

Построение кривых

Определения:

Базовые (опорные точки) – набор точек, на основе которых выполняется построение кривой

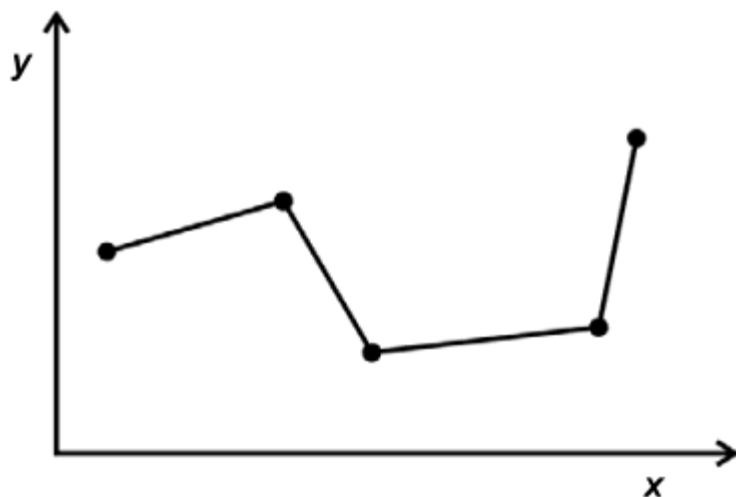
Интерполяция – построение кривой, точно проходящей через набор базовых точек

Аппроксимация – сглаживание, приближение, т.е. построение гладкой кривой, проходящей не через набор базовых точек, а вблизи него

Экстраполяция – построение линии за пределами интервала, заданного набором базовых точек

Сплайн (от англ. spline, от [flat] spline — гибкое лекало, гибкая рейка — полоса металла, используемая для черчения кривых линий) — кривая, удовлетворяющая некоторым критериям гладкости

В простейшем случае интерполяция может быть реализована путем соединения базовых точек отрезками прямых линий. Этот способ называется линейной интерполяцией.

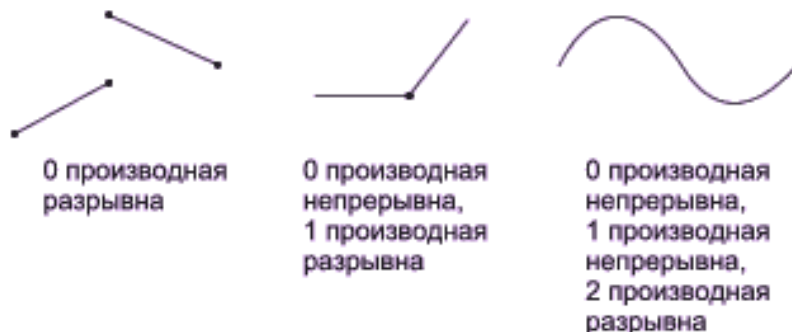


Такая кривая точно проходит через набор базовых точек. Однако линейная интерполяция может не очень точно отражать поведение объекта эксперимента на интервалах между базовыми точками. Поэтому более приемлимой является интерполяция с помощью некоторой гладкой кривой.

Критерием гладкости является существование производных функции, описывающей кривую. Какого порядка существует производная – такого порядка и гладкость.

Обычно достаточно гладкой считается функция, если она имеет производную первого или второго порядка.

Составная кривая называется *геометрически непрерывной*, если вдоль этой кривой единичный вектор ее касательной изменяется непрерывно, и *дважды геометрически непрерывной*, если и вектор кривизны также меняется непрерывно.



Гладкая интерполяционная кривая может быть построена на основе базовых $n+1$ точек с помощью полинома степени n .

Полиномом называется функция вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = y.$$

В этом выражении неизвестными являются $n+1$ коэффициентов a_i

Для того, чтобы их найти, подставляем в уравнение $n+1$ раз координаты из набора базовых точек. В результате получаем систему из $n+1$ линейных уравнений.

Например, если набор точек состоит из трех, то степень полинома $n=2$, а коэффициенты a_i можно получить из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1; \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2; \\ a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 = y_3. \end{cases}$$

Недостаток такого подхода (когда весь набор точек описывается одной функцией)

- Графики полиномов высоких степеней сильно меняются в промежутках между базовыми функциями
- За пределами интервалов базовых точек полиномы имеют тенденцию сильно возрастать или убывать
- Чем больше точек в наборе, тем больше уравнений необходимо решать

Чтобы избежать всех этих сложностей, при построении гладких кривых используют подход, заключающийся в формировании составной кривой из отдельных частей (сегментов)

Составную кривую второго порядка гладкости можно образовать из дуг обыкновенных полиномов третьей степени. Для расчета коэффициентов такого полинома требуется четыре точки. При этом необходимо обеспечить гладкость в местах стыковки.

На практике для построения сплайновой кривой обычно используют метод составления линий из отдельных сегментов, описываемые элементарными уравнениями, как правило, третьей степени.

Достоинства такого подхода:

- Упрощение расчетов
 - Использование уравнений невысоких степеней
 - При добавлении точки в базовый набор необходимо пересчитать только четыре сегмента кривой.
-

Сложные кривые удобно описывать в виде параметрических уравнений.

Уравнение вида

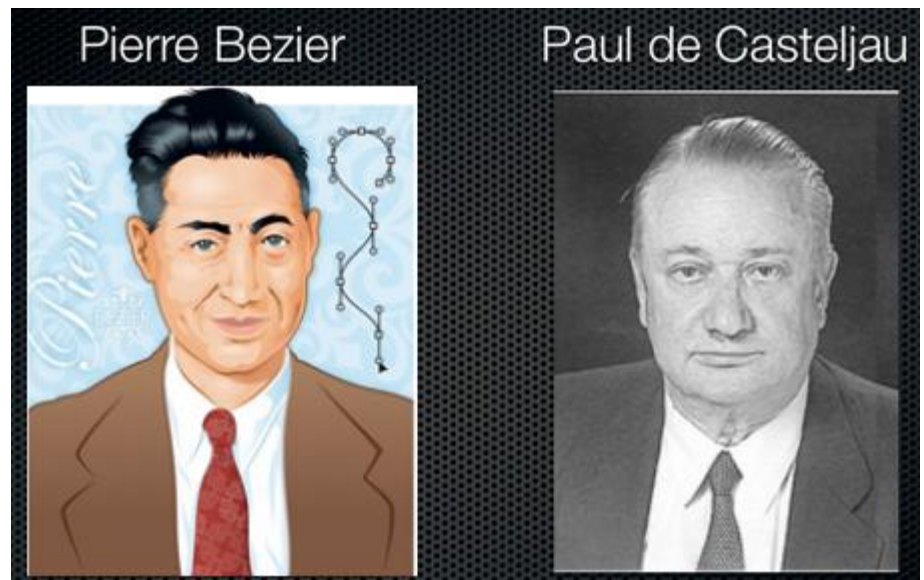
$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

Называют параметрическим заданием кривой, при этом переменная t называется параметром.

Кривая Безье

Кривые Безье́ или кривые Бернштейна-Безье́ были разработаны в 60-х годах XX века независимо друг от друга *Пьером Безье* (Pierre Bézier) из автомобилестроительной компании «Рено» и *Полем де Кастельжо* (Paul de Faget de Casteljau) из компании «Ситроен», где применялись для проектирования кузовов автомобилей.

Несмотря на то, что способ де Кастельжо был разработан несколько ранее Безье (1959), его исследования не публиковались и скрывались компанией как производственная тайна до конца 1960-х.



Кривая Безье является частным случаем многочленов Бернштейна, описанных *Сергеем Натановичем Бернштейном* в 1912 году.

Его диссертация 1904 года была посвящена решению 19-й проблемы Гильберта. Им найдены условия аналитичности решений уравнений второго порядка эллиптических и параболических типов; развиты новые методы решения граничных задач для нелинейных уравнений эллиптического типа; совместно с учениками создана новая ветвь теории функций — конструктивная теория функций.

При доказательстве аппроксимационной теоремы Вейерштрасса Бернштейном были построены полиномы, оказавшиеся полезными в самых разных областях математики. Теперь их называют полиномами Бернштейна.



Полином Бернштейна, 1912 г.

$$B_n(f; x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x)$$

Кривая Безье является частным случаем многочленов Бернштейна, представляет собой параметрическую кривую и задается выражением:

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \mathbf{b}_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ где}$$

n – количество опорных точек

i – номер опорной точки

t – шаг (например, при построении по 100 точкам шаг равен 0.01)

\mathbf{P} – координата опорной точки

$\mathbf{b}(t)$ – базисная функция кривой Безье (полином Бернштейна). Этот полином определяет вес опорной точки:

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad - \text{ число сочетаний из } n \text{ по } i.$$

Впервые кривые были представлены широкой публике в 1962 году Пьером Безье, который использовал их для компьютерного проектирования автомобильных кузовов. Кривые были названы именем Безье, а именем де Кастельжо назван разработанный им рекурсивный способ определения кривых (алгоритм де Кастельжо).

Впоследствии этот способ стал одним из важнейших инструментов систем автоматизированного проектирования и программ компьютерной графики.

Кривые Безье используются в компьютерной графике для рисования плавных изгибов, в CSS-анимации и много где ещё.

В принципе, можно создавать анимацию и без знания кривых Безье, но стоит один раз изучить эту тему хотя бы для того, чтобы в дальнейшем с комфортом пользоваться этим инструментом.

Координаты кривой описываются в зависимости от параметра $t \in [0,1]$

Для двух точек: $P = (1-t)P_1 + tP_2$

Для трёх точек: $P = (1-t)^2P_1 + 2(1-t)tP_2 + t^2P_3$

Для четырёх точек: $P = (1-t)^3P_1 + 3(1-t)^2tP_2 + 3(1-t)t^2P_3 + t^3P_4$

Вместо P_i нужно подставить координаты i -й опорной точки (x_i, y_i) .

Эти уравнения векторные, то есть на для каждой из координат (например для 3 точек):

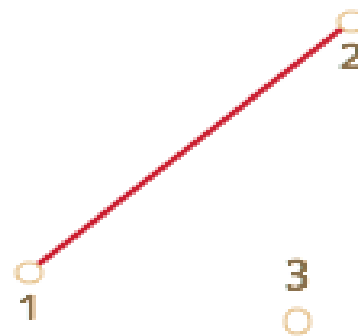
$$x = (1-t)^2x_1 + 2(1-t)tx_2 + t^2x_3$$

$$y = (1-t)^2y_1 + 2(1-t)ty_2 + t^2y_3$$

Вместо $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ подставляются координаты трёх опорных точек, и в то время как t пробегает множество от 0 до 1, соответствующие значения (x, y) как раз и образуют кривую.

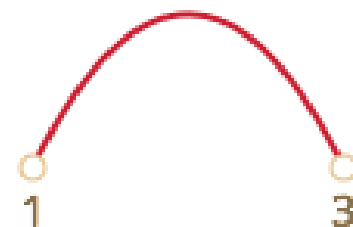
Для двух точек:

$$P = (1-t)P_1 + tP_2$$



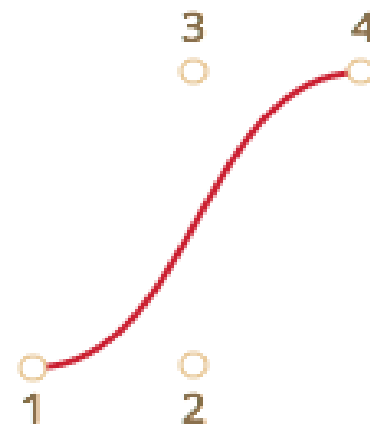
Для трёх точек:

$$P = (1-t)^2P_1 + 2(1-t)tP_2 + t^2P_3$$



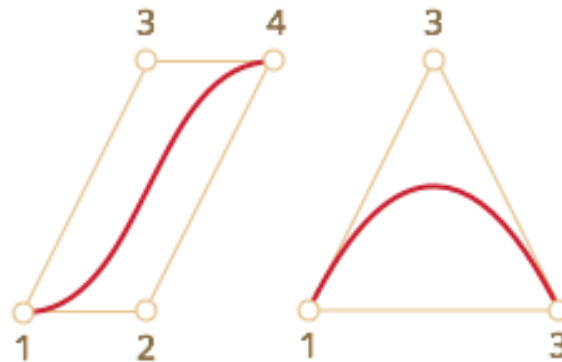
Для четырёх точек:

$$P = (1-t)^3P_1 + 3(1-t)^2tP_2 + 3(1-t)t^2P_3 + t^3P_4$$



Можно заметить, что

1. Точки не всегда лежат на кривой.
2. Степень кривой равна числу точек минус один. Для двух точек — это линейная кривая (т.е. прямая), для трёх точек — квадратическая кривая (парабола), для четырёх — кубическая.
3. Кривая всегда находится внутри выпуклой оболочки, образованной опорными точками:



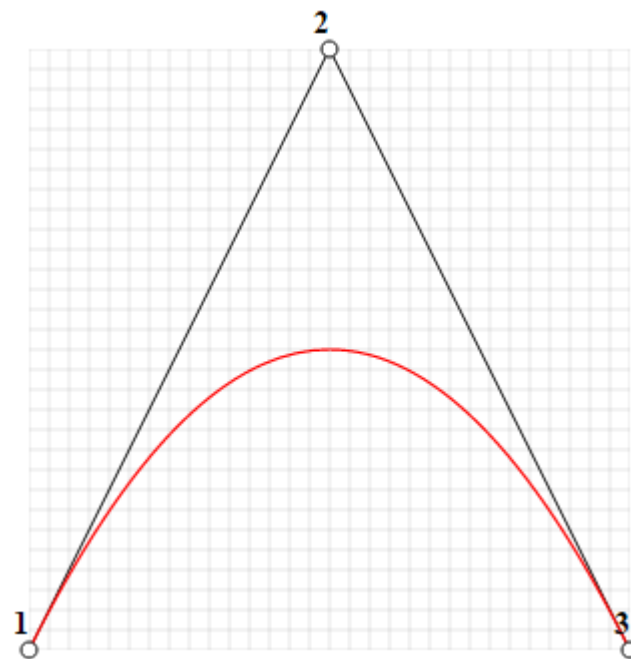
4. Благодаря последнему свойству в компьютерной графике можно оптимизировать проверку пересечений двух кривых. Если их выпуклые оболочки не пересекаются, то и кривые тоже не пересекутся.

Метод де Кастельжо идентичен математическому определению кривой и наглядно показывает, как она строится.

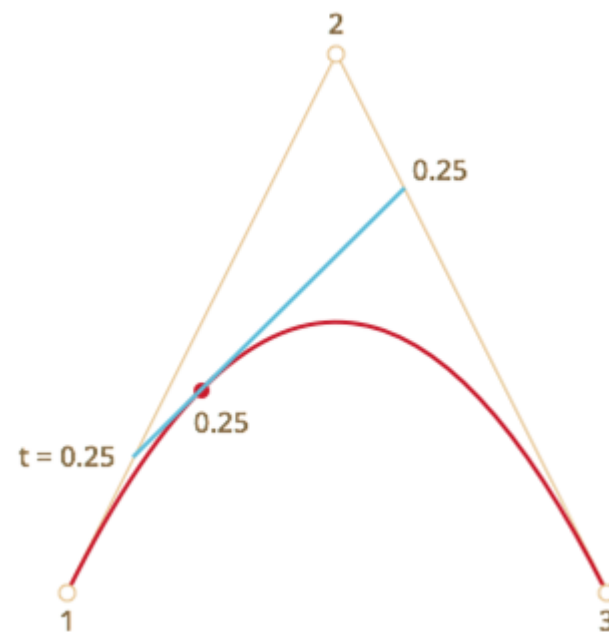
Метод заключается в том, что любую кривую Безье любого порядка можно очень простым способом разбить на две кривые того же порядка, и они будут в точности совпадать с исходной кривой.

Посмотрим его на примере трёх точек.

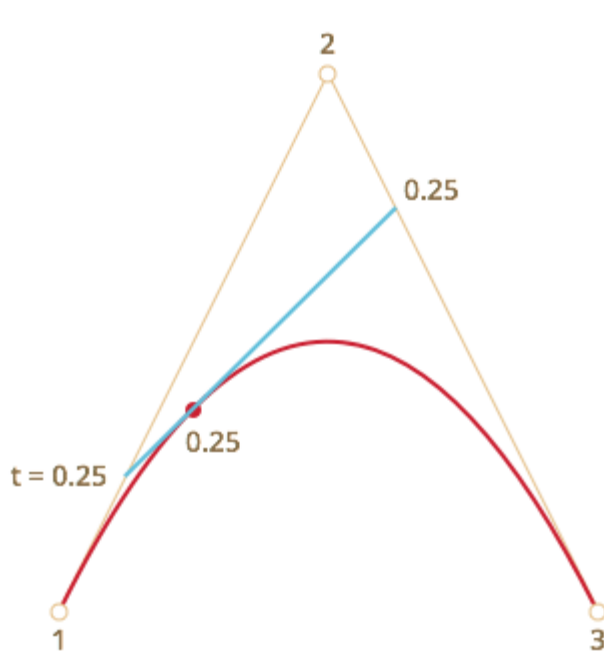
1. Рисуем опорные точки. В примере выше это 1, 2, 3.
2. Строятся отрезки между опорными точками $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. На рисунке выше они чёрные.



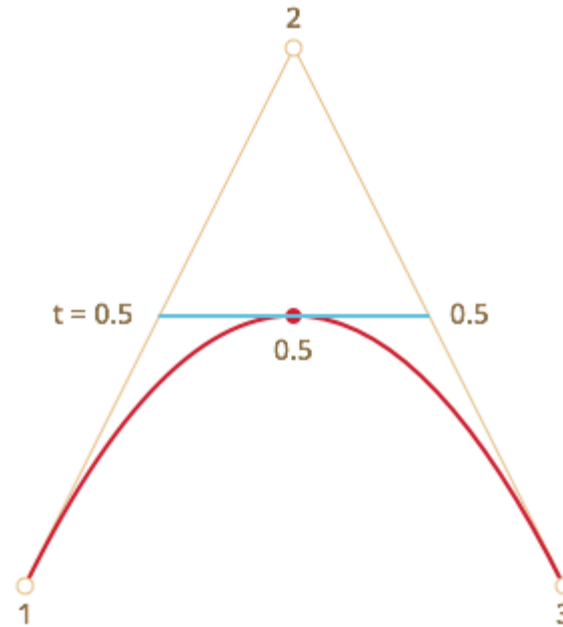
1. Параметр t пробегает значения от 0 до 1 с некоторым шагом
2. На каждом из этих отрезков берётся точка, находящаяся от начала на расстоянии от 0 до t пропорционально длине. Так как чёрных отрезков — два, то и точек выходит две штуки. Т.е., при $t=0$ — точки будут в начале, при $t=0.25$ — на расстоянии в 25% от начала отрезка, при $t=0.5$ — 50%(на середине), при $t=1$ — в конце отрезка.
3. Эти точки соединяются. На рисунке ниже соединяющий их отрезок изображён синим.
4. На получившемся отрезке берётся точка на расстоянии, соответствующем t .



При $t=0.25$

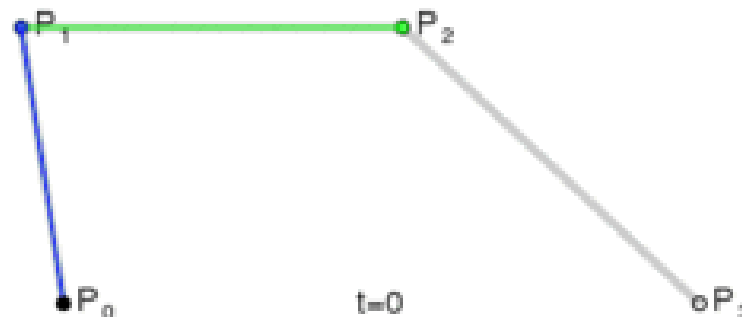
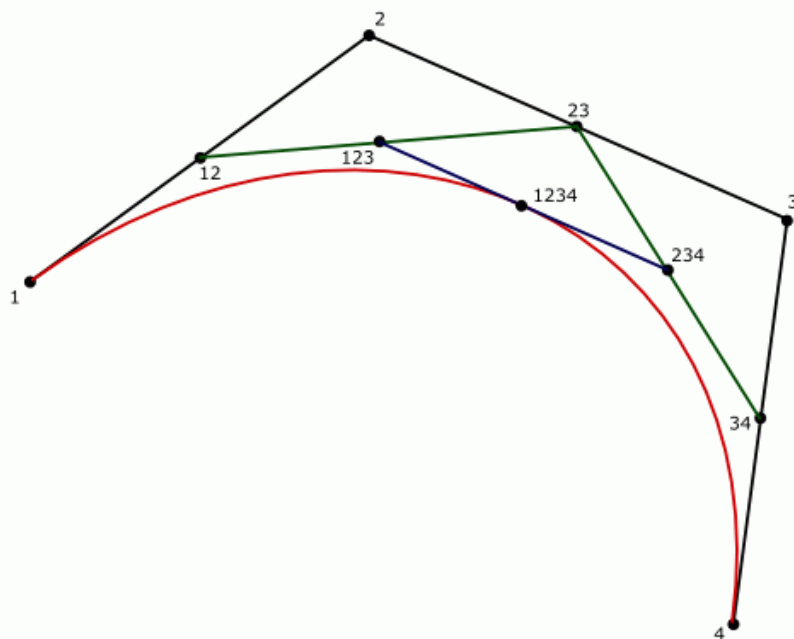


При $t=0.5$



1. То есть, для $t=0.25$ (первый рисунок) получаем точку в конце первой четверти отрезка, для $t=0.5$ (второй рисунок) — в середине отрезка. На рисунках выше эта точка отмечена красным.
2. По мере того как t пробегает последовательность от 0 до 1, каждое значение t добавляет к кривой точку. **Совокупность таких точек для всех значений t образуют кривую Безье.**

Аналогичным образом могут быть построены кривые Безье и более высокого порядка: по четырем, пяти точкам, шести и так далее.

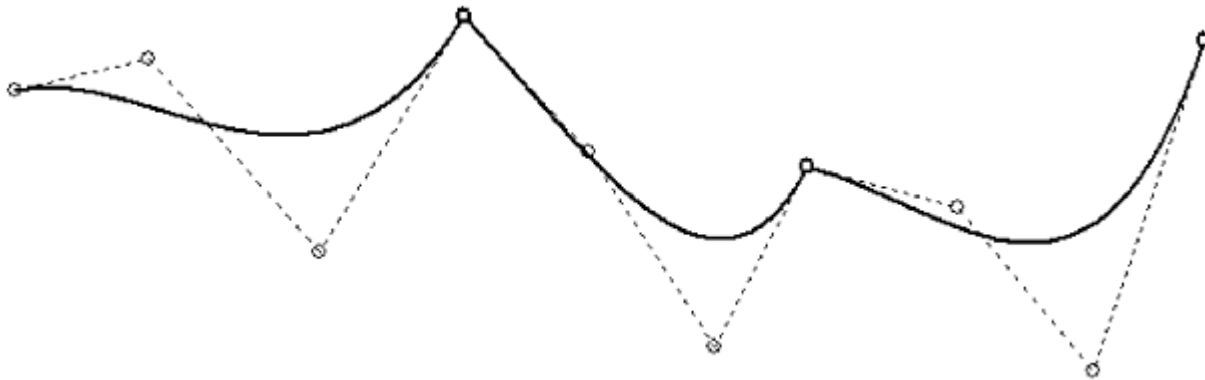


С четырьмя точками понятно. А что делать, если точек 10 или 10 000?

Кривую Безье можно построить для любого числа точек, но вычислять полиномы десяти тысячной степени — это сложно.

Поэтому поступают очень просто — разбивают точки на группы по 4 штуки, строят для каждой из них кривую Безье и соединяют полученные сегменты в одну кривую. Это гораздо проще с точки зрения поддержки и расчётов.

Единственная проблема — полученная кривая будет «не очень гладкой» на границах сегментов.



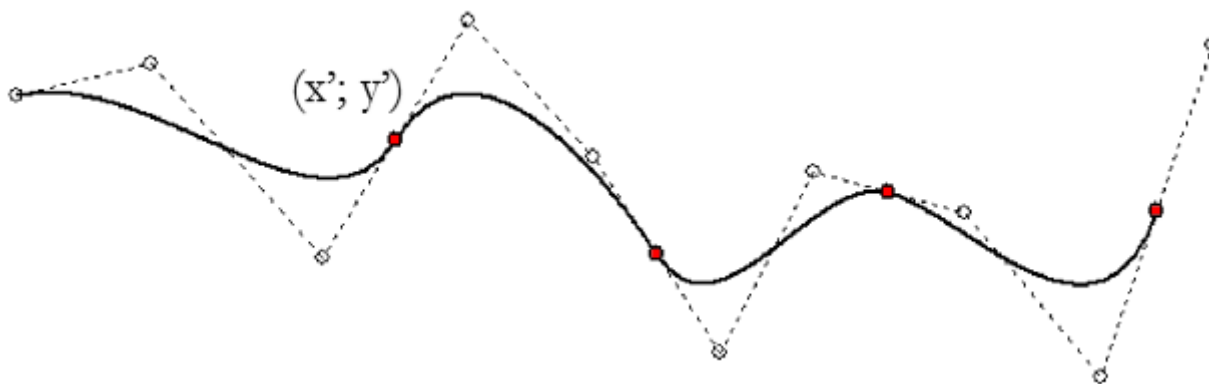
Как правило, в компьютерной графике для интерполяции используют кубические кривые, соединённых гладким образом. Вместе они выглядят как одна кривая.

Как сделать кривую плавной?

Чтобы составная кривая Безье была геометрически непрерывной, необходимо, чтобы каждые три точки в месте стыковки лежали на одной прямой. Составную кривую построим из наборов элементарных кривых Безье для четверок вершин.

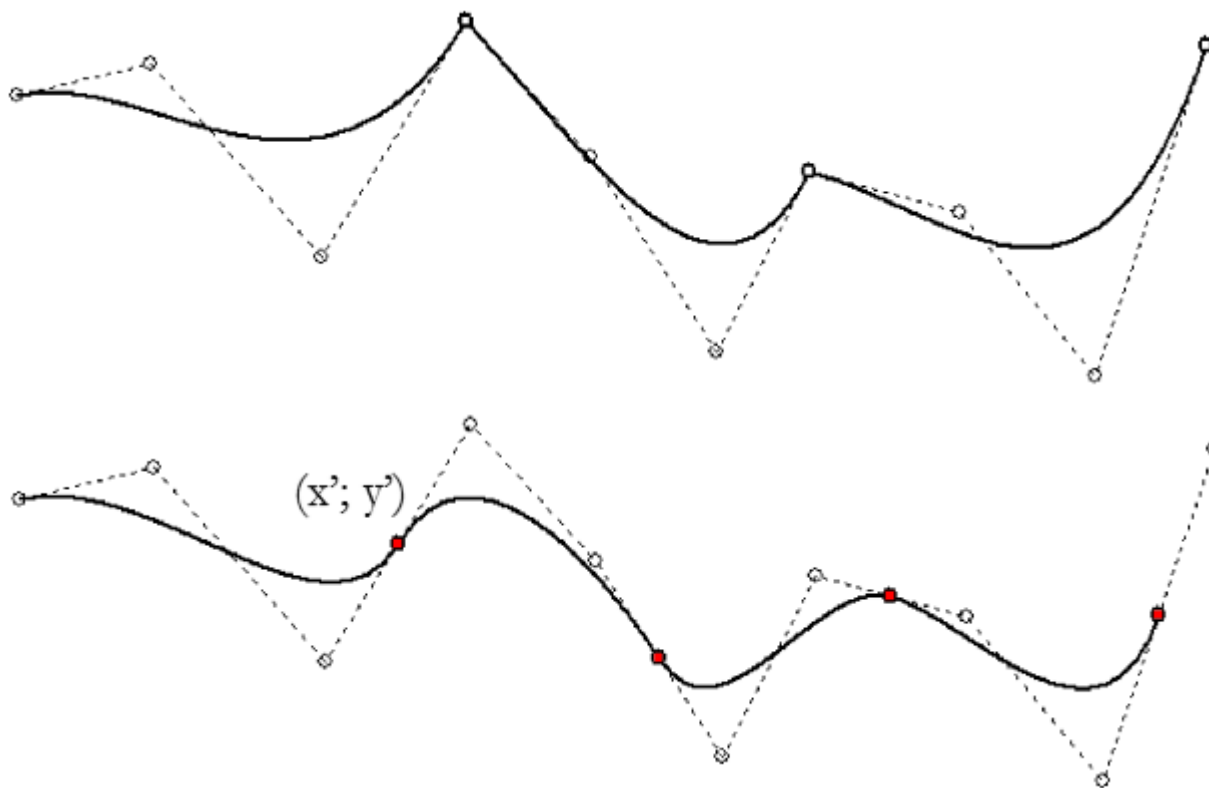
Допустим, у нас есть шесть точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Пусть $(x_3; y_3)$ и $(x_4; y_4)$ — координаты третьей и четвертой точки соответственно. Вставляем между ними дополнительную точку с координатами $x' = (x_3 + x_4)/2$ и $y' = (y_3 + y_4)/2$, после чего проводим одну кривую через точки x_1, x_2, x_3, x' а вторую — через точки x', x_4, x_5, x_6 . В результате получим одну гладкую кривую для шести точек.

Если учесть поведение кривой Безье и то, что точки $(x_3; y_3)$, $(x'; y')$ и $(x_4; y_4)$ лежат на одной прямой, это становится вполне очевидно.



Если точек больше шести, их нужно разбить по такой же схеме и связать полученные группы с помощью дополнительных точек, как описано выше.

Последнюю точку можно повторить несколько раз, если множество точек не делится на целое число групп, чтобы кривая доходила до последней точки.



Интерполяционная кривая Catmull - Rom

По заданному массиву точек P_0, P_1, P_2, P_3 сплайновая кривая Catmull-Rom определяется при помощи уравнения, имеющего следующий вид:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2} \left(-t(1-t)^2 P_0 + (2 - 5t^2 + 3t^3) P_1 + t(1 + 4t - 3t^2) P_2 - t^2(1-t) P_3 \right),$$
$$0 \leq t \leq 1.$$

Свойства составной сплайновой кривой Catmull-Rom:

- Проходит *точно* через опорные точки
- Является геометрически непрерывной
- Набор базовых функций однозначно определяет кривую, т.е. *нет* возможности регулировать ее форму

Для построения составной кривой нужно дополнить набор копиями первой и последней точек

Построить замкнутую интерполяционную сплайновую кривую можно, дополнив набор базовых точек из n штук точками

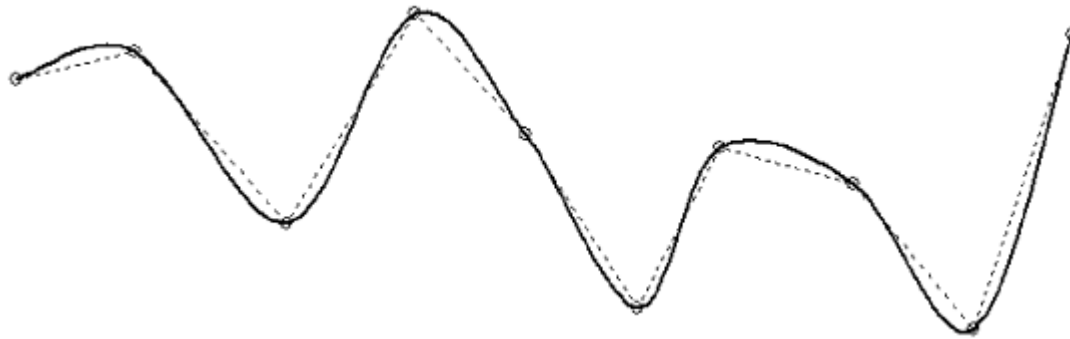
$$P_{n+1} = P_0, \quad P_{n+2} = P_1, \quad P_{n+3} = P_2.$$

Как сделать кривую плавной?

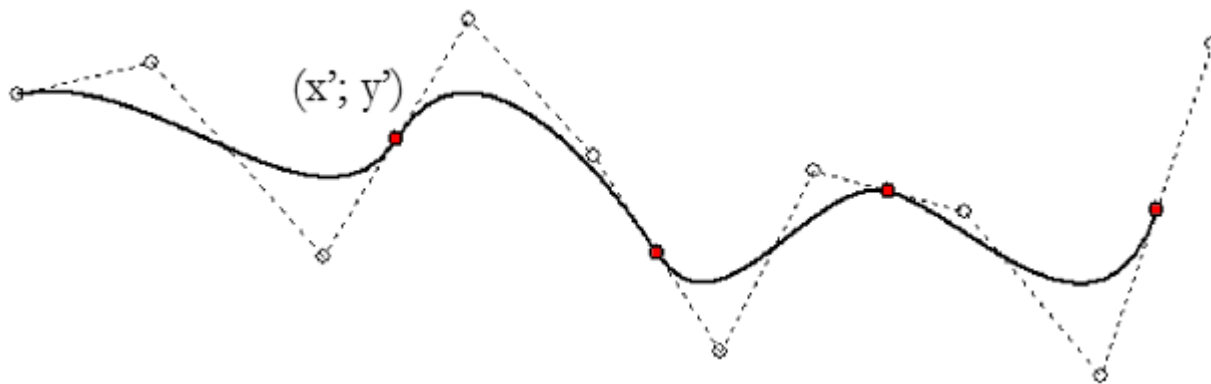
Каждый сегмент кривой строится на основе четырех точек. Построение кривой осуществляется только между двумя внутренними точками каждой четверки.

Четверки выбираются с перекрытием, т.е. первой точкой очередной четверки выбирается вторая точка предыдущей четверки. Например, сегмент 1 – строится на основе точек 0, 1, 2, 3, а сегмент 2 – на основе точек 1, 2, 3, 4.

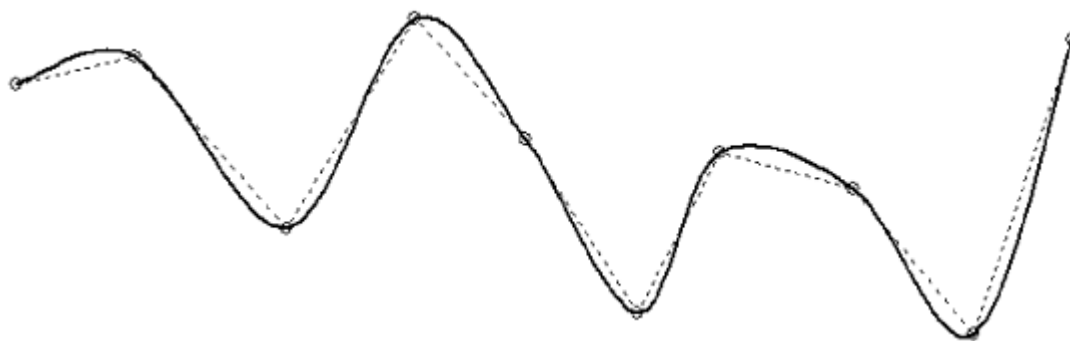
Концевые точки дублируются.



Интерполяционная кривая Catmull-Rom



Аппроксимация кривой Безье



Интерполяционная кривая Catmull-Rom

Элементарная бета-сплайновая кривая

По заданному массиву точек P_0, P_1, P_2, P_3 бета-сплайновая кривая определяется при помощи уравнения, имеющего следующий вид:

$$\mathbf{R}(t) = b_0(t)P_0 + b_1(t)P_1 + b_2(t)P_2 + b_3(t)P_3, \\ 0 \leq t \leq 1.$$

Функциональные коэффициенты $b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t)$ бета-сплайновой кривая определяется при помощи уравнения, имеющего следующий вид:

$$b_0(t) = \frac{2\beta_1^3}{\delta}(1-t)^3; \\ b_1(t) = \frac{1}{\delta}(2\beta_1^3 t(t^2 - 3t + 3) + 2\beta_1^2(t^3 - 3t + 2) + 2\beta_1(t^3 - 3t + 2) + \beta_2(2t^3 - 3t^2 + 1)); \\ b_2(t) = \frac{1}{\delta}(2\beta_1^2 t^2(-t + 3) + 2\beta_1 t(-t^2 + 3) + 2\beta_2 t^2(-2t + 3) + 2(-t^3 + 1)); \\ b_3(t) = \frac{2t^3}{\delta},$$

$$\mathbf{R}(t) = b_0(t)P_0 + b_1(t)P_1 + b_2(t)P_2 + b_3(t)P_3,$$
$$0 \leq t \leq 1.$$

$$b_0(t) = \frac{2\beta_1^3}{\delta}(1-t)^3;$$

$$b_1(t) = \frac{1}{\delta} \left(2\beta_1^3 t(t^2 - 3t + 3) + 2\beta_1^2(t^3 - 3t + 2) + 2\beta_1(t^3 - 3t + 2) + \beta_2(2t^3 - 3t^2 + 1) \right);$$

$$b_2(t) = \frac{1}{\delta} \left(2\beta_1^2 t^2(-t + 3) + 2\beta_1 t(-t^2 + 3) + 2\beta_2 t^2(-2t + 3) + 2(-t^3 + 1) \right);$$

$$b_3(t) = \frac{2t^3}{\delta},$$

Числовые параметры β_1 (параметр скоса) и β_2 (параметр натяжения) называются параметрами бета-сплайновой кривой

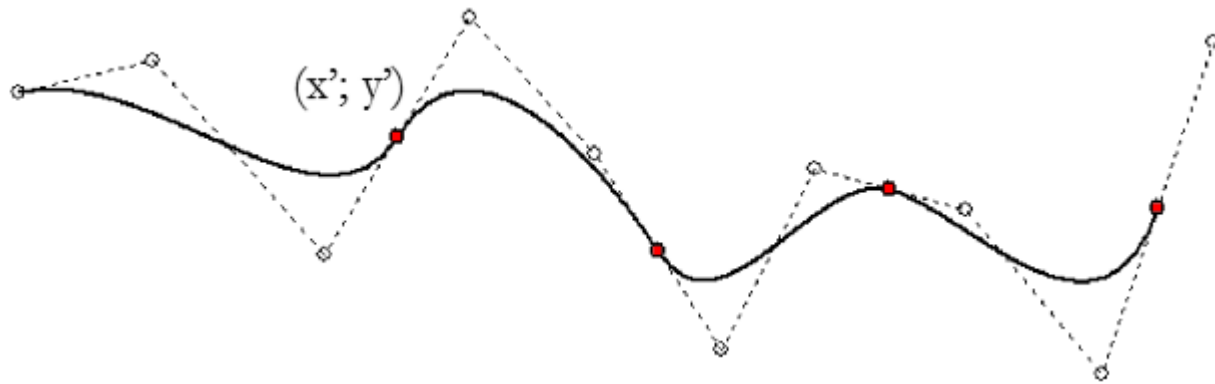
Свойства составной бета-сплайновой кривой:

- Проходит *внутри выпуклой оболочки, заданной опорными точками*
- Является дважды геометрически непрерывной
- Параметры β_1 и β_2 позволяют регулировать ее форму

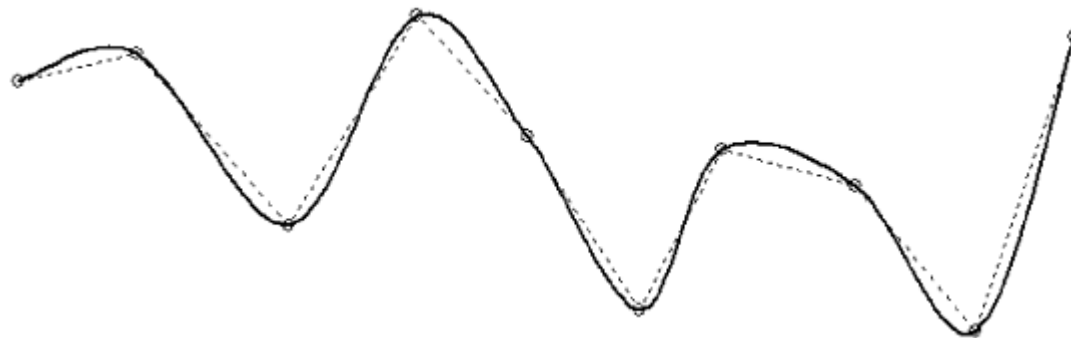
Составная бета-сплайновая кривая, как правило не проходит ни через одну базовую точку. Однако начальная точка кривой обязательно лежит в треугольнике, образованном тремя начальными базовыми точками, а конечная точка — в треугольнике, образованном тремя конечными точками.

Поэтому для построения составной бета-сплайновой кривой, начинающейся в первой и заканчивающейся в последней базовой точке, достаточно дополнить набор базовых точек копиями первой и двумя копиями последней точек.

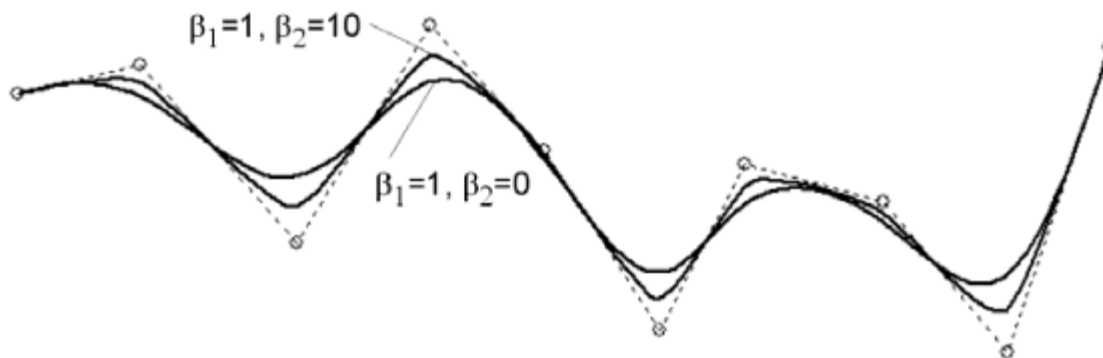
Построить замкнутую бета-сплайновую кривую можно, дополнив набор базовых точек из n штук точками $P_{n+1} = P_0$, $P_{n+2} = P_1$, $P_{n+3} = P_2$.



Кривая Безье



Интерполяционная
кривая Catmull-Rom



Бета-сплайновая
кривая