

**2018 14TH INTERNATIONAL SCIENTIFIC-
TECHNICAL CONFERENCE ON ACTUAL
PROBLEMS OF ELECTRONIC INSTRUMENT
ENGINEERING (APEIE) – 44894
PROCEEDINGS**

APEIE – 2018

In 8 Volumes

Volume 3

Novosibirsk

2018

**ТРУДЫ XIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-
ТЕХНИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ**

АПЭП – 2018

В 8 томах

Том 3

Новосибирск

2018

Расширение динамического диапазона в фазосдвигающей интерферометрии

Владимир И. Гужов, Сергей П. Ильиных, Илья О. Марченко
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

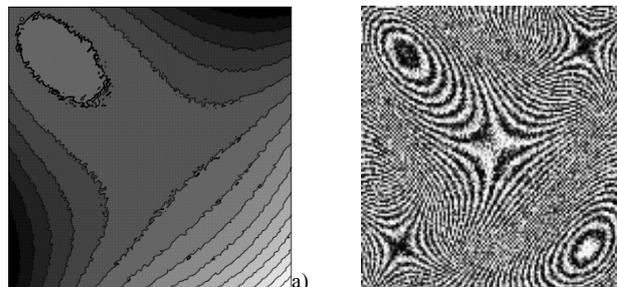
Аннотация – В статье рассмотрен новый метод измерения волновых фронтов с большой кривизной. Метод основан на анализе траектории интерференционных сигналов (многомерных фигур Лиссажу), образованных значениями интенсивности различных точек серии интерферограмм, полученных методом пошагового фазового сдвига. Увеличение динамического диапазона производится путем формирования разностных фаз, аналогично методам сдвиговой интерферометрии и решению системы уравнений эквивалентной системе уравнений, которая получается при решении уравнения Пуассона и граничных условиях Дирихле. В отличие от классических методов пошагового фазового сдвига в предлагаемом методе не требуется определения фактических значений фазовых сдвигов, что позволяет повысить точность измерений и существенно расширить область применения данного метода измерений. Выполнена проверка метода путем измерения волнового фронта, имеющего высоту гораздо больше, чем длина волны лазерного излучения.

Ключевые слова – фазовый сдвиг, фигуры Лиссажу, траекторный анализ.

I. ВВЕДЕНИЕ

КЛАССИЧЕСКИЕ методы интерферометрии предусматривают сравнение двух волновых фронтов, один из которых является эталонным. Как правило, эталонный фронт представляет собой плоскую или сферическую волну. В случае сложного профиля рельефа смещение волнового фронта в смежных точках интерференционной картины превышает длину волны источника излучения и не может быть измерено однозначно. На рис. 1 показано распределение интенсивности в интерферограмме (рис. 1б) полученной с плоским опорным волновым фронтом и объектным волновым фронтом с большой кривизной (рис. 1а).

Здесь отчетливо видно, что значительная часть интерференционных полос пространственно не разрешается т.к. приращение фазы между соседними точками сенсорного устройства больше π , т.е. оптическая разность хода превышает длину волны лазерного излучения. Для расширения динамического диапазона применяются следующие подходы: сдвиговая интерферометрия [1] и метод эквивалентной длины волны [2]. Недостатками этих подходов является значительное усложнение оптической схемы интерферометра.



Исходная форма волнового фронта

б) Интерферограмма с плоским опорным фронтом

Рис. 1. Эффект пространственной дискретизации поля яркости интерферограммы зарегистрированной с плоским волновым опорным фронтом при большой кривизне объектного волнового фронта.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью данной работы является разработка метода анализа интерферограмм с пошаговым фазовым сдвигом, имеющим большой динамический диапазон изменения фазы и не требующего явного определения величины вносимых фазовых сдвигов. Сущность метода заключается в формировании разности фаз φ_{ij} между смежными точками интерферограммы, аналогично получаемых в методе сдвиговой интерферометрии [3]

$$r_{ij} = \varphi_{ij} - \varphi_{i-1,j} + e_{ij}, \quad c_{ij} = \varphi_{ij} - \varphi_{i,j-1} + h_{ij}, \quad (1)$$

здесь e_{ij} и h_{ij} шумовая составляющая интерференционного сигнала.

III. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Уравнение интенсивностей в каждой точке интерферограммы при различных величинах вносимых фазовых сдвигах можно представить в виде [4]:

$$I_i(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \delta_i] \quad (2)$$

где $a(x, y)$ - средняя яркость, $b(x, y)$ - амплитуда интерференционных полос.

Можно сделать допущение, что в смежных точках (x, y) вносятся одинаковые фазовые сдвиги δ_i . Это предположение выполняется в большинстве случаев исходя из физических условий проведения

эксперимента. Тогда мы можем получить добавочные уравнения, рассматривая решения не в одной, а в нескольких пространственных точках (x_k, y_k) интерферограммы

$$I_i(x_k, y_k) = a(x_k, y_k) + b(x_k, y_k) \cos[\phi(x_k, y_k) + \delta_i]. \quad (3)$$

или в векторном виде

$$\vec{x}_i = \vec{x}_0 + \vec{b} \cos(\phi_i + \vec{\delta}), \quad (4)$$

где $i=0, 1 \dots N$, N – число точек, $\vec{\delta}$ – вектор фазовых сдвигов.

В системе уравнений (4) переменные \vec{x}_i можно рассматривать как координаты точек на комплексной плоскости.

Отметим, что любая точка на комплексной плоскости, удовлетворяющая системе уравнений (3) принадлежит некоторой пространственной кривой. Так, например, для 2D-плоскости это эллипс хорошо известный, как фигура Лиссажу (сложение двух синусоидальных волн одинаковой частоты) [5].

Уравнение эллипса, соответствующее системе уравнений (4) для 2D-плоскости имеет вид

$$\frac{(x_1 - (x_0)_1)^2}{b_1^2} + \frac{(x_2 - (x_0)_2)^2}{b_2^2} - 2 \frac{(x_1 - (x_0)_1)(x_2 - (x_0)_2)}{b_1 b_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1) \quad (5)$$

Из (5) можно определить разность фазы между смежными точками $\phi_{ij} = \phi_2 - \phi_1$ [6].

В общем случае имеем уравнение плоского гиперэллипса образованного пересечением гиперэллипсоида (6а) и гиперплоскости (6б)

$$\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \quad (6а)$$

$$B \vec{x} = 0, \quad (6б)$$

где A и B - матрица коэффициентов гиперэллипса и вектор коэффициентов гиперплоскости соответственно.

Необходимо получить оценку ϕ_{ij} в каждой точке по зашумленным фазовым разностям. Задача переопределена (т.е. уравнений значительно больше, чем переменных), поэтому используем метод наименьших квадратов (МНК) для нахождения оценок фаз

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [(r_{ij} - \phi_{ij} + \phi_{i-1,j})^2 + (c_{ij} - \phi_{ij} + \phi_{i,j-1})^2]. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по ϕ_{ij} и приравнявая результаты нулю, получим следующую систему уравнений:

$$4\phi_{ij} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1} = r_{ij} - r_{i+1,j} + c_{ij} - c_{i,j+1}, \quad (8)$$

где $2 \leq i \leq M-1$; $2 \leq j \leq N-1$.

Зональный подход заключается в регистрации фазовых разностей в точках согласно геометрии разбиения сенсорного устройства. Затем по МНК определяется соответствующая система нормальных уравнений относительно неизвестных значений фаз, которая решается тем или иным способом. До последнего времени данный подход использовался редко. Это было вызвано высокой трудоемкостью и низкой точностью при решении системы нормальных уравнений большой размерности.

В работе [7] показано, что при зональном оценивании изображения размерностью $N \times N$ система нормальных уравнений по своему виду совпадает с системой матричных уравнений:

$$A\Phi = V, \quad (9)$$

где A – теплицева (симметрическая с одинаковыми диагональными элементами) блочно-диагональная матрица размерностью $N^2 \times N^2$ вида

$$A \approx \begin{bmatrix} A_0 & -I & & & 0 \\ -I & A_0 & -I & & \\ & -I & A_0 & -I & \\ \dots & & -I & A_0 & -I \\ 0 & & & -I & A_0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ \dots & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

I – единичная матрица размера $N \times N$, Φ - вектор столбец $N^2 \times 1$ искомого распределения фазы; V - вектор-столбец $N^2 \times 1$ формируемый из значений разностей фаз в соответствии с системой уравнений (2).

Такая система уравнений эквивалентна системе уравнений, которая получается при решении уравнения Пуассона и граничных условиях Дирихле

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad (11)$$

на прямоугольной сетке при использовании стандартной пятиточечной конечно-разностной аппроксимации [7]. Известные эффективные прямые алгоритмы решения

уравнения Пуассона (11), например, основанные на быстром преобразовании Фурье, требуют периодического продолжения поля разностей фаз, что существенно сужает область их практического применения, позволяя измерять только сравнительно простые симметричные волновые фронты. Однако для аperiodического случая имеют место существенные отличия в граничных точках и тогда матрица (10) системы уравнений (9) принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & -I & & & 0 \\ -I & A_1 & -I & & \\ & -I & A_1 & -I & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -I & A_1 & -I \\ 0 & & & -I & A_0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \\ & -1 & 3 & -1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица A , в этом случае, не является теплоциевой и рассмотренный выше быстрый алгоритм решения неприменим.

При небольшом числе уравнений $N < 10$ для решения (12) можно воспользоваться известным методом матричной прогонки [8]. Однако в практических интерференционных измерительных системах в качестве устройств ввода используются фотоприемники, имеющие 1024×1024 и более элементов разрешения. Метод матричной прогонки требует хранения в памяти N векторов размера N и N матриц размера $N \times N$ что предъявляет слишком высокие требования к оперативной памяти даже для современной вычислительной техники

Авторами предложен быстрый алгоритм для случая, когда матрица A имеет различные элементы на главной диагонали. Систему уравнений (9) можно факторизовать, если найдется преобразование такое, что

$$UAU^T = \Lambda, \quad (13)$$

где U - матрица преобразования, Λ - клеточная диагональная матрица. Из теории матричных вычислений [8] известно, что, если U - матрица, составлена из собственных векторов U_i матрицы A , а λ_i ее собственные числа, то Λ - диагональная матрица, элементы которой есть собственные числа λ_i

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Тогда матрица (4) примет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & -I & & & 0 \\ -I & \Lambda_1 & -I & & \\ & -I & \Lambda_1 & -I & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -I & \Lambda_1 & -I \\ 0 & & & -I & \Lambda_0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Путем перестановки столбцов и строк матрица A и элементов вектора V приводится к трехдиагональному виду с плотным расположением диагоналей. При этом система уравнений (3) принимает вид

$$UAU^T \Phi = (UV)^T. \quad (16)$$

Собственные значения λ_0, λ_1 блочных матриц A_0 и A_1 находятся как

$$\lambda_{1k} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cdot \left[4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \right], \quad k \in [0, N-1], \quad (17)$$

$$\lambda_{0k} = \lambda_{1k} - 1.$$

Собственные векторы U получаем путем решения системы уравнений

$$A_1 U = \lambda_{1k} A, \quad (18)$$

с их последующей нормировкой. Отметим, что собственные вектора U одни и те же для A_0 и A_1 .

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проверки предлагаемого алгоритма были зарегистрированы пять интерферограмм со случайными фазовыми сдвигами, аналогичных показанным на рис. 1. На рис. 2 показаны результаты расчета фазы, по предлагаемому алгоритму. Из полученных результатов следует, что предлагаемый подход позволяет измерять разность фаз значительно превосходящую период интерференционных полос.

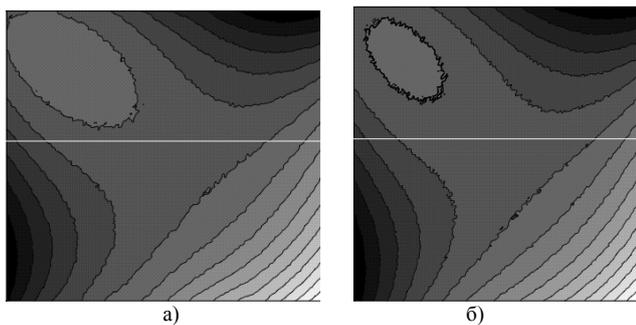


Рис. 2. Исходный волновой фронт. а) восстановленный по сдвиговым интерферограммам волновой фронт б)

IV. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен новый способ измерения волновых фронтов с большой кривизной. Способ основан на решении уравнения Пуассона при граничных условиях Дирихле. Разность фаз в смежных точках интерферограммы вычисляется по коэффициентам траектории интерференционных сигналов (гиперэллипс), образуемых вносимыми фазовыми сдвигами. Предлагаемый подход не требует определения вносимых фазовых сдвигов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Mancilla-Escobar, Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Hernández, Two dimensional wavefront retrieval using lateral shearing interferometry, *Optics Communications*, Volume 416, 2018, pp. 100-107.
- [2] Wang, G. et al. Absolute positioning by multi-wavelength interferometry referenced to the frequency comb of a femtosecond laser. *Optics Express* 23, 9121–9129 (2015).
- [3] Malacara, D. *Interferogram analysis for optical testing* / D. Malacara, M. Servin, Z. Malacara – New York: Taylor & Francis, 2005. –546 p.
- [4] Generic algorithm of phase reconstruction in phase-shifting interferometry /Guzhov V., Il'nykh S., Kuznetsov R., Haydukov D.// *Optical Engineering*, – 2013.-Vol.52(3) – pp. 030501-1 – 030501-2..
- [5] Al-Khazali, Hisham A. H.; Askari, Mohamad R. (May 2012). "Geometrical and Graphical Representations Analysis of Lissajous Figure in Rotor Dynamic System" *IOSR Journal of Engineering*. 2 (5): 971–978.
- [6] V. I. Guzhov, S.P. Il'nykh, I.A. Saghin, E.N. Denegkin, E.S. Kabak, D.S. Khaidukov/ Quaziheterodyne Method of Interference Measurements // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*.- 2015, Volume 51, Issue 3, pp 1-7.
- [7] Dorr F W (1970) The direct solution of the discrete Poisson equation on a rectangle *SIAM Rev.* 12 248–63.
- [8] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.



Владимир Гужов – профессор кафедры ССОД факультета Автоматики и вычислительной техники в Новосибирского Государственного Технического университета, профессор, доктор технических наук. Он является автором более 200 научных работ. Область научных интересов: программные системы, высокоточные измерения.



Сергей Ильиных – доцент кафедры Вычислительная техника Новосибирского Государственного Технического университета, кандидат технических наук, доцент. Он является автором более 130 научных трудов, в том числе 1 учебник НГТУ и 4 патентов. Область научных интересов: разработка алгоритмов анализа изображений в оптических измерительных системах.



Илья Марченко – доцент кафедры ССОД Новосибирского Государственного Технического университета, кандидат технических наук, доцент. Он является автором более 30 научных трудов. Область научных интересов: интеллектуальные датчики.