ляется механической оправкой. Далее проводилось моделирование процесса расшифровки искаженных различными шумами интерферограмм. Было определено необходимое разрешение интерферограмм для получения требуемых точностных и динамических характеристик. Для случая 128 × 128 точек при исключении шести краевых точек методическая погрешность в точке составила $\lambda/50$ при диапазоне изменения фазы от $\lambda/30$ до $6\lambda$ и среднеквадратическое отклонение исходного поля фаз от восстановленного — $\lambda/100$.

Основной целью при разработке программного обеспечения являлось достижение высокого быстродействия и минимизация объема программы. Все вычислительные операции выполняются в целых числах, применен оригинальный алгоритм преобразования Фурье, позволяющий определять группу пространственных частот и производить вычисления только в целых числах ограниченной разрядности. Необходимые для вычислений математические функции заданы таблично. Все это в совокупности позволило сократить время обработки при разрешении 128 × 128 точек до 30 с, включая различные преобразования результатов для устройства отображения, и разместить программное обеспечение в ПЗУ.

Оценка погрешностей системы была проведена при контроле формы эталонных оптических деталей на интерферометре MARK 3 фирмы ZYGO (США). В результате абсолютная погрешность системы в точке составила $\lambda/25$ и среднеквадратическое отклонение — $\lambda/50$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Takeda M., Ina H., Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry // JOSA.—1982.—72.—P. 156.



*Поступила в редакцию 23 сентября 1992 г.*


---


УДК 535.411.01



**В. И. Гужов, Ю. Н. Солодкин**

*(Новосибирск)*


# АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛНОЙ РАЗНОСТИ ФАЗ В ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ


Рассмотрено влияние погрешностей определения разностей фаз на восстановление полной фазы с помощью методики, основанной на решении системы сравнений целых чисел. Исследованы условия, при которых возможна коррекция результата, предложены условия выбора исходных модулей.


Задачей интерферометрии является получение полной разности фаз световых волн по двумерной интерференционной картине или по периодическому изменению яркости в заданных точках. Причем разность фаз в интерферометрах определена с точностью до периода интерференционной полосы. Полная фаза может быть найдена только при априорных допущениях о плавности изменения фазы пространственным или временным анализом интерференционной картины. В этом случае полная фаза определяется подсчетом интерференционных полос. Автоматизация процесса выделения экстремальных значений интерференционной картины и определения полной фазы оказывается довольно сложной. Алгоритм включает в себя поиск непрерывных зон, в которых фаза плавно меняется в пределах периода, определение знака перехода по изменению фазы внутри зоны, устранение разрывов интерференционных полос, имеющих одинаковые значения, и определение полной фазы.

В [1] описан метод нахождения полной фазы, основанный на решении систем сравнений целых чисел. Полная фаза определяется по набору значений фаз, определенных в пределах некоторых различных периодов. Не требуется дополнительной информации о поведении фазы в соседних точках. Накладывается лишь ограничение на диапазон изменения полной фазы.

Метод основан на решении системы сравнений целых чисел. Если в результате нескольких измерений некоторой величины $X$ получен ряд значений $b_i$, каждое из которых определено по модулю $m_i$, $i = 1, ..., n$, то при условии взаимной простоты модулей можно получить однозначное выражение для величины $X$, если ее значение не превышает произведения этих модулей:

$$X = M_1M_1'b_1 + M_2M_2'b_2 + ... + M_nM_n'b_n, \tag{1}$$

где $M_s$ и $M_s'$ определяются из условий

$$\begin{gathered} M_sm_s = m_1m_2 \dots m_k, \\ M_sM_s' \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_s). \end{gathered} \tag{2}$$

Если в результате нескольких измерений при разных периодах интерференционных полос разностям фаз, определенным в пределах периода, поставить в соответствие целые числа с числом значащих цифр, зависящим от точности проведенных измерений, и если периоды интерференционных полос, выраженные целыми числами с тем же числом цифр, являются взаимно простыми, с помощью выражения (1) может быть определена полная фаза. В этом случае на распределение фаз не накладывается никаких ограничений. Фаза может ступенчато изменяться в соседних точках в диапазоне, определяемом произведением исходных модулей и числом значащих цифр, с которым определен каждый модуль.

Допустим, что измерения проведены при двух периодах интерференционных полос — 0,529 и 0,633 мкм. Если точность измерений позволяет найти разность фаз до третьего знака после запятой, то предел измерения определяется целым числом $529 \times 633$, что составляет 529 периодов по 633.

Естественно, что в процессе измерения всегда имеют место некоторые погрешности и возникает вопрос, как они влияют на полученный результат. Исследование этого вопроса является целью данной статьи.

В силу специфических особенностей целочисленной арифметики обычные методы исследования погрешностей, например нахождение полного дифференциала или использование метода наименьших квадратов, непригодны для решения поставленной задачи. В теории чисел такая задача просто не ставилась, поскольку изначально считалось, что вычисления в целочисленной арифметике безошибочны.

Для выяснения возможных подходов к анализу точности рассмотрим конкретную ситуацию, которая возникает при решении двух сравнений с модулями $m_1 = 11$ и $m_2 = 15$. Решением в соответствии с (1) является сравнение

$$X \equiv 45b_1 + 121b_2(\mathrm{mod}\,165), \tag{3}$$

и числа $X$, определяемые этим сравнением, удобно свести в таблицу.

Очевидно, что неточность измерения $b_1$ и $b_2$ приводит к образованию вокруг достоверного значения некоторой окрестности, в которую попадают числа-решения, дающие ошибочные результаты. Например, если $b_1 = 4 \pm 1$ и $b_2 = 5 \pm 1$, то из таблицы видно, что возможны значения $X$ в порядке возрастания: 4, 5, 36, 49, 80, 81, 124, 125, 126. Такой разброс значений нельзя считать приемлемым, и можно сделать вывод о том, что решение систем сравнений является некорректной задачей, поскольку малые погрешности исходных значений $b_i$ приводят к большим погрешностям результата.

Следовательно, целочисленный метод может быть работоспособным только в том случае, если возможна коррекция полученного результата. С этой

| $b_1$ | $b_2$ | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 0 / 4 | 0 / 15 | 121 / 136 | 77 / 92 | 33 / 48 | 154 / 4 | 110 / 125 | 66 / 81 | 22 / 37 | 143 / 158 | [illegible] / 114 | 55 / 70 | 11 / 26 | [illegible] / 147 | [illegible] / 103 | [illegible] / 59 |
| 5 | 60 | 16 | 137 | 93 | 49 | 5 | 126 | 82 | 38 | 159 | 115 | 71 | 27 | 148 | 104 |
| 6 | 105 | 61 | 17 | 138 | 94 | 50 | 6 | 127 | 83 | 39 | 160 | 116 | 72 | 28 | 149 |
| 7 | 150 | 106 | 62 | 18 | 139 | 95 | 51 | 7 | 128 | 84 | 40 | 161 | 117 | 73 | 29 |
| 8 | 30 | 151 | 107 | 63 | 19 | 140 | 96 | 52 | 8 | 129 | 85 | 41 | 162 | 118 | 74 |
| 9 | 75 | 31 | 152 | 108 | 64 | 20 | 141 | 97 | 53 | 9 | 130 | 86 | 42 | 163 | 119 |
| 10 | 120 | 76 | 32 | 153 | 109 | 65 | 21 | 142 | 98 | 54 | 10 | 131 | 87 | 43 | 164 |

целью необходимо исследовать порядок расположения чисел в подобных таблицах. Из таблицы следует, что числа от 0 до 164 по мере возрастания заполняют таблицу вдоль диагоналей. Если обозначить диагонали $b_{i,n}$, где $n$ — значения $b_i$, от которых эти диагонали начинаются, то сначала заполняется диагональ $b_{1,0}$ (или $b_{2,0}$), затем $b_{2,11}$; $b_{1,4}$; $b_{2,7}$; $b_{1,8}$; $b_{2,3}$; $b_{2,14}$ и т. д.

Коррекция результата возможна, если априорно известен диапазон, в котором лежит измеряемая величина, и если в окрестность, определяемую погрешностью, попадают числа не более чем из одной диагонали, принадлежащей этому диапазону [2]. Поэтому возникает вопрос, на какие поддиапазоны можно разбить таблицу чисел-решений, чтобы обеспечить условия коррекции.

Если $b_2 = b_1 + c$, то целое число $c$ определяет расположение чисел вдоль диагоналей. В этом случае решение (1) можно записать так:

$$X \equiv (M_1M_1' + M_2M_2')b_1 + M_2M_2'c(\mathrm{mod}\, m_1m_2). \tag{4}$$

При $c = 0$ (диагональ $b_{1,0}$ или $b_{2,0}$) из (4) следует, что $X \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m_1m_2)$, так как по определению $M_1M_1' + M_2M_2' \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_1m_2)$. Это означает, что вдоль нулевой диагонали расположены в порядке возрастания числа от 0 до $m_1 - 1$. Отсюда следует, что числа вдоль любой другой диагонали ($c \neq 0$) возрастают с шагом 1, а отличие чисел по строкам и по столбцам определяется коэффициентами $M_1M_1'$ и $M_2M_2'$. Расстояние между диагоналями имеет определяющее значение для коррекции результатов измерения. Поэтому важно исследовать, от чего зависит это расстояние и как его вычислить. Для этого требуется решить обратную задачу: получить соотношения, позволяющие по заданному значению $X$ находить значения $b_i$.

При двухмодульной системе достаточно рассмотреть характер изменения чисел по одной строке и по одному столбцу, так как изменения по другим строкам и столбцам аналогичны. Для простоты возьмем нулевой столбец ($b_2 = 0$) и нулевую строку ($b_1 = 0$). Тогда имеем два сравнения:

$$M_iM_i'b_i \equiv X(\mathrm{mod}\, m_1m_2), \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Коэффициенты $M_iM_i'$ и модуль $m_1m_2$, как следует из (1), имеют наибольший общий делитель:

$$(M_i M_i', m_1 m_2) = m_1 m_2 / m_i, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Поэтому сравнения (5) имеют решения только для таких значений $X$, которые кратны $m_1 m_2 / m_i$ [3]. Вводя коэффициент кратности $k = X/(m_1 m_2/m_i)$ и сокращая обе части сравнений (5) и модуль на общий делитель, получим

$$M_i' b_i \equiv k(\mathrm{mod}\, m_i), \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ .

Отметим, что система сравнений вида (7) справедлива для $i > 2$.

Следуя правилам, изложенным в [3], для получения решения сравнений (7) надо представить отношения $m_i / M_i'$ в виде цепной дроби:

$$\frac{m_i}{M_i'} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}}. \tag{8}$$

Затем необходимо последовательно вычислить

$$p_j = q_j p_{j-1} + p_{j-2}; \quad p_0 = 1; \quad p_{-1} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Тогда решения сравнений (7) записываются следующим образом:

$$b_i \equiv (-1)^{n-1} p_{n-1} k(\mathrm{mod}\, m_i), \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

где $n$ определяется дробью (8).

Приведем решение задачи на примере сравнения (3). В итоге на основании (10) записываем решения:

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv 4k(\mathrm{mod}\, 11), \\ b_2 &\equiv -4k(\mathrm{mod}\, 15) = 15 - 4k(\mathrm{mod}\, 15). \end{aligned} \tag{11}$$

Полученные сравнения полностью характеризуют порядок заполнения таблицы решений. Расстояние между диагоналями, от которого зависят возможности коррекции, определяется коэффициентом при $k$ в сравнениях (10). В приведенном примере этот коэффициент (обозначим его $D$) равен 4. Возникает вопрос, как значение $D$ связано с модулями $m_i$.

Пусть $m_1 = N$, $m_2 = N + z$, причем $N$ и $z$ — взаимно простые числа. Для произвольных $N$ и $z = 1, 2, 3$ решения выглядят так:

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv zk(\mathrm{mod}\, N), \\ b_2 &\equiv -zk(\mathrm{mod}(N + z)) = N + z - zk(\mathrm{mod}(N + z)). \end{aligned} \tag{12}$$

Расстояние между диагоналями $D = 1, 2, 3$ и не зависит от $N$.

Рассмотренные три частных случая ($z = 1, 2, 3$) позволяют предположить, что расстояние между диагоналями не зависит от абсолютных значений модулей, а определяется только их разностью. Получить решение в общем виде для произвольных $N$ и $z$ не удалось. Однако из геометрической картины (рис. 1), отображающей последовательность заполнения числами таблицы решений, видно, что расстояния по вертикали и горизонтали между следующими друг за другом диагоналями равны, т. е. определяются только разностью модулей и не зависят от их абсолютных значений.

Теперь необходимо разобраться, при каких значениях $z$ возможна коррекция результата и какая при этом допускается погрешность определения

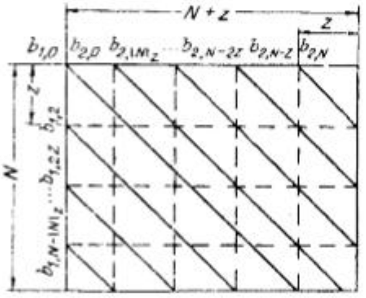


*Рис. 1*

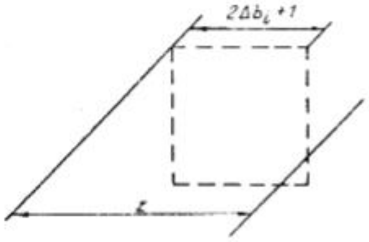


*Рис. 2*

исходных величин. На рис. 2 изображены две диагонали, находящиеся друг от друга на расстоянии $z$. Коррекция возможна только в том случае, если в квадрат, определяемый погрешностью измерения, попадают числа не более чем из одной разрешенной диагонали. Сторона квадрата составляет $2\Delta b_i + 1$, где $\Delta b_i$ — погрешности определения величин $b_i$. Тогда минимальное значение $z$, удовлетворяющее условию коррекции, как следует из рис. 2, равно

$$z = 4\Delta b_i + 1, \tag{13}$$

или, если задана разность модулей $z$, то максимально допустимая погрешность определения величин $b_i$ составляет

$$\Delta b_i = \pm (z - 1)\mathrm{div}4, \tag{14}$$

где div означает целочисленное деление.

При значении $\Delta b_i = \pm 1$ для осуществления коррекции требуется обеспечить разность модулей не менее 5. При $\Delta b_i = \pm 2$ необходимо иметь $z = 9$ и т. д.

В то же время нужно учитывать тот факт, что таблица решений периодически повторяется, и по существу ее надо рассматривать как развертку цилиндрической поверхности и по вертикали, и по горизонтали, т. е. первая и последняя строки и первый, и последний столбцы являются соседними. Поэтому соответствующие им числа-решения попадают в одну окрестность, определяемую квадратом ошибок. Обе последние диагонали $b_{1,N-|N|_z}$ и $b_{2,|N|_z}$ оказываются соседними по отношению к нулевой диагонали $b_{1,0}$ ($b_{2,0}$), но расстояние между ними определяется не значением $z$, а значением $|N|_z$. Максимальное значение $|N|_z$ равно $z - 1$, т. е. расстояние между первой и двумя последними диагоналями на первом этапе заполнения таблицы решений, по крайней мере, на единицу меньше расстояния между другими диагоналями. Следовательно, условия коррекции погрешностей, определяемые равенствами (13) и (14), справедливы, если отбросить две последние диагонали и ограничить диапазон измеряемых значений максимальным числом на диагонали $b_{2,|N|_z+z}$ (см. рис. 1), которое в соответствии с решением

$$X_{1,\max} = |M_1 M_1'(N - |N|_z - 1) + M_2 M_2'(N + z - 1)\Big|_{N(N+z)}. \tag{15}$$

Поддиапазон чисел, определяемый (15), может быть расширен за счет двух последних диагоналей $b_{1,N-|N|_z}$ и $b_{2,|N|_z}$, если модули выбрать такими, чтобы $|N|_z = z - 1$, а значение $z$ при этом должно быть на единицу больше, чем это необходимо для коррекции в соответствии с (13), например, $m_1 = 59$, $m_2 = 69$. Тогда $z = 10$, а $|N|_z = 9$, т. е. и для последних диагоналей обеспечивается возможность коррекции при ошибках, не превышающих $\Delta b_i = \pm 2$. В подобных случаях поддиапазон будет ограничен максимальным (последним) числом на диагонали $b_{2,|N|_z}$ (см. рис. 1):

$$X_{2,\max} = |M_1 M_1'(N-1) + M_2 M_2'(N+z-2)|_{N(N+z)}. \tag{16}$$

и $X_{1,\max}(N)$ при $z = \text{const}$. Из графиков следует, что значение $z$ существенно влияет на диапазон измерения, поэтому разность модулей следует выбирать минимально необходимой, чтобы обеспечить коррекцию допустимых погрешностей, т. е. задается значение $\pm\Delta b_i$, по нему определяется достаточное для коррекции значение $z$ и затем выбираются минимальные абсолютные значения модулей $m_1$ и $m_2 = m_1 + z$, обеспечивающие требуемый диапазон измерения.

Итак, в системах остаточных классов малые погрешности исходных значений могут приводить к большим погрешностям результата.

Закономерности расположения чисел-решений в результирующих таблицах позволяют разбить их на поддиапазоны и делают возможной коррекцию полученного значения измеряемой величины, в результате чего погрешность измеренного значения не превышает погрешности, с которой определены остатки по модулям.

Определяющее значение для оценки возможностей коррекции имеет расстояние между диагоналями в таблицах чисел-решений. Это расстояние определяется только разностью модулей и не зависит от их абсолютного значения.

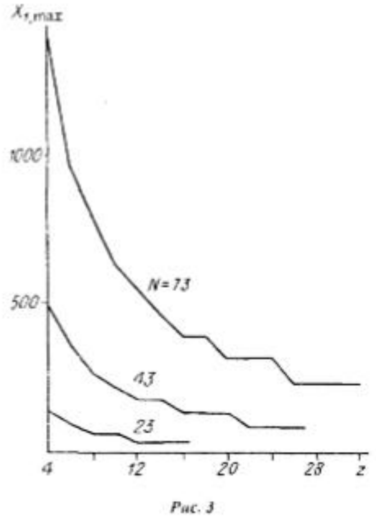


Рис. 3

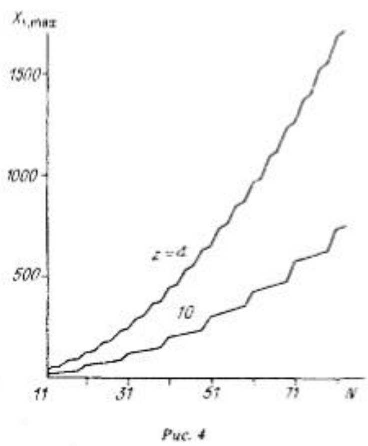


Рис. 4

Допустимые погрешности определения остатков по модулям, при которых возможна коррекция результата, зависят от разности модулей и могут быть рассчитаны по полученным соотношениям.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Гужов В. И., Солодкин Ю. Н.** Использование свойств целых чисел для расшифровки интерферограмм // Оптика и спектроскопия.—1988.—**65**, вып. 5.
2. **Гужов В. И., Солодкин Ю. Н.** Оценка точности целочисленного интерферометра // Там же.—Вып. 6.
3. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел.—М.: Наука, 1972.


*Поступила в редакцию 21 сентября 1992 г.*