

Представление преобразования Френеля в дискретной форме

Гужов В.И., Несин Р.Б., Емельянов В.А.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

Аннотация: В статье рассматривается представление преобразования Френеля в дискретной форме. Основное внимание уделяется фазовым искажениям, которые возникают при изменении расстояния.

Ключевые слова: Дискретизация, квантование, преобразование Френеля, цифровая голография.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании цифровых голограмм основным математическим инструментом является преобразование Френеля, которое описывает преобразование волновых фронтов при прохождении ими некоторого расстояния [1].

Интегральный вид преобразования Френеля имеет следующий вид [2]

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda d}\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_1(x, y) \exp\left[i\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda d}\right] \exp\left[-i\frac{2\pi(x\xi + y\eta)}{\lambda d}\right] dx dy \quad (1)$$

В (1) λ - длина волны света, используемого для освещения, d - расстояние между исходным волновым фронтом и преобразованным, $b_1(x, y)$ - комплексная функция, полученная в результате пересчёта амплитуды и фазы поля,

отражённого объектом на плоскость (x, y) касательную к нему и параллельную плоскости наблюдения (ξ, η) (рис.1).

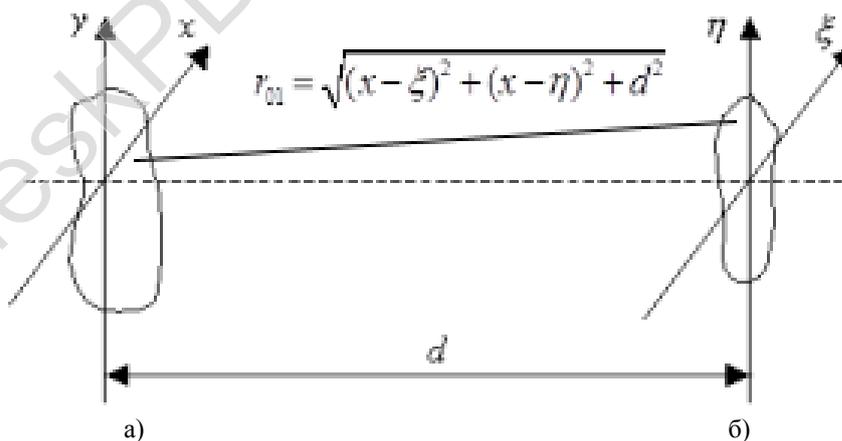


Рис. 1. Плоскость касательная к объекту (x, y) и плоскость дифракции (ξ, η)

Наиболее простым описанием $b_1(x, y)$ в дискретном виде является представление ее в виде матрицы отсчетов, взятых на прямоугольном растре с некоторым шагом по координатам Δx и Δy . В [3] Ярославский Л.П. и Мерзляков Н.С. описали процесс дискретизации преобразования

Френеля. Эта книга положила основу для синтезирования цифровых голограмм и являлась руководством для нескольких поколений российских ученых. Однако авторов не интересовало точное восстановление фазы комплексного сигнала, поскольку в большинстве случаев анализировалась лишь амплитуда, т.е. изображение, восстановленное из голограммы.

В статье рассмотрены некоторые вопросы при синтезировании цифровых голограмм и последующем восстановлении фазовой информации из них.

I. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФРЕНЕЛЯ ЧЕРЕЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Дискретное представление интеграла Френеля имеет вид:

$$\Gamma(r,s) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi\left[(r\Delta\xi)^2 + (s\Delta\eta)^2\right]}{\lambda d}\right] \times \sum_k^{N_x-1} \sum_l^{N_y-1} b_1(k,l) \exp\left[i\frac{\pi(k^2\Delta x^2 + l^2\Delta y^2)}{\lambda d}\right] \exp\left[-i\frac{2\pi(kr\Delta\xi\Delta x + ls\Delta\eta\Delta y)}{\lambda d}\right] \quad (2)$$

Эффективная реализация выражения (2) может быть осуществлена с помощью цифрового преобразования Фурье. Для того чтобы преобразовать это выражение допустим, что Δx и $\Delta\xi$ такие, что

$$\Delta\xi = \frac{\lambda d}{2X_{\max}} = \frac{\lambda d}{N_x \Delta x} \quad (3)$$

Тогда выражение (2) можно представить в виде

$$\Gamma(r,s) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi\left[(r\Delta\xi)^2 + (s\Delta\eta)^2\right]}{\lambda d}\right] \times \sum_k^{N_x-1} \sum_l^{N_y-1} b_1(k,l) \exp\left[i\frac{\pi(k^2\Delta x^2 + l^2\Delta y^2)}{\lambda d}\right] \exp\left[-i2\pi\left(\frac{kr}{N_x} + \frac{ls}{N_y}\right)\right] \quad (4)$$

Второй множитель представляет собой преобразование Фурье над аргументом

$$b_1(k,l) \exp\left[i\frac{\pi(k^2\Delta\xi^2 + l^2\Delta\eta^2)}{\lambda d}\right] \quad (5)$$

Выражение (4) наиболее известный вид дискретного интегрального преобразования Френеля.

Однако оно выполняется только при условии (3). Несложно показать, что это условие фактически определяет условие равенства размеров объекта и размер области регистрации и $\Delta x = \Delta\xi$. Расстояние, на котором размеры пикселей совпадают, можно определить следующим образом:

$$d_{eq} = \frac{N_x \Delta x^2}{\lambda} \quad (6)$$

Пусть $\lambda = 0.5$ мкм, $N_x \times N_y = 1024 \times 1024$, то при следующих размерах объекта и области регистрации расстояние, на котором размеры объекта и размер области регистрации совпадают будет:

$$2X_{\max} = 2\xi_{\max} = 1 \text{ см} \quad d_{eq} = 195,3 \text{ мм}$$

$$2X_{\max} = 2\xi_{\max} = 2 \text{ см} \quad d_{eq} = 781,25 \text{ мм}$$

$$2X_{\max} = 2\xi_{\max} = 3 \text{ см} \quad d_{eq} = 1757,81 \text{ мм}$$

Выставлять точные значения для расстояния от объекта до плоскости регистрации сложно. Если расстояние установить не точно, возникают фазовые ошибки.

Множитель перед суммой отвечает за сдвиг фазы. Если в результате восстановления важна только интенсивность, то этим множителем можно пренебречь. Однако им нельзя пренебрегать при анализе фазовой информации.

Отношение размеров объекта и области регистрации преобразования Френеля связаны с расстоянием d . При этом размеры пикселей Δx и $\Delta\xi$ могут отличаться (рис.2).

Введем параметр γ , характеризующий изменение размера апертуры регистратора в области преобразования Френеля [4].

$$\gamma_x = \frac{\Delta\xi}{\Delta x} \quad (7)$$

Для упрощения, считаем, что $\gamma_x = \gamma_y = \gamma$ (рис. 1).

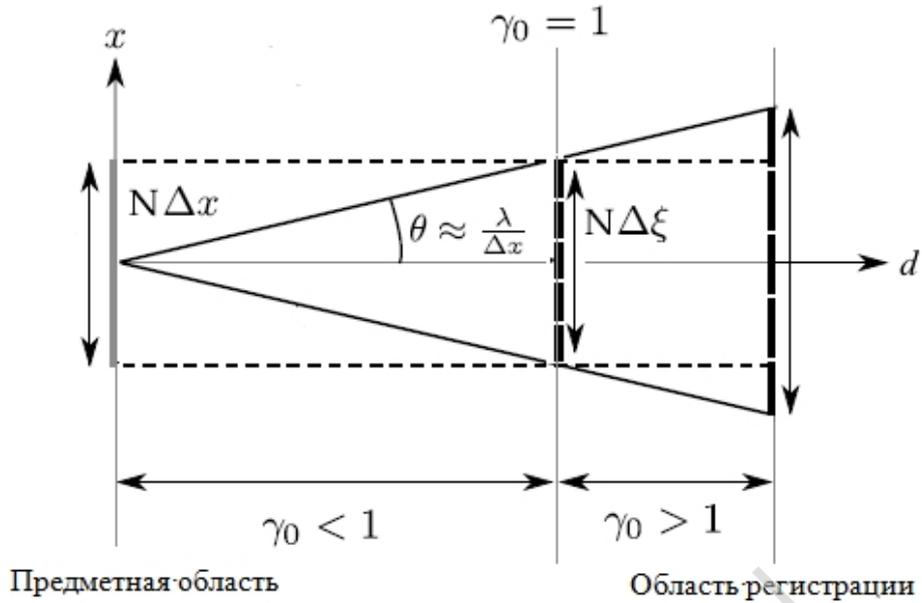


Рис. 2. Соответствие размеров пикселей в предметной области и области регистрации

Получим значения всех экспонент выражения (4).

$$\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda d}\left[(k\Delta x)^2 + (l\Delta y)^2\right]\right] = \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda d}\left[\left(\frac{k}{\gamma}\Delta\xi\right)^2 + \left(\frac{l}{\gamma}\Delta\eta\right)^2\right]\right] \quad (8)$$

$$\exp\left[-i\frac{2\pi(kr\Delta\xi\Delta x + ls\Delta\eta\Delta y)}{\lambda d}\right] = \exp\left[-i\frac{2\pi}{N}\left(\frac{k}{\gamma}r + \frac{l}{\gamma}s\right)\right] \quad (9)$$

Подставим значения экспонент в (4). В результате получим:

Учитывая, что $\Delta\xi_{eq} = \frac{\lambda d_{eq}}{N_x \Delta\xi}$:

$$\Gamma(r,s) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi\left[(r\Delta\xi)^2 + (s\Delta\eta)^2\right]}{\lambda d}\right] \times \sum_k \sum_l b_1(k,l) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda d}\left[\left(\frac{k}{\gamma}\Delta\xi\right)^2 + \left(\frac{l}{\gamma}\Delta\eta\right)^2\right]\right] \exp\left[-i\frac{2\pi}{N}\left(\frac{k}{\gamma}r + \frac{l}{\gamma}s\right)\right] \quad (10)$$

Если сделать замену переменных $k^l = \frac{k}{\gamma}$, то выражение (10) примет вид:

$$\Gamma(r,s) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi\left[(r\Delta\xi)^2 + (s\Delta\eta)^2\right]}{\lambda d}\right] \times \sum_k \sum_l b_1(k,l) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda d}\left[(k\Delta\xi)^2 + (l\Delta\eta)^2\right]\right] \exp\left[-i\frac{2\pi}{N}(kr + ls)\right] \quad (11)$$

Выражение (11) можно использовать для любого расстояния d , при котором $\gamma > 1$. Выражение (11) похоже на (4). Единственным различием является то, что используется только

размеры пикселя в области регистрации ($\Delta\xi, \Delta\eta$).

Выражение (11) можно выразить через

преобразование Фурье:

$$\Gamma(r, s) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \exp\left[i\frac{\pi\left[(r\Delta x)^2 + (s\Delta y)^2\right]}{\lambda d}\right] \mathfrak{F}\left(b_1(k, l) \exp\left[i\frac{\pi(k^2\Delta x^2 + l^2\Delta y^2)}{\lambda d}\right]\right) \quad (12)$$

II. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФРЕНЕЛЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГОЛОГРАММ

Рассмотрим первый сомножитель выражения (12). Следует учесть две особенности.

Первое. Выражение для сомножителя описывает сферический фазовый фронт (рис.3)

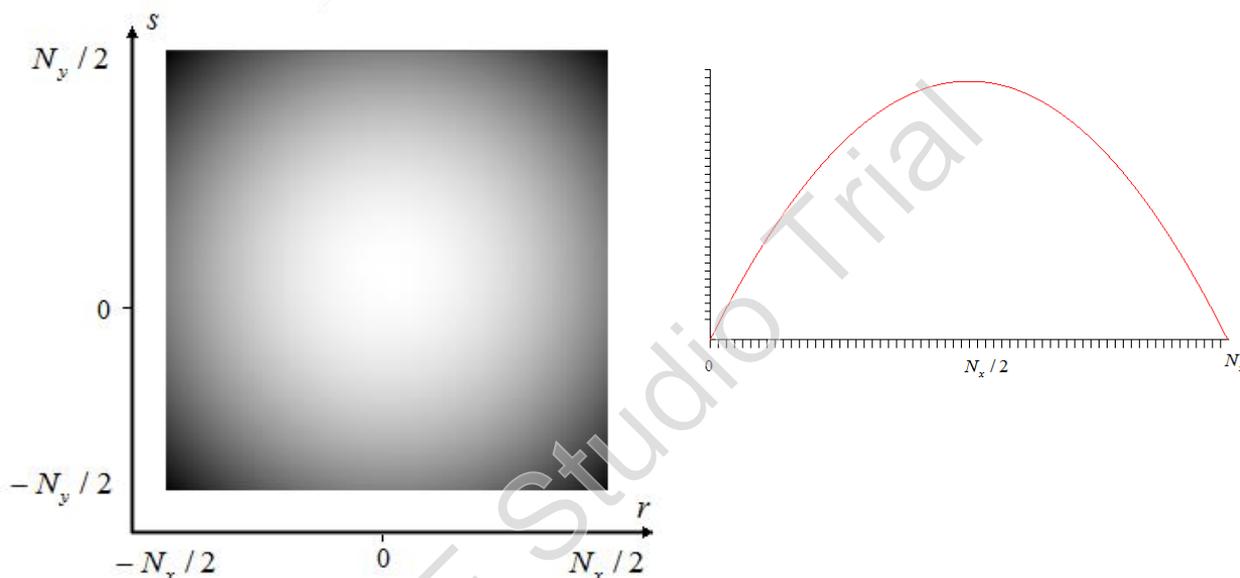


Рис. 3. Сферический фазовый фронт (справа график по центральной строке).

Второе. Это чисто фазовое выражение. Множитель $\frac{i}{\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right]$ это большая постоянная добавка к фазе, которая при вычислении дискретного преобразования

Френеля может быть отброшена, поскольку она не влияет на вид фазового фронта.

Таким образом, дискретное преобразование Френеля можно записать в виде:

$$\Gamma(r, s) = -\exp\left[i\frac{\pi\left[(r\Delta\xi)^2 + (s\Delta\eta)^2\right]}{\lambda d}\right] \mathfrak{F}\left(b_1(k, l) \exp\left[i\frac{\pi(k^2\Delta\xi^2 + l^2\Delta\eta^2)}{\lambda d}\right]\right) \quad (13)$$

Кривизна сферического фронта уменьшается с расстоянием d . Пусть $\lambda = 0.5$ мкм, размер апертуры регистратора - 1 см, $N_x \times N_y = 1024 \times 1024$, тогда при изменении расстояния кривизна фронта меняется следующим образом:

- $d = 10 \text{ см} \quad 0 - 996\pi$
- $d = 1 \text{ м} \quad 0 - 99\pi$
- $d = 10 \text{ м} \quad 0 - 9.9\pi$
- $d = 100 \text{ м} \quad 0 - 0.996\pi$

- $d = 1 \text{ км} \quad 0 - 0.099\pi$
- $d = 6 \text{ км} \quad 0 - 0.017\pi$

На больших расстояниях сферический фронт становится все более плоским и постепенно преобразование Френеля переходит в преобразование Фурье.

Для моделирования цифровых голограмм необходимо рассчитать преобразование Френеля в плоскости голограмм, смоделировать голограмму, а затем рассчитать преобразование Френеля в плоскости изображения рис.4.

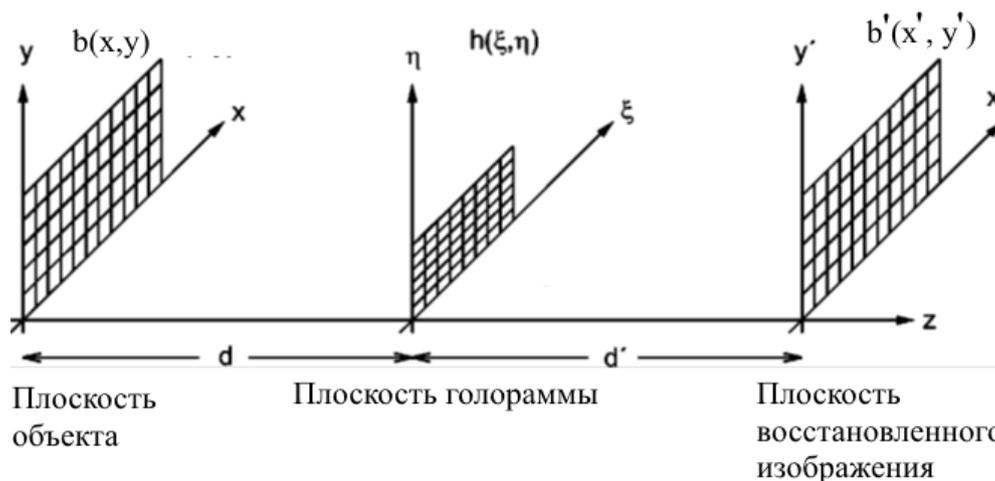


Рис. 4. Координатная система при получении голограмм и голографическом восстановлении.

Для расчета в плоскости голограммы исходными данными являются: размер апертуры фоторегистрирующей матрицы $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}; -\eta_{\max}, \eta_{\max}]$, длина волны λ , расстояние до объекта d .

Размер объекта можно определить следующим образом:

$d_{eq} = \frac{N_x \Delta \xi^2}{\lambda}$ - расстояние, на котором

$\Delta x = \Delta \xi$. На этом расстоянии размер объекта $2\xi_{\max}$. Если d такое, что $\gamma > 1$, то размер

объекта равен $2X_{\max} = \frac{N_x \Delta \xi^2 d_{eq}}{\lambda d}$.

Алгоритм преобразования Френеля обеспечивает простое масштабирование восстановленного изображения, однако это накладывает ряд ограничений на конструкцию измерительной системы, в частности верхняя и нижняя границы допустимого расстояния записи голограммы становятся значимым фактором.

IV. ВЫВОДЫ

Показано, что стандартный алгоритм дискретного преобразования Френеля (4) дает точные фазовые значения только при определенных расстояниях. На других расстояниях возникают фазовые ошибки.

В статье описан новый алгоритм для численного расчета преобразования Френеля (13), свободный от фазовых искажений на любых расстояниях между плоскостями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований «Разработка методов сверхразрешения в цифровой голографической интерферометрии» (Грант № 16-08-00565).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Математическая модель распространения света в пространстве /Гужов В.И., Бердников П.А., Кузнецов Р.А.// Автоматика и программная инженерия, Новосибирск, - 2013.-№1(3) – С. 121 – 127.
- [2] Дж. Гудмен Введение в фурье-оптику.- Москва :Мир.- 1970.- 363 с.
- [3] Ярославский Л.П., Мерзляков Н.С. Цифровая голография.- М.: Наука.- 1982.- 219 с.
- [4] N.Verrier, M.Atlan Off-axis digital hologram reconstruction: some practical considerations. APPLIED OPTICS / Vol. 50, No. 34 / 1 December 2011,-pp.H136-H146.



Владимир Гужов - профессор кафедры ССОД НГТУ, доктор технических наук. Он является автором более 170 научных работ. Область научных интересов: высокоточные интерференционные измерения, безошибочные вычисления, теория чисел.
[e-mail: vig@nstu.edu.ru](mailto:vig@nstu.edu.ru)



Виктор Емельянов – аспирант, каф. ССОД НГТУ. Область научных интересов: устранение фазовой неоднозначности, цифровая голография.



Ростислав Несин –
магистрант 2 курса
каф. ВТ НГТУ.
[e-mail:Rashpil93@mail.ru](mailto:Rashpil93@mail.ru)

Presentation of Fresnel Transform in the Discrete Form

V.I. Guzhov, R.B. Nesin, V.A. Emelyanov

REFERENCES

- [1] Matematicheskaja model' rasprostranenija sveta v prostranstve. Guzhov V.I., Berdnikov P.A., Kuznecov R.A. Avtomatika i programmaja inzhenerija, Novosibirsk, 2013. № 1(3) S. 121–127.
- [2] J.W. Goodman Introduction to Fourier optics. Roberts and Company Publishers, 2005 – 491 p.
- [3] Jaroslavskij L.P., Merzljakov N.S. Cifrovaja golografija. M.: Nauka.- 1982.- 219 s.
- [4] N.Verrier, M.Atlan Off-axis digital hologram reconstruction: some practical considerations. APPLIED OPTICS. Vol. 50, No. 34. 1 December. 2011, p.H136-H146.

deskPDF Studio Trial