

С. П. Ильиных, В. И. Гужов
(Новосибирск)

**ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСШИФРОВКИ
ИНТЕРФЕРОГРАММ С ПОШАГОВЫМ СДВИГОМ***

Рассмотрен общий принцип построения алгоритмов расшифровки интерферограмм, основанных на методе пошагового фазового сдвига. Предложен матричный аппарат решения системы трансцендентных уравнений с произвольными фазовыми сдвигами.

Задача определения фазы по интерференционным картинам сводится к решению системы трансцендентных уравнений вида [1]:

$$I_i(x, y) = A(x, y)(1 + V(x, y)\cos(\phi(x, y) + \delta_i)), \quad i \in 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

где $I_i(x, y)$ – интенсивность интерференционной картины; $A(x, y)$ – средняя интенсивность; $V(x, y)$ – средняя видимость; $\phi(x, y)$ – искомая разность интерферирующих полей; δ_i – вносимый фазовый сдвиг; N – число сдвигов. (Далее для упрощения выражений обозначение (x, y) опускается.)

В случае, когда $\delta_i = (i+1)\delta_0$, т. е. $\delta_1 = 2\delta_0$, $\delta_2 = 3\delta_0$ и так далее, решение системы уравнений (1) можно найти разложением в ряд Фурье [2]:

$$\phi = \arctg \frac{\sum_i I_i \cos(\delta_i)}{\sum_i I_i \sin(\delta_i)}. \quad (2)$$

Однако этот подход неприменим, если фазовые сдвиги δ_i произвольны. В этом случае приходится решать систему трансцендентных уравнений (1) непосредственно, что при большом числе сдвигов довольно сложно.

В данной работе рассматривается принцип построения разрешающих алгоритмов при произвольных фазовых сдвигах. Представим выражение (1) в векторной форме:

$$\mathbf{I} = A\mathbf{R} + (AV\cos\phi)\mathbf{C} + (AV\sin\phi)\mathbf{S}, \quad (3)$$

где $\mathbf{R} = (1, \dots, 1)^T$, $\mathbf{C} = (\cos\delta_0, \dots, \cos\delta_{N-1})^T$, $\mathbf{S} = (\sin\delta_0, \dots, \sin\delta_{N-1})^T$, размер-

* Работа выполнена при поддержке Международного фонда INTAS 00-135.

ность векторов определяется числом фазовых сдвигов. Несложно показать, что

$$AV \sin \phi = \frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{C}^\perp}{\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^\perp}, \quad AV \cos \phi = \frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}^\perp}{\mathbf{C} \cdot \mathbf{S}^\perp}, \quad (4)$$

где оператор $a \cdot b$ означает скалярное произведение векторов, а \mathbf{S}^\perp и \mathbf{C}^\perp — векторы, ортогональные векторам \mathbf{S} , \mathbf{R} и \mathbf{C} , \mathbf{R} соответственно. Учитывая свойство скалярного произведения, получим $\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^\perp = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S}^\perp$. Тогда

$$\phi = \arctg \frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{C}^\perp}{\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}^\perp} \quad (5)$$

или

$$\phi = \arctg \frac{\mathbf{I}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{I}^\perp \cdot \mathbf{S}}. \quad (6)$$

В последнем случае требуется определить лишь один вектор \mathbf{I}^\perp . Для этого удобно использовать матричный оператор $\mathbf{I}^\perp = \mathbf{M}\mathbf{I}$. Матрица преобразования \mathbf{M} должна удовлетворять следующим требованиям: $(\mathbf{M}\mathbf{I})\mathbf{I} = 0$ и $\mathbf{M}\mathbf{R} = 0$.

Например, при трех фазовых сдвигах этим условиям удовлетворяет косимметричная матрица

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тогда из (6) получим следующий алгоритм расшифровки:

$$\phi = \arctg \frac{(\mathbf{M}\mathbf{I}) \cdot \mathbf{C}}{(\mathbf{M}\mathbf{I}) \cdot \mathbf{S}} = \arctg \frac{(I_1 - I_2)c_0 + (I_2 - I_0)c_1 + (I_0 - I_1)c_2}{(I_1 - I_2)s_0 + (I_2 - I_0)s_1 + (I_0 - I_1)s_2}, \quad (8)$$

где $c_i = \cos \delta_i$ и $s_i = \sin \delta_i$ — соответствующие компоненты векторов \mathbf{C} и \mathbf{S} .

При нечетном числе фазовых сдвигов больше трех матрица \mathbf{M} получается путем симметричного продолжения матрицы (7):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Например, при пяти сдвигах алгоритм расшифровки примет вид

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{(I_1 - I_2 + I_3 - I_4)c_0 + (I_2 - I_0 + I_4 - I_3)c_1 + \dots}{(I_1 - I_2 + I_3 - I_4)s_0 + (I_2 - I_0 + I_4 - I_3)s_1 + \dots} \quad (10)$$

$$\frac{+ (I_0 - I_1 + I_3 - I_4)c_2 + (I_1 - I_0 + I_4 - I_2)c_3 + (I_0 - I_1 + I_2 - I_3)c_4}{+ (I_0 - I_1 + I_3 - I_4)s_2 + (I_1 - I_0 + I_4 - I_2)s_3 + (I_0 - I_1 + I_2 - I_3)s_4}$$

При четном количестве фазовых сдвигов матрицу M можно представить в виде

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При четырех сдвигах получим следующий алгоритм:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{(I_2 - I_3)(c_1 - c_0) + (I_1 - I_0)(c_2 - c_3)}{(I_2 - I_3)(s_1 - s_0) + (I_1 - I_0)(s_2 - s_3)}. \quad (12)$$

Заметим, что при числе фазовых сдвигов более трех, кроме самостоятельных решений уравнений расшифровки (5) и (6), можно получить дополнительные решения путем линейной комбинации решений, найденных для трех-компонентных подвекторов $\mathbf{I}^{(i)}$ и соответствующих им подвекторов $\mathbf{C}^{(i)}$ и $\mathbf{S}^{(i)}$:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{\sum_m \mathbf{I}^{(m)} \mathbf{C}^{\perp(m)}}{\sum_m \mathbf{I}^{(m)} \mathbf{S}^{\perp(m)}} = \operatorname{arctg} \frac{\sum_m \begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i^{\perp} \\ C_j^{\perp} \\ C_k^{\perp} \end{bmatrix}}{\sum_m \begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i^{\perp} \\ S_j^{\perp} \\ S_k^{\perp} \end{bmatrix}}, \quad (13)$$

где $m = C_N^3 = \frac{N!}{3!(N-3)!}$ — число возможных сочетаний. Например, при четырех сдвигах возможны следующие комбинации подвекторов $\mathbf{I}^{(i)}$:

$$\mathbf{I}^{(0)} \rightarrow \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{(1)} \rightarrow \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{(2)} \rightarrow \begin{bmatrix} I_0 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{(3)} \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Отметим, что если фазовые сдвиги имеют кратную величину, то рассмотренные алгоритмы расшифровки переходят непосредственно в (2).

Таким образом, получен обобщенный алгоритм, позволяющий получать решения системы трансцендентных уравнений (1) при произвольных фазовых сдвигах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Creath K. Phase-shifting speckle interferometry // Appl. Opt. 1985. 24, N 18. P. 3053.
2. Surrel Y. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping // Appl. Opt. 1996. 35, N 1. P. 51.

*Новосибирский государственный
технический университет,
E-mail: ls@ff.nstu.ru*

*Поступило в редакцию
8 января 2002 г.*