ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 78, № 1, 2020, с. 147–156

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 78, No. 1, 2020, pp. 147–156

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, МЕТРОЛОГИЯ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ

INSTRUMENT MAKING, METROLOGY AND INFORMATION MEASUREMENT DEVICES AND SYSTEMS

УДК 53.088

DOI: 10.17212/1814-1196-2020-1-147-156

Восстановление сигналов по дискретным значениям с ограниченным числом идеальных отсчетов*

В.И. ГУЖОВ[a], Е.Е. ТРУБИЛИНА[b], И.О. МАРЧЕНКО[c]

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

[a] *v.guzhov@corp.nstu.ru* [b] *silver-kate94@mail.ru* [c] *i.o.marchenko@gmail.com*

В статье рассмотрен вопрос восстановления непрерывных сигналов по ограниченному набору дискретных значений. Спектр дискретных значений представляет собой периодически повторяющийся спектр непрерывного сигнала. Теорема Котельникова определяет условия, при которых спектр одиночного сигнала можно выделить без искажений, и затем по ним восстановить исходный сигнал. Однако интерполяция с помощью ряда подразумевает бесконечное число отсчетов.

В статье показано, что при выполнении условий Найквиста восстановление сигнала при ограниченном числе дискретных значений с помощью интерполяционного ряда дает существенные погрешности. Однако если сигнал периодический, возможно полное его восстановление по ограниченному набору точек дискретизации. В этом случае процесс дискретизации можно представить в виде воздействия ограниченной решетки Дирака.

Предложена простая процедура восстановления исходного сигнала, которая состоит в дискретном преобразовании Фурье от отсчетов, в дополнении спектра нулями до диапазона выбранного сигнала и обратном преобразовании Фурье.

Для непериодического сигнала полного восстановления по дискретным точкам не происходит, даже если при дискретизации исходной функции выполняются условия теоремы Котельникова. Это связано с перекрытием одиночных спектров в результате свертки с фурье-образом прямоугольного импульса, который вырезает непериодический сигнал из периодического. Каждый одиночный спектр становится бесконечным в результате свертки с фурье-образом вырезающего прямоугольного импульса. Точно выделить одиночный спектр непрерывного сигнала не удается. Это приводит к погрешности при восстановлении исходного сигнала.

Ключевые слова: дискретизация, частота дискретизации, пространственные частоты, обобщенные функции, теорема Котельникова, преобразование Фурье, спектр, сверхразрешение

---

* *Статья получена 16 января 2020 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывный аналоговый сигнал можно представить дискретной последовательностью его значений (отсчетов). Эти отсчеты берутся в точках, отделенных друг от друга некоторым интервалом, который называется интервалом дискретизации. Величину, обратную интервалу между отсчетами, называют частотой дискретизации. Пространственная частота – отношение периода сигнала к интервалу дискретизации. Интуитивно понятно, что чем меньше интервал дискретизации и, соответственно, чем выше частота дискретизации, тем меньше различия между исходным и восстановленным по дискретным значениям сигналами. Однако если спектр сигнала ограничен, нет необходимости увеличивать число интервалов дискретизации до бесконечности. В 1933 г. В.А. Котельников доказал теорему о числе интервалов дискретизации, при которых всегда можно точно восстановить непрерывный сигнал [1]. Непрерывный сигнал может быть точно представлен в виде суммы интерполяционного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x)\,\mathrm{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta x}(x - n\Delta x)\right], \tag{1}$$

если спектр функции ограничен некоторой величиной ω_{xc}, которая называется частотой среза или частотой Найквиста [2]. Интервал дискретизации должен быть таким, чтобы $\Delta x \le \dfrac{\pi}{\omega_{xc}}$. Впервые использовать ряд (1) для восстановления сигнала предложил Е.Т. Уиттекер [3]. В 1949 г. эту же теорему независимо от Котельникова доказал Клод Шеннон [4]. В 1977 г. теорему было предложено называть УКШ (WKS) – теоремой в честь Уиттекерра–Котельникова–Шеннона (Whittaker–Kotelnikov–Shannon). Однако теорема отсчетов рассматривалась в математическом плане многими учеными и ранее.

К сожалению, интерполяционный ряд (1) содержит суммирование для бесконечного числа отсчетов. При использовании конечного числа дискретных значений вычисления по выражению (1) приводят к некоторой погрешности. Целью этой статьи является рассмотрение вопросов восстановления непрерывной функции по ограниченному набору дискретных отсчетов.

1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ ЧИСЛУ ДИСКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Теорема Котельникова становится понятна, если использовать аппарат обобщенных функций [5–11]. Идеальную дискретизацию функции можно описать как воздействие на эту функцию бесконечной гребенки Дирака. Дискретизация функции приведет к периодическому повторению спектра с шагом $\dfrac{2\pi}{\Delta x}$ [12, 13]. На рис. 1 показана функция, которая представляет сумму трех синусоид с периодами 8, 4 и 1 на общем числе точек 2048.

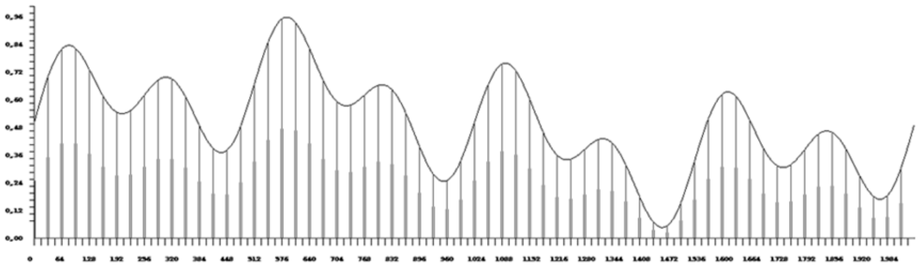

Рис. 1. Сумма трех синусоид и дискретизация с шагом

Fig. 1. The sum of three sinusoids and discretization with a step

Спектр дискретного сигнала выглядит как периодическое повторение спектра непрерывного сигнала (рис. 2).

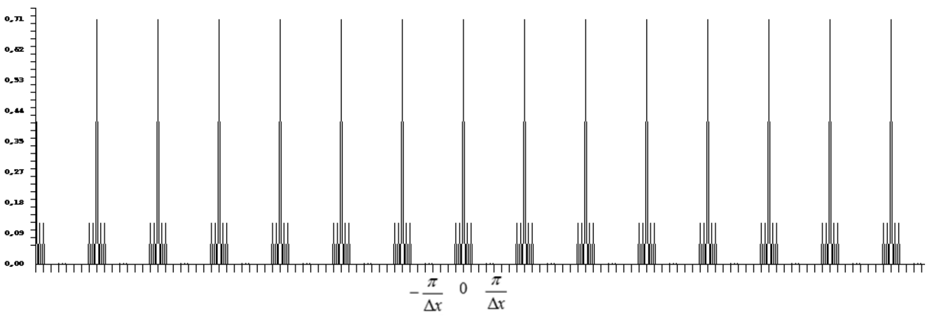

Рис. 2. Спектр дискретного сигнала

Fig. 2. Discrete signal spectrum

Дискретное преобразование Фурье определяет дискретный спектр с шагом $\frac{2\pi}{N}$ между соседними отсчетами ω. Функция будет периодической, если все синусоиды, из которых состоит спектр непрерывного сигнала, будут периодическими. Это условие будет выполняться, если частоты спектра будут кратны $\omega = \frac{2\pi}{N} i$, где i – целое число такое, что $\omega < \omega_{xc}$. В этом случае можно точно выделить одиночный спектр.

Это можно сделать с помощью умножения спектра на прямоугольный импульс размером $\frac{2\pi}{\Delta x}$. После обратного преобразования Фурье получим свертку изображения функции, описывающего сигнал. Это выражение описывается рядом (1).

На рис. 3 показан результат восстановления непрерывной периодической на выбранном интервале функции по дискретным значениям с помощью ряда (1). Из рисунка видно, что точного восстановления не получается. Особенно большие значения погрешности возникают на краях выбранного интервала. Это вызвано тем, что дискретизация осуществляется с помощью ограниченной решетки Дирака. В результате у нас не бесконечное, как требуется при интерполяции (1), а конечное число отсчетов.

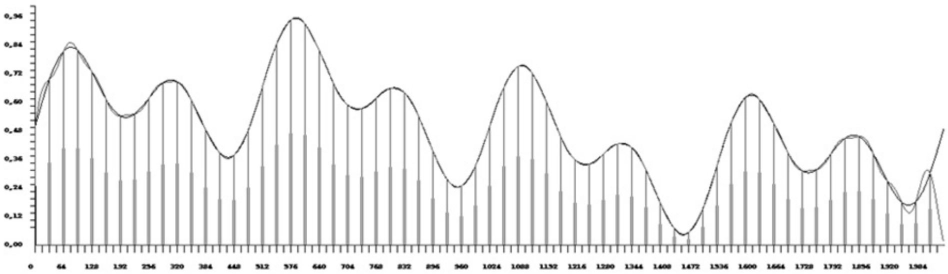

Рис. 3. Исходная функция и результат восстановления с помощью интерполяционного ряда (1)

Fig. 3. The original function and the result of restoration using the interpolation series (1)

Точного восстановления периодического сигнала при конечном числе отсчетов можно добиться с помощью следующей процедуры.

Одиночный сигнал можно выделить ограничением спектра дискретного сигнала (рис. 2) частотой Найквиста или следующим образом.

1. Составить массив чисел только из дискретных значений. Размер массива отсчетов будет равен $\frac{N}{\Delta x}$.

2. Выполнить дискретное преобразование Фурье.

3. Одиночный спектр дополнить симметрично до N точек нулями.

4. Выполнить обратное дискретное преобразование Фурье.

Для восстановления значения функции выполняются п. 3 и 4.

После обратного преобразования Фурье восстановленный сигнал точно совпадет с исходным.

Таким образом при дискретизации периодических функций с ограниченным числом отсчетов достигается полное восстановление сигнала, если интервал дискретизации выбран таким, чтобы удовлетворялись условия теоремы Котельникова.

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ ЧИСЛУ ДИСКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Сигнал будет непериодическим, если одна из составляющих синусоид не кратна выборке размером N.

Если выбрана часть сигнала, который не является периодической на выбранном диапазоне, то это эквивалентно умножению бесконечного периодического сигнала на прямоугольный импульс размером N. В спектральной области это приведет к свертке сигнала с функцией $\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right)$, которая является фурье-образом прямоугольного импульса:

$$S(\omega) = \Im(f(x)) \otimes \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right), \tag{2}$$

Рассмотрим спектр сигнала, состоящего из суммы трех синусоид с периодами 7.2, 3.3 и 1 на выборке 2048 точек. Спектр дискретных значений сигнала образует повторяющие одиночные спектры, которые перекрываются между собой (рис. 4).

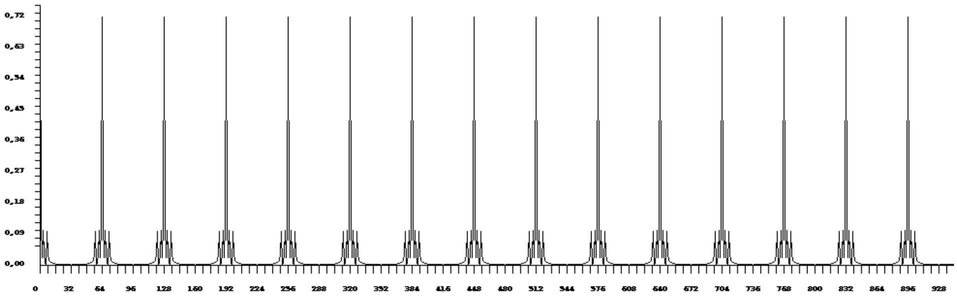

Рис. 4. Спектр дискретного сигнала, состоящего из суммы трех синусоид с периодами 7.2, 3.3 и 1

Fig. 4. The spectrum of a discrete signal consisting of the sum of three sinusoids with periods 7.2, 3.3 and 1

Перекрытие дискретных спектров вызывается тем, что в результате свертки с $\operatorname{sinc}(\bullet)$ одиночный спектр становится бесконечным. На рис. 5 показан одиночный спектр дискретного сигнала, обрезанный по амплитуде для того, чтобы были видны части боковых лепестков спектра.

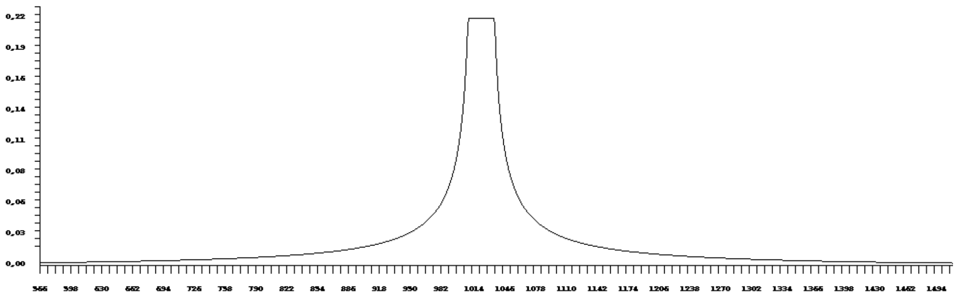

Рис. 5. Спектр дискретного сигнала, состоящего из суммы трех синусоид с периодами 7.2, 3.3 и 1. Спектр обрезан по амплитуде

Fig. 5. The spectrum of a discrete signal consisting of the sum of three sinusoids with periods 7.2, 3.3 and 1. The spectrum is cut off in amplitude

Из-за перекрытия спектра точно восстановить исходный сигнал не удается. Для уменьшения погрешности восстановления необходимо использовать интерполяцию боковых лепестков выделенного одиночного спектра, показанных на рис. 5. Результаты интерполяции можно улучшить, если одиночный пик дополнить произвольными боковыми лепестками. Качество интерполяции будет зависеть от выбора вида лепестков. На рис. 6 приведены боковые лепестки спектра для сигнала, состоящего из одной синусоиды сигнала с периодами 8.7, 8.3, 7.2, 3.1. Спектр обрезан по частоте Найквиста. Лепестки нормированы от 0 до 1.

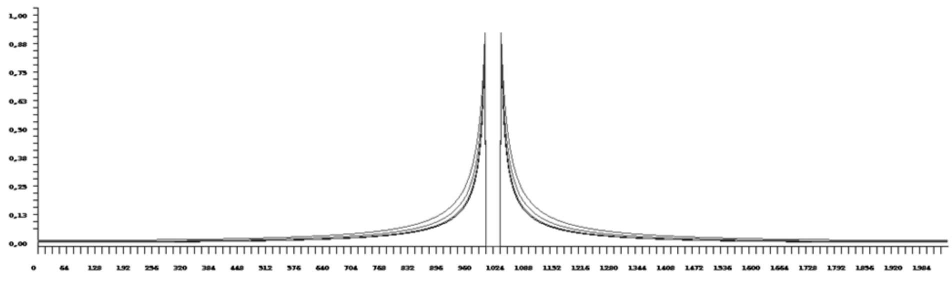

Рис. 6. Боковые лепестки спектра синусоидального сигнала

Fig. 6. Side lobes of the spectrum of a sinusoidal signal

Для подбора лепестков нужно примерно определить целую и дробную часть периода, тогда результат будет лучше.

На рис. 7 показан сигнал из суммы трех синусоид, восстановленный с добавленными лепестками (от синусоиды с периодом 7.3) по одиночному пику.

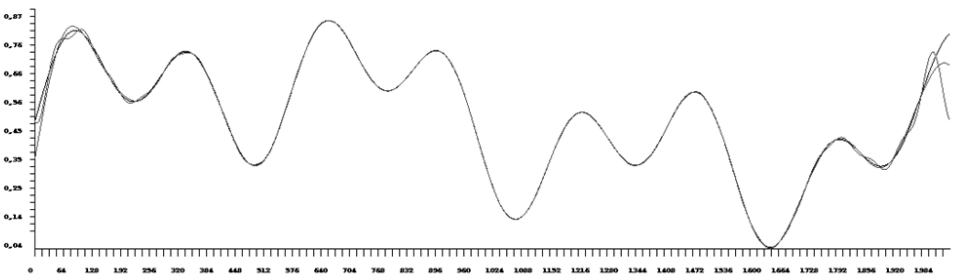

Рис. 7. Исходный сигнал, состоящий из суммы трех синусоид с периодами 7.2, 3.3 и 1, и результат восстановления сигнала

Fig. 7. The original signal consisting of the sum of three sinusoids with periods 7.2, 3.3 and 1 and the result of signal recovery

Дальнейшее снижение погрешности можно обеспечить, если учитывать все возможные перекрытия одиночных спектров в дискретном виде (см. рис. 4) с учетом боковых лепестков.

При дискретизации непериодических функций с ограниченным числом отсчетов точного восстановления сигнала достичь не удается, даже если при дискретизации исходной непрерывной функции выполняются условия теоремы Котельникова. Однако из-за свертки сигнала с фурье-образом вырезающей функции спектр дискретного сигнала условиям теоремы Котельникова не удовлетворяет. Однако, учитывая влияние боковых лепестков, можно значительно уменьшить ошибки при восстановлении сигнала по дискретным значениям.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Восстановление сигнала в промежутках между дискретными значениями имеет огромное значение при решении задачи пространственного сверхразрешения в оптической микроскопии. Недостатком оптических систем является фундаментальное ограничение на пространственную частоту. Это разрешение определяется критерием Рэлея (3)

$$R = 0,61\frac{\lambda}{NA^{obj}}, \tag{3}$$

где NA^{obj} – числовая апертура, которая зависит от конструкции микрообъектива; λ – длина волны источника освещения. На практике при длине волны порядка 500 нм пространственное разрешение оптических микроскопов не превышает 200 нм. Для решения этой проблемы используется сдвиг массива детекторов на часть элемента разрешения $\frac{\Delta x}{N}$. Реконструкция сигнала на основе решения систем уравнений [15] требует огромных вычислительных затрат. Поэтому восстановление промежуточных значений между отсчетами на основе преобразования Фурье является достаточно перспективным способом [16] для разработки оптических систем с повышенным пространственным разрешением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен вопрос восстановления непрерывного сигнала с помощью ограниченного числа дискретных значений. Показано, что восстановление сигнала с помощью интерполяционного ряда дает существенные погрешности даже при выполнении условий Найквиста.

Однако если сигнал периодический, возможно полное восстановление сигнала. Предложена простая процедура восстановления исходного сигнала по ограниченному числу дискретных значений.

Если сигнал непериодический, полного восстановления по дискретному сигналу не происходит, даже если при дискретизации исходной функции выполняются условия теоремы Котельникова. Это связано с перекрытием бесконечных одиночных спектров. Одиночный спектр становится бесконечным в результате свертки с фурье-образом вырезающего прямоугольного импульса.

Однако возможно значительное уменьшение погрешности интерполяции дополнением выделенного одиночного спектра искусственно сгенерированными боковыми лепестками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котельников В.А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176, № 7. – С. 762–770.

2. *Nyquist H.* Certain topics in telegraph transmission theory // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. – 1928. – Vol. 47. – P. 617–644.

3. *Wittaker E.T.* On the function which are represented by the expansion of interpolating theory // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1915. – Vol. 35. – P. 181–194.

4. *Shannon C.E.* Communication in the presence of noise // Proceedings of Institute of Radio Engineers. – 1949. – Vol. 37, N 1. – P. 10–21.

5. *Гельфант И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.

6. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.

7. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 329 с.

8. Дискретизация изображений в реальных системах с помощью обобщенных функций / В.И. Гужов, И.О. Марченко, Д.С. Хайдуков, С.П. Ильиных // Автоматика и программная инженерия. – 2016. – № 4 (18). – С. 45–52.

9. *Гужов В.И.* Компьютерная голография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 270 с. – ISBN 978-5-8114-3410-7.

10. *Васьков С.Т., Ефимов В.М., Резник А.Л.* Быстрая цифровая реконструкция сигналов и изображений по критерию минимума энергии // Автометрия. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 13–20.

11. *Гужов В.И., Ильиных С.П., Марченко И.О.* Метод повышения пространственного разрешения в цифровой голографической микроскопии // Автометрия. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 104–110. – DOI: 10.15372/AUT20180313.

Гужов Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры систем сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – высокоточные измерительные системы. Имеет более 260 публикаций. E-mail: v.guzhov@corp.nstu.ru

Трубилина Екатерина Евгеньевна, ассистент кафедры сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Основное направление исследований – исследование объектов методами структурированного освещения. Имеет 10 публикаций. E-mail: silver-kate94@mail.ru

Марченко Илья Олегович, кандидат технических наук, доцент кафедры сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Основное направление исследований – бесконтактное измерение методами структурированного освещения. Имеет 38 публикаций. E-mail: i.o.marchenko@gmail.com

Guzhov Vladimir I., D.Sc. (Eng.), professor at the department of data collection and data processing systems, Novosibirsk State Technical University. The main field of his scientific research is high-precision measuring systems. He is the author of more than 260 publications. Email: v.guzhov@corp.nstu.ru

Trubilina Ekaterina E., assistant lecturer at the data collection and data processing systems department, Novosibirsk State Technical University. The main field of her research is the study of objects by using structured lighting methods. She has 10 publications. Email: silver-kate94@mail.ru

Marchenko Ilya O., PhD (Eng.), associate professor at the data collection and data processing systems department, Novosibirsk State Technical University. The main field of his research is non-contact measurements by using structured lighting methods. He is the author of 38 publications. Email: i.o.marchenko@gmail.com

DOI: 10.17212/1814-1196-2020-1-147-156

*Signal recovery with a limited number of ideal discrete samples**

V.I. GUZHOV[a], *E.E. TRUBILINA*[b], *I.O. MARCHENKO*[c]

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

[a]*v.guzhov@corp.nstu.ru* [b]*silver-kate94@mail.ru* [c]*i.o.marchenko@gmail.com*

Abstract

The article discusses the restoration of continuous signals from a limited set of discrete values. The spectrum of discrete values is a periodically repeating spectrum of a continuous signal. Kotelnikov's theorem determines the conditions under which the spectrum of a single signal can be distinguished without distortion, and then an original signal can be restored from them. However, interpolation using a series implies an infinite number of samples.

The article shows that when the Nyquist conditions are fulfilled, signal restoration with a limited number of discrete values using the interpolation series gives significant errors. However, if the signal is periodic, it is possible to completely restore the signal from a limited set of sampling points. In this case, the discretization process can be represented as the action of a limited Dirac lattice.

A simple procedure is proposed for reconstructing the original signal which consists of a discrete Fourier transform from the samples, complementing the spectrum with zeros to the range of the selected signal, and the inverse Fourier transform.

For a non-periodic signal, complete reconstruction from discrete points does not occur, even if the conditions of the Kotelnikov theorem are satisfied when the initial function is discretized. This is due to the overlapping of single spectra as a result of convolution with the Fourier transform of a rectangular pulse which cuts out a non-periodic signal from a periodic one. Each single spectrum becomes infinite as a result of the convolution with the Fourier transform of the cutting rectangular pulse. It is not possible to precisely single out a single spectrum of a continuous signal. This leads to an error in the restoration of the original signal.

The error can be reduced by reducing the sampling interval or by interpolating the edges of the selected single pulse.

Keywords: sampling, sampling frequency, spatial frequencies, generalized functions, WKS theorem, Fourier transform, spectrum, super resolution

REFERENCES

1. Kotel'nikov V.A. On the transmission capacity of 'ether' and wire in electric communications. *Physics-Uspekhi*, 2006, vol. 49, iss. 7, pp. 736–744. Translated from *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2006, vol. 176, no. 7, pp. 762–770.

2. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 1928, vol. 47, pp. 617–644.

3. Wittaker E.T. On the function which are represented by the expansion of interpolating theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1915, vol. 35, pp. 181–194.

4. Shannon C.E. *Communication in the presence of noise*. *Proceedings of Institute of Radio Engineers*, 1949, vol. 37, no. 1, pp. 10–21.

5. Gel'fant I.M., Shilov G.E. *Obobshchennye funktsii i deistviya nad nimi* [Generalized functions and actions on them]. 2nd ed. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 470 p.

6. Kecs N., Teodorescu P.P. *Introducere in teoria distributiilor cu aplicatii in tehnica*. București, Editura tehnică, 1975 (Russ. ed.: Kech V., Teodoresku P. *Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsii s prilozheniyami v tekhnike*. Moscow, Mir Publ., 1978. 518 p.).

* *Received 16 January 2020.*

7. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 329 p.

8. Guzhov V.I., Marchenko I.O., Hajdukov D.S., Ilynikh S.P. Sampling the image in real systems using generalized functions. *Avtomatika i programmnaya inzheneriya = Automatics and Software Enginery*, 2016, no. 4 (18), pp. 45–52. (In Russian).

9. Guzhov V.I. *Komp'yuternaya golografiya* [Computer holography]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2018. 270 p. ISBN 978-5-8114-3410-7.

10. Vas'kov S.T., Efimov V.M., Reznik A.L. Fast digital image and signal reconstruction by the minimum energy criterion. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2003, iss. 4, pp. 11–17. Translated from *Avtometriya*, 2003, vol. 39, no. 4, pp. 13–20.

11. Guzhov V.I., Il'inykh S.P., Marchenko I.O. Method of increasing the spatial resolution in digital holographic microscopy. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2018, vol. 54, iss. 3, pp. 301–306. DOI: 10.3103/S8756699018030135. Translated from *Avtometriya*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 104–110. DOI: 10.15372/AUT20180313.

Для цитирования:

Гужов В.И., Трубилина Е.Е., Марченко И.О. Восстановление сигналов по дискретным значениям с ограниченным числом идеальных отсчётов // Научный вестник НГТУ. – 2020. – № 1 (78). – С. 147–156. – DOI: 10.17212/1814-1196-2020-1-147-156.

For citation:

Guzhov V.I., Trubilina E.E., Marchenko I.O. Vosstanovlenie signalov po diskretnym znacheniyam s ogranichennym chislom ideal'nyh otschyotov [Signal recovery with a limited number of ideal discrete samples]. Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university, 2020, no.1 (78), pp. 147–156. DOI: 10.17212/1814-1196-2020-1-147-156.