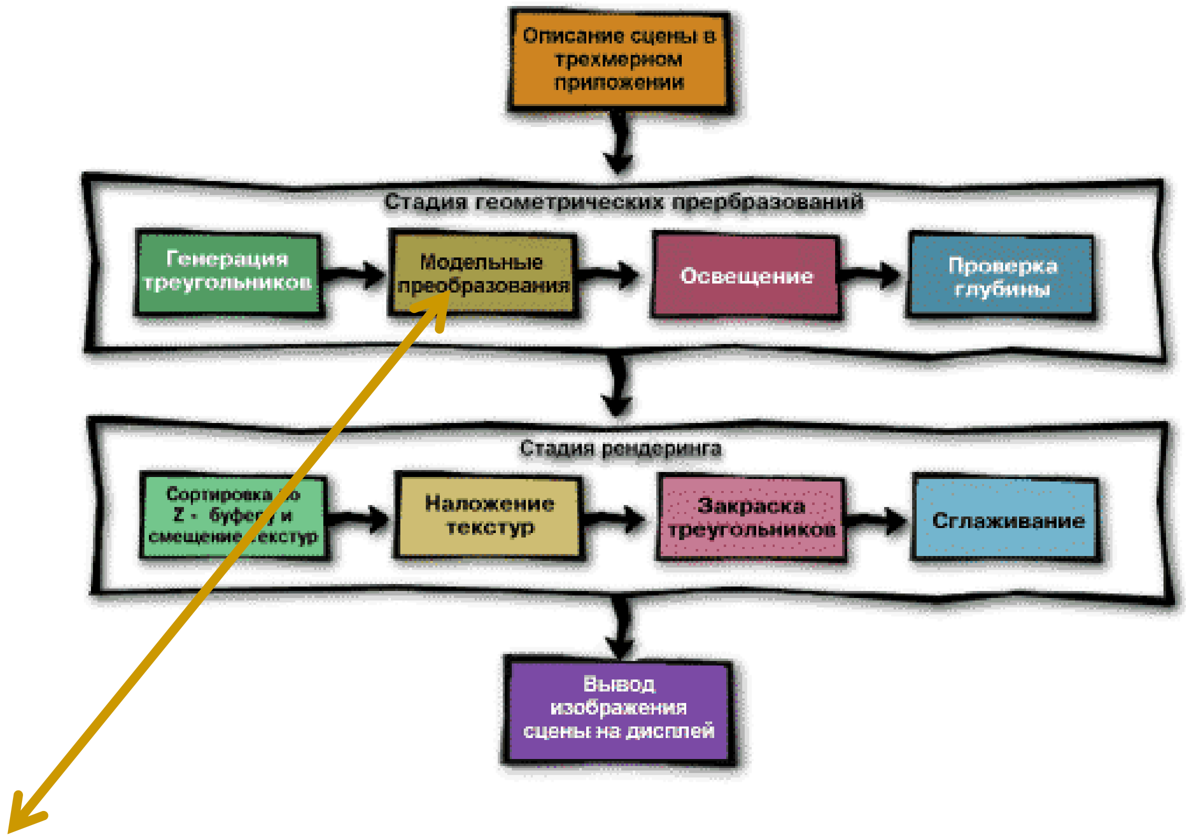
Геометрические преобразования



На втором этапе выполняются модельные геометрические преобразования, такие как ***перенос, вращение и изменение масштаба***.

Преобразования позволяют перемещать объекты в сцене

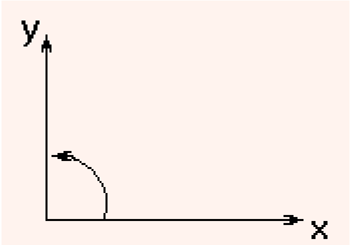
Элементарные геометрические преобразования

Рассмотрим элементарные геометрические преобразования (двухмерные и трехмерные), применяемые в машинной графике - сдвиг, поворот, масштабирование.

Сдвиг $x' = x + Dx$ $y' = y + Dy$

Масштабирование $x' = x \cdot S_x$ $y' = y \cdot S_y$

Поворот



$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$

$y' = x \cdot \sin\theta - y \cdot \cos\theta$

Эти преобразования могут быть представлены в виде матричных операций.

Сдвиг

P=[x, y]   P'=[x', y']   T=[Dx, Dy]   [x', y']=[x, y] + [Dx, Dy]

В векторном виде   ***P' =P+T***

Масштабирование

$$S = \begin{vmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{vmatrix}$$

$$P' = P \cdot S$$

Если $S_x = S_y$ то имеет место равномерное масштабирование относительно точки начала координат. Если значения элементов не равны, то треугольник искажается.

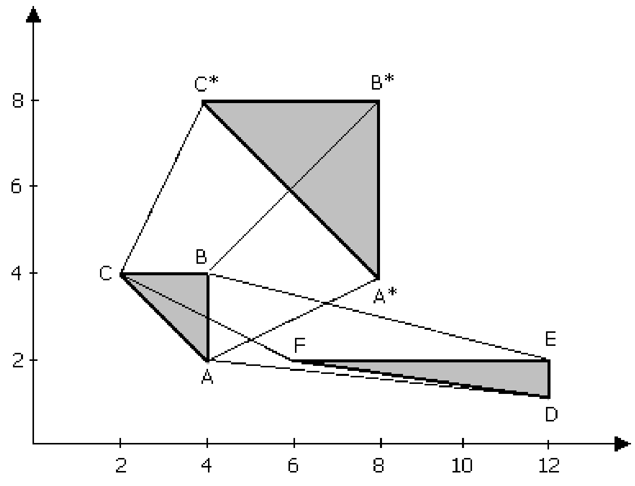


Рис. 1.5. Пропорциональное и непропорциональное масштабирование (искажение)

Треугольник ABC, преобразованный с помощью матрицы

$$\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

переходит в пропорционально увеличенный треугольник A*B*C*.

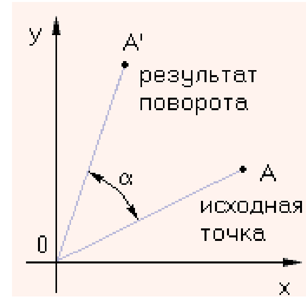
Тот же треугольник, но преобразованный с помощью матрицы

$$\begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

переходит в треугольник DEF, имеющий искажение, вызванное разными коэффициентами масштабирования.

Поворот (относительно начала координат)

$$[x'\ y'] = [x\ y] \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ & \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$



$$\boldsymbol{P' = P \cdot R}$$

Рассмотрим треугольник ABC и с помощью матричного преобразования повернем его на 90° против часовой стрелки относительно начала координат

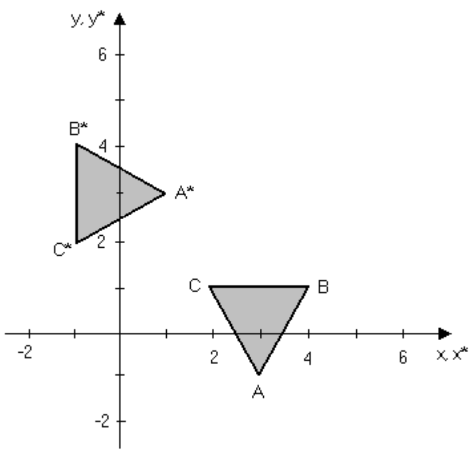


Рис. 1.2. Поворот

Если использовать матрицу (3 x 2), состоящую из координат x и y вершин треугольника, то можно записать

$$\begin{matrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Видно, что для масштабирования и поворота производится умножение на матрицу, а для сдвига – сложение с вектором. Это неудобно.

Желательно объединить все три преобразования в одно.

Это можно сделать, представив точки в ***однородных координатах***. Однородные координаты были введены в аналитической геометрии.

Точка $P(x,y)$ записывается как $P(Wx, Wy, W)$ для любого масштабного множителя W не равного нулю.

Обратный переход от однородных к декартовым координатам $x=X/W$ $y=Y/W$

Теперь все три преобразования можно представить в виде умножения однородных координат точки на матрицу 3x3

Сдвиг

$$[x' \; y' \; 1] = [x, y, 1] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{vmatrix}$$

Масштабирование

$$[x' \; y' \; 1] = [x, y, 1] \begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поворот

$$[x' \; y' \; 1] = [x, y, 1] \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В случае отрицательных углов можно воспользоваться тождествами

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

Композиция двумерных преобразований

Более эффективно к точке применить одно совмещенное преобразование (одно умножение на матрицу), чем ряд преобразований друг за другом.

Рассмотрим, например, поворот объекта относительно некоторой произвольной точки P(x1,y1). Для этого необходимо выполнить 3 элементарных преобразования:

- Перенос, при котором точка P(x1,y1) помещается в начало координат;
- Поворот;
- Перенос в первоначальное положение.

Результирующее преобразование имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x1 & -y1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x1 & y1 & 1 \end{vmatrix} =$$

```
|       cosθ                        sinθ      0 |
|      -sinθ                        cosθ      0 |
|x1(1-cosθ)+y1 sinθ  y1(1-cosθ)+x1 sinθ 1 |
```

Используя аналогичный подход, можно промасштабировать объект относительно произвольной точки:

- Перенос в начало координат;
- Масштабирование;
- Перенос в первоначальное положение.

Подобным образом можно делать более сложные операции: например - необходимо промасштабировать, повернуть и расположить в заданном месте домик.

Вопросы эффективности

Композиция наиболее общего вида из операций R, S и T имеет вид

```
|r11 r12 0 |
|r21 r22 0 |
|tx  ty  1 |
```

Верхняя часть матрицы *M* размером 2x2 является объединением матрицы поворота и масштабирования, в то время как t_x и t_y описывают суммарный перенос.

Для вычисления произведения двух матриц размером 3x3 требуется 9 операций умножения и 6 операций сложения. Однако, структура последнего столбца позволяет упростить выполняющиеся действия:

$$x' = x \cdot r_{11} + y \cdot r_{21} + t_x$$
$$y' = x \cdot r_{12} + y \cdot r_{22} + t_y$$

Это существенно упрощает процесс, поскольку остается 4 операции умножения и 4 операции сложения.

Матричное представление трехмерных операций

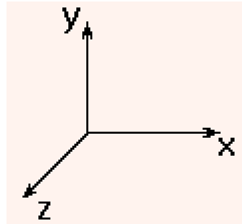
Трехмерный сдвиг

$$T(Dx,Dy,Dz) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 1 \end{vmatrix}$$

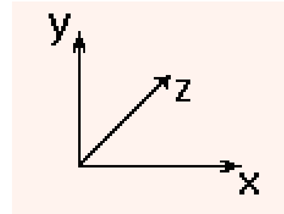
Трехмерное масштабирование

$$S(S_x,S_y,S_z) = \begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поворот



Правосторонняя



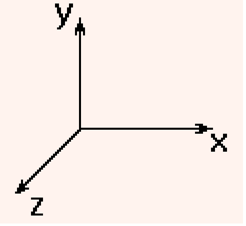
Левосторонняя

В правосторонней системе координат, если смотреть со стороны положительного направления оси вокруг которой происходит поворот, то поворот *против часовой стрелки* переводит одну положительную ось в другую. Поэтому поворот против часовой стрелки в таких системах считается положительным.

В левосторонней системе координат положительными будут повороты *по часовой стрелке*, если смотреть с положительного конца полуоси.

Ось вращения	Положительное направление
X Y Z	от Y к Z от Z к X от X к У

В трехмерном пространстве возможен поворот вокруг каждой оси



Поворот вокруг оси Z:

$$Rz(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поворот вокруг оси X:

$$Rx(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поворот вокруг оси Y:

$$Ry(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поскольку поворот осуществляется относительно нуля, то для поворота относительно произвольной точки необходимо произвести:

1. *Перенос в начало координат;*
2. *Поворот;*
3. *Перенос в первоначальное положение.*

Вопросы эффективности

Результатом произвольной последовательности поворота, масштабирования и переноса является матрица всегда имеющая вид:

$$M = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{vmatrix}$$

Преобразования, в результате которых правый столбец всегда имеет одинаковый вид [0 0 0 1], называются **аффинными** преобразованиями. Произведение двух аффинных преобразований также является аффинным.

Сдвиг, поворот, масштабирование - являются аффинными преобразованиями.

Поскольку правый столбец всегда имеет одинаковый вид [0 0 0 1], вычисления выгодно производить явно

$$[x'y'z'] = [xyz] \cdot R + T,$$

где R - подматрица 3x3, T - вектор из 3-х элементов.

Кроме того, координату z в большинстве случаев вычислять не нужно. В результате

$$x' = x \cdot r_{11} + y \cdot r_{21} + z \cdot r_{31} + t_x$$
$$y' = x \cdot r_{12} + y \cdot r_{22} + z \cdot r_{32} + t_y$$

Обратные преобразования

Для каждого преобразования имеется преобразование, которое восстановит исходные позиции точек. Если какое-либо преобразование соответствует матрице A, то обратное преобразование соответствует матрице обратной матрице A^{-1}.

Для переноса - обратная матрица такая же, как матрица T переноса с обратными знаками переноса -Dx, -Dy, -Dz.

Для масштабирования - обратная S с элементами $1/S_x$, $1/S_y$, $1/S_z$.

Для поворота - для каждой из трех матриц поворота такая же с отрицательным углом. (Проверить самостоятельно).

Стадия геометрических преобразований требует выполнения большого объема вычислительных операций, включая операции с плавающей точкой.

Многие существующие приложения для обработки трехмерной графики перекладывают расчеты по геометрии сцены на графический процессор процессор.