

## ИЗМЕРЕНИЕ ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ МЕТОДОМ СДВИГОВОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

В.И.ГУЖОВ\*

Рассмотрены вопросы построения алгоритмов для расшифровки сдвиговых интерферограмм, основанные на решении уравнения Пуассона на прямоугольной сетке при использовании стандартной пятиточечной конечно-разностной аппроксимации и граничных условий Дирихле. Предложена схема интерферометра с внесением контролируемых фазовых и пространственных сдвигов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость регистрации фазовых характеристик оптических волновых фронтов возникает при решении ряда задач неразрушающего контроля: тестирование оптических и голографических элементов, измерение комплексного коэффициента пропускания газа, плазмы или биологических объектов, исследование напряженно-деформированного состояния объектов и т.п. Необходимость регистрации и выделения волнового фронта в оптике является более сложной проблемой по сравнению с аналогичными задачами в более длинноволновом диапазоне, поскольку основные оптические детекторы не позволяют непосредственно регистрировать комплексную амплитуду поля из-за высокой частоты световых волн ( $10^{14}$ - $10^{15}$ Гц), а реагируют лишь на усредненную интенсивность принимаемого излучения. Поэтому все существующие методы измерения фазы оптического фронта являются косвенными.

Наиболее широко используемые методы основаны на интерференции оптических полей. Если две электромагнитные волны когерентны, они имеют одну и ту же зависимость от времени, и при суперпозиции двух электромагнитных волн результирующая картина интенсивности может быть записана в виде:

$$I(x,y) = I_0(x,y) (1 + V(x,y) \cos(\Phi(x,y))), \quad (1.1)$$

где  $V(x,y)$  - видимость полос;  $\Phi(x,y) = \Phi_p(x,y) - \Phi_r(x,y)$  - разность фаз интерферирующих волн.

Из уравнения видно:

- 1) что существует бесконечное множество значений  $I_0$ ,  $V$ ,  $\Phi$  удовлетворяющих выражению (1.1);
- 2) из-за периодичности косинуса, фаза определяется только по модулю  $2\pi$ ;
- 3) могут быть измерены только разности фаз.

\* Лаборатория АЭИ, канд. техн. наук, докторант



Таким образом для определения фазы волнового поля необходима априорная информация о форме опорного фронта. Однако в реальных условиях не всегда возможно сформировать опорный волновой фронт с заданными характеристиками. В классической интерферометрии применялись в качестве опорных плоские, сферические или близкие к ним фронты. Исследование оптических фронтов значительно отличающихся от плоских или сферических проводилось с использованием компенсирующих элементов, которые изготавливались на основе априорной информации о форме. Использование в качестве компенсирующих линз голографических транспарантов значительно расширило тип изучаемых объектов. Однако все-таки необходима априорная информация для выбора транспаранта компенсирующего реальный фронт к близкому по форме опорному. Исследование произвольных волновых фронтов невозможно. Изготовление компенсирующих элементов значительно ухудшает метрологические характеристики измерений и усложняет эксперимент.

Методы сдвиговой интерферометрии свободны от этих недостатков, однако построение алгоритмов для расшифровки сдвигограмм произвольных оптических фронтов в настоящее время недостаточно изучено.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗОВЫХ РАЗНОСТЕЙ

В уравнении (1.1) три неизвестных. В [1] показано, что для однозначного определения фазы необходимо минимум три значения интенсивности  $I_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), полученных при внесении известных изменений в интерферирующие волны. Причем два из них могут быть линейно зависимы друг от друга, а третья линейно независимо с разностью первых двух. Линейная независимость достигается при использовании фазосдвигающих элементов.

Для трех уравнений (1.1) с известными сдвигами фаз  $f_1, f_2, f_3$  выражение для определения фазы имеет вид

$$\Phi(x, y) = \text{arctg} (A/B), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} A &= (I_3 - I_2) \cos f_1 + (I_1 - I_3) \cos f_2 + (I_2 - I_1) \cos f_3; \\ B &= (I_3 - I_2) \sin f_1 + (I_1 - I_3) \sin f_2 + (I_2 - I_1) \sin f_3. \end{aligned}$$

Существуют и другие выражения, полученные при большем числе фазовых сдвигов, каждое из которых имеет свои недостатки и преимущества, но общий вид (2.1) остается тем же самым. Наиболее часто используемым является алгоритм, предложенный Carge [2]. В отличие от других не требуется предварительной калибровки. Требуется только, чтобы значения на которые отличаются сдвиги были постоянными. Это особенно важно при использовании нескольких длин волн.

Для определения значений фазы в каждой точке необходимо четыре значения интенсивности, со сдвигом фазы на  $2\pi$  между ними. Фазовые значения вычисляются по формуле (2.1) при

$$A = \text{arctg} \{ [(I_1 - I_4) + (I_2 - I_3)] [3((I_2 - I_3) - (I_1 - I_4))] \}; \quad (2.2)$$



$$B = (I_2 + I_3) - (I_1 + I_4) .$$

### 3. УДАЛЕНИЕ ФАЗОВОЙ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ

Все известные алгоритмы анализа интерферограмм обладают фазовой неоднозначностью, вызванной периодичностью изменения интерференционной картины. Существует несколько методов удаления фазовой неоднозначности.

Наиболее распространенным является метод развертывания фаз. Полная фаза определяется, исходя из априорных допущении о плавности изменения фазы по полю, добавлением или вычитанием  $2\pi$  к значениям фазы, определенным в пределах периода.

Другой метод - это использование излучения с большой длиной волны [3]. Однако он требует применения источников излучения инфракрасного диапазона и приемников, чувствительных к ИК излучению. Динамический диапазон увеличивается пропорционально изменению длины излучения. При этом увеличение динамического диапазона приводит к уменьшению точности.

Подобный же эффект может быть получен при использовании двух длин волн [4]. Разности фаз, полученные при разных длинах, могут быть пересчитаны так, чтобы результат был эквивалентен измерениям с длиной волны

$$l_{eq} = l_1 l_2 / |l_1 - l_2| . \quad (3.1)$$

Например, при использовании двух длин волн 488 нм и 514 нм,  $l_{eq} = 9.47$  мкм. При этом точность, в отличие от предыдущего способа, определяется измерениями на наименьшей длине волны.

Нами предложен метод, который на порядок увеличивает динамический диапазон предыдущего метода, при той же точности [5]. Метод основан на теореме об остатках, известной в теории целых чисел. В отличие от предыдущего метода цены полос, определяемые выбранными длинами волн, не произвольны. Они выбираются из условия, чтобы целые числа, поставленные им в соответствие, были взаимно простыми. Динамический диапазон определяется произведением этих чисел. Например, если используются длины волн  $l_1$  и  $l_2$  такие, что соответствующим ценам полос могут быть поставлены в соответствие целые числа 633 и 529, то динамический диапазон равен: 633 волны  $l_2$ , т.е. 334.857 мкм. Однако при использовании этого метода важен выбор используемых длин волн.

При применении методов с несколькими длинами волн при построении оптической схемы интерферометров необходимо учитывать эффекты, связанные с хроматизмом оптических элементов.

### 4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФАЗЫ ПО ПОЛЮ РАЗНОСТИ ФАЗ

Из выражения (1.1) видно, что при интерференционных измерениях могут быть получены только разности фаз между интерферирующими полями. Фаза одной из волн может быть определена, если известен фазовый фронт другой. Необходимость использования эталонного опорного фронта существенно ограничивает применение интерференционных систем. От этого ограничения



свободны сдвиговые интерферометры. Однако они не получили широкого применения из-за сложности и неоднозначности интерпретации интерференционных картин. Развитие электроники и вычислительной техники делает возможным разработку методов расшифровки сдвигограмм, которые позволяют восстанавливать поля фаз с высокой точностью.

Как правило, набор фазовых разностей представлен зашумленными разностями в узлах прямоугольной сетки. Естественный подход к решению этой проблемы - оценивание распределений фаз по методу наименьших квадратов (МНК), т.е. минимизация суммарной квадратичной ошибки и получение оценки волнового фронта.

Существует два основных подхода: модальное и зональное оценивание. При модальном оценивании волновой фронт и фазовые разности раскладываются по набору базисных функций и по МНК определяются оптимальные коэффициенты разложения, а затем с некоторой точностью вычисляются значения фаз. В качестве ортогонального базиса наиболее часто используются полиномы Цернике [6], полиномы Лежандра [7], набор комплексных экспонент разложений в ряд Фурье [8]. Зональный подход заключается в регистрации фазовых разностей в точках согласно геометрии разбиения сенсорного устройства. Затем по МНК определяется соответствующая система нормальных уравнений относительно неизвестных значений фаз, которая решается тем или иным способом.

До последнего времени зональный подход использовался редко. Это было вызвано высокой трудоемкостью и низкой точностью при решении системы нормальных уравнений большой размерности. Можно показать, что система нормальных уравнений при зональном оценивании по своему виду совпадает с системой, получаемой при решении уравнения Пуассона на прямоугольной сетке при использовании стандартной пятиточечной конечно-разностной аппроксимации и граничных условия Дирихле [11]. Известны эффективные прямые алгоритмы решения уравнения Пуассона, основанные на быстром преобразовании Фурье [9].

Зашумленные фазовые разности для двух направлений (по  $x$  и  $y$ )  $r_{ij} = \phi_{ij} - \phi_{i-1,j} + e_{ij}$ ,  $c_{ij} = \phi_{ij} - \phi_{i,j-1} + h_{ij}$ , где  $e_{ij}$  и  $h_{ij}$  - отклонения от действительных фазовых разностей. Цель - получить оценку  $\phi_{ij}$  в каждой точке по зашумленным фазовым разностям. Задача переопределена, поэтому используем метод наименьших квадратов для нахождения оценок фаз.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [(r_{ij} - \phi_{ij} + \phi_{i-1,j})^2 + (c_{ij} - \phi_{ij} + \phi_{i,j-1})^2]. \quad (4.1)$$

Дифференцируя (4.1) по  $\phi_{ij}$  и приравнявая результаты нулю, получим систему уравнений:

$$4\phi_{ij} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1} = r_{ij} - r_{i+1,j} + c_{ij} - c_{i,j+1}.$$



$$2 \leq M-1; 2 \leq j \leq N-1. \quad (4.2)$$

Если допустить периодичность массива фаз, то уравнение верно для всех  $M, N, i-1, j-1$  определяются по модулю  $M$  и  $N$ . Для аперриодического случая при больших размерностях массива существенные отличия имеют место только в граничных точках.

Определим

$$v_{ij} = r_{ij} - r_{i+1,j} + c_{ij} - c_{i,j+1}. \quad (4.3)$$

Для больших  $M$  и  $N$  система нормальных уравнений (4.2) может быть представлена системой матричных уравнений:

$$A \Phi = V, \quad (4.4)$$

где  $A$  - пятидиагональная матрица;  $\Phi$  - вектор столбец  $N \times M \times I$  вида

$$\{\phi_{11} \phi_{12} \phi_{13} \dots \phi_{21} \phi_{22} \dots \phi_{M,N-1} \phi_{MN}\}.$$

В [9] показано, что матричное уравнение (4.4) с пятидиагональной матрицей  $A$  может быть сведено к системе  $N$  несвязных матричных уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & -1 & & 0 \\ -1 & \lambda_1 & -1 & \\ & & & \\ 0 & & -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_{1l} \\ \phi_{2l} \\ \vdots \\ \phi_{il} \\ \vdots \\ \phi_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1l} \\ v_{2l} \\ \vdots \\ v_{il} \\ \vdots \\ v_{ml} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

где  $l = 1, 2, \dots, N; \lambda_l = 4 - 2\cos(lp/(N+1))$ , а  $v_{il}$  ( $1 \leq i \leq M$ ) -  $l$ -й столбец матрицы  $[v_{ij}]$ , размерности  $M \times N$ , каждая  $k$ -я строка вычисляется, как первые  $N$  элементов последовательности, являющейся дискретным синус-преобразованием Фурье от последовательности  $2 \times (N-1)$  элементов вида:

$$\{0, v_{k,1}, v_{k,2}, \dots, v_{k,N}, 0, 0, 0\},$$

где  $v_{k,j}$  ( $1 \leq j \leq N$ )  $k$ -я строка матрицы  $[v_{ij}]$ .

Существует много способов решения системы матричных уравнений (4.5). Наиболее распространенный - метод прогонки. Решив систему, получим элемент



ты матрицы  $[j_{ij}]$ . Теперь можно вычислить искомую матрицу фаз  $[\phi_{ij}]$ . Каждая  $k$ -я строка искомой матрицы определяется как первые  $N$  элементов последовательности, являющейся дискретным синус-преобразованием Фурье от последовательности  $2x(N+1)$  элементов вида:

$$\{0, j_{k,1}, j_{k,2}, \dots, j_{k,N}, 0, 0, 0\}.$$

где  $j_{kj}$  ( $1 \leq j \leq N$ )  $k$ -я строка матрицы  $[j_{ij}]$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для однозначного восстановления комплексной амплитуды произвольного оптического фронта необходимо построить сдвиговой оптический интерферометр, в котором предусмотрено:

- внесение управляемого фазового сдвига для определения разности фаз в пределах периода;
- изменение цены полосы для удаления фазовой неоднозначности;
- одновременное получение двух сдвигограмм по  $x$  и  $y$  со сдвигом на единицу раstra приемного устройства.

Интерферометр (рисунок) может быть построен по схеме, предложенной в

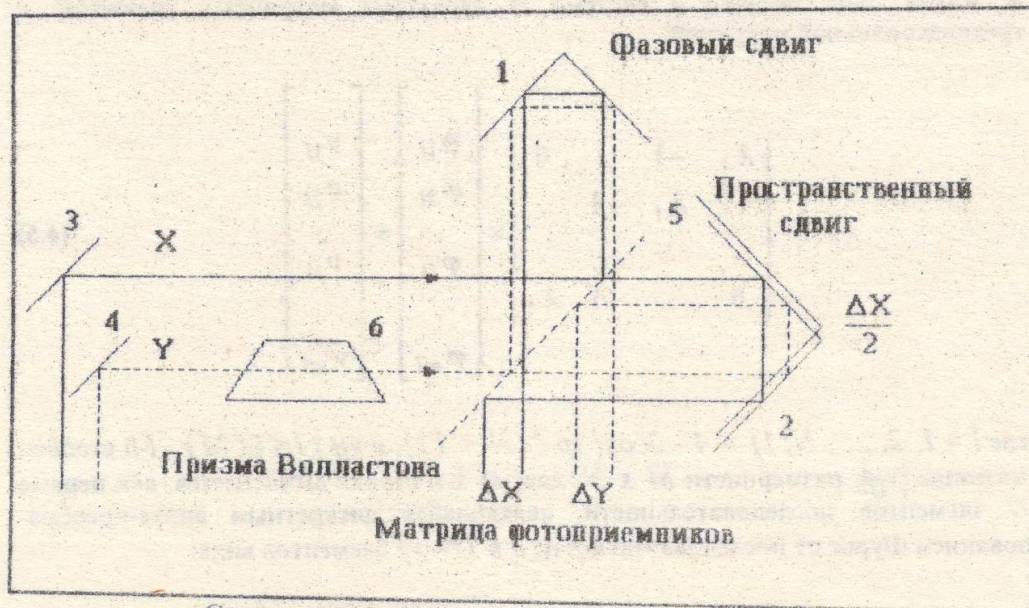


Схема интерферометра пространственного сдвига.

[10]. Схема состоит из полупрозрачного 5 и отражающих зеркал 3 и 4, призмы Волластона 6, поворачивающей изображение на  $90^\circ$ , отражающей призмы 1,



закрепленной на пьезокерамике для внесения фазового сдвига, и призмы 2 для внесения пространственного сдвига. Перемещение осуществляется шаговым двигателем. Фазовый и пространственные сдвиги вносятся одновременно в X и Y направлениях. На фотодетекторе одновременно отображаются две интерференционные картины: с пространственным сдвигом по X и по Y. Цена полосы меняется при освещении объекта другой длиной волны.

Для удаления фазовой неоднозначности необходимо произвести несколько измерений при различных значениях длин волн. При фиксированной длине волны регистрируется серия сдвигограмм, каждая из которых получена при соответствующих значениях контролируемых фазовых сдвигов.

[1] SCHMIDT-WIENMAR H.G. *Spatial distribution of magnitude and phase of optical-wave fields.* - J.Opt.Soc.Am. - 1973. - V.63, No.5. - P. 547-555.

[2] CARRE P. *Installation et utilisation du comparateur photoelectrique et interferential du Bureau International des Poids et Mesures* // Metrologia. - 1966. - 2(1). - P. 13-23.

[3] PRETTYJOHNS K., DEVORE S., DERENIAK E., WYANT J. *Design and operation of a real time interferometer working at 3.8 mkm* // Proceeding of SPIE. - 1983. - V. 429. - P. 142-147.

[4] CREATH K. *Step height measurement using two-wavelength phase-shifting interferometry.* - Appl.Opt. - 1987. - V.26, № 14. - P. 2810-2816.

[5] ГУЖОВ В.И., СОЛОДКИН Ю.Н. *Использование свойств целых чисел для расшифровки интерферограмм* // Оптика и спектроскопия. - 1988. - Т. 65, вып.5. - С. 1123-1128.

[6] CUBATCHINI R. *Modal wave-front estimation from phase derivative measurements* // J.Opt.Soc.Am. - 1979. - Vol.69. - P. 972-977.

[7] SOUTHWELL W.H. *Wave-front estimation from wave-front slope measurements* // J.Opt.Soc.Am. - 1980. - Vol.70. - P. 998-1006.

[8] FREISHLAD K.R., KOLIOPOULOS C.I. *Modal estimation of a wave-front from difference measurements using the discrete Fourier transform* // J.Opt.Soc.Am. - 1986. - P. 1862-1961.

[9] FISCHER D., GOLUB G., HAID O., LEIVA C., WIDLUND O. *On Fourier-Toeplitz Methods for Separable Elliptic Problems.* - Mathematic of Computation. - 1974. - V.28. - № 126. - P. 349-368.

[10] U.S Patent № 4, 645, 346 Feb.24. 1987.

[11] FROST R.L., RUSHFOTH C.K., BAXTER B.S. *Fast FFT - based algorithm for phase estimation in speckle imaging* // Applied Optics. - 1980. - V.24, № 14. - P.4241-4246.