., Турков Ю. Г., О получении голограмм Фурье с помощью импульсного рубинового лазера, *Письма в редакцию ЖЭТФ*, 5 (5), 148—150 (1967).

<sup>1)</sup> См. также стр. 189. — Прим. ред.

2. Bolstad J. O., Holograms and spatial filters processed and copied in position, *Appl. Optics*, 6 (1), 170 (1967).
3. Brumm D. B., Double images in copy holograms, *Appl. Opt.*, 6 (3), 588 (1967).
4. Carpenter R. L., Clifford K. L., Simple inexpensive hologram viewer, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (2), 276 (1967).
5. De M., Seigny L., Polarisation holography, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (1), 110—111 (1967).
6. De Bitetto D. J., White-light viewing of surface holograms by simple dispersion compensation, *Appl. Phys. Lett.*, 9 (12), 417—418 (1966).
7. Froehly C., Etude holographique du second harmonique de l'onde émise par un laser à rubis, *Compt. Rend.*, 263 (23), 1304—1307 (1966).
8. Kock W. E., Rosen L., Rendeiro J., Realism of lens action in holograms, *Proc. IEEE*, 54 (12), 1985 (1966).
9. Kock W. E., Rosen L., Stroke G. W., Focus-image holography—a method for restoring the third dimension in the recording of conventionally-focused photographs, *Proc. IEEE*, 55 (1), 80—81 (1967).
10. Martienssen W., Spiller S., Holographic reconstruction without granulation, *Phys. Lett.*, 24A (2), 126—127 (1967).
11. Rosen L., Apparent rotation of hologram virtual images, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (2), 278—279 (1967).
12. Rosen L., Holograms of the aerial image of a lens, *Proc. IEEE*, 55 (1), 79—80 (1967).
13. Rosen L., The pseudoscopic inversion of holograms, *Proc. IEEE*, 55 (1), 118 (1967).
14. Stroke G. W., Funkhouser A., Leonard C., Indebetouw G., Zech R. G., Hand-held holography, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (1), 110 (1967).
15. Suzuki T., Hioki R., Frequency response of photographic emulsion in holography, *Jap. J. Appl. Phys.*, 5 (12), 1257—1259 (1966).
16. Vandewarker R., Snow K., Low spatial frequency holograms of solid objects, *Appl. Phys. Lett.*, 10 (2), 35 (1967).
17. Yoshihara K., Kitade A., Holographic spectra using a triangle path interferometer, *Jap. J. Appl. Phys.*, 6 (1), 116 (1967).
18. Complete holographic «camera» system, *Microwaves*, 6 (1), 62, 64 (1967).

#### Трёхмерная фотография

1. Friesem A. A., Fedorowicz R. J., Multicolor wavefront reconstruction, *Appl. Optics*, 6 (3), 529—538 (1967).
2. Greguss P., Ultrasonoholography, *Sci. Journ.*, 2 (4), 83 (1966).
3. Hildebrand B. P., Haines K. A., Multiple-wavelength and multiple-source holography applied to contour generation, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (2), 155—162 (1967).
4. Marom E., Color Imagery by wavefront reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (1), 101—102 (1967).
5. Pole R. V., 3-D imagery and holograms of objects illuminated in white light, *Appl. Phys. Lett.*, 10 (1), 20—22 (1967).
6. Stroke G. W., Westervelt F. H., Zech R. G., Holographic synthesis of computer-generated holograms, *Proc. IEEE*, 55 (1), 109—111 (1967).
7. Thompson B. J., Ward J. H., Particle sizing—the first direct use of holography, *Sci. Research*, 1 (11), 37 (1966).
8. Thompson B. J., Ward J. H., Zinky W. R., Application of hologram techniques for particle size analysis, *Appl. Optics*, 6 (3), 519—528 (1967).
9. Tricoles G., Rope E. L., Wavefront reconstruction with centimeter waves, *J. Opt. Soc. Am.*, 56 (4), 542 (1966).
10. Tricoles G., Rope E. L., Reconstructions of visible images from reduced-scale replicas of microwave holograms, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (1), 97—99 (1967).

11. Ward J. H., Thompson B. J., In-line hologram system for bubble-chamber recording, *J. Opt. Soc. Am.*, **57** (2), 275—276 (1967).
12. Waters J. P., Holographic image synthesis utilizing theoretical methods, *Appl. Phys. Lett.*, **9** (11), 405—407 (1966).
13. Fingerprints in 3-D, *Electronics*, **40** (6), 52 (1967).

#### Распознавание образов

1. Marchant M., Knight D., Multiple recording of holograms, *Optica Acta*, **14** (2), 199—201 (1967).
2. Marquet M., Bourgeon M. H., Saget J. C., Quelques applications de l'holographie, *Compt. Rend.*, **264** (1), 35—37 (1967).
3. Vienot J. Ch., Bulabois J., Differentiation spectrale et filtrage par hologramme de signaux optiques faiblement decorreles, *Optica Acta*, **14** (1), 57—70 (1967).

#### Интерференционная память

1. Никитюк Н. М., Свет, кванты и вычислительная техника, изд-во «Знание», 1967, 47 стр.
2. Brinton J. B., Jr., Remember with microwaves or lasers. The two technologies are vying for future computer-memory applications, *Microwaves*, **6** (1), 10, 12, 116 (1967).
3. Burckhardt C. B., Display of holograms in white light, *Bell Syst. Techn. J.*, **45** (107), 1841 (1966).
4. Is memory holographic?, *New Scientist*, (531), 221 (1967).

#### Интерферометрия

1. Wolfe R., Doherty E. T., Holographic interferometry of the distortion of thermoelectric cooling modules, *J. Appl. Phys.*, **37** (13), 5008—5009 (1966).

#### Голографический метод в интроскопии

1. Morgan S. P., Restoring atmospherically degraded images, *Nature*, **213** (5080), 465—469 (1967).

#### Голографическая микроскопия

1. Carter W. H., Dougall A. A., Field range and resolution in holography, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (12), 1754—1759 (1966).
2. De M., Seigny L., Three-beam holography, *Appl. Phys. Lett.*, **10** (3), 78—79 (1967).
3. Ellis G. W., Holomicrography: transformation of image during reconstruction a posteriori, *Science*, **154** (3754), 1195—1197 (1966).
4. Holograms to get IC picture, *Electronics*, **40** (7), 26 (1967).

#### Голографическое кино

1. Щекочихин В., Стереokino на принципах лазерной голографии, *Кино-механика*, **4**, 41—43 (1967).
2. Hologram magnification technique developed, *Laser Focus*, **2** (24), 4 (1966).
3. Ross R. M., Ring hologram for 3-D display-single concept motion picture, *IBM Techn. Discl. Bull.*, **9** (4), 390 (1966).

#### Оглавление

Предисловие редактора русского издания . . . . .	5
Предисловие к русскому изданию . . . . .	11
Предисловие . . . . .	13
<b>Гл. 1. Введение . . . . .</b>	<b>15</b>
1. Современная оптика — раздел радиоэлектроники . . . . .	15
2. Теория — основа радиооптики . . . . .	15
3. Математические методы современной оптики . . . . .	16
4. Краевая задача дифракции электромагнитных волн в оптике и некоторые ограничения операционного метода . . . . .	17
5. Решение краевой задачи на примере дифракционной решетки . . . . .	19
6. Дифракционная решетка как несущая, используемая для передачи информации в оптике (применительно к методу восстановления волнового фронта, или голографии) . . . . .	23
7. Оптика и теория связи. Исторический обзор . . . . .	29
<b>Гл. 2. Качественная теория дифракции . . . . .</b>	<b>33</b>
1. Две стороны дифракции света . . . . .	33
2. Распределение интенсивности в дифракционной картине и в спектре . . . . .	33
2.1. Решение электромагнитной краевой задачи . . . . .	33
2.2. Проблема образования изображения и принцип Гюйгенса . . . . .	38
3. Теория образования изображения и обработка оптических сигналов при помощи преобразования Фурье . . . . .	41
<b>Гл. 3. Образование изображения при некогерентном освещении . . . . .</b>	<b>43</b>
1. Изображение точечного источника . . . . .	43
2. Сложение света, падающего из нескольких точек источника на отдельную точку изображения . . . . .	45
3. Функция разброса . . . . .	46
4. Изображение протяженного источника при некогерентном освещении . . . . .	46
5. Метод расчета интенсивности изображения и передаточной функции . . . . .	47

6. Анализ процесса образования изображения в пространстве фурье-координат	49
7. Физический смысл функции разброса и анализ процесса образования изображения в плоскости фурье-координат	51
7.1. Точечный источник создает картину дифракции, совпадающую с функцией разброса	52
7.2. Синусональный по интенсивности предмет имеет функцию пространственно-частотного отклика, совпадающую с фурье-образом дифракционной картины	53
8. Использование фурье-координат для синтеза предметных функций	55
<b>Гл. 4. Когерентность света (экспериментальные характеристики)</b>	<b>57</b>
1. Введение	57
2. Определение когерентности	58
2.1. Корреляционный метод	58
2.2. Интерференционный анализ временной когерентности	59
а. Монохроматический свет (одночастотный источник)	59
б. Полихроматический свет (некогерентный источник)	60
2.3. Сравнение корреляционного и интерференционного методов	61
2.4. Узкий спектр с прямоугольным контуром	61
2.5. Фотоэлектрический интерферометр с подвижным зеркалом в случае гауссова контура спектральной линии	62
2.6. Физический смысл спектра мощности	64
а. Сигнал одной частоты	64
б. Сигнал многих частот	66
2.7. Гетеродинный анализ сигналов и биений	67
а. Биения когерентных волн. Доплеровское смещение частот света, отраженного от движущегося зеркала	67
б. Допуск на непараллельность двух интерферирующих волн в фотоэлектрических интерферометрах и в гетеродинных экспериментах	70
в. Фотоэлектрическое смещение некогерентного света	73
г. Фотоэлектрическое смещение когерентного света от лазера с некогерентным тепловым излучением	73
2.8. Пространственная когерентность	76
2.9. Частичная когерентность света от протяженного некогерентного источника	80
а. Двухщелевой интерферометр Юнга и звездный интерферометр Майкельсона	83
2.10. Корреляция интенсивности при частичной когерентности	85
2.11. Интерферометр интенсивности	86
а. Метод первый	87
б. Метод второй	88

<b>Гл. 5. Образование изображения при когерентном освещении</b>	<b>90</b>
1. Введение	90
2. Когерентное освещение	90
2.1. Пример 1: освещение точечным источником протяженной области	90
2.2. Пример 2: эквивалентность когерентного предмета и когерентного освещенного предмета	91
3. Образование изображения при когерентном освещении как процесс двойной дифракции	92
4. Критерии разрешения Аббе и Релея	94
5. Передаточная функция при когерентном и некогерентном освещении	97
6. Фазовый контраст	98
7. Оптическая фильтрация с помощью голограммы согласованного фильтра	100
7.1. Процедура изготовления согласованного фильтра и операция фильтрации	103
8. Оптическая обработка информации, корреляционный анализ и оптические корреляторы	107
8.1. Анализаторы спектра	107
8.2. Оптический кросс-коррелятор	110
9. Интерферометрия и оптический синтез изображения (сложение комплексных амплитуд) методом последовательного наложения голографических картин на одну голограмму	111
<b>Гл. 6. Теоретические и экспериментальные основы оптической голографии</b>	<b>119</b>
1. Экспериментальные основы	120
2. Теоретические основы	123
2.1. Процесс получения голограммы	129
2.2. Процесс восстановления изображения	131
2.3. Физические принципы голографии	133
2.4. Геометрическое увеличение	135
2.5. Разрешающая способность	138
3. Голография Фурье с высоким разрешением	140
3.1. Введение	140
3.2. Физические основы безлинзовой голографии Фурье высокого разрешения	144
3.3. Теория безлинзовой голографии Фурье	146
3.4. Сопоставление разрешающих способностей голографии Фурье и голографии Френеля	149

4. Компенсация протяженности источника в голографии . . . . .	152
4.1. Краткая теория . . . . .	153
4.2. Строгая теория . . . . .	158
4.3. Некоторые выводы . . . . .	161
5. Требование к когерентности в голографии . . . . .	162
6. Сводка основных результатов . . . . .	164
7. Электронный микроскоп и рентгеновский голографический микроскоп . . . . .	173
8. Заключение . . . . .	173
9. Голография при некогерентном освещении . . . . .	175
9.1. Голографическая спектроскопия Фурье при спектрально-некогерентном источнике . . . . .	176
9.2. Голография при пространственно-некогерентном освещении . . . . .	183
<b>Гл. 7. Преобразование Фурье. Операции свертки и корреляции. Спектральный анализ. Теория распределений, или обобщенных функций</b> . . . . .	<b>194</b>
1. Преобразование Фурье . . . . .	194
1.1. Некоторые свойства преобразования Фурье . . . . .	195
1.2. Линейность . . . . .	195
1.3. Теорема смещения . . . . .	195
1.4. Обратная теорема смещения . . . . .	196
1.5. Таблица свойств преобразования Фурье . . . . .	198
1.6. Двумерное и многомерное преобразования Фурье . . . . .	198
1.7. Изменение масштаба и преобразование Фурье . . . . .	199
1.8. Фурье-образ комплексно-сопряженной функции . . . . .	199
1.9. Тригонометрическая форма преобразования Фурье . . . . .	200
1.10. Свойства симметрии . . . . .	200
2. Свертка . . . . .	200
2.1. Определение свертки . . . . .	201
2.2. Кратные свертки и свертки нескольких функций . . . . .	201
2.3. Теорема свертки (фурье-образ свертки) . . . . .	202
3. Функция корреляции . . . . .	205
3.1. Определение функции корреляции . . . . .	205
3.2. Преобразование функции корреляции . . . . .	205
4. Распределения, или обобщенные функции . . . . .	208
4.1. Определения . . . . .	208
4.2. Импульсный отклик линейной системы . . . . .	209
4.3. Отклик линейной системы на произвольную входную функцию . . . . .	210
5. Спектральный анализ . . . . .	211
<b>Д. ж. Строук, А. Лабейри. Восстановление голографических изображений в белом свете с использованием дифракционного эффекта Липмана — Брэгга (дополнение автора к русскому изданию)</b> . . . . .	<b>213</b>

<b>Габор Д. Микроскопия на основе метода восстановления волнового фронта, I</b> . . . . .	<b>218</b>
Введение . . . . .	218
Принцип восстановления волнового фронта . . . . .	222
Освещение сферической волной . . . . .	226
Восстановление при освещении точечным источником . . . . .	231
Побочная часть волны при восстановлении с помощью точечного источника . . . . .	234
Улучшение разделения изображений с помощью масок и других методов . . . . .	243
Освещающие волны с астигматизмом и сферической аберрацией . . . . .	245
Восстановление при наличии сферической аберрации и астигматизма . . . . .	251
Критерии когерентности . . . . .	254
Восстановление в оптическом диапазоне . . . . .	257
Экспериментальная проверка . . . . .	262
Заключение . . . . .	269
<b>Габор Д. Микроскопия на основе метода восстановления волнового фронта, II</b> . . . . .	<b>270</b>
1. Введение . . . . .	270
2. Принцип восстановления волнового фронта . . . . .	271
3. Теория образования изображения при использовании метода пропускания . . . . .	277
4. Восстановление . . . . .	286
5. Критерии когерентности . . . . .	289
6. Условия, необходимые для получения голограмм . . . . .	296
7. Восстановление по методу темного поля . . . . .	298
<b>Применения голографии (обзор)</b> . . . . .	<b>302</b>
1. Введение . . . . .	302
2. Трехмерная фотография . . . . .	307
3. Распознавание образов . . . . .	314
4. Интерференционная память . . . . .	316
5. Интерферометрия . . . . .	319
6. Голография в технологии . . . . .	323
7. Голографический метод в микроскопии . . . . .	325
8. Голографическая микроскопия . . . . .	330
9. Голографическое кино . . . . .	333
10. Голографическое телевидение . . . . .	333
11. Голографическая оптика . . . . .	335