

## *Системы представления перспективы*

Во время эпохи Возрождения был разработан простой и весьма эффективный способ изображения объемного пространства, опирающийся на геометрию и учитывающей специфику восприятия человека. Способ сводится к проектированию с помощью прямых линий. Человеческий глаз рассматривался как центр проектирования, а мысленная прямая, соединяющая глаз и изображаемую точку (луч зрения), служила для отыскания точки картинной плоскости, являющейся ее изображением. Такой метод изображения иллюстрируется известной гравюрой Дюрера.



Альбрехт Дюрер. Рисование по сетке. около 1525 г.

Точка картинной плоскости находилась как точка пересечения луча зрения с плоскостью картины. Этот метод стали называть *системой научной перспективы*.

---

Система *научной перспективы*, основанная на очевидных правилах геометрии, при определенных условиях дает результаты не согласующиеся с естественным зрительным восприятием.

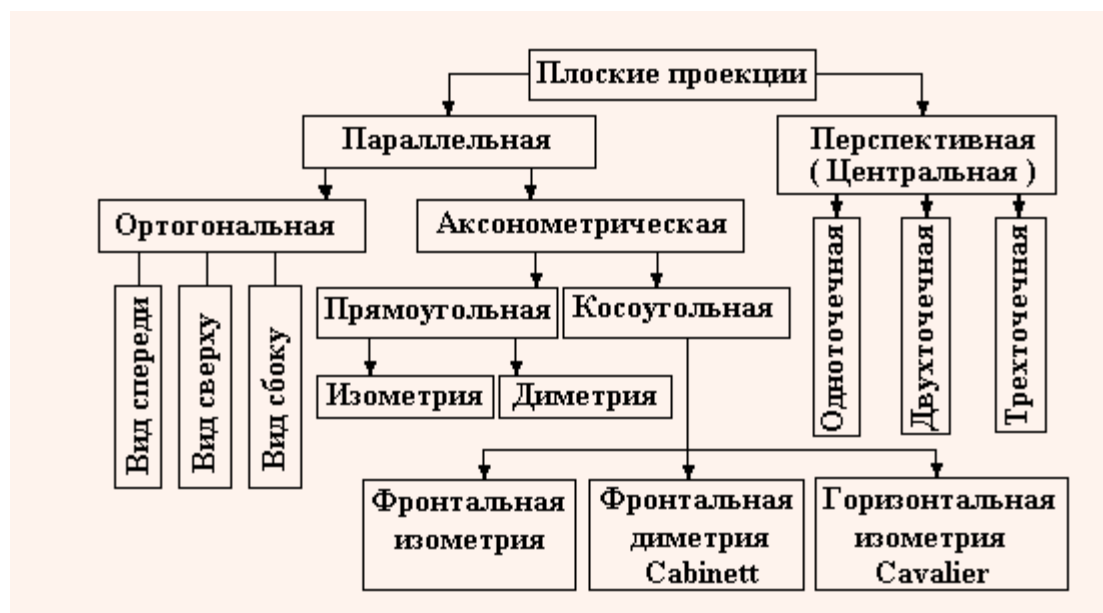
Человек видит не глазом, а мозгом. Точное следование естественному зрительному восприятию возможно в изобразительном искусстве только частично. Работу, не менее важную, чем глаз, совершает мозг. Если рассматривать только вопросы геометрии, то мозг как бы растягивает и сжимает изображение, возникшее на сетчатке глаза. Такие растяжения (и реже сжатия) имеют различную интенсивность для разных частей, что приводит к деформации изображения.

Системы, основанные на попытках интерпретации перспективы мозгом носят название *художественной перспективы*. Это название возникло потому, что такие системы перспективы, использованы при создании картин большинством известных художников.

---

## Плоские проекции

Ниже приведена классификация плоских проекций.



Плоские проекции можно подразделить на *центральные (перспективные)* и *параллельные*. Если расстояние между центром проекции и проекционной плоскостью конечно, то это центральная проекция, если бесконечная, то параллельная проекция.

---

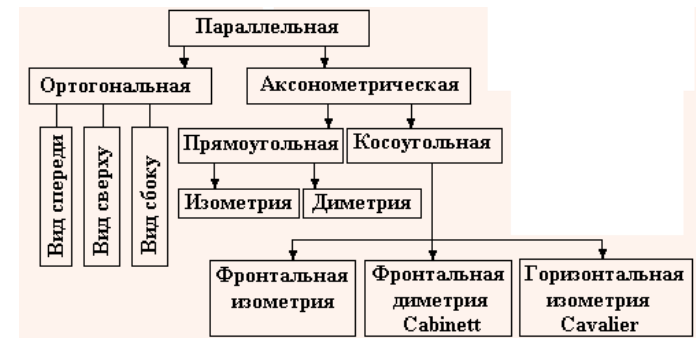
***Центральная*** проекция порождает визуальный эффект, аналогичный зрительной системе человека, и поэтому используется в тех случаях, когда желательно достичь определенной степени реалистичности. Однако точные формы объектов и размеры искажены.

***Параллельная*** проекция порождает менее реалистичные изображения. Однако фиксируются истинные размеры, параллельные прямые остаются параллельными. Поэтому такие виды проекций используются в техническом черчении.

---

# Параллельные проекции

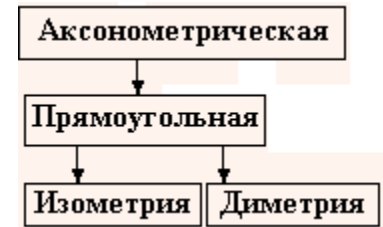
**Параллельные** проекции можно классифицировать следующим образом.



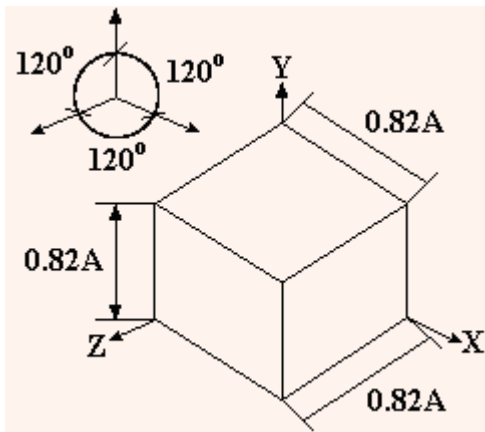
В **ортографических (ортогональных)** параллельных проекциях направление проецирования и нормаль к проекционной плоскости совпадают. Наиболее широко используемыми видами ортографических проекций являются вид спереди, вид сверху, вид сбоку. В этом случае картинная плоскость перпендикулярна главным координатным осям.

В случае **аксоMETрической** ортографической проекции используются проекционные плоскости не перпендикулярные главным координатным осям. Поэтому на них отображаются сразу несколько сторон объекта. В отличие от центральной укорачивание постоянно. Сохраняется параллельность прямых, а углы изменяются.

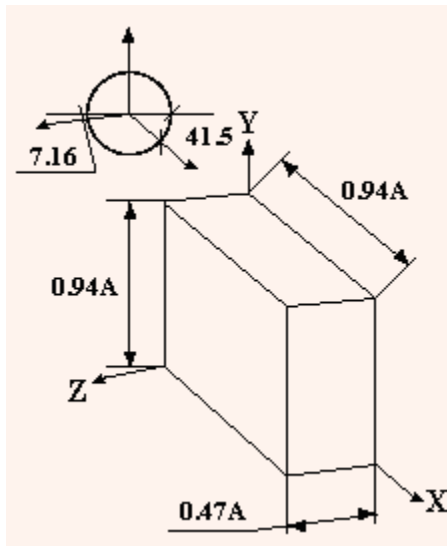
Широко используемым случаем *аксонометрической* проекции является *изометрическая*.



В этом случае нормаль к проекционной плоскости составляет равные углы с каждой из главных координатных осей. Изометрическая проекция обладает следующими свойствами: все три главных оси укорачиваются одинаково. Поэтому можно проводить измерения вдоль направлений осей с одинаковым масштабом (изо – "равно" метрия – "измерять"). Кроме того, главные координатные оси проецируются так, что их проекции составляют равные углы друг с другом.

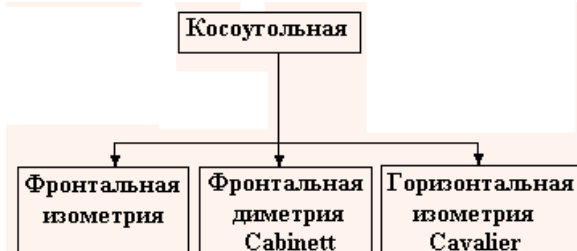


На рис. приведена *аксонометрическая прямоугольная изометрическая* проекция куба со стороной  $A$ . При этой проекции плоскость проецирования наклонена ко всем главным координатным осям под одинаковым углом. Стандартом регламентируется коэффициент сжатия, равный 0.82, а также расположение и взаимные углы главных координатных осей, равные  $120^\circ$  как это показано в левом верхнем углу рис. Обычно сжатие не делается.

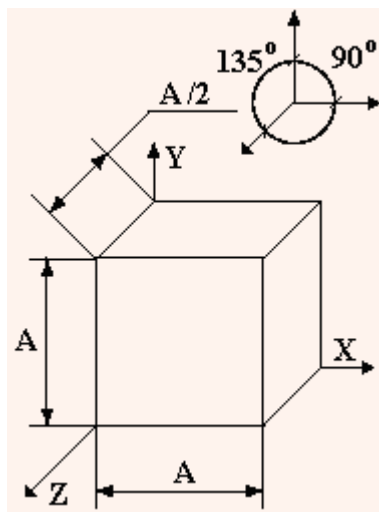


При *диметрической* проекции две из трех осей сокращены одинаково, т.е. из трех углов между нормалью к плоскости проекции и главными координатными осями два угла одинаковы. На рис. приведена *аксонометрическая прямоугольная диметрическая* проекция куба со стороной  $A$ . Там же показаны регламентируемые расположение осей и коэффициенты сжатия. Обычно вместо коэффициента сжатия  $0.94$  используется  $1$ , а вместо  $0.47$  -  $0.5$ .

**Косоугольные** проекции сочетают свойства ортографических проекций (вид спереди, сверху и сбоку) со свойствами аксометрии. В этом случае проекционная плоскость перпендикулярна главной координатной оси.

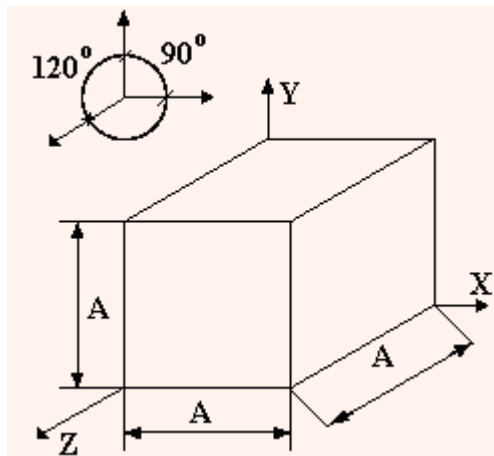


Наиболее часто используется два вида косоугольной проекции - фронтальная (косоугольная) диметрия (проекция **Cabinett** - кабине) и горизонтальная (косоугольная) изометрия (проекция **Cavalier** - кавалье) или военная перспектива.



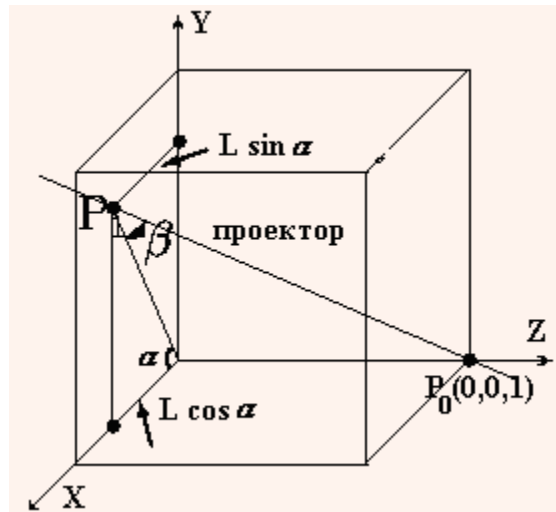
Проекция **кабине (аксонометрическая косоугольная фронтальная диметрическая)** – имеет направление проецирования, которое составляет с проекционной плоскостью угол равный  $atan(1/2)$ . Отрезки перпендикулярные проекционной плоскости составляют  $1/2$  их действительной длины. При использовании правосторонней системы координат экрана плоскость проецирования перпендикулярна оси  $Z$ . Ось  $X$  направлена горизонтально вправо. Ось  $Z$  изображается по углом в  $45^\circ$  относительно горизонтального направления. Допускается угол наклона в  $30^\circ$  и  $60^\circ$ .





В проекции *кавалье* (*аксонометрической косоугольной горизонтальной изометрии*) угол проецирования  $45$  градусов. В результате укорачивание отсутствует. Плоскость проецирования перпендикулярна оси  $Y$  а укорачивания по всем осям одинаковы и равны  $1$ . Угол поворота изображения оси  $Z$  относительно горизонтального направления составляет  $30^\circ$ . Допускается  $45$  и  $60^\circ$  при сохранении угла  $90^\circ$  между осями  $X$  и  $Y$ .

Рассмотрим косоугольное проецирование, при котором плоскость проецирования перпендикулярна главной оси, а проекторы составляют с плоскостью проецирования угол не равный  $90^\circ$ . Матрица для этого преобразования может быть найдена исходя из значений угла проецирования и координат преобразованной точки. На рис. показана косоугольная параллельная проекция единичного куба



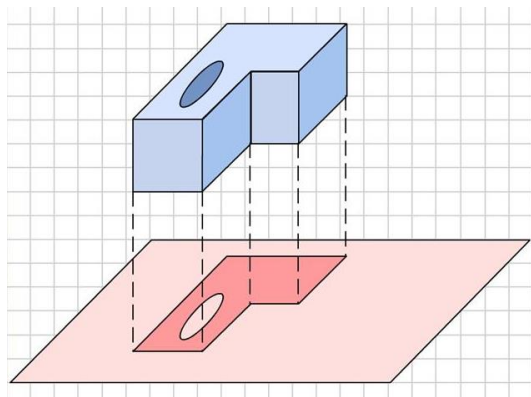
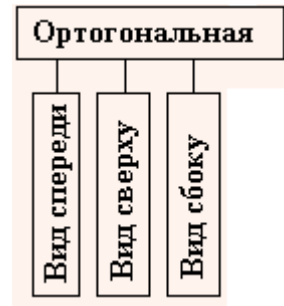
Различные варианты параллельных проекций формируются из полученной подстановкой значений  $L$  и углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для проекции **Кабине**  $L=1/2$ ,  $\beta=63,4^\circ$ . Угол  $\alpha$ , равен  $45^\circ$  и допускается  $30$  и  $60^\circ$ , как это сказано выше.

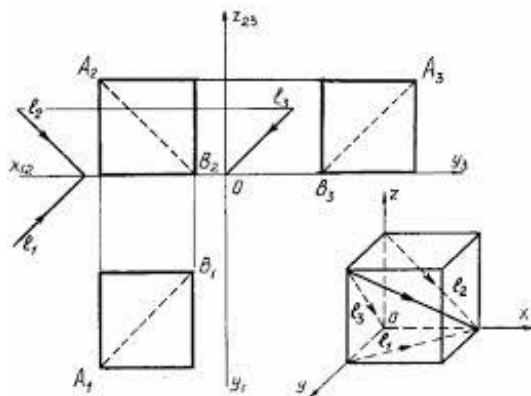
Для проекции **Кавалье**  $L=1$ ,  $\beta=45^\circ$  Угол  $\alpha$ , равен  $30^\circ$  и допускается  $45$  и  $60^\circ$

Косоугольные проекции более реалистичны.

Для *ортографической* проекции  $L=0$ ,  $b=90^\circ$ , поэтому ортогональная проекция частный случай косоугольной.



Ортогональной проекцией точки на данную плоскость называется проекция точки на эту плоскость параллельно прямой, перпендикулярной этой плоскости.



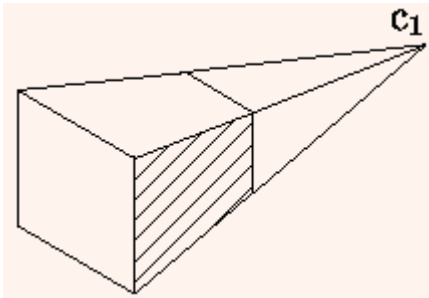
Ортогональная проекция часто используется для отображения пространственных тел на чертежах.

## *Центральная (перспективная) проекция*

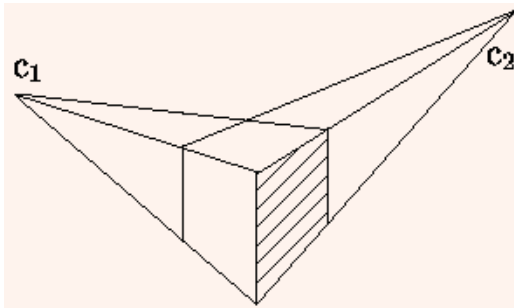
Центральные проекции любой совокупности параллельных прямых, которые не параллельны проекционной плоскости, будут сходиться в точке схода. Существует, конечно, бесконечное число точек схода. Если совокупность прямых параллельно одной из главных координатных осей, то их точка схода называется главной точкой схода. Таких точек схода только три.



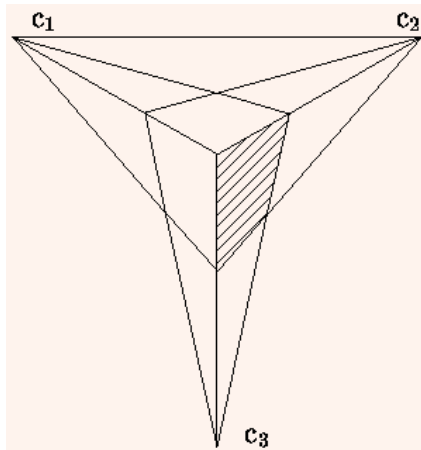
Центральные проекции классифицируются от числа главных точек схода, а следовательно от числа координатных осей, которые пересекает проекционная плоскость.



Если проекционная плоскость пересекает только ось  $z$ , т.е. перпендикулярна ей, будет только **одна точка схода**, поскольку прямые параллельные как  $y$ , так и  $x$  – осям, параллельны также и проекционной плоскости и поэтому не имеют точек схода.



**Двухточечная** центральная проекция широко применяется в архитектурном, инженерном и промышленном проектировании, в которых вертикальные прямые не сходятся.



**Трехточечные** проекции практически не используются, потому что их трудно конструировать, и потому что они добавляют мало нового с точки зрения реалистичности.

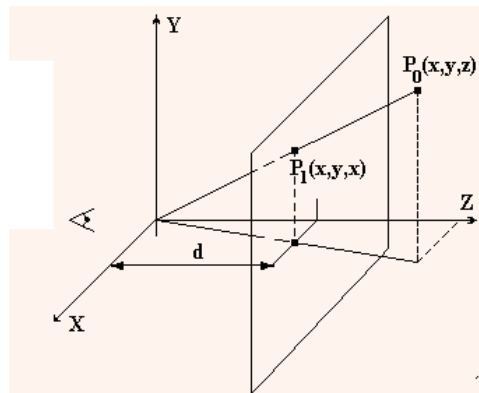
## *Математическое описание плоских геометрических проекций*

Проекция отрезка является отрезком, так что для изображения, заданного многоугольником, достаточно спроектировать только конечные точки.

В этом случае каждую из проекций можно описать матрицей размером  $4 \times 4$  и появляется возможность объединить матрицу проецирования с матрицей геометрических преобразований.

Для *центральной проекции* преобразование можно представить в виде

$$M_{\text{цент}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Если координаты точки  $P=[x,y,z,1]$ , то новые координаты

$$[X, Y, Z, W] = P \cdot M_{\text{цент}} = [x, y, z, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x, y, z, \frac{z}{d}]$$

Для перехода к трехмерным измерениям необходимо поделить на  $W$ .

$$[x_p, y_p, z_p, 1] = \left[ \frac{x}{z/d}, \frac{y}{z/d}, d, 1 \right]$$

При другом представлении *центрального проектирования*, проекционная плоскость совмещается с плоскостью  $z=0$ , а центр проекции в точке  $z=-d$ . Эту матрицу можно получить из  $M_{\text{цент}}$  переносом

$$M'_{\text{цент}} = T(0,0,d) M_{\text{цент}} T(0,0,-d)$$

$$M'_{\text{цент}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для одной главной оси схода.

$$M'_{\text{цент}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1/b \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В общем случае для левосторонней системы координат

$$M'_{\text{цент}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a \\ 0 & 1 & 0 & -1/b \\ 0 & 0 & 0 & -1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для правосторонней



*Ортографическое* проецирование на плоскость  $z=0$  очевидно

$$x_p=x \quad y_p=y \quad z_p=0$$

$$M_{\text{орт}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Эта проекция описывается матрицей

Для *косоугольной* проекции матрица может быть записана исходя из значений  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{L}$

$$M_{\text{кос}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l \cos \alpha & l \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x, y, z, 1] \cdot M_{\text{кос}} = [x + z \cdot l \cdot \cos \alpha, y + z \cdot l \cdot \sin \alpha, 0, 1]$$