УДК 535.854

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Гужов В. И., Солодкин Ю. Н.

Проведен анализ погрешностей метода определения полной разности фаз, основанного на решении систем сравнений целых чисел. Априорное знание полной фазы в первом грубом приближении позволяет осуществить корректировку результата, если ошибки измерения фазы в пределах периода превышают допустимые.

В [1] описан метод интерферометрии, в котором используются решения систем сравнений целых чисел. Показано, что этот метод позволяет устранить фазовую неоднозначность в интерферометрах с контролируемым фазовым сдвигом и определить полную разность фаз световых волн по измерению яркости в точке без счета интерференционных полос.

В силу специфики предложенного метода анализ его точностных характеристик имеет свои особенности. Рассмотрение этих характеристик и является целью данной статьи.

Непосредственно измеряемыми величинами в интерферометрах с контролируемым фазовым сдвигом являются уровни яркостей в исследуемых точках интерференционной картины при заданных значениях фазы. По результатэм нескольких измерений можно определить разности фаз $\varphi(x, y)$ в пределах одного периода, что приводит к так называемой 2π-неоднозначности. В целочисленном методе 2π-неоднозначность устраняется за счет измерения фазы $\varphi(x, y)$ при двух и более ценах интерференционных полос. Будем считать, что точность измерения фазы в пределах одного периода известна, и требуется определить, какова будет при этом точность определения полной фазы целочисленным методом.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $\varphi(x, y)$ определена при двух ценах полос 0.529 и 0.633 мкм. Тогда при определении $\varphi(x, y)$ с точностью до десятых периода достаточно, чтобы достоверным был первый знак после запятой при задании цены полосы, до сотых периода — второй знак, до тысячных — третий, и т. д.

В зависимости от точности измерения реальным ценам полос ставят в соответствие пары целых чисел: 5 и 6, 53 и 63, 529 и 633. Решая, как показано в [1], систему сравнений

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv b_1\,(mod\; m_1),\\ x &\equiv b_2\,(mod\; m_2),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где m_1 и m_2 — указанные пары чисел, получают результат в виде

$$x \equiv M_1 M_1' b_1 + M_2 M_2' b_2\,(mod\; m_1 m_2). \tag{2}$$

Вычисляя M_s и $M'_s (i=1, 2)$, имеем 1) для $m_1=5$, $m_2=6$

$$x \equiv 6b_1 + 25b_2\,(mod\; 30), \tag{3}$$

2) для $m_1=53$, $m_2=63$

$$x \equiv 1008b_1 + 2332b_2\,(mod\; 3339), \tag{4}$$

3) для $m_1=529$, $m_2=633$

$$x \equiv 74061b_1 + 260797b_2\,(mod\; 334857). \tag{5}$$

Сравнение (3) позволяет определять полную разность фаз в пределе до 6 периодов, сравнение (4) — до 63 периодов, а сравнение (5) — до 633 периодов. Таким образом, учет следующей значащей цифры, т. е. увеличение точности на порядок, приводит к расширению на тот же порядок предела измерения. Взаимосвязь точности с пределом измерения является важной особенностью целочисленного метода интерферометрии.

На первый взгляд возникает ощущение, что имеет смысл изменение точности не менее чем в 10 раз. Однако это справедливо только при использовании десятичной системы счисления. Если же сравнивать числа в двоичной системе, то увеличение точности на порядок, т. е. в 2 раза, приводит к расширению предела измерения также в 2 раза. Это означает, что при реализации возможностей целочисленного метода играет роль выбор системы счисления.

Отметим, что измерения при трех и более ценах полос позволяют существенно увеличить максимальное значение полной фазы при той же точности измерения фазы в пределах периода. Например, при трех целочисленных значениях цен полос 53, 63, 73 предел измерения равен 53·63·73, т. е. возрастает в 73 раза по сравнению с измерениями при двух ценах полос (учет следующей значащей цифры в цене полосы расширяет предел только на порядок). Возможность выбора большого числа цен полос позволяет всегда получить необходимый предел при ограниченной точности измерения.

Решение уравнения (3)

b_1	b_2					
	0	1	2	3	4	5
0	0	25	20	15	10	5
1	6	1	26	21	16	11
2	12	7	2	27	22	17
3	18	13	8	3	28	23
4	24	19	14	9	4	29

Решение (3) может быть представлено в виде таблицы, содержащей 30 чисел от 0 до 29 (см. таблицу). Если, например, фазы, измеренные в пределах одного периода при двух ценах полос, равны соответственно $\varphi_1=4\pi/5$ и $\varphi_2=\pi$, то $b_1=2$ и $b_2=3$. Для этих значений по таблице получаем, что полная разность фаз определяется числом 27 и составляет $27/5=5.4$ интерференционных полос ценой 0.5 мкм. Если ошибка при определении чисел b_1 и b_2 составляла ± 1, то решение вместо числа 27 может принять целый ряд значений: 2, 3, 8, 16, 21, 22, 26, 28. Такой разброс результатов, естественно, нельзя считать допустимым. Следовательно, числа b_1 и b_2, характеризующие фазы в пределах одного периода, должны быть определены достоверно.

Интересной представляется ситуация, когда априорно известно, что диапазон измеряемых значений разности фаз меньше предельного значения. Это означает, что появление определенных чисел в решениях (3, 4, 5) можно считать грубыми ошибками. Если эти числа образуют окрестность вокруг допустимого значения, то возникает возможность коррекции результата.

Исследуем некоторые закономерности расположения чисел в таблице. Если $b_2=b_1+k$, то целое число k определяет расположение чисел по диагоналям. В общем виде эти числа можно записать так:

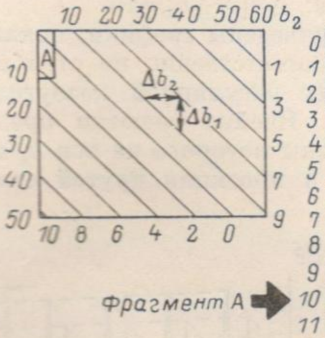
$$x \equiv (M_1M_1' + M_2M_2')\, b_1 + M_2M_2'k \; (mod\; m_1m_2). \tag{6}$$

При $k=0$ (нулевая диагональ) с учетом, что $M_1M_1'+M_2M_2' \equiv 1 \; (mod\; m_1m_2)$, получим $x \equiv b_1 \; (mod\; m_1m_2)$.

Это означает, что вдоль нулевой диагонали расположены в порядке возрастания с шагом 1 числа от 0 до 4. Числа по параллельным диагоналям также возрастают с шагом 1, а от чисел на соседних диагоналях отличаются на значения, определяемые коэффициентами M_1M_1' и M_2M_2'.

Коррекция результата возможна только в том случае, если числа на соседних диагоналях отличаются от допустимых значений полной фазы. Очевидно, что минимальное отличие близлежащих чисел составляет m_1 и m_2. При $m_1=5$, $m_2=6$, как следует из таблицы, диагонали с такими числами расположены рядом, т. е. коррекция невозможна.

На рис. 1 приведен фрагмент из таблицы чисел для $m_1=53$, $m_2=63$, а на схеме таблицы показаны первые 11 диагоналей, вдоль которых расположены числа от 0 до 317. Очевидно, что если результат не превышает 317, то допустимая ошибка значений b_1 и b_2 определится расстоянием между диагоналями Δb_1 и Δb_2. Для нахождения этой окрестности вокруг допустимых значений надо решить обратную задачу — из сравнения (2) найти b_1 и b_2 по заданному значению x. При двух сравнениях достаточно рассмотреть характер изменения чисел по одной строке и одному столбцу, так как изменения по другим строкам



b_1 \ b_2	0	1	2	3
0	0	2332	1325	318
1	1008	1	2333	1326
2	2016	1009	2	2334
3	3024	2017	1010	3
4	693	3025	2018	1011
5	1701	694	3026	2019
6	2709	1702	696	3027
7	378	2710	1703	696
8	1386	379	2711	1704
9	2394	1387	380	2712
10	63	2395	1388	381
11	1071	64	2396	1389
12	2079	1072	65	2397

Рис. 1. Фрагмент из таблицы чисел—решений для $m_1=53$, $m_2=63$.

и столбцам аналогичны. Для простоты возьмем нулевой столбец ($b_2=0$) и нулевую строку ($b_1=0$). Тогда из (2) имеем два сравнения ($s=1$, 2)

$$M_s M'_s b_s \equiv x \,(mod\; m_1 m_2). \tag{7}$$

Поскольку наибольшие общие делители чисел $(M_s M'_s,\ \ m_1 m_2)=m_1 m_2/m_s$, а сравнения (7) имеют решения только для x, кратных $m_1 m_2/m_s$, то, сокращая обе части сравнений (7) и модуль на общий делитель, получим

$$M'_s b_s \equiv k \,(mod\; m_s), \tag{8}$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ — коэффициент кратности.

Следуя правилам, изложенным в [2], отношение m_s/M'_s представляем в виде непрерывной дроби

$$\frac{m_s}{M'_s} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots \cfrac{1}{q_n}}} \tag{9}$$

и последовательно вычисляем

$$p_i = q_i p_{i-1} + p_{i-2}; \quad p_0 = 1. \tag{10}$$

Теперь записываем решение сравнений (8) следующим образом:

$$b_s \equiv (-1)^{n-1}\, p_{n-1} k \,(mod\; m_s). \tag{11}$$

Приведем решение задачи на примере сравнения (4.) Сравнения (7) принимают вид

$$1008 b_1 \equiv x \,(mod\; 3339),$$
$$2332 b_2 \equiv x \,(mod\; 3339),$$

а сравнения (8)

$$16 b_1 \equiv k \,(mod\; 53),$$
$$44 b_2 \equiv k \,(mod\; 63).$$

Непрерывные дроби (9) соответственно равны

$$\frac{53}{16} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}; \quad \frac{63}{44} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}}.$$

Для первого сравнения $n=3$, а значения p_i из (10) последовательно равны 3, 10, 53. Для второго сравнения аналогично имеем $n=4$, а $p_i=1$, 3, 10, 63. Из (11) следует, что

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv 10k\ (mod\ 53), \\ b_2 &\equiv -10k\ (mod\ 63). \end{aligned} \tag{12}$$

Смысл результата (12) заключается в том, что расстояния между диагоналями одинаковы по столбцу и строке: $\Delta b_1=\Delta b_2=10$.

Для иллюстрации на рис. 2, *а*, *б* приведены графики, показывающие изменение чисел—решений сравнения (4) соответственно по столбцу и по строке. Числа—решения расположены в узлах регулярной косоугольной решетки, изображенной пунктирными линиями. Ячейка решетки представляет собой параллелограмм, проекция одной стороны которого на оси b_1 и b_2, равная 10, дает расстояние между диагоналями, а проекция другой стороны на ось x

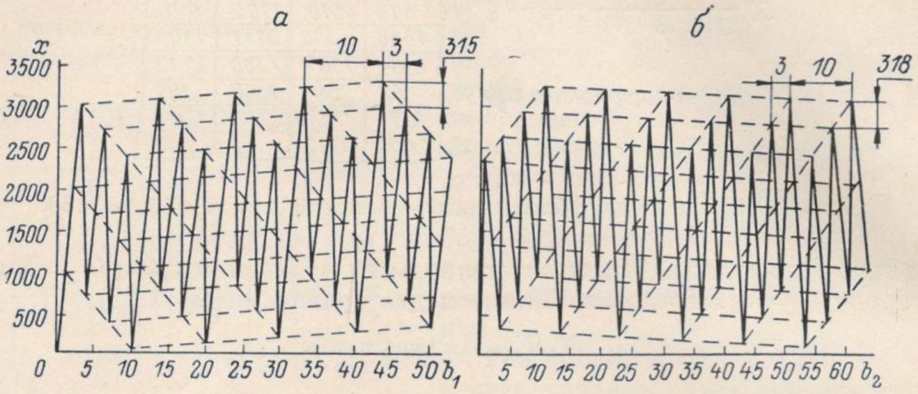


Рис. 2. Расположение чисел—решений по столбцу (*а*) и по строке (*б*).

характеризует, в каком диапазоне при этом изменяются числа—решения (по столбцу имеем 315, по строке — 318).

Практически полученный результат означает, что если полная фаза априорно известна с точностью до 315 (± 3 полосы с периодом 53), то допустимая ошибка в определении фаз b_1 и b_2 может составлять до 10 (± 0.1 полосы). Так как числа между диагоналями отличаются от достоверного результата больше чем на 315, то они могут быть отброшены как заведомо неверные и может быть выбрано ближайшее достоверное значение. Естественно, что ошибка, связанная с неопределенностью положения числа на достоверной диагонали, остается, но она не превышает погрешности определения b_1 и b_2.

Итак, проведен анализ погрешностей целочисленного метода интерферометрии, связанный с особенностями решения систем сравнений целых чисел. Показано, что точность измерения фазы в пределах одного периода должна обеспечивать достоверное определение последней значащей цифры в численном выражении периодов. Априорное знание полной фазы в первом грубом приближении позволяет осуществить корректировку результата, если ошибки измерения фазы в пределах периода превышают допустимые.

Литература

[1] Гужов В. И., Солодкин Ю. Н. — Опт. и спектр., 1988, т. 65, в. 5.
[2] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М., 1972. 168 с.

Поступило в Редакцию 20 марта 1987 г.
В окончательной редакции 25 апреля 1988 г.