

УДК 535.411.854

В. И. Гужов, С. П. Ильиных
(Новосибирск)

**НОВЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ИНТЕРФЕРОГРАММ
С ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННЫМИ
ПОШАГОВЫМИ ФАЗОВЫМИ СДВИГАМИ**

Рассмотрен новый алгоритм расшифровки интерферограмм, полученных методом пошагового фазового сдвига. При использовании известных методик основным источником погрешности является неправильное задание сдвига. Предложенный метод основан на непосредственном определении углов сдвига из системы трансцендентных уравнений. Показано, что погрешность определения фазовых сдвигов не менее $\lambda/100$, а погрешность измерения разности фаз зависит от погрешности поля интерференции и при уровне шумов 10% составляет $\lambda/50$.

На практике широкое распространение получили интерференционные методы измерения разности волновых фронтов на основе внесения пошаговых фазовых сдвигов [1]. При этом существующие алгоритмы расшифровки [2] основаны на допущении, что фазовый сдвиг известен точно или могут вноситься лишь неизвестные, но линейные приращения. Влияние нелинейных или случайных ошибочных приращений, возникающих при внесении фазового сдвига, не учитывается. В то же время на практике такие виды ошибок встречаются достаточно часто. Причинами их возникновения могут быть, например, гистерезис, вибрации при движении пьезокерамики, используемой для задания сдвига, или вибрации установки при проведении эксперимента.

В работе рассмотрен новый метод расшифровки, основанный на определении фазовых приращений из уже имеющихся интерферограмм. В этом случае можно задавать произвольные сдвиги. Поэтому исчезает необходимость в предварительной калибровке устройств задания сдвига.

Значение интенсивности в n -й точке интерференционной картины можно записать как

$$I_i = I_{0n}(1 + V_n \cos(\varphi + \delta_i)), \quad (1)$$

где δ_i – задаваемые фазовые сдвиги, $i=0, \dots, m-1$; I_0 – средняя интенсивность; V – видность; φ – искомая фазовая разность.

Из выражения (1) видно, что к трем неизвестным величинам I_0 , V и φ добавляется еще и неизвестный угол сдвига δ_i . В этом случае в каждой точке есть $3 + m - 1$ неизвестных I_0 , V , φ_0 , δ_1 , δ_2 , ..., δ_{m-1} ($\delta_0 = 0$). Если n – число

взятых точек, то общее число неизвестных есть $3n + m - 1$ при $(n \times m)$ -уравнениях. Решение можно найти, если общее число уравнений больше или равно числу неизвестных, т. е.

$$nm \geq 3n + m - 1 \quad \text{или} \quad n \geq 1 + 2/(m - 3). \quad (2)$$

Этого можно достичь, если допустить, что в соседних точках углы сдвига одинаковы. Такое предположение выполняется в большинстве случаев исходя из физических условий проведения эксперимента.

Возможны два случая, при которых число неизвестных равно числу уравнений: в двух точках при пяти сдвигах и в трех точках при четырех сдвигах. Во всех остальных вариантах число неизвестных либо меньше, либо больше числа уравнений.

В данной работе рассмотрено аналитическое решение при регистрации пяти интерферограмм с фазовыми сдвигами $\delta_0 = 0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ при допущении, что в двух соседних точках фазовые сдвиги одинаковы. В этом случае получается десять трансцендентных уравнений с десятью неизвестными.

Пусть $n = 2, m = 5$, тогда из (1) и (2) следует

$$\begin{cases} I_{1i} = I_{01}(1 + V_1 \cos(\varphi + \delta_i)); \\ I_{2i} = I_{02}(1 + V_2 \cos(\varphi + \varepsilon + \delta_i)) \end{cases} \quad (i \in 0, \dots, m-1) \quad (3)$$

(здесь ε – разность фаз между двумя точками на интерферограмме).

Будем искать решение в комплексной плоскости с осями $\text{Im}(I), \text{Re}(I)$, на которых откладываются значения интенсивностей первой и второй точек $I_i = (I_{1i}, I_{2i})$, соответствующих различным фазовым сдвигам. При изменении углов сдвига от 0 до 2π точка на комплексной плоскости описывает некоторую траекторию (рис. 1).

Несложно показать, что данная траектория представляет собой центральную кривую второго порядка (произвольно ориентированный эллипс) с центром в точке (I_{01}, I_{02}) . Пользуясь известными формулами аналитической

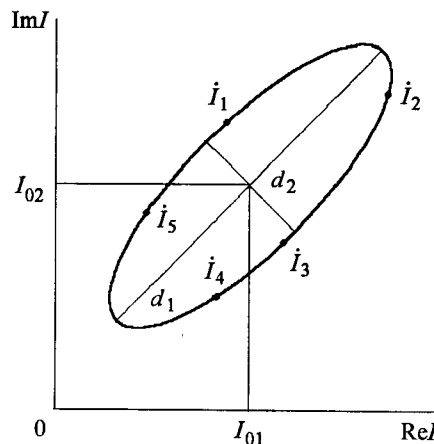


Рис. 1. Траектория в комплексной плоскости

геометрии [3] и учитывая принятые обозначения, запишем уравнение траектории в виде

$$a_{11}I_1^2 + 2a_{12}I_1I_2 + a_{22}I_2^2 + 2a_{13}I_1 + 2a_{14}I_2 + a_{33} = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты a_{ij} уравнения (4) можно получить путем вычисления определителя минора при соответствующем коэффициенте:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_{13} & a_{14} & a_{33} \\ I_{11}^2 & I_{11}I_{21} & I_{21}^2 & I_{11} & I_{21} & 1 \\ I_{12}^2 & I_{12}I_{22} & I_{22}^2 & I_{12} & I_{22} & 1 \\ I_{13}^2 & I_{13}I_{23} & I_{23}^2 & I_{13} & I_{23} & 1 \\ I_{14}^2 & I_{14}I_{24} & I_{24}^2 & I_{14} & I_{24} & 1 \\ I_{15}^2 & I_{15}I_{25} & I_{25}^2 & I_{15} & I_{25} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Например, коэффициент a_{11} равен определителю, полученному из (5) путем вычеркивания первой строки и первого столбца; a_{12} – определителю, взятому со знаком «-» вычеркиванием первой строки и второго столбца, и т. д.

Значение средней яркости $I_0 = (I_{01}, I_{02})$, соответствующее координатам центра кривой (4), определяем из системы линейных уравнений следующим образом:

$$I_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_{13} \\ -a_{14} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Значения контраста интерферограмм V_1, V_2 можно получить из следующих соотношений:

$$d_1^2 + d_2^2 = V_1^2 + V_2^2, \quad (7)$$

$$\frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{V_2^2}{V_1^2}, \quad (8)$$

где d_1 и d_2 – главные оси эллипса (см. рис. 1).

Параметры главных осей определяются инвариантом $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ и

собственными значениями λ_1, λ_2 , являющимися решением уравнения, которое получено из характеристической матрицы, составленной из коэффициентов (4):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Решая совместно (7) и (8), получим

$$V_1 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{11} + a_{22}} \frac{-A(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 \lambda_2)^2}}; \quad (10)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{a_{22} - A(\lambda_1 + \lambda_2)}{a_{11} + a_{22} (\lambda_1 \lambda_2)^2}}. \quad (11)$$

Подставив найденные неизвестные в (3), после нормировки получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{I}_{1i} = \frac{I_{1i} - I_{01}}{V_1 I_{01}} = \cos(\varphi + \delta_i); \\ \tilde{I}_{2i} = \frac{I_{2i} - I_{02}}{V_2 I_{02}} = \cos(\varphi + \varepsilon + \delta_i) \end{cases} \quad (i \in 0, \dots, m-1). \quad (12)$$

Используя тригонометрические преобразования и учитывая, что $\delta_0 = 0$, получим линейную систему уравнений относительно функций $\cos(\delta_i)$ и $\sin(\delta_i)$ вносимых фазовых сдвигов. В матричной форме система имеет вид

$$R^{-1}F = \tilde{I}, \quad (13)$$

где

$$\tilde{I} = [\tilde{I}_{12} \tilde{I}_{22}, \dots, \tilde{I}_{1m-1} \tilde{I}_{2m-1}]^T,$$

$$F = [\cos(\delta_1) \cdot \sin(\delta_1), \dots, \cos(\delta_{m-1}) \cdot \sin(\delta_{m-1})]^T$$

соответственно, а R – блочно-диагональная матрица размером $2(m-1) \times 2(m-1)$. Блочный элемент этой матрицы запишем как

$$R_{ii} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ \cos(\delta + \varepsilon) & -\sin(\delta + \varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Для определения синусов используем выражение $\sin(\bullet) = \pm \sqrt{1 + \cos^2(\bullet)}$, где $\cos(\bullet)$ определяется из (12). Решая уравнение (13) относительно F , находим искомые фазовые сдвиги. Вследствие неопределенности знака $\sin(\delta_i)$ система (13) имеет два решения, соответствующих направлению изменения вносимого фазового сдвига. Однако на практике, как правило, данное направление определяется конструкцией фазосдвигающего элемента и априори известно.

Описанный выше алгоритм позволяет производить расшифровку интерферограмм с произвольными фазовыми сдвигами. Погрешность определения разности фаз в этом случае зависит только от погрешности измерения интенсивностей по полю. Условно погрешности измерения интенсивности можно разделить на две группы: аддитивные и мультипликативные шумы. С учетом шумов интенсивность (1) в каждой точке траектории можно представить в виде

$$I_i = (I_{0n} + \Delta I_n) + (V_n + \Delta V_n) \cos(\varphi_n + \delta_m + \Delta \varphi_n), \quad (14)$$

где ΔI – аддитивный, а ΔV и $\Delta \varphi$ – мультипликативные шумы.

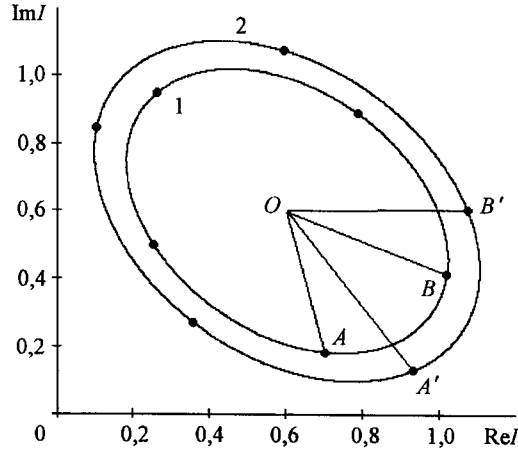


Рис. 2. Искажение траектории при воздействии комбинации шумов: траектория комплексных точек при отсутствии шумов (1); траектория при наличии мультипликативного и аддитивного шумов (2)

Наличие шумов приводит к искажению траектории точки. Рассмотрим влияние аддитивного шума на траекторию. Как видно из (14), наличие аддитивного шума ΔI приводит к смещению центра эллипса. Данное смещение является конформным, т. е. не приводит к искажению углов. При мультипликативном шуме по видности ΔV оси эллипса изменяются пропорционально, что также не приводит к изменению фазового угла. При фазовом шуме $\Delta \varphi$ происходит смещение точек по траектории, что приводит к изменению фазовых углов. Рассмотрим воздействие комбинации шумов (рис. 2). Эллипс 1 соответствует траектории без шумов, эллипс 2 – с шумами. Для наглядности совместим центры эллипсов.

Из рис. 2 видно, что если точки A' и B' вследствие шумов смещаются на разные углы, то фазовый угол AOB не равен углу $A'OB'$, следовательно, вносится погрешность фазового угла. Оценим ее величину. Очевидно, что в соответствии с видом шума происходят локальные смещения точки. Область, в которой может оказаться точка, является окружностью с радиусом, пропорциональным уровню шума (рис. 3). В этом случае смещение точки можно определить следующим образом:

$$\mathbf{R}_\Sigma = \sum_i \mathbf{R}_i, \quad (15)$$

где \mathbf{R}_i – вектор смещения точки под воздействием i -го шума. Следовательно, максимальное отклонение не превышает $R_{\max} \leq |\mathbf{R}_1| + |\mathbf{R}_2| + |\mathbf{R}_3| = R_\Sigma$. Для удобства оценки произведем проецирование точек эллипса (см. рис. 3) на окружность, диаметр которой равен большой оси эллипса. Тогда $\Delta \varphi = \eta \Delta \varphi'$, где $\eta = d_1/d_2$ – коэффициент искажения, а d_1 и d_2 – главные (большая и малая соответственно) оси эллипса. Из рис. 3 следует

$$\Delta \varphi' = \arctg \frac{\eta R}{d_1/2}. \quad (16)$$

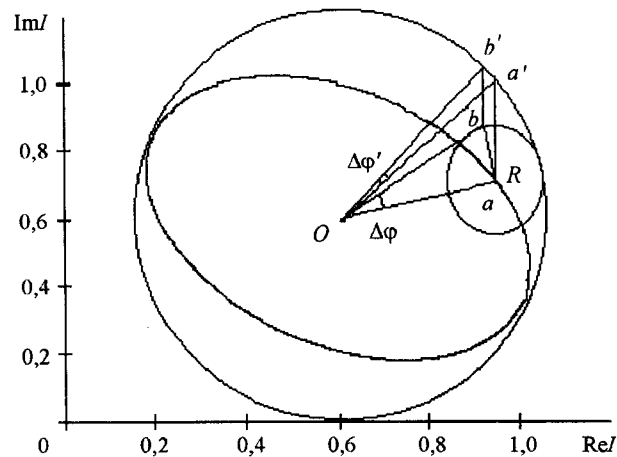


Рис. 3. Проекция точек траектории на окружность: истинное (a); искаженное значение точки (b); их проекции на окружность (a' , b')

Оценка влияния шумов производилась численным моделированием. В таблице показаны, например, значения для фазового угла 140° . Из таблицы видно, что при уровне шумов порядка 10 % величина погрешности определения фазового угла не превышает 1° . Для экспериментальной проверки алгоритма использовалась установка, схема которой представлена на рис. 4. Источник освещения 1 проецирует транспарант 2 (решетка Ронхи) на экран 5, где наблюдается система синусоидальных полос 4. Размер транспаранта 50×50 мм. Изображение вводится в компьютер с помощью устройства ввода 6. Фазовый сдвиг задается путем перемещения транспаранта 2 микрометрическим винтом 3. Перемещение контролируется с точностью до $\pm 2,5$ мкм, что при 20 полосах соответствует погрешности установки фазового угла $\lambda/4000$ или $0,1^\circ$.

Вид шума	Уровень шума, %	Среднее значение фазового угла, град
Аддитивный	10	140,86
	40	143,12
Мультипликативный по видности	10	139,52
	40	139,14
Мультипликативный по фазе	10	139,41
	40	132,16
Комбинированный	10	140,56
	40	132,39

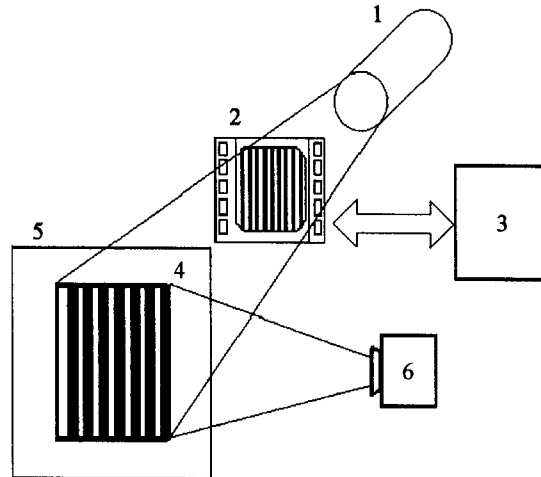


Рис. 4. Схема измерительной установки

После регистрации пяти интерферограмм и нахождения фазовых сдвигов искомая разность фаз определяется по трехточечной формуле при известных фазовых сдвигах

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{(I_2 - I_3) \sin \delta_1 + (I_3 - I_1) \sin \delta_2 + (I_1 - I_2) \sin \delta_3}{(I_3 - I_2) \cos \delta_1 + (I_1 - I_3) \cos \delta_2 + (I_2 - I_1) \cos \delta_3}. \quad (17)$$

Так как сдвигов в нашем случае пять, можно, перебирая возможные комбинации по три и усредняя результирующие фазовые значения, уменьшить погрешность, вызванную ошибками при регистрации значений интенсивности интерферограммы.

На рис. 5 показаны результаты расшифровки разности фаз по формуле (17): кривая 1 – при предполагаемых фазовых сдвигах 70, 140, 210 и 280°; 2 – после калибровки (коррекции) фазовых сдвигов по предлагаемому алгоритму. Действительные значения фазовых сдвигов составили: заданные углы – 71, 137, 208, 283° и измеренные – 71,2, 137,6, 208,3 и 283,5°.

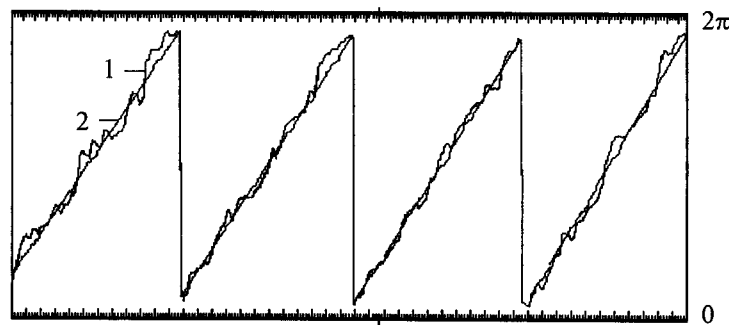


Рис. 5. Результат измерения разности фаз для одного из углов: без калибровки фазовых сдвигов (кривая 1); с калибровкой фазовых сдвигов (2)

Достигнутая в результате калибровки и усреднения по (17) погрешность измерения разности фаз не хуже $\lambda/50$.

Таким образом, предложен новый метод анализа интерферограмм и получен алгоритм, позволяющий устранить основную причину погрешности при измерениях методом пошагового фазового сдвига – ошибки при задании фазового сдвига.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Creath K. Phase-shifting speckle interferometry // Appl. Opt. 1985. 24, N 18. P. 3053.
2. Гужов В. И., Нечаев В. Г., Мишина Е. М. Коррекция нелинейных ошибок задания начальной фазы при расшифровке интерферограмм методом пошагового фазового сдвига // Автометрия. 1997. № 4. С. 35.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.

*Новосибирский государственный
технический университет,
E-mail: vig@ref.nstu.ru*

*Поступила в редакцию
23 октября 2001 г.*

Подписка на наш журнал – залог Вашего успеха!