

Математическая модель распространения света в пространстве

В.И. Гужов, П.А. Бердников, Р.А. Кузнецов
Новосибирский Государственный Технический Университет

Аннотация: В статье рассматривается математическая модель распространения света в пространстве и структура оптических систем восстановления изображений⁸.

Ключевые слова: свет, теория поля, математическая модель.

В классической оптике изображение формируется с помощью оптических устройств, состоящих из набора линз и зеркал, а регистрируются с помощью датчиков реагирующих на интенсивность оптического излучения. В радиоастрономии для регистрации изображений требуются специальные антенны и чувствительные квантовые приёмники. Акустические поля могут регистрироваться с помощью матрицы микрофонов. В общем случае изображения формируются на основе физических принципов преобразования волновых полей.

Свет - это электромагнитное излучение в определенном диапазоне электромагнитных волн. Все электромагнитные волны принято делить на радиоволны, инфракрасное, видимое, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучения (рис. 1) [ссылка].

Между ними нет резких переходов, сами участки перекрываются, а границы между ними условны. Различные участки электромагнитного спектра отличаются друг от друга длиной волны λ и частотой ν :

$$c = \lambda \nu, \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad c = \frac{\omega \lambda}{2\pi}.$$

Видимое, инфракрасное и ультрафиолетовое излучения составляют так называемую оптическую область спектра. Выделение такой области обусловлено не только близостью соответствующих участков спектра, но и сходством методов и приборов, применяющихся для ее исследования (линзы и зеркала для фокусировки излучения, призмы, дифракционные решетки, интерференционные приборы для исследования спектрального состава излучения и пр.). Оптический спектр занимает диапазон от условной границы

инфракрасного излучения до условной коротковолновой границы ультрафиолета ($\lambda = 10$ нм, $\nu = 3 \cdot 10^{11}$ Гц).

- инфракрасное излучение $\lambda \sim 2$ мм - 760 нм ($\nu = 1,5 \cdot 10^{11}$ - $4 \cdot 10^{14}$ Гц)
- видимое излучение занимает $\lambda \sim 760$ - 400 нм, ($\nu \sim 4 \cdot 10^{14}$ - $7,6 \cdot 10^{14}$ Гц)
- ультрафиолет $\lambda \sim 400$ - 10 нм, ($\nu \sim 7,6 \cdot 10^{14}$ - $3 \cdot 10^{16}$ Гц)

Фотоны, с точки зрения квантовой теории представляют собой волновой пакет, локализованный в пространстве и времени. Фотоны имеют длительность всего 0.1 пикосекунды. (1 пс = 10^{-12} сек).

Энергия светового кванта определяется выражением [1]

$$\varepsilon = h \cdot \nu, \quad (1)$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-27}$ эрг $c = 4 \cdot 10^{-15}$ эВ \cdot с = $6 \cdot 10^{-34}$ Дж \cdot с — постоянная Планка, фундаментальная величина.

Энергию квантов в физике принято выражать в электрон-вольтах. Это внесистемная единица измерения энергии. Один электрон-вольт (1 эВ) равен энергии, которую приобретает электрон, когда разгоняется электрическим полем напряжением 1 В. Это очень небольшая величина, в единицах системы Си 1 эВ = $6 \cdot 10^{-18}$ Дж. Но в масштабах атомов и молекул электрон-вольт — вполне солидная величина.

Для длины волны $\lambda = 1000$ нм энергия соответствующего кванта составляет $\varepsilon = 1,23$ эВ, или приблизительно один электрон-вольт (эВ). На концах видимого спектра для энергии кванта формула (1) дает $\varepsilon \sim 1,6$ эВ, $e \sim 3$ эВ.

В области радиоволн квантовые свойства излучения практически не сказываются, поскольку энергия квантов в этой области очень мала.

В оптической области спектра частоты ν уже перестают быть малыми по сравнению с собственными частотами атомов. Благодаря этому в этой области наряду с волновыми, проявляются и квантовые свойства света.

В области рентгеновского и гамма-излучения на первый план выступают уже квантовые свойства излучения. Энергия рентгеновских квантов лежит в пределах 20 эВ - 1 МэВ ($\lambda \sim 50$ - 10^{-3} нм), а энергия гамма-квантов - больше 0,1 МэВ ($\lambda < 10^{-2}$ нм).

⁸ Работа выполнена по заданию Министерства образования и науки РФ, проект №7.599.2011, Темплан, НИР № 01201255056.

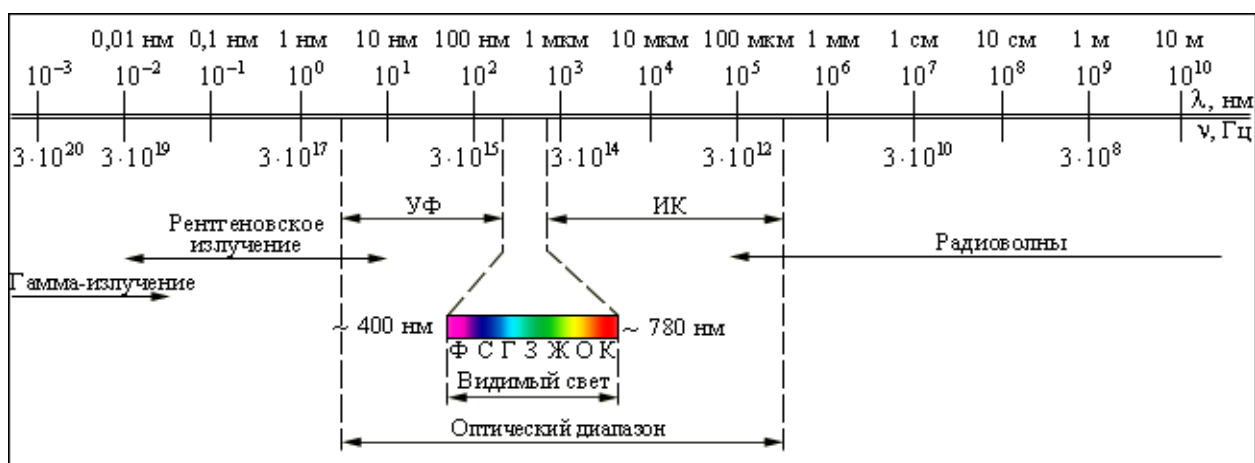


Рис. 1. Шкала электромагнитных волн

Волновые и квантовые явления являются общими для всего спектра электромагнитного излучения. Оптические методы исследований являются наиболее тонкими и точными. Поэтому оптике принадлежит ведущая роль во многих фундаментальных исследованиях.

Характеристики электромагнитных полей исчерпывающим образом описывают уравнения Максвелла.

Уравнения Максвелла представляют собой однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Они получены феноменологическим обобщением опытных фактов, известных к середине XIX века. Записав свои уравнения, Максвелл предсказал существование электромагнитных волн, которые только через 25 лет были обнаружены Герцем.

Уравнения Максвелла в первоначальном виде состояли из системы 20 уравнений с 12 переменными [2]. В 1880 году Хевисайд переписал результаты Максвелла в терминах векторного анализа. В настоящее время они записываются в виде восьми (два векторных с тремя компонентами каждое и два скалярных) линейных дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка для 12 компонент четырёх векторных функций (D - электрическая индукция, E - напряженность электрического поля, H - напряженность магнитного поля, B - магнитная индукция).

Распространение электромагнитных волн в веществе в тех случаях, когда длина волны велика по сравнению с межатомными расстояниями, можно рассматривать феноменологически, то есть без учета атомистического строения среды. Для этого уравнения Максвелла дополняются

материальными уравнениями, в которых свойства среды учитываются введением соответствующих параметров.

Распространение электромагнитных волн со скоростью света первоначально интерпретировалось как возмущения некоторой среды, так называемого эфира. Были предприняты многочисленные попытки обнаружить движение Земли относительно эфира, однако они неизменно давали отрицательный результат. Поэтому Анри Пуанкаре высказал гипотезу о принципиальной невозможности обнаружить подобное движение (принцип относительности). Ему же принадлежит постулат о независимости скорости света от скорости его источника. Эти две гипотезы легли в основу статьи Альберта Эйнштейна, в которой излагались эти результаты [3].

Уравнения Максвелла не выводятся, они получены обобщением опытных фактов, и не стоит ожидать, что они угаданы в окончательной форме. Уравнения Максвелла, как говорил Герц, живут самостоятельной жизнью и иногда кажутся даже умнее человека, создавшего их.

Практически любое физическое явление можно описать в виде дифференциальных уравнений, но, к сожалению, получить их аналитическое решение можно только для ограниченного класса уравнений. Поскольку свет – это электромагнитная волна, то можно попробовать получить аналитические решения дифференциальных уравнений Максвелла при некоторых граничных условиях.

Рассмотрим математическую модель преобразования волновых полей в оптических системах. Ниже показана типичная система образования оптических изображений (рис. 2).

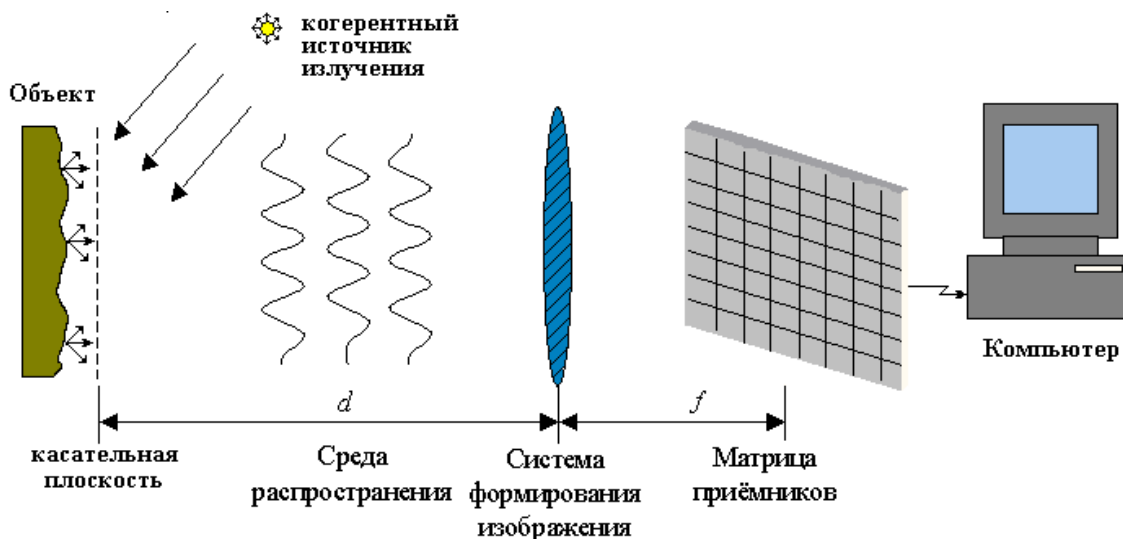


Рис. 2. Типичная система образования оптических изображений

Чтобы не усложнять задачу, ограничимся несамосветящимися прозрачными объектами и монохроматическим освещением [4].

Свойства объекта, определяющие его способность отражать и рассеивать падающее на него излучение, описываются коэффициентом отражения излучения по интенсивности $B(x, y, z)$ или комплексной амплитудой $\bar{b}(x, y, z)$ – функциями координат на поверхности объекта. Коэффициент отражения по амплитуде является комплексной функцией, которая может быть представлена в виде:

$$\bar{b}(x, y, z) = |b(x, y, z)| \exp[i\beta(x, y, z)]. \quad (2)$$

Её модуль $|b(x, y, z)|$ и фаза $\beta(x, y, z)$ показывают, во сколько раз изменяется амплитуда и соответственно насколько изменяется фаза излучения в точке

$$\Gamma(\xi, \eta, \zeta) = \int_{F(x, y, z)} A(x, y, z) |b(x, y, z)| \exp[i\alpha(x, y, z) + i\beta(x, y, z)] \times \dots \times T(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) dx dy dz, \quad (4)$$

где интегрирование производится на поверхности объекта $F(x, y, z)$. Вид ядра этого преобразования $T(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ зависит от

$$b(x, y, z) = \int_S \Gamma(\xi, \eta, \zeta) \bar{T}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (5)$$

где $\bar{T}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ – это оператор, взаимный T , а интегрирование происходит по поверхности наблюдения S .

Функцию $\Gamma(\xi, \eta, \zeta)$ можно назвать математической голограммой. Задача синтеза голограмм заключается в вычислении функции $\Gamma(\xi, \eta, \zeta)$ по заданной функции $\bar{b}(x, y, z)$ и регистрации в форме, которая бы допускала

(x, y, z) поверхности объекта после отражения. $B(x, y, z)$ определяется как

$$B = |b|^2 = bb^*, \quad (3)$$

где * знак комплексного сопряжения.

Зная функцию $\bar{b}(x, y, z)$, уравнение поверхности тела $F(x, y, z) = 0$ и распределение амплитуды и фазы падающего на объект света, можно в принципе вычислить распределение амплитуды и фазы рассеянного света в произвольной точке пространства.

Пусть $A(x, y, z) \exp[i\alpha(x, y, z)]$ – распределение амплитуды и фазы освещения на поверхности объекта. Тогда поле на некоторой поверхности наблюдения можно описать с помощью интегрального соотношения Кирхгофа [5].

пространственного расположения объекта и поверхности наблюдения. Это преобразование в принципе обратимо

взаимодействие с излучением для визуализации и восстановления $\bar{b}(x, y, z)$.

Вычисление интеграла (4) в общем случае представляет довольно сложную задачу. Её удастся решить только для очень простых объектов, заданных небольшим количеством отдельных линий или точек. В общем случае приходится прибегать к различного рода

упрощениям.

Первое упрощение, к которому можно прибегнуть, состоит в сведении трёхмерной задачи к двумерной.

Для этого поверхность наблюдения считается плоской, а распределение амплитуды и фазы волны на поверхности объекта заменяется по законам геометрической оптики распределением амплитуды и фазы на плоскости, касающейся объекта или достаточно близкой к нему (чтобы при пересчёте амплитуды и фазы пренебрегать дифракцией и пользоваться геометрической оптикой) и параллельной плоскости наблюдения (рис. 3).

Объект



касательная плоскость

Рис. 3. Объект и касательная плоскость

В этом случае (4) запишется в виде

$$\Gamma(\xi, \eta) \sim \int_{x,y} b_1(x, y) \Gamma_d(x, y, \xi, \eta) dx dy, \quad (6)$$

где $b_1(x, y)$ – комплексная функция, полученная в результате пересчёта амплитуды и

$$T_d(x, y, \xi, \eta) = \frac{\exp[i2\pi\lambda^{-1} \sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2 + d^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2 + d^2}}, \quad (7)$$

где λ – длина волны излучения.

Второе упрощение. Если геометрические параметры тела малы по сравнению с расстоянием d до плоскости наблюдения, то это вместе с условием малости площади наблюдения приводит к дальнейшему упрощению. При

$$T_d(x, y, \xi, \eta) \approx \frac{\exp(i2\pi\lambda^{-1}d) \exp\{i\pi(\lambda d)^{-1}[(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2]\}}{d}, \quad (9)$$

В этом случае (6) переходит в интеграл Френеля:

$$\Gamma(\xi, \eta) \sim \int_{x,y} b_1(x, y) \exp\{i\pi(\lambda d)^{-1}[(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2]\} dx dy \quad (10)$$

фазы поля, отражённого объектом на плоскость (x, y) , касательную к нему и параллельную плоскости наблюдения, d – расстояние между этими двумя плоскостями (рис. 4).

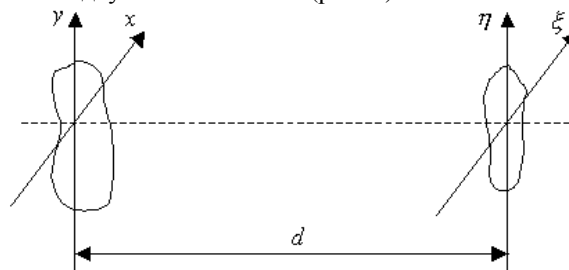


Рис. 4. Плоскости пересечения

Очевидно, если угол, под которым виден объект с поверхности наблюдения (угол охвата) и площадь наблюдения малы, это естественная аппроксимация. Для задач, где угол охвата должен быть велик, такой подход означает необходимость сведения их к задаче расчёта при малом угле охвата. При этом для реализации больших углов охвата поверхность наблюдения можно разбить на небольшие фрагменты, аппроксимируемые плоскостями, и рассматривать голограммы для отдельных фрагментов, каждая из которых представляет часть общего угла и воспроизводит объект под своим ракурсом.

Ядро преобразования (6), связывающее распределение света на двух параллельных плоскостях, имеет вид

$$\frac{[(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2]_{\max}}{d^2} = \theta_{\max}^2 < \sqrt{\frac{4\lambda}{kd}}, \quad (8)$$

где θ_{\max} – максимальный угол (в радианах), под которым наблюдается объект с расстояния d ; k – коэффициент допустимой фазовой ошибки, равной π/k , в передаче аргумента экспоненты в (7). Тогда

Преобразование, описываемое этим соотношением, называется *преобразованием Френеля*.

Если

$$\pi(x^2 + y^2) / \lambda d \ll 1 \text{ и}$$

$$\Gamma(\xi, \eta) \sim \int_{x,y} b_1(x, y) \exp(i2\pi(\lambda d)^{-1}(x\xi + y\eta)) dx dy \quad (12)$$

Это преобразование соответствует дальней зоне дифракции (дифракции Фраунгофера).

Преобразование Френеля в вычислительном

$\pi(\xi^2 + \eta^2) / \lambda d \ll 1$, (11) то этими составляющими в (10) можно пренебречь. В этом случае интеграл Френеля (10) переходит в *интеграл Фурье*:

отношении удобнее выразить через интегральное преобразование Фурье

$$\Gamma(\xi, \eta) = e^{\frac{i\pi}{\lambda d}(\xi^2 + \eta^2)} \int_{x,y} b_1(x, y) e^{\frac{i\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d}(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (13)$$

Преобразование Фраунгофера представляет собой с точностью до множителей пространственный Фурье-спектр функции $b_1(x, y)$:

$$\mathcal{F}_b(v_x, v_y) = \iint_{x,y} b_1(x, y) e^{i\pi(xv_x + yv_y)} dx dy, \quad (14)$$

$$\Gamma(\xi, \eta) \sim \mathcal{F}_b(v_x, v_y), \quad (15)$$

где частоты $v_x = \frac{\xi}{\lambda d}$ и $v_y = \frac{\eta}{\lambda d}$.

Таким образом, при прохождении оптического волнового фронта через свободное пространство на некотором расстоянии происходит преобразование Френеля, которое при увеличении расстояния, переходит в преобразование Фурье (рис. 5).

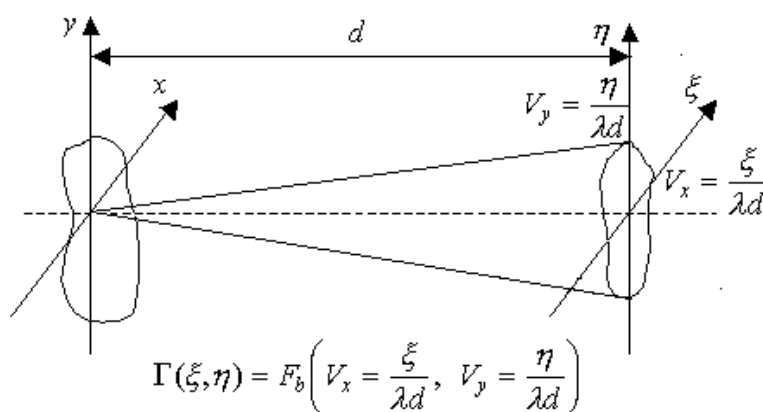


Рис. 5. Пространственные частоты

Для получения комплексной амплитуды исходного волнового фронта необходимо сделать обратное преобразование. Такое преобразование может осуществлять тонкая линза.

Для получения комплексной амплитуды исходного волнового фронта необходимо сделать обратное преобразование. Такое преобразование может осуществлять тонкая линза.

Рассмотрим простейшую оптическую схему (рис.6). На линзу падает распространяющаяся в направлении z плоская волна с комплексной амплитудой непосредственно вблизи линзы a_1 .

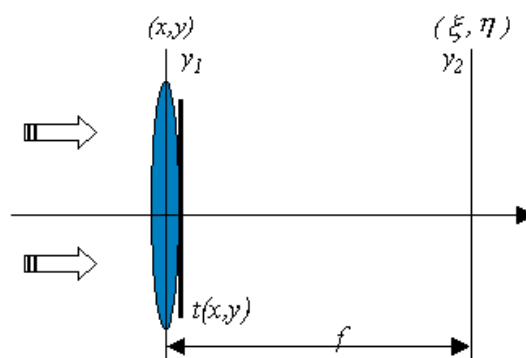


Рис. 6. Обратное преобразование Фурье, осуществляемое тонкой линзой

Комплексная амплитуда в плоскости y_2 будет иметь вид, похожий на соотношение (12):

$$a(\xi, \eta) = \frac{ia_1}{\lambda f} e^{-\frac{i\pi}{\lambda f}(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \iint t(x, y) e^{\frac{i2\pi}{\lambda f}(x\xi - y\eta)} dx dy \quad (16)$$

Если на тонкую линзу с примыкающим к ней транспарантом падает плоская волна, то в задней фокальной плоскости линзы образуется распределение комплексных амплитуд, пропорциональное произведению фазового множителя сферической волны и Фурье-образа пропускания транспаранта.

Таким образом, при распространении волнового поля, отраженного от диффузного объекта, на некотором расстоянии d происходит преобразование Френеля комплексной амплитуды, которое с увеличением расстояния переходит в преобразование Фурье.

Для получения комплексной амплитуды исходного волнового фронта необходимо сделать обратное преобразование. Для этого в плоскости необходимо поместить линзу. В плоскости с точностью до постоянных множителей распределение интенсивности совпадает с распределением на плоскости объекта (рис. 7).

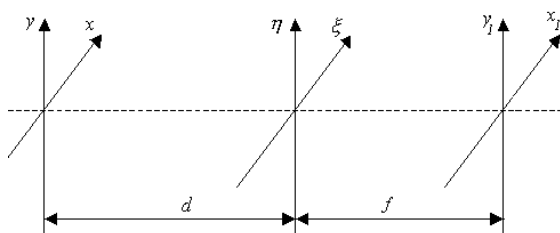


Рис. 7. Получение комплексной амплитуды исходного волнового фронта

Фотоприемники регистрируют интенсив-

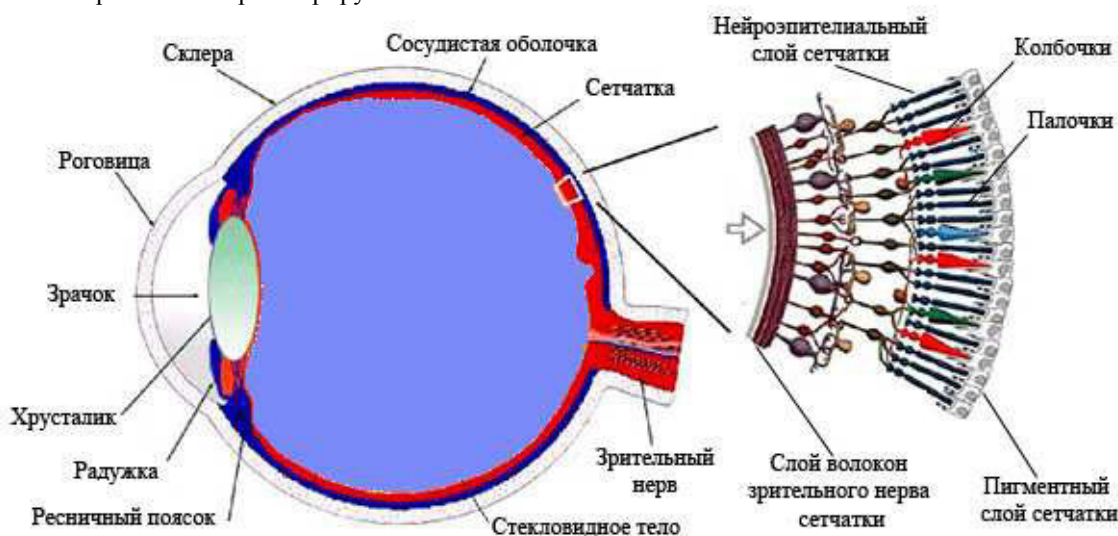


Рис. 8. Строение человеческого глаза

Таким образом, глаз выполняет функцию оптического процессора, выполняющего обратное преобразование Фурье.

ность:

$$I(x, y) = \langle a(\xi, \eta) a(\xi, \eta)^* \rangle. \quad (17)$$

При этом фазовый множитель сокращается, поскольку $(e^k)^* = e^{-k}$, $e^k e^{-k} = 1$.

В качестве примера оптической системы можно рассмотреть глаз человека (рис. 8).

Свет, отраженный от объекта поступает на зрачок. Поскольку при прохождении определенных расстояний с ним происходит преобразование Френеля или Фурье, необходимо сделать обратное преобразование. Для этого служит хрусталик, который выполняет функцию линзы и может менять свое фокусное расстояние в зависимости от расстояния от объекта. Сетчатка реагирует на давление света (интенсивность). Сетчатка состоит из специальных фоторецепторов, колбочек и палочек, содержащих зрительные пигменты.

Свет поглощается светочувствительной молекулой (пигмент - родомин или родопсин). Таких молекул в одной зрительной клетке 10^9 (миллиард). Молекула работает как фотоумножитель. Квант света запускает каскад ферментативных реакций. Они приводят к быстрому, эффективному размножению и усилению почти в миллион раз первичного светового сигнала. Эта фотохимическая реакция происходит за очень короткое время - менее чем за 200 фемтосекунд (фемтосекунда - 10^{-15} секунды).

Однако сетчатка глаза — это не просто набор фоточувствительных элементов. Сетчатка занимается ещё и оцифровкой, кодированием,

сжатием, переводом в нервные импульсы. По зрительному нерву эти импульсы поступают в мозг для дальнейшей обработки.

Недавно удалось «расшифровать» код, который передают здоровые клетки сетчатки мышей. Сообщается также об успешной «дешифровке» и сигналов для обезьян, уже довольно близких к сигналам человека [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Детлаф А.А., Яворский Б. М. Курс физики. — 5-е изд. — М.: АCADEMA, 2005. — С. 485. — 720 с.

[2] Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В двух томах / — М.: Наука, 1989. (Классики науки).

[3] А. Einstein "Zur Elektrodynamik bewegter Korper" ("К электродинамике движущихся тел"). 1905. с. 891-922. Т. 17. см. А. Эйнштейн. Сочинения в 4 т. Т.1.

[4] Ярославский Л., Мерзляков Н.С. Цифровая голография.-1982.-М.:Наука.-220 с.

[5] Борн М., Вольф Э. Основы оптики.- М.:Наука.- 1973.- 719с.

[6] Пресс-релиз Weill Cornell Medical College.- http://weill.cornell.edu/news/releases/wcmc/wcmc_2012/08_13_12.shtml



Владимир Иванович Гужов
— декан факультета
Автоматики и
вычислительной техники в
Новосибирском
государственном техническом
университете, профессор,
доктор технических наук.
Является автором более 120
научных работ, в том числе
является обладателем 4
патентов.

Область научных интересов:
программные системы,
высокоточные измерения.



Email: vig@edu.nstu.ru

**Кузнецов Роман
Александрович** - аспирант
Новосибирского
государственного
технического университета.

Область научных интересов:
лазерные измерительные
системы, обработка
изображений.

Email:

romanalexkuznetsov@gmail.com



**Бердников Петр
Анатольевич** – аспирант
Новосибирского
государственного
технического университета.

Область научных интересов:
лазерные измерительные
системы, об работка
изображений.

Email: kiwondber@mail.ru