

УДК 535.411.854

Универсальный алгоритм расшифровки^{*1}

В.И.ГУЖОВ, С.П. ИЛЬИНЫХ, Д.С. ХАЙДУКОВ, А.Р. ВАГИЗОВ

Разработан универсальный алгоритм расшифровки интерференционных картин, полученных методом пошагового фазового сдвига, не прибегая к решению тригонометрических уравнений. Произведена проверка структуры алгоритмов известных в литературе. Универсальный алгоритм полностью описывает структуру известных алгоритмов и позволяет конструировать новые алгоритмы на s произвольным числом фазовых сдвигов.

Ключевые слова: оптика, интерферометрия, интерферометр, интерферограмма, метод фазовых шагов, цифровой анализ изображений

1. ВВЕДЕНИЕ

Наибольшее применение при построении интерференционных систем в последние годы получили методы получения и расшифровки интерферограмм на основе пошагового сдвига. Это вызвано простотой задания отдельных значений фазового сдвига, достаточно простыми алгоритмами и высокой точностью расшифровки. При этом существующие схемы интерферометров достаточно просто модифицируются.

Метод пошагового фазового сдвига основан на регистрации нескольких интерферограмм при изменении фазы опорной волны на известные значения. Фаза опорной волны модулируется по времени следующим образом: $\delta_r = (r-1) \cdot \delta_0$.

Фазовый сдвиг между интерферирующими пучками может быть реализован различными способами. На рис.1 показана принципиальная схема оптической установки, в которой фазовый сдвиг задается перемещением зеркала, закрепленного на пьезокерамике.

* Статья получена 12 мая 2010 г.

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-07-00133-а)

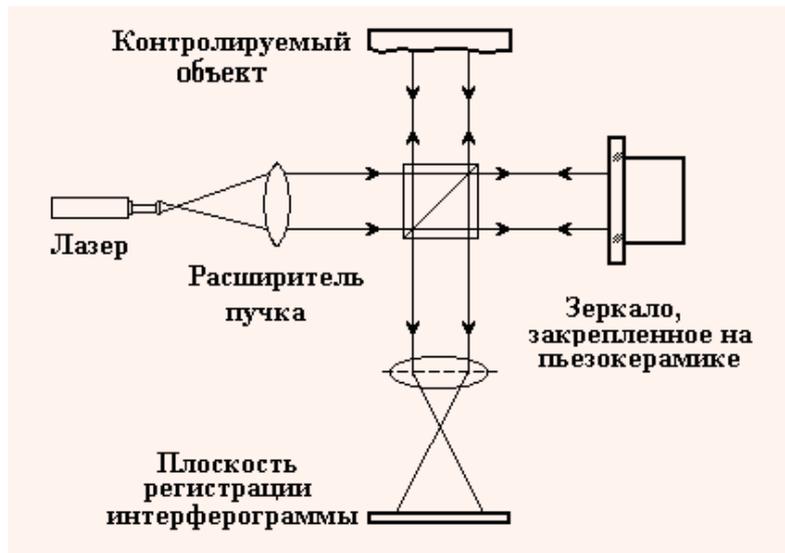


Рис. 1. Схема интерферометра Тваймана-Грина с перемещением зеркала, закрепленного на пьезокерамике.

Пучок света от когерентного источника излучения, попадая на делительный куб разделяется на опорный и объектный пучки. В опорном плече находится зеркало, закрепленное на пьезокерамике, предназначенное для внесения эталонных фазовых сдвигов. Конфигурация объектного плеча зависит от задачи измерения и от формы поверхности тестируемого объекта. В выходной плоскости располагается массив детекторов для регистрации интенсивности в каждой точке поля. После каждого фазового сдвига информация о поле интенсивностей повторно вводится в компьютер.

На рис.2 показан интерферометр Физо, в котором с помощью пьезокерамики перемещается эталонная поверхность. В интерферометре Физо большую часть пути оптические пучки (опорный и объектный) проходят вместе. Этот интерферометр более устойчив к внешним помехам. Поэтому такие оптические схемы наиболее часто встречаются в измерительных системах.

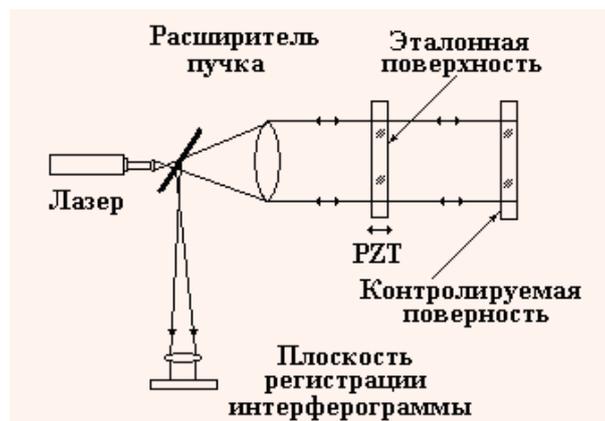


Рис.2. Схема интерферометра Физо с перемещением эталонной поверхности с помощью пьезокерамики (PZT).

2. МЕТОД

Существует два способа внесения фазового сдвига: дискретный и непрерывный. Дискретный сдвиг изменяет фазу светового пучка на некоторую величину. Затем осуществляется ввод установившегося значения интерференционной картины в компьютер. При непрерывном сдвиге фаза меняется линейно во времени. Значения интенсивности считываются с помощью интегрирующего детектора, который усредняет значения по мере изменения фазы. Усреднение происходит за временной интервал, при котором фаза меняется на заданную величину. При этом должна поддерживаться точная синхронизация между временем интегрирования на детекторе и перемещением сдвигающегося зеркала. Если фазовый сдвиг изменяется в виде пилю, то формулы расшифровки совпадают с формулами дискретного пошагового фазового сдвига.

При различных фазовых сдвигах интенсивность интерферограмм с фазовым сдвигом δ_i можно представить в виде

$$I_i(x, y) = I_0(x, y) [1 + V(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_i)], \quad (1)$$

где $i=1, 2, \dots, m$, m - число фазовых сдвигов.

Основной задачей расшифровки является определение разности фаз интерферирующих волновых фронтов $\phi(x, y)$ по значениям зарегистрированных интенсивностей $I_i(x, y)$.

Алгоритмы, полученные при различных значениях m , называются m -точечными алгоритмами или алгоритмами с m -шагами.

При трех произвольных сдвигах, решая тригонометрическую систему, состоящую из трех уравнений типа (1), имеем [1]

$$\phi = \arctan \frac{(I_2 - I_3) \sin \delta_1 + (I_3 - I_1) \sin \delta_2 + (I_1 - I_2) \sin \delta_3}{(I_3 - I_2) \cos \delta_1 + (I_1 - I_3) \cos \delta_2 + (I_2 - I_1) \cos \delta_3}. \quad (2)$$

При $\delta_1 = 0^\circ$, $\delta_2 = 120^\circ$, $\delta_3 = 240^\circ$ выражение (2) примет вид:

$$\phi = \arctan \sqrt{3} \frac{I_3 - I_2}{2I_1 - I_2 - I_3}.$$

Еще более простая формула была получена для $\delta_1 = \pi/4$, $\delta_2 = 3\pi/4$, $\delta_3 = 5\pi/4$ [2]:

$$\phi = \arctan \frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2}. \quad (4)$$

При четырех фазовых сдвигах $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\delta_3 = \pi$ и $\delta_4 = 3\pi/2$ получается простое выражение [3]:

$$\phi = \arctan \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}. \quad (5)$$

Формула (5) часто используются при компьютерной обработке, т.к. математические операции, необходимые для ее реализации, являются очень простыми и могут быть реализованы с помощью основных команд процессора.

Помимо приведенных выше существует достаточно много алгоритмов с большим числом фазовых сдвигов.

Обилие возможных вариантов реализаций алгоритмов расшифровки вызывает определенный интерес к выявлению обобщенной схемы алгоритма, позволяющей с единой позиции оценить достоинства и недостатки того или иного конкретного варианта, а также уяснить методологию их построения.

Представим выражение (1) в векторной форме (учитывая, что $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$)

$$\vec{I} = I_0 \cdot \vec{R} + (I_0 \cdot V \cdot \cos \phi) \vec{C} - (I_0 \cdot V \cdot \sin \phi) \vec{S} \quad , \quad (6)$$

где $\vec{I} = (I_0, \dots, I_{m-1})^T$ - набор измеренных интенсивностей с различными фазовыми сдвигами δ_i в каждой точке интерферограммы (x, y) , $\vec{R} = (1, \dots, 1)^T$, $\vec{C} = (\cos \delta_0, \dots, \cos \delta_{m-1})^T$, $\vec{S} = (\sin \delta_0, \dots, \sin \delta_{m-1})^T$, размерность векторов определяется m - числом фазовых сдвигов δ_i .

Для выделения квадратурных составляющих $\sin \phi$ и $\cos \phi$ воспользуемся свойством скалярного произведения ортогональных векторов $(a \cdot a^\perp) = 0$. Умножая правую и левую часть выражения (6) на соответствующие вектора получим

$$\vec{I} \cdot \vec{C}^\perp = I_0 \cdot \vec{R} \cdot \vec{C}^\perp + (I_0 \cdot V \cdot \cos \phi) \vec{C} \cdot \vec{C}^\perp - (I_0 \cdot V \cdot \sin \phi) \vec{S} \cdot \vec{C}^\perp \quad , \quad (7-1)$$

$$\vec{I} \cdot \vec{S}^\perp = I_0 \cdot \vec{R} \cdot \vec{S}^\perp + (I_0 \cdot V \cdot \cos \phi) \vec{C} \cdot \vec{S}^\perp - (I_0 \cdot V \cdot \sin \phi) \vec{S} \cdot \vec{S}^\perp \quad . \quad (7-2)$$

В силу указанного свойства скалярного произведения ортогональных векторов получим

$$\vec{I} \cdot \vec{C}^\perp = I_0 \cdot \vec{R} \cdot \vec{C}^\perp + (I_0 \cdot V \cdot \cos \phi) \vec{C} \cdot \vec{C}^\perp - (I_0 \cdot V \cdot \sin \phi) \vec{S} \cdot \vec{C}^\perp \quad , \quad (8)$$

$$\vec{I} \cdot \vec{S}^\perp = I_0 \cdot \vec{R} \cdot \vec{S}^\perp + (I_0 V \cos \phi) \vec{C} \cdot \vec{S}^\perp \quad , \quad (9)$$

где \vec{S}^\perp и \vec{C}^\perp вектора, ортогональные векторам \vec{S} и \vec{C} соответственно.

Ортогональный вектор \vec{a}^\perp можно найти с помощью матричного уравнения: $\vec{a}^\perp = M \cdot \vec{a}$. Матрица преобразования M должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\det |M| = 0 \quad , \quad (10-1)$$

$$M \cdot [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]^T = 0 \quad . \quad (10-2)$$

Учитывая (10-2) можно увидеть, что скалярные произведения векторов $\vec{R} \cdot \vec{C}^\perp = 0$ и $\vec{R} \cdot \vec{S}^\perp = 0$, откуда:

$$I_0 V \sin \phi = - \frac{\vec{I} \cdot \vec{C}^\perp}{\vec{S} \cdot \vec{C}^\perp} \quad , \quad (11-1)$$

$$I_0 V \cos \phi = \frac{\vec{I} \cdot \vec{S}^\perp}{\vec{C} \cdot \vec{S}^\perp} \quad . \quad (11-2)$$

Учитывая известное свойство скалярного произведения $(a \cdot b^\perp) = -(a^\perp \cdot b)$, получим $(\vec{C} \cdot \vec{S}^\perp) = -(\vec{S} \cdot \vec{C}^\perp)$. Тогда алгоритм расшифровки в векторной форме примет следующий вид

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\vec{I} \cdot \vec{C}^\perp}{\vec{I} \cdot \vec{S}^\perp} \quad , \quad (12)$$

$$\phi = \arctan \frac{\vec{I} \cdot \vec{C}^\perp}{\vec{I} \cdot \vec{S}^\perp} \quad . \quad (13)$$

Приведем выражение к более часто используемому виду, умножая числитель и знаменатель на левую и правую часть уравнения $(\vec{C} \cdot \vec{S}^\perp) = -(\vec{S}^\perp \cdot \vec{C})$

$$\phi = \arctan \left(- \frac{\vec{I}^\perp \cdot \vec{S}}{\vec{I}^\perp \cdot \vec{C}} \right) . \quad (14)$$

Выражение (14) проще вычислять чем (13) т.к. в этом случае требуется вычислить лишь один ортогональный вектор \vec{I}^\perp .

Матрица M , удовлетворяющая указанным свойствам (10-1), (10-2), будет иметь следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (15)$$

Отметим, что представленная форма матрицы M - не единственная, в качестве такой матрицы можно использовать любую, удовлетворяющую условиям (10-1, 10-2).

В случае трех сдвигов выражение (15) примет вид:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (16)$$

Отсюда

$$\vec{I}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 - I_3 \\ I_3 - I_1 \\ I_1 - I_2 \end{bmatrix} . \quad (17)$$

Перемножая полученный вектор на вектора \vec{S} и \vec{C} соответственно, получим

$$\begin{bmatrix} I_2 - I_3 \\ I_3 - I_1 \\ I_1 - I_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sin \delta_1 \\ \sin \delta_2 \\ \sin \delta_3 \end{bmatrix} = (I_2 - I_3) \sin \delta_1 + (I_3 - I_1) \sin \delta_2 + (I_1 - I_2) \sin \delta_3 , \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} I_2 - I_3 \\ I_3 - I_1 \\ I_1 - I_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \delta_1 \\ \cos \delta_2 \\ \sin \delta_3 \end{bmatrix} = (I_2 - I_3) \cos \delta_1 + (I_3 - I_1) \cos \delta_2 + (I_1 - I_2) \cos \delta_3 . \quad (19)$$

Из (18) и (19) с учетом знака получим

$$\phi = \arctan \frac{(I_2 - I_3) \sin \delta_1 + (I_3 - I_1) \sin \delta_2 + (I_1 - I_2) \sin \delta_3}{(I_3 - I_2) \cos \delta_1 + (I_1 - I_3) \cos \delta_2 + (I_2 - I_1) \cos \delta_3} . \quad (20)$$

Несложно убедиться, что полученное выражение (20) полностью совпадает с найденным ранее выражением (2).

Если подставить в (20) значения конкретных фазовых сдвигов, получим более простые выражения.

При фазовых сдвигах равных $\delta_1=\pi/4$, $\delta_2=3\pi/4$, $\delta_3=5\pi/4$ или $(45^\circ, 135^\circ, 225^\circ)$	$\phi = \arctan \frac{(I_3 - I_2)}{(I_1 - I_2)}$
$(0, 2\pi/3, 4\pi/3)$ или $(0^\circ, 120^\circ, 240^\circ)$	$\phi = \arctan \frac{\sqrt{3}(I_3 - I_2)}{2I_1 - I_2 - I_3}$
$(0, \pi/2, 2\pi)$ или $(0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$	$\phi = \arctan \frac{I_1 - 2I_2 + I_3}{I_1 - I_3}$
$(0, \pi/3, 2\pi/3)$ или $(0^\circ, 60^\circ, 120^\circ)$	$\phi = \arctan \frac{2I_1 - 3I_2 + I_3}{\sqrt{3}(I_2 - I_3)}$

В случае четырех сдвигов

$$\vec{I}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 - I_4 \\ -I_1 + I_3 \\ -I_2 + I_4 \\ I_1 - I_3 \end{bmatrix}.$$

Перемножая полученный вектор на вектора S и C соответственно, получим

$$\begin{bmatrix} I_2 - I_4 \\ -I_1 + I_3 \\ -I_1 + I_4 \\ I_1 - I_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sin \delta_1 \\ \sin \delta_2 \\ \sin \delta_3 \\ \sin \delta_4 \end{bmatrix} = (I_2 - I_4) \sin \delta_1 + (I_3 - I_1) \sin \delta_2 + (I_4 - I_1) \sin \delta_3 + (I_1 - I_3) \sin \delta_4$$

$$\begin{bmatrix} I_2 - I_4 \\ -I_1 + I_3 \\ -I_1 + I_4 \\ I_1 - I_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \delta_1 \\ \cos \delta_2 \\ \cos \delta_3 \\ \cos \delta_4 \end{bmatrix} = (I_2 - I_4) \cos \delta_1 + (I_3 - I_1) \cos \delta_2 + (I_4 - I_1) \cos \delta_3 + (I_1 - I_3) \cos \delta_4$$

Отсюда с учетом знака

$$\phi = \arctan \frac{(I_2 - I_4) \sin \delta_1 + (I_3 - I_1) \sin \delta_2 + (I_4 - I_1) \sin \delta_3 + (I_1 - I_3) \sin \delta_4}{(I_4 - I_2) \cos \delta_1 + (I_1 - I_3) \cos \delta_2 + (I_1 - I_4) \cos \delta_3 + (I_3 - I_1) \cos \delta_4}. \quad (21)$$

При фазовых сдвигах равных $\delta_1=0$, $\delta_2=\pi/2$, $\delta_3=\pi$, $\delta_4=3\pi/2$ или $(0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ)$

$$\phi = \arctan \frac{(I_4 - I_2)}{(I_1 - I_3)}.$$

Это выражение тоже совпадает с ранее описанным выражением (5).

Для уменьшения ошибки можно проводить две серии измерений и усреднять результирующие фазовые значения. J.Schwider [4] показал, что тот же эффект достигается, если объединить исходные данные и проводить расшифровку по следующей формуле:

$$\phi = \arctan \frac{N_1 + N_2}{D_1 + D_2},$$

где N_j и D_j - числитель и знаменатель выражения для соответствующей формулы расшифровки. Это следует из (12) и следующих выражений

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\phi = \arctan \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \arctan \frac{N_1}{D_1} \quad \phi = \arctan \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \arctan \frac{N_2}{D_2}.$$

Поскольку $\phi = \arctan \frac{N_1 + N_2}{D_1 + D_2}$, $\phi = \arctan \frac{N_3}{D_3}$, то и $\phi = \arctan \frac{N_1 + N_2 + N_3}{D_1 + D_2 + D_3}$.

Откуда по индукции можно получить $\phi = \arctan \left[\frac{\sum_{i=1}^n N_i}{\sum_{i=1}^n D_i} \right]$.

При числе фазовых сдвигов более трех, кроме самостоятельных решений уравнений расшифровки можно получить их линейные комбинации из трехкомпонентных и четырехкомпонентных уравнений (при числе фазовых сдвигов более четырех и пяти соответственно). Например, для четырех сдвигов возможно $m = N_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ комбинаций наборов по 3 фазовых сдвига:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_0 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно получить линейные комбинации из 3 трехкомпонентных формул расшифровки.

Имея два основных выражения, $\phi = \arctan[(I_3 - I_2)/(I_1 - I_2)]$ для трехточечного и $\phi = \arctan[(I_4 - I_2)/(I_1 - I_3)]$ для четырехточечного алгоритма, можно получить два класса уравнений расшифровки [5], с помощью их линейных комбинаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе разработан обобщенный алгоритм расшифровки интерференционных картин, полученных методом пошагового фазового сдвига, с

помощью которого можно получать конкретные формулы расшифровки для произвольного количества фазовых сдвигов, не прибегая к решению систем тригонометрических уравнений типа (1). Произведена проверка структуры алгоритмов известных в литературе. Обобщенный алгоритм полностью описывает структуру известных и позволяет конструировать новые алгоритмы на основе произвольного числа фазовых сдвигов. Это особенно важно в связи с развитием в настоящее время вычислительных ресурсов доступных экспериментатору. Если ранее наиболее используемыми алгоритмами были трех или четырех точечные, то сейчас становится возможным использовать алгоритмы с большим числом фазовых сдвигов. Такие алгоритмы обладают большей устойчивостью к ошибкам при измерении исходных параметров, но требуют больших ресурсов компьютерной памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Hariharan P., Oreb B.F., Brown N.** Digital phase-measurement system for real-time holographic interferometry // Optics Communication.- Vol.41.- №6.- pp.393-398.
- [2] **Wyant J.C., Creath K.** Recent advances in interferometric optical testing // Laser Focus.- 1985. - pp.118-132.
- [3] **Wyant J.C.** Interferometric optical metrology: basic system and principles // Laser Focus.- 1982.- pp.65-67.
- [4] **Schwider J., Falkenstorfer O., Schreiber H., Zoller A., Streibl N.** New compensating four-phase algorithm for phase-shift interferometry // Optical Engineering, 32(8), 1883-1885 (1993).
- [5] **Schmit J., Creath K.** Extended averaging technique for derivation of error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry. //Applied Optics.-1995.-V.34.-No.19.-pp.3610-3619.

Гужов Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, декан факультета автоматизации и вычислительной техники. Основное направление научных исследований – Оптические и информационные технологии. Имеет более 130 публикаций, в том числе 1 монография, e-mail: vig@edu.nstu.ru

Ильиных Сергей Петрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры Оптические информационные технологии. Основное направление научных исследований – Интерференционные измерительные системы. Имеет более 50 публикаций, в том числе 1 монография, e-mail: isp51@mail.ru

Хайдуков Дмитрий Сергеевич, магистр кафедры «Вычислительная техника», e-mail: vig@edu.nstu.ru

Вагизов Александр Раисович, аспирант кафедры «Вычислительная техника», e-mail: vig@edu.nstu.ru

Universal algorithm of the decryption. Gushov V.I., Iliinyh S.P., Haydukov D.S., Vagizov A.I.

It is designed universal algorithm of the decryption interference pattern, got by method of the incremental phase shift, not resorting to decision of the trigonometric equations. Made is checking the structure algorithm known in literature. The universal algorithm completely describes the structure known algorithm and allows constructing the new algorithms on with free number phase shift.

Key words: optics, interferometer, interference pattern, interferometry, phase shifting method, optical-digital image processing.