

Область возможного применения дискретных преобразований Фурье и Френеля

Гужов В.И., Емельянов В.А., Хайдуков Д.С.
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

Аннотация: В статье рассматриваются границы применимости преобразования Френеля и Фурье. Показано, что в оптическом диапазоне дискретное преобразование Френеля можно применять для случаев, когда расстояние до объекта сравнимо с размерами объекта.

Ключевые слова Дискретизация, квантование, преобразование Фурье, преобразование Френеля, цифровая голография, цифровая обработка сигналов.

ВВЕДЕНИЕ

Существующая теория описывает распространение волнового поля в соответствии с принципом Гюйгенса [1]. Задолго до открытия

электромагнитной природы света, Гюйгенс предложил трактовать распространение света с использованием понятия волновых поверхностей [2]. Пусть известна какая-либо волновая поверхность, тогда каждую точку этой поверхности можно рассматривать как вторичный источник колебаний, а затем, следующие волновые поверхности находить как огибающие сферических волн, испускаемых этими точечными источниками (Рис. 1).

В соответствии с принципом Гюйгенса поле в любой точке новой волновой поверхности находится как суперпозиция полей, приходящих в эту точку от различных точек первичной поверхности.

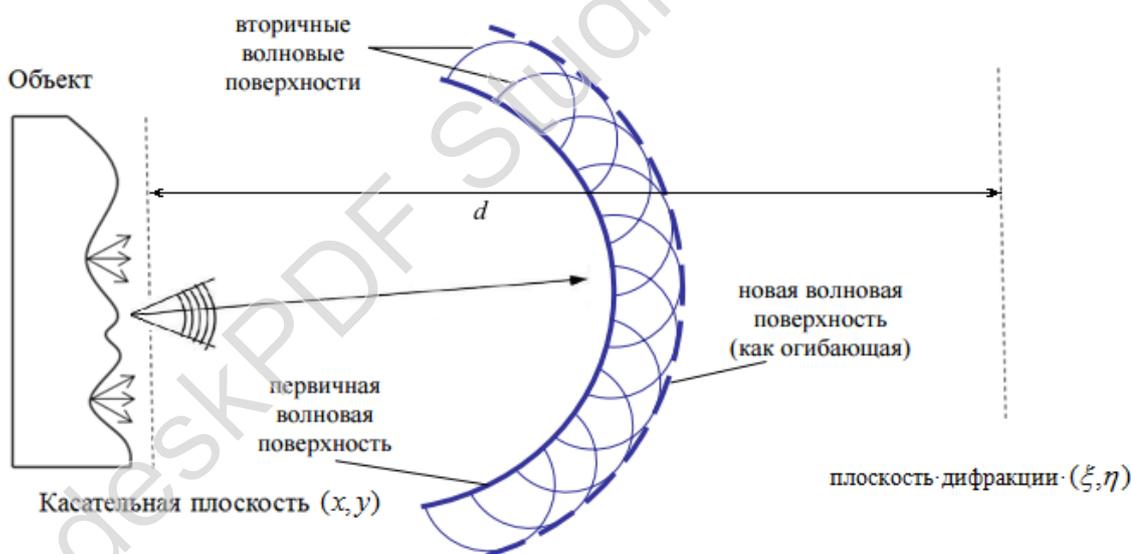


Рис. 1. Принцип Гюйгенса

Френель дал математическую формулировку принципа Гюйгенса и предложил учитывать фазы колебаний, пришедших от различных точек, при их сложении. Киргофф придал этой идее строгий математический вид и показал, что принцип Гюйгенса-Френеля можно считать приближенной формой интегрального выражения.

Проблемы, возникающие при изучении дифракционных явлений, являются наиболее трудными, и в оптике их редко удается довести до строгого математического решения. В большинстве случаев, представляющих практический интерес, из-за математических трудностей, приходится прибегать к

приближенным методам [3]. В этом случае накладываются определенные допущения, которые ограничивают область действия.

Дискретные преобразования Френеля часто используются при расстояниях, значительно меньших, чем допускаются классическими ограничениями. При этом результаты расчетов хорошо соответствуют практическим исследованиям. Целью данной статьи является анализ возможной области действия дискретных преобразований Френеля и Фурье при исследованиях в оптическом диапазоне.

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФРЕНЕЛЯ И ФУРЬЕ

Если пересчитать амплитуду и фазу поля, отражённого объектом на плоскость (x, y) касательную к нему и параллельную плоскости наблюдения (ξ, η) (рис.1), тогда интегральное соотношение Кирхгофа можно переписать в следующем виде [1]:

$$\Gamma(\xi, \eta) = \int_{(x,y)} b_1(x, y) T_d(x, y, \xi, \eta) dx dy, \quad (1)$$

где $b_1(x, y)$ - комплексная функция, полученная в результате пересчёта, $T_d(x, y, \xi, \eta)$ - ядро преобразования между двумя плоскостями, d - расстояние между этими плоскостями (рис.1). Ядро преобразования имеет вид:

$$T_d(x, y, \xi, \eta) = \frac{\exp(-i \frac{2\pi}{\lambda} r(x, y, \xi, \eta, d))}{r(x, y, \xi, \eta, d)} K(\alpha)$$

(2).

Интеграл (1) с ядром (2) является математической формулировкой принципа Гюйгенса и называется дифракционным интегралом или интегралом Гюйгенса- Френеля. Первый множитель в (2) описывает распространение элементарной вторичной сферической волны от поверхности (x, y) к поверхности (ξ, η) . Множитель $K(\alpha)$ описывает зависимость амплитуды излучаемых вторичных волн от угла дифракции α . Угол дифракции - это угол между нормалью к плоскости наблюдения и вектором r_{01} (рис.2).

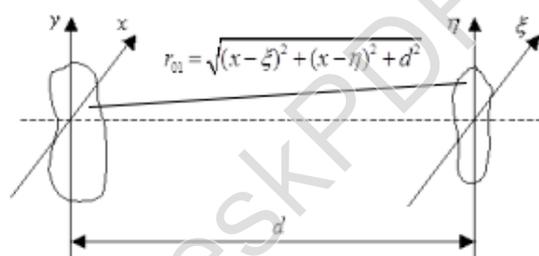


Рис. 2. Плоскость касательная к объекту (x, y) и плоскость дифракции (ξ, η)

Независимо от формы дифракционного интеграла начальное значение этой функции $K(0) = 1 / i\lambda = -i / \lambda$. λ - длина волны излучения. Френель полагал, что $K(\alpha)$ убывает от начального значения до нуля при изменении угла от 0 до $\pi / 2$, но окончательное выражение не определил. Кирхгоф рассмотрел распространение сферических волн через отверстия, решая уравнение Гельмгольца с учётом граничных условий, описывающих свойства экрана и отверстия, и пришёл к выводу, что

$$K(\alpha) = \frac{1}{i\lambda} \left(\frac{1 + \cos(\alpha)}{2} \right). \quad (3)$$

В формулировке Рэля-Зоммерфельда множитель $K(\alpha)$ определяется следующим образом [4]:

$$K(\alpha) = \frac{1}{i\lambda} \cos(\alpha). \quad (4)$$

С учетом (4) ядро преобразования (2) будет выглядеть следующим образом:

$$T_d(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp[i2\pi\lambda^{-1} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + d^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + d^2}} \cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) \quad (5)$$

Применение дифракционного интеграла с ядром (2) для описания распространения поля имеет свои ограничения. Для анализа дифракционных картин в области, прилегающей к касательной плоскости (Рис. 1), когда расстояние между плоскостями меньше длины волны, следует непосредственно искать решение волнового уравнения с учётом жёстких граничных условий, описывающих свойства объекта.

Для расчёта дифракционных картин на достаточном удалении от экрана с отверстием, когда расстояние намного больше длины волны, широко применяются приближённые и более простые решения задачи дифракции: приближение Френеля и приближение Фраунгофера.

Приближение Френеля. Будем предполагать, что геометрические размеры объекта намного меньше, чем расстояние d до плоскости наблюдения. Кроме того, предположим, что в плоскости наблюдения рассматривается только конечная область вблизи оси z и расстояние d много больше максимального размера этой области. С учетом этих допущений можно считать, что с точностью не хуже 5% $\cos(\bar{n}, \bar{r}_{01}) \approx 1$, если угол $(\bar{n}, \bar{r}_{01}) \approx 1$ не превышает 18 градусов [4]. Величину r_{01} в знаменателе (5) можно заменить на d .

В этом случае ядро преобразования (5) можно представить в виде:

$$T_d(x, y, \xi, \eta) \approx \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + d^2} \right] \quad (6)$$

Однако величину r_{01} , входящую в экспоненту, нельзя просто заменить на d , поскольку число $k = 2\pi\lambda^{-1}$, которое входит как множитель в экспоненту, очень большое. Поэтому используем аппроксимацию корня разложением его в ряд. Точная формула для расстояния имеет вид

$$r_{01} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + d^2} = d \sqrt{\left(\frac{x-\xi}{d}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{d}\right)^2 + 1} \quad (8)$$

Для аппроксимации удобно воспользоваться разложением квадратного корня в ряд

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots, \quad |b| < 1 \quad (7)$$

Предположим, что квадратный корень достаточно хорошо аппроксимируется первыми двумя членами этого разложения. Тогда

$$r_{01} \approx d \sqrt{\left(\frac{x-\xi}{d}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{d}\right)^2 + 1} \approx d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{d}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-\eta}{d}\right)^2 \right] \quad (9)$$

Это приближение называется приближением Френеля. Приближение Френеля описывает дифракцию слаборасходящихся пучков. Фактически мы заменяем сферические вторичные волны Гюйгенса поверхностями второго порядка.

Когда расстояние d достаточно велико для того, чтобы это выражение выполнялось, говорят, что наблюдатель находится в области **дифракции Френеля**

Выражение (5) для ядра преобразования будет выглядеть следующим образом:

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda d}\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_1(x, y) \exp\left[i\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda d}\right] \exp\left[-i\frac{2\pi(x\xi + y\eta)}{\lambda d}\right] dx dy \quad (14)$$

Приближение Фраунгофера. Расчет дифракционной картины становится еще проще, если принять еще более жесткие ограничения. Если принять предположение Фраунгофера

$$d \gg \frac{\pi}{\lambda}(x^2 + y^2)_{\max} \quad (15)$$

то квадратичный фазовый множитель становится

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda d}\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_1(x, y) \exp\left[-i\frac{2\pi(x\xi + y\eta)}{\lambda d}\right] dx dy \quad (16)$$

Без учета фазовых множителей, стоящих перед интегралом, это выражение представляет собой Фурье-образ функции $b_1(x, y)$ для частот

$$v_x = \xi / \lambda d \quad \text{и} \quad v_y = \eta / \lambda d$$

$$\mathfrak{F}_{b_1}(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_1(x, y) \exp\{-i2\pi(xv_x + yv_y)\} dx dy \quad (17)$$

$$T_d(x, y, \xi, \eta) \approx \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[\frac{i2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left\{\frac{i\pi[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}{\lambda d}\right\} \quad (10)$$

Если в разложении квадратного корня (9) сохраняем только два члена ряда, тогда величина ошибки при вычислении r_{01} не превосходит по модулю третьего члена ряда:

$$\Delta r_{01} = d \left\{ \frac{1}{8d^4} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2 \right\} \quad (11)$$

При аппроксимации корня сферические волны заменяются поверхностями второго порядка. Такая аппроксимация накладывает достаточно большие ограничения на размер объекта, расстояние d и размеры области наблюдения.

Можно потребовать, чтобы максимальное изменение фазы при рассеивании света от объекта, вносимое членом более высокого порядка, было много меньше 1 рад.

$$\exp\left[\frac{i2\pi d}{\lambda} \left\{ \frac{1}{8d^4} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2 \right\}\right] = \exp\left[\frac{i\pi}{4\lambda d^3} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2\right] \ll 1 \quad (12)$$

Это условие будет выполнено при выполнении следующего выражения:

$$d^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]_{\max} \quad (13)$$

После разложения квадратичных членов в экспоненте (10) получим запись интегрального соотношения Кирхгофа (1) в виде (14):

примерно равным единице. В приближении Фраунгофера поверхности анализа являются плоскостями. Таким образом, в области **дифракции Фраунгофера** можно записать:

II. ЗОНЫ ДЕЙСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФРЕНЕЛЯ И ФУРЬЕ

В области оптических частот условия, необходимые для выполнения дифракции Фраунгофера, могут быть достаточно жесткими.

Для преобразования Фраунгофера расстояние, на котором преобразование можно применять, определяется выражением (15).

Оценим допустимое значение расстояния для

преобразования Фраунгофера.

Если размер объекта $2x_{\max}=2,5$ см, то допустимое расстояние, на котором выполняется преобразование Фраунгофера: $x_{\max}=2,5*10^{-2}$ м и $y_{\max}=2,5*10^{-2}$ м, $x_{\max}^2 + y_{\max}^2 = 6,25*10^{-4}$ м². Пусть длина волны равна $0,6*10^{-6}$ м, тогда $\pi / \lambda \approx 5,24*10^6$ м⁻¹. Подставляя эти значения в (15) получим $d \gg 3275$ м. Таким образом, преобразование Фурье можно применять при удалении объекта более чем на 3 км от области регистрации.

Теперь оценим допустимое значение расстояния для преобразования Френеля при тех же параметрах объекта.

Для оценки границ применимости приближения Френеля принято, что анализ дифракционных картин ведётся в области, размер диаметра которой больше, чем у объекта рассеивания в 4 раза. Если размер объекта 2,5 см, то размер области рассеивания 10 см. В этом случае $(x - \xi)_{\max} = 7,5$ см и $(x - \eta)_{\max} = 7,5$ см. Для преобразования Френеля ограничение расстояния определяется выражением (13).

$$\sqrt[3]{\pi / (4\lambda)} \approx 1,1*10^2 \text{ м}^{-1/3}$$

$$\sqrt[3]{\left[\left((x - \xi)_{\max}^2 + (x - \eta)_{\max}^2 \right)^2 \right]} = 23,3*10^{-2} \text{ м}^{2/3}$$

Подставляя эти значения в (13) получим $d \gg 25,6$

$$\Gamma(r, s) = -\exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda d} \left[\left(\Delta \xi \left(i - \frac{N_x}{2} \right) \right)^2 + \left(\Delta \eta \left(j - \frac{N_y}{2} \right) \right)^2 \right] \right\} \mathfrak{F}_{b_1} \left(b_1(k, l) \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda d} \left[\left(\Delta \xi \left(k - \frac{N_x}{2} \right) \right)^2 + \left(\Delta \eta \left(l - \frac{N_y}{2} \right) \right)^2 \right] \right\} \right), \quad (18)$$

где $N_x \times N_y$ - число элементов дискретизации в плоскости регистрации, $\Delta \xi, \Delta \eta$ - размер элементов квантования, $\mathfrak{F}_{b_1}(\cdot)$ - дискретное преобразование Фурье.

Дискретное преобразование Френеля использует сумму волн, каждая из которых

м. Т.е., при указанных параметрах, преобразование Френеля можно использовать на расстоянии более 25 м.

Размеры реальных оптических установок таковы, что плечи оптических пучков в них намного меньше указанных расстояний. Однако в экспериментальных оптических установках преобразование Френеля можно использовать, если воспользоваться дискретной формой представления этого преобразования. В [6] рассмотрена возможность использования преобразования Френеля в акустической, сейсмической и радиологической в случае, когда расстояние до объекта сравнимо с размерами объекта. Рассмотрим применимость дискретного преобразования Френеля в оптическом диапазоне.

II. ЗОНЫ ДЕЙСТВИЯ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФРЕНЕЛЯ И ФУРЬЕ

В [5] показан процесс дискретизации преобразований Френеля и Фурье. В [7] приведена модифицированная схема преобразования Френеля, которая не содержит фазовых ошибок в зависимости от расстояния. С учетом круговой симметрии сферических фронтов модифицированное преобразование Френеля можно представить как

рассеивается на площади размером Δx . Если Δx достаточно мало, то возможно выбрать расстояние d , на котором погрешность определения фазы будет малой (рис. 3).

По мере удаления от поверхности предмета кривизна вторичных сферических волн уменьшается (рис. 4).

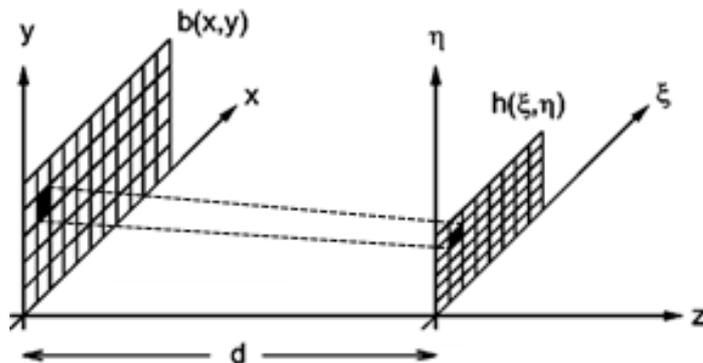


Рис. 3 – Соответствие размеров пикселей в предметной области и области голограммы.

составит меньше $\pi/100$. Начиная с этого расстояния можно без существенных фазовых искажений использовать преобразование Френеля.

$$\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}\left[\left(\Delta\xi\left(k-\frac{N_x}{2}\right)\right)^2+\left(\Delta\eta\left(l-\frac{N_y}{2}\right)\right)^2\right]\right\} \quad (23)$$

С увеличением расстояния этот множитель становится равным нулю. Поэтому преобразование Френеля постепенно переходит в преобразование Фурье (поскольку фазовый множитель дает только добавку к фазе).

Это расстояние зависит от размера объекта и длины волны. В [7] показано, что это расстояние может быть достаточно большим.

Пусть размер объекта $X_{\max} = 5,12$ см, число элементов дискретизации $N_x \times N_y = 1024 \times 1024$, тогда размер одного элемента дискретизации будет равен 50 мкм. Тогда при $d = 1$ км кривизна фронта (23) составит $0,02\pi$. При $d = 2$ км кривизна фронта составит $0,01\pi$. В этом случае преобразование Френеля переходит в преобразование Фурье.

ВЫВОДЫ

Показано, что стандартные алгоритмы расчета, которые определяют допустимую величину расстояний, при которых можно использовать преобразование Френеля не работают при небольших размерах объекта

Рассмотрен численный алгоритм, позволяющий определить область допустимых границ использования преобразований Френеля и Фурье.

Для дискретного преобразования Френеля граница допустимых областей применения составит от 20 см и более, при длине волны 0,6 мкм и размере объекта около 5 см. Таким образом, показано, что и в оптическом диапазоне измерений можно применять дискретное преобразование Френеля для случаев, когда расстояние до объекта сравнимо с размерами объекта.

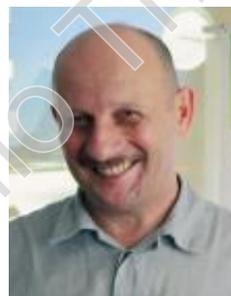
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований «Разработка методов сверхразрешения в цифровой голографической интерферометрии» (Грант № 16-08-00565).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука. 1973. 719 с.
- [2] В.М. Домненко, М.В. Бурсов, Т.В. Иванова. Моделирование формирования оптического изображения. Учебное пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2011 -141 с.
- [3] Математическая модель распространения света в пространстве. Гужов В.И., Бердников П.А.,

Выражение для дискретных преобразований Френеля и Фурье отличаются фазовым множителем

- Кузнецов Р.А. Автоматика и программная инженерия, Новосибирск, 2013. №1(3) С. 121–127.
- [4] Дж. Гудмен Введение в фурье-оптику. Москва: Мир. 1970. 363 с.
 - [5] Ярославский Л.П., Мерзляков Н.С. Цифровая голография. М.: Наука. 1982. 219 с.
 - [6] Мерзляков Н.С., Попова Н.Р. Некоторые особенности использования дискретного преобразования Френеля при цифровом восстановлении голограмм. Автотметрия. №5. 1987. с. 17-22.
 - [7] Представление преобразования Френеля в дискретной форме. Гужов В.И., Несин Р.Б., Емельянов В.А. Автоматика и программная инженерия, Новосибирск. 2016. № 1(14), с. 91–96.



Владимир Гужов - профессор кафедры ССОД Новосибирского Государственного Технического университета, доктор технических наук. Является автором более 170 научных работ. Область научных интересов:

высокоточные интерференционные измерения, безошибочные вычисления, теория чисел.
e-mail: vig@nstu.edu.ru



Виктор Емельянов – аспирант, каф. ССОД НГТУ. Область научных интересов: устранение фазовой неоднозначности, цифровая голография.

Хайдуков Дмитрий – ассистент, каф. ССОД НГТУ, к.т.н.. Является автором более 20 научных работ. Область научных интересов: расшифровка интерферограмм, цифровая голография.

**The Area of Possible Application of
Discrete Fourier transform and Fresnel
transform**

V.I. Guzhov, V.A. Emelyanov, D.S. Hajdukov

REFERENCES

- [1] M.Born, E.Volf Principles of Optics. Seventh (Expanded) Edition, Cambridge University Press. 1980. (first published 1959). 936 p.
- [2] V.M. Domnenko, M.V. Bursov, T.V. Ivanova. Modelirovanie formirovanija opticheskogo izobrazhenija. Uchebnoe posobie. – SPb: NIU ITMO, 2011 -141 s.
- [3] Matematicheskaja model' rasprostraneniya sveta v prostranstve. Guzhov V.I., Berdnikov P.A., Kuznecov R.A. Avtomatika i programmaja inzhenerija, Novosibirsk. 2013. №1(3) S. 121–127.
- [4] J.W. Goodman Introduction to fourier optics. Roberts and Company Publishers, 2005. 491 p.
- [5] Jaroslavskij L.P., Merzljakov N.S. Cifrovaja golografija. M.: Nauka. 1982. 219 s.
- [6] Merzljakov N.S., Popova N.R. Nekotorye osobennosti ispol'zovanija diskretnogo preobrazovanija Frenelja pri cifrovom vosstanovlenii gologramm. Avtometrija.- №5. 1987. s. 17-22.
- [7] Presentation Fresnel transform in the discrete form. Guzhov V.I., Nesin R.B., Emelyanov V.A. Automatics & Software Enginery, Novosibirsk. 2016. №1(14) P. 91–96.

deskPDF Studio Trial