Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия имеет своей задачей изучение свойств геометрических объектов с помощью аналитических методов.

Элементарные геометрические преобразования в машинной графике основаны на матричных преобразованиях.

Матричные преобразования

- Скалярное произведение векторов
- Векторное произведение векторов
- Сложение (вычитание) матриц
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц

Плоскость в пространстве

- Полное уравнение плоскости
- Уравнение плоскости в отрезках
- Некоторые свойства, вытекающие из уравнения плоскости
- Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки

Прямая линия в пространстве

- Каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки
- Угол между двумя прямыми в пространстве
- Условие параллельности
- Условие перпендикулярности
- Условие принадлежности двух прямых одной плоскости
- Угол между прямой и плоскостью
- Условие параллельности прямой и плоскости
- Условие перпендикулярности прямой и плоскости
- Условия принадлежности прямой к плоскости

Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве

Условие пересечения трех плоскостей в одной и только в одной точке

Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельную плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярную прямой

Уравнение плоскости, проходящей через прямую и через точку не лежащую на этой прямой

Задачи часто используемые в компьютерной графике

Проверка, где находится точка — слева или справа от линии

Определение факта выпуклости многоугольника

Находится ли точка внутри многоугольника

По какую сторону плоскости лежат точки

Скалярное произведение векторов

Операция скалярного произведения векторов: определена для двух векторов одинаковых размеров.

Скалярное произведение есть число равное сумме произведений соответствующих элементов векторов

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$$

Пример:

[1]   [4]
[2] * [5] = 1*4 + 2*5 + 3*6 = 32
[3]   [6]

Векторное произведение векторов

Операция векторного произведения: определена для (n-1) вектора одинакового размера n. Результат - вектор перпендикулярный всем множителям. Результат меняется от перестановки мест множителей.

Векторное произведение двух 3-х мерных векторов $u=(u_x,u_y,u_z)$ и $v=(v_x,v_y,v_z)$ определяется как вектор с компонентами:

$$\mathbf{u \times v = u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x}$$

Направление этого вектора перпендикулярно плоскости, проходящей через вектора u и v.

Для запоминания используется формальное правило.

Записывается матрица, первая строка которой есть все базисные вектора, а все последующие - соответствующие координаты всех множителей. Координаты векторного произведения ищутся следующим образом. Вычеркиваются соответствующий базисному вектору строка и столбец, затем ищется определитель оставшейся матрицы 2 на 2, и присваивается знак +, -, + - и т. д, т.е. находятся миноры этой матрицы. Например:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} Ux \\ Uy \\ Uz \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ Ux & Uy & Uz \\ Vx & Vy & Vz \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} Uy*Vz-Uz*Vy \\ Uz*Vx-Ux*Vz \\ Ux*Vy-Uy*Vx \end{bmatrix}$$

Сложение (вычитание) матриц

Операция сложения двух матриц: определена для матриц одинаковых размеров. Каждый элемент суммы (то есть, каждое число в таблице) равняется сумме соответствующих элементов слагаемых-матриц. Пример:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 500 \\ 2 & y & 600 \\ 3 & z & 700 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & a & 3 \\ 9 & b & 2 \\ 10 & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & a+x & 503 \\ 11 & b+y & 602 \\ 13 & c+z & 701 \end{bmatrix}$$

Операция умножения матрицы на число:

определена для любой матрицы и любого числа;

каждый элемент результата равняется произведению соответствующего элемента матрицы-множителя и числа-множителя.

Умножение матриц

Результатом умножения матрицы A размером a x b на матрицу B размером b x d будет матрица C размером a x d, в которой элемент, стоящий в строке i и столбце j, равен произведению строки i матрицы A на столбец j матрицы B.

Произведение строки на столбец определяется как сумма произведений соответствующих элементов строки и столбца. Пример умножения строки на столбец (они должны быть равной длины):

[4]
[1 2 3] * [5] = 1*4 + 2*5 + 3*6 = 32
[6]

Чтобы перемножить две матрицы, надо эту операцию проделать для каждого элемента. Для получения элемента, стоящего в i-ой строке и j-ом столбце, вычисляется сумма произведений элементов i-ой строки матрицы A на j-ые элементы столбца матрицы B. Пример:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*0+2*1+3*2 & 1*3+2*4+3*5\\ 4*0+5*1+6*2 & 4*3+5*4+6*5\\ 7*0+8*1+9*2 & 7*3+8*4+9*5\end{bmatrix} = \ldots$$

Умножение и сложение матриц обладают почти тем же набором свойств, что и обычные числа, хотя некоторые привычные свойства не выполняются.

Следует отметить, что произведение матриц не обязательно коммутативно. Т.е. A*B не обязательно равно B*A.

Произведение вида A*B*C*D*... не зависит от того, как расставить скобки. Т.е. A*(B*C) = (A*B)*C.

Среди матриц выделяется   единичная матрица

$$
I = \begin{matrix} [1\ 0\ 1] \\ [0\ 1\ 0] \\ [0\ 0\ 1] \end{matrix}
$$

Умножение на единичную **A*I = A**

Умножение матриц размером 4x4 можно реализовать с помощью следующего кода на языке С.
Подумайте как сделать, чтобы ускорить этот алгоритм.

```
double a[4][4];

void mult(double b[4][4])
{
   double c[4][4]={ 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 };

  for (int i=0; i<4; i++)
    for (int j=0; j<4; j++)
      for (int k=0; k<4; k++)
          c[j][i]+=a[j][k]*b[k][i];

    for (int i=0; i<4; i++)
      for (int j=0; j<4; j++)
          a[i][j]=c[i][j];
}
```

Полное уравнение плоскости

Ax + By + Cz + D = 0 - полное уравнение плоскости

(A,B,C) - вектор нормали к плоскости.

Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю, уравнение не полное. Рассмотрим все виды неполных уравнений.

D=0 плоскость, проходящая через начало координат

A=0 плоскость параллельная оси **0x**

B=0 плоскость параллельная оси **0y**

C=0 плоскость параллельная оси **0z**

A=0 B=0 плоскость параллельная плоскости **0xy**

A=0 C=0 плоскость параллельная плоскости **0xz**

B=0 C=0 плоскость параллельная плоскости **0yz**

A=0 B=0 D=0 уравнение **Cz=0** определяет плоскость **0xy**

A=0 C=0 D=0 уравнение **By=0** определяет плоскость **0xz**

B=0 C=0 D=0 уравнение **Ax=0** определяет плоскость **0yz**

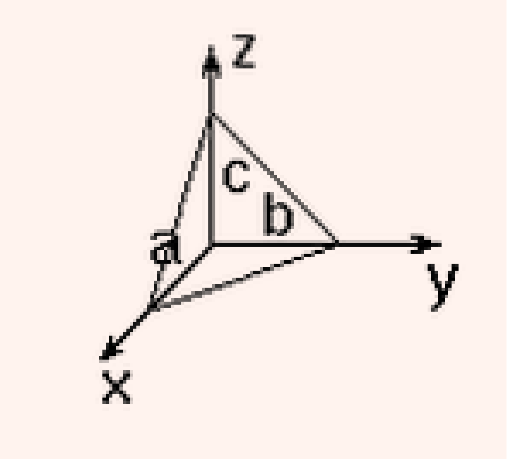
Уравнение плоскости в отрезках

Полное уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Это **уравнение в отрезках**.

Числа a,b,c имеют простой геометрический смысл - они равны величинам отрезков, которые отсекаются на осях 0x, 0y, 0z.



1. Нормаль к плоскости определяется вектором **n=(A,B,C)**

2. Угол между двумя плоскостями определяется из выражения

$$\cos(\theta) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

3. Условие параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

4. Условия перпендикулярности плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Операция векторного умножения двух векторов **a** и **b**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{ y_1z_2 - y_2z_1,\ z_1x_2 - z_2x_1,\ x_1y_2 - x_2y_1 \}.$$

Для запоминания удобно использовать запись этой формулы через определитель

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Если использовать векторные обозначения

$$P_1(x_1,y_1,z_1),\ P_2(x_2,y_2,z_2),\ P_3(x_3,y_3,z_3),\ X(x,y,z),$$

тогда уравнение плоскости можно переписать в следующем виде

$$((P_1-P_2) \times (P_3-P_1)) \cdot (X-P_1) = 0$$

здесь первое умножение (x) - векторное, второе - скалярное.

Пример:

Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $P_1=(0,1,1)$, $P_2=(1,2,3)$, $P_3=(-2,3,-1)$ векторным и обычным способом

$[(0,1,1)-(1,2,3)] \times [(-2,3,-1)-(0,1,1)] \cdot ((x, y, z)-(0,1,1))$

$(-1,-1,-2) \times (-2,2,-2) \cdot (x,y-1,z-1)$

$(6,2,4) \cdot (x,y-1,z-1) = 6x + 2y - 4z + 2 = 0$ Скалярное произведение

Уравнение прямой, проходящей через две точки, на плоскости

$$x = k*y+b; \qquad x = x_1+(y-y_1)*(x_2-x_1)/(y_{2-y}1)$$

В пространстве уравнение прямой определяется как пересечение двух плоскостей

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Каноническое уравнение прямой

$\{l,m,n\}$ - направляющий вектор

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

Угол между двумя прямыми в пространстве

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

где $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$ - направляющие вектора прямых.

Условие параллельности

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Условие перпендикулярности

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Если это условие выполняется, прямые или параллельны или пересекаются.

Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = 0$$

Условия принадлежности прямой

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

к плоскости $Ax + By + Cz = 0$

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

$$Al+Bm+Cn+D=0\ ,$$

- первое уравнение - условие точка M(xi,yi,zj) через которую проходит прямая принадлежит плоскости;
- второе - условие параллельности прямой и плоскости.

Для того чтобы 3 плоскости

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$$
$$Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0$$
$$Ax_3+By_3+Cz_3+D_3=0$$

пересекались в одной и только одной точке, необходимо и достаточно, чтобы был отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку

$$M(x_1,y_1,z_1)$$

и перпендикулярной данной плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

$$M_0(x_0,y_0,z_0)$$

и параллельную плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0$$

Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве

- Условие пересечения трех плоскостей в одной и только в одной точке
- Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости
- Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельную плоскости
- **Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярную прямой**
- Уравнение плоскости, проходящей через прямую и через точку не лежащую на этой прямой

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярную прямой

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

и через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ не лежащую на этой прямой

Используя условия принадлежности прямой к плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$A\,l + Bm + Cn = 0$$

Точка M_0 не лежит на прямой. Это значит, что нарушатся одна из пропорций

$$\frac{x_1-x_0}{l}=\frac{y_1-y_0}{m}=\frac{z_1-z_0}{n},$$

следовательно из системы два коэффициента из трех (A, B, C) можно определить через третий. Выбрав один из них произвольно (например =1) можно найти два других.

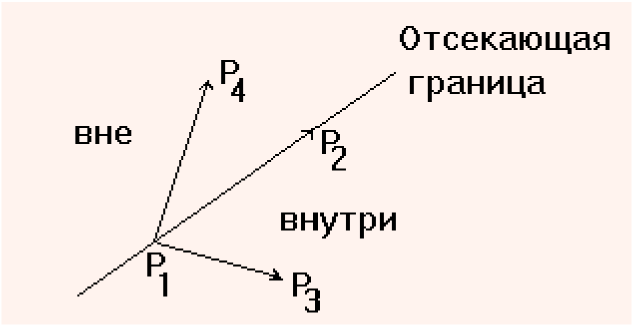
Проверка основана на изучении характера векторного произведения вектора, проведенного из точки P_1 в P_2, на вектор, соединяющий точку P_1 с исследуемой точкой. Если направление векторного произведения совпадает с положительным направлением оси z, точка лежит слева и, следовательно, вне, если же оно направлено противоположно оси z, точка внутри.

Задачи часто используемые в компьютерной графике

- **Проверка, где находится точка — слева или справа от линии**
- Определение факта выпуклости многоугольника
- Находится ли точка внутри многоугольника
- По какую сторону плоскости лежат точки

z-компонента векторного произведения двух векторов $v=(v_x, v_y)$ и $w=(w_x,w_y)$ равна

$$\mathbf{w_z = x_x\, w_y - v_y\, w_x}.$$



Отсекающая граница задается отрезком $P_1 P_2$

(·) P_3 внутри - z-компонента ($P_1 P_2$ x $P_1 P_3$) - отрицательна

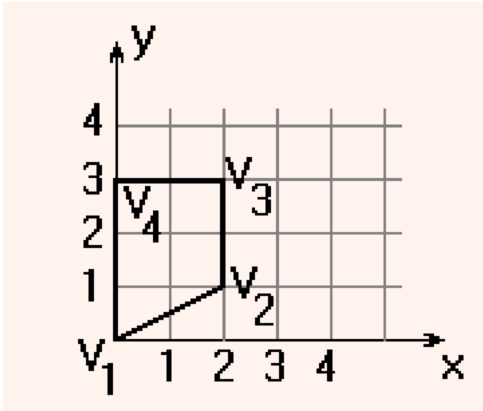
(·) P_4 снаружи - z-компонента ($P_1 P_2$ x $P_1 P_4$) - положительна

Область выпукла, если любой отрезок, соединяющий две точки области, принадлежит области.

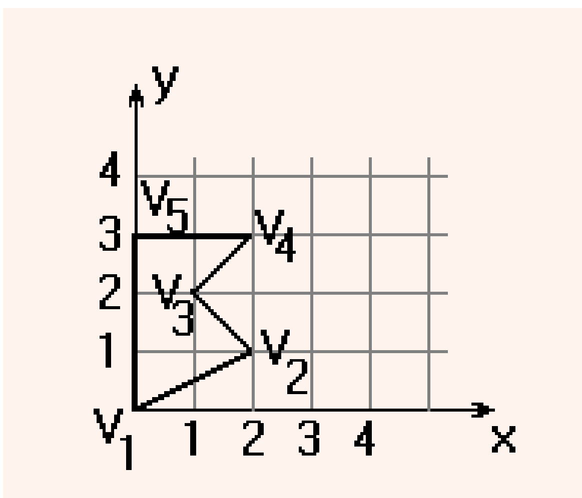
Составляем векторные произведения смежных сторон.

Если

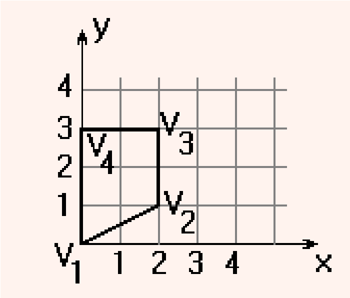
- все знаки равны 0 , то многоугольник вырождается
- есть как +, так и -, то многоугольник невыпуклый
- все знаки отрицательны, то многоугольник выпуклый, а внутренняя нормаль ориентирована влево от контура
- все знаки отрицательны, то многоугольник выпуклый, а внутренняя нормаль ориентирована вправо от контура



$V_1 \quad V_4V_1 \times V_1V_2$
$w_z = [0,-3] \times [2,1] = +6$
$V_2 \quad V_1V_2 \times V_2V_3$
$w_z = [2,1] \times [0,2] = +4$
$V_3 \quad V_2V_3 \times V_3V_4$
$w_z = [0,2] \times [-2,0] = +4$
$V_4 \quad V_3V_4 \times V_4V_1$
$w_z = [-2,0] \times [0,-3] = +6$



$V_1 \quad V_5V_1 \times V_1V_2$
$w_z = [0,-3] \times [2,1] = +6$
$V_2 \quad V_1V_2 \times V_2V_3$
$w_z = [2,1] \times [-1,1] = +3$
$V_3 \quad V_2V_3 \times V_3V_4$
$w_z = [-1,1] \times [1,1] = \mathbf{-2}$
$V_4 \quad V_3V_4 \times V_4V_5$
$w_z = [1,1] \times [-2,0] = +2$
$V_5 \quad V_4V_5 \times V_5V_1$
$w_z = [-2,0] \times [0,-3] = +6$



Задачи часто используемые в компьютерной графике

Проверка, где находится точка — слева или справа от линии

Определение факта выпуклости многоугольника

Находится ли точка внутри многоугольника

По какую сторону плоскости лежат точки

Пусть заданы две точки (1,1) и (1,0).Проверяем векторные произведения для всех сторон в направлении обхода.

$V_1V_4 \times V_1P$ $w_z = [0,3] \times [1,1] = -3$ $w_z = [0,3] \times [1,0] = -3$

$V_4V_3 \times V_4P$ $w_z = [2,0] \times [1,-2] = -4$ $w_z = [2,0] \times [1,-3] = -7$

$V_3V_2 \times V_3P$ $w_z = [0,-2] \times [-1,-2] = -2$ $w_z = [0,-2] \times [-1,-3] = -2$

$V_2V_1 \times V_2P$ $w_z = [-2,-1] \times [-1,0] = -1$ $w_z = [-2,-1] \times [-1,-1] = \boldsymbol{+1}$

Вторая точка лежит вне

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$F(X) = ((P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)) \cdot (X - P_1) = 0$$

Для определения, лежат ли две точки по одну сторону поверхности (тогда пересечения с поверхностью нет) или по разные стороны достаточно сравнить знаки F(P) и F(Q).

Если они одного знака, то точки лежат по одну сторону, если разного, то с разных сторон (если F(X)=0 -> точка лежит в плоскости).

Проверим, лежат ли точки (1,1,3) и (0,0,0) по одну сторону от плоскости, проходящей через точки (0,1,1), (1,2,3), (-2,3,-1) или нет.

$F(X) = ((-6,-6,4) \cdot (X-(0,1,1))$

$F(0,0,0) = - (-6,-2,4) \cdot (0,1,1)=-1$

$F(1,1,3) = (-6,-2,4) \cdot ((1,1,3)-(0,1,1))=2$

Точки лежат по разные стороны от плоскости.