

Использование модулярной арифметики при фазовых измерениях

Гужов В.И., Кабак Е.С., Орлов И.С.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

Аннотация: В статье рассматривается новый алгоритм перехода от модулярного представления чисел к позиционному, который может быть использован при фазовых измерениях в реальных системах.

Ключевые слова: Теория чисел, модулярная арифметика, фазовая неоднозначность, интерференционные методы измерений.

I. ВВЕДЕНИЕ

Интерференционные методы измерений в качестве эталона используют длину волны освещения. Следствием этого является периодичность результатов фазовых измерений, связанная с периодичностью световой волны. Для повышения динамического диапазона необходимо устранить фазовую неоднозначность.

Общий способ (развертка фазы), который применяется для устранения этой проблемы, основан на добавлении (или вычитании) значений кратных периоду к измеренным значениям.

Однако при использовании методов развертки фазы возникает ряд проблем. Процесс определения скачков фазовых переходов требует поэлементного сравнения фаз в смежных точках фазового поля. При наличии шумов фиксируются ложные фазовые переходы. Ошибочное определение фазового перехода приводит к распространению и накоплению ошибок по всей области поля, что приводит к неверной интерпретации формы восстановленного фазового профиля. Для устранения этих ошибок используются различные подходы, основанные на методах локальной и глобальной оптимизации, теории сигналов, обработки изображений, динамического программирования, статистических подходов к оценке вероятностей фазовых переходов, эвристических алгоритмов, искусственного интеллекта, комбинирования различных методов [1, 2].

В [3, 4] приведен метод восстановления абсолютных значений измеряемой величины по значениям нескольких измерений в пределах различных периодов. Если значения этих периодов соотносятся как взаимно простые числа, то максимальный диапазон абсолютных значений определяется произведением значений, поставленных в соответствие периоду. В литературе этот метод получил название G-S алгоритм [5–8]. Достоинствами метода является возможность устранения фазовой неоднозначности в каждой точке независимо от других и существенное увеличение динамического диапазона.

Исходными данными являются результаты измерений одной и той же величины L при различных значениях периодов – m_1 и m_2 . Если измеренные в пределах периода значения b_1 и b_2 отложить по осям вертикали и горизонтали, можно получить таблицу, значения которой будут удовлетворять абсолютным значениям искомой измеряемой величины. В общем случае, абсолютная величина L является решением системы сравнений

$$\begin{cases} L \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ L \equiv b_2 \pmod{m_2} \end{cases} \quad (1)$$

Максимальный диапазон однозначного определения абсолютных значений определяется наибольшими взаимно простыми сомножителями в значениях периодов. Если m_1 и m_2 – взаимно простые числа, то максимальный диапазон равен произведению m_1 на m_2 .

Недостаток метода: он неустойчив. Даже небольшие погрешности при измерениях начальных фазовых значений приводят к значительным ошибкам при определении полной фазы, поэтому широкого распространения метод не получил.

В этой статье нами предлагается новый способ решения системы сравнений на основе геометрического подхода, который позволяет учесть погрешность измерений и преодолеть проблему неустойчивости решений.

II. МОДУЛЯРНАЯ АРИФМЕТИКА

Метод модулярной арифметики состоит в том, чтобы оперировать не непосредственно числом a , а его остатками от деления на некоторые числа m_i .

$$\begin{aligned} b_1 &= a \pmod{m_1}, \\ b_2 &= a \pmod{m_2}, \\ &\dots, \\ b_k &= a \pmod{m_k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Числа (b_1, b_2, \dots, b_k) легко вычислить делением числа a на простые целые числа m_i . И наоборот, зная (b_1, b_2, \dots, b_k) , можно при некоторых условиях всегда восстановить a . Поэтому (b_1, b_2, \dots, b_k) можно рассматривать как новый тип представления числа a .

Преимущество модулярного представления в том, что операции сложения, вычитания и умножения выполняются очень просто [9]:

$$(b_1, b_2, \dots, b_k) + (c_1, c_2, \dots, c_k) =$$

$$\begin{aligned}
 &=(b_1 + c_1) \bmod m_1, \dots, (b_k + c_k) \bmod m_k & \dots & & (5) \\
 &(b_1, b_2, \dots, b_k) - (c_1, c_2, \dots, c_k) = & x \equiv b_k \pmod{m_k} & \\
 &=(b_1 - c_1) \bmod m_1, \dots, (b_k - c_k) \bmod m_k \\
 &(b_1, b_2, \dots, b_k) * (c_1, c_2, \dots, c_k) = \\
 &=(b_1 * c_1) \bmod m_1, \dots, (b_k * c_k) \bmod m_k
 \end{aligned}$$

Если предусмотрена возможность параллельного выполнения операций, применение модулярной арифметики дает значительное преимущество. Операции, связанные с разными модулями, могут выполняться одновременно, что приводит к сокращению времени их выполнения. Однако существует ряд недостатков модулярного представления, которые ограничивают его использование.

1. Трудно проверить является число в модулярном представлении большим или меньшим, чем другое.
2. Трудно проверить возникло ли переполнение в результате математической операции.
3. Сложно выполнить операцию деления.

Поэтому применение модулярной арифметики оправдано только в том случае, если существуют быстрые алгоритмы перехода от модулярного представления к позиционному и обратно.

Для нахождения числа по набору остатков можно использовать «китайскую» теорему об остатках. Частный случай этой теоремы был сформулирован китайским математиком Сунь Цю (между 280 и 473 г. н. э.). Примерно в это же самое время греческий математик Никомах сформулировал тот же частный случай. Известны также работы математиков средневековой Индии, посвященные этой проблеме. В общем виде теорема была сформулирована и доказана Чин Чжу-Шао (*Jiushao Qin*) (1247 г.).

Существует несколько формулировок китайской теоремы. Приведем одну из них [10].

Пусть каждому целому числу отвечает определенный остаток от деления на целое положительное m , который называется модулем. Если двум целым a и b отвечает один и тот же остаток r , то они называются равноостаточными по модулю m . Сравнимость записывается как

$$a \equiv b \pmod{m}, \quad (4)$$

где знак (\equiv) обозначает сравнение.

Числа сравнимые по модулю m , образуют класс чисел по модулю m . Любое число класса называется вычетом по модулю m . Вычет, равный самому остатку r , называется наименьшим неотрицательным вычетом. Взяв от каждого класса по одному вычету, получим полную систему вычетов по модулю m . Чаще всего в качестве полной системы вычетов используют наименьшие неотрицательные вычеты $0, 1, \dots, m-1$.

Рассмотрим систему сравнений первой степени с одним неизвестным:

$$\begin{aligned}
 x &\equiv b_1 \pmod{m_1} \\
 x &\equiv b_2 \pmod{m_2}
 \end{aligned}$$

Если модули являются взаимно простыми числами, то в некотором диапазоне существует единственное решение. Найти это решение можно воспользовавшись следующей теоремой.

Теорема.

Пусть числа M_S и N_S определены из условий

$$m_1 m_2 \dots m_k = M_S m_S, \quad (6)$$

$$M_S N_S \equiv 1 \pmod{m_S}, \quad (7)$$

и пусть

$$X_0 = M_1 N_1 b_1 + M_2 N_2 b_2 + \dots + M_k N_k b_k. \quad (8)$$

Тогда совокупность значений X , удовлетворяющих системе сравнений (5), определяется сравнением

$$X \equiv X_0 \pmod{m_1 m_2 \dots m_k}. \quad (9)$$

Для перехода от модулярного представления к позиционной системе можно воспользоваться выражением (8). В диапазоне, определяемом произведением взаимно простых модулей $m_1 m_2 \dots m_k$ решение будет единственным. Коэффициенты M_i можно найти из равенства (6), N_i из сравнения (7). Решить сравнение (7) можно или простым перебором от 1, 2, 3 и т.д. до первого, удовлетворяющего значения, или воспользовавшись обобщенным алгоритмом Евклида [10]. Время для нахождения этих коэффициентов не важно, поскольку обычно мы работаем с системой с одним и тем же набором модулей и эту операцию надо выполнить один раз.

Однако вычисление с помощью выражения (8) требует k умножений и $k-1$ сложений для набора из k модулей. Кроме того, при вычислении необходимо переходить от вычислений с небольшим числом разрядов (определяемых соответствующими значениями модулей) к вычислениям многократной точности, что снижает область применения модулярных вычислений.

Ниже описывается быстрый алгоритм перевода чисел из модулярного представления к позиционной системе представления на основе геометрического подхода.

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

Можно представить геометрическое истолкование одного сравнения (4). Пусть m для определенности равно 7. Представим себе, что числовая прямая целых чисел накручена на окружность длины 7, так, что числа 7, 14, 21, и т. д. попадают на нулевую точку, числа 1, 8, 15, ... , а также -6, -13, -20, совмещаются со следующей целочисленной точкой окружности и т. д. [11], как показано на *Рис. 1*.

Рассмотрим, как выглядит геометрическое представление решения системы сравнений при двух модулях.

Рассмотрим случай для двух взаимно

простых модулей. Например: $m_1 = 11, m_2 = 17$. В этом случае: $M_1 = 17, M_2 = 11, N_1 = 2, N_2 = 14$.

$$X_0 = M_1 N_1 b_1 + M_2 N_2 b_2 \pmod{m_1 m_2}, \quad (10a)$$

$$X = 17 \cdot 2 b_1 + 11 \cdot 14 b_2 \pmod{11 \cdot 17}, \quad (10b)$$

или

$$X = 34 b_1 + 154 b_2 \pmod{187}. \quad (10c)$$

В этом случае таблица всех возможных результатов (таблица решений) будет иметь следующий вид (Рис. 2).

Видно, что числа возрастают от 0 до $m_1 - 1$ последовательно по главной диагонали, а затем по диагоналям, показанным на Рис. 2.

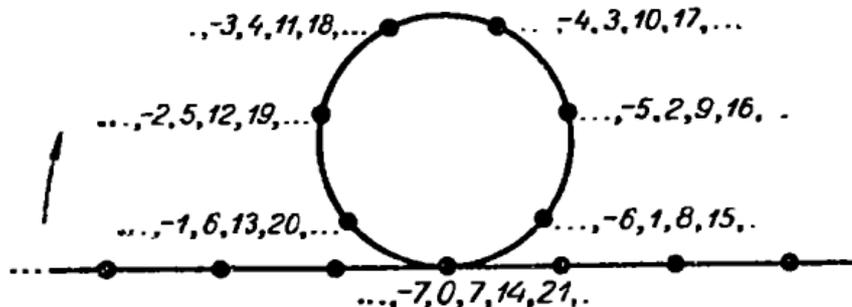


Рис. 1. Геометрическое представление сравнения $a \equiv b \pmod{7}$

b2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
b1	0	14	11	8	5	2	16	13	10	7	4	1	15	12	9	6	3	
0	3	0	154	121	88	55	22	176	143	110	77	44	11	165	132	99	66	33
1	6	34	1	155	122	89	56	23	177	144	111	78	45	13	166	133	100	67
2	9	68	35	2	156	123	90	57	24	178	145	112	79	46	14	167	134	101
3	12	102	69	36	3	157	124	91	58	25	179	146	113	80	47	15	168	135
4	15	136	103	70	37	4	158	125	92	59	26	180	147	114	81	48	16	169
5	1	170	137	104	71	38	5	159	126	93	60	27	181	148	115	82	49	17
6	4	17	171	138	105	72	39	6	160	127	94	61	28	182	149	116	83	50
7	7	51	18	172	139	106	73	40	7	161	128	95	62	29	183	150	117	84
8	10	85	52	19	173	140	107	74	8	162	129	96	63	30	184	151	118	
9	13	119	86	53	20	174	141	108	75	42	9	163	130	97	64	31	185	152
10		153	120	87	54	21	175	142	109	76	43	10	164	131	98	65	32	186

Рис. 2. Последовательное изменение чисел в таблице решений системы сравнений (10c); b_1 меняется от 0 до 10, b_2 от 0 до 12

Если непрерывно соединить продолжения диагоналей при последовательном возрастании чисел можно заметить, что при склейке верхней и нижней горизонтальных строк и левого и правого столбца образуется тор (Рис. 3а).

Разрежем тор вдоль одного из своих меридианов. Тогда он превращается в круговой цилиндр с двумя краевыми окружностями. Закрепим неподвижно одну окружность и станем закручивать цилиндр вокруг себя так, чтобы вторая окружность сделала k -оборотов. Всякая прямолинейная образующая цилиндра при этом обратится в винтовую линию, обходящую ось

цилиндра k -раз. Если снова склеить оба края, то получим топологическое отображение тора на самого себя. При таком отображении тора, параллели тора превратились в винтообразные кривые и наоборот [12].

Решения системы сравнений последовательно будут возрастать по спирали на поверхности тора (Рис. 3б) от 0 до $m_1 m_2$.

Задачу перевода чисел из модулярного представления к позиционному можно свести к определению начального значения витка тора и числа точек на этом витке.

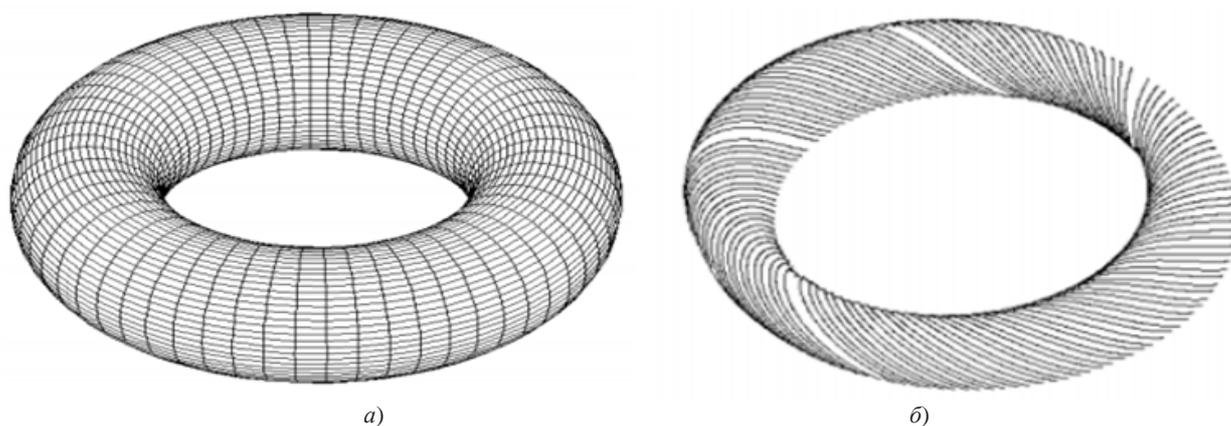


Рис. 3. Иллюстрация метода: а – тор, образующийся в результате склейки таблицы решений; б – последовательное возрастание чисел по диагоналям в таблице решений при отображении на поверхность двумерного тора

Для удобства мы вычисляем начальные значения на витках тора. Это число равно целому числу витков, умноженному на размер витка. В нашем случае размер витка $m_1 = 11$. Тогда сразу же можно определить само число X

$$X = n[i] m_1 + b_1. \quad (11)$$

Для нахождения числа витков (2 строка и 2 столбец в таблице на Рис. 2) можно воспользоваться следующим выражением, которое следует из (10а):

$$n[i] = M_2 N_2 i \pmod{m_1 m_2} = N_2(i) \pmod{m_2}, \quad \text{если } i = b_2 - b_1 \geq 0 \quad (12a)$$

или для конкретного случая: ($m_1 = 11, m_2 = 17, M_1 = 17, M_2 = 11, N_1 = 2, N_2 = 14$).

$$n(i) = 14 i \pmod{17}. \quad (12b)$$

Для случая, когда $b_2 - b_1 < 0$, таблицу решений можно представить в виде, в котором значения ниже 0 диагонали симметрично отображаются (Рис. 4).

Выражение (12а) перепишем в виде

$$n[i] = N_2 \cdot (b_2 - b_1) \pmod{m_2}, \quad \text{если } b_2 - b_1 \geq 0 \quad (13a)$$

$$n[i] = N_2 \cdot (b_2 - b_1 + m_2) \pmod{m_2}, \quad \text{если } b_2 - b_1 < 0 \quad (13b)$$

b2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16											
b1	0	14	11	8	5	2	16	13	10	7	4	1	15	12	9	6	3											
0	3	0	154	121	88	55	22	176	143	110	77	44	11	165	132	99	66	33										
1	6	34	1	155	122	89	56	23	177	144	111	78	45	12	166	133	100	67	34									
2	9	68	35	2	156	123	90	57	24	178	145	112	79	46	13	167	134	101	68	35								
3	12	102	69	36	3	157	124	91	58	25	179	146	113	80	47	14	168	135	102	69	36							
4	15	136	103	70	37	4	158	125	92	59	26	180	147	114	81	48	15	169	136	103	70	37						
5	1	170	137	104	71	38	5	159	126	93	60	27	181	148	115	82	49	16	170	137	104	71	38					
6	4	17	171	138	105	72	39	6	160	127	94	61	28	182	149	116	83	50	17	171	138	105	72	39				
7	7	51	172	139	106	73	40	7	161	128	95	62	29	183	150	117	84	51	18	172	139	106	73	40				
8	10	85	52	173	140	107	74	41	8	162	129	96	63	30	184	151	118	85	52	19	173	140	107	74	41			
9	13	119	86	53	20	174	141	108	75	42	9	163	130	97	64	31	185	152	119	86	53	20	174	141	108	75	42	
10		153	120	87	54	21	175	142	109	76	43	10	164	131	98	65	32	186	153	120	87	54	21	175	142	109	76	43

Рис. 4. Определение числа витков на поверхности тора. На рис. 5 показаны 0 и 1 витки

Можно представить выражения (13) в следующем виде

$$n[i] = (N_2 \cdot i) \pmod{m_2}, \quad (14)$$

где

$$i = b_2 - b_1, \quad \text{если } b_2 - b_1 \geq 0$$

$$i = b_2 - b_1 + m_2, \quad \text{если } b_2 - b_1 < 0$$

Выражение (12) для определения значений

чисел в таблице решений в этом случае будет выглядеть как

$$X = (N_2 \cdot (b_2 - b_1) \pmod{m_2}) \cdot m_1 + b_1, \quad (15a)$$

$$\text{если } b_2 - b_1 \geq 0$$

$$X = (N_2 \cdot (b_2 - b_1 + m_2) \pmod{m_2}) \cdot m_1 + b_1, \quad (15b)$$

$$\text{если } b_2 - b_1 < 0$$

или

$$X = \{N_2 \cdot [(b_2 - b_1) \bmod m_2] \bmod m_2\} \cdot m_1 + b_1, \quad (16)$$

IV. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ ФАЗОВОЙ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПРИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Основной задачей при анализе интерференционных картин является определение разности фаз $\varphi(x, y)$ по значениям зарегистрированных интенсивностей $I_i(x, y)$.

При различных фазовых сдвигах δ_i интенсивность отраженного от объекта света можно представить в виде

$$I_i(x, y) = A_0(x, y) (1 + V(x, y) \cos(\varphi(x, y) + \delta_i)), \quad (17)$$

где $A_0(x, y)$ - средняя яркость, а $V(x, y)$ - контраст изображения, $i=1, 2 \dots m$, при этом m - число фазовых сдвигов.

В [13-15] приведен обобщенный алгоритм расшифровки, который при известных значениях δ_i , позволяет определить значение фазового распределения $\varphi(x, y)$. В [16-19] приведен способ решений системы уравнений (1) при неизвестных значениях δ_i . Значения $\varphi(x, y)$ будут меняться от 0 до 2π .

В результате мы имеем результаты косвенных измерений параметров объекта в зависимости от цены полосы m , которая является параметром определяемым схемой интерферометра.

$$b_i(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{2\pi} m_i \quad (18)$$

Если изменить значение цены полосы, и повторить измерения (4-1), то мы получим серию значений измеряемой величины (b_1, b_2, \dots, b_k) . Каждое значение определяется в диапазоне от 0 до $m_i - 1$.

Абсолютная величина L может быть найдена как решение системы сравнений

$$\begin{cases} L \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ L \equiv b_2 \pmod{m_2} \end{cases} \quad (19)$$

При этом максимальный диапазон однозначного определения значений определяется наибольшими взаимно простыми множителями в значениях цен полос.

Цена полосы может меняться либо изменением длины волны, либо изменением угла между интерферирующими полосами, либо изменением коэффициента преломления среды. При использовании методов голографической интерферометрии это может быть достигнуто методом двух длин волн, методом смещенного источника и иммерсионным методом [20].

Таким образом, задача расширения диапазона измерений сводится к задаче решения системы сравнений (19).

Однако решение системы сравнений задача неустойчивая. Даже небольшие погрешности при измерениях начальных значений b_i приводят к значительным ошибкам при определении полного значения измеряемой величины.

На *Рис. 5* показаны результаты реальных измерений методом структурированного освещения [21, 22] при двух ценах полос $m_1 = 167$, $m_2 = 241$.

Видно, что из реальные измерения достаточно сильно отличаются от идеальных. Это связано с нарушением синусоидальности проецируемых полос, неравномерностью освещения и другими факторами при проведении эксперимента. Однако использование геометрического подхода позволяет восстановить полную фазу даже для такого случая.

Рассмотрим фрагмент таблицы решения (*Рис. 6*) с модулями $m_1=53$ и $m_2=63$. В этом случае максимальный диапазон может составить $53 \cdot 63 = 3339$.

Если ограничить максимальный диапазон измерений, это приведет к тому, что в таблице появятся разреженные диагонали. На этих диагоналях будут лежать значения абсолютных величин, попадающие в выбранный диапазон, а значения между диагоналями будут лежать за пределами этого диапазона.

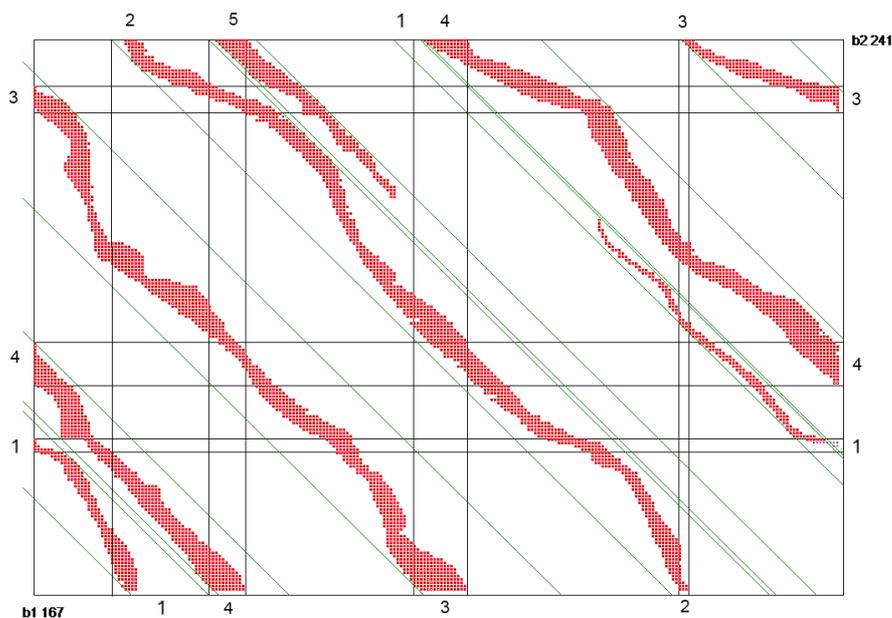


Рис. 5. Таблица решений с модулями $m_1=167$ и $m_2=241$

b2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
b1	0	1537	3074	1219	2756	901	2438	583	2120	265	1802	3339	1484	3021	1166	2703	848	2385	530	2067	212	1749	3286	1431	2968	1113	2650	795	2332	477	2014	159	169
1	1856	1	1538	3075	1220	2757	902	2439	584	2121	266	1803	3340	1485	3022	1167	2704	849	2386	531	2068	213	1750	3287	1432	2969	1114	2651	796	2333	478	2015	160
2	320	1857	2	1539	3076	1221	2758	903	2440	585	2122	267	1804	3341	1486	3023	1168	2705	850	2387	532	2069	214	1751	3288	1433	2970	1115	2652	797	2334	479	2016
3	2176	321	1858	3	1540	3077	1222	2759	904	2441	586	2123	268	1805	3342	1487	3024	1169	2706	851	2388	533	2070	215	1752	3289	1434	2971	1116	2653	798	2335	480
4	640	2177	322	1859	4	1541	3078	1223	2760	905	2442	587	2124	269	1806	3343	1488	3025	1170	2707	852	2389	534	2071	216	1753	3290	1435	2972	1117	2654	799	2336
5	2496	641	2178	323	1860	5	1542	3079	1224	2761	906	2443	588	2125	270	1807	3344	1489	3026	1171	2708	853	2390	535	2072	217	1754	3291	1436	2973	1118	2655	800
6	960	2497	642	2179	324	1861	6	1543	3080	1225	2762	907	2444	589	2126	271	1808	3345	1490	3027	1172	2709	854	2391	536	2073	218	1755	3292	1437	2974	1119	2656
7	2816	961	2498	643	2180	325	1862	7	1544	3081	1226	2763	908	2445	590	2127	272	1809	3346	1491	3028	1173	2710	855	2392	537	2074	219	1756	3293	1438	2975	1120
8	1280	2817	962	2499	644	2181	326	1863	8	1545	3082	1227	2764	909	2446	591	2128	273	1810	3347	1492	3029	1174	2711	856	2393	538	2075	220	1757	3294	1439	2976
9	3136	1281	2818	963	2500	645	2182	327	1864	9	1546	3083	1228	2765	910	2447	592	2129	274	1811	3348	1493	3030	1175	2712	857	2394	539	2076	221	1758	3295	1440
10	1600	3137	1282	2819	964	2501	646	2183	328	1865	10	1547	3084	1229	2766	911	2448	593	2130	275	1812	3349	1494	3031	1176	2713	858	2395	540	2077	222	1759	3296
11	84	1601	3138	1283	2820	965	2502	647	2184	329	1866	11	1548	3085	1230	2767	912	2449	594	2131	276	1813	3350	1495	3032	1177	2714	859	2396	541	2078	223	1760
12	1920	85	1602	3139	1284	2821	966	2503	648	2185	330	1867	12	1549	3086	1231	2768	913	2450	595	2132	277	1814	3351	1496	3033	1178	2715	860	2397	542	2079	224

Рис.6. Фрагмент таблицы решения с модулями $m_1=53$ и $m_2=63$. В таблице выделены диагонали, значения на которых меньше 300.

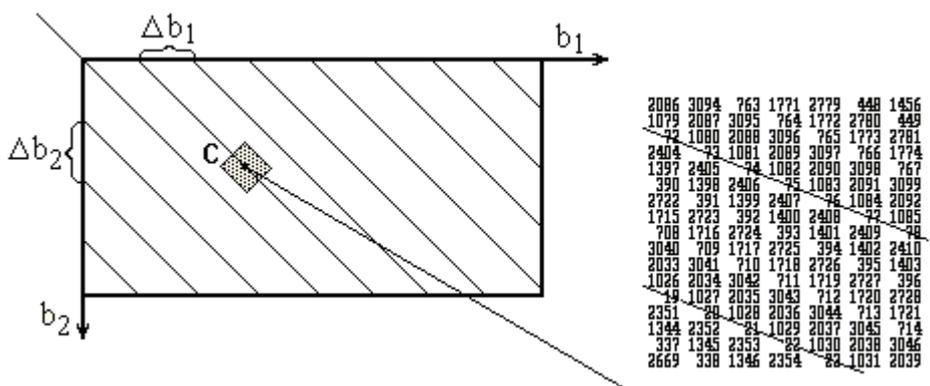


Рис. 7. Таблица решений с модулями $m_1=53$ и $m_2=63$ (справа увеличенная часть таблицы с численными значениями).

Если представить всю таблицу решений (Рис. 7), то значения b_1 и b_2 увеличиваются последовательно по основным диагоналям. На рисунке закрашена область (область грубых промахов), в которую может попасть измеряемая величина при наличии погрешности измерений.

Видно, что ближайшая точка, расположенная на допустимой диагонали, вероятно и будет правильным значением. Для правильного определения абсолютного значения величины L необходимо, чтобы погрешность исходных данных не превышала половины расстояния

Начальная часть таблицы решений (21с) показана на Рис. 9.

В таблице первая строка определяет число витков, которое будет определяться как

$$n(i) = N_2^2 i \text{ mod } (m_2 m_3), \quad (22)$$

где $i = b_2^3$.

В разделе, в котором рассматривался двумерный случай (16), показано, что решение

(21) для двумерного случая можно представить в виде:

$$X = M_2^2 \{ N_2^2 \cdot [(b_2^3 - b_1) \text{ mod } (m_2 m_3)] \text{ mod } (m_2 m_3) \} + b_1 \quad (22a)$$

или

$$X = \{ N_2^2 \cdot [(b_2^3 - b_1) \text{ mod } (m_2 m_3)] \text{ mod } (m_2 m_3) \} m_2 + b_1 \quad (22b)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
b2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6	
b1	b3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	2211	1991	1771	1551	1331	1111	8911	671	-451	231	11	2222	2002	1782	1562	1342	1122	902	682	462	242	22	2233	2013	1793	1573	1353	1133	913	693	473	253	
1	221	1	2212	1992	1772	1552	1332	1112	892	672	452	232	12	2223	2003	1783	1563	1343	1123	903	683	463	243	23	2234	2014	1794	1574	1354	1134	914	694	474	
2	442	222	2	2213	1993	1773	1553	1333	1113	893	673	453	233	13	2224	2004	1784	1564	1344	1124	904	684	464	244	24	2235	2015	1795	1575	1355	1135	915	695	
3	663	443	223	3	2214	1994	1774	1554	1334	1114	894	674	454	234	14	2225	2005	1785	1565	1345	1125	905	685	465	245	25	2236	2016	1796	1576	1356	1136	916	
4	884	664	444	224	4	2215	1995	1775	1555	1335	1115	895	675	455	235	15	2226	2006	1786	1566	1346	1126	906	686	466	246	26	2237	2017	1797	1577	1357	1137	
5	1105	885	665	445	225	5	2216	1996	1776	1556	1336	1116	896	676	456	236	16	2227	2007	1787	1567	1347	1127	907	687	467	247	27	2238	2018	1798	1578	1358	
6	1326	1106	886	666	446	226	6	2217	1997	1777	1557	1337	1117	897	677	457	237	17	2228	2008	1788	1568	1348	1128	908	688	468	248	28	2239	2019	1799	1579	
7	1547	1327	1107	887	667	447	227	7	2218	1998	1778	1558	1338	1118	898	678	458	238	18	2229	2009	1789	1569	1349	1129	909	689	469	249	29	2240	2020	1800	
8	1768	1548	1328	1108	888	668	448	228	8	2219	1999	1779	1559	1339	1119	899	679	459	239	19	2230	2010	1790	1570	1350	1130	910	690	470	250	30	2241	2021	
9	1989	1769	1549	1329	1109	889	669	449	229	9	2220	2000	1780	1560	1340	1120	900	680	460	240	20	2231	2011	1791	1571	1351	1131	911	691	471	251	31	2242	
10	2210	1990	1770	1550	1330	1110	890	670	450	230	10	2221	2001	1781	1561	1341	1121	901	681	461	241	21	2232	2012	1792	1572	1352	1132	912	692	472	252	32	

Рис. 9. Начальная часть таблицы решений (21с). (b_2^3 меняются от 0 до 220).

Теперь нужно определить зависимость b_2^3 от b_2 и b_3 . Проанализировав таблицу решений на Рис. 8 и Рис. 9 можно заметить, что для одинаковых решений эти значения будут распределены так, как показано во второй и третьей строке таблица на Рис. 9.

В этом случае

$$b_2^3 = M_1^{23} N_1^{23} b_2 + M_2^{23} N_2^{23} b_3 \text{ (mod } m_2 m_3). \quad (24)$$

и

$$M_1^{23} = 17, M_2^{23} = 13, N_1^{23} = 10, N_2^{23} = 4,$$

$$b_2^3 = M_2^{23} \{ N_2^{23} \cdot [(b_3 - b_2) \text{ mod } (m_2)] \text{ mod } (m_2) \} + b_2 \quad (25a)$$

или

$$b_2^3 = \{ N_2^{23} \cdot [(b_3 - b_2) \text{ mod } (m_2)] \text{ mod } (m_2) \} m_2 + b_2 \quad (25b)$$

Эти решения показаны в таблице на Рис. 10.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	52	104	156	208	39	91	143	195	26	78	130	182	13	65	117	169
1	170	1	53	105	157	209	40	92	144	196	27	79	131	183	14	66	118
2	119	171	2	54	106	158	210	41	93	145	197	28	80	132	184	15	67
3	68	120	172	3	55	107	159	211	42	94	146	198	29	81	133	185	16
4	17	69	121	173	4	56	108	160	212	43	95	147	199	30	82	134	186
5	187	18	70	122	174	5	57	109	161	213	44	96	148	200	31	83	135
6	136	100	19	71	123	175	6	58	110	162	214	45	97	149	201	32	84
7	85	137	189	20	72	124	176	7	59	111	163	215	46	98	150	202	33
8	34	86	138	190	21	73	125	177	8	60	112	164	216	47	99	151	203
9	204	35	87	139	191	22	74	126	178	9	61	113	165	217	48	100	152
10	153	205	36	88	140	192	23	75	127	179	10	62	114	166	218	49	101
11	102	154	206	37	89	141	193	24	76	128	180	11	63	115	167	219	50
12	51	103	155	207	38	90	142	194	25	77	129	181	12	64	116	168	220

Рис. 10. Определение b_2^3 по b_2 (от 0 до 12) и b_3 (от 0 до 16).

Таким образом, решение для трех модулей можно записать как

$$X = \{ N_2^2 \cdot [(b_2^3 - b_1) \text{ mod } (m_2 m_3)] \text{ mod } (m_2 m_3) \} m_2$$

$$m_3 + b_1, \quad (26a)$$

или

$$X = \{(N_2^2 \cdot i) \bmod (m_2 m_3)\} m_2 m_3 + b_1, \quad (26b)$$

$$i = b_2^3 - b_1, \quad \text{если } b_2^3 - b_1 \geq 0$$

$$i = b_2^3 - b_1 + m_2 m_3, \quad \text{если } b_2^3 - b_1 < 0$$

где

$$b_2^3 = \{N_2^{23} \cdot [(b_3 - b_2) \bmod (m_2)] \bmod (m_2)\} m_2 + b_2, \quad (27a)$$

или

$$b_2^3 = \{(N_2^{23} \cdot i) \bmod (m_2)\} m_2 + b_2, \quad (27b)$$

$$i = b_3 - b_2, \quad \text{если } b_3 - b_2 \geq 0$$

$$i = b_3 - b_2 + m_2, \quad \text{если } b_3 - b_2 < 0$$

Коэффициенты N_2^2 и N_2^{23} рассчитываются следующим образом

$$m_1 N_2^2 \equiv 1 \pmod{m_2 m_3}, \quad (28a)$$

$$m_2 N_2^{23} \equiv 1 \pmod{m_3}. \quad (28b)$$

Заметим, что в таблице решений (рис.9) значения последовательно увеличиваются по главным диагоналям. Поэтому при наличии погрешностей при измерениях начальных значений (b_1, b_2, b_3) всегда можно ограничить диапазон (количество витков) для выделения окрестности грубых сбоев.

Ошибочные результаты, которые попадают в окрестность грубых сбоев, могут быть скорректированы к ближайшим диагоналям. Устранение этих ошибок может привести к значительному увеличению точности измерений. Таким образом, использование модулярной арифметики позволит не только увеличить диапазон измерений, но и снизить погрешность.

VI. ВЫВОДЫ

Реализован новый алгоритм перевода чисел из модулярного к позиционному представлению на основе геометрического подхода. В статье рассмотрены двумерный (решение системы сравнений с двумя модулями) и трехмерный случаи. Обобщение на многомерный случай с помощью процедуры предложенной в работе для трехмерного случая не представляет существенных сложностей.

Представление таблицы решений в виде многомерного тора позволяет упростить алгоритм перехода к позиционной системе. В этом случае, мы переходим от многомерной задачи к двумерной. Для этого необходимо определить число витков и найти положение на этом витке. Кроме того, при ограничении числа витков (при ограничении максимального диапазона) витки становятся разреженными, появляются окрестности грубых сбоев, которые позволяют скорректировать измерительные

погрешности.

В результате метод устранения фазовой неоднозначности становится устойчивым и его можно использовать при реальных интерференционных измерениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по гранту № 14-08-01100 «Цифровая голографическая система реального времени для экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния динамических объектов».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Ghiglia and M. Pritt, Two-dimensional phase unwrapping theory, algorithms and software, John Wiley & Sons, 1998. 512 p.
- [2] F. Qiangian, P.M. Meaney, and K.D. Paulsen, "The multidimensional phase unwrapping Integral and applications to microwave tomographical image reconstruction," IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 15, No. 11, 2006. pp. 3311-24.
- [3] V.I. Gushov, Yu.N. Solodkin Automatic Processing of Fringe Patterns in Integer Interferometers// Optics and Lasers in Engineering.-1991.-Vol.14, Issues 4-5,- P.311-324.
- [4] V.I. Guzhov, S.P. Il'inykh, R.A. Kuznetsov, A.R. Vagizov /Solution of the problem of phase ambiguity by integer interferometry // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.- March 2013, Volume 49, Issue 2, pp 178-183.
- [5] Wengierow, M., Salbut, L., Ramotowski, Z., Szumski, R., Szykiedans, K. Measurement System Based on Multi-Wavelength Interferometry for Long Gauge Block Calibration Metrology and Measurement Systems. - 2013. - Volume XX, Issue 3, pp. 479-49.
- [6] Zhong, J., Zhang, Y. Absolute phase-measurement technique based on number theory in multifrequency grating projection profilometry. - Applied Optics. - 2001. - Vol.40, No.4 - pp.492-500.
- [7] Kujawińska, M., Osten, W. Fringe pattern analysis methods: up-to-date review. - Proc. SPIE.-1998. - Vol. 3407, p. 56-66.
- [8] Takeda, M., Gu, Q., Kinoshita, M., Takai, H., Takahashi, Y. Frequency-multiplex Fourier-transform profilometry: A single-shot three-dimensional shape measurement of objects with large height discontinuities and/or surface isolations - Applied Optics - 1997 - Vol.36, No.22 – pp. 5347-5354.
- [9] Дональд Э. Кнут "Искусство программирования. Том 2. Получисленные алгоритмы".- Третье издание.-М., 2007, 832 с.
- [10] Виноградов И.М. Основы теории чисел - М: Главная редакция физико-технической литературы изд-ва "Наука".- 1972.- 168с.
- [11] Арнольд И.В. Теоретическая арифметика - М: Государственное учебно-педагогическое из-во.- 1938.- 480с.
- [12] Гильберт Д., Кон_Фоссен С. Наглядная геометрия .- М.Наука.-1981.- 344с.
- [13] Гужов В.И., Ильиных С.П. Компьютерная интерферометрия. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. - 252с.
- [14] Гужов В.И., Ильиных С.П., Хайдуков Д.С., Вагизов А.Р. / Универсальный алгоритм расшифровки. // Научный вестник НГТУ. - 2010. - №4(41) – С. 51-58.
- [15] Generic algorithm of phase reconstruction in phase-shifting interferometry /Guzhov V., Ilinykh S., Kuznetsov R., Haydukov D.// Optical Engineering, – 2013.-Vol.52(3) – pp. 030501-1 – 030501-2.
- [16] Гужов, В.И. Новый метод калибровки фазовых сдвигов [Текст] / В.И. Гужов, С.П. Ильиных, Д.С. Хайдуков, Р.А.

- Кузнецов // Научный вестник НГТУ. — 2013. — №1(50). — С. 185-189.
- [17] Гужов В.И., Ильиных С.П., Хайдуков Д.С., Вагизов А.Р. // Устранение ошибок фазового сдвига в интерферометрии // Автотриетрия. - 2011. - Т. 47, №1.-С. 96-101.
- [18] V.I. Guzhov, S.P. Il'yinykh, D.S. Khaidukov and A.R. Vagizov Eliminating phase-shift errors in interferometry // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.- 2011., Vol.47, Nu.1.- pp. 76-80.
- [19] Определение значений фазовых сдвигов по интерференционным картинам в фазосдвигающей интерферометрии /Гужов В.И., Ильиных С.П., Кузнецов Р.А., Хайдуков Д.С.// Автоматика и программная инженерия, Новосибирск, – 2013.-№1(3) – С. 10 – 15.
- [20] Козачок А.Г. Голографические методы исследований в экспериментальной механике.- М.: Машиностроение, 1984.- 176 л.
- [21] Гужов В.И., Ильиных С.П., Кузнецов Р.А., Вагизов А.Р. / Решение проблемы фазовой неоднозначности методом целочисленной интерферометрии // Автотриетрия. - 2013. - Т. 49, №2.-С. 85-91.
- [22] V.I. Guzhov, S.P. Il'yinykh, R.A. Kuznetsov, A.R. Vagizov /Solution of the problem of phase ambiguity by integer interferometry // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.- March 2013, Volume 49, Issue 2, pp 178-183.



Гужов Владимир Иванович - профессор кафедры ССОД Новосибирского Государственного Технического университета, доктор технических наук. Он является автором более 160 научных работ. Область научных интересов: высокоточные интерференционные измерения, безошибочные вычисления, теория чисел.
e-mail: vig@nstu.edu.ru



Кабак Евгений Семенович - аспирант ССОД НГТУ. Область научных интересов: программная инженерия, оптические измерительные системы.
e-mail: vig@nstu.edu.ru



Орлов Иван Сергеевич - ассистент кафедры ССОД НГТУ. Область научных интересов: мультимедиа-технологии, оптические измерительные системы.
e-mail: mail@ivanorlov.com

The Use of Modular Arithmetic in Phase Measurements

V.I. GUZHOV, E.S. KABAK, I.S. ORLOV

Abstract: This paper gives a new algorithm for the transition from the modular representation of

numbers to the position, which can be used in phase measurements in real systems.

Keywords: Number theory, modular arithmetic, phase ambiguity, the interference measurement methods.

REFERENCES

- [1] D. Ghiglia and M. Pritt, Two-dimensional phase unwrapping theory, algorithms and software, John Wiley & Sons, 1998. 512 p.
- [2] F. Qiangian, P.M. Meaney, and K.D. Paulsen, "The multidimensional phase unwrapping Integral and applications to microwave tomographical image reconstruction," IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 15, No. 11, 2006. pp. 3311-24.
- [3] V.I. Gushov, Yu.N. Solodkin Automatic Processing of Fringe Patterns in Integer Interferometers// Optics and Lasers in Engineering.-1991.-Vol.14, Issues 4-5,- P.311-324.
- [4] V.I. Guzhov, S.P. Il'yinykh, R.A. Kuznetsov, A.R. Vagizov /Solution of the problem of phase ambiguity by integer interferometry. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.- March 2013, Volume 49, Issue 2, pp 178-183.
- [5] Wengierow, M., Salbut, L., Ramotowski, Z., Szumski, R., Szykiedans, K. Measurement System Based on Multi-Wavelength Interferometry for Long Gauge Block Calibration Metrology and Measurement Systems. - 2013. - Volume XX, Issue 3, p. 479-49.
- [6] Zhong, J., Zhang, Y. Absolute phase-measurement technique based on number theory in multifrequency grating projection profilometry. Applied Optics. 2001. Vol.40, No.4. p.492-500.
- [7] Kujawińska, M., Osten, W. Fringe pattern analysis methods: up-to-date review. Proc. SPIE.-1998. Vol. 3407, p. 56-66.
- [8] Takeda, M., Gu, Q., Kinoshita, M., Takai, H., Takahashi, Y. Frequency-multiplex Fourier-transform profilometry: A single-shot three-dimensional shape measurement of objects with large height discontinuities and/or surface isolations - Applied Optics. 1997. Vol.36, No.22 – p. 5347-5354.
- [9] Donal'd Je. Knut "Iskusstvo programmirovaniya. Vol 2. Poluchislennye algoritmy".- Tret'e izdanie.-M., 2007, 832 p.
- [10] Vinogradov I.M. Osnovy teorii chisel. M: Glavnaja redakcija fiziko-tehnicheskoy literatury izd-va "Nauka". 1972.- 168 p.
- [11] Arnol'd I.V. Teoreticheskaja arifmetika M: Gosudarstvennoe uchebno-pedagogicheskoe iz-vo. 1938. 480 p.
- [12] Gil'bert D., Kon_Fossen S. Nagljadnaja geometrija. M.Nauka. 1981. 344 p.
- [13] Guzhov V.I., Il'inyh S.P. Komp'juternaja interferometrija. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2004. – 252p.
- [14] Guzhov V.I., Il'inyh S.P., Hajdukov D.S., Vagizov A.R. Universal'nyj algoritm rasshifrovki. Nauchnyj vestnik NGTU. 2010. №4(41) p. 51-58.
- [15] Generic algorithm of phase reconstruction in phase-shifting interferometry. Guzhov V., Il'inykh S., Kuznetsov R., Hajdukov D. Optical Engineering, 2013. Vol.52(3) p. 030501-1 – 030501-2.
- [16] Guzhov, V.I. Novyj metod kalibrovki fazovyh sdvigo [Tekst]. V.I. Guzhov, S.P. Il'inyh, D.S. Hajdukov, R.A. Kuznecov. Nauchnyj vestnik NGTU. 2013. №1(50). p. 185-189.
- [17] Guzhov V.I., Il'inyh S.P., Hajdukov D.S., Vagizov A.R.// Ustranenie oshibok fazovogo sdviga v interferometrii // Avtometrija. (Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing) 2011. T. 47, №1. p. 96-101.
- [18] V.I. Guzhov, S.P. Il'yinykh, D.S. Khaidukov and A.R. Vagizov Eliminating phase-shift errors in interferometry. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.- 2011., Vol.47, Nu.1. p. 76-80.
- [19] Opredelenie znachenij fazovyh sdvigo po

- interferencionnym kartinam v fazosdvigajushhej interferometrii. Guzhov V.I., Il'inyh S.P., Kuznecov R.A., Hajdukov D.S. Avtomatika i programmaja inzhenerija, Novosibirsk, – 2013.-№1(3) p. 10 – 15.
- [20] Kozachok A.G. Golograficheskie metody issledovanij v jeksperimental'noj mehanike. M.: Mashinostroenie, 1984.- 176 l.
- [21] Guzhov V.I., Il'inyh S.P., Kuznecov R.A. , Vagizov A.R. Reshenie problemy fazovoj neodnoznachnosti metodom celochislennoj interferometrii. Avtometrija. - 2013. - T. 49, №2.-. 85-91.
- [22] V.I. Guzhov, S.P. Il'inykh, R.A. Kuznetsov, A.R. Vagizov. Solution of the problem of phase ambiguity by integer interferometry. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. March 2013, Volume 49, Issue 2, p. 178-183.