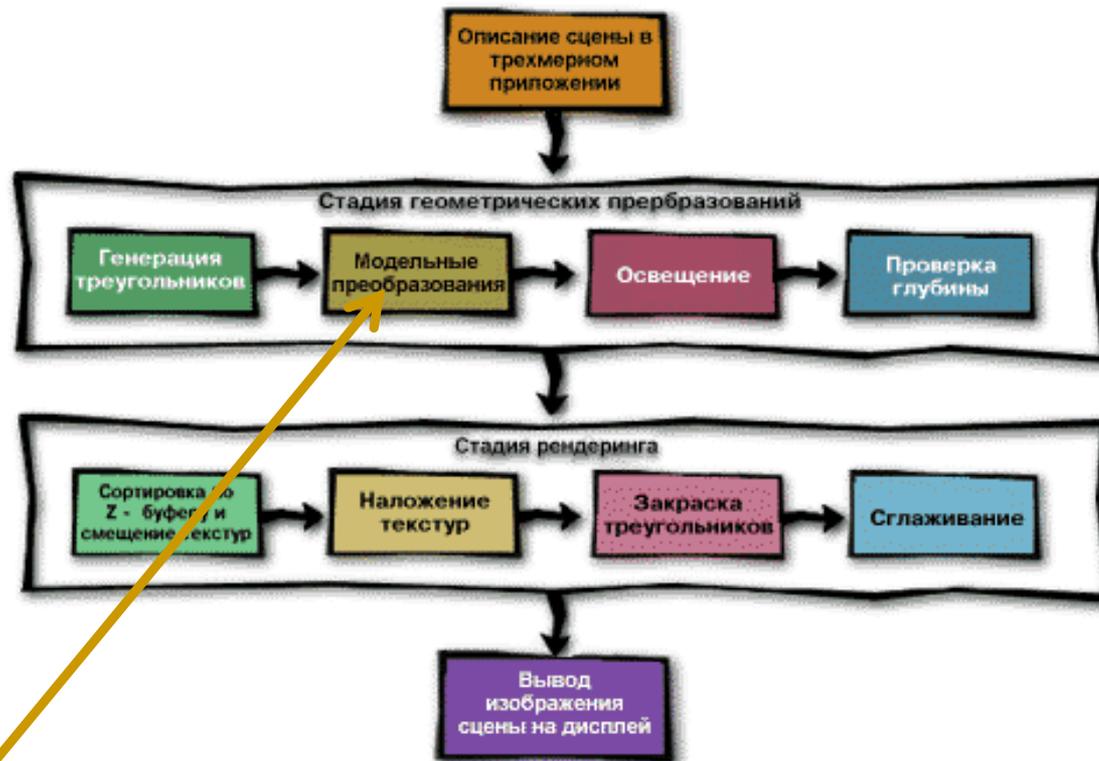


# Геометрические преобразования



На втором этапе выполняются модельные геометрические преобразования, такие как *перенос, вращение и изменение масштаба*.

Преобразования позволяют перемещать объекты в сцене

# *Элементарные геометрические преобразования*

Рассмотрим элементарные геометрические преобразования (двухмерные и трехмерные), применяемые в машинной графике - сдвиг, поворот, масштабирование.

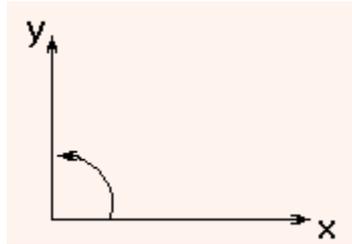
Сдвиг

$$x' = x + Dx \quad y' = y + Dy$$

Масштабирование

$$x' = x \cdot S_x \quad y' = y \cdot S_y$$

Поворот



$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$
$$y' = x \cdot \sin\theta - y \cdot \cos\theta$$

*Эти преобразования могут быть представлены в виде матричных операций.*

## СДВИГ

$$P=[x, y] \quad P'=[x', y'] \quad T=[D_x, D_y] \quad [x', y']=[x, y] + [D_x, D_y]$$

В векторном виде  $P' = P + T$

## Масштабирование

$$S = \begin{vmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{vmatrix}$$

$$P' = P \cdot S$$

Если  $S_x = S_y$  то имеет место равномерное масштабирование относительно точки начала координат. Если значения элементов не равны, то треугольник искажается.

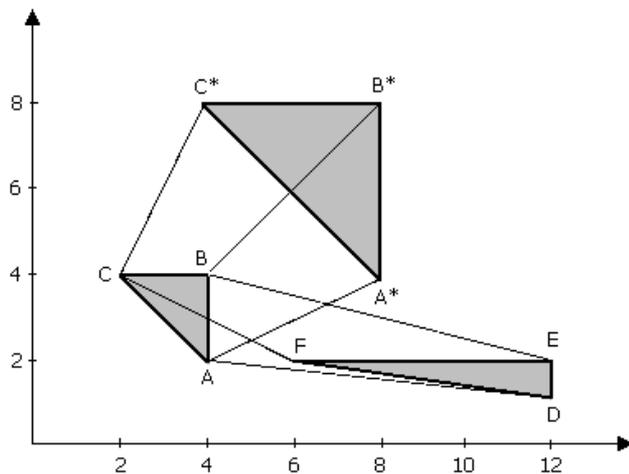


Рис. 1.5. Пропорциональное и непропорциональное масштабирование (искажение)

Треугольник  $ABC$ , преобразованный с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

переходит в пропорционально увеличенный треугольник  $A^*B^*C^*$ .

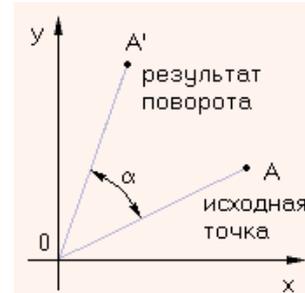
Тот же треугольник, но преобразованный с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

переходит в треугольник  $DEF$ , имеющий искажение, вызванное разными коэффициентами масштабирования.

## Поворот (относительно начала координат)

$$[x' \ y'] = [x \ y] \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$P' = P \cdot R$$

Рассмотрим треугольник ABC и с помощью матричного преобразования повернем его на  $90^\circ$  против часовой стрелки относительно начала координат

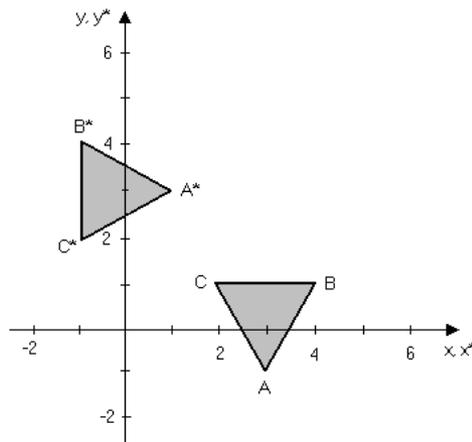


Рис. 1.2. Поворот

Если использовать матрицу (3 x 2), состоящую из координат x и y вершин треугольника, то можно записать

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что для масштабирования и поворота производится умножение на матрицу, а для сдвига – сложение с вектором. Это неудобно.

Желательно объединить все три преобразования в одно.

Это можно сделать, представив точки в **однородных координатах**. Однородные координаты были введены в аналитической геометрии.

Точка  $P(x,y)$  записывается как  $P(Wx, Wy, W)$  для любого масштабного множителя  $W$  не равного нулю.

Обратный переход от однородных к декартовым координатам  
 $x=X/W$   $y=Y/W$

Теперь все три преобразования можно представить в виде умножения однородных координат точки на матрицу 3x3

*Сдвиг*

$$[x' y' 1] = [x, y, 1] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{vmatrix}$$

*Масштабирование*

$$[x' y' 1] = [x, y, 1] \begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

*Поворот*

$$[x' y' 1] = [x, y, 1] \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В случае отрицательных углов можно воспользоваться тождествами

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$

## *Композиция двумерных преобразований*

Более эффективно к точке применить одно совмещенное преобразование (одно умножение на матрицу), чем ряд преобразований друг за другом.

Рассмотрим, например, поворот объекта относительно некоторой произвольной точки  $P(x_1, y_1)$ . Для этого необходимо выполнить 3 элементарных преобразования:

- Перенос, при котором точка  $P(x_1, y_1)$  помещается в начало координат;
- Поворот;
- Перенос в первоначальное положение.

Результирующее преобразование имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 - y_1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{cccc|c} | & \cos\theta & & \sin\theta & 0 & | \\ | & -\sin\theta & & \cos\theta & 0 & | \\ |x_1(1-\cos\theta)+y_1 \sin\theta & & y_1(1-\cos\theta)+x_1 \sin\theta & & 1 & | \end{array}$$

---

Используя аналогичный подход, можно промасштабировать объект относительно произвольной точки:

- Перенос в начало координат;
- Масштабирование;
- Перенос в первоначальное положение.

Подобным образом можно делать более сложные операции: например - необходимо промасштабировать, повернуть и расположить в заданном месте домик.

---

## Вопросы эффективности

Композиция наиболее общего вида из операций R, S и T имеет вид

$$\begin{array}{|ccc|} \hline r_{11} & r_{12} & 0 \\ \hline r_{21} & r_{22} & 0 \\ \hline t_x & t_y & 1 \\ \hline \end{array}$$

Верхняя часть матрицы  $M$  размером  $2 \times 2$  является объединением матрицы поворота и масштабирования, в то время как  $t_x$  и  $t_y$  описывают суммарный перенос.

Для вычисления произведения двух матриц размером  $3 \times 3$  требуется 9 операций умножения и 6 операций сложения. Однако, структура последнего столбца позволяет упростить выполняющиеся действия:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot r_{11} + y \cdot r_{21} + t_x \\ y' &= x \cdot r_{12} + y \cdot r_{22} + t_y \end{aligned}$$

Это существенно упрощает процесс, поскольку остается 4 операции умножения и 4 операции сложения.

# Матричное представление трехмерных операций

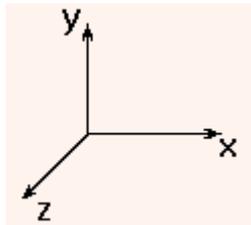
## Трехмерный сдвиг

$$T(Dx, Dy, Dz) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 1 \end{pmatrix}$$

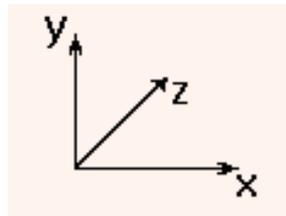
## Трехмерное масштабирование

$$S(Sx, Sy, Sz) = \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Поворот



Правосторонняя



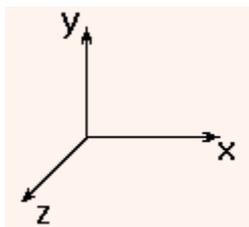
Левосторонняя

В правосторонней системе координат, если смотреть со стороны положительного направления оси вокруг которой происходит поворот, то поворот *против часовой стрелки* переводит одну положительную ось в другую. Поэтому поворот против часовой стрелки в таких системах считается положительным.

В левосторонней системе координат положительными будут повороты *по часовой стрелке*, если смотреть с положительного конца полуоси.

Ось вращения	Положительное направление
X	от Y к Z
Y	от Z к X
Z	от X к Y

В трехмерном пространстве возможен поворот вокруг каждой оси



**Поворот вокруг оси Z:**

$$R_z(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**Поворот вокруг оси X:**

$$R_x(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**Поворот вокруг оси Y:**

$$R_y(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

---

Поскольку поворот осуществляется относительно нуля, то для поворота относительно произвольной точки необходимо произвести:

- 1. Перенос в начало координат;*
- 2. Поворот;*
- 3. Перенос в первоначальное положение.*

## Вопросы эффективности

Результатом произвольной последовательности поворота, масштабирования и переноса является матрица всегда имеющая вид:

$$M = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразования, в результате которых правый столбец всегда имеет одинаковый вид  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ , называются **аффинными** преобразованиями. Произведение двух аффинных преобразований также является аффинным.

Сдвиг, поворот, масштабирование - являются аффинными преобразованиями.

Поскольку правый столбец всегда имеет одинаковый вид  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ , вычисления выгодно производить явно

$$[x'y'z'] = [xyz] \cdot R + T,$$

где  $R$  - подматрица  $3 \times 3$ ,  $T$  - вектор из 3-х элементов.

Кроме того, координату  $z$  в большинстве случаев вычислять не нужно. В результате

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot r_{11} + y \cdot r_{21} + z \cdot r_{31} + t_x \\ y' &= x \cdot r_{12} + y \cdot r_{22} + z \cdot r_{32} + t_y \end{aligned}$$

## Обратные преобразования

Для каждого преобразования имеется преобразование, которое восстановит исходные позиции точек. Если какое-либо преобразование соответствует матрице  $A$ , то обратное преобразование соответствует матрице обратной матрице  $A^{-1}$ .

**Для переноса** - обратная матрица такая же, как матрица  $T$  переноса с обратными знаками переноса  $-D_x$ ,  $-D_y$ ,  $-D_z$ .

**Для масштабирования** - обратная  $S$  с элементами  $1/S_x$ ,  $1/S_y$ ,  $1/S_z$ .

**Для поворота** - для каждой из трех матриц поворота такая же с отрицательным углом. (Проверить самостоятельно).

---

Стадия геометрических преобразований требует выполнения большого объема вычислительных операций, включая операции с плавающей точкой.

Многие существующие приложения для обработки трехмерной графики перекладывают расчеты по геометрии сцены на графический процессор процессор.

---