

# Спектральный анализ формул расшифровки методом пошагового фазового сдвига

В.И. Гужов, С.П. Ильиных, Г.А. Поздняков

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

**Аннотация:** Для оценки волнового фронта интерферограммы в интерферометрии с фазовым сдвигом (PSI) часто используют формулы расшифровки, построенные на основе алгоритмов фазового сдвига. Все алгоритмы PSI используют в качестве входных данных смещенные по фазе интерферограммы и вычисляют фазу интерференционных полос. Наиболее известным алгоритмом PSI, специально разработанным для уменьшения источника систематической ошибки, был 5-точечный алгоритм Швидера-Харихарана. С тех пор были опубликованы десятки алгоритмов, предназначенные для уменьшения конкретных источников ошибок при определении фазы. В электротехнике функция Фурье преобразования частоты (ПФ) при конструировании линейных фильтров является стандартным инструментом проектирования. В последнее время ПФ также используется для разработки новых алгоритмов. В этой статье мы рассматриваем метод определения спектральных характеристик по числителю и знаменателю известных алгоритмов. Приведены АЧХ для формул расшифровки с различным количеством точек.

Ключевые слова: фазовый сдвиг, формула расшифровки, спектральный анализ, амплитудно-частотная характеристика.

## ВВЕДЕНИЕ

При регистрации интерференционной картины ее интенсивность может быть описана как

$$I(x, y) = I_0(x, y)[1 + V(x, y)\cos(\varphi(x, y))] \quad (1)$$

В этом выражении три неизвестных:  $I_0(x, y)$  - средняя интенсивность,  $V(x, y)$  - контраст, а  $\varphi(x, y) = \varphi_p(x, y) - \varphi_r(x, y)$  - фазовая разность между интерферирующими фронтами. В [1] показано, что для однозначного определения разности фаз, необходимо не менее трех взаимно независимых уравнений. Взаимная независимость достигается, например, если в каждое из уравнений (1) добавить постоянный фазовый сдвиг  $\delta_i$ . В этом случае можно определить значения разности фаз  $\varphi(x, y)$  из системы уравнений, если значения средней яркости и контраста не меняются в точке  $(x, y)$ .

$$I_i(x, y) = I_0(x, y)[1 + V(x, y)\cos(\varphi(x, y) + \delta_i)] \quad (2)$$

В этом уравнении измеряются значения интенсивностей  $I_i(x, y)$  при известных фазовых сдвигах  $\delta_i$ . По этим значениям с помощью формул расшифровки определяются значения фазового сдвига. Найти вид этих формул можно, непосредственно решая тригонометрические уравнения вида (2), или с помощью использования матричных выражений описанных в [2].

Общий вид формул расшифровки будет иметь вид

$$\varphi(x, y) = \arctg \left( \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_i \cdot I_i \cdot S_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_i \cdot I_i \cdot C_i)} \right) \quad (3)$$

где  $S_i$  и  $C_i$  - соответствующие значения синусов и косинусов при заданом угле сдвига  $\delta_i$ ,  $\alpha_i$  коэффициенты, которые определяются при получении соответствующих формул.

Если  $\delta_i$  меняются как  $\delta_1 = 0^\circ$ ,  $\delta_2 = \frac{2\pi}{N}$ ,  $\delta_3 = \frac{3\pi}{N}$ , ...,  $\delta_n = 2\pi$ , то

$$\varphi(x, y) = \arctan \frac{\sum_{i=0}^{m-1} I_i \sin \delta_i}{\sum_{i=0}^{m-1} I_i \cos \delta_i} \quad (4)$$

Выражение (7) можно переписать в виде

$$\varphi(x, y) = \arctan \frac{\sum_{k=0}^{N-1} I_i \sin \left( 2\pi \frac{k}{N} \right)}{\sum_{i=0}^{N-1} I_i \cos \left( 2\pi \frac{k}{N} \right)} \quad (5)$$

Данное выражение совпадает с формулой вычисления фазы первой гармоники преобразования Фурье.

Угол фазового сдвига можно задавать с помощью модуляторов света, простейшим из которых является зеркало, закрепленное на пьезокерамике. Метод определения разности фаз при последовательном задании известного сдвига (*PSI – Phase Shift Interferometry*) впервые предложен в работе [3] и привлек внимание специалистов возможностью получения

измерительной информации в каждой точке интерференционной картины, не прибегая к анализу окрестности этой точки.

К сожалению, значения фазовых сдвигов задаются с некоторой ошибкой, измеряются значения интенсивности в каждой точке тоже с некоторой погрешностью. Это сказывается на погрешности при определении фазового сдвига.

### 1. ИСТОЧНИКИ ОСНОВНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗНОСТИ ФАЗ МЕТОДОМ ПОШАГОВОГО ФАЗОВОГО СДВИГА

Как видно из выражения (3), погрешность измерения фазы зависит от погрешности задания фазового сдвига и погрешности измерения интенсивности.

Дж. Швидер [4] получил выражение для погрешности определения фазы от абсолютной ошибки при установке сдвига при условии малости ошибок задания сдвига и измерения интенсивности

$$\Delta\phi \ll \phi_i \text{ и } \Delta I \ll I_i : \quad (6)$$

$$\Delta\phi = \arctg \frac{\sum_{i=1}^m \Delta\delta_i - C \cos 2\phi - S \sin 2\phi}{m - C \sin 2\phi - S \cos 2\phi}, \quad (7)$$

где  $C = \sum_{i=1}^m \Delta\phi_i \cos 2\delta_i$ ,  $S = \sum_{i=1}^m \Delta\phi_i \sin 2\delta_i$ .

В [5] Б.В. Карпюком получено выражение для погрешности определения фазы от суммарных ошибок при измерении интенсивности и установки сдвига при тех же условиях (4)

$$\Delta\phi \approx \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial\phi}{\partial\delta_i} \right| (\pm\Delta\delta_i) + \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial\phi}{\partial I_i} \right| (\pm\Delta I_i), \quad (8)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\delta_i} = \frac{I_i \cos \delta_i C_d + I_i \sin \delta_i S_d}{(C_d)^2 + (S_d)^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial I_i} = \frac{\sin \delta_i C_d - \cos \delta_i S_d}{(C_d)^2 + (S_d)^2} \quad (10)$$

где  $m$  - число фазовых сдвигов, а

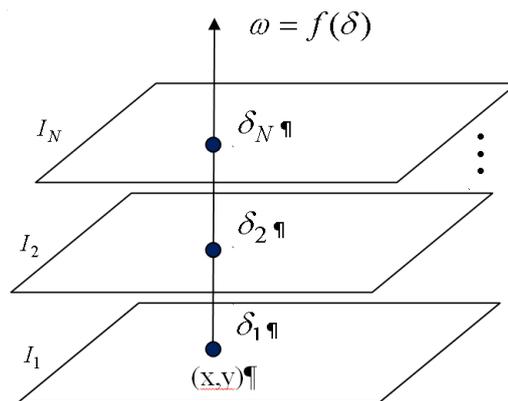
$$C_d = \sum_{i=1}^m \Delta I_i \cos \delta_i, \quad S_d = \sum_{i=1}^m \Delta I_i \sin \delta_i.$$

В реальных системах погрешность задания сдвига и измерения интенсивности может составлять 20%-30%. В этом случае условие (4) не выполняется.

### 2. АНАЛИЗ ФОРМУЛ РАСШИФРОВКИ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Спектральный анализ в радио- и электротехнике давно стал одним из основных методов анализа, в частности, использование Фурье преобразования является стандартным способом анализа и синтеза цифровых фильтров [6]. Спектральный анализ в теории алгоритмов пошагового фазового сдвига (PSI) впервые использован в 1990-х годах, и основан на работе *Freishlad* и *Koliopoulos* [7]. Применение спектрального анализа к синтезу алгоритма *PSI* можно также встретить в [8]. В 1996 году *Surrel* [9] разработан алгебраический подход к анализу алгоритмов, которые основан на так называемом характеристическом полиноме, связанным с фильтром квадратурных составляющих.

На *Рис. 1* показан способ формирования исследуемого сигнала. Сигнал формируется из последовательности отсчетов значений интенсивности  $I_i(x, y)$  (2) в точке  $(x, y)$  интерференционной картины при изменении фазового сдвига  $\delta_i$ .



*Рис. 1.* Способ формирования сигнала

Такой подход основан на представлении формулы расшифровки в виде цифрового фильтра с конечной импульсной характеристикой

$$\phi = \arctg \frac{I(n) * h_N(n)}{I(n) * h_D(n)}, \quad (11)$$

где  $*$  означает операцию свертки,  $h_N(n)$  и  $h_D(n)$  – импульсная характеристика синфазной и квадратурной составляющих, т.е. числителя и знаменателя в формуле (9).

Представим интерференционный сигнал в следующем виде

$$I_i(x, y, t) = I_0(x, y, t) [1 + V(x, y) \cos(\delta_i + \omega_0(x, y)t)], \quad (12)$$

здесь  $t$  – некоторое произвольное вещественное число, такое, что  $t \in R$ ,  $\omega_0$  – несущая пространственная частота в радианах.

Тогда уравнение расшифровки (9) примет вид

$$\phi = \arctg \left[ \frac{I_0^\perp \cos(\omega_0 t_0) + L + I_{n-1}^\perp \cos(\omega_0 t_{n-1}) + I_n^\perp \cos(\omega_0 t_n)}{I_0^\perp \sin(\omega_0 t_0) + L + I_{n-1}^\perp \sin(\omega_0 t_{n-1}) + I_n^\perp \sin(\omega_0 t_n)} \right] \quad (13)$$

Импульсная характеристика определяется коэффициентами числителя и знаменателя формулы (3) и с учетом соотношения

$$h(t - t_0) = e^{i\omega_0(t-t_0)} \sum_k c_k \delta(t - nT) = h(t) e^{-i\omega_0 t_0} \quad (14)$$

может быть записана в следующем виде

$$h_N(t) = [\delta(t - t_0) \cos(\omega_0 t_0) + \delta(t - t_1) \cos(\omega_0 t_1) + K + \delta(t - t_{n-1}) \cos(\omega_0 t_{n-1}) + \delta(t - t_n) \cos(\omega_0 t_n)] \quad (15)$$

$$h_D(t) = i [\delta(t - t_0) \sin(\omega_0 t_0) + \delta(t - t_1) \sin(\omega_0 t_1) + K + \delta(t - t_{n-1}) \sin(\omega_0 t_{n-1}) + \delta(t - t_n) \sin(\omega_0 t_n)] \quad (16)$$

или

$$h_N(t) = \sum_k \delta(t - t_k) c_k, \quad (17)$$

$$h_D(t) = i \sum_k \delta(t - t_k) s_k, \quad (18)$$

где  $C_k$  и  $S_k$  – соответствующие коэффициенты формулы (5),  $i$  – мнимая единица.

Отсюда

$$h(t) = h_N(t) + ih_D(t). \quad (19)$$

Импульсная и амплитудно-частотная передаточная характеристики связаны между собой преобразованием Фурье  $H(\omega) = \mathfrak{F}[h(t)]$ .

Поэтому можно записать

$$H_N(\omega) = c_0 e^{i(t-t_0)} + c_1 e^{i(t-t_1)} + K + c_{n-1} e^{i(t-t_{n-1})} + c_n e^{i(t-t_n)} \quad (20)$$

$$H_D(\omega) = i [s_0 e^{i(t-t_0)} + s_1 e^{i(t-t_1)} + K + s_{n-1} e^{i(t-t_{n-1})} + s_n e^{i(t-t_n)}] \quad (21)$$

или

$$H_N(\omega) = \sum_k c_k e^{i(\omega - \omega_k)} \quad (22)$$

$$H_D(\omega) = i \sum_k s_k e^{i(\omega - \omega_k)}. \quad (23)$$

Амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики можно получить из выражений (20) - (23)

$$|H(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(H(\omega))^2 + \text{Im}(H(\omega))^2} \quad (24)$$

$$\phi(\omega) = \text{tg} \frac{\text{Im}(H(\omega))}{\text{Re}(H(\omega))}. \quad (25)$$

### 3. ПОЛУЧЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ИЗВЕСТНЫХ ФОРМУЛ РАСШИФРОВКИ

Рассмотрим получение частотных характеристик для известных формул расшифровки [10-12].

Пусть имеется формула расшифровки с шестью фазовыми сдвигами

$$\delta_i = \left( 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right)^T. \quad \text{Тогда}$$

получим следующую формулу расшифровки

$$\text{tg} \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2I_0 + I_1 - I_2 - 2I_3 - I_4 + I_5}{I_1 + I_2 - I_4 - I_5}. \quad (26)$$

Для неё находится импульсная характеристика

$$h_N(t) = 2\delta(t - t_0) + \delta(t - t_1) - \delta(t - t_2) - 2\delta(t - t_3) - \delta(t - t_4) + \delta(t - t_5) \quad (27)$$

$$h_D(t) = 2\delta(t - t_0) + \delta(t - t_1) - \delta(t - t_2) - 2\delta(t - t_3) - \delta(t - t_4) + \delta(t - t_5), \quad (28)$$

и соответствующие ей квадратурные составляющие частотно амплитудной характеристики

$$H_N(\omega) = 2e^{i(\omega - \omega_0)} + e^{i(\omega - \omega_1)} - e^{i(\omega - \omega_2)} - 2e^{i(\omega - \omega_3)} - e^{i(\omega - \omega_4)} + e^{i(\omega - \omega_5)} \quad (29)$$

$$H_D(\omega) = i [e^{i(\omega - \omega_1)} + e^{i(\omega - \omega_2)} - e^{i(\omega - \omega_4)} - e^{i(\omega - \omega_5)}]. \quad (30)$$

На рис. 2 показан модуль амплитудно-частотной характеристики шеститочечной формулы расшифровки (26).

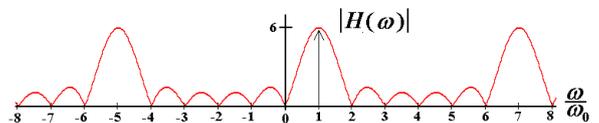


Рис. 2. АЧХ шеститочечной формулы расшифровки (24)

Из Рис. 2 следует, что данная формула расшифровки подавляет 2, 3, 4, 5 и 6 и кратные им гармоники.

Для пятиточечной формулы расшифровки Schwider-Narayanan с фазовыми сдвигами

$$\delta_i = \left( -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right)^T$$

$$\text{tg} \phi = \frac{2(I_1 - I_3)}{I_0 - 2I_2 + I_4}. \quad (31)$$

Для этой формулы

$$h_N(t) = 2[\delta(t-t_1) - \delta(t-t_3)], \quad (32)$$

$$h_D(t) = i[-\delta(t-t_0) + 2\delta(t-t_2) - \delta(t-t_4)] \quad (33)$$

и квадратурные составляющие частотно амплитудной характеристики

$$H_N(\omega) = 2[e^{i(\omega-\omega_1)} - e^{i(\omega-\omega_3)}] \quad (34)$$

$$H_D(\omega) = i[-e^{i(\omega-\omega_0)} + 2e^{i(\omega-\omega_2)} - e^{i(\omega-\omega_4)}] \quad (35)$$

На рис. 3 показан модуль частотной характеристики пятиточечного алгоритма.

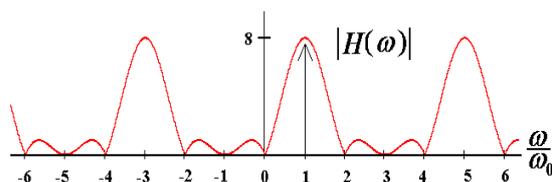


Рис. 3. АЧХ пятиточечной формулы расшифровки (22)

Из Рис. 3 следует, что данная формула расшифровки подавляет 2, 3, 4 и кратные им гармоники, в то же время хорошо выделяет первую гармонику.

Представляет интерес сравнение АЧХ различных формул расшифровки. На Рис. 4 показаны АЧХ пятиточечной [1] (кривая 1) и шеститочечной (кривая 2) формул расшифровки.

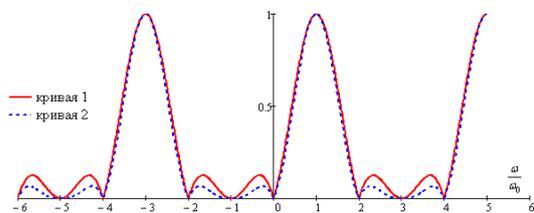


Рис. 4 – Сравнение АЧХ пятиточечной (кривая 1) и шеститочечной (кривая 2) формул расшифровки

Из Рис. 4 следует, что АЧХ шеститочечной формулы расшифровки имеет меньшую амплитуду боковых лепестков. Поэтому этот метод лучше подавляет шумы. Кроме того, чем уже лепесток для первой гармоники, тем ближе этот алгоритм к выделению правильного значения фазовой разности.

## ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен метод спектрального анализа формул расшифровки используемых в методе пошагового фазового сдвига. Известные методы анализа погрешности основаны на малости ошибок измерения интенсивности и задания фазовых сдвигов и не могут быть применены для реальных измерительных

систем. В то же время методы спектрального анализа показывают качество используемых алгоритмов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гужов В.И., Ильиных С.П. Оптические измерения. Компьютерная интерферометрия. - Москва: Изд-во Юрайт, 2018. (ISBN: 978-5-534-06855-9) - 258с.
- [2] Generic algorithm of phase reconstruction in phase-shifting interferometry /Guzhov V., Ilinykh S., Kuznetsov R., Haydukov D.// Optical Engineering, – 2013.-Vol.52(3) – pp. 030501-1 – 030501-2.
- [3] P. Carré, “Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures,” Metrologia 2, 13-23 (1966).
- [4] Schwider J., Burow R.,Elsner K.-E.,Grzanna J., Spolaczyc R.,Mezkel K. Digital wave-front measuring interferometry: some systematic error sources// Applied Optics.- 1983.- V.22.- No.21.- P.3421-3432.
- [5] Карпюк Б.В., Солодкин Ю.Н. Анализ погрешностей измерения фазы интерферометров с управляемым фазовым сдвигом // Автометрия.- 1992.-№6.-С.16-21
- [6] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga, “Spectral analysis of phase shifting algorithms,” Opt. Express 17(19), 16423–16428 (2009).Wyant J.C. Interferometric optical metrology: basic system and principles // Laser Focus.- 1982.- pp.65-67.
- [7] K. Freischlad, and C. L. Koliopoulos, “Fourier description of digital phase-measuring interferometry,” J. Opt. Soc. Am. A 7(4), 542–551 (1990).
- [8] D. W. Phillion, “General methods for generating phase-shifting interferometry algorithms,” Appl. Opt. 36(31), 8098–8115 (1997).
- [9] Y. Surrel, “Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping,” Appl. Opt. 35(1), 51–60 (1996).
- [10] Wyant J.C., Creath K. Recent advances in interferometric optical testing // Laser Focus.- 1985. - pp.118-132.
- [11] Wyant J.C. Interferometric optical metrology: basic system and principles // Laser Focus.- 1982.- pp.65-67.
- [12] D. Malacara, ed., Optical Shop Testing, 3rd ed. (John Wiley and Sons, New York, 2007).



**Владимир Иванович Гужов**  
- профессор кафедры ССОД Новосибирского Государственного Технического университета, профессор, доктор технических наук. Автор более 250 научных работ. Область научных интересов: высокоточные интерференционные измерения.  
E-mail: [vigguzhov@gmail.com](mailto:vigguzhov@gmail.com)



**Сергей Петрович Ильиных** - доцент кафедры Вычислительная техника Новосибирского Государственного Технического университета, кандидат технических наук, доцент. Является автором более 130 научных трудов. Область научных интересов: разработка алгоритмов анализа изображений в оптических измерительных системах.



**Григорий Александрович Поздняков** – аспирант кафедры систем сбора и обработки данных НГТУ. Является автором более 10 научных работ. Область научных интересов – компьютерные методы голографии.

Статья поступила 20 июля 2019 г.

## Bilinear Approximation to Increase the Size of a Numerical Sequence in Projection Methods

V.I. Guzhov, S.P. Ilyin, G.A. Pozdnyakov

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

*Abstract.* To evaluate the wavefront of interferograms in phase shift interferometry (PSI), decryption formulas based on phase shift algorithms (PSA) are often used. All PSAs use phase-shifted interferograms as input and calculate the phase of the interference fringes. The first and best-known PSA specifically designed to reduce the source of bias was the 5-point Shveder-Hariharan PSA (SH-PSA). Since then, dozens of PSAs have been published, designed to reduce specific sources of error in phase determination. In electrical engineering, the Fourier function of frequency conversion (FT) in the design of linear filters is their standard design tool. Recently, FT is also used to develop PSA. In this article, we consider a method for determining spectral characteristics from the numerator and denominator of the PSA. The frequency response for decoding formulas with a different number of points is given.

*Key words:* phase shift, decoding formula, spectral analysis, amplitude-frequency characteristic..

### REFERENCES

- [1] Guzhov V.I., Ilyin S.P. Opticheskie izmereniya. Komp'yuternaya interferometriya. - Moskva: Izd-vo YUrajt, 2018. (ISBN: 978-5-534-06855-9) - 258s.
- [2] Generic algorithm of phase reconstruction in phase-shifting interferometry /Guzhov V., Ilyin S., Kuznetsov R., Haydukov D.// Optical Engineering, – 2013.-Vol.52(3) – pp. 030501-1 – 030501-2.
- [3] P. Carré, “Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures,” Metrologia 2, 13-23 (1966).
- [4] Schwider J., Burow R., Elsner K.-E., Grzanna J., Spolaczyc R., Mezkel K. Digital wave-front measuring interferometry: some systematic error sources// Applied Optics.- 1983.- V.22.- No.21.- P.3421-3432.
- [5] Guzhov V.I. Metody izmereniya 3D profilja obektov. Kontaknyye, trianguljacionnyye sistemy i metody strukturirovannogo osveshhenija.- Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2015. — 82s..
- [6] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga, “Spectral analysis of phase shifting algorithms,” Opt. Express 17(19), 16423–16428 (2009). Wyant J.C. Interferometric optical metrology: basic system and principles // Laser Focus.- 1982.- pp.65-67.
- [7] K. Freischlad, and C. L. Koliopoulos, “Fourier description of digital phase-measuring interferometry,” J. Opt. Soc. Am. A 7(4), 542–551 (1990).
- [8] D. W. Phillion, “General methods for generating phase-shifting interferometry algorithms,” Appl. Opt. 36(31), 8098–8115 (1997).
- [9] Y. Surrel, “Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping,” Appl. Opt. 35(1), 51–60 (1996).
- [10] Wyant J.C., Creath K. Recent advances in interferometric optical testing // Laser Focus.- 1985. - pp.118-132.
- [11] Wyant J.C. Interferometric optical metrology: basic system and principles // Laser Focus.- 1982.- pp.65-67.
- [12] D. Malacara, ed., Optical Shop Testing, 3rd ed. (John Wiley and Sons, New York, 2007).



**Vladimir Guzhov** - Professor, Department of Special Purpose Traffic Control, Novosibirsk State Technical University, Professor, Doctor of Technical Sciences. The author of more than 250 scientific papers. Research interests: high-precision interference measurements. E-mail: [vigguzhov@gmail.com](mailto:vigguzhov@gmail.com) Novosibirsk, Prosp. of K. Marksa, h.20, NSTU.



**Sergey Petrovich Ilyinykh** - Associate Professor, Department of Computer Engineering, Novosibirsk State Technical University, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. He is the author of more than 130 scientific papers. Research interests: development of image analysis algorithms in optical measuring systems. Novosibirsk, Prosp. of K. Marksa, h.20, NSTU.



**Grigory Aleksandrovich Pozdnyakov** - graduate student of the Department of Data Acquisition and Processing Systems, NSTU. He is the author of more than 10 scientific papers. The area of scientific interests is computer methods of holography. Novosibirsk, Prosp. of K. Marksa, h.20, NSTU.

The paper has been received on 20/07/2019.